Fábio Lima França

Considerações e apresentação de Construções geométricas

Vitória da Conquista/Bahia

17 de Julho de 2018

Fábio Lima França

Considerações e apresentação de Construções geométricas

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Orientador: André Nagamine

Vitória da Conquista/Bahia

17 de Julho de 2018

F881c França, Fábio Lima.
Considerações e apresentação de construções geométricas. / Fábio Lima França, 2018.
69f. il.
Orientador (a): Dr. André Negamine.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2018.
Inclui referências. 69 - 69.
1. Construções geométricas. 2. Desenho geométrico – Estudo e ensino. 3. Construções geométricas – Problemas milenares. 4. Educação Brasileira. I. Negamine, André. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Fábio Lima França

Considerações e apresentação de Construções geométricas

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

Trabalho aprovado. Vitória da Conquista/Bahia,Julho de 2018:

Prof. Dr. André Nagamine
PROFMAT/UESB
Orientador

Júlio César dos Reis

Prof. Dr. Júlio César dos Reis -
PROFMAT/UESB

Polyane Alves Santos

Prof.ª Dra. Polyane Alves Santos
- IFBA

Vitória da Conquista/Bahia
17 de Julho de 2018

Este trabalho é dedicado a todos aqueles que veem a educação como um caminho para melhorar o mundo.

Agradecimentos

Grato primeiramente ao Senhor, nosso pai maior, por permitir tantas maravilhas em minha vida.

Uma conquista não se resume em momento ou se restringe a pessoas, pois tudo em nossa vida está relacionado com todo o nosso passado e influenciará em todo o nosso futuro. Mas os momentos são marcados principalmente por personagens, e esse momento em minha vida tem vários personagens.

Agradeço a minha mãe Neuma e à memória de meu pai Helvécio, pessoas que sempre me orientaram a buscar e semear o bem e incentivaram em busca do conhecimento.

Agradeço a minha esposa Elane, a seus pais Valdívio e Ednalva, que são como pais para mim e aos meus filhos Guilherme e Eduarda, que de forma natural já são estímulos, grato ainda pela paciência e compreensão pelos momentos de ausência em detrimento do estudo.

Agradeço aos meus irmãos por estarem sempre comigo, incentivando sempre.

Agradeço aos amigos, em especial a Jandresson e Edwaldo por companhias em estudos e em vários processos de seleção e por orientações, e a Ebenilson e toda a sua família pela amizade fiel, verdadeira e pelos momentos que estiveram presentes, comemorando com os meus , todas as etapas desta conquista.

Aos colegas de curso, em especial a companheira de estudo Fábia Valéria.

Aos professores do PROFMAT-UESB, em especial ao professor André Nagamine que me orientou na elaboração deste trabalho.

Agradeço a CAPES por proporcionar a bolsa, a qual foi de grande ajuda na manutenção durante todo o período de estudo.

“Quem espera que a vida
Seja feita de ilusão
Pode até ficar maluco
Ou morrer na solidão
É preciso ter cuidado
Pra mais tarde não sofrer
É preciso saber viver
Toda pedra do caminho
Você pode retirar
Numa flor que tem espinho
Você pode se arranhar
Se o bem e o mal existem
Você pode escolher
É preciso saber viver.
(Erasmo Carlos, Roberto Carlos Braga)

Resumo

Este trabalho tem como finalidade ressaltar a importância de estudar as construções geométricas, bem como, apresentar algumas construções de entes geométricos e orientar no processo para construções das mesmas. Antes de apresentar as construções, é feita uma abordagem do início da história das construções geométricas e alguns problemas milenares que intrigaram e fascinaram gerações, bem como, é apresentada um pouco da história dos estudos relacionados a construções geométricas na educação brasileira, relatando a trajetória de como iniciou esse estudo até a situação de esquecimento, vivenciada nas últimas décadas. Além disso, o texto traz uma base teórica sobre a importância do estudo relacionado as construções geométricas no processo de ensino aprendizagem e algumas deficiências que a falta desse estudo pode ocasionar ao estudante que não a tem ao seu alcance. Por fim são apresentadas as principais construções geométricas, o passo a passo escrito de como construí-las, bem como, figuras que foram construidas no programa Geogebra, onde podem ser visualizadas todo o processo de construção por meio do arquivo PDF da dissertação, de maneira que o leitor pode ter o controle automático ou manual da reprodução das imagens relacionada a cada construção por meios de comandos localizados abaixo da imagem de cada construção. As construções também vêm acompanhadas das demonstrações com base em elementos da Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: construções geométricas. ensino aprendizagem. problemas milenares. educação brasileira.

Abstract

This work aims to emphasize the importance of studying the geometric constructions, as well as to present some constructions of geometric entities and guide in the process for their constructions. Before presenting the constructions, an approach is made to the beginning of the history of the geometric constructions and some millenarian problems that intrigued and fascinated generations, as well as, it is presented a little of the history of the studies related to geometric constructions in the Brazilian education, reporting the trajectory of as it began this study until the situation of forgetfulness, experienced in the last decades. In addition, the text provides a theoretical basis on the importance of the study related to geometric constructions in the process of teaching learning and some deficiencies that the lack of this study can cause the student who does not have it. Finally, the main geometric constructions are presented, the step-by-step written on how to construct them, as well as figures that were built in the Geogebra program, where the entire construction process can be visualized through the PDF file of the dissertation, in a that the reader can have automatic or manual playback control of images related to each construction by means of commands located below the image of each construction. The constructions are also accompanied by demonstrations based on elements of Euclidean geometry.

Keywords: geometric constructions. teaching learning. millenarian problems. Brazilian education.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FTD	Editora na qual as siglas significam Frère Théophane Durand
IFBA	Instituto Federal da Bahia

Sumário

Introdução

Desde quando ainda era um estudante da educação básica, já tinha uma admiração pela matemática, em especial a geometria, no entanto, quando estudante deste nível de educação quase nada aprendi, pois o pouco que era ensinado sobre a geometria quase nada foi visto sobre construções geométricas. Por conta dessa admiração é que ao concluir o ensino médio em 2005, prestei o vestibular para Licenciatura em Matemática pela UESB(Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia), ao qual fui contemplado com uma vaga no curso para turma de 2006.

Em 2008 fui convidado a trabalhar na rede municipal de Barra do Choça, em uma escola de ensino fundamental denominada Emiliano Zapata, situada na zona rural da cidade, onde iniciei a prática docente cheio de disposição e muita expectativa. Logo nos primeiros dias na profissão percebi que os desafios encontrados eram bem maiores que os esperados, pois as dificuldades no processo de ensino aprendizagem eram muitos e relacionados a diversas origens. Sempre busquei trabalhar de maneira onde o processo de ensino aprendizagem fosse prazeroso, principalmente por parte dos estudantes, e via nos instrumentos de desenho geométrico uma ferramenta de apoio para isso, pois percebia que o uso dessa ferramenta, além de tornar as aulas de geometria diferenciadas, poderiam ajudar na redução do déficit de aprendizagem. Percebi que, quando comecei a trabalhar com construções geométricas durante a minha licenciatura muitas relações que eu tinha dificuldades em entender ficaram bem claras para mim, e ainda, durante o processo de construção algumas relações são descobertas pelo próprio estudante, pois foi isso que aconteceu comigo quando comecei a fazer construções e também com alguns estudantes que trabalhei.

Em agosto de 2010 concluir o curso e em 2012 comecei a trabalhar na rede estadual com o ensino médio também na cidade de Barra do Choça, e pude perceber que nesta etapa da educação básica a realidade em termos de desafios não seria diferente, pois as dificuldades também eram várias. Além disso, o déficit de conhecimento geométrico também era na época e continua sendo muito grande, pois muitos chegam ao ensino médio sem conhecimento em geometria e sem saber manusear os instrumentos para as construções geométricas.

Buscando aprimorar e aprofundar o conhecimento afim de obter melhores resultados no processo de ensino aprendizagem, bem como em buscas de novos desafios, em 2015 ingressei no PROFMAT(Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na UESB.

Sempre busquei aplicar os conteúdos matemáticos a situações de cotidiano dos estudantes e, como já dito, de utilizar os diversos instrumentos disponíveis nas aulas de geometria, entendendo que esses recursos são fatores que melhoram consideravelmente o nível de aprendizado dos estudantes. Porém, por todos esses anos como professor, sempre observei as inúmeras dificuldades por parte dos estudantes, principalmente em identificar relações simples em figuras geométricas notáveis bem como em construir figuras descritas em questões, onde muitas dessas construções são consideradas de fácil nível de dificuldade. Então me perguntava se a falta do manejo com construções geométricas poderiam ser as raízes dessa deficiência. Pois , atualmente a disciplina de construções geométricas já não faz parte de nossa grade curricular como disciplina obrigatória e as construções já não fazem parte da grade de geometria quando trabalhada e, com isso, praticamente já não é estudada nas escolas, representando uma grande perda, pois, além de ser um conhecimento que aparece nos registros oficiais desde o período grego é também uma ferramenta de extrema importância para o desenvolvimento da mente humana.

Nos dias atuais temos ao alcance muitas construções, algumas são básicas e são facilmente encontradas nos arquivos sobre o tema, porém outras construções não são tão fáceis de serem encontradas, e muitas vezes não estão organizadas em uma única obra.

Com a ideia de escrever sobre a importância do desenho geométrico no processo de ensino aprendizagem, de explorar e divulgar o uso de tecnologias na educação pela maneira da apresentação do passo a passo disponível em PDF e do uso do software Geogebra, que simula a utilização da régua e compasso, bem como de apresentar um banco de construções geométricas, que surgiram os seguintes questionamentos:

Como podemos fazer uso dos recursos computacionais ao se trabalhar com construções geométricas? É possível, fazendo uso desses recursos, elaborar um conjunto de construções geométricas que motive e auxilie tanto professores quanto estudantes no processo de ensino aprendizagem?

Por tudo que foi dito, consideramos como objetivo geral dessa dissertação, mostrar a importância da prática das construções geométricas bem como apresentar diversas construções com régua e compasso, por meio do software GeoGebra, afim de facilitar a pesquisa e estudo de estudantes em diversos graus de instrução bem como divulgar a construção com régua e compasso como ferramenta de ensino aprendizagem.

E como objetivos específicos, podemos destacar: despertar o pensamento sobre a importância de trabalhar as construções geométricas; desenvolver ou melhorar o interesse pela geometria; auxiliar professores e estudantes nas construções geométricas.

Na continuidade do trabalho, teremos no capítulo 1 uma abordagem histórica relatando alguns problemas geométricos clássicos na Grécia antiga e uma abordagem sobre o ensino aprendizagem das construções geométricas na educação brasileira. No capítulo 2 apresentamos um embasamento teórico sobre a importância do estudo relacionado a construções geométricas e relatamos alguns trabalhos relacionados ao tema. Já no capítulo 3 é apresentada a metodologia da pesquisa. Logo em seguida, no capítulo 4, é apresentado um conjunto de construções intituladas de construções básicas, por servir como base para construções mais complexas. No capítulo 5 é apresentado um conjunto de construções intituladas de construções específicas, são construções mais trabalhosas e que requer mais atenção que as do capítulo 4. Finalizamos a dissertação apresentando no capítulo 6 as considerações sobre o trabalho realizado.

1 Abordagem histórica sobre Construções geométricas

Afim de contextualizar o assunto de construções geométricas no ponto de vista histórico, trazemos neste capítulo, algumas considerações. A primeira delas se refere aos problemas clássicos de construções na antiguidade e, em seguida, um apanhado histórico de como se deu o desenvolvimento do "desenho geométrico"no Brasil.

1.1 Os três problemas clássicos da geometria grega e as lunas de Hipócrates

Os três problemas clássicos da geometria grega.

A segunda metade do quinto século antes de Cristo é denominado por Boyer (1974) na obra “História da Matemática” por “Idade Heróica da Matemática”, devido ao motivo que muitas pessoas com poucos recursos dedicavam a problemas de significado matemático. Anaxágoras (500 a.c. -428 a.c.)partiu da Jônia para Atenas, onde foi preso por impiedade, por assegurar que o sol não era uma divindade, mas uma grande pedra incandescente, grande como todo o Peloponeso, e que a Lua era uma terra habitada, que emprestava do sol a sua luz. Anaxágoras não era um estudioso matemático, mas Plutarco (46 d.c. - 120 d.c) conta que, enquanto Anaxágoras esteve preso, ocupou-se com o seguinte problema:*tentativa de quadrar o círculo*. Péricles, (495/492 a.c.-429 a.c.) aluno de Anaxágoras, conseguiu fazer com que seu mentor fosse libertado da prisão . Anaxágoras faleceu em 428 A.C.. Esse problema iria fascinar matemáticos por mais de 2000 mil anos. Não há outros detalhes quanto a natureza do problema ou as regras que o condicionam. Mais tarde ficou entendido que o quadrado procurado de área exatamente igual à do círculo, deveria ser construído apenas com régua e compasso.

Por volta do ano 429 A.C., uma peste matou cerca de um quarto da população de Atenas, e que a profunda impressão criada por esta catástrofe talvez tenha originado um segundo problema matemático famoso. Diz-se que uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos, para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado. Os atenienses, ao que se diz, obedientemente dobraram as dimensões do altar, mas isto não adiantou para afastar a peste. É claro, o altar tivera seu volume multiplicado por oito e não por dois.

Essa, diz a lenda, era a origem do problema da “duplicação do cubo”, que a partir dai foi geralmente designado como “problema deliano”: *dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro.*

Mais ou menos na mesma época do segundo problema, circulava em Atenas um terceiro problema célebre: *dado um ângulo arbitrário, construir por meio de régua e compasso apenas, um ângulo igual a um terço do ângulo dado.*
Por séculos esses três problemas intrigaram matemáticos e amantes dessa ciência, mais tarde ficou provado que esses problemas eram impossíveis de serem resolvidos com uso de régua e compasso. Para ler mais sobre impossibilidades de construções de figuras geométricas ver Lima (2015)

As lunas de Hipócrates de Chios.

Hipócrates de Chios(470 a.C. — 410 a.C), aproximadamente em 430 A.C.,deixou sua terra natal da mesma região que Anaxágoras, e foi para Atenas, na qualidade de mercador. Contam que perdeu tudo que tinha por fraude, outros dizem que foi atacado por piratas. Mas ele considerava isso como sua sorte, pois, em consequência ele se voltou para o estudo da geometria. Proclus(470 a.C. — 410 a.C) escreveu que Hipócrates compôs uma obra titulada de *Elementos da geometria*, antecipando-se em mais de um século a mais conhecida *Os elementos de Euclides*. No entanto, o texto de Hipócrates se perdeu. Mas temos um fragmento referente a Hipócrates que Simplicio (viveu por volta de 520 a.C) diz ter copiado literalmente da História da matemática de Eudemo(370 a.C. — ca. 300 a.C). Essa menção descreve parte da obra de Hipócrates que trata da quadratura da região limitada por dois arcos circulares de raios diferentes,essa região é chamada de luna. Esse problema certamente se originou do problema da quadratura do círculo. O fragmento atribui ainda a Hipócrates o teorema a seguir: *Segmentos de círculo semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.* A partir do teorema, Hipócrates deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea, da história da matemática que se tem registro.
Para a quadratura, ele começou com um semicírculo circunscrito a um triângulo isósceles retângulo e sobre a base construiu um segmento semelhante aos segmentos circulares sobre os lados do triângulo. Como os segmentos estão entre si como os quadrados de suas bases, resulta, usando o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, que a soma dos dois segmentos circulares menores é igual ao segmento maior. Portanto, a diferença entre o semicírculo sobre AC e a região limitada pelo segmento AC e a linha ADC é igual ao triângulo ABC. Logo a luna ABCD é exatamente igual ao triângulo ABC; como o triângulo ABC é igual ao quadrado sobre a metade de AC, conseguiu-se a quadratura da luna.

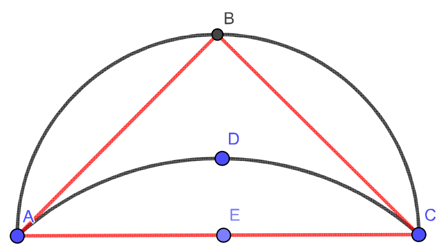

Figura 1 – lunas de Hipócrates

1.2 Um pouco da história do desenho geométrico no Brasil

A introdução do ensino de construções geométricas no Brasil, segundo Zuin (2001), aconteceu não com cunho pedagógico e sim militar. Devido à uma preocupação de Portugal, em proteger suas terras de uma possível guerra contra a Espanha, no fim do século XVII, quando o Brasil ainda era colônia de Portugal, que deu início as primeiras iniciativas de um ensino de ciências, especialmente de matemática e desenho, visando formar pessoal capacitado para trabalhar com fortificações militares. Sendo que nas primeiras décadas do século XVIII, o ensino do desenho geométrico tornou-se obrigatório para os oficiais militares. Mas, mesmo com enfoque militar, a introdução aos estudos do desenho geométrico foi um marco inicial e de extrema importância, pois abriu caminhos para a apresentação dessa ciência na educação básica. Em 1808, a corte de D. João VI mudou-se para o Brasil, de acordo com Nascimento (1994) esse acontecimento foi um evento com grandes implicações políticas, econômicas e culturais. A transferência da família real atraiu muitos olhares, muitos profissionais também migraram para a colônia, e esse fato ocasionou mudanças no sistema educacional, gerando várias necessidades, entre elas a de estabelecer as profissões técnicas e científicas, e essas necessidades fez com que fossem criados cursos de desenho no país. Em 1816 chega ao Rio de Janeiro a Missão Francesa com a função de organizar e criar a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios no Brasil, nos moldes da educação francesa. Porém os moldes da educação francesa utilizava o desenho geométrico mais com característica artística, diferente da linha que era trabalhada no Brasil até então, pelas escolas militares, onde a finalidade era basicamente militar Zuin (2001).

Com a revolução francesa e o início da revolução industrial acontecendo na Europa, no século XVIII, o desenho geométrico ganha uma atenção notável, passando a ser considerado um saber essencial, pois era tido como um conhecimento necessário e importantíssimo para o desenvolvimento e melhoramento de máquinas utilizadas no processo produtivo. A expansão da revolução industrial no século XIX gera um início de modernização brasileira, necessitando assim que sejam construídas fábricas, portos, que estradas sejam abertas bem como um avanço na urbanização, e para que de fato acontecessem essas edificações foi necessária a criação de um curso de Engenharia Civil pois esses profissionais eram imprescindíveis para que ocorresse essa modernização. Esse acontecimento alavancou o ensino das construções geométricas na matriz curricular, pois, segundo Zuin (2001) os conhecimentos desse ensino era indispensável para a formação desses profissionais .Machado (2012) destaca que além da criação do curso de Engenharia Civil acontece mais um avanço importante na proliferação do ensino de desenho geométrico, são criadas as Escolas Normais e dos Liceus Provinciais em 1835, e do Colégio Pedro II em 1837 , e com isso passando a fazer parte da cultura escolar de um modo geral, por conta dos professores militares convocados para o ensino nos preparatórios, o que acabou difundindo a escolarização técnico-militar desenvolvida nas Academias para a esfera pública. Nesse sentido, Silva (1999) relata que foram realizadas modificações nos Estatutos da Escola Militar e, dentre estas modificações, foram criadas disciplinas de engenharia civil no sétimo ano do curso daquela instituição de ensino. Esta mudança pode ser considerada como o ponto de partida para a criação de escolas de Engenharia Civil separadas das instituições militares. No final do século XIX, o projeto de modernização do Brasil chamou a atenção de Rui Barbosa, um importante parlamentar brasileiro, para a criação de um sistema nacional de ensino gratuito, obrigatório e laico do jardim de infância à universidade. Em 1882, para a elaboração do seu projeto de reforma do ensino, Rui Barbosa inspirou-se em países como a Alemanha, Áustria, Estados Unidos, França e a Inglaterra, que estavam em um nível de desenvolvimento econômico e educacional superior ao brasileiro. Nesse projeto houve a determinação de que o Desenho Geométrico fosse considerado como um "saber escolar necessário para o desenvolvimento industrial brasileiro". Até a década de 1950, o Desenho Geométrico era um componente curricular muito importante, fazendo parte oficialmente das matrizes curriculares.

Machado (2012) nos traz que, em 1882, no projeto de reforma do ensino proposto por Rui Barbosa teve a determinação de que o Desenho Geométrico fosse considerado como um saber escolar necessário para o desenvolvimento industrial brasileiro, pois esse saber já era tido como importante para um país que quisesse seguir o caminho da modernização e se fez necessário que esse conhecimento tivesse uma base escolar. Dessa forma, foi tido como disciplina obrigatória no currículo das escolas brasileiras até a década de 1950. No período que compreende o fim da década de 1950 e o início da década de 1960, inicia-se um movimento matemático conhecido como o movimento da matemática moderna, que tinha como objetivo maior renovar o currículo do ensino da matemática aproximando os conteúdos trabalhados no ensino básico com o conhecimento matemático produzido pelos pesquisadores matemáticos, deixando assim a comunidade mais preparada para as inovações tecnológicas que surgiam, Wielewsk (2008). Segundo Zuin (2001), com o fortalecimento do movimento da matemática moderna a disciplina de desenho geométrico perdeu espaço, sendo que na década de 1960 foi considerada como disciplina curricular complementar que compunha a parte diversificada do currículo escolar pelos documentos oficiais. Assim a maioria das escolas brasileiras excluiu a disciplina de suas grades e o conteúdo retirado da programação dos principais vestibulares do país.

Zuin (2001) nos traz em suas pesquisas que em 1971, é promulgada a Lei 5.692 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional onde o ensino que envolve as construções geométricas foi praticamente excluído da grade de estudos escolares no Brasil, sendo desvinculada inclusive dos cursos de arquitetura e engenharia e paralela a isso, foi praticamente extinta de todos os níveis da educação básica já que esse não era mais uma disciplina obrigatória. Na década de 1980, são publicadas coleções de livros didáticos por editoras conhecidas nacionalmente como a Ática e FTD, também teve mobilizações de profissionais da área para que o ensino de construções geométricas retornasse para a grade curricular e dessa forma, fosse trabalhada no ensino básico, porém esses acontecimentos não foram o suficiente para que os estudos com construções retornassem ao currículo. E nos dias atuais, as construções geométricas ainda continuam sem espaço nas grades curriculares, e com isso, a maioria dos estudantes terminam o ensino básico sem sequer nunca ter feito uma construção geométrica.

2 Referencial teórico

2.1 As construções geométricas e o processo de ensino aprendizagem

As formas geométricas estão ao nosso redor, é fácil de notá-las , por exemplo, nas construções, brinquedos, na natureza. Algumas formas são regulares e aparecem com mais frequência. Para Dante (2002), ao olharmos ao nosso redor perceberemos que vivemos em um mundo de formas geométricas. Alguns exemplos são: balão sobrevoando uma planície, peças artesanais de cerâmica, bola de futebol, Congresso Nacional em Brasília, floco de neve, estrela-do-mar, girassol, edifícios. Por ai já temos um motivo forte para o estudo e prática de construções geométricas. Podemos reforçar ainda, pelo pensamento de Putnoki (2001) que a partir de seus estudos escreve que a arte do desenho é algo inerente ao homem. Esses já são motivos convincentes de que não podemos privar uma pessoa tanto de realizar desenhos simples, livre de qualquer técnica bem como de realizar construções de desenhos mais técnicos.

As construções geométricas se constituem em uma área de aprendizagem muito importante e que praticamente não é trabalhada atualmente nas instituições de ensino. Como traz Zuin (2001), após a disciplina de desenho geométrico ter sido classificada como optativa em 1971, devido a reformulação do currículo, influenciada principalmente pelo movimento da matemática moderna, foi praticamente deixada de lado. Esse descaso com o ensino e aprendizagem das construções geométricas nas instituições de ensino preocupa e muito, pois o estudo das construções é algo que enriquece o conhecimento, facilitando e fortalecendo no estudante as relações e teoremas estudados em geometria já que a compreensão de muitos conceitos se materializa através das construções geométricas e assim fazendo sentido para os estudantes. Segundo Marmo (1994) o desenho concretiza os conhecimentos teóricos da geometria, fortalecendo o ensino desta importante matéria, e através do Desenho Geométrico, definem-se conceitos, demonstram-se propriedades, resolvem-se problemas, desenvolve-se o raciocínio lógico dedutivo e também a "criatividade científica, que é a capacidade de concluir conhecimentos, já para Itzcovich (2012), as construções com os instrumentos clássicos da geometria permitem explorar, identificar, conjecturar e validar propriedades das figuras.

Para realizar as construções geométricas, trabalhamos com precisão, sendo necessária paciência e atenção, e com a prática contínua desenvolvemos habilidades motoras e espaciais adequada para incutir nos jovens habilidade manual, lembrando que o Desenho Geométrico nos ensina a linguagem gráfica que é uma forma concisa, precisa e universal de comunicar e expressar idéias, não estudá-lo torna-se uma falha no ensino.

Quando o estudante encara o desafio de realizar alguma construção, antes mesmo de iniciar ele imagina diversas possibilidades, diversos caminhos são criados na mente até o início, quando inicia a construção, ele explora diversas alternativas até concretizá-la, sendo assim um processo com grande poder de enriquecer o desenvolvimento criativo.

Ao realizar construções geométricas, além de reforçar saberes, a pessoa estará propícia a um leque de oportunidades para descobertas de propriedades novas para o seu conhecimento, relacionadas a figuras geométricas, sendo que, quando o estudante realiza essas descobertas o conhecimento tem um significado maior, auxiliando na compreensão de algumas propriedades já vistas ou em outras que ele ainda verá, proporcionando ao estudante prazer na continuação dos estudos de modo que se sinta uma peça importante no processo de ensino aprendizagem. Lima (1991) entende ser fundamental que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio, e exercitando a mente, pois considera os desenhos das figuras geométricas parte importantíssima para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa.

Após a classificação em 1971 da disciplina como optativa, muitos defenderam o seu retorno como disciplina principal, mas de acordo com Zuin (2001), apenas em 1998, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, que sugere que as construções geométricas sejam abordadas dentro da disciplina de matemática, demonstra-se uma real preocupação com o ensino das construções geométricas neste nível de ensino. Wagner (apud Oliveira (),s/d)diz que:

> estando as construções geométricas cada vez mais ausentes dos currículos escolares, deve-se ajudar a resgatar o assunto do esquecimento e mostrar a sua importância como instrumento auxiliar no aprendizado da geometria, pois as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos Pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega.

Marmo (1994) traz a seguinte frase sobre a disciplina de desenho geométrico:"Foi assassinado pelos modismos, mas vamos ressuscitá-lo"

2.2 Algumas obras relacionadas ao tema

Sobre estudos relacionados a construções geométricas, há algumas obras que podemos destacar. Algumas reforçando a importância do ensino da disciplina desenho geométrico, algumas apresentando propostas de ensino, outras apresentando algumas aplicações, há trabalhos que falam sobre as possibilidades ou impossibilidades de construção de alguns polígonos através das ferramentas régua e compasso e em geral apresentam algumas construções.

Em relação a aplicabilidade araujo (2016) apresentou sua dissertação a Universidade Federal do Ceará, na cidade de Fortaleza em 2016, onde escreveu sobre o tema: *Construções com régua e compasso e algumas aplicações*, onde apresenta algumas construções, soluções algébricas de alguns problemas apresentando em seguida uma solução a partir de construções com régua e compasso, ou seja, fazendo uma ponte entre soluções algébricas e construções geométricas.

Já Lima (2015) apresentou à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro a sua dissertação com o tema: *Polígonos construtíveis por régua e compasso: uma apresentação para professores da educação básica*, onde é apresentado a noção e definição de números construtíveis bem como alguns teoremas. Lima também explana sobre polinômios, apresentando a noção de números algébricos para enfim apresentar com propriedades as construções de polígonos regulares, onde ele descreve a construção de alguns polígonos regulares e também fala sobre a impossibilidade de construções de certos polígonos regulares, apresentando argumentos algébricos para alicerçar tais possibilidades ou impossibilidades de construções.

3 Metodologia da pesquisa

Este trabalho consiste em um levantamento e organização de construções com régua e compasso, bem como em reforçar a importância do estudo com construções geométricas. Para isso, faremos um trabalho de levantamento de informações por meio de pesquisa de várias formas geométricas e de lugares geométricos em diversas obras. Será analisado vários processos de construções de um mesmo ente geométrico para selecionar e expor aquela que aparenta ser a maneira mais clara de entender o processo de construção ou, se possível, melhorar o já existente, para que haja um melhor entendimento por parte do leitor. Para algumas figuras, serão apresentadas mais de uma maneira para construí-la, devido a particularidade dos passos, informação inicial ou elementos geométricos usados no processo. Essas construções serão organizadas e apresentadas nesse trabalho. Para a construção das figuras utilizadas, será utilizado o software Geogebra. O Geogebra é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. É escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Toda a parte de escrita e montagem da obra foi feita por meio do LATEX2, pois, além da parte tipográfica, cuja escrita de termos matemáticos fica facilitada, usamos também um recurso que possibilita a visualização do passo a passo das construções geométricas nas próprias figuras que foram inseridas durante a explanação. A visualização poderá ser controlada por meio de "botões"situados logo abaixo das figura. Por isso, recomenda-se que os capítulos que tratam de construções, sejam também visualizados no computador por meio do arquivo disponível em PDF.

No próximo capítulo apresentaremos várias construções e seu passo a passo tanto de maneira escrita quanto de maneira ilustrada(visualização disponível no computador por meio do arquivo em PDF), porém esse material deve ser utilizado como suporte, servindo como auxílio em algumas construções e até como verificação após construções de outras. Lembramos, como já vimos no referencial, da importância de realizarmos construções para o nosso desenvolvimento como um todo, por isso devemos sempre tentar realizar as construções por méritos próprios, não desistindo na primeira dificuldade encontrada e evitando ao máximo a consulta dos passos das construções antes de realizar por si só.

O material dos próximos capítulos contém, o que considero seja, as principais construções ou pelo menos as que servem de base para outras construções mais elaboradas. Por tanto, não há uma preocupação em apresentar um grande número de construções, mas sim apresentar algumas que podem servir de motivação para que o leitor interessado possa, a partir daí, buscar novas construções e conseguir realizá-las da melhor maneira possível.

4 Construções Elementares

Nessa primeira parte de construções, vamos apresentar algumas construções geométricas que são tidas como básicas pela importância e frequência que aparece durante a realização na construção de outras.

Alertamos que abaixo da imagem de cada construção há um conjunto de controles onde o leitor pode clicar para a apresentação do passo a passo da construção, sendo que o leitor tem a opção de gerar a apresentação automática clicando no comando específico para tal função ou sobre a imagem,e a opção de gerar a apresentação de maneira manual a cada click no comando correspondente.

4.1 Perpendicular por ponto fora da reta

Duas retas são ditas perpendiculares quando formam quatro ângulos retos. Para a construção da perpendicular, vamos definir um segmento qualquer na reta e então utilizar o mesmo procedimento para a mediatriz.

Construção 1: Dado uma reta e um ponto fora dessa reta, traçar uma reta perpendicular a reta dada que passa pelo ponto fora da reta.

Passos da construção:
- Considere uma reta qualquer e um ponto A fora da reta;
- Trace uma circunferência de centro A e raio maior que a distância de A a reta dada;
- A circunferência intersecta a reta em dois pontos quaisquer B e C.
- Trace uma circunferência de centro B e raio BA (fixamos o raio BA, mas pode ser qualquer raio maior que a metade de BC).
- Trace uma circunferência de centro C e raio CA (raio congruente ao raio da circunferência de centro B).
- As circunferências se interceptarão nos pontos A e D.
- A reta que passa pelos pontos A e D é **perpendicular a reta dada**.

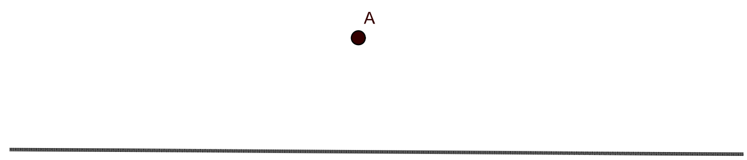

Figura 2 – Perpendicular por ponto fora da reta

Prova: Temos que AB, BD, DC e CA possuem o mesmo comprimento, pois são raios de circunferência de mesmo diâmetro, logo ABDC é um losango com diagonais AD e BC. Como as diagonais de um losango são perpendiculares entre si, a reta que contém AD é perpendicular a reta dada que contém BC.

4.2 Perpendicular por ponto da reta

Para a construção da perpendicular que passa por um ponto determinado A da reta, precisamos determinar um segmento em que A seja seu ponto médio, e logo após encontrar dois pontos equidistante das extremidades desse segmento.

Construção 2: Dado uma reta e um ponto dessa reta, traçar uma reta perpendicular a reta dada que passa pelo ponto da reta.

Passos da construção:
- Considere uma reta e um ponto A qualquer contido na reta;
- Trace uma circunferência qualquer de centro A;
- A circunferência intersecta a reta em dois pontos, que chamaremos de B e C;
- Trace uma circunferência de centro B e raio maior que o segmento AB;
- Trace uma circunferência de centro C com o mesmo raio a do passo anterior;
- As circunferências se intersectam em dois pontos, que chamaremos de D e E;
- Trace o segmento DE;
- A reta que contém o segmento DE é **perpendicular a reta dada e passa por A**.

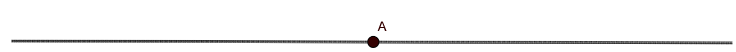

Figura 3 – Perpendicular por ponto da reta

Prova: Temos que BE, EC, CD e DB possuem o mesmo comprimento, pois são raios de circunferência de mesmo diâmetro, logo BECD é um losango com diagonais BC e DE. Como as diagonais de um losango são perpendiculares entre si, e se intersectam em seus pontos médios, logo, a reta que contém o segmento DE passa pelo ponto A e é perpendicular a reta que contém o segmento BC.

4.3 Mediatriz

A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que intersecta o segmento em seu ponto médio.
Para a construção da mediatriz precisamos encontrar dois pontos equidistante das extremidades do segmento.

Construção 3: Dado um segmento, traçar uma reta perpendicular ao segmento dado que o divida em duas partes iguais.

Passos da construção:
- Considere o segmento AB,
- Trace uma circunferência de centro A e raio maior que a metade do segmento AB.
- Trace outra circunferência, de mesmo raio, só que centrada em B;
- As circunferências se interceptarão nos pontos C e D.
- Trace o segmento CD;
- A reta que contém o segmento CD é a **mediatriz do segmento**.

Figura 4 – Mediatriz

Prova: Temos que AC, CB, BD e DA possuem o mesmo comprimento, pois são raios de circunferência de mesmo diâmetro, logo ACBD é um losango com diagonais AB e CD. Como as diagonais de um losango são perpendiculares entre si, e se intersectam em seus pontos médios, a reta que contem o segmento CD é perpendicular ao segmento AB e o intersecta em seu ponto médio, sendo assim a mediatriz de AB.

4.4 Ponto médio

Ponto médio, como o nome já sugere, é o ponto que divide o segmento em dois congruentes. Para encontrar o ponto médio vamos encontrar o lugar geométrico dos pontos que estão equidistante das extremidades do segmento.

Construção 4: Dado um segmento, marcar sobre o mesmo um ponto que o divida em duas partes iguais.

Passos da construção:
- Considere o segmento AB;
- Trace a mediatriz do segmento AB;
- Ela intersecta o segmento AB em um ponto que chamaremos de E;
- O ponto E é o **ponto médio do segmento AB**.

Figura 5 – ponto médio

Prova: Como o ponto E pertence a mediatriz do segmento AB, temos que E é equidistante dos pontos A e B, logo os segmento AE e EB são congruentes.

4.5 Bissetriz

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que divide o ângulo em dois outros congruentes entre si.
Para essa construção é necessário que encontremos um ponto diferente do vértice que esteja a mesma distância dos lados do ângulo, e então basta traçar a semirreta de origem no vértice que contenha o ponto encontrado.

Construção 5: Dado um ângulo, traçar a semirreta que divide o ângulo dado em dois outros congruentes.

Passos da construção:
- Considere o ângulo ABC de vértice B;
- Trace uma circunferência de centro em B. Cujo raio seja menor que os comprimentos de BA e BC;
- Essa circunferência interceptará um lado em um ponto D e o outro em um ponto E;
- Trace uma circunferência de centro D e raio maior que a distância entre D e E;
- Trace outra circunferência, de mesmo raio, só que centrada em E;
- Essas duas circunferências se intersectarão em dois pontos, F e G;
- Considere o ponto G, situado no interior do ângulo;
- Trace a semirreta de origem em B, passando por G;
- Essa semirreta será a **bissetriz do ângulo**.

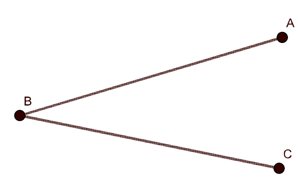

Figura 6 – Bissetriz

Prova: Considere os triângulos BEG e BGD, esses triângulos são congruentes pois BE e BD possuem o mesmo comprimento por construção(são os raios da circunferência de centro B), EG e GD possuem o mesmo comprimento também por construção, e o segmento BG é comum aos dois triângulos. Logo os ângulos EBG e GBD são congruentes, o que implica que a semirreta BG de origem em B divide o ângulo ABC em duas partes iguais. Logo a semirreta BG é bissetriz do ângulo ABC.

4.6 Paralela que passa por um ponto fora da reta

Duas retas são ditas paralelas quando não possuem ponto comum. Ou seja, se cada ponto de uma está a mesma distância da outra reta. Para essa construção, devemos encontrar outro ponto que esteja a mesma distância da reta e do mesmo lado em relação a reta que o ponto dado.

Construção 6: Dado uma reta e um ponto fora dessa reta, traçar uma reta paralela a reta dada.

Passos da construção:
- Considere uma reta qualquer dada e um ponto A fora da reta;
- Marque o ponto B sobre a reta;
- Trace a circunferência de centro B e raio AB;
- A circunferência intersecta a reta nos pontos C e D;
- Trace a circunferência de centro D e raio CA;
- Ela intersecta a circunferência com centro B em um ponto E, do mesmo lado de A em relação a reta dada;
- Trace o segmento AE;
- A reta procurada é a reta**que contém AE**.

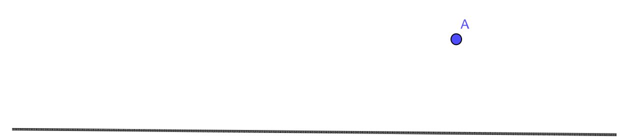

Figura 7 – Paralela que passa por um ponto fora da reta

Prova: Considere os triângulos DEB e BAC, eles são congruentes pois DB = BC = BE = BA, sendo que são raios da circunferência com centro B e DE = AC por construção.

Logo os triângulos DEB e BAC possuem alturas iguais em relação às bases DB e BC, isso implica que os pontos E e A estão à uma mesma distância.

4.7 Transpor ângulo

O processo para transpor ângulo é muito importante para a realização de diversas construções. Para transpor ângulo, temos que marcar um ponto de tal maneira que o segmento entre esse ponto e uma extremidade do segmento dado determine com o segmento dado, ângulo igual ao ângulo dado.

Construção 7: Dado um ângulo e um segmento, traçar pelo segmento dado um ângulo congruente ao ângulo dado.

Passos da construção:
- Considere o ângulo ABC de vértice B e o segmento FG;
- Trace uma circunferência de centro em B. Cujo o raio seja menor que os comprimentos de BA, BC e FG;
- Essa circunferência intersectará o lado AB em um ponto que chamaremos de D;
- E intersectará o lado BC em um ponto que chamaremos de E;
- Trace uma circunferência de centro F e raio BD;
- Essa circunferência intersectará o segmento FG no ponto H;
- Trace uma circunferência de centro H e raio DE;
- Essa circunferência intersecta a com centro em F em dois pontos, chamaremos um dos pontos de I;
- Trace o segmento FI;
- O ângulo HFI de vértice F é **o ângulo ABC de vértice B transportado.**

Figura 8 – Transpor ângulo

Prova: Temos que HI é congruente a DE por construção, assim como BD, BE e FH. Temos também que FI é um raio da circunferência de centro F, assim como FH, logo FI também é congruente a FH. Logo, os triângulos BED e FHI são congruentes, e assim concluímos que os ângulos DBE e IFH são congruentes.

5 Construções específicas

Nessa segunda parte de construções, vamos apresentar construções geométricas mais específicas, que apresentam grau de construção mais elevado, tendo como base as construções tidas como básicas.

Alertamos mais uma vez que abaixo da imagem de cada construção há um conjunto de controles onde o leitor pode clicar para a apresentação do passo a passo da construção, sendo que o leitor tem a opção de gerar a apresentação automática clicando no comando específico para tal função ou sobre a imagem,e a opção de gerar a apresentação de maneira manual a cada click no comando correspondente.

5.1 Triângulo equilátero

Um triângulo é dito equilátero se os seus lados possuem o mesmo comprimento. Para a construção do triângulo equilátero, vamos considerar o segmento AB qualquer, e encontrar um ponto C que esteja distante de A e de B assim como B está de C.

Construção 8: Dado um segmento, construir um triângulo equilátero de lados com medidas iguais ao do segmento dado.

Passos da construção:
- Considere o segmento AB;
- Trace uma circunferência de centro A e raio AB;
- Trace outra circunferência de mesmo raio, só que de centro em B;
- Essas circunferências se intersectam em dois pontos;
- Chame um desses pontos de C;
- Trace o segmento AC;
- Trace o segmento BC;
- O triângulo ABC é **equilátero**.

Figura 9 – Triângulo equilátero

Prova: O raio da circunferência de centro A tem o mesmo comprimento do segmento AB por construção. Temos que o lado AC do triângulo é um raio da circunferência de centro A, logo AC = AB. O raio da circunferência de centro em B tem o mesmo comprimento do segmento AB por construção. Temos que o lado BC do triângulo é um raio da circunferência de centro B, logo BC = AB. Concluímos então que AB = AC = BC e com isso que o triângulo ABC é equilátero.

5.2 Quadrado inscrito em uma circunferência

Um quadrado é dito inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencerem a circunferência. Para tal construção, devemos marcar, na circunferência, quatro pontos de tal maneira que a divida em quatro arcos iguais.

Construção 9: Dado uma circunferência, construir um quadrado inscrito na circunferência.

Passos da construção:
- Considere uma circunferência de centro A;
- Trace um diâmetro BC qualquer;
- Trace outro diâmetro DE, de tal maneira que seja perpendicular a BC;
- Trace segmentos entre os pontos B, D, C e E;
- O quadrado obtido é **um quadrado inscrito na circunferência dada**.

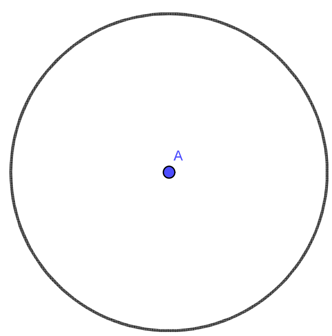

Figura 10 – Quadrado inscrito em uma circunferência

Prova: Como os diâmetros BC e DE são perpendiculares por construção, eles se intersectam formando ângulos de 90º, logo, as cordas que formam os lados do quadrilátero possuem mesmo tamanho, temos ainda que, dois lados quaisquer adjacentes formam com uma das diagonais traçadas um triângulo inscrito em uma semi circunferência, logo são retângulos esses triângulos, sendo reto o ângulo formado pelos segmentos adjacentes. Logo, os ângulos internos do quadrilátero são retos e o quadrilátero BEDC é um quadrado inscrito na circunferência dada.

5.3 Quadrado de lado dado

Para a construção de um quadrado com lado dado, temos que encontrar dois pontos, tais que, o comprimento da distância entre eles e a distância entre cada um e uma das extremidades do segmento dado seja igual ao comprimento desse segmento.

Construção 10: Dado um segmento, construir um quadrado com lados congruente ao segmento dado..

Passos da construção:
- Considere o segmento AB dado;
- Trace uma perpendicular ao segmento AB pelo ponto A;
- Trace uma perpendicular ao segmento AB pelo ponto B;
- Trace uma circunferência de centro A e raio AB;
- Ela intersecta a perpendicular que passa por A em dois pontos, chame um de C;
- Trace uma circunferência de centro B e raio AB;
- Ela intersecta a perpendicular que passa por B em dois pontos, chame o que se encontra do mesmo lado de C em relação a AB de D;
- Trace o segmento CD;
- O quadrado obtido é **um quadrado construído com o lado dado**.

Figura 11 – Quadrado de lado dado

Prova: Temos que AC // BD por construção e, como, C e D estão a mesma distância de AB, temos que AB // CD. Logo ACDB é um paralelogramo. Temos que AB = AC = BD, por construção, e como ACDB é paralelogramo, AB // CD. Temos ainda, que o ângulo

CAB de vértice A é reto por construção, assim como o ângulo ABD de vértice B. Como AB // CD, temos que os ângulos ACD de vértice C e CDB de vértice D também são retos, logo o quadrilátero ACDB é um quadrado com lados de comprimentos iguais ao segmento dado.

5.4 Pentágono

Pentágono regular é aquele que possui todos os 5 lados e os 5 ângulos congruentes. Para essa construção, devemos marcar na circunferência, cinco pontos de tal maneira que a divida em cinco arcos iguais.

Construção 11: Dado uma circunferência, construir um pentágono regular inscrito na circunferência.

Passos da construção:
- Considere uma circunferência de centro O e um de seus diâmetros que chamaremos de AB;
- Trace outro diâmetro, CD, perpendicular a AB;
- Trace o ponto médio M de OB;
- Trace o segmento MC;
- Trace o arco menor de centro M, com origem em C e ponto final que chamaremos de N, pertencente ao segmento AO;
- Trace o segmento NC;
- Trace a circunferência de centro C e raio NC, que intersecta a circunferência em um ponto que chamaremos de E;
- Trace o segmento CE;
- Trace a circunferência de centro E e raio EC, que intersecta a circunferência em um ponto que chamaremos de P;
- Trace o segmento EP;
- Trace a circunferência de centro P e raio EP, que intersecta a circunferência em um ponto que chamaremos de Q;
- Trace o segmento PQ;
- Trace a circunferência de centro P e raio PQ, que intersecta a circunferência em um ponto que chamaremos de S;
- Trace o segmento QS;
- Trace o segmento SC;
- O polígono CEPQS é **um pentágono regular**

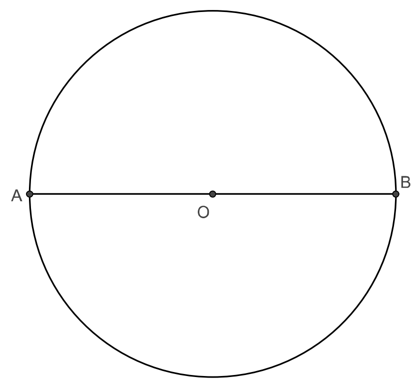

Figura 12 – Pentágono

Prova: Vamos admitir num primeiro momento que a circunferência tenha raio 1. Após os primeiros passos da construção do pentágono, afirmamos que CN é o segmento que nos dá os lados do pentágono. Vamos então demonstrar esse fato.

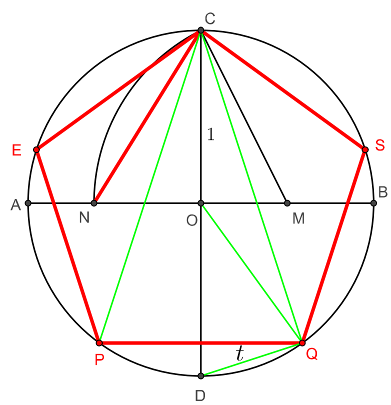

Figura 13 – triângulo CPQ no pentágono

Vamos, num primeiro momento, visualizar as diagonais do pentágono construído sobre a circunferência de raio 1. Considere as duas diagonais, que partem, por exemplo, do vértice C e terminam nos pontos P e Q. Temos, assim, o triângulo isósceles CPQ. Considere também o ponto de intersecção das diagonais PS e CQ, que chamaremos de R.

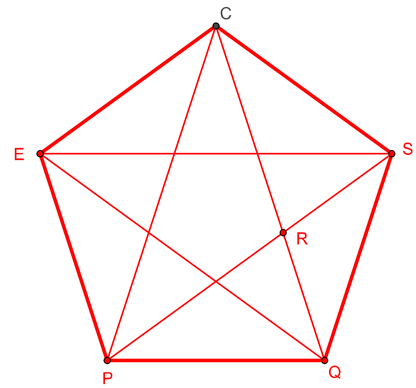

Figura 14 – diagonais do pentágono

Agora note que os ângulos (PCQ) e (QPR)=(QPS) são congruentes, pois são ângulos que subentendem cordas(lembrando que o pentágono está inscrito no círculo) de mesmo comprimento. Sendo assim, os triângulos CQP e PRQ são semelhantes e, com isso,

$$CP/PQ = PQ/RQ = PQ/(CP - PQ) \rightarrow PQ^2 = CP(CP - PQ).$$

Tome $CP = \phi.PQ \rightarrow \phi = CP/PQ$, substituindo na equação acima obtemos $1 = \phi^2 - \phi \rightarrow \phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

O número ϕ obtido acima é conhecido como número de ouro e aparece em diversos contextos em matemática.
Vamos agora retornar à construção inicial. Para calcular o comprimento do segmento CN, vamos usar o Teorema de Pitágoras. Temos $CM^2 = 1 + 1/4eON = MN - OM = CM - OM = CM - 1/2$, logo $CN^2 = 1 + (\sqrt{5/4} - 1/2)^2 = 5/2 - \sqrt{5}/2$.

Por outro lado, seja agora s o comprimento do lado do pentágono inscrito, d o comprimento de uma diagonal e t o comprimento do segmento DQ(DQ seria o lado de um decágono inscrito no círculo). Temos $d = \phi.s$.

Agora o triângulo ODQ é semelhante ao triângulo CPQ e da mesma forma teremos então $1 = \phi.t$. Temos, no momento, duas equações e três incógnitas d,s e t. A terceira equação pode ser obtida novamente pelo Teorema de Pitágoras. Temos que o triângulo CDQ está inscrito em um semicírculo, logo é retângulo e, com isso,$t^2 + d^2 = 4$. Então,

$$s = d/\phi = \phi^{(-1)}\sqrt{(4 - 1/\phi^2)} = \sqrt{(5/2 - \sqrt{5}/2)}$$

A demonstração no caso de uma circunferência com raio r qualquer é feita de maneira análoga.

5.5 Hexágono regular

Hexágono regular é o hexágono que possui todos os lados e ângulos congruentes. Para essa construção, devemos marcar na circunferência, seis pontos de tal maneira que a divida em seis arcos iguais.

Construção 12: Dado uma circunferência, construir um hexágono regular inscrito na circunferência.

Passos da construção:
- Considere uma circunferência de centro C;
- Marque sobre a circunferência um ponto A;
- Trace uma circunferência de centro A e raio AC;
- A circunferência de centro A intersecta a de centro C em um ponto B;
- Trace uma circunferência de centro B e raio BC;
- A circunferência de centro B intersecta a de centro C em um ponto D;
- Trace uma circunferência de centro D e raio DC;
- A circunferência de centro D intersecta a de centro C em um ponto E;
- Trace uma circunferência de centro E e raio EC;
- A circunferência de centro E intersecta a de centro C em um ponto F;
- Trace uma circunferência de centro F e raio FC;
- A circunferência de centro F intersecta a de centro C no ponto G, comum a de centro A;
- Trace o segmento AB;
- Trace o segmento BD;
- Trace o segmento DE;
- Trace o segmento EF;
- Trace o segmento FG;
- Trace o segmento GA;
- O polígono ABDEFG **é um hexágono regular**.

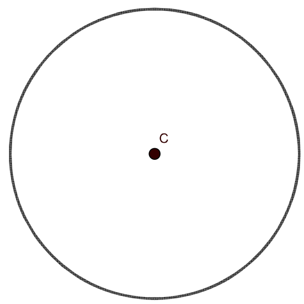

Figura 15 – Hexágono regular

Prova: Considere os triângulos formados pelos lados do hexágono e pelo ponto central, temos que são equiláteros e congruentes por construção, pois cada lado é formado pelos raios das circunferências congruentes. Temos ainda que, como são equiláteros os triângulos formados, os ângulos medem 60º, e assim, cada ângulo do hexágono, por ser a soma de dois dos triângulos, mede 120º. Concluimos assim que se trata de um hexágono regular.

5.6 Octógono regular

Octógono regular é o octógono que possui todos os lados e ângulos congruentes. Para essa construção, devemos marcar na circunferência, oito pontos de tal maneira que a divida em oito arcos iguais.

Construção 13: Construir um octógonoregular a partir de um quadrado dado.

Passos da construção:
- Considere o quadrado ABCD;
- Trace a diagonal AC;
- Trace a diagonal BD;
- Elas se intersectam em um ponto central que chamaremos de E;
- Trace a circunferência de centro E e raio EA;
- Trace a mediatriz referente ao lado AD. Que coincide com a do lado BC;
- Ela intersecta a circunferência em um ponto mais próximo de AD, que chamaremos de F;
- E em outro ponto que chamaremos de G;
- Trace a mediatriz referente ao lado AB. Que coincide com a do lado CD;
- Ela intersecta a circunferência em um ponto mais próximo de AB, que chamaremos de H;
- E em outro ponto que chamaremos de I;
- Trace o segmento AH;
- Trace o segmento HB;
- Trace o segmento BG;
- Trace o segmento GC;
- Trace o segmento CI;
- Trace o segmento ID;
- Trace o segmento DF;
- Trace o segmento FA;
- O polígono AHBGCIDF é **octógono regular**.

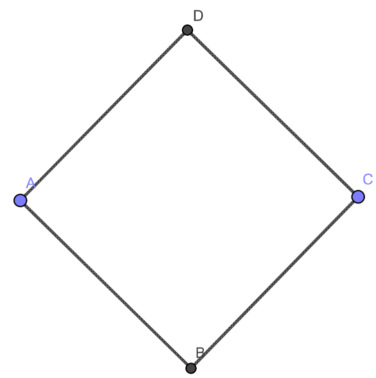

Figura 16 – Octógono regular

Prova: O quadrado determina quatro arcos congruentes, em uma circunferência circunscrita, pois segmentos côngruos determinam arcos côngruos em uma mesma circunferência. Como a mediatriz de AB, divide o arco AB ao meio no ponto H, temos que, o arco AB é dividido por H em dois outros arcos côngruos, de onde concluimos que o segmento AH é congruente ao segmento HB. Por raciocínio análogo, concluímos que AH, HB, BG, GC, CI, ID, DF e FA são crongruentes entre si. Temos ainda que cada lado do octógono forme com o centro da circunferência triângulos congruentes pelo caso LLL e isósceles, sendo os ângulos da base relativos aos lados do octógono, os congruentes. Assim, temos que os ângulos do octógono são congruentes entre si, pois são formados pela união de dois ângulos da base dos triângulos. Logo, concluímos que o octógono é regular.

5.7 Ortocentro

O ortocentro de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas do triângulo. Logo, para a determinação do ortocentro, basta traçar as alturas

Construção 14: Dado um triângulo, marcar seu ortocentro.

Passos da construção:
- Considere o triângulo ABC qualquer;
- Trace a perpendicular relativa ao lado BC, passando por A;
- Chame de D o ponto de intersecção entre a perpendicular e o lado BC, temos que AD é a altura relativa ao lado BC;
- Trace a perpendicular relativa ao lado AC, passando por B;
- Chame de E o ponto de intersecção entre a perpendicular e o lado AC, temos que BE é a altura relativa ao lado AC;
- Trace a perpendicular relativa ao lado AB, passando por C;
- Chame de F o ponto de intersecção entre a perpendicular e o lado AB, temos que CF é a altura relativa ao lado AB;
- As alturas se intersectam em um único ponto, vamos chamar de G;
- O ponto G é o **ortocentro do triângulo dado**.

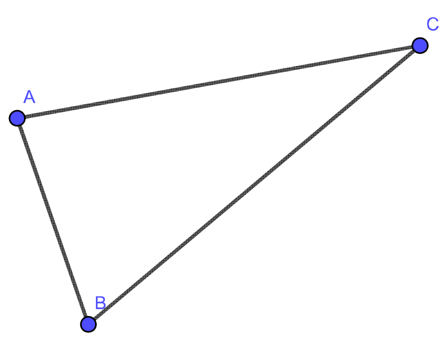

Figura 17 – Ortocentro

5.8 Baricentro

O baricentro é o ponto de intersecção das medianas de um triângulo. Logo, para encontrá-lo, devemos traçar as medianas do triângulo.

Construção 15: Dado um triângulo, marcar seu baricentro.

Passos da construção:
- Considere o triângulo ABC;
- Encontre o ponto médio do segmento AB, e chame-o de D;
- Trace o segmento DC, sendo esse a mediana referente ao lado AB;
- Encontre o ponto médio do segmento AC, e chame-o de E;
- Trace o segmento EB, sendo esse a mediana referente ao lado AC;
- Encontre o ponto médio do segmento BC, e chame-o de F;
- Trace o segmento FA, sendo esse a mediana referente ao lado BC;
- As medianas se intersectam em um ponto, que chamaremos de G;
- O ponto G é o **baricentro do triângulo dado**.

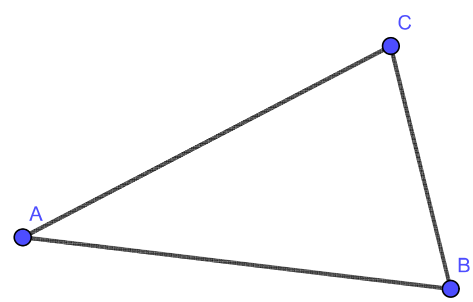

Figura 18 – Baricentro

5.9 Incentro

O incentro é o ponto de intersecção das bissetrizes de um triângulo. E ele é equidistante dos lados do triângulo. Logo, para a determinação do incentro, basta traçar as bissetrizes

Construção 16: Dado um triângulo, marcar seu incentro.

Passos da construção:
- Considere o triângulo ABC qualquer;
- Trace a bissetriz relativa ao ângulo interno A;
- Trace a bissetriz relativa ao ângulo interno B;
- Trace a bissetriz relativa ao ângulo interno C;
- As bissetrizes se intersectam em um único ponto, vamos chamar de D;
- O ponto D é o **incentro do triângulo dado**.

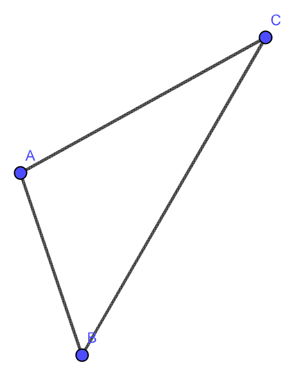

Figura 19 – Incentro

5.10 Circunferência inscrita em um triângulo

A circunferência é inscrita em um triângulo quando ela é tangente a cada lado do triângulo. Logo, para essa construção, devemos encontrar um ponto equidistante aos lados do triângulo. Como já foi visto antes, nesse caso, basta determinar o incentro do triângulo.

Construção 17: Dado um triângulo, traçar uma circunferência inscrita nesse triângulo.

Passos da construção:
- Considere o triângulo ABC;
- Marque o seu incentro, chamaremos de D;
- Trace uma perpendicular a um dos três lados passando por D;
- A perpendicular traçada intersecta a base utilizada em um ponto E;
- Trace uma circunferência de centro D e raio DE;
- A circunferência traçada é a **circunferência inscrita ao triangulo ABC**.

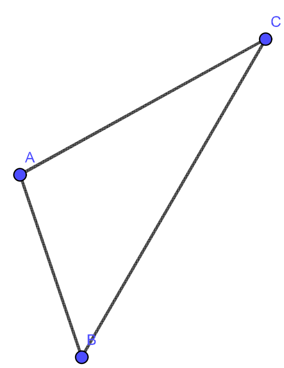

Figura 20 – Circunferência inscrita

5.11 Circuncentro

O circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo. E ele é equidistante aos vértices do triângulo, logo, para a determinação do circuncentro, basta traçar as mediatrizes

Construção 18: Dado um triângulo, marcar seu circuncentro.

Passos da construção:
- Considere o triângulo ABC;
- Trace a mediatriz referente ao lado AB;
- Trace a mediatriz referente ao lado BC;
- Trace a mediatriz referente ao lado AC;
- Elas se intersectam em um único ponto que chamaremos de D;
- O ponto D é o **circuncentro do triângulo dado**.

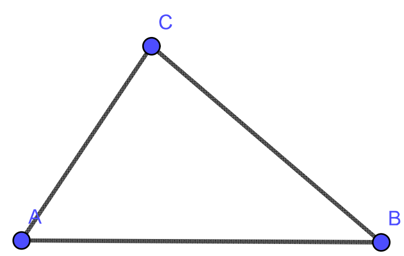

Figura 21 – Circuncentro

5.12 Circunferência circunscrita a um triângulo

A circunferência é circunscrita a um triângulo quando contém os três vértices do triângulo. Logo, para essa construção, devemos encontrar um ponto equidistante aos vértices do triângulo. Como já foi visto antes, nesse caso, basta determinar o circuncentro do triângulo.

Construção 19: Dado um triângulo, traçar uma circunferência circunscrita.

Passos da construção:
- Considere o triângulo ABC;
- Marque o seu circuncentro, chamaremos de D;
- Trace uma circunferência de centro D e raio AD;
- A circunferência traçada é a **circunferência circunscrita ao triângulo ABC**.

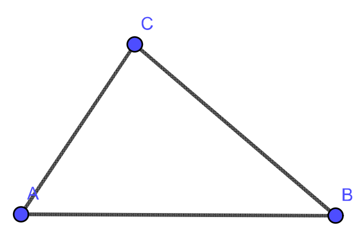

Figura 22 – Circunferência circunscrita

5.13 Circunferência dado três pontos

Para traçarmos uma circunferência dado três de seus pontos, basta encontrar o circuncentro do triângulo que tem os pontos dados como seus vértices.

Construção 20: Dados três pontos, traçar uma circunferência que contém os três pontos dados.

Passos da construção:
- Considere os pontos A, B e C;
- Trace o segmento AB;
- Trace o segmento BC;
- Trace o segmento CA;
- Trace o circuncentro do triângulo, que chamaremos de D(Ver como traçar circuncentro);
- Trace a circunferência de centro D e raio DA;
- A circunferência de centro D e raio DA **contém os três pontos dados**.

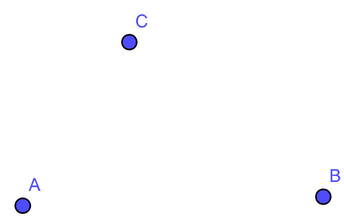

Figura 23 – Circunferência dado três pontos

5.14 Centro de uma circunferência

Para marcar o centro de uma circunferência basta encontrar o circuncentro de um triângulo qualquer inscrito a circunferência.

Construção 21: Dado uma circunferência, marcar seu ponto central.

Passos da construção:
- Considere uma circunferência qualquer;
- Marque sobre a circunferência um ponto qualquer que chamaremos de A;
- Marque sobre a circunferência outro ponto qualquer que chamaremos de B;
- Marque sobre a circunferência um terceiro ponto qualquer que chamaremos de C;
- Trace o segmento AB;
- Trace o segmento BC;
- Trace o segmento CA;
- Trace o circuncentro do triângulo, que chamaremos de D;
- O circuncentro D é o **centro da circunferência**.

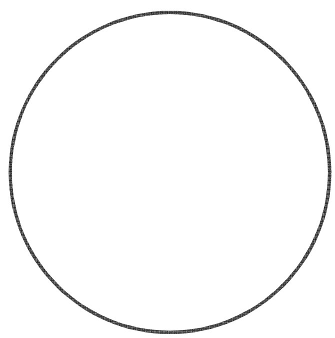

Figura 24 – Centro de uma circunferência

5.15 Triângulo com lados dados

Para essa construção, devemos ter o conhecimento do princípio da desigualdade triangular, que diz que a soma dos comprimentos de dois lados quaisquer é sempre maior que o comprimento do terceiro lado. Para desenvolvê-la, vamos utilizar o segmento AB dado como base e encontrar um ponto G que esteja a distância de A equivalente ao comprimento do segmento CD e que esteja a distância de B equivalente ao comprimento do segmento EF

Construção 22: Dados três segmentos, satisfazendo a desigualdade triângular, construa um triângulo cujos lados tenham a mesma medida dos segmentos dados..

Passos da construção:
- Considere os segmentos AB, CD e EF, que satisfazem a desigualdade triangular;
- Trace uma circunferência de centro A e raio CD;
- Trace uma circunferência de centro B e raio EF;
- As circunferências se intersectam em dois pontos;
- Chame um desses pontos de G;
- Trace o segmento AG;
- Trace o segmento BG.
- O triângulo AGB é o **triângulo com os lados dados**.

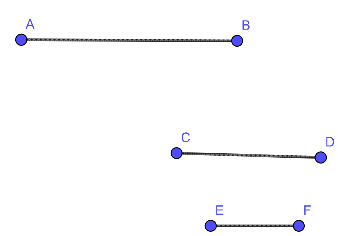

Figura 25 – triângulo com lados dados

Prova: Como AG é um raio da circunferência de centro A, por construção AG = CD. Temos também que BG é um raio da circunferência de centro em B e também por construção, temos que BG = EF. Logo o triângulo AGF é o triângulo com comprimentos de lados iguais aos dados.

5.16 Transpor segmento por um ponto dado

Essa construção não é simples, mas é crucial para o desenvolvimento das outras construções. Em nossas construções vamos transpor segmentos utilizando apenas a abertura de um compasso, assumindo ser válido, mas temos que ter o conhecimento de como transpor segmento da maneira correta, pois, transportar medidas usando marcas em régua ou abertura de compassos não era permitido nas regras de construções.

Construção 23: Dado um segmento e um ponto, traçar por esse ponto um segmento congruente ao segmento dado.

Passos da construção:
- Considere o ponto A e o segmento BC;
- Trace o segmento AB;
- Sobre o segmento AB, construa um triângulo equilátero, que chamaremos de ABD;
- Considere a semirreta de origem em B passando por D;
- Considere a semirreta de origem em A passando por D;
- Trace uma circunferência de centro B e raio BC;
- A circunferência intersecta a semirreta de origem B em um ponto que chamaremos de E;
- Trace a circunferência de centro D e raio DE;
- Ela intersecta a semirreta de origem A no ponto que chamaremos de F(F pertencerá a AD se E pertencer a BD);
- O segmento AF **é o segmento BC transportado**

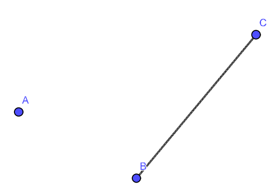

Figura 26 – Transpor segmento

Prova: Como BC e BE são raios de uma mesma circunferência, temos que são congruentes. Temos que BE é formado por BD que é um lado do triângulo equilátero e DE que é um raio da circunferência de centro D, temos ainda que AF é formado por AD que é um lado do triângulo equilátero e DF que é um raio da circunferência de centro D, logo AF é congruente a BE que é congruente a BC. Concluímos então que AF é o segmento BC transportado.

5.17 Divisão de segmento em partes iguais

Podemos, utilizando apenas régua e compasso, dividir um segmento em um número qualquer de partes. Vamos dividir o segmento AB em três partes iguais, e para essa construção, vamos utilizar como base o Teorema de Tales.

Construção 24: Dividir um segmento dado em três partes de iguais comprimentos.

Passos da construção:
- Considere o segmento AB;
- Trace por A o segmento AE de comprimento três unidades quaisquer;
- Divida o segmento AE nas três unidades por dois pontos, que chamaremos de C e D;
- Trace o segmento EB;
- Trace por D uma paralela ao segmento EB;
- A paralela intersecta o segmento AB em um ponto, que chamaremos de F;
- Trace por C uma paralela ao segmento EB;
- A paralela intersecta o segmento AB em um ponto, que chamaremos de G;
- O segmento AB foi **dividido em três partes iguais por F e G.**

Figura 27 – Divisão de segmento em partes iguais

Prova: Temos que os segmentos CG, DF e EB são paralelos por construção, logo, pelo teorema de Tales a medida do segmento AC está para AG assim como CD está para GF e DE está para FB. Mas, temos que os segmentos AC, CD e DE são congruentes entre sí, logo os segmentos AG, GF e FB também são congruentes entre si.

5.18 Divisão de segmento em média e extrema razão

Um segmento é dividido em média e extrema razão (razão áurea) quando a razão entre a parte maior e o todo for igual a razão entre a parte menor e a parte maior.

Construção 25: Dado um segmento, marcar um ponto que divide esse segmento em média e extrema razão.

Passos da construção:
- Considere o segmento AB;
- Trace o ponto médio do segmento AB,chamaremos de C;
- Trace uma circunferência de centro B e raio BC;
- Trace uma perpendicular a AB passando por B;
- A perpendicular intersecta a circunferência em dois pontos, vamos chamar um desses pontos de D;
- Trace o segmento DA;
- Trace uma circunferência de centro D e raio DB;
- A circunferência de centro D intersecta DA em um ponto que chamaremos de E;
- Trace uma circunferência de centro A e raio AE;
- A circunferência de centro em A intersecta o segmento AB em um ponto que chamaremos de F;
- O ponto F é o ponto que divide AB em **média e extrema razão**.

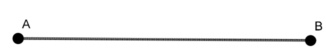

Figura 28 – Divisão de segmento em média e extrema razão

Prova: Vamos admitir que o segmento AB vale uma unidade qualquer, logo, por construção teremos que BC vale meia unidade. Temos ainda, por construção, que a medida de AE é igual a medida de AF, e que a medida de CE é igual a medida de CB, logo AC é equivalente a soma de AF com meio. Aplicando o teorema de Pitágoras teremos que, $(AF + 1/2)^2 = (1/2)^2 + 1^2$, desenvolvendo essa igualdade encontramos $AF = (-1 + \sqrt{5})/2$. Dai verifica-se que AF/AB=BF/AF.

5.19 Bissetriz de um ângulo com vértice não acessível

Para a construção da bissetriz de um ângulo com vértice não acessível, temos que construir um ângulo auxiliar congruente ao dado, para isso, temos que fazer que cada lado do ângulo auxiliar seja paralelo ao seu correspondente no ângulo dado.

Construção 26: Dado um ângulo com vértice não acessível, traçar sua bissetriz.

Passos da construção:
- Considere o ângulo ABC de vértice C não acessível;
- Trace uma reta paralela ao segmento BC e interna a região angular;
- Trace uma reta paralela ao segmento AC e interna a região angular, tal que a sua distância para o segmento AC seja congruente a distância de BC a sua paralela que traçamos;
- As paralelas se intersectarão em um ponto que chamaremos de D, formando um ângulo congruente ao ângulo ABC;
- Trace a bissetriz do ângulo construído;
- A bissetriz do ângulo ABC contém a **bissetriz do ângulo formado pelas paralelas**.

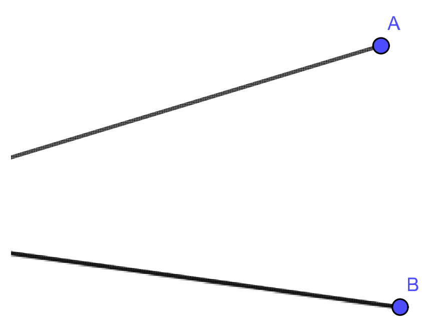

Figura 29 – Bissetriz de um ângulo com vértice não acessível

Prova: Considere a bissetriz do ângulo com vértice acessível, temos que o lado superior do ângulo com vértice acessível é paralelo ao lado superior do ângulo com vértice não acessível, logo os ângulos formados pelos lados superiores e a bissetriz são congruentes, o mesmo ocorre com os ângulos formados pelos lados inferiores e a bissetriz. Como temos ainda que, os ângulos formados pelo lado superior do ângulo com vértice acessível e a bissetriz e, o ângulo formado pelo lado inferior do ângulo com vértice acessível e a bissetriz são congruentes, concluímos que a bissetriz do ângulo com vértice acessível divide o ângulo com vértice não acessível em dois congruentes, sendo assim, também a sua bissetriz.

5.20 Arco capaz

Arco capaz é o lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento sob um determinado ângulo. Para a construção do arco capaz é preciso encontrar um ponto N que seja um dos vértices do triângulo formado com as extremidades do segmento,tal que o ângulo interno em N tenha o dobro da medida do ângulo dado.

Construção 27: Dado um ângulo e um segmento, construir um arco sobre o segmento, tal que, o ângulo formado pelos pontos extremos do segmento dado, tendo como vértice, qualquer um dos pontos da circunferência, é congruente ao ângulo dado.

Passos da construção:
- Considere o ângulo ABC de vértice B e o segmento FG;
- Construa o ângulo IFG com vértice F, congruente ao ângulo dado;
- Trace a mediatriz de FG;
- A mediatriz de FG intersecta IF em um ponto que chamaremos de D;
- A mediatriz de FG intersecta FG em um ponto que chamaremos de E;
- Trace uma perpendicular a IF passando por F;
- A perpendicular que passa por F intersecta a mediatriz em um ponto que chamaremos de N;
- Com centro em N e raio NF, trace um arco oposto ao segmento IF, em relação ao segmento FG;
- O arco FG com centro em N é um dos dois arcos capazes do ângulo em relação ao segmento dado

Figura 30 – Arco capaz

Prova: Considere os triângulos EDF e EFN O ângulo DFE com o ângulo EFN forma um ângulo reto, pois o ângulo IFN é reto. Temos também que a soma dos ângulos IFG e FDN resulta em 90 graus, pois são os ângulos agudos de um triângulo reto, logo concluímos que os ângulos GFN e FDN são congruentes e consequentemente DFE é congruente a ENF. Temos ainda que o ângulo central FNG meça dois IFG, logo,pelo teorema do ângulo inscrito para qualquer ponto H pertencente ao arco, o ângulo FHG tem medida igual ao do ângulo ABC.

6 Considerações finais

Como apresentado no trabalho, as construções geométricas tem papel importante no desenvolvimento matemático. Desde séculos antes de Cristo, já era tido como ferramenta no processo de estudos relacionados a matemática e como problematização em muitas situações. Sendo que os estudos sobre construções geométricas já foram componente importante no currículo escolar brasileiro e, depois do currículo sofrer reformulação devido o avanço nos estudos sobre a matemática, esse quadro foi mudado, deixando assim, de figurar como componente obrigatório, caracterizando, como vimos, uma perca no processo de ensino aprendizagem. Assim sendo, esperamos que esse trabalho alerte sobre a importância de se estudar as construções geométricas, sobre o quanto esses estudos auxiliam no desenvolvimento do estudante, bem como desperte o interesse de se explorar essa área tão rica e importante, mostrando assim, o quanto faz falta na grade curricular, e os benefícios de seus estudos, na vida das pessoas.

Cremos que o conjunto de construções apresentados no corpo do trabalho irá auxiliar pessoas em nível escolar fundamental e médio, universitário e em estudos pessoais. Cremos também que servirá como ferramenta para professores apresentar o processo de construção de várias figuras a seus discentes, pela praticidade na apresentação da animação por meios de equipamentos eletrônicos diversos, bem como servirá de atividades para os que busquem desafios extras e aprofundamento em seus estudos.

Referências

ARAUJO, E. O. de. *Construções com régua e compasso e algumas aplicações*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2016. Citado na página 23.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Rio de Janeiro: Edgard Blücher, 1974. Citado na página 16.

DANTE, L. R. *Tudo é matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ática, 2002. Citado na página 21.

ITZCOVICH, H. *Iniciação ao estudo didático da geometria: das construções às demonstrações*. Rio de Janeiro: Editora Anglo, 2012. Citado na página 21.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria:comprimento, área, volume e semelhança.* Belo Horizonte: SMB, 1991. Citado na página 22.

LIMA, K. F. de. *Polígonos construtíveis por régua e compasso:uma apresentação para professores da educação básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Pontíficia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.

MACHADO, R. B. *Entre vida e morte: cenas de um ensino de desenho*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2012. Citado na página 19.

MARMO, N. M. C. *Desenho Geométrico*. Rio de Janeiro: Editora Scipione, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

NASCIMENTO, R. A. *O ensino do desenho na educação brasileira: apogeu e decadência de uma disciplina escolar*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual Paulista de Marília, 1994. Citado na página 18.

OLIVEIRA, C. L. de. Citado na página 22.

PUTNOKI, J. C. *Desenho Geométrico*. Rio de Janeiro: Editora Scipione, 2001. Citado na página 21.

SILVA, C. da. *A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento*. Editora Unisinos, 1999. (Academia Colombiana de Ciencias, Exactas, Físicas y Naturales: Ediciones electrónicas especiales). ISBN 9788574310213. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-fZUAAAAYAAJ>. Citado na página 19.

WIELEWSK, G. D. o movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no brasil. *Future Computing Systems*, v. 1, n. 1, p. 71–97, 2008. Citado na página 19.

ZUIN, E. de S. L. *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2001. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21 e 22.