UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Pontos aleatórios na natureza: uma introdução aos processos de Poisson e suas aplicações

Dimas Francisco Rocha

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Dimas Francisco Rocha

Pontos aleatórios na natureza: uma introdução aos processos de Poisson e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. VERSÃO REVISADA.

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez

USP – São Carlos
Abril de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R672p

Rocha, Dimas
Pontos aleatórios na natureza: uma introdução aos processos de Poisson e suas aplicações / Dimas Rocha; orientador Pablo Martín Rodriguez. -- São Carlos, 2018.
75 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Teoria das probabilidades. 2. Variáveis aleatórias. 3. Distribuição de Poisson. 4. Processos de Poisson. I. Martín Rodriguez, Pablo, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Dimas Francisco Rocha

Random points in nature: an introduction to Poisson processes and their applications

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC- USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. FINAL VERSION

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez

USP – São Carlos
April 2018

As pessoas companheiras que compartilham e compartilharam momentos de alegrias, coragem e determinação me mostrando que nossos sonhos é o combustível que bombeia nossos corações.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para a obtenção do titulo de Mestre.

A Daiane Katiuscia pelo companheirismo contínuo, parceria leal, amizade, amor, dentre tantos enumeráveis sentimentos que não constam no dicionário para descrevê-los em pouco espaço e tempo.

Ao meu professor orientador Pablo Martín Rodríguez pelo apoio, incentivo e aprendizado.

Aos professores e alunos do programa PROFMAT pelas longas horas estudos compartilhados.

RESUMO

ROCHA, D.F. **Pontos aleatórios na natureza: uma introdução aos processos de Poisson e suas aplicações**. 2018. 75p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Neste trabalho é apresentado o processo de Poisson, através de exemplos existentes e identificados na natureza e em situações presentes no cotidiano. A distribuição de Poisson foi desenvolvida pelo matemático Siméon Denis Poisson com o intuito de aplicar a teoria das probabilidades em julgamentos criminais. Atualmente é possível aplicar este conceito em problemas que envolvem de modo geral fenômenos aleatórios de chegadas, desenvolvimento em colônia de bactérias, dentre outros. O processo de Poisson consiste em um modelo probabilístico adequado para um grande número de fenômenos observáveis e é de grande importância no estudo da teoria das filas. Ao longo do texto serão apresentadas e discutidas definições, axiomas e condições a fim de esclarecer e facilitar o entendimento do assunto. Uma série de exemplos são detalhados, demonstrando assim o amplo número de possibilidades de aplicações dessa teoria.

Palavras-chave: Teoria das probabilidades. Variável aleatória. Distribuição de Poisson. Processos de Poisson.

ABSTRACT

ROCHA, D.F. **Random points in nature: an introduction to Poisson processes and their applications.** 2018. 75 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This work the Poisson process was presented and some examples exist and identified in the nature and in situations present in the daily. The Poisson distribution was developed by the mathematician Siméon Denis Poisson in order to apply Probability Theory in criminal trials. At present, it is possible to apply these concep to problems that involve, in general, random phenomena of arrivals, development in colony of bacteria, among others. The Poisson process consists of a suitable probabilistic model for a large number of observable phenomena and is of great importance in the study of queue theory. Throughout the text will be presented and discussed definitions, axioms and conditions in order to clarify and facilitate the understanding of the subject. Some examples that were detailed, thus demonstrating the larger number of possibilities of applications of this theory.

Keywords: Theory of probabilities. Random variable. Poisson distribution. Poisson processes.

Sumário

INTRODUÇÃO

Diante do grande número de situações que envolvíam incertezas e dúvidas para tomadas de decisões presentes no cotidiano do homem, no decorrer dos anos, surgiu a necessidade de desenvolver uma ferramenta matemática que pudesse resolver estes problemas e a esta ferramenta deu-se o nome de teoria das probabilidades.

A teoria das probabilidades surgiu em meados do século $XVII$, época esta em que o homem começou a desenvolver técnicas para quantificar os riscos dos seguros de vida. Nesta mesma época o interesse na resolução dos jogos de azar também se expandiu. Segundo [3, DANTE] "antigamente jogava-se não só em apostas, mas também em decisões de disputas, nas divisões de heranças, entre outras".

Dentre os inúmeros matemáticos tais como Pascal, Fermat, Bernoulli, surge um matemático francês com o nome de Poisson que desenvolveu sua teoria. Os novos conhecimentos propostos por Poisson contribuíram para o avanço e desenvolvimento do estudo da teoria das probabilidades. Neste trabalho discutimos sobre um desses avanços, relacionado ao conceito de processo de Poisson.

Neste estudo, na busca de demonstrar de forma prática como a teoria das probabilidades alicerçada no processo de Poisson pode estar presente em nosso dia a dia será discutido alguns exemplos que vão desde problemas envolvendo filas de clientes até o caso das bombas lançadas em Londres durante a segunda guerra mundial.

Os objetivos deste trabalho centram-se em propiciar que alunos e futuros profissionais da área, familiarizam-se com tópicos básicos e especiais da teoria das probabilidades para discutir questões teóricas e adquiram conhecimento sobre aplicações atuais dos tópicos estudados. Uma outra proposta do trabalho é sugerir atividades que possam ser desenvolvidas no Ensino Fundamental e Médio de forma paralela à diretriz curricular.

Na primeira parte, serão revisados os aspectos históricos e conceituais fundamentais da teoria das probabilidades, incluindo definições e propriedades de variáveis aleatórias. Na segunda parte, será iniciado o estudo de processos de Poisson e na etapa final suas aplicações.

Foram pesquisadas obras e referenciais teóricos de conceituados autores que tratam do assunto, como: Dante, Hacking, Keeler, Meyer tendo como bibliografia principal o livro "Probabilidade um curso moderno com aplicações" de Sheldon Ross e aplicações selecionadas a partir de uma revisão da literatura científica recente.

No primeiro capítulo será introduzido os conceitos básicos referentes aos aspectos teóricos e conceituais necessários para a compreensão e resolução dos problemas que serão apresentados no decorrer do trabalho. O presente trabalho foi organizado de maneira gradual onde apresentou-se primeiramente os axiomas da probabilidade, as variáveis aleatórias, esperança e variância, distribuições de probabilidades discretas, as variáveis aleatórias de Bernoulli e binomial, a variável aleatória de Poisson e algumas atividades de aplicação.

No segundo capítulo será analisado o processo de Poisson, que pode ser descrito como um modelo matemático para descrever os instantes de ocorrência de algum evento de interesse, tais como: chegada de clientes a uma agência bancária, ligações recebida em uma central telefônica, ocorrência de fenômenos meteorológicos em uma determinada região, entre outros exemplos da ecologia, biologia e geologia.

Capítulo 1

Introdução a variáveis aleatórias

Neste capítulo estão reunidas algumas definições e exemplos que serão de utilidade ao longo da dissertação. Os conceitos básicos de probabilidade serão resumidos na Seção 1.1. Sugere-se ao leitor consultar as referências [6, FERREIRA] ou [14, MEYER] para uma revisão mais minuciosa. Já nas seções seguintes serão discutidos alguns exemplos e propriedades de variáveis aleatórias, focando principalmente nas variáveis aleatórias binomial e de Poisson.

1.1 Axiomas da probabilidade

Diariamente presenciamos acontecimentos que são determinados pelo acaso, como por exemplo: acidentes ocorridos em uma determinada via, propagação de epidemias, variação no mercado financeiro, dentre outros. Assim, diante destas ocorrências o homem percebeu a necessidade de registrar e modelar tais fatos e para isto, será apresentada neste estudo a teoria da probabilidade, que nos provê ferramentas que permitem criar e analisar modelos apropriados para o estudo de fenômenos aleatórios.

Mas como modelar estes fenômenos?

Algumas ferramentas são necessárias para uma boa modelagem probabilística. Para isto, faz-se necessário partir de observações em um determinado período e considerar fatores internos/externos que possam interferir nos dados, na periodicidade e/ou aleatoriedade dos acontecimentos.

No que se refere ao seu aspecto histórico, o processo de axiomatização da matemática e da probabilidade como um ramo da matemática, juntou-se a esse processo na segunda metade do século XIX. Conforme expõe [5, FERNANDEZ E TAMARO], assim como a álgebra e a geometria, a probabilidade passa a ser desenvolvida a partir de axiomas, graças ao matemático russo Andrei Kolmogorov (1903 - 1987), o mais influente matemático soviético do século XX, que teve diversos trabalhos publicados em Topologia, Geometria e Álgebra, dentre outras áreas. No ano de 1933 publicou o livro "Fundamentos da Teoria da Probabilidade", sendo esta a primeira tentativa de tratar este assunto com rigor a partir de axiomas, definições, proposições e teoremas. "A teoria da probabilidade, como uma disciplina matemática pode e deve ser desenvolvida por axiomas exatamente da mesma maneira que a geometria e a álgebra. Isso significa que depois de termos definido os elementos a serem estudados e as suas relações básicas, todas as exposições adicionais devem ser baseadas exclusivamente nesses axiomas, independentemente do significado concreto usual desses elementos e suas relações". [13, KOLMOGOROV]

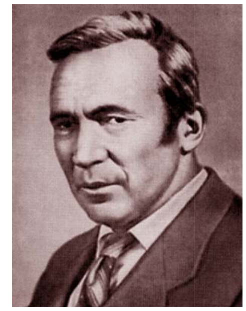


Figura 1.1: Kolmogorov
Fonte: Jacobs, 2017.

Quando se inicia o estudo da probabilidade é importante saber que o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de *espaço amostral*. Este será denotado neste texto pela letra grega Ω.

Todo subconjunto de Ω será denominado como um *evento* do espaço amostral Ω, que em geral é indicado por uma letra maiúscula do alfabeto e um número real qualquer $P(E)$ será o valor associado a probabilidade da ocorrência do evento E, ou simplesmente a probabilidade de E.

Definição 1.1 (Probabilidade)**.** Considere um experimento aleatório cujo espaço amostral é Ω. Para cada evento E do espaço amostral Ω, assuma que um número $P(E)$ seja definido e satisfaça os axiomas[1] a seguir.

Axioma 1. Se $E \subset \Omega$, então $0 \leq P(E) \leq 1$

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$

Axioma 3. Se $E_1 \subseteq \Omega$, $E_2 \subset \Omega$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ então $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Deste modo, tem-se do Axioma 1 que a probabilidade de qualquer evento está limitada em um intervalo fechado admitindo 0 para o valor mínimo (nunca acontece) e 1 para o valor máximo (sempre acontece). O Axioma 2 afirma que a probabilidade do espaço amostral é igual a 1, o que é intuitivo pois "sempre" ocorrerá algum resultado do experimento. Já o

[1]Denotar-se-a Axioma 1 por (A1), Axioma 2 por (A2) e Axioma 3 por (A3).

Axioma 3 diz que para eventos mutuamentes exclusivos[2], ou seja, estes eventos são disjuntos, a probabilidade de pelo menos um desses eventos ocorrer é justamente a soma de suas respectivas probabilidades.

Os axiomas são proposições verdadeiras e não demonstráveis, tem-se como consequência destes as propriedades a seguir que são de fundamental importância para construção e fundamentação da teoria da probabilidade.

Propriedades

1. Sabe-se que $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ e além disto os eventos são mutuamente exclusivos, logo:

$$P(\Omega \cup \emptyset) \stackrel{A3}{=} P(\Omega) + P(\emptyset),$$

ora, mas $A2$ diz que $P(\Omega) = 1$, logo $P(\emptyset) = 0$. Isto é, **o evento vazio tem probabilidade nula.**

2. Seja E um evento do espaço amostral Ω e E^c o evento complementar. Note que $E \cup E^c = \Omega$ e $E \cap E^c = \emptyset$, logo:

$$1 \stackrel{A2}{=} P(\Omega) = P(E \cup E^c) \stackrel{A3}{=} P(E) + P(E^c)$$

o que implica

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

que é a **probabilidade do evento complementar**.

3. Para quaisquer E e $F \subset \Omega$, se $E \subset F$, então $P(E) \leq P(F)$.

$$\begin{aligned} F &= F \cap \Omega \\ &= F \cap (E \cup E^C) \\ &= (F \cap E) \cup (F \cap E^C) \text{ união disjuntas} \\ P(F) &= P(F \cap E) \cup P(F \cap E^C) \\ &= P(F \cap E) + P(F \cap E^C) \\ &= P(E) + \underbrace{P(F \cap E^C)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Portanto, $P(E) \leq P(F)$.

[2]Dois eventos distintos, E e F contidos em Ω, estes são ditos mutuamente exclusivos se $E \cap F = \emptyset$.

4. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

A demonstração desta propriedade pode ser vista em [17, OCTAVIANO]

Exemplo 1.1. Considere o experimento de lançar um dado honesto sobre uma superfície plana, isto é, cada um de seus lados tem a mesma chance de aparecer. Seja i o evento em que a face superior é o número i, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então a probabilidade deste evento é dada por:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6},$$

pois

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6} i\right) = \sum_{i=1}^{6} P(i) = 6P(i)$$

portanto $P(i) = \dfrac{1}{6}$. Mas qual é a probabilidade de sair um número primo?

Note que em um dado estão presentes os seguintes números primos $2, 3$ e 5. Logo, tem-se que a probabilidade de sair um numero primo é:

$$P(\{2, 3, 5\}) \overset{A3}{=} P(2) + P(3) + P(5) = \frac{1}{2}$$

$\diamondsuit$

O exemplo anterior decorre da seguinte proposição.

Proposição 1.2. Se Ω é um espaço amostral finito e cada resultado dele tem a mesma probabilidade de acontecer (equiprováveis) então para todo $A \subset \Omega$ vale que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

onde $n(A)$ denota o número de elementos do conjunto A e $n(\Omega)$ denota o número de elementos do conjunto Ω.

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $A = \bigcup_{i=1}^{m} a_i$ e $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} a_i$, tal que $m \leq n$. Como o espaço amostral Ω é equiprovável, isto significa que todos os eventos possíveis do espaço amostral tem a mesma probabilidade, ou seja, $P(a_i) = \dfrac{1}{n}$, assim

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{a_i=1}^{m} a_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} P(a_i) \\ &= m\,\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$\square$

Para um estudo mais detalhado do cálculo de probabilidades em espaços finitos, consultar a obra de [17, OCTAVIANO].

Exemplo 1.3. Suponha que cada estudante de uma turma tenha a mesma probabilidade de ser aprovado em Matemática. Considere dois amigos desta turma: João e Maria. Qual é a probabilidade de pelo menos um ser aprovado? Qual é a probabilidade dos dois serem reprovados?

Admita que "A" seja o evento do estudante ser aprovado e "R" o evento do estudante se reprovado em Matemática.

a) Suponha que a probabilidade de reprovação e aprovação sejam iguais, isto é $p = 1/2$, então tem-se o seguinte espaço amostral $\Omega = \{AA, AR, RA, RR\}$, onde por exemplo "$AR$" significa que João foi aprovado enquanto que Maria foi reprovada. Seja M o evento em que pelo menos um estudante será aprovado, então

$$M = \{AA, AR, RA\}, \text{ logo } P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Agora seja N o evento em que os dois sejam reprovados, então

$$N = \{RR\}, \text{ logo } P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}.$$

Observe que M e N são disjuntos, $0 \leq P(M), P(N) \leq 1$ e além disso $P(M)+P(N) = 1$.

b) Agora considere o caso em que a probabilidade de um estudante ser reprovado "R" é igual a três vezes à de um estudante ser aprovado "A", isto é:

$$p_A = 3\,p_R.$$

Como $p_A + p_R = 1$, logo $3\,p_R + p_R = 1$, isto é, $4\,p_R = 1$, ou seja, $p_R = 1/4$, consequentemente: $p_A = \dfrac{3}{4}$.

Retomando ao evento $M = \{AA, AR, RA\}$[3] para as novas condições, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(M) &= P(AA) + P(AR) + P(RA) \\ &= \frac{3}{4}\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4} \\ &= \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

Consequentemente para $N = \{RR\}$, tem-se $P(N) = 1 - P(M) = \dfrac{1}{16}$.

$\Diamond$

Exemplo 1.4. No jogo da roleta é sorteado um número entre 0 e 36. Nesse jogo é utilizada uma mesa alongada na qual em uma das pontas fica a roleta. Uma marca na mesa indica a posição da pessoa que organiza jogo e o restante da mesa está ocupado por áreas demarcadas pelos números de 1 a 36, dispostos em 3 colunas e 12 fileiras sendo que nesta tabela o zero aparece em sua parte superior.

Considerando uma jogada no jogo da roleta e sabendo-se que o espaço amostral é dado por $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 35, 36\}$ no qual os números tem a mesma probabilidade de aparecer, então tem-se que:

$$P(0) = P(1) = P(2) = \ldots = P(35) = P(36) = \frac{1}{37}.$$

Qual a probabilidade de sair a 3ª dúzia, enumerada de 25 a 36?

Solução: Utilizando as propriedades e os axiomas da probabilidade obtêm-se:

$$P\left(\bigcup_{i=25}^{36} i\right) = P(25) + P(26) + \ldots + P(36) = \frac{12}{37}.$$

$\Diamond$

Probabilidade condicional e eventos independentes

A fim de apresentar como as definições de probabilidades condicional e de eventos independentes estão presentes na literatura, nesta seção serão apresentados de forma intuitiva,

[3] os cálculos são efetuados, a partir da multiplicação da probabilidade da ocorrência de cada um dos casos, isto acontece pelo fato de os eventos serem independentes, que será mais detalhados na Seção de probabilidade condicional e eventos independentes.

alguns exemplos que denotam os referidos conceitos. Para um estudo mais aprofundado recomenda-se [6, FERREIRA], [14, MEYER] e [20, ROSS].

Considere que João e Maria decidiram constituir uma família e consequentemente planejam ter filhos. Supondo que em seus planos gostariam de ter duas crianças, qual é a probabilidade de que tenham duas filhas, já que a primeira em que nasceu é mulher?

Primeiramente represente M para mulher e H para homem, com isso o espaço amostral Ω é descrito por:

$$\Omega = \{HH, MM, HM, MH\} \rightarrow n(\Omega) = 4,$$

em que $\{MH\}$ representa o evento em que a primeira filha seja uma mulher e o segundo seja um homem e $n(\Omega)$ é a cardinalidade do espaço amostral. Assim:

- Considere B o evento em que o casal tenha a primeira filha mulher. Então $B = \{MM, MH\}$. Assim a $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
- Considere A o evento em que o casal tenha duas filhas. Então $A = \{MM\}$. Assim a $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$.

A probabilidade condicional pode ser interpretada de duas maneiras como segue:

i. a primeira é dada pela seguinte definição,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

ii. a segunda é realizar a divisão do número de possibilidades de ocorrer $A \cap B$, pelo número de possibilidades de ocorrer B.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2}$$

Note que $P(A|B) = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{4} = P(A)$. Em outras palavras, a ocorrência do evento B afeta a probabilidade de ocorrência do evento A. Neste caso dizemos que os eventos são dependentes.

O mesmo problema será estudado agora, para o caso em que os eventos sejam independentes, ou seja: Dados dois eventos C e D do espaço amostral Ω, diz-se que C independe de D se a ocorrência de D não afeta a probabilidade de C. Assim:

i. Considere C o evento em que a primeira criança seja mulher, assim $C = \{MM, MH\}$ e com isso tem-se que $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$.

ii. Considere D o evento em que a segunda criança seja mulher, assim $D = \{MM, HM\}$ logo $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{2}$.

iii. Observe que a probabilidade condicional de ocorrer C, tendo ocorrido D é dada por $P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{1/4}{1/2} = \dfrac{1}{2}$.

No item (iii), foi inserido uma probabilidade condicional dos eventos C e D, na busca de mostrar que $P(C|D) = \dfrac{1}{2} = P(C)$, isto ocorre por que C e D são eventos independentes e com isso tem-se a seguinte definição.

Definição 1.2. Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω são chamados independentes se:

$$P(C \cap D) = P(C)\,P(D).$$

A probabilidade condicional e a independência de eventos, são ferramentas fundamentais e de grande aplicação, principalmente quando se estuda os conceitos de variáveis aleatória binomial e o processo de Poisson.

1.2 Variáveis aleatórias

Nesta seção será apresentado o conceito de variável aleatória. Por via de regras tem-se que dado um fenômeno aleatório qualquer, com um certo espaço amostral Ω, busca se estudar a estrutura probabilística das quantidades associadas a este fenômeno. De certa forma muitas vezes não é relevante saber a estrutura "física" do fenômeno e sim o valor associado ao resultado do experimento e a uma função desta dá-se o nome de *variável aleatória.*

Definição 1.3. Seja Ω o espaço amostral de um experimento. Uma função X que associa a cada elemento $w \in \Omega$ um único valor numérico $X(w) \in \mathbb{S}$, tal que $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}$ é chamada de *variável aleatória.* Ou seja,

$$\begin{aligned} X \ : \ \Omega &\longrightarrow \mathbb{S} \\ w &\mapsto X(w) \end{aligned}$$

Isto significa que Ω e $\mathbb{S}$ são respectivamente domínio e contradomínio da variável aleatória X.

Por exemplo, ao jogar-se dois dados, pode-se estar interessado em alguma função relacionada ao resultado final e não a forma como os dados apresentam. Um exemplo clássico presente na literatura é o seguinte:

Exemplo 1.5. Suponha que o experimento consista em jogar 3 moedas honestas, com "K" simbolizando o resultado cara e "C" simbolizando o resultado coroa em cada lançamento. E note que como as moedas são honestas, pode-se assumir que todos os resultados são igualmente prováveis.

Se Y representa o número de caras que aparecem, então Y é uma variável aleatória que pode ter um dos valores $0, 1, 2$ e 3. Neste caso:

$$\Omega = \{\underbrace{(C,C,C)}_{Y=0}, \overbrace{(C,C,K),(C,K,C),(K,C,C)}^{Y=1}, \underbrace{(K,C,K),(C,K,K),(K,K,C)}_{Y=2}, \overbrace{(K,K,K)}^{Y=3},$$

então as respectivas probabilidades são:

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= \frac{n((C,C,C))}{n(\Omega)} = \frac{1}{8} \\
P(Y=1) &= \frac{n((C,C,K))}{n(\Omega)} + \frac{n((C,K,C))}{n(\Omega)} + \frac{n((K,C,C))}{n(\Omega)} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\
P(Y=2) &= \frac{n((K,C,K))}{n(\Omega)} + \frac{n((C,K,K))}{n(\Omega)} + \frac{n((K,K,C))}{n(\Omega)} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\
P(Y=3) &= \frac{n((K,K,K))}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Observe que:

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^{3} Y = i\right) = \sum_{i=0}^{3} P(Y=i).$$

$\Diamond$

Exemplo 1.6. Considere dois estudantes de uma turma de 28 alunos. Admita que "A" seja o evento em que um aluno foi aprovado e "R" seja o evento que o aluno foi reprovado.

Ao tomar dois estudantes da turma e considerando os casos em que estes estudantes são aprovados ou reprovados, tem-se o seguinte espaço amostral.

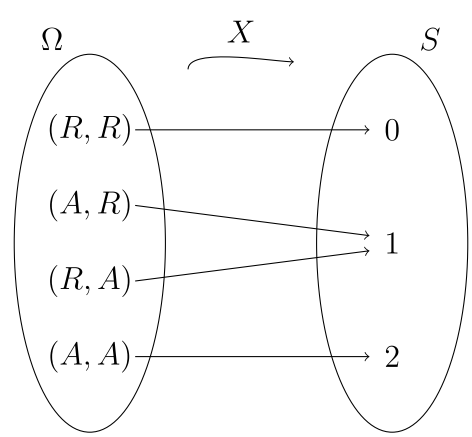
$$\Omega = \{AA, AR, RA, RR\}.$$

Assim, seja X a variável aleatória que representa o número de alunos aprovados dentre os dois e que cada combinação é *igualmente provável*, ou seja, a probabilidade de aprovação e reprovação são iguais, com isso:

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{n((R,R))}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} \\ P(X=1) &= \frac{n((A,R))}{n(\Omega)} + \frac{n((A,R))}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P(X=2) &= \frac{n((A,A))}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Logo, dentre os dois escolhidos tem-se que a probabilidade de zero aluno reprovado é igual a $\frac{1}{4}$, a probabilidade de um aluno reprovado é igual a $\frac{1}{2}$ e finalmente a probabilidade para dois alunos reprovados é igual a $\frac{1}{4}$.

No diagrama abaixo, tem-se que Ω é o conjunto do espaço amostral e S é o conjunto do número de alunos aprovados e X é a variável aleatória que associa cada elemento do espaço amostral ao conjunto S:



◊

Exemplo 1.7. Tomando a mesma turma de 28 alunos do exemplo anterior, considere X_i uma variável aleatória, onde:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-}\textit{ésimo} \text{ aluno da turma é aprovado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ou seja, será indicado por 1 a ocorrência do evento em que o i-ésimo *aluno é aprovado* e 0 caso contrário. A está variável aleatória dá-se o nome de *variável indicadora* do evento "A" que representa o aluno aprovado, e p_A é o valor associado a ocorrência do evento "A", assim note que $P(X = 1) = p_A$ e $P(X = 0) = 1 - p_A$, no qual $1 - p_A$ é o valor associado a ocorrência do complementar de "A", ou seja, significa que o aluno não é aprovado. Por outro lado note que se X é o número de alunos aprovados na turma então

$$X = \sum_{i=1}^{28} X_i.$$

$\Diamond$

1.2.1 Variáveis aleatórias discretas

Variáveis aleatórias discretas são aquelas variáveis aleatórias que assumem, no máximo, um total contável de valores. Observe que todos os exemplos apresentados até o momento são exemplos de variáveis aleatórias discretas devido a sua enumerabilidade. Outros exemplos são os seguintes:

- número de chamadas em um dia na central de atendimento de uma empresa;
- número de alunos aprovados pelo conselho escolar em certo ano letivo;
- número de clientes que visitaram uma loja num determinado período;
- número de desempregados durante um período de dois anos;
- número de pessoas entrevistadas em certo período durante uma pesquisa.

Definição 1.4. Para uma variável discreta X, defina-se a função discreta de probabilidade $p(a)$ de X como:

$$p(a) = P(X = a).$$

A função discreta de probabilidade $p(a)$ é **positiva** para no máximo um número contável de valores de a. Isto é, se X assume um dos valores $x_1, x_2, \ldots$, então $p(x_i) \geq 0$ para $i = 1, 2, ...$ e $p(x) = 0$ para todo $x \neq x_i$.

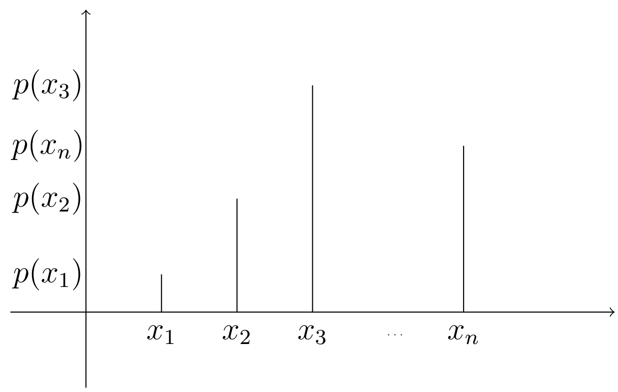
Tabela 1.1: Função de probabilidade

x_1	x_2	x_3	$\ldots$
$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$\ldots$

Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

A função de probabilidade pode ser representada conforme a Tabela 1.1, ou pela Figura 1.2

Figura 1.2: Gráfico da função de probabilidade



Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Observação 1.8. Das propriedades discutidas até momento e X recebendo um dos valores de x_i, tem-se $0 \leq p(x_i) \leq 1$, satisfazendo o Axioma 1 da probabilidade e

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = p(x_1) + p(x_2) + \ldots = 1$$

isto significa que a soma das probabilidades dos possíveis valores de X é igual a 1, deste modo satisfazendo o Axioma 2 da probabilidade.

Exemplo 1.9. Considere o experimento de lançar uma moeda honesta duas vezes. Seja X a função definida no espaço amostral que é igual ao número de coroas nos dois lançamentos.

Discussão: Para os dois lançamentos de uma moeda, tem-se o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{(K, K), (C, K), (K, C), (C, C)\}$$

Note que a probabilidade de sair duas caras é dada pela multiplicação entre as probabilidades de sair cara no primeiro lançamento e de sair cara no segundo lançamento, além disso tem-se que a ocorrência do primeiro evento não interfere na ocorrência do segundo evento e vice-versa, isto significa a probabilidade de eventos independentes,

$$P(X=0)=P((K,K))=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

analogamente tem-se que a probabilidade de sair uma cara e uma coroa é

$$P(X=1)=P((K,C))+P((C,K)),$$

como que $P((K,C))=P((C,K))=\frac{1}{4}$ logo, $P((K,C))+P((C,K))=\frac{1}{2}$, ou seja, $P(X=1)=\frac{1}{2}$ e por fim obtêm-se a probabilidade de sair duas coroas que é dada por:

$$P(X=2)=P((C,C))=\frac{1}{4},$$

portanto como foi colocado na Observação 1.8 a soma é

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1.$$

$\Diamond$

Exemplo 1.10. Considere o experimento de lançar uma moeda viciada duas vezes, em que a probabilidade de sair cara é $1/3$ e coroa é $2/3$. Seja X a função definida no espaço amostral que é igual ao número de coroas nos dois lançamentos.

Discussão: Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, observe que a probabilidade de sair duas caras é:

$$P(X=0)=P((K,K))=\frac{1}{3}\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

analogamente tem-se que a probabilidade de sair uma cara e uma coroa é:

$$P(X=1)=P((K,C))+P((C,K))=\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

e por fim obtêm-se a probabilidade de sair duas coroas que é dada por:

$$P(X=2)=P((C,C))=\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

portanto como foi colocado na Observação 1.8 a soma é:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1.$$

$\Diamond$

Exemplo 1.11. Suponha que a função de probabilidade de uma variável aleatória X é dada por

$$p(i) = c\,\frac{\lambda^i}{i!},$$

para $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, onde $\lambda > 0$. Determine, (a) $P(X = 0)$ e (b) $P(X > 2)$.

Sabe-se pela Observação 1.8 que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1,$$

além disso, note que $p(i)$ depende das constantes c e λ, logo o primeiro passo é descobrir se estas constantes devem ter algum valor específico. Da Definição 1.4 é claro que $c > 0$ e pelo enunciado tem-se $\lambda > 0$. Assim

$$\sum_{i=0}^{\infty} c\,\frac{\lambda^i}{i!} = 1,$$

ou seja,

$$c\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1,$$

ora, mas $\underbrace{e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}}_{*}$, fazendo as substituições cabíveis obtêm-se:

$$c\,e^{\lambda} = 1 \quad ou \quad c = e^{-\lambda}.$$

Isto significa que:

$$p(i) = c\,\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^i}{i!}$$

onde λ pode ser qualquer constante positiva. Neste caso é usual dizer que λ é um parâmetro da variável aleatória X. Com isso,

a) $P(X = 0) = e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$

b)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - (e^{-\lambda} + \lambda\, e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2\, e^{-\lambda}}{2}) \\ &= 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}) \end{aligned}$$

vale observar que no item (b) foi aplicado o complemento de $P(X > 2)$.

Será mostrado de forma intuitiva e por aproximações de até três casas decimais como é possível chegar na igualdade (*), obtida anteriormente:

Primeiramente tome $x = 1$, assim:

$$\begin{aligned} e^1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1^i}{i!} \\ &= \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} \\ &= 1 + 1 + 0,5 + 0,166 + 0,042 + 0,008 \\ &= 2,716 \end{aligned}$$

enquanto que $e^1 \approx 2,718$.

Agora, ao considerar $x = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} e^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} \\ &= \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \\ &= 1 + 2 + 2 + 1,333 + 0,666 + 0,266 \\ &= 7,265 \end{aligned}$$

enquanto que $e^2 \approx 7,389$.

Como que $0 \leq i < \infty$ podemos dizer a somatória neste intervalo, realmente converge para e^x. Uma demonstração mais rigorosa exige conceitos de cálculo diferencial, que pode ser encontrada no livro *Um curso de cálculo v.1.* de H.L. Guidorizzi.

$\Diamond$

1.2.2 Esperança e variância

A Esperança Matemática está presente intuitivamente em nosso dia a dia e muitas vezes nem nos damos conta. Em situações diárias do cotidiano, lá está a esperança matemática. Como exemplo uma notícia de jornal ou em um simples diálogo ao restaurante ou em um ponto de ônibus. Quando fazemos um pedido e perguntamos para o garçom quantos minutos levará para ficar pronto, ele vai nos fornecer um valor esperado, ou seja, o tempo médio em que o prato deve demorar a ficar pronto; ou quando estamos em um ponto de ônibus e perguntamos para as pessoas ao lado, quanto tempo leva até que o próximo ônibus venha, ela prontamente vai nos dar o valor esperado, o qual ela conseguiu constatar depois de algum tempo de experiência; ao ver no noticiário que a campanha de vacinação da gripe abrange toda a população brasileira, espera-se que o número de pessoa contaminadas com vírus da gripe diminua; quando há um aumento na linha de produção de uma indústria com implementação de tecnologia e melhores condições de serviço, espera-se aumentar os lucros. Todos estes exemplos apresentados nada mais são do que a esperança matemática fazendo-se presente a todo momento em nossas relações sociais, familiares, acadêmicas e profissionais, dentre tantas outras que vivenciamos diariamente.

Definição 1.5. Se X é uma variável aleatória com função de probabilidade $p(x)$, então o *valor esperado* de X, representado por $E[X]$, é definido por

$$\begin{aligned} E[X] &= x_1\, p(x_1) + x_2\, p(x_2) + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i) \\ &= \sum_{x:p(x)>0} x\, p(x) \end{aligned}$$

Pode-se dizer também que o valor esperado $E[X]$ é uma média ponderada dos possíveis valores x_i que a variável aleatória X pode receber.

Exemplo 1.12. Se a função de probabilidade de X é dada por

$$p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$$

então:

$$\begin{aligned} E[X] &= 0\, p(0) + 1\, p(1) \\ &= 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Este resultado nos mostra a média ponderada do dois possíveis valores, 0 e 1, que X pode assumir.

$\Diamond$

Exemplo 1.13. Determine o valor esperado $E[X]$, onde X é o resultado que obtêm ao jogar um dado honesto.

Solução: Como que o dado a ser jogado é honesto, significa que a probabilidade de sair qualquer um dos seis números é a mesma, ou seja, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$, com isso tem-se:

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}.$$

$\Diamond$

Exemplo 1.14. Seja X a variável aleatória que representa o resultado obtido ao jogar um dado viciado, em que a probabilidade de sair 3 ou 4 é o dobro da probabilidade dos números restantes. Assim determine o valor esperado $E[X]$.

Solução: Como o dado é viciado, com $p(3) = p(4) = \frac{2}{8}$ e $p(1) = p(2) = p(5) = p(6) = \frac{1}{8}$, então:

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{2}{8}\right) + 4\left(\frac{2}{8}\right) + 5\left(\frac{1}{8}\right) + 6\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{2}.$$

$\Diamond$

Exemplo 1.15. Considere o experimento de jogar um dado viciado, em que a probabilidade de sair 1 ou 6 é o dobro da probabilidade dos números restantes. Seja X a variável aleatória que representa o resultado que obtêm ao jogar dado. Determine o valor esperado $E[X]$.

Solução: Como o dado é viciado, com $p(1) = p(6) = \frac{2}{8}$ e $p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1}{8}$, então:

$$E[X] = 1\left(\frac{2}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 5\left(\frac{1}{8}\right) + 6\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{7}{2}.$$

$\Diamond$

Sugere-se ao leitor pensar o porque de os três últimos exemplos apresentarem o mesmo resultado.

O valor esperado (esperança) pode ser considerado uma média ponderada da variável aleatória, mas no entanto não nos diz como esses valores estão distribuídos ou quais são suas dispersões. Deste modo, a partir dai é que surge a ideia de variância para estudar-se a variação do espaço amostral em torno da esperança.

Proposição 1.16. Se X for uma variável aleatória discreta tomando valores em $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ e $Y = g(X)$ em que g é uma função real, então para a função de probabilidade p, tem-se:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p(x_i)$$

Definição 1.6. Se X é uma variável aleatória com média μ, então a variância de X, representada por $Var(X)$, é definida como

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

A Proposição 1.16 e a Definição 1.6 são condições necessárias para a proposição a seguir.

Proposição 1.17. Se X é uma variável aleatória, então $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$.

Demonstração. A prova se dará relacionando as definições de variância e valor esperado, pois a Definição 1.6 nos diz que $Var(X) = E[(X - \mu)^2]$, já a definição de valor esperado é dada por

$$E[X^n] = \sum_{x:p(x)>0} x^n\, p(x)$$

logo,

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= \sum_x (x-\mu)^2\, p(x) \\
&= \sum_x (x^2 - 2x\mu + \mu^2)\, p(x) \\
&= \sum_x x^2\, p(x) - 2\mu \underbrace{\sum_x x\, p(x)}_{E[x]=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_x p(x)}_{=1} \\
&= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E[X^2] - \mu^2
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 1.18. Calcule $Var(X)$ se X é a variável aleatória que representa o resultado de um dado honesto.

Solução:
Note no Exemplo 1.13 que $E[X] = \dfrac{7}{2}$. Por outro lado,

$$E[X^2] = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\,91$$

Com isso,

$$Var(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

◊

Exemplo 1.19. Se X representa o resultado de um dado viciado, como o apresentado no Exemplo 1.14. Então calcule $Var(X)$.

Solução:
Note no Exemplo 1.14 que $E[X] = \dfrac{7}{2}$. Por outro lado,

$$E[X^2] = 1^2\left(\frac{1}{8}\right) + 2^2\left(\frac{1}{8}\right) + 3^2\left(\frac{2}{8}\right) + 4^2\left(\frac{2}{8}\right) + 5^2\left(\frac{1}{8}\right) + 6^2\left(\frac{1}{8}\right) =$$

Com isso,
$$Var(X) = \frac{116}{8} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{18}{8}.$$

$\diamondsuit$

Observação 1.20. Quanto maior o valor da variância, mais a variável aleatória pode se afastar da esperança.

1.3 Distribuições de probabilidades discretas

Nesta seção, serão exibidas as distribuições de probabilidades discretas conhecidas, dando ênfase na distribuição binomial e na sua decorrente, a distribuição de Poisson. Serão apresentadas as distribuições de Bernoulli e binomial de maneira concisa e com alguns exemplos, em seguida a distribuição de Poisson com demonstrações, propriedades e exemplos.

De modo geral, diz-se que uma *distribuição de probabilidade* relaciona um determinado valor da variável aleatória em questão com a sua probabilidade de ocorrência.

Retomando a situação do exemplo 1.9, será feito a seguir uma tabela referente a distribuição de probabilidade do mesmo. Na tabela, a primeira coluna consta dos valores da variável aleatória X, na segunda estão as imagens inversas desses valores e terceira suas probabilidades.

Valores de X	Pontos amostrais	Probabilidades
0	(K, K)	$\frac{1}{4}$
1	$(K, C), (C, K)$	$\frac{1}{2}$
2	(C, C)	$\frac{1}{4}$

1.3.1 Variáveis aleatórias de Bernoulli e binomial

𝔇e modo geral utiliza-se a variável aleatória de Bernoulli, quando estuda-se experimentos e espaços que admitem apenas dois resultados, tais como: sucesso para um caso positivo e fracasso para um caso negativo. Esta variável aleatória recebe este nome em homenagem ao matemático suíço Jakob Bernoulli (1654 - 1705) que contribuiu para o desenvolvimento do calculo infinitesimal, das equações diferenciais e forte aplicações e desenvolvimento na teoria das probabilidades. Mesmo com toda essas contribuições há relatos históricos que Bernoulli "escreveu um livro durante anos e embora o teorema principal tenha sido provado em 1692, a prova não o satisfez e por isso nunca publicou. A principal contribuição do livro é o primeiro teorema limite da probabilidade que mais tarde foi estudado por Kolmogorov" [7, HACKING, pág. 143]. Vale ressaltar que Jakob Bernoulli fazia parte de uma família composta por matemáticos de várias gerações, sendo está uma das mais importante na história da Matemática.

Figura 1.3: Bernoulli

Fonte: O'Connor e Robertson, 1998.

Uma variável aleatória X é chamada ***variável aleatória de Bernoulli***, com parâmetro p, onde $0 \leq p \leq 1$, se sua função de probabilidade for dada por:

i) $p(0) = P(X = 0) = 1 - p$;

ii) $p(1) = P(X = 1) = p$;

Neste caso tem-se, que $X = 1$ representa sucesso e $X = 0$ representa fracasso.

Um exemplo da variável aleatória de Bernoulli é o Exemplo 1.7, visto anteriormente com a variável indicadora.

Exemplo 1.21. Joãozinho e Pedrinho querem ir a casa de Mariazinha para fazer o trabalho de Matemática, durante o caminho eles se deparam com uma bifurcação, sendo que apenas uma delas leva ao caminho certo e assim eles conseguiram fazer o trabalho juntos. Suponha que eles tenham a mesma chance de escolher um dos caminhos. Deste modo pode-se definir a seguinte variável aleatória:

$$C_a = \begin{cases} 1, & \text{o caminho correto é escolhido} \\ 0, & \text{o caminho errado é escolhido} \end{cases}$$

Ou seja, tem-se que $C_a = 1$ é o evento onde os amigos pegaram o caminho correto e conseguiram fazer o trabalho juntos e $C_a = 0$ é o evento em que os meninos pegaram o caminho errado e assim o trabalho não será realizado. Neste caso, C_a é definida como uma variável de Bernoulli com parâmetro $1/2$, partindo do principio que a probabilidade de os amigos pegarem o caminho correto é igual a de pegarem o caminho errado.

$\lozenge$

Agora como parte da generalização da variável aleatória de Bernoulli será introduzida a variável aleatória binomial que pode ser interpretada como o número de sucessos obtidos em n tentativas independentes de Bernoulli com probabilidade p de sucesso e $1-p$ de fracasso. Assim, diz-se que uma variável aleatória X é uma ***variável aleatória binomial*** com parâmetros (n, p) se sua função de probabilidade é dada por:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{(n-i)}, \ i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}. \tag{1.1}$$

Da equação 1.1 tem-se que $\binom{n}{i}$ é igual ao número de diferentes sequências de n resultados, levando a i sucessos, sendo p^i a probabilidade dos i sucessos e $(1-p)^{n-i}$ a probabilidade dos $(n-i)$ fracassos.

Observação 1.22. A seguir será mostrado como é possível chegar na soma das probabilidades utilizando o teorema binomial. Recomenda-se [8, Cap.2] caso o leitor tenha maior interesse nos estudos do respectivo teorema.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^n \\ &= [p + (1-p)]^n \\ &= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} p(i) \end{aligned}$$

Exemplo 1.23. Cinco moedas honestas são jogadas. Se por hipótese os resultados são independentes, determine a função de probabilidade do número de caras obtidas.

Solução: Se X é igual ao número de caras (sucessos) que aparecem, então X é uma variável aleatória binomial, com parâmetros $(n = 5, p = 1/2)$. Logo, pela função de variável aleatória binomial, tem-se:

$$p(i) = P(X = i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$$

Os cálculos a seguir mostram os valores associados as probabilidades de $P(X = i)$; $0 \leq i \leq 5$.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \\
P(X=1) &= \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} \\
P(X=2) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} \\
P(X=3) &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} \\
P(X=4) &= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32} \\
P(X=5) &= \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Exemplo 1.24. Considere agora que três moedas viciadas são jogadas, de tal forma que a probabilidade de dar cara é $1/4$ e a probabilidade de coroa é $3/4$. Se por hipótese os resultados são independentes, determine a função de probabilidade do número de caras obtido.

Solução: Se X é igual ao número de caras (sucessos) que aparecem, então X é uma variável aleatória binomial, com parâmetros $(n = 3, p = 1/4)$. Portanto, pela função de probabilidade da variável aleatória binomial, tem-se:

$$p(i) = P(X = i) = \binom{3}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{3-i}$$

Os cálculos a seguir mostram os valores associados as probabilidades de $P(X = i); 0 \leq i \leq 3$.

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= \left(\begin{array}{c}3\\0\end{array}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\\
P(X=1) &= \left(\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}\\
P(X=2) &= \left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}\\
P(X=3) &= \left(\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

Note que a soma das probabilidades

$$\frac{27}{64}+\frac{27}{64}+\frac{9}{64}+\frac{1}{64}=1$$

$\Diamond$

Exemplo 1.25. Em uma sala de aula com 37 alunos, sabe-se que a probabilidade de reprovação de cada aluno por nota ou falta é de $0,01$, supondo que os resultados sejam independentes, determine a função de probabilidade do número de alunos retidos.

Solução: Chame de X o número de alunos retidos (sucessos), então tem-se que X é uma variável aleatória binomial, com parâmetros $(n=37, p=0,01)$, pois n é igual ao número de alunos na sala e p é igual a nossa probabilidade de retenção. Logo, obtêm-se:

$$P(X=0)=\left(\begin{array}{c}37\\0\end{array}\right)\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{37}\approx 0,69$$

$$P(X=1)=\left(\begin{array}{c}37\\1\end{array}\right)\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^{36}\approx 0,25$$

$$\vdots$$

$$P(X=37)=\left(\begin{array}{c}37\\37\end{array}\right)\left(\frac{1}{100}\right)^{37}\left(\frac{99}{100}\right)^{0}\approx 10^{-74}$$

Pelo teorema binomial e pela soma das probabilidades:

$$\sum_{i=0}^{37}p(i)=\sum_{i=0}^{n}\left(\begin{array}{c}37\\i\end{array}\right)(0,01)^i(0,99)^{37-i}=1$$

$\diamondsuit$

A seguir será apresentado um exemplo de aplicação que envolve qual das probabilidade é mais favorável ao usuário, isto pode ser aplicado a situações reais então atente-se a cada passo mostrado.

Exemplo 1.26. Suponha-se que um conselho escolar é formado de duas maneiras distintas, um formado por cinco professores apenas e um outro formado pelo diretor, coordenador e um professor representante. Sabendo-se que quando o aluno é levado ao conselho cada membro do conselho tem a probabilidade p para votar em sua aprovação, se o aluno precisa que a maioria do conselho vote a seu favor para ser aprovado, para que valores de p um conselho com cinco membros é preferível em relação ao de três membros?

Solução: Considere X uma variável aleatória binomial com parâmetros $(5, p)$ que representa os votos dos membros do conselho de 5 membros para aprovação do aluno, p é a probabilidade de aprovar e $1 - p$ é a probabilidade de reprovar. Então

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{5}{5} p^5(1-p)^0 = p^5, \\ P(X = 4) &= \binom{5}{4} p^4(1-p)^1 = 5p^4(1-p), \\ P(X = 3) &= \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2. \end{aligned}$$

Das equações acima tem-se que a aprovação do aluno se dará com probabilidade:

$$p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2.$$

Agora considere Y uma variável aleatória binomial com parâmetros $(3, p)$ que representa os votos dos membros do segundo conselho em que p é a probabilidade de aprovar e $1 - p$ é a probabilidade de reprovar. Neste caso, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= \binom{3}{3} p^3(1-p)^0 = p^3, \\ P(Y = 2) &= \binom{3}{2} p^2(1-p)^1 = 3p^2(1-p) \end{aligned}$$

e a aprovação do aluno pelo conselho com três membros se dará com probabilidade:

$$p^3 + 3p^2(1-p).$$

Agora será analisado os valores de p em que o conselho de cinco membros é preferível ao conselho de três membros, isto é

$$p^5 + 5p^4(1-p) + 10p^3(1-p)^2 \;\; > \;\; p^3 + 3p^2(1-p),$$

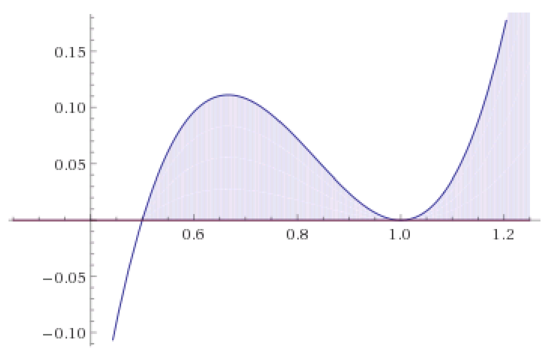
o que é equivalente a

$$6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 \;\; > \;\; 0,$$

é claro que $p = 1$ é uma raiz do polinômio acima. Assim ao fazer a divisão de $6p^3 - 15p^2 + 12p - 3$ por $p - 1$ obtêm-se o seguinte polinômio, $6p^2 - 9p + 3$ que possui as raízes $p = 1$ e $p = 1/2$. Como é necessário ter os valores de p maiores que zero e menores que 1, logo $1/2 < p < 1$.

A Figura 1.4 mostra o comportamento da função $6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 > 0$ e a parte pintada são os possíveis valores de p, porém o domínio a ser considerado é o intervalo $[0, 1]$.

Figura 1.4: Gráfico do valor de p.



Fonte: Plotado pelo autor em WolframAlpha (2017).

◊

1.3.2 Variável aleatória de Poisson

Figura 1.5: Poisson

Fonte: O'Connor e Robertson, 2002.

𝔖iméon Denis Poisson, foi um brilhante engenheiro e matemático frânces do século XIX, de família humilde de uma província francesa. Em meados da revolução francesa seu pai conseguiu eleger-se presidente da província de Pithviers por influência que teve durante a revolução da época, assim conseguindo status e condições para investir nos estudos de medicina do filho, pois acreditava que a medicina iria garantir um futuro próspero ao menino. Mas o amor pela matemática e ciências afins foi mais alto, obtendo assim méritos e prêmios matemáticos e físicos em diversas áreas.

Na teoria das probabilidades Denis "descobriu a distribuição de Poisson, que foi introduzida em um de seus livros o qual tratava da aplicação da teoria das probabilidades a processos, julgamento criminais e similares"[20, ROSS].

Uma variável aleatória X que pode assumir qualquer um dos valores $0, 1, 2, ...$ é chamada de ***variável aleatória de Poisson*** com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(i) = P(X = i) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^i}{i!},\ i = 0, 1, 2, \ldots .$$

A função $p(i)$ acima define uma função de probabilidade, já que

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) \quad = 1,$$

A variável aleatória de Poisson, pode ser usada como uma aproximação da variável binomial com parâmetros (n, p), para n suficientemente grande e p suficientemente pequeno, de tal forma que $\lambda = n\,p$ seja moderado.

Proposição 1.27. Seja X uma variável binomial (n, p) e seja $\lambda = n\,p$ então, para n suficientemente grande e p suficientemente pequeno tem-se $P(X = i) \approx e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^i}{i!}$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{(n-i)} \\
&= \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))}{n^i} \, \frac{\lambda^i}{i!} \, \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^i}}_{*} \\
&\approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}
\end{aligned}$$

Logo, tem-se que

$$P(X=i) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

□

A situação * é merecedora de comentário pois envolve alguns casos de limites interessantes, como o caso em que n é suficientemente grande:

i. da expressão,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))}{n^i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))}{\underbrace{n\,n\,n\ldots n}_{i-vezes}},$$

a partir do segundo fator tem-se o caso a seguir, para n suficientemente grande vale

$$\frac{(n-1)}{n} = 1 - \frac{1}{n} \approx 1,$$

logo, como são i fatores 1, conclui-se que $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-(i-1))}{n^i} \approx 1$.

ii. já a expressão $1-\frac{\lambda}{n}$ é análoga a do item i), pois λ é uma constante. Logo $1-\frac{\lambda}{n} \approx 1$.

iii. tem-se que $(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$.

Seguem alguns exemplos de aplicação:

- o número de erros de impressão em uma página; de fato, se a probabilidade de encontrar uma letra errada for extremamente pequena (p), ao considerar o número de letras em uma página (texto) n, ao realizar o produto destes parâmetros obtêm-se λ um valor que pode-se dizer moderado.

- os números de telefones digitados incorretamente em um dia numa central telefônica; de fato, seja (p) a probabilidade de encontrarmos um dígito de telefone errado e (n) o número de telefones digitados em uma central telefônica, logo tem-se $\lambda = n\,p$ como um parâmetro moderado.

- o número de alunos do curso de matemática que fecharam com dez em todas as disciplinas cursadas no semestre; tem-se que (p) é a probabilidade do aluno do curso de matemática realizar a tarefa, seja (n) o número de alunos do curso de matemática, logo $\lambda = n\,p$ é o parâmetro encontrado.

Cada uma das variáveis acima (exemplos) são aproximadas pela distribuição de Poisson pela mesma razão, isto é, por causa da aproximação de Poisson para a distribuição binomial.

Proposição 1.28. Seja X uma variável aleatória de Poisson de parâmetro λ, tal que $\lambda > 0$. Então $E(X) = Var(X) = \lambda$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i}}{i!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{i}}{i(i-1)!} \\
&= \lambda\sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(i-1)}}{(i-1)!},\ \text{tome } (i-1) = j \text{ assim} \\
&= \lambda\,e^{-\lambda}\sum_{j=o}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!}
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{j=o}^{\infty} \frac{\lambda^{j}}{j!} = e^{\lambda},$$

então $\lambda\,e^{-\lambda}\,e^{\lambda} = \lambda$. Logo $E[X] = \lambda$, assim o valor esperado de uma variável aleatória de Poisson X é igual a seu parâmetro λ. Para determinar sua variância, primeiro calcule $E[X^2]$.

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \text{ao tomar } j = i-1, \text{ tem-se} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{j!} \\
&= \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} j \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \right] \\
&= \lambda(\lambda+1),
\end{aligned}
$$

logo,

$$
E[X^2] \;=\; \lambda^2 + \lambda \; e \; E[X] = \lambda.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

□

Com isso, o *valor esperado* e a *variância* de uma variável aleatória de Poisson são iguais ao seu parâmetro λ.

Os exemplos a seguir mostram como a distribuição de Poisson pode ser aplicada em situações práticas.

Exemplo 1.29. Após a digitação do seu TCC, Dimas ao utilizar o comando de correção ortográfica detectou 100 erros de digitação em seu texto que contém um total de 400 páginas, isto significa ter uma média de $0,25$ por página. Supondo que distribuição do número de erros de digitação por página tem distribuição de Poisson com $\lambda = 0,25$ encontre a probabilidade de que em uma página qualquer, a) não contenha erros; b) contenha exatamente 2 erros; c) contenha no mínino 1 erro.

Solução: Chamando X a variável aleatória de Poisson que conta o número de erros por página tem-se:

a) $P(X=0) = e^{-0,25}\,\dfrac{(0,25)^0}{0!} = e^{-0,25}$

b) $P(X=2) = e^{-0,25}\,\dfrac{(0,25)^2}{2!}$

c) $P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0,25}$

$\Diamond$

Exemplo 1.30. Uma pesquisa realizada pela “Pesquisas S.A.” sobre acidentes em unidades escolares, apontou que o número médio mensal de acidentes escolares (aluno machucado na escola) envolvendo alunos no município de São Paulo segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λ igual a $2,7$. Qual é a probabilidade de que ocorram pelo menos 3 acidentes desse tipo no mês seguinte?

Solução: Considere X uma variáveal aleatória de Poisson que representa o número de acidentes em um mês, como $\lambda = 2,7$, então:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= e^{-2,7}\,\frac{(2,7)^0}{0!} \\
P(X=1) &= e^{-2,7}\,\frac{(2,7)^1}{1!} \\
P(X=2) &= e^{-2,7}\,\frac{(2,7)^2}{2!}
\end{aligned}
$$

Logo, a probabilidade desejada é:

$$
\begin{aligned}
P(X\geq 3) &= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \\
&= 1 - \left(e^{-2,7}\,\frac{(2,7)^0}{0!} + e^{-2,7}\,\frac{(2,7)^1}{1!} + e^{-2,7}\,\frac{(2,7)^2}{2!}\right) \\
&= 1 - e^{-2,7}\left(\frac{(2,7)^0}{0!} + \frac{(2,7)^1}{1!} + \frac{(2,7)^2}{2!}\right) \\
&\approx 0,507
\end{aligned}
$$

$\Diamond$

Embora exista uma variada gama de possibilidades de aplicações da variável aleatória de Poisson, optou-se por demonstrar neste exemplo uma aplicação histórica e um tanto “aleatória”, a qual trata-se do ataque das Bombas de Londres.

Exemplo 1.31. Bombas em Londres. Após os ataques de bombas aérea em Londres durante a Segunda Guerra Mundial, foi feito um teste estatístico [2, CLARKE], o qual apontou que as regiões alvos de bombas foram um tanto aleatórias, conforme diz a história.

De fato, foi selecionada uma área na região sul na cidade de Londres de aproximadamente $144km^2$ e está região foi dividida em 576 quadras e cada uma com $0,25km^2$. Sobre o perímetro considerado o número de bombas dentro da área envolvida era 537. O número esperado da quadra correspondente e o atual número obtido foi calculado pelo modelo da distribuição de Poisson.

O resultado forneceu um exemplo de conformidade com a lei de Poisson, assim sendo um interessante material para compor um livro na área da estatística. A Tabela 1.2 mostra os resultados obtidos.

Os cálculos a seguir mostram como se chega aos resultados que constam na segunda coluna da Tabela 1.2. O primeiro passo a seguir é determinar o valor de λ que é dado por $\lambda = \dfrac{537}{576} \approx 0,932$, ou seja, esse será o número esperado de bombas por quadra. Seja X_i a variável aleatória de Poisson que representa o número de bombas em cada quadra, para $0 \leq i \leq 576$. Vamos estudar a probabilidade do evento $\{X_i = j\}$ para cada i e j.

- Para $j = 0$, tem-se:
$$P(X_i = 0) = e^{-0,932}\frac{(0,932)^0}{0!} \approx 0,393$$
Assim tem-se que $0,393$ é a probabilidade de que em uma das 576 quadras não houve ocorrência de bombas. Como há um total de 576 quadras basta multiplicar este valor por $0,393$ obtendo um valor esperado aproximado de $226,74$ quadras em que não há bombas.

- Para $j = 1$, tem-se:
$$P(X_i = 1) = e^{-0,932}\frac{(0,932)^1}{1!} \approx 0,366$$
Isto significa que a probabilidade de haver exatamente uma bomba em cada uma das 576 quadras é de $0,366$, assim multiplicando $0,366$ por 576, obtêm-se um valor esperado aproximado de $211,39$ quadras.

$\lozenge$

Outro exemplo clássico que utiliza a distribuição de Poisson é o da desintegração radioativa de Rutherford, Chadwick e Ellis que consta no livro de [4, FELLER].

Tabela 1.2: Bombas atiradas em Londres

nº de bombas por quadra	bombas/quadra (Poisson)	bombas/quadra
0	226, 74	229
1	211, 39	211
2	98, 54	93
3	30, 62	35
4	7, 14	7
mais que 5	1, 57	1
	576, 00	576

Fonte:Clarke, 1946.

Exemplo 1.32. Desintegração radioativa. Uma substância radiotiva emite partículas alfa. O número de partículas que atingem uma determinada região do espaço, durante o tempo t, é o exemplo mais conhecido de evento aleatório que obedece a lei de Poisson. Em um experimento famoso, uma substância radioativa foi observada durante $N = 2.608$ intervalos de tempo de $7,5$ segundos cada um. Em cada período, foi observado o número de partículas que atingiram um contador. Na Tabela 1.3 tem-se que N_k é o número de períodos que apresentam exatamente k partículas. O número total de partículas é $T = \sum k\, N_k = 10.094$ e a média $T/N = 3,870$. Considere N_p a variável aleatória de Poisson, ao analisar a tabela note que os valores teóricos $N_p(k; 3,870)$, que estão bem próximos dos números observados N_k.

$\Diamond$

1.4 Atividades de aplicação: probabilidade em sala de aula

Esta seção consiste em apresentar exercícios e atividades de aplicação e fixação dos conteúdos, sendo alguns deles um tanto prático. Inicialmente será proposta uma atividade para o

Tabela 1.3: Desintegração radioativa

k	N_k	$N_p(k; 3, 870)$
0	57	$54,399$
1	203	$210,523$
2	383	$407,361$
3	525	$525,496$
4	532	$508,418$
5	408	$393,515$
6	273	$253,817$
7	139	$140,325$
8	45	$67,882$
9	27	$29,189$
$k \geq 10$	16	$17,075$
Total	2608	$2608,000$

Fonte: Feeler, 1976.

professor aplicar em sala de aula em diversos anos/séries do Ensino Fundamental ou Médio de acordo com a Base Nacional Comum Curricular ou até mesmo o currículo vigente na unidade escolar.

Partindo do princípio de que a teoria das probabilidade foi desenvolvida a partir dos resultados obtidos com o lançamento de dados e moedas com o intuito voltado a jogos de azar, disputas em apostas, dentre outras, neste momento será considerado como campo de “disputa” a sala de aula, em que o aluno será colocado como protagonista no estudo e desenvolvimento do pensar Probabilidade.

Atividade: Relações entre números e alunos

Objetiva-se com essa atividade, aprimorar os conteúdos estudados em anos/séries até o momento e aplicação da mesma, concomitantemente espera-se que o aluno aprenda e desenvolva os conteúdos e habilidades relacionadas a teoria das probabilidades para o Ensino Básico, como por exemplo, associar valor de probabilidade a uma situação-problema ou associar a probabilidade com outros conteúdos matemáticos.

Materiais necessários: sulfite, moeda, caixa de sapato ou sacola plástica, giz, quadro, caneta e lista piloto com identificação dos alunos por número de chamada.

Roteiro: No primeiro momento o professor pode identificar os estudantes com o número da chamada presente na lista piloto. Desta forma considere o experimento de escolher um aluno ao acaso, assim tem-se que o espaço amostral é formado pelos estudantes presentes em sala no dia da atividade. Em seguida deve-se dar início a atividade.

- o professor pode dar início ao conceito de experimento aleatório, espaço amostral e evento em um espaço amostral exemplificando com a quantidade de estudantes presentes na sala e a quantidade de estudantes matrículados. Além disso pode definir algum evento possível do espaço amostral, dialogando assim com a sala os diversos eventos possíveis.

- o professor pode introduzir o conceito de Probabilidade de um evento abordando a razão entre o número de resultados favoráveis pelo número total de resultados do espaço amostral. Como no item anterior é interessante que o estudante participe da aula, tornando-se assim autor da aula.

Considere o experimento aleatório de sortear um aluno ao acaso em uma turma de 30 alunos. Sabendo que cada aluno está relacionado ao seu respectivo número da chamada. Seja A o evento em que o aluno sorteado está relacionado a um número par.

Com isso, tem-se que o espaço amostral do experimento é dado por:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 30\},$$

e o evento A é dado por:

$$A = \{2, 4, 6, \ldots\}.$$

Logo, a probabilidade da ocorrência do evento A é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

Após a introdução dos conceitos preliminares e a identificação dos alunos de maneira conveniente as seguintes questões podem ser feitas[4].

Alunos a partir do sétimo ano:

Questão 1: Qual a probabilidade de sair um menino?

Questão 2: Qual a probabilidade de que o aluno sorteado esteja relacionado a um número primo?

Questão 3: Qual é a probabilidade de que o aluno sorteado esteja relacionado a um número divisível por 4?

Questão 4: Escreva as respostas anteriores em forma de porcentagem.

Alunos a partir do Ensino Médio: o professor pode envolver algumas questões relacionadas a problemas de contagem, questões que envolvem sequências numéricas e probabilidade condicional.

Questão 5: O professor pode escolher uma sequência numérica e desenvolver com os alunos algumas propriedades da sequência e em seguida calcular a probabilidade de sortear algum termos específico da sequência. Pode-se tomar como exemplo a sequência dos números divisíveis por três dentre a quantidade de alunos da sala e perguntar qual a probabilidade de sortear um aluno em que sua representação seja um número divisível por três. Em seguida envolvendo probabilidade condicional, pode-se fazer a mesma perguntar mas com a condição de que o número sorteado seja divisível por três e par (ímpar).

Questão 6: Envolvendo raciocínio combinatório e condicional, o professor pergunta. E se eu pretendo sortear três alunos, de quantas maneiras diferentes podem ser organizados estes alunos? Dentre estes três alunos qual a probabilidade de sortear uma menina sabendo-se que os dois primeiros sorteios foram meninos?

Parte dois: Vamos ver na prática!!!

Na busca de relacionar a teoria com a prática, o professor pode colocar em uma urna (sacola plástica), papéis enumerados com as quantidades de alunos presentes. Com a ajuda de um voluntário junto à lousa o professor percorre a sala e solicita que cada aluno sorteie um papel e o retorne a sacola. Enquanto isso o voluntário registra os números sorteados na lousa. Convém que o professor repita o experimento pelo menos duas vezes com cada aluno. Em seguida o professor pode retornar as questões anteriores (1 a 4), para observar se a quantidade

[4] As questões serão divididas por ano/série, envolvendo conteúdo estudado em diversos anos escolares

de números sorteados se aproxima dos resultados registrados na lousa. É importante destacar que quanto mais sorteios houver, maior será a aproximação dos resultados.

Como tarefa e a nível de curiosidade, o professor pode solicitar que os alunos façam ao menos 50 sorteios e registrem, e no dia seguinte o professor registra todos os sorteios obtidos pelos alunos e discuta com eles os resultados obtidos.

Avaliação: Uma maneira de avaliar o aluno de acordo com as habilidades e conteúdos trabalhados, pode ser uma avaliação contínua, com a observação corriqueira do aluno e das atividades desenvolvidas durante as aulas. Uma outra alternativa é propor ao aluno questões abertas para que o mesmo possa expressar as ideias compreendidas durante as aulas a partir da escrita, desenho ou até mesmo de forma dialogada.

Exercícios de fixação

Exercício 1: A primeira noção de probabilidade que é introduzida no ensino fundamental é a de que a probabilidade é um tipo de *razão especial*, como por exemplo no lançamento de uma moeda, a probabilidade de obter a face "cara" é de uma em duas, ou seja uma chance em duas, ou $1/2$, ou ainda 50%. Considere a questão a seguir. Uma urna contendo números de 0 a 9. Retirando-se uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de o número tirado seja 9. Qual é a probabilidade de sair um número par? Qual é a probabilidade de retirar o número 3, sabendo-se que já foi retirado o número 7?

Exercício 2: Sabendo-se que Gabriel contém 5 pares de tênis, com as cores azul, preto, marrom, cinza e verde. Determine a probabilidade de tirar um dos tênis azuis.

Exercício 3: Suponha uma circunferência dividida em setores circulares, onde cada setor corresponde aos termos de uma progressão aritmética de razão 16 e com $a_1 = 20$ sendo a_1 o primeiro termo da progressão. Determine quantos termos há nessa progressão, uma vez que a soma dos termos corresponde a medida em graus da circunferência. Qual é a probabilidade de ao escolher aleatóriamente um dos termos da progressão, o termo escolhido ser o a_3? E o a_1? Qual é a probabilidade de escolher um termo a_i, com $i < 4$?

Atividade: Atualidade e Probabilidade

A febre amarela é uma doença infecciosa aguda, febril, não contagiosa, de curta duração e de gravidade variável. De acordo com a Tabela 1.4 que consta de um estudo realizado por, Cavalcante e Tauil (2014).

Tabela 1.4: Febre amarela de 2000 a 2012

Unidade da Federação	Nº de casos confirmados	Nº de óbitos
Minas Gerais	101	41
Goiás	77	39
São Paulo	32	15
R.G. do Sul	21	9
Mato Grosso	20	11
Amazonas	18	11
Pará	14	8
Bahia	10	3
M.T. do Sul	10	3
Distrito Federal	8	6
Tocantins	6	4
Roraima	5	4
Paraná	2	1
Acre	1	0
Rondonia	1	1
Total	326	156

Fonte:Cavalcante e Tauil, 2012.

> Com as informações da tabela e do enunciado anterior o professor pode abordar com os alunos aspectos relacionados aos motivos que pode levar uma pessoa a contrair o vírus da febre amarela e até trabalhar de modo interdisciplinar com um professor das disciplinas de Biologia ou Geografia. Assim, com a colaboração do professor de Biologia, poderá aprofundar mais o assunto sobre vírus e febre e com o professor de Geografia, poderá apresentar as regiões do país em que há os maiores índices do vírus e os motivos e aspectos sanitários e epidemiológicos que ocasionam a contaminação.

Questão 1: Calcule a probabilidade de se obter um óbito dentre os casos confirmados.

Questão 3: Dentre o número de casos confirmados qual é a probabilidade que ao sortear aleatóriamente um paciente positivo, este paciente seja da região Norte do país? e da região Sul? Pesquise o porque algumas regiões do país tem maiores indícios de febre amarela.

Questão 4: Dado que teve um óbito pela febre amarela, qual a probabilidade de que ele seja do Estado do Tocantins?

Com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, é possível fazer os cálculos de probabilidades, fazer estudos dos eventos prováveis, aplicar outras distribuições na tabela, relacionar os resultados da tabela ao espaço tempo físico e histórico social.

Questão 5: Após encontrar a probabilidade de morte de um caso confirmado, chame de p o valor de cada uma das probabilidades encontradas. Escreva a distribuição binomial correspondente ao Estado de Mato Grosso do Sul, para o número de óbitos dentre os casos confirmados. Quais suposições você levou em consideração. Faça o mesmo para o Estado de Goiás.

Questão 6: Considere o número total de casos detectados durante todo o período estudado num total de 326 casos, supondo que a probabilidade de morte dos infectados é 0,47. Descreva a função de probabilidade do número de óbitos.

Atividade: Bombas de Londres e a caixa de feijão

Esta atividade tem por princípio aplicar a distribuição de Poisson, referenciando-se no problema das bombas de Londres, a qual os alunos serão protagonista da mesma.

A região à ser considerada é a caixa de papelão de tamanho grande (caixa da máquina de lavar roupa, por exemplo), a qual deverá ser "bombardeada" com caroços de feijão com um total de 100 ou mais. Após o bombardeio, a caixa deve ser dividida em pequenas regiões. Com isso obtêm-se o parâmetro λ que será dado pela divisão do número de caroços pelo número de regiões que a caixa foi dividida. Logo, após a obtenção de λ calcule os valores para os números de feijões por regiões e verifique se os valores obtidos se aproximam dos valores reais. Para complementar esta atividade sugere-se que seja apresentado aos alunos o filme chamado “O jogo da imitação”, que embora não aborde o conteúdo da probabilidade trata da Segunda Guerra Mundial, referindo-se a importância dos matemáticos ingleses em desvendar enigmas a partir de combinações e criptografia.

Atividade: Comissões com polinômios

Atividade 6: Usando o Exemplo 1.26 determine qual dos dois conselhos é mais favorável ao aluno se a probabilidade de aprovação é $3/4$. Em que condições de p o conselho com três membros é mais favorável ao aluno?

Capítulo 2

Processo de Poisson

De acordo com [12, KEELER] existe uma enumerabilidade de postulados para dizer como iniciou-se ou como foi descoberto o processo de Poisson. Há relatos de que o uso mais antigo do processo de Poisson foi feito por John Michell em 1767, uma década antes de Poisson ter nascido. Corrobora-se que Michell estava interessado na probabilidade de uma estrela estar dentro de uma certa região de outra estrela sob o pressuposto de que as estrelas estavam "espalhadas por mera casualidade," com isso estudou um exemplo que consiste nas seis estrelas mais brilhantes das Plêiades (aglomerado estelar), sem derivar a distribuição de Poisson.

Na Seção 1.3.2 atentamo-nos que a distribuição de Poisson decorre particularmente da distribuição binomial com um desdobramento apropriado a um grande número de fenômenos observáveis. Neste capítulo apresentar-se-á o processo de Poisson por intermédio de condições, lemas, proposições e teoremas a partir de uma dedução intuitiva e compreensível. Vale ver com acuidade que Processo de Poisson é um Processo Estocástico em tempo contínuo que não será dissertado neste trabalho.

2.1 Variáveis aleatórias contínuas

Variáveis aleatórias contínuas e variáveis aleatórias exponencias são assuntos fundamentais, para a compreensão, entendimento e conexidade do Processo de Poisson.

Ao tratar-se de distribuições contínuas, basicamente basta substituir a função de probabilidade discreta $p(a)$ de acordo com a Definição 1.4 por uma função f de contradomínio não negativo e f é contínua, então os possíveis valores da variável aleatória passa a ser não enumeráveis.

Definição 2.1. Dize-se que X é uma ***Variável Aleatória Contínua***, se existir uma função não negativa f que satisfaz as condições abaixo:

i.

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

ii.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \tag{2.2}$$

iii. Para todo $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ tem-se:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_{c}^{d} f(x)dx. \tag{2.3}$$

Observação 2.1. Na literatura f é comumente chamada de *função densidade de probabilidade* (fdp) da variável aleatória X. É de grande relevância observar o intervalo em que a função está definida.

Exemplo 2.2. Seja X uma variável aleatória contínua, dada pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Discussão: Note que

$$P(0 \leq X \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) = \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4x \; dx = 2x^2 \Big|_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

o que satisfaz a condição de fdp.

Agora considere a mesma função acima, porém com domínio $0 \leq x \leq 1$, observe que ao calcular a integral obtêm-se:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_{0}^{1} 4x \; dx = 2x^2 \Big|_{0}^{1} = 2$$

o que significa que a função acima não está bem definida para o intervalo $[0, 1]$ logo, pode-se dizer que não é uma fdp.

$\Diamond$

Exemplo 2.3. Seja X uma variável aleatória continua que representa a duração da vida (em horas) de uma bateria de celular, suponha a seguinte fdp f de X.

$$f(x) = \begin{cases} k/x^2, & 1000 \leq x \leq 3000 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a constante k.

Solução: Da condição 2.2 tem-se que a integral definida da função é igual a 1, ou seja, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$, pela definição da fdp segue, $\int_{1000}^{3000} k/x^2\ dx = 1$ então,

$$\int_{1000}^{3000} \frac{k}{x^2}\ dx \ = \ k \int_{1000}^{3000} \frac{1}{x^2}\ dx \ = \ k\, \frac{x^{-1}}{-1}\bigg|_{1000}^{3000} \ = \ -k\, \frac{-2}{3000} \ = \ 1,$$

logo,

$$k = 1500.$$

Este resultado vale a pena comentar, pois note que a função está definida no intervalo $[1000, 3000]$ fora desse intervalo tem-se $f(x) = 0$. Isto significa que,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{1000} f(x)\ dx}_{0} + \underbrace{\int_{1000}^{3000} \frac{k}{x^2}\ dx}_{1} + \underbrace{\int_{3000}^{\infty} f(x)\ dx}_{0} = 1$$

Dando continuidade ao problema, após obter o valor de k, determine a probabilidade de $(X \leq 2000)$ desde que o evento $(1500 \leq X \leq 2500)$ tenha ocorrido. De fato, tem-se daí uma probabilidade condicional:

$$\begin{aligned} P((X \leq 2000) \mid (1500 \leq X \leq 2500)) &= \frac{P((X \leq 2000) \cap (1500 \leq X \leq 2500))}{P(1500 \leq X \leq 2500)} \\ &= \frac{P(1500 \leq X \leq 2000)}{P(1500 \leq X \leq 2500)} \\ &= 1500 \int_{1500}^{2000} \frac{1}{x^2}\ dx \Bigg/ 1500 \int_{1500}^{2500} \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$\Diamond$

2.2 Variáveis aleatórias exponenciais

Variáveis Aleatórias Exponenciais ou distribuições exponenciais possuem importante aplicabilidade na descrição de uma grande classe de fenômenos. Como por exemplo, tem-se que a quantidade de tempo percorrido até a ocorrência de um desastre natural, ou até mesmo o momento em que um telefone receba a primeira ligação do dia, podem ser modelados segundo uma distribuição exponencial.

Definição 2.2. Uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é chamada variável aleatória exponencial com parâmetro λ, desde que $\lambda > 0$.

A função de distribuição acumulativa se destaca, pois é um recurso de aplicação que mostra o comportamento da variável em todo o intervalo pre-estabelecido. A partir da obtenção da primitiva da fdp é possível analisar a densidade da variável aleatória.

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \tag{2.4}$$

na qual F é derivável para todo x real.

Exemplo 2.4. Este exemplo mostra como se chega na função de distribuição cumulativa $F(x)$ de uma variável aleatória exponencial:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq c) \\ \\ &= \int_0^c \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx \\ \\ &= -e^{-\lambda x}\Big|_0^c = 1 - e^{-\lambda c} \end{aligned}$$

Note que $F(\infty) = \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1$. De fato, pois $-e^{-\lambda x} = \dfrac{1}{-e^{\lambda x}} \approx 0$, com x tendendo ao infinito.

Observação 2.5. Uma propriedade importante da distribuição exponencial, diz que é a única distribuição contínua que possui perda de memória. Por exemplo, tome um experimento que tem distribuição de tempo de vida exponencial. Se ele durou até o instante t, então a probabilidade condicional dele durar mais s unidades de tempo além do instante t, é a mesma que um experimento novo venha a durar s unidades de tempo. Na linguagem matemática isto é, uma variável aleatória exponencial não negativa X é sem memória se

$$P(X > s + t|X > t) = P(X > s) \text{ para todo } s, t \geq 0 \tag{2.5}$$

De fato, como X é uma variável aleatória exponencial e o primeiro membro da equação 2.5 corresponde a uma probabilidade condicional, então:

$$\begin{aligned}
P(X > s + t|X > t) &= \frac{P((X > s + t) \cap (X > t))}{P(X > t)} \\
&= \frac{P(X > s + t)}{P(X > t)}, \text{ como X é uma v.a. exponencial} \\
&= \frac{e^{-\lambda\,(s+t)}}{e^{-\lambda\,t}} = \frac{e^{-\lambda\,s}\,e^{-\lambda\,t}}{e^{-\lambda\,t}} \\
&= e^{-\lambda\,s} \\
&= P(X > s)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.6. Suponha que Willian é funcionário de uma empresa que produz bateria para celular e sua função é verificar o tempo de carga útil da bateria. Considere que o tempo de carga útil destas baterias segue o modelo de uma variável aleatória exponencial. Então se Willian já esperou 12 horas e a bateria não descarregou, isto significa que a probabilidade desta bateria descarregar nas próximas duas horas será maior do que a probabilidade de descarregar nas primeiras duas horas de uso da bateria?

De fato, não importa o quanto tempo Willian tenha esperado, a probabilidade de a bateria descarregar nas duas horas seguinte, sempre será a mesma.

Exemplo 2.7. A quantidade de tempo em minutos que Pedro consegue estudar sem dispersar (desconsiderando fatores externos) é representado pela seguinte função densidade de probabilidade.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}\,e^{\frac{-x}{100}}, & x \geq 0 \\ \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é a probabilidade de que Pedro estude entre 40 e 120 minutos?

Solução: Considere a variável aleatória X, representando o tempo em minutos em que Pedro estuda com $40 < X < 120$, deste modo:

$$\begin{aligned} P(40 < X < 120) &= \int_{40}^{120} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx \\ &= -e^{\frac{-x}{100}} \Big|_{40}^{120} \\ &= e^{-0,4} - e^{-1,2} \approx 0,37 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Exemplo 2.8. Suponha que o tempo em minutos de um atendimento médico, seja uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\lambda = 1/5$. Se alguém chegar instantes antes na sua frente para a consulta médica e esta pessoa começa ser atendida, determine a probabilidade de que você tenha que esperar mais de 15 minutos até ser atendido.

Solução: Considere X uma variável aleatória que determina o tempo da consulta médica. Deste modo, tem-se a seguinte função acumulativa $F(15) = P(X \leq 15)$. Então probabilidade desejada é:

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= 1 - F(15) \\ &= 1 - (1 - e^{-15/5}) \\ &= e^{-3}. \end{aligned}$$

$\Diamond$

2.3 O processo de Poisson: história e definição

Keeler(2016), relata que no início do século XX, o processo de Poisson iria surgir independentemente durante o mesmo período em três situações diferentes. Na primeira situação em 1909, o matemático e engenheiro dinamarquês Agner Krarup Erlang derivou a distribuição de Poisson ao desenvolver um modelo matemático para o número de chamadas recebidas em um intervalo de tempo finito. Erlang, no momento informado do trabalho anterior de Poisson, assumiu que o número de chamadas telefônicas que chegavam em cada intervalo de tempo era *independente* um do outro e, em seguida, encontrou o caso limitante, que efetivamente reformulava a distribuição de Poisson como um limite da distribuição binômial.

No entanto em 1910, os físicos Ernest Rutherford e Hans Geiger, depois de realizar uma experiência na contagem do número de partículas alfa, publicaram os resultados em que o matemático inglês Harry Bateman procedeu a probabilidade de Poisson como solução para uma família de equações diferenciais embora Bateman tenha reconhecido que as soluções tinham sido previamente resolvidas por outros. Este trabalho experimental de Rutherford e Geiger inspirou parcialmente o físico Norman Campbell que em 1909 e 1910, publicou dois documentos fundamentais sobre o ruído termônico também conhecido como barulho de tiro, em tubos de vácuo, onde acredita-se que ele descobriu e usou o processo de Poisson de forma independente.

As três descobertas e aplicações acima do processo de Poisson motivou alguns estudiosos a dizer que 1909 deve ser considerado o ano da descoberta do processo de Poisson.

Vamos começar a discutir processo aleatório de contagem que nos fornecerá ferramentas para introdução ao processo de Poisson. Um processo aleatório de contagem trata da contagem de eventos que ocorrem em certos instantes de tempo, como por exemplo o número de clientes que entram em uma agência dos correios em horário determinado. Pode-se dizer que é uma sequência de variáveis aleatórias discretas que assumem valores inteiros não negativos estudada e/ou analisada em espaço contínuo, obtendo como resultado funções não decrescentes com intervalos de tempo independentes e não sobrepostos.

Digamos que $N(t)$ é um número inteiro que represente os eventos ocorridos no intervalo de tempo $[0, t)$.

Definição 2.3. O conjunto de variáveis aleatórias do tipo $\{N(t), t \geq 0\}$ é chamado de *processo de Poisson* com taxa λ, para $\lambda > 0$, se satisfaz as seguintes condições:

1. A variável aleatória $N(t)$ assume valores inteiros não negativos e $N(0) = 0$.

2. Os números de eventos ocorridos em intervalos de tempo disjuntos forem independentes, ou seja, o processo tem ***incrementos independentes.***

3. A variável aleatória $N(t)$ tem uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda\, t$, isto é,
$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda\, t)^n}{n!}$$

Exemplo 2.9. Um sistema de download de livros, seguindo o processo de Poisson realiza download a uma taxa de 10 livros hora. Encontre a probabilidade de que apenas 1 download seja feito nos primeiros 10 minutos.

Discussão: Como $N(t)$ representa números de downloads realizados até o tempo t, deseja-se calcular $P(N(10) = 1)$. Mas do item 3 da Definição 2.3 sabe-se que $N(10)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro 10/6. Logo $P(N(10) = 1) = e^{(-10/6)}\,(10/6)$.

$\Diamond$

2.4 Processos de Poisson na reta

Processos de Poisson podem ser estudados tanto na reta, quanto em outras dimensões. Será apresentado algumas propriedades desse processo na reta, para tal será tomado como unidades de medidas os intervalos da reta.

Pode-se considerar um processo de Poisson com parâmetro λ como uma sequência de pontos na reta real não negativa $\mathbb{R}_*^+$ tal que $N(t)$ representa o número de pontos em um intervalo $[0, t)$.

i. Considere uma reta (Figura 2.1) em que seus pontos representam momentos em que um determinado evento ocorra, como exemplo, pode se tomar momentos que um telefone toca em uma central telefônica.

ii. Se os pontos da reta pertencem a um processo de Poisson, então eles podem ser descritos pela variável aleatória de Poisson $N(t)$. Mais precisamente se $N(t)$ é o número de pontos no intervalo $[0, t)]$ então:

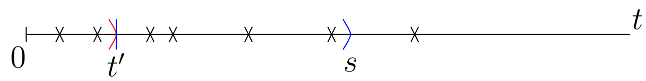
   a) $N(0) = 0$,

   b) Tome o intervalo $[0, t)$, representado por $N(t)$ em que $N(t') = 2$,

   c) Agora tome o intervalo $[t, s)$, representado por $N(s)$ sendo que $N(s) = 4$.

iii. $N(s) - N(t) = 4$.

Figura 2.1: Número de pontos no intervalo $[0, t)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Lema 2.10. O tempo percorrido até a primeira chegada T_1 é uma variável aleatória exponencial de parâmetro λ, ou seja, $exp(\lambda)$.

Demonstração. Considere T_1 uma variável aleatória determinada como "tempo de chegada", ou seja, representa o instante que ocorre o primeiro evento. Além disso, tem-se que $T_1 > t$, se e somente se, não ocorrer nenhum evento no intervalo de tempo $[0, t)$, logo

$$\{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\} \Longrightarrow P(T_1 > t) = P(N(t) = 0).$$

Ora, mas $N(t)$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda\, t$, e então

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda\, t)^0}{0!} = e^{-\lambda t.} \tag{2.6}$$

Como visto na seção anterior, tem-se daí uma distribuição exponencial, uma vez que

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t) \overset{2.6}{=} 1 - e^{-\lambda t}$$

Portanto, segue que T_1 de fato é uma distribuição exponencial. □

Segue alguns exemplos de aplicação, que mostra como o processo é apresentado na literatura, principalmente nos estudos de casos reais a fim de melhorar um atendimento ao cliente em estabelecimento tal como observar fenômenos aleatórios naturais.

Exemplo 2.11. Samir é um cidadão Sírio exilado no Brasil por causa da guerra em seu país, como ele é mestre em fazer sfihas resolveu montar uma sfiharia na cidade onde reside. Devido ao grande sucesso com as sfihas, Samir teve que comprar um programa que registra os pedidos para entrega à domicílio. Suponha que o sistema receba pedidos a uma taxa $\lambda = 20$ por minuto.

a) Determine a probabilidade de que três pedidos sejam feitos nos primeiros nove segundos de um minuto.

b) Determine a probabilidade de que seis pedidos sejam feitos nos últimos doze segundos de um minuto.

Solução: Seja $N(t)$ o número de acesso até o minuto t, para $t \geq 0$. Como são 20 acessos por minuto (60 segundos), isto significa, $\lambda = 20/60 = 1/3$ por segundo. Logo,

a) $P(N[0, 9) = 3) = \dfrac{(9 \cdot \frac{1}{3})^3}{3!}\, e^{-9 \cdot \frac{1}{3}} = \dfrac{9}{2}\, e^{-3}.$

b) Como queremos a probabilidade para os últimos doze segundos, então basta calcular os doze últimos segundos, daí

$$P(N[0,12) = 6) = \frac{(12 \cdot \frac{1}{3})^6}{6!} e^{-12 \cdot \frac{1}{3}} \approx 0,104$$

$\Diamond$

Exemplo 2.12. Clientes chegam em um banco de acordo a um Processo de Poisson de taxa λ (em minutos). Suponha que apenas dois clientes tenham chegado durante a primeira hora. Qual é a probabilidade de que ambos tenham chegado durante os primeiros 10 minutos?

Solução: Considere $N(t)$ igual ao número de clientes que chegam no banco até o tempo t. Logo deve-se determinar a probabilidade de que dois clientes tenham chegando nos primeiros 10 minutos, sabendo-se que por hipotese são dois clientes nos primeiros 60 minutos, ou seja, tem-se a seguinte probabilidade condicional:

$$P(N(10) = 2 | N(60) = 2) = \frac{P((N[0,10) = 2) \cap (N[0,60) = 2))}{P(N[0,60) = 2)} \tag{2.7}$$

Os cálculos serão divididos em duas partes para melhor entendimento, primeiramente será feito os cálculos referentes ao denominador da equação 2.7, como segue:

$$\begin{aligned} P(N[0,60) = 2) &= e^{-60\,\lambda} \frac{(60\,\lambda)^2}{2!} \\ &= e^{-60\lambda}\, 1800\, \lambda^2 \end{aligned}$$

que é uma distribuição de Poisson com parâmetro $(60\,\lambda)$.

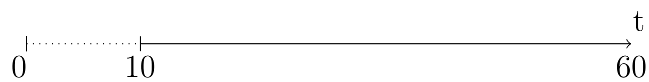
Agora na segunda parte será feito os calculos referente ao numerador da equação 2.7, observe que os eventos são independentes, assim.

$$\begin{aligned} P((N[0,10) = 2) \cap (N[0,60) = 2)) &= P(N[0,10) = 2) \cdot P(N[10,60) = 0) \\ &= e^{-10\lambda} \frac{(10\lambda)^2}{2!} e^{-50\lambda} \frac{(50\lambda)^0}{0!} \\ &= e^{-60\lambda}\, 50\, \lambda^2 \end{aligned}$$

Logo, das equações anteriores, conclui-se:

$$\begin{aligned} P(N(10) = 2|N(60) = 2) &= \frac{e^{-60\lambda}\, 50\, \lambda^2}{e^{-60\lambda}\, 1800\, \lambda^2} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Figura 2.2: Ocorrência do evento nos primeiros dez minutos



Fonte: Elaborado pelo autor (2017)

Ao observar a Figura 2.2 é possível notar foi considerado apenas a probabilidade de o evento ocorrer nos primeiros dez minutos.

$\Diamond$

2.5 Processos de Poisson no plano

Como expõe Keeler(2015) com o avanço nos estudos em processos de Poisson, matemáticos perceberam que o processo poderia ser generalizado em diversas maneiras, dentre elas a ampliação de tempos raros da distribuição exponencial para outras distribuições e a definição do processo de Poisson em diversas dimensões.

O processo de Poisson definido em $\mathbb{R}^2$, consiste em considerar um conjunto aleatório de pontos de $\mathbb{R}^2$ tal que:

i. Se $B \subset \mathbb{R}^2$ é uma região limitada e $M(B)$ denota o número de pontos do processo em B então

$$P(M(B) = k) = \frac{(\lambda|B|)^k}{k!}\, e^{-\lambda|B|}. \tag{2.8}$$

Note que |B| é igual a área da região B.

ii. Se B_1 e B_2 são regiões limitadas e disjuntas no plano $\mathbb{R}^2$ então $M(B_1)$ e $M(B_2)$ são variáveis aleatórias independentes.

É importante observar que nas seções anteriores o processo de Poisson foi definido em $\mathbb{R}^+$ por isso que consideravamos $N(t)$ como um contagem de ocorrência de um evento ao longo do tempo em um intervalo. Esta interpretação não é válida para duas dimensões.

Exemplo 2.13. Bombas em Londres

Nesta seção será retomado o problema do lançamento das Bombas em Londres Como expõe o problema, foi selecionada uma região ao sul da cidade de aproximadamente $144km^2$ e dividida em 576 quadras e cada uma com $0,25km^2$. Sobre o perímetro considerado o número de bombas dentro da área envolvida era 537, ao fazer a divisão de 537 por 576 obtêm -se o parâmetro λ de aproximadamente $0,932$ bombas por região. Ao aplicar o modelo de Poisson em $\mathbb{R}^2$ obtêm-se:

1. Considere a área a ser analisada como $0,25km^2$. Para os seguintes valores de k que representa o número de bombas na região delimitada.
   - $k = 1 \longmapsto P(M(0,25) = 1) = \dfrac{(0,932\,|0,25|)^1}{1!}\, e^{-0,932\,|0,25|} \approx 0.184$
   - $k = 2 \longmapsto P(M(0,25) = 2) = \dfrac{(0,932\,|0,25|)^2}{2!}\, e^{-0,932\,|0,25|} \approx 0,021$
2. A nível de investigação pode aumentar a metragem quadrada a ser analisada e a partir daí discutir com a sala a possíveis alterações que apresentarem os resultados.

O exemplo a seguir é parte de um artigo de [11, JEFFREY(et al 2010)].

Exemplo 2.14. Este exemplo estuda o comportamento e desempenho das redes sem fio, uma vez que para um bom desempenho é crucial haver boa configuração espacial. De forma sucinta pode se dizer que a eficiência de uma rede sem fio é melhor caracterizada por métricas, tais como conectividade, capacidade e confiabilidade. Essas métricas são funções complexas de todos os links na rede que conectam-se por pares de nós. De acordo com o tamanho de nós presentes na rede, o número de combinações possíveis de pares de comunicação expande, tornando-se difícil uma avaliação na melhor das hipóteses. Com isso entra em discussão as análises estatísticas sobre a rede, como médias ou probabilidades de interrupção/sucesso.

As distâncias entre os nós afetam significativamente o desempenho da rede. Portanto, torna-se necessário um modelo matemático para os locais dos nós (Processos de Poisson no plano e espaço). A geometria no processo de Poisson fornece as ferramentas para analisar quantidades importantes, como distribuições de interferência e interrupções de links, permitindo declarações estatísticas sobre o desempenho da rede. Devido à sua capacidade de traço analítico e recurso prático nas situações em que os transmissores e / ou os receptores estão localizados ou se deslocam aleatoriamente em uma área grande, o processo de Poisson é o modelo espacial mais utilizado.

Por exemplo, ao considerar o plano, cada nó ocupa uma localização independente dada pelas de coordenadas (x_i, y_i), a densidade de nós na área da unidade é λ e portanto, o número médio de nós em uma área A é $\lambda\, A$. Finalmente, a probabilidade de haver n nós em A é dada pela distribuição de Poisson

$$P(M(A) = n) = \frac{(\lambda\,|A|)^n}{n!} e^{-\lambda|A|}$$

Com isso para uma àrea de $20m^2$ e densidade $\lambda = 2,5$, qual a probabilidade encontrar 10 nós?

$$P(M(20) = 10) = \frac{(50)^{10}}{10!}\, e^{-50} \approx 5,2 \cdot 10^{-12}$$

Agora para a mesma àrea e densidade, qual a probabilidade de encontrar 100 nós?

$$P(M(20) = 100) = \frac{(50)^{100}}{100!} e^{-50} \approx 1,6 \cdot e^{-10}$$

Logo ao comparar os resultados, tem-se que para uma quantidade maior do número nós, maior será a probabilidade, para uma mesma densidade da unidade.

2.6 Atividades de aplicação: funções exponenciais e probabilidade

Na busca de propor aplicações de funções exponenciais a probabilidade, será exposto conceitos e execuções de tais funções, embora o assunto apresentado até o momento seja desenvolvido em cursos do Ensino Superior o foco agora será voltado para o Ensino Médio.

Devido ao grande número de problemas que não podem ser modelados por funções polinomiais ou racionais, surge daí as funções exponenciais e logarítmicas inversas uma da outra. Dentre suas inúmeras aplicações, destaca-se os estudos da radioatividade, biologia, abalos sísmicos ou terremotos, economia, ciências sociais, dentre outras.

Uma função exponencial é aquela que tem como variável independente o expoente de uma potência. Ou seja, a variável dependente é definida em relação a uma potência. Deste modo tem-se a seguinte forma geral:

$$f(x) = C\, a^x$$

- $f(x)$ é a variável dependente;
- x é a variável independente;
- C é um número real qualquer;
- a é um número real maior que zero e diferente de 1;

Exemplo 2.15. Sabendo que para a produção do iogurte é necessário que ocorra a transformação da lactose em ácido láctico por fermentação bacteriana, suponha que esse tipo de bactéria se triplica a cada 2 horas e que sua população inicial seja de cinco bactérias, dai a seguinte tabela apresentará o comportamento da função.

A Tabela 2.1 descreve a função exponencial do número de bactérias na produção de iogurte ao longo do tempo, dita função é:

$$f(x) = 5\,(3)^x$$

Tabela 2.1: Número de bactérias na produção de iogurte

Período de 2 horas (x)	Nº de bactérias $f(x)$
0	$5\,(3)^0 = 5$
1	$5\,(3)^1 = 15$
2	$5\,(3)^2 = 45$
$\vdots$	$\vdots$
n	$5\,(3)^n$

Fonte: Elaborado pelo autor(2017).

$\diamondsuit$

No exemplo anterior o professor com seus alunos podem fazer um estudo mais minucioso sobre o processo de produção de um iogurte industrial e um iogurte caseiro, com isso tentar modelar uma função para o meio de produção dos mesmos.

Uma função exponencial muito importante, porém pouco explorada no ensino médio, é aquela cuja base é e:

$$f(x) = e^x.$$

As funções na base e, do mesmo modo que as outras aparecem comumente nas aplicações matemáticas tal como na descrição de fenômenos naturais.

Exemplo 2.16. Sabendo-se que a desintegração de uma substância radiotiva se dá pela expressão $M = M_0\, e^{-rt}$, em que M_0, M, r e t representam respectivamente a massa da substância no instante zero, massa da substância desejada, taxa em % e o tempo em dias. Qual é o tempo necessário para que $50g$ se reduza a $10g$ a uma taxa de $0,01\%$ ao dia.

Solução: Substituindo as informações na expressão $M = M_0\, e^{-rt}$ segue que,

$$\begin{aligned}
10 &= 50\, e^{0,0001t} \\
ln\left(\frac{1}{5}\right) &= ln(e)^{-0,0001t} \\
ln(1) - ln(5) &= -0,0001t\, ln(e) \\
t &= \frac{ln(5)}{0,0001} = \frac{1,6094}{0,0001} = 16.094,4.
\end{aligned}$$

Logo, será necessário 16.095 dias.

Com este exemplo o professor pode discutir com seus alunos fatos históricos como as bombas de Hiroshima e Nagasaki no Japão, o acidente nuclear de Chernobil na Ucrânia, acidente radioativo com o vazamento do césio-137 em Goiânia no ano de 1987. Assim complementar as consequências causadas por estas substâncias radioativas que perduram por gerações.

$\Diamond$

Atividade 1: O modelo Jenss-Bayley é uma fórmula usada para avaliar a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $h(x)$ denota a altura (centímetros) na idade x (em anos) então $h(x)$ pode ser aproximado por $h(x) = 70,05 + 6,39x - e^{3,3-0,99x}$. Com base no exposto, qual seria a altura de uma criança de 1 ano?

A partir do exercício anterior o professor pode discutir em sala os fatores externos e internos que influenciam na altura de uma criança e extender para a altura de um adulto.

Como exemplo poderá citar o caso das pessoas que vivem nas Cordilheiras, discutindo sobre qual é a faixa de altura dessas pessoas e compará-las com as que vivem na Europa, na Ásia, dentre outros.

A seguir tem-se alguns exercícios de aplicações de processos de Poisson em tempo contínuo.

Atividade 2: Sabe-se que a probabilidade de que sejam recebidas k ligações telefônicas em uma central de SAC até o instante de tempo t, medido em minutos, é dada pela função

$$p_k(t) = \frac{(5\,t)^k}{k!}\,e^{-5\,t}$$

a) Qual a probabilidade de receber uma ligação nos primeiros dois minutos?

b) Qual a probabilidade de receber cinco ligações na primeira hora de serviço?

Com este exercício é possível o professor dialogar com a sala sobre os serviços do SAC, como envolve contas com fatoriais é interessante fazer uma retomada do assunto.

Atividade 3:

Sabendo que a probabilidade de que o próximo terremoto em certa região ocorra não antes do que os próximos n anos é dada pela função:

$$p(n) = e^{-2n},$$

calcule estas probabilidades para $n = 2, 5, 10$.

Atividade 4: Considerando que na região do Caribe e Golfo do México, é comum a presença de furacões, suponha que a probabilidade de ocorrer exatamente um furacão nos próximos m meses é dada pela função:

$$p(m) = e^{-3m}\,(3m),$$

calcule esta probabilidade para $m = 1, 5, 10, 15$.

Com os exercícios 3 e 4 o professor pode discutir com a sala os motivos físicos e geológicos pelos quais acontecem estes fenômenos e suas diferenças, além disso pode pesquisar com os alunos outras regiões do terrestre que é frequente estes fenômenos naturais. É de grande importância o professor explicar o que é, e quais as diferenças entre às escalas Richter e Saffir-Simpson, e por fim mostrar suas relações matemáticas.

Referências Bibliográficas

[1] CAVALCANTE K.R.L.J. e TAUIL P.L, **Características epidemiológicas da febre amarela no Brasil, 2000-2012,** Parte integrante da dissertação de Mestrado, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Saúde Coletiva da UNB/Ministério da Saúde, Brasília, 2014.

[2] CLARKE R.D., **An application of the Poisson distribuition,** of the Prudential Assurance Company, Ltd. JIA 72-(1946)-0481.

[3] DANTE L.R., **Matemática: Contexto & Aplicações**, 2.ed, v.1-2 - São Paulo: Àtica, 2013.

[4] FELLER W., **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações,** v.1 - São Paulo:Edgar Blücher, 1976.

[5] FERNANDEZ T. e TAMARO E.,**Andrei Nikolayevich Kolmogorov**, disponível em http://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/kolmogorov.htm Acesso em: 26/04/2017.

[6] FERREIRA A.M., **A Ruína do Jogador: Uma análise para o Ensino Médio,** Dissertação de mestrado (PROFMAT) - Santo André, 2013.

[7] HACKING I., **The Emergence of Probability: A Philosophical of early ideas about Probability, Induction and Statistical Inference,** 2.ed - Cambridge University Press, 2007.

[8] HEFEZ A., **Aritmética**, Coleção (PROFMAT)- Rio de Janeiro:SBM, 2013.

[9] HINOJOSA A. e MILANÉS A., **Uma introdução aos processos estocásticos com aplicação**, Departamento de Estatística - ICEx.UFMG.

[10] JACOBS, K. **Oberwolfach Photo Collection**. Disponível em: $< https : //opc.mfo.de/detail?photo_id = 7493 >$. Acesso em: 15/11/2017.

[11] ANDREWS, J.G.; GANTI, R.K.; MARTIN, H.; NIHAR, J.; STEVEN, W., **A Primer on Spatial Modeling and Analysis in Wireless Networks**, IEEE Communications Magazine, November 2010.

[12] KEELER P., **Notes on the Poisson point process,** This work is licensed under a "CC BY-SA 3.0", 2016.

[13] KOLMOGOROV A.N., **Foundations of the Theory of Probability,** New York: Chelsea Publishing Company, 1950.

[14] MEYER P.L., **Probabilidade: Aplicações à Estatística**, 2.ed - Rio de Janeiro: LTC 2009.

[15] O'CONNOR, J.J; ROBERTSON, E.F., **Jacob (Jacques) Bernoulli**. Disponível em: $< http : //www{-}history.mcs.st{-}andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob.html >$. Acesso em: 07/08/2017.

[16] O'CONNOR, J.J; ROBERTSON, E.F., **Siméon Denis Poisson**. Disponível em: $< http : //www - history.mcs.st - and.ac.uk/Biographies/Poisson.html >$. Acesso em: 07/08/2017.

[17] OCTAVIANO, D.P., **Espaços finitos de probabilidade,** Dissertação de mestrado (PROFMAT)- São Carlos, 2015.

[18] ROCHA A.V.,**Probabilidade e Estatística**, João Pessoa: Editora UFPB, 2014.

[19] ROSS S., **Introduction to Probability Models**, 10.ed - Elsiver Inc., 2010.

[20] ROSS S., **Probabilidade: Um curso moderno com aplicações**, 8.ed - Porto Alegre: Bookman, 2010.

[21] SILVEIRA J.F.P., **Início da matematização das probabilidades**, disponível em: $< http : //www.mat.ufrgs.br/\ portosil/histo2c.html >$. Acesso em: 19/02/2017.

[22] WOLFRAMALPHA. Disponível em: $< http : //www.wolframalpha.com/input/?i = 6p\%5E3 - 15p\%5E2\%2B12p - 3 + \%3E + 0 >$. Acesso em: 23/07/2017. A Primer on Spatial Modeling and Analysis in Wireless Networks - Jeffrey G. Andrews and Radha Krishna Ganti, The University of Texas at Austin.