



Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Geometria esférica: uma proposta pedagógica

José Ramos Machado Neto

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Márcio Lemes de Souza**

Barra do Garças - MT

julho de 2018

Geometria esférica: uma proposta pedagógica

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por José Ramos Machado Neto e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 19 de julho de 2018.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Souza
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Lemes de Souza (Presidente da Banca/ Orientador)

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto (Examinador Interno)

Prof. Dr. Reinier Díaz Millán (Examinador Externo)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

M149g Machado Neto, José Ramos.
Geometria esférica: : uma proposta pedagógica / José Ramos Machado Neto. -- 2018
xi, 51 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Márcio Lemes de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Ensino da matemática. 2. 5º postulado. 3. novas geometrias.
I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Geometria esférica: uma proposta pedagógica"

Autor: José Ramos Machado neto

defendida e aprovada em 19/07/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor *Marcio Lemes de Sousa*
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor *Adilson Antonio Beriatto*
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor *Reinier Diaz Millán*
Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Cuiabá, 19/07/2018.

Agradecimentos

Agradeço à todos que de alguma forma participaram desta etapa da minha vida como estudante, e em especial aos colegas de infindáveis horas de estudo e aos sempre dedicados professores. Sem a cobrança destes, dificilmente alcançaríamos nossos objetivos! À minha compreensiva e muito amada esposa, que nos preparou muitas e necessárias garrafas de café, e ao nosso Todo Poderoso e Misericordioso Deus, que nos momentos de dificuldade me presenteou com a presença de Seu Divino Espírito Santo.

Muitíssimo obrigado a todos.

“Não há na natureza nada suficientemente pequeno ou insignificante que não mereça ser visto pelo olho da geometria: há sim, uma agradável geometria das criações da natureza. Difícilmente encontraremos algo que não possa se relacionar com a geometria”

Leonardo Da Vinci.

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta pedagógica para a implementação do conteúdo de geometria esférica nos últimos anos do ensino básico e/ou nos anos iniciais dos cursos de graduação. Com o objetivo de fornecer ao professor subsídios para a apresentação em sala deste conteúdo, apresenta de forma sucinta o desenvolvimento do conhecimento geométrico até Euclides e a compilação do seu trabalho “Os Elementos” , a tentativa de demonstração do 5º postulado e conseqüentemente o surgimento de novas geometrias, em especial, a geometria esférica, escolhida para ser o foco deste trabalho por ser altamente associativa com outras disciplinas, em especial, História, Geografia, Física e a Astronomia, além de ter um caráter de forte contextualização.

Palavras chave: ensino de Matemática, 5º postulado, novas geometrias.

Abstract

This work presents a pedagogical proposal for the implementation of the content of Spherical Geometry in the last years of elementary education and / or in the initial years of undergraduate courses. In order to provide the teacher with subsidies for the presentation in the classroom of this content, he briefly presents the development of geometric knowledge up to Euclid and the compilation of his work “ The Elements ”, the attempt to demonstrate the 5th postulate and consequently the the emergence of new geometries, especially Spherical Geometry, chosen to be the focus of this work because it is highly associated with other disciplines, especially History, Geography and Astronomy, and has a strong contextual character.

Keywords: teaching of Mathematics, 5th postulate, new geometries.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de figuras	xi
Introdução	1
1 Dos primeiros registros geométricos até as geometrias modernas	4
1.1 O desenvolvimento da geometria euclidiana	4
1.1.1 Definições da geometria euclidiana	7
1.1.2 Axiomas de Euclides	9
1.1.3 Postulados de Euclides	9
1.1.4 Enunciados atuais dos postulados	10
1.2 Do 5 ^o postulado às geometrias não euclidianas	11
1.2.1 A contribuição de Poincaré	14
1.3 As geometrias não euclidianas	17
2 Elementos, definições, propriedades e teoremas da geometria esférica	19
2.1 Elementos notáveis da superfície esférica	19
2.2 Definições	20
2.3 Propriedades	26
2.4 Teoremas	28
3 A proposta pedagógica	37
3.1 Exercícios de aplicação	38

3.2 Atividades	42
Considerações finais	45
Referências Bibliográficas	48
Apêndice	49
A.1 Demonstrações de áreas e volumes de revolução	49

Lista de Figuras

1.1	Thales de Mileto e Pitágoras	5
1.2	Platão e Euclides	6
1.3	Representação do 5º postulado	10
1.4	Playfair e seu substituto ao 5º postulado	12
1.5	Carl Friederich Gauss e Bernhard Riemann	12
1.6	Farkas Bolyai e seu filho Janos	13
1.7	Lobachevski	14
1.8	Poincaré	14
1.9	Reta hiperbólica e infinitas retas paralelas a r passando por P	15
1.10	Razão cruzada	16
1.11	Quadro comparativo entre as geometrias Plana, esférica e Hiperbólica.	17
1.12	Comparação entre as formas do espaço Plano, Esférico e Hiperbólico.	18
2.1	Elementos notáveis de uma esfera.	19
2.2	Esfera de centro O e raio r	20
2.3	Corda e antípodas na esfera	21
2.4	Plano tangente à esfera.	22
2.5	Calota esférica.	22
2.6	Círculo Máximo.	23
2.7	Ângulos esféricos.	24
2.8	Fuso esférico.	25
2.9	Zona esférica de altura h	25
2.10	Triângulo esférico.	26
2.11	Círculos máximos em uma esfera.. . . .	27
2.12	Triângulo esférico com 3 ângulos retos.	28
2.13	Superfície de revolução $\varrho(e; \varsigma)$	29

2.14	Calota esférica.	30
2.15	Zona esférica.	31
2.16	Área de um fuso esférico.	32
2.17	Fuso esférico completo.	33
2.18	Área de um triângulo esférico.	34
2.19	Triângulo esférico.	35
2.20	Figura auxiliar do tetraedro esférico.	36
3.1	Figura auxiliar.	41
A.1	Superfície de revolução $\varrho(e; \varsigma)$	49
A.2	Área do tronco de cone.	50

Introdução

“Uma geometria não pode ser mais verdadeira do que outra. Poderá ser apenas mais cômoda. ”

Henri Poincaré

Os maiores incentivadores desse trabalho são os objetivos do PROFMAT. Segundo SBM (2017, p. 6):

“O principal objetivo do Profmat é oferecer formação profissional sólida em Matemática, que contemple as necessidades do trabalho cotidiano dos professores no espaço da escola, assim como suas necessidades de desenvolvimento e de valorização profissional. Visa, ainda, o desenvolvimento de uma postura crítica acerca do trabalho nas aulas de Matemática, na Educação Básica.

São diretrizes do PROFMAT: ...estimular e promover a independência do professor, fornecendo-lhe instrumentos para busca por conhecimento e desenvolvimento profissional, de forma autônoma e permanente; incentivar a pesquisa e a produção de materiais e práticas pedagógicas inovadoras para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola (textos, atividades, softwares, simulações, práticas pedagógicas inovadoras e diferenciadas em ambientes de aprendizagem etc.)”.

De acordo com as Orientações Curriculares da Área de Ciências da Natureza e Matemática do Estado do Mato Grosso, SEDUC-MT (2010),

“Devem ser levados em conta ainda esses pressupostos já indicados: Essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado em contexto, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente se der tempo.” (PCN+, p.31), ou “Aprender qualquer conhecimento de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e capacidades que são essencialmente formadoras...”(PCN+, p.111).

E ainda em SEDUC-MT (2010, P. 133), o aluno

“...precisa ainda refletir sobre o significado e importância das capacidades que possam ser desenvolvidas para decidir quais delas fomentar e desenvolver, da mesma forma como e em que disciplinas devem ser exploradas.”

Segundo Cyrino et al. (2006, p. 83), para que os futuros professores consigam sua emancipação profissional, são necessários momentos de reflexão sobre o conhecimento matemático considerando-se as dimensões epistemológicas, filosóficas, históricas, psicológicas, metodológicas e culturais. Para essa autora,

“...pensar numa formação que busque a emancipação do professor como profissional pressupõe conhecer o que ele entende por Matemática e como a relaciona com outras áreas.”

A geometria não-euclidiana não só promove a interdisciplinaridade e a transversabilidade como também é essencial na compreensão de fenômenos que fogem do escopo da geometria plana, a geometria de Euclides. Com a utilização da geometria esférica no ensino da disciplina, principalmente pela história de seu desenvolvimento, espera-se reconhecer a Matemática como ciência viva, humana, produtora de conhecimentos e com os aspectos sociais, culturais, políticos e econômicos gerenciando sua linha de desenvolvimento. Então, neste ponto surge outro foco desta pesquisa: oferecer uma proposta pedagógica aos indivíduos envolvidos em educação que forneça uma visão epistemológica¹ da geometria esférica enquanto conteúdo necessário ao currículo matemático. Neste sentido, temos a pretensão de apresentar um trabalho que atenda, despertando a curiosidade que entendemos como uma das maneiras de fomentação da busca pelo conhecimento, desde os anos finais do ensino básico até os iniciais da formação acadêmica, este último com um grau menor de aprofundamento quanto a álgebra envolvida, considerando obviamente o conhecimento básico do público alvo, que pode ser apresentado na forma de seminários ou mini-cursos.

Ao proporcionar a possibilidade de se interagir com outras áreas do conhecimento humano, este conteúdo revela toda a sua vocação de ser interdisciplinarizada. Como exemplo, podemos relacionar o desenvolvimento da geometria (de uma maneira geral, como um todo) com a História, em relação à retomada dos estudos matemáticos pós-renascimento. Na Física, explica-se o desenvolvimento de novas tecnologias, como a Navisfera de Wilson e até a famosa Teoria da Relatividade Geral, publicada no ano de 1905 por Albert Einstein. Também encontramos referências fortes da geometria esférica no campo da astronomia. Mas é na área da Geografia que temos uma afinidade maior, pois alguns dos

¹Epistemologia é o estudo científico que trata dos problemas relacionados com a crença e o conhecimento, sua natureza e limitações. A epistemologia estuda a origem, a estrutura, os métodos e a validade do conhecimento, e também é conhecida como teoria do conhecimento e relaciona-se com a metafísica, a lógica e a filosofia da ciência. (Extraído do site <https://www.significados.com.br>)

elementos notáveis da geometria esférica são os mesmos dos estudados em Geografia, a métrica utilizada em navegações e cálculos de distâncias só são mais precisas por conta do desenvolvimento desta geometria, e apesar do formato da crosta terrestre não ser uma esfera perfeita – e aqui cabe uma relação entre Física e Geografia: enquanto o formato esférico deve-se à gravidade, o leve achatamento dos polos se deve, na maior parte, à força centrífuga² provocada pela rotação terrestre, que é máxima no equador e diminui na direção dos polos, onde é nula – temos uma aproximação com erros que podem ser desprezados.

Por termos ciência das dificuldades de se construir os saberes, os “porquês” disso ou daquilo, podemos oferecer a disciplina num caráter mais humanizado, pois com a ideia de que o conhecimento matemático é algo “inventado”, faz-se necessária a divulgação da evolução do conhecimento. Vale ressaltar que até pouco tempo acreditava-se que a geometria euclidiana era absoluta, e é admirável ver que um triângulo em outras superfícies que não planas podem ter como resultado da soma de seus ângulos internos ser maior que 180° , se for contido numa superfície esférica, ou menor que 180° , se estiver contido numa superfície hiperbólica. Assim, por acreditar que a utilização da geometria esférica nas aulas pode oferecer outro significado, despertar interesses e dar nova visão ao contexto do conteúdo, todo material onde se apresentam motivações ao conhecimento é bem-vindo.

No tocante ao corpo deste trabalho, o primeiro capítulo contamos a história de todo desenvolvimento do conhecimento geométrico euclidiano, que culmina com o surgimento das ditas geometrias não euclidianas e da geometria neutra. No capítulo dois são mostrados alguns elementos notáveis, propriedades mais relevantes, definições e os teoremas que julgamos mais pertinentes à nossa proposta. Finalmente, no capítulo três apresentamos uma proposta pedagógica com sugestões para que sejam ministradas aulas deste conteúdo, bem como sugestões de atividades e seus objetivos.

As ilustrações apresentadas neste trabalho, com exceção das referenciadas, foram produzidas pelo autor utilizando o editor *Word*[©] desenvolvido pela *Microsoft*[®].

²Também conhecida como *força fictícia*, a força centrífuga na verdade não possui um agente físico que a cause – daí este outro nome – sendo um efeito da *inércia*. (N. do A.)

Capítulo 1

Dos primeiros registros geométricos até as geometrias modernas

Neste capítulo relatamos a História do desenvolvimento do conhecimento geométrico euclidiano até o surgimento das geometrias não euclidianas, bem como os principais personagens envolvidos no processo.

1.1 O desenvolvimento da geometria euclidiana

Esta seção é baseada nas obras de (Greenberg, 1993) e (Andrade, 2013).

Apesar de os agrimensores gregos, conforme anotações de Heródoto, serem os primeiros a citarem a geometria (do grego *geo* que significa terra e *métron* que é medida), é razoável acreditar que a geometria surgiu de acordo com necessidade das civilizações. Para filósofos como o próprio Heródoto e Aristóteles, a geometria nasceu no antigo Egito. Para o primeiro, pela necessidade de se medir terras. Segundo os historiadores, o rei egípcio Sesóstri III, por volta de 1900 a.C, dividiu igualmente as terras do Egito entre seus súditos com intenção de cobrar-lhes impostos. Entretanto, com o regime de cheias do Nilo, várias propriedades tinham sua área produtiva modificada, o que causava descontentamento no pagamento destes impostos. Assim, o rei determinou que pessoas especializadas refizessem os cálculos das áreas, e conseqüentemente o novo valor a ser pago. Já para o segundo, era apenas um lazer nas classes sacerdotais do Egito Antigo.

Algumas civilizações antigas, como os chineses, hindus e babilônicos já apresenta-

vam certo progresso em geometria, embora esse conhecimento fosse empírico¹. Exemplificando, os babilônios adotavam o valor da circunferência com 3 vezes o valor do diâmetro em torno de 1600 a 2000 a.C.. Os egípcios, em torno de 1800 a.C. chegaram a uma melhor aproximação, como pode ser visto no papiro de Rhind² e conseguiam calcular corretamente algumas fórmulas, como o tronco de uma pirâmide quadrangular regular, mas erraram ao considerar a área de um retângulo válida para todo quadrilátero. Os babilônios, mais evoluídos, já usavam a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, onde a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, o famoso Teorema de Pitágoras, que já era utilizado antes mesmo do nascimento do próprio Pitágoras!

Os gregos impuseram o raciocínio lógico dedutivo à geometria. Thales de Mileto (figura 1.1 a esquerda)³, em torno de 585 a.C., a levou do Egito e Babilônia para a Grécia. Seguidamente Pitágoras (figura 1.1 a direita)⁴, um de seus discípulos, após contato com a cultura jônica⁵ de onde adquiriu muitas ideias religiosas. E em várias outras viagens – assim como seu mestre – pelo Egito e Babilônia e ainda provavelmente até a Índia, apropriou-se de conhecimentos matemáticos e astronômicos. De volta a Grécia, fundou a Escola Pitagórica, dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos. Essa irmandade acreditava que o estudo da música e da Matemática lhes proporcionaria uma união com Deus.



Figura 1.1: Thales de Mileto e Pitágoras

¹Conhecimento empírico é o conhecimento adquirido através da observação, sem comprovação científica, na maioria das vezes por tentativa e erro. (N. do A.)

²O papiro de Rhind ou papiro de Ahmes, é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C. onde o escriba Ahmes copia a solução de 85 problemas em diversas áreas da Matemática. Dividido em três livros, no segundo encontra-se um valor aproximado de π dado pela fração $\frac{256}{81} = 3,1605$.

³Disponível em: <https://bit.ly/2gu2kRd>. Acessado em: 11 de maio de 2018.

⁴Disponível em: <https://bit.ly/2v5aP9J>. Acessado em: 11 de maio de 2018.

⁵Os Jônios, habitantes da Ásia Menor, foram uma das quatro etnias a formar o povo grego. Buscavam saber de que as coisas eram formadas e por influência deste pensamento Tales passou a acreditar que as coisas tinham alma.

Platão (figura 1.2 a esquerda)⁶, discípulo de Sócrates, após várias viagens em seu exílio, funda em torno de 387 a.C. sua Academia de Ciência e Filosofia – tomou o nome de Academia pela razão de se reunirem mestres e discípulos nos jardins de um rico cidadão chamado Acádemo – onde difundia o conhecimento como algo mutável, e que o universo das ideias era mais importante que o material, onde as percepções sensoriais eram falhas e deveriam ser corrigidas pelo pensamento, que por sua vez, pode ser estimulado através do estudo da Matemática. Adotou em suas demonstrações o método da prova indireta, onde uma afirmação falsa conduz à contradição.

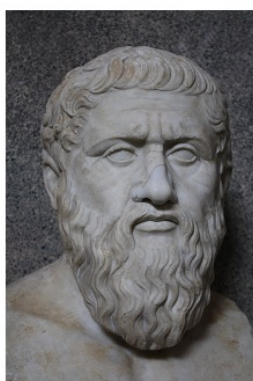


Figura 1.2: Platão e Euclides

Provavelmente Euclides de Alexandria (figura 1.2 a direita)⁷, cuja trajetória é repleta de lacunas, foi discípulo na Academia de Platão. Assumiu um posto na Biblioteca de Alexandria a convite de Ptolomeu Sóter e ali reuniu em seu tratado “Os Elementos” os cinco postulados geométricos que são a base dos ensinamentos escolares até hoje.

O professor de Matemática Irineu Bicudo, Doutor em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e professor da Universidade de São Paulo (USP), em entrevista cedida em 10/12/2011 à revista Globo Ciência, da Editora Globo⁸, explica como a geometria evoluiu, destacando seus principais fundamentos:

“Tanto no Egito quanto na Babilônia quem dominava o conhecimento era a classe sacerdotal, que se colocava como intermédio entre os Deuses e o povo. Sendo assim, eles “interpretavam” a vontade do Deus. Ou seja, se algo era do jeito que era, isso se devia à vontade dos deuses e os sacerdotes não tinham que explicar nada. Quando o conhecimento chega à Grécia, não havia a classe sacerdotal e o conhecimento tinha que ser explicado pela razão. A geometria

⁶Disponível em: <https://bit.ly/2LnYMPy>. Acessado em: 19 de fevereiro de 2018.

⁷Disponível em: <https://bit.ly/2JMReAt>. Acessado em: 19 de fevereiro de 2018.

⁸Disponível em: <https://glo.bo/2l8e0c9>. Acessado em: 03 de dezembro de 2017.

não fugiu a isso e era preciso explicar os resultados geométricos. Sendo assim, estipulou-se uma base para ela, com definições para os objetos geométricos, estipulando algumas de suas propriedades. Os postulados são as primeiras noções geométricas que são aceitas sem contestações. A partir desses postulados, são apresentadas outras regras. Sendo assim, a geometria se transformou em uma ciência dedutiva, baseada em princípios. Nesse contexto, Euclides fez o primeiro grande resumo de tudo que se conhecia antes dele em Matemática. Ele foi um chefe de escola em Alexandria, 300 anos antes de Cristo, e a sua obra “Os Elementos de Euclides” resume muito bem tudo que se conhecia em Matemática elementar”.

Além de noções comuns, a base teórica da geometria euclidiana está nos 5 axiomas⁹, 5 postulados¹⁰ e 23 definições, que serão apresentadas nas subseções a seguir.

1.1.1 Definições da geometria euclidiana

Nesta subseção, apresentaremos as 23 definições traduzidas de (Heath, 1956, p. 153-155) pelo autor.

Definição 1.1. Ponto é aquilo de que nada é parte.

Definição 1.2. Linha é comprimento sem largura.

Definição 1.3. As extremidades de uma linha são pontos.

Definição 1.4. Linha reta é a linha traçada com os pontos distribuídos uniformemente sobre si.

Definição 1.5. Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

Definição 1.6. As extremidades de uma superfície são retas.

Definição 1.7. Superfície plana é a superfície traçada com retas distribuídas uniformemente sobre si.

Definição 1.8. Ângulo plano é a inclinação entre duas linhas no plano que se cruzam e não estão postas sobre uma reta.

⁹Um axioma é a premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, que fundamenta uma demonstração, porém ela mesma não é demonstrada. Os axiomas não são aceitos por serem uma verdade absoluta, mas porque fazem parte de um princípio lógico, que faz parte de uma sequencia lógica perfeita.

¹⁰Um postulado é uma sentença que não é provada nem demonstrada, mas se torna óbvia ou se torna um consenso inicial para a aceitação de uma determinada teoria. A diferença entre axioma e postulado é que um axioma contém a evidência em si próprio e por isso não precisa ser demonstrado.

Vale observar que alguns autores consideram um axioma equivalente a um postulado.

Definição 1.9. Quando as linhas que contêm o ângulo são retas, o ângulo é chamado de retilíneo.

Definição 1.10. Quando uma reta colocada sobre outra fizer os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta sobreposta é chamada uma perpendicular em relação primeira.

Definição 1.11. Um ângulo obtuso é o maior do que um reto.

Definição 1.12. Um ângulo agudo é menor que um reto.

Definição 1.13. Fronteira é a extremidade de alguma coisa.

Definição 1.14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.

Definição 1.15. Círculo¹¹ é uma figura plana contida por uma linha tal que todas as retas que estejam sobre ela e passem por um ponto no interior da figura, são iguais entre si.

Definição 1.16. E o ponto é chamado de centro do círculo.

Definição 1.17. Um diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro e terminando em ambas direções na circunferência do círculo e divide o círculo em dois.

Definição 1.18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.

Definição 1.19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, trilaterais são contidas por três, quadrilaterais as contidas por quatro, e multilaterais as contidas por mais do que quatro retas.

Definição 1.20. Sobre as figuras trilaterais, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, triângulo isósceles o que tem dois lados iguais, e um triângulo escaleno o que tem três lados diferentes.

Definição 1.21. Ainda sobre as figuras trilaterais, um triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, um triângulo obtuso o que tem um ângulo obtuso, enquanto um triângulo acutângulo é o que tem três ângulos agudos.

¹¹Consideraremos círculo ou circunferência apenas a “linha” que delimita a figura plana que consideraremos **disco**. Euclides, diferencia círculo (disco) de circunferência (linha)

Definição 1.22. Das figuras quadriláteras, um quadrado é aquele que tem ambos lados iguais e ângulos retos, um oblongo¹² possui ângulos retos mas lados não equiláteros, enquanto rombo¹³ é equilátero mas não possui ângulos retos, e romboide¹⁴, a que tem tantos os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem possui ângulos retos; e as quadriláteras além dessas são chamadas trapézios.

Definição 1.23. Paralelas são retas que estão no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em ambas direções, não se encontram em nenhuma.

1.1.2 Axiomas de Euclides

Estes são os axiomas extraídos do trabalho de Euclides, traduzidos de (Heath, 1956, p. 153-155) pelo autor.

Axioma 1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.

Axioma 2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.

Axioma 3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

Axioma 4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

Axioma 5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

1.1.3 Postulados de Euclides

Aqui apresentamos os postulados de Euclides, traduzidos de (Heath, 1956, p. 153-155) pelo autor. Na próxima subseção, seus equivalentes atuais.

Postulado 1. Pode-se desenhar uma linha reta de um ponto a outro.

Postulado 2. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.

Postulado 3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada.

¹²Retângulo.

¹³Losango

¹⁴Paralelogramo

Postulado 4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.

Postulado 5. Que, se uma linha reta caindo sobre outras duas fizer ângulos internos de mesmo lado menores que dois ângulos retos, se prolongadas infinitamente, se encontrarão no lado onde os ângulos são menores que dois ângulos retos.

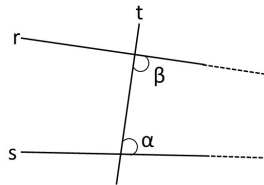


Figura 1.3: Representação do 5º postulado

O 5º postulado não tem uma grafia que favoreça a intuição, porém um leitor com conhecimento prévio do teorema das retas paralelas – que nada mais é que um equivalente “moderno” do 5º postulado – não terá grandes dificuldades em interpretá-lo.

1.1.4 Enunciados atuais dos postulados

Se os postulados de Euclides forem analisados com atenção pode-se perceber que são insuficientes para a construção de “Os Elementos”, segundo Feitosa e Locci (2001)

“Muitas dessas demonstrações de Euclides apelam fortemente à intuição e, desta maneira, escondem alguns postulados admitidos intrinsecamente.”

Os autores Feitosa e Locci (2001) nos contam que Hilbert (1862-1943) reformulou a geometria euclidiana, evitando ambiguidades e preenchendo as lacunas daquele trabalho.

“Hilbert considerou, para a geometria plana, duas noções primitivas: ponto e reta (e também plano, no caso da geometria espacial). Mais ainda, supôs que entre estas noções primitivas existiam três relações primitivas:

- um ponto está numa reta.
- um ponto está entre dois pontos.
- relação de congruência (entre segmentos, ângulos e triângulos).

Hilbert considerou que estas noções e relações primitivas deveriam satisfazer um sistema de postulados ou axiomas divididos em cinco grupos:

- (1) Axiomas de incidência (noção de estar em).
- (2) Axiomas de ordem (noção de ocorrer primeiro).
- (3) Axiomas de congruência (noção de congruência).
- (4) Axioma de continuidade.

(5) Axioma das paralelas.”

Assim, temos os equivalentes atuais dos 5 postulados.

Ao se excluir o axioma das paralelas de Hilbert e utilizar somente os quatro primeiros axiomas, obtemos um corpo de resultados que é conhecido como **geometria neutra**, assim conhecida por, ao assumir o 5^o postulado de Euclides define a geometria euclidiana e ao negá-lo, determina as bases das geometrias não euclidianas. Para maiores esclarecimentos no assunto, sugerimos (Andrade, 2013, ver). Na seção (1.3) trataremos um pouco mais destas geometrias, salientando suas diferenças.

1.2 Do 5^o postulado às geometrias não euclidianas

Esta seção, a exemplo da primeira, tem sua parte histórica baseada nos trabalhos de (Greenberg, 1993), (Andrade, 2013) e (Feitosa e Locci, 2001). Agora vamos mostrar que durante séculos, vários matemáticos tentaram provar que o 5^o postulado era um teorema. E o tema gerou tanto fascínio que, segundo Andrade (2013, p. 23),

“O livro “Saggio di una bibliografia Euclidea”, parte IV, Bolonha 1890, relaciona em 24 páginas, títulos de monografias relativas ao 5^o postulado publicadas entre os anos de 1607 e 1887! O fascínio exercido pela questão vinha desde os tempos de Euclides, mas somente com o advento da imprensa foi possível conservar inúmeras e inúteis tentativas de prova.”

As consequências destas tentativas de prova geraram novas ideias para novas geometrias, conhecidas como geometrias não euclidianas. Dentre essas geometrias, as mais estudadas e aperfeiçoadas são: a topológica, a projetiva, a fractal, a hiperbólica e a geometria esférica (ou elíptica).

Vários substitutos para o 5^o postulado surgiram, como o mais famoso deles o postulado de Playfair, figura 1.4 a esquerda¹⁵, que afirma que dada uma reta por um ponto fora dela incide uma, e apenas uma, reta paralela à reta dada, como na figura 1.4 a direita.

¹⁵Disponível em: <https://bit.ly/2L0nmWc>. Acessado em: 19 de fevereiro de 2018

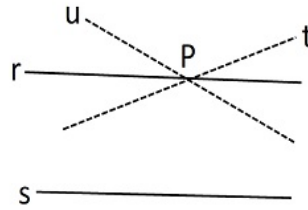


Figura 1.4: Playfair e seu substituto ao 5º postulado

O padre jesuíta Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) valendo-se da técnica amplamente utilizada por Aristóteles, a redução por absurdo¹⁶, admitiu a negação do quinto postulado e provavelmente tenha sido o primeiro a ensaiar uma abordagem inteiramente nova, no seu último livro “*Euclides ab omni naevo vindicatus*”. Sem saber, e talvez até sem querer, Saccheri tinha descoberto a geometria não-euclidiana! Seus estudos ficaram ignorados durante um século e meio. Outros grandes matemáticos negaram o quinto postulado, mas nunca chegaram a uma contradição. Existem indícios que Gauss (figura 1.5 a esquerda)¹⁷ começou a desenvolver a geometria não-euclidiana desde 1792, ou seja aos 15 anos de idade! Gauss não publicou seus estudos, pois achava que estavam inacabados e aproveitando estes, Bernhard Riemann (figura 1.5 a direita)¹⁸, em 1854, desenvolveu a ideia de uma superfície geométrica abstrata, que não precisa ser nivelada no espaço euclidiano tridimensional, onde as retas (ainda a menor distância entre dois pontos) são as geodésicas .



Figura 1.5: Carl Friederich Gauss e Bernhard Riemann

¹⁶A redução ao absurdo é um argumento lógico onde se assume uma ou mais hipóteses (premissas) e à partir dessas se chega a uma conclusão absurda. Para concluir este argumento, utilizam-se do princípio da *não contradição* (uma proposição não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo), e do princípio do *terceiro excluído* (uma proposição é verdadeira ou é falsa, não havendo uma terceira opção).

¹⁷Disponível em: <https://goo.gl/2gT6sz>. Acessado em: 7 de fevereiro de 2018.

¹⁸Disponível em: <https://goo.gl/LpNAJ4>. Acessado em: 17 de fevereiro de 2018

Segundo Feitosa e Locci (2001),

“Riemann percebeu entre os conceitos mais importantes em qualquer geometria está o de “métrica” que é uma função para determinar a distância entre dois pontos que podem estar infinitesimalmente próximos um do outro. Na geometria euclidiana ordinária, por exemplo, o espaço com uma métrica usual (fórmula de distância) é chamado espaço euclidiano. Um espaço com uma métrica formulada por Riemann passou a ser chamado espaço riemanniano e o espaço euclidiano é, localmente, apenas um caso especial deste.

Hoje, temos uma concepção mais restrita para o termo geometria riemanniana, a qual não revela integralmente a mudança fundamental nas concepções geométricas introduzidas por Riemann. Este sugeriu uma abordagem mais geral para os espaços métricos com curvaturas, o que mais tarde possibilitou a teoria geral da relatividade.”

Outros, Como o húngaro Janos Bolyai (1802 - 1860), representado na figura 1.6 direita¹⁹, admitindo a negação do 5º postulado não como absurdo, mas como um novo, em conjunto com os postulados habituais da geometria absoluta, escreveu em 1823 uma carta a seu pai Farkas Bolyai, figura 1.6 ²⁰ a esquerda, descrevendo seus avanços. Farkas também havia passado a vida inteira tentando provar o postulado das paralelas, e quando soube que seu filho também estava absorvido pelo problema, pediu-lhe que abandonasse esses estudos.

Em 1831 Farkas Bolyai enviou a Gauss os resultados obtidos por Janos sobre o tema, e Gauss respondeu-lhe que elogiar seu filho seria equivalente a elogiar a ele mesmo, pois o conteúdo era praticamente idêntico ao que ele havia produzido nos últimos trinta a trinta e cinco anos. Janos, após os comentários de Gauss, jamais o publicou.



Figura 1.6: Farkas Bolyai e seu filho Janos

¹⁹Disponível em: <https://bit.ly/2OkRbiQ>. Acessado em: 17 de fevereiro de 2018.

²⁰Disponível em: <https://goo.gl/r121wZ>. Acessado em: 17 de fevereiro de 2018.

Paralelamente, trabalhando de forma independente, o russo Nicolai Lobachewski (1792 - 1856) representado na figura (1.7)²¹ publicou em 1829 uma versão da geometria não euclidiana inicialmente chamada de “imaginária” e depois “pangeometria”. Atualmente, é conhecida como geometria Hiperbólica.



Figura 1.7: Lobachevski

1.2.1 A contribuição de Poincaré

Restava agora a validação destes novos conhecimentos. Eram consistentes, sem contradições? Somente no século XIX que as ideias de Gauss, Bolyai, Lobachevski e outros demonstraram que o 5^o postulado se trata efetivamente de um axioma, necessário e independente dos outros. De fato, a necessidade de se validar essas novas geometrias conduziu a um modelo baseado na geometria euclidiana, assim qualquer incompatibilidade de uma implicaria na negação da outra. Dentre esses modelos, que não só colocaram um fim na discussão sobre a prova do axioma das paralelas como validaram a geometria de Bolyai e Lobachevski, destaca-se o do francês Henri Poincaré (1854-1912) representado na figura (1.8)²², o modelo de Disco de Poincaré.

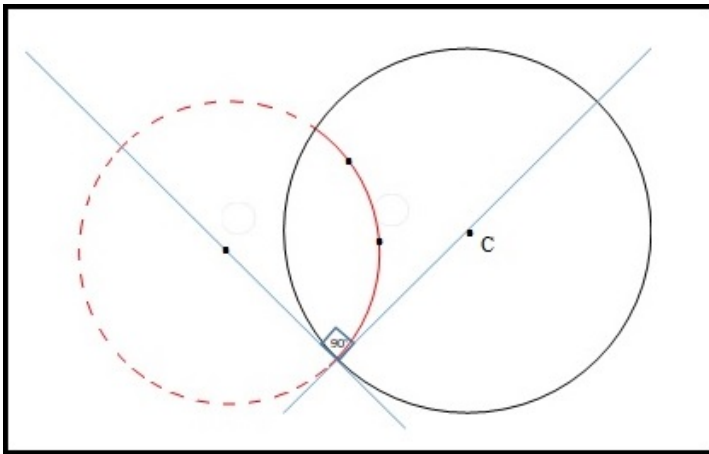


Figura 1.8: Poincaré

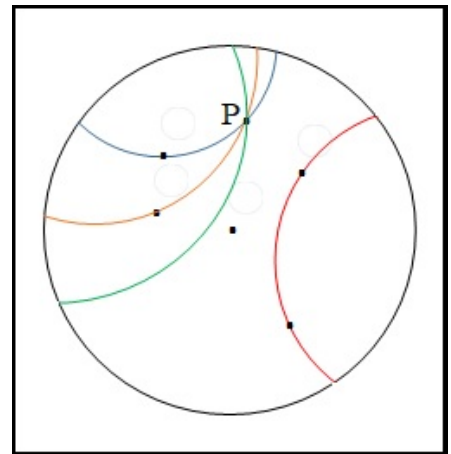
²¹Disponível em: <https://bit.ly/2mNAtfm>. Acessado em: 17 de fevereiro de 2018.

²²Disponível em: <https://bit.ly/2LOIYmi>. Acessado em: 17 de fevereiro de 2018.

Neste modelo, o plano hiperbólico é definido a partir da região plana limitada por uma circunferência, que fica definida como disco. Os pontos que pertencem a este disco daremos o nome de pontos do plano hiperbólico e os que pertencem à circunferência denominaremos pontos ideais. A circunferência é dita *horizonte hiperbólico* e os arcos de circunferência contidos no Disco e ortogonais ao horizonte hiperbólico são as *retas hiperbólicas* como mostra a figura(1.9(a)) em vermelho. Dados uma reta r (destacada em vermelho na figura (1.9(b)) e um ponto P contidos no plano hiperbólico, por P externo a r passam infinitas retas paralela à ela. As construções pertinentes a métrica podem ser encontradas em (Souza et al., 2015) e também sugerimos como leitura complementar (Andrade, 2013).



(a) Reta hiperbólica como arco de circunferência ortogonal ao horizonte.



(b) Infinitas retas hiperbólicas paralelas a r passando por P .

Figura 1.9: Reta hiperbólica e infinitas retas paralelas a r passando por P .

Na próxima subseção apresentaremos, de maneira sucinta e sem demonstrações, a fórmula de cálculo de distâncias entre dois pontos numa reta hiperbólica.

1.2.1.1 A métrica no Modelo de Poincaré

Dados dois pontos A e B pertencentes ao plano hiperbólico, para efetuarmos o cálculo da distância entre estes dois pontos traçamos a reta hiperbólica que passa por eles e consideramos os pontos ideais C e D que estão na circunferência euclidiana que define o Disco de Poincaré, como mostra a figura (1.10).

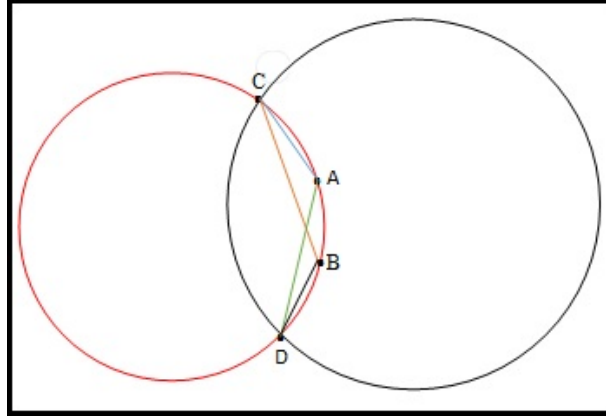


Figura 1.10: Razão cruzada

Observe que \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{AD} e \overline{BD} correspondem às medidas de segmentos euclidianos e a partir daí estabelece-se a seguinte relação:

$$d(A, B) = \left| \left(\ln \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} \right) \right|$$

Note que estamos relacionando distâncias hiperbólicas, no primeiro membro, com distâncias euclidianas, no segundo membro. Dessa relação, valendo-se de uma álgebra elementar, podemos fazer as seguintes análises:

- Se o ponto A tender ao ponto C , a distância euclidiana \overline{AC} tende a zero. Com isso a razão tende a zero e a expressão tende ao infinito. Uma análise idêntica pode ser feita para o ponto B tendendo ao ponto D .
- Quando o ponto B tender ao ponto A (ou A tender ao ponto B), temos que \overline{BD} tenderá a \overline{AD} e \overline{BC} tenderá a \overline{AC} . Com isso a razão tende a 1 e a expressão à zero. Ou seja, a distância hiperbólica entre os pontos A e B tende a zero.

De acordo com (Silva, 2015), uma consequência interessante surge da relação matemática entre as distâncias euclidianas e hiperbólicas, conforme a análise de nosso primeiro item acima: pontos equidistantes no espaço hiperbólico “parecem” ficar cada vez mais próximos quando tendem ao horizonte hiperbólico. Se pudessemos caminhar sobre uma reta no disco de Poincaré com passadas de mesmo comprimento um observador no espaço euclidiano as veriam cada vez mais próximas e *jamaiz* alcançariamos seu horizonte.

1.3 As geometrias não euclidianas

Substituindo o postulado das paralelas de Euclides por outros, admitindo que uma reta é a menor distância entre dois pontos A e B e que sua forma depende completamente da superfície em questão, temos duas interessantes geometrias diferentes da euclidiana, igualmente coerentes e que não conduzem a nenhuma contradição: Por um ponto exterior a uma reta, ou traçam-se infinitas retas paralelas a esta reta ou não podemos traçar nenhuma. Apesar de serem dificilmente concebíveis por não serem tão intuitivas, estas duas novas geometrias foram a pouco a pouco reconhecidas como alternativas legítimas.

A seguir apresentamos dois quadros comparativos entre as geometrias e a forma dos espaços euclidiano, esférico (ou elíptico) e hiperbólico²³.

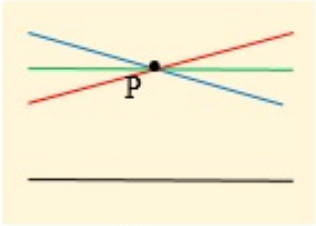
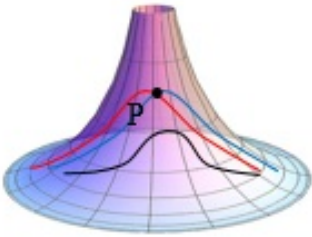
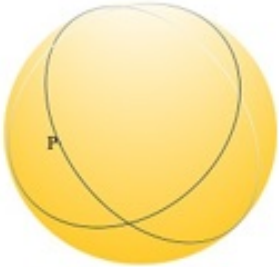
 <p>Espaço euclidiano</p>	<p>Espaço hiperbólico</p> 	<p>Espaço esférico</p> 
<p>Comparação entre os tres espaços uniformes</p>		
<p>Espaço euclidiano</p>	<p>Por um ponto fora de uma reta dada podemos traçar apenas <i>uma</i> reta paralela a ela.</p>	
	<p>A soma dos ângulos internos um triângulo é 180°.</p>	
	<p>O comprimento de uma circunferência é $C=2\pi r$.</p>	
<p>Espaço hiperbólico</p>	<p>Por um ponto fora de uma reta dada podemos traçar <i>infinitas</i> retas paralelas a ela.</p>	
	<p>A soma dos ângulos internos um triângulo é <i>menor</i> que 180°.</p>	
	<p>O comprimento de uma circunferência é menor que $C=2\pi r$.</p>	
<p>Espaço esférico</p>	<p>Por um ponto fora de uma reta dada não podemos traçar <i>nenhuma</i> reta paralela a ela.</p>	
	<p>A soma dos ângulos internos um triângulo é <i>maior</i> que 180°.</p>	
	<p>O comprimento de uma circunferência é <i>maior</i> que $C=2\pi r$.</p>	

Figura 1.11: Quadro comparativo entre as geometrias Plana, esférica e Hiperbólica.

Observe a diferença entre as retas contidas nas três superfícies. Um exercício não

²³Ilustração disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PseudoSphere.jpg>. Acessada em: 23 de abril de 2018.

muito laboroso é imaginar-se caminhando em linha reta (reta como estamos acostumados, no espaço euclidiano) nas três superfícies, gerando assim os traços das retas desenhadas na figura. Podemos também visualizar, sem muito esforço, as infinitas retas paralelas ao ponto P no espaço hiperbólico e a ausência delas no espaço esférico. Na figura a seguir destacamos as formas dos espaços e, em especial, a forma dos triângulos nos espaços esférico (ou elíptico) e hiperbólico²⁴.

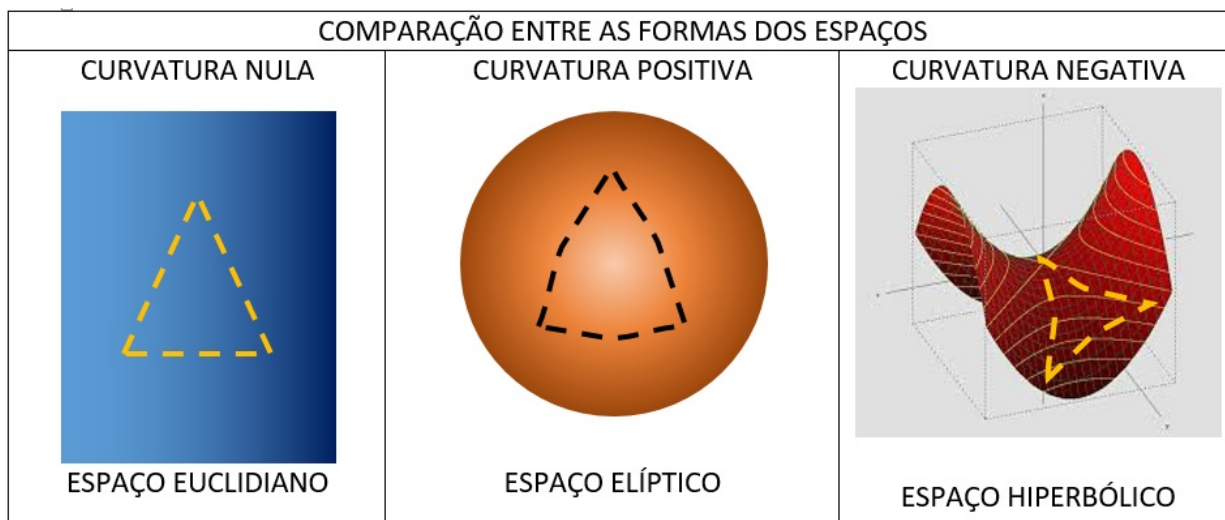


Figura 1.12: Comparação entre as formas do espaço Plano, Esférico e Hiperbólico.

Mas o que é curvatura? Para diferentes áreas da geometria temos diferentes definições, dependendo do contexto. Intuitivamente, curvatura é quanto um objeto geométrico se distancia do formato do plano (ou reta). O exemplo clássico de curvatura (no espaço euclidiano) é a de um círculo, que em todos os lugares tem curvatura igual ao inverso do seu raio. Círculos menores dobram-se mais acentuadamente, e, portanto, têm maior curvatura.

Estas novas geometrias permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, entre os quais, como citado por (Feitosa e Locci, 2001), a elaboração da Teoria da Relatividade de Einstein (1879 - 1955), O que permitiu provar que essas geometrias, ao contrário do que muitos afirmavam, tinham realmente aplicações práticas.

²⁴Ilustração disponível em: <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:ParabHyper.png>. Acessada em: 23 de abril de 2018.

Capítulo 2

Elementos, definições, propriedades e teoremas da geometria esférica

Apresentaremos agora alguns dos elementos notáveis de uma esfera e definições da geometria esférica. Um dos motivadores deste trabalho ter como foco a geometria esférica é que estas definições não raramente são idênticas às que são apresentadas na geometria euclidiana do ensino médio. A sua aplicabilidade e conseqüente facilidade de ser contextualizada, além de ser multidisciplinar, pois podemos relacioná-la com a História, Geografia e a Física, completam a motivação.

2.1 Elementos notáveis da superfície esférica

Conforme a figura 2.1 abaixo temos:

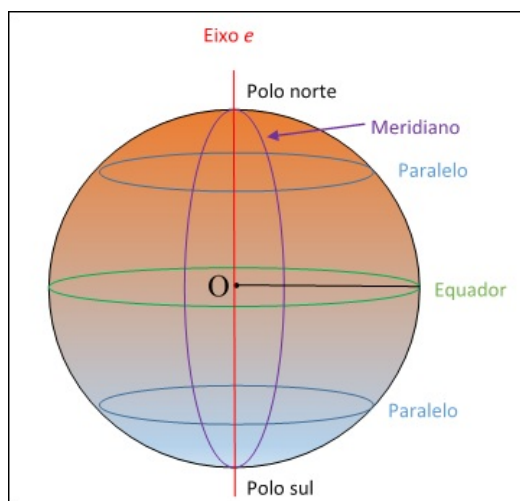


Figura 2.1: Elementos notáveis de uma esfera.

- i. *Eixo e* é qualquer reta que contenha o centro O .
- ii. *Polos* são os pontos de interseção do eixo e com a superfície esférica. Dessa forma temos dois pontos, denominados Polo Norte e Polo Sul.
- iii. *Equador* é um círculo máximo cujo plano que o contém é perpendicular ao eixo e . Provaremos sua existência na proposição 2.1.
- iv. *Paralelo* é um círculo contido num plano que é perpendicular ao eixo e e é paralela ao equador.
- v. *Meridiano* é um semicírculo máximo cujo plano que o contém passa pelo eixo e e liga os polos.

2.2 Definições

O entendimento das definições abaixo é imprescindível para a compreensão dos teoremas da próxima seção. Para tais, usamos como referência Muniz Neto (2013), e vamos nos valer dos conceitos básicos geométricos. Vamos à elas:

Definição 2.1. Seja O um ponto no espaço e r doravante um número real positivo. Uma **esfera** é o lugar geométrico¹ dos pontos P do espaço cuja distância de P a O são menores ou iguais a r . Ao ponto O damos o nome de *centro da esfera* e a distância r denominamos *raio da esfera*. Assim, uma esfera é um sólido geométrico².

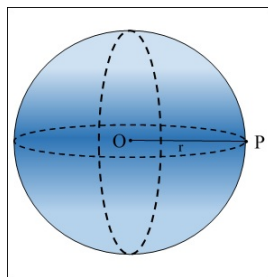


Figura 2.2: Esfera de centro O e raio r .

¹Lugar geométrico é um conjunto de pontos no espaço que gozam de uma certa propriedade. Ao conceito de lugar geométrico estão associadas equações que determinam a figura num sistema de eixos coordenados. A saber, a equação de uma esfera de centro $O = (x_0, y_0, z_0)$ e raio r é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0^2) + (z - z_0)^2 \leq r^2$$

²Sólidos geométricos são objetos tridimensionais definidos no espaço. Uma de suas características é a capacidade volumétrica.(N. do A.)

Não raramente se confunde a definição de esfera com a que descreveremos a seguir:

Definição 2.2. O lugar geométrico dos pontos P que distam exatamente r do centro O da esfera é uma **superfície esférica** Σ . Alguns autores a chamam de “*casca esférica*”³ por considerarem que este nome é mais intuitivo.

Observem que, pela definição 2.1 a superfície esférica é um subconjunto³ da esfera, e esta definição é pré-requisito para a próxima.

Definição 2.3. Dados dois pontos A e B pertencentes à Σ , chamamos de **corda esférica** o segmento de reta definido por estes dois pontos (figura (2.3) à esquerda). Caso o centro O da esfera esteja contido neste segmento, esta corda passa a se chamar *diâmetro da esfera* com valor $2r$ e neste caso, os pares de pontos A, B e P, P' são chamados de *antípodas* (figura (2.3) à direita). Observe que dado um ponto P , seu antípoda P' é o único ponto da superfície esférica tal que a medida do segmento $\overline{PP'}$ é um diâmetro desta superfície. Na figura (2.1) o polos norte e sul são antípodas.

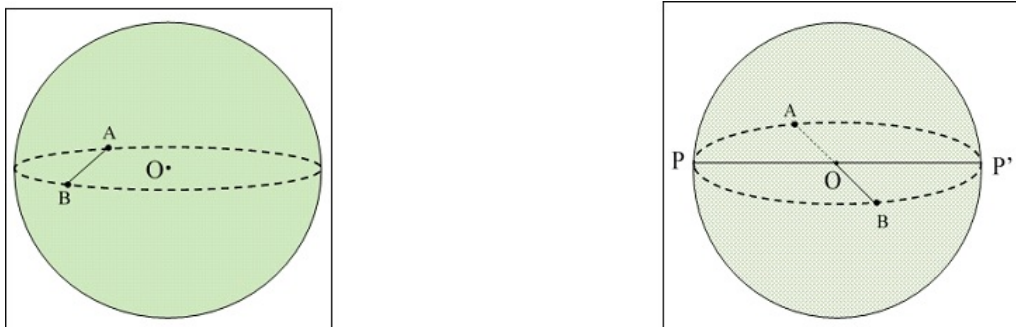


Figura 2.3: Corda e antípodas na esfera

Como consequência, se tivermos uma superfície esférica Σ de centro O e raio r com os pontos A e B pertencentes à Σ e $O \notin AB$ e aplicando a desigualdade triangular no triângulo AOB então uma corda AB é tal que $\overline{AB} \leq 2r$. Vale ressaltar que AB representa o *segmento de reta* enquanto \overline{AB} representa a *medida* deste segmento.

No que se refere às interseções de um plano α qualquer com uma superfície esférica Σ temos os seguintes resultados:

Proposição 2.1. Sejam um plano α e uma superfície esférica Σ , com centro em O e raio r dados no espaço e seja d a distância de O a α .

³Algebricamente, temos aqui um caso particular da esfera onde $(x - x_0)^2 + (y - y_0^2) + (z - z_0)^2 = r^2$

- (a) Se $d > r$, então α não intersecta Σ .
- (b) Se $d = r$, então α intersecta Σ em um único ponto.
- (c) Se $d < r$, então α intersecta Σ em um círculo Γ , de raio⁴ $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$ e centro O' localizado no pé da perpendicular baixada de O a α .

Usaremos as mesmas notações da proposição (2.1) para discorrermos sobre a interseção de plano e uma superfície esférica, nas definições a seguir.

Definição 2.4. Suponha que $d = r$ e seja T o ponto comum entre α e Σ . Assim diremos que α tangencia Σ em T , ou seja, T é o **ponto de tangência** de α e Σ conforme figura (2.4) e α é o **plano tangente** à Σ .

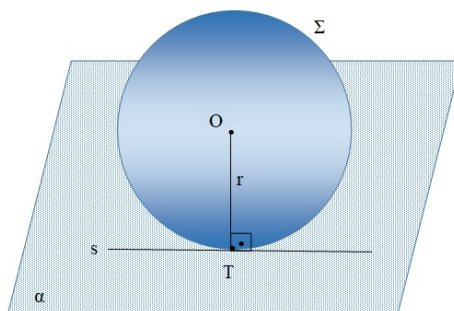


Figura 2.4: Plano tangente à esfera.

Definição 2.5. Suponhamos agora que $d < r$ (com $d \neq 0$). De acordo com a proposição 2.1, temos a interseção de α com Σ que é um círculo Γ , de raio r' , tal que Γ divide Σ em duas partes, cada uma denominada **calota esférica** onde uma possui altura $r - d$ e outra altura $r + d$. A situação está representada na figura 2.5.

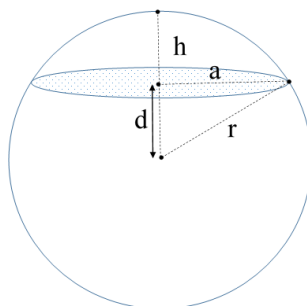


Figura 2.5: Calota esférica.

⁴Para tal equação, basta usarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo definido pelos pontos O , O' e um ponto T que esteja na interseção entre retas suporte de r e r' tal que $T \in \Sigma$.

Definição 2.6. Caso $d = 0$, de acordo com o item (d) da nossa proposição (2.1) temos um círculo Γ cujos raio r' e centro O' coincidem com os da superfície esférica Σ . Então neste caso Γ assume o maior valor possível para r' e recebe o nome de **círculo máximo**, ou **equador** (conforme figura (2.1)) de Γ e as extremidades do diâmetro de Σ e ortogonais a Γ são os **polos Norte e Sul**, em alguma ordem, de Γ em relação à Σ . Para clarear as ideias, sugerimos visualizar a imagem da figura 2.6

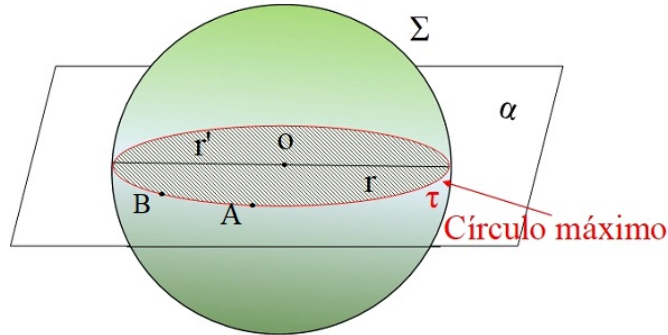


Figura 2.6: Círculo Máximo.

Proposição 2.2. Dados dois pontos A e B pertencentes a uma esfera Σ de centro O e raio r , existe um círculo máximo que passa por estes dois pontos. Caso A , B e O não pertençam ao diâmetro, tal círculo é único.

Demonstração. Como A e B pertencem a Σ , pela proposição 2.1 ítem [c], se $d = 0$, então o plano α passando por A , B e O intersecta Σ em um círculo Γ de raio $r' = r$ e centro $O' = O$, ou seja, mostrando a existência de um círculo máximo. Se A , B e O não pertencem a um diâmetro (não colineares), pela geometria espacial, existe um único plano passando por A , B e O , portanto um único círculo máximo.

Definição 2.7. O ângulo formado por dois arcos de circunferências máximas que se intersectam no ponto P (ou na antípoda P') é denominado **Ângulo esférico**. Sua medida θ é a mesma do ângulo plano formado pelas retas tangentes a Σ no ponto P (ou na antípoda P') que contém os vetores \vec{V} e \vec{W} e cujas projeções radiais coincidem com os círculos máximos.

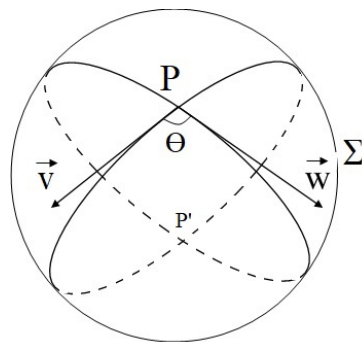


Figura 2.7: Ângulos esféricos.

A noção de reta, no espaço euclidiano, é intuitiva: dados dois pontos basta uni-los por uma "linha" sem "curvas". Sem formalidades, fora deste espaço, uma reta é o traço da menor distância entre dois pontos numa superfície qualquer. A seguir, daremos a definição de reta numa superfície esférica.

Definição 2.8. Sejam Δ uma superfície qualquer no espaço e A e B dois pontos distintos tais que A e $B \in \Delta$. Definiremos como **Geodésica** a curva ψ contida na superfície Δ que minimiza a distância entre A e B , ou seja, uma reta. Na geometria plana a menor distância entre dois pontos A e B é o segmento de reta formado por esses dois pontos. Na geometria esférica, definida nossa superfície esférica Σ e A e $B \in \Sigma$, pode-se demonstrar que ψ está contida no círculo máximo ou seja, ψ é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por A e B .

Não raramente ouvimos a palavra "fuso". É bom observar que comumente é um fuso confundido com "cunha esférica". Comparativamente, enquanto uma cunha equivale a um gomo de laranja, o fuso equivaleria a casca deste gomo. Vamos à definição:

Definição 2.9. Sejam dados no espaço uma superfície esférica Σ de centro O e raio r . Para um ângulo α tal que $0 < \alpha < \pi$ definimos um **fuso esférico** ϕ de abertura α em Σ como sendo a interseção de Σ com diedro de abertura α e aresta um diâmetro de Σ , conforme a figura (2.8). Em Geografia, os fusos são utilizados para localização além de determinarem os *fusos horários*. Considerando a terra com um formato esférico, dividindo-se sua circunferência de 360° por 24, que é o número de horas do dia, obtém-se $\alpha = 15$, ou seja, a cada 15° tem-se um meridiano que diferencia em ± 1 hora em relação à um adjacente.

Uma definição alternativa de fuso esférico, menos formal, é a que, dados dois pontos não coincidentes A e B no equador de Σ sob um ângulo α , **fuso esférico** é a

região da superfície esférica compreendida entre os círculos máximos que passam por A e B , no hemisfério que os contém, e se intersectam nos polos.

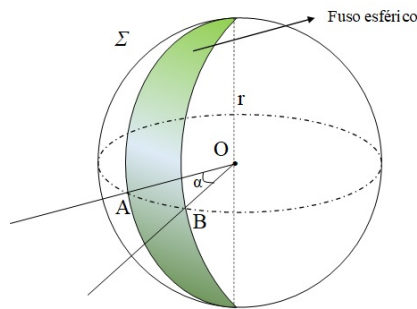


Figura 2.8: Fuso esférico.

Na terra, o clima é determinado quase totalmente pela incidência de luz solar. No equador o nível de incidência é maior que nos trópicos, que por sua vez recebem mais luz que os polos. Em Geografia, pode-se associar o conceito de zona esférica com as zonas climáticas do nosso planeta.

Definição 2.10. Sejam dois planos α e β paralelos com uma distância h entre eles, ortogonais ao eixo e de uma superfície esférica Σ de centro O e raio r . Se tomarmos $0 < h < 2r$ de forma que h se situe entre os polos do eixo, excluindo-os, então α e β intersectam Σ e definiremos **zona esférica** como a parte de delimitada pelos planos α e β com a superfície esférica (figura (2.9)).

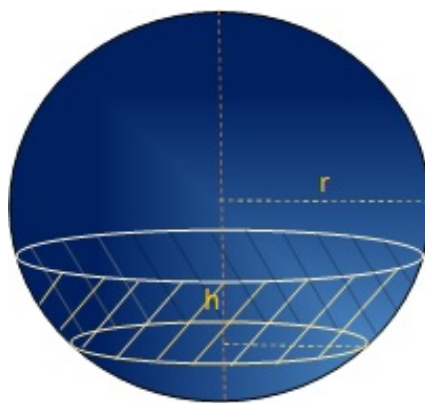


Figura 2.9: Zona esférica de altura h .

Um triângulo esférico não é qualquer figura de três lados sobre a esfera; seus lados devem ser arcos de grandes círculos, ou seja, arcos de um círculo máximo. a definição que se segue descreve uma figura como essa.

Definição 2.11. : Seja Σ uma superfície esférica de centro O e raio r e sejam, conforme figura (2.10)⁵, A , B e C três pontos pertencentes a Σ em algum dos hemisférios. Denotaremos como ζ_{AB} o círculo máximo que contém os pontos A e B , ζ_{AC} o que contém os pontos A e C e ζ_{BC} o que contém os pontos B e C e as distâncias $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Assim, definiremos um **triângulo esférico** ABC como a região de Σ delimitada pelos círculos máximos ζ_{AB} , ζ_{AC} e ζ_{BC} , que tem como medidas dos lados a , b e c e ângulos α , β e γ opostos aos lados a , b e c respectivamente. Observe que no hemisfério oposto ao considerado, as antípodas de A , B e C , a saber A' , B' e C' , determinam um triângulo $A'B'C'$ congruente ao triângulo ABC .

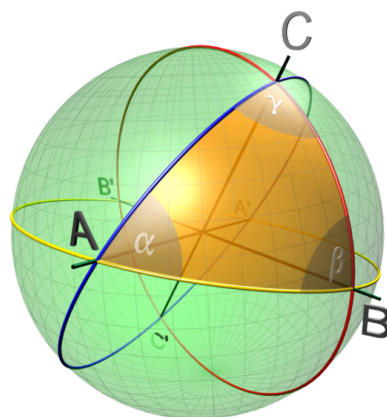


Figura 2.10: Triângulo esférico.

2.3 Propriedades

Listaremos apenas algumas propriedades dessa geometria, as que julgamos mais pertinentes, pois não é nosso objetivo nos aprofundarmos no assunto. Daqui por diante, ao citarmos *reta* estaremos associando-a ao sentido amplo, de menor distância entre dois pontos, e caso tenhamos uma superfície esférica estaremos nos referindo à uma geodésica, conforme definição (2.8).

Propriedade 1. Dois pontos não determinam necessariamente uma única reta. Por exemplo, o polo norte e o polo sul estão sobre uma quantidade infinita de *círculos máximos*⁶ conforme figura (2.11). O mesmo acontece para os pontos do final de quaisquer diâmetros da esfera Σ . Tais pontos são chamados *antípodas*⁷.

⁵Disponível em: <https://bit.ly/2mZpT4S>. Acessado em: 25 de abril de 2018.

⁶Veja definição 2.6.

⁷A descrição de antípoda encontra-se na definição 2.3.

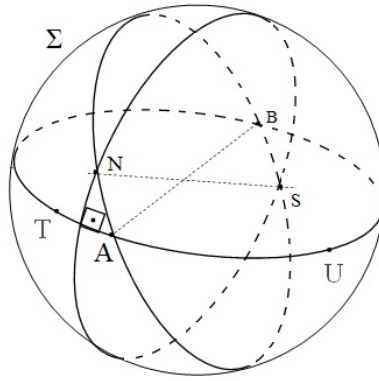


Figura 2.11: Círculos máximos em uma esfera..

Propriedade 2. Para uma esfera de raio r , a maior distância possível entre quaisquer dois pontos é $\pi.r$, e caso o valor do raio seja 1, a maior distância é π . Conseqüentemente, aqui o *postulado da régua*⁸ não é válido.

Propriedade 3. A intermediação (ordem) não funciona na forma em que estamos acostumados. De fato, dados três pontos de uma reta, não é necessariamente verdade que um deles está entre os outros dois. Verifique na figura (2.11) a reta que contém os pontos A , T , B e U ; não podemos afirmar se U pertence ao segmento AB , pois este segmento pode passar por T .

Propriedade 4. A perpendicular à uma reta, de um ponto externo, sempre existe, mas não é necessariamente única. Por exemplo, qualquer reta que une o Polo Norte a um ponto do equador é perpendicular ao equador (veja figura (2.11)).

Propriedade 5. Alguns triângulos esféricos podem ter dois ou três ângulos retos, conforme a figura (2.12).

⁸Dada uma reta e fixando uma unidade de medida e uma origem sobre ela, a qual associaremos o número 0 e a cada ponto da reta um número real correspondente a sua distância em relação à origem. Por outro lado, para cada número real associamos um ponto da reta cuja distância em relação à origem corresponde a este número. Assim estabelecemos uma *relação biunívoca* entre os pontos da reta e os números reais.

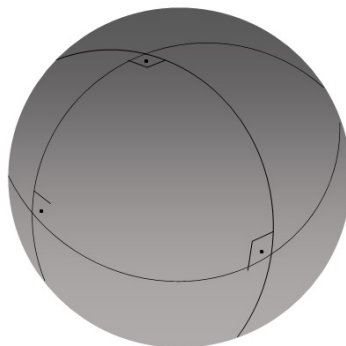


Figura 2.12: Triângulo esférico com 3 ângulos retos.

Implicitamente, esta propriedade nos diz que um triângulo esférico pode ter a soma de seus ângulos externos maior que 180° . Como consequência temos a próxima propriedade.

Propriedade 6. O teorema do ângulo externo falha. Note que, para qualquer escolha de um dos vértices do triângulo acima, qualquer ângulo externo associado à este vértice será também um ângulo reto, e a soma dos internos não adjacentes é 180° !

2.4 Teoremas

Os teoremas apresentados nesta seção têm como referência (Muniz Neto, 2013), e tratam basicamente de áreas numa superfície esférica e algumas superfícies que nela estão contidas bem como o volume da esfera. Nos casos onde a proporcionalidade valida os teoremas, mesmo sem muita elegância e formalidade, as demonstrações valendo-se deste artifício foram escolhidas devido à objetividade deste trabalho. Para tais demonstrações formais, deixamos a sugestão de leitura do livro citado acima.

Vamos nos valer de alguns conceitos e resultados simples do Cálculo Diferencial Integral para iniciarmos a seção apresentando uma definição de superfície de revolução.

Definição 2.12. i) Sejam dados $a < b$ números reais tais que $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ seja uma função positiva e diferenciável com sua derivada $f' : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ contínua. Fixaremos um sistema de coordenadas cartesianas com eixo e das abcissas em um plano no espaço onde teremos o gráfico de f denominado de ζ^9 . A **superfície de revolução** $\varrho^{10}(e; \zeta)$ de eixo e e **geratriz** ζ é o conjunto de pontos do espaço obtidos

⁹Letra grega onde se lê sigma.

¹⁰Letra grega onde se lê rô.

pela rotação de ς em torno do eixo e , de tal forma que para um $x \in (a, b)$ o ponto $(x, f(x))$ descreve um círculo de raio $f(x)$ com centro em $x \in e$ contido no plano perpendicular a e que passa por x conforme a figura (2.13)¹¹ abaixo.

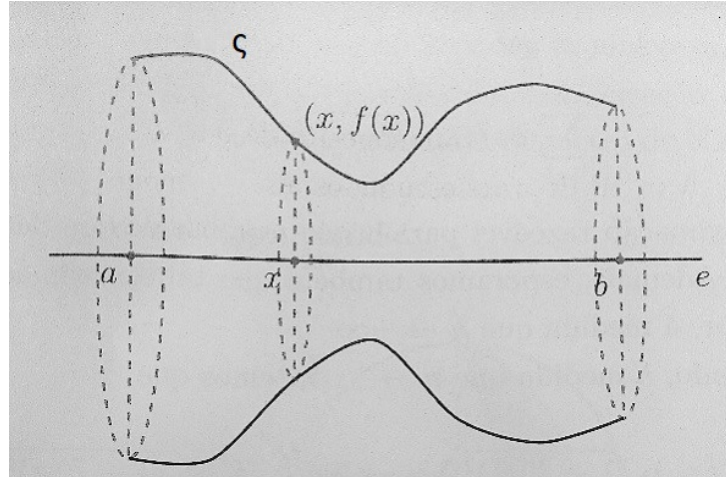


Figura 2.13: Superfície de revolução $\varrho(e; \varsigma)$.

- ii) Se tomarmos os números reais $c, d \in (a, b)$ com $c < d$ e definirmos a superfície $\varrho_{[c,d]}$ como a porção de $\varrho(e, \varsigma)$ situada entre os planos perpendiculares a e nos pontos c e d , podemos definir a área de $\varrho_{[c,d]}$ como

$$A = 2\pi \int_c^d f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (2.1)$$

Para uma maior motivação da definição (2.12) sugerimos a leitura do apêndice (A.1). Como nossas considerações feitas sobre f garantem a continuidade do integrando acima, a integral da equação tem sentido.

Teorema 2.1. *A área A de uma superfície esférica é igual a $A = 4\pi r^2$, onde r é o raio da superfície esférica.*

Demonstração. *Se tomarmos, de acordo com a definição (2.12) acima, uma função $f : (-r; r) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ e, aplicando a regra da cadeia, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ para $x \in (-r, r)$, teremos que $\varrho(e, \varsigma)$ é uma esfera Σ de raio r , com suas antípodas N e S removidas. Mas como*

$$\Sigma \setminus \{N, S\} = \bigcup_{0 < \epsilon < r} \varrho_{[-r+\epsilon, r-\epsilon]}$$

¹¹Muniz Neto (2013), pag. 363, fig. 9.2.

e $\varrho_{[-r+\epsilon, r-\epsilon]} \subset \varrho_{[-r+\epsilon', r-\epsilon']}$ para $0 < \epsilon' < \epsilon$, temos

$$\begin{aligned}
 A(\Sigma \setminus \{N, S\}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} A(\varrho_{[-r+\epsilon', r-\epsilon']}) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi \int_{r+\epsilon}^{r-\epsilon} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi r \int_{r+\epsilon}^{r-\epsilon} dx \\
 &= 4\pi r^2.
 \end{aligned}$$

□

Assim, definimos a área A de uma superfície esférica de raio R como

$$A = 4\pi r^2. \quad (2.2)$$

Corolário 2.1. A área A_c de uma calota esférica, onde r é o raio da superfície esférica e h é a altura da calota é igual a $A_c = 2\pi r h$.

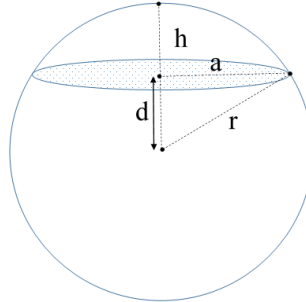


Figura 2.14: Calota esférica.

Demonstração. Analogamente ao teorema (2.1), removidos os pontos antípodas e apli-

cando os limites de integração $r - h$ e $r - \epsilon$ temos

$$\begin{aligned}
 A_c &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} A_c(\varrho_{[r-h, r-\epsilon]}) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi \int_{r-h}^{r-\epsilon} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi r \int_{r-h}^{r-\epsilon} dx \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} 2\pi r[(r - \epsilon) - (r - h)] \\
 A_c &= 2\pi r h.
 \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2. A área A_z de uma zona esférica é $A_z = 2\pi r h$, onde r é o raio da superfície esférica e h é a distância entre os planos paralelos.

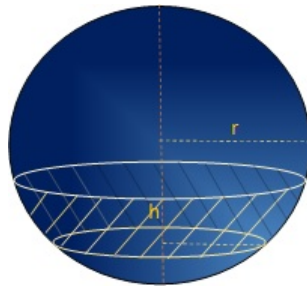


Figura 2.15: Zona esférica.

Demonstração. Novamente vamos nos valer das notações e da função utilizadas no teorema (2.1), onde os limites de integração agora são 0 e h .

$$\begin{aligned}
 A_z &= 2\pi \int_0^h \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\
 &= 2\pi r \int_0^h dx \\
 &= 2\pi r[h - 0] \\
 A_z &= 2\pi r h.
 \end{aligned}$$

= []

□

Corolário 2.3. A área A_f de um fuso esférico é $A_f = 2\alpha r^2$, onde r é o raio da superfície esférica e α é o ângulo do fuso.

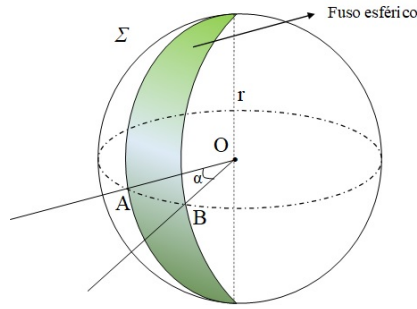


Figura 2.16: Área de um fuso esférico.

Demonstração. Se estabelecermos as razões entre o ângulo α do fuso esférico e o ângulo formado por uma volta inteira em um dos polos (2π) e entre a área do fuso A_f e a área da superfície esférica ($A = 4\pi r^2$) teremos uma proporção que, através de uma regra de três, poderemos determinar a área do fuso esférico A_f . Então:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{A_f}{4\pi r^2},$$

daí $A_f = 2\alpha r^2$.

□

Apresentaremos agora fórmula do cálculo do volume de um sólido de revolução qualquer. As demonstrações encontram-se em Muniz Neto (2013), entre as páginas 405 e 408.

Definição 2.13. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva de derivada contínua. Se $[c, d] \subset (a, b)$ e ν representa o volume de um sólido revolução obtido pela rotação do gráfico de f em torno do eixo das abscissas, então

$$\nu = \pi \int_c^d (f(x))^2 dx \quad (2.3)$$

Teorema 2.2. O volume de uma esfera de raio r é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Demonstração. Mantendo as notações utilizadas na nossa discussão sobre superfícies de revolução, seja $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, de maneira que o sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de f em torno do eixo das abscissas seja uma bola fechada (uma esfera) $\bar{\omega}$ de raio r . Segue da definição (2.13) que o volume

da esfera é

$$\begin{aligned} \nu(\bar{\omega}) &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R dx \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

□

Para o teorema que se segue, necessitamos do seguinte resultado:

Definição 2.14. *Dados dois pontos não coincidentes A e B no equador de Σ sob um ângulo φ , **fuso esférico completo** é a região da superfície esférica compreendida entre os círculos máximos que passam por A e B , no hemisfério que os contém, e por suas antípodas A' e B' no hemisfério oposto, se intersectando nos polos. Note que um fuso completo é a união entre dois fusos esféricos (veja figura (2.17)).*

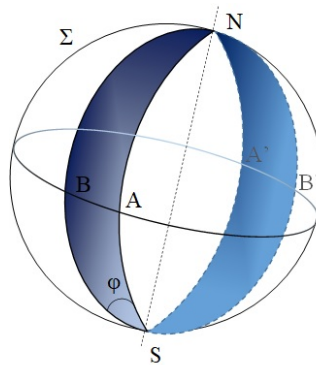


Figura 2.17: Fuso esférico completo.

Teorema 2.3. *Sejam α , β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico¹² ABC , então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo esférico (destacada em laranja) e r é o raio da superfície esférica.*

¹²Disponível em: <https://bit.ly/2mZpT4S>. Acessado em: 25 de abril de 2018.

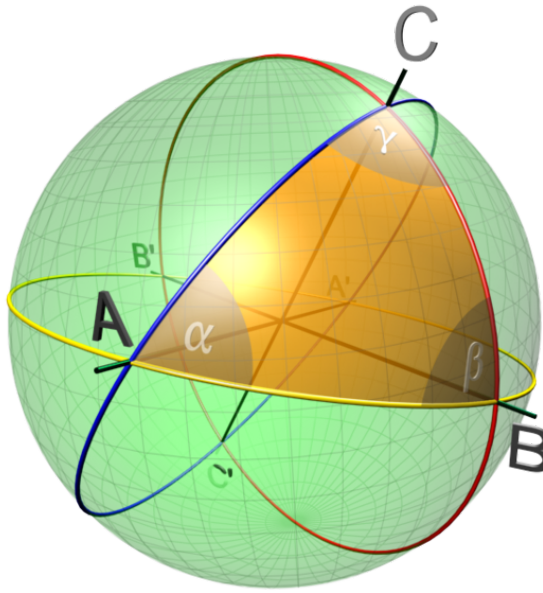


Figura 2.18: Área de um triângulo esférico.

Demonstração. *Prolongando os lados do triângulo esférico, construiremos três fusos completos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo. As áreas de cada um desses fusos completos, é $4\alpha r^2$, $4\beta r^2$ e $4\gamma r^2$. Ao somarmos as áreas destes três fusos, teremos a área da superfície esférica. A área de um triângulo esférico ABC é igual a área do triângulo $A'B'C'$ formado pelos pontos antípodas do triângulo esférico ABC , pois estes triângulos são congruentes pelo caso AAA. Note que os triângulos ABC e $A'B'C'$ serão assim somados três vezes cada, quando deveriam ser somados apenas uma vez. Portanto, a área da superfície esférica foi acrescida de quatro vezes a área a do triângulo esférico ABC . Então temos a equação*

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4a$$

que, dividindo ambos os membros por $4r^2$, nos dá $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$.

□

Teorema 2.4. *Sejam α , β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC . então, $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ onde a é a área desse triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica.*

Demonstração. *Do teorema (2.3), isolando-se a temos $a = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$. Ora,*

se $a > 0$ e $r > 0$ (caso contrário não haveria esfera) então $\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$, ou seja, $\pi < \alpha + \beta + \gamma$ e a primeira parte da desigualdade está provada.

Observe que, escolhendo-se um círculo máximo aleatoriamente, sem que este intersecte o triângulo em nenhum ponto, e situando-se os vértices equidistantemente entre si, tão próximos do círculo máximo quanto quisermos (caso coincidissem com o círculo máximo teríamos uma semi esfera) então a área a deste triângulo é menor que $2\pi r^2$ que é a área da semi esfera e podemos escrever $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} < \pi + \frac{2\pi r^2}{r^2}$ portanto $\alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ e com isto provamos a segunda parte da desigualdade. \square

Observe que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico é maior que π e seu acréscimo é proporcional à área do triângulo.

Teorema 2.5. *Num triângulo esférico de lados a , b e c , cada lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença entre eles. Em outras palavras, temos:*

$$|b - c| < a < b + c, \text{ ou}$$

$$|b - a| < c < b + a, \text{ ou}$$

$$|a - c| < b < a + c$$

*Essa é a **A** desigualdade triangular num triângulo esférico.*

Demonstração. *Observe a figura (2.19). Os lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ são iguais respectivamente aos ângulos $(\widehat{A\hat{O}B})$, $(\widehat{A\hat{O}C})$ e $(\widehat{B\hat{O}C})$ em radianos.*

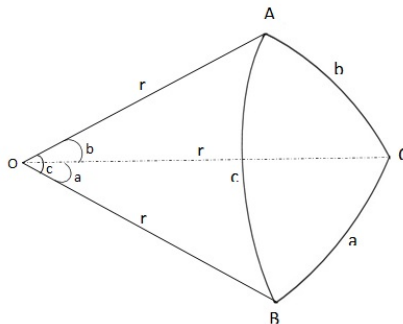


Figura 2.19: Triângulo esférico.

Se $a = b = c$ o teorema é válido e nada temos a demonstrar. Considere o tetraedro esférico $OABC$ e tome, por exemplo, o lado $(\widehat{A\hat{O}B})$ como o maior lado. Assim, é trivial

que $|b - c| < a$. Nos resta mostrar que $a < b + c$. A demonstração caso a escolha do maior lado seja qualquer um dos outros dois é completamente análoga. Para clareza das ideias, a figura 2.20 abaixo é de grande ajuda para o procedimento que se segue:

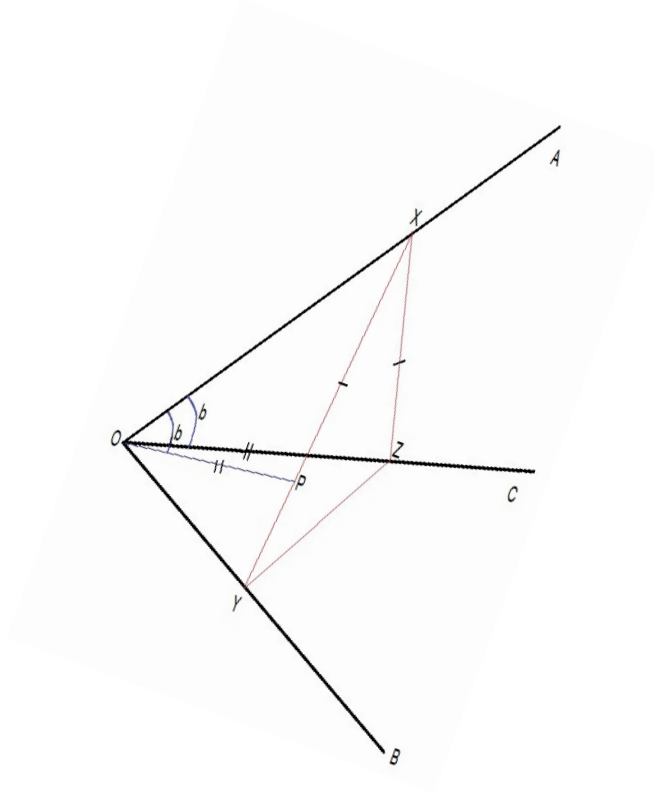


Figura 2.20: Figura auxiliar do tetraedro esférico.

Sobre OA tome um ponto X aleatoriamente; sobre OB tome um ponto Y qualquer e sobre XY um ponto P de modo que $(\widehat{XOP}) = (\widehat{AOC}) = \widehat{b}$. Sobre OC tome um ponto Z de modo que $OZ = OP$. Unindo-se X e Y a Z obtemos o triângulo XYZ no qual $XP = XZ$, pois os triângulos XOZ e XOP são congruentes (caso LAL). Pela desigualdade triangular da geometria plana, temos $XZ + ZY > XY$, mas $XY = XP + PY$ então $XZ + ZY > XP + PY$, como $XP = XZ$, temos que $ZY > PY$ e conseqüentemente $ZY > PY$ e $(\widehat{ZOY}) > (\widehat{POY})$. Então,

$$X\widehat{OZ} + Z\widehat{OY} > X\widehat{OP} + P\widehat{OY} = X\widehat{OY}.$$

Ou seja, $a < b + c$.

□

Capítulo 3

A proposta pedagógica

Este planejamento foi feito para quatro ou cinco aulas. Inicialmente, faz-se uma abordagem histórica, apresentando os fatos que causaram o desenvolvimento das geometrias não-Euclidianas, com posterior introdução à algumas características intrínsecas a geometria esférica. Como sugestão as demonstrações podem ser deixadas para as aulas finais para que o aluno menos interessado não disperse sua atenção. Salvo resguardo se o público-alvo tenha uma base Matemática mais sólida. No caso do ensino básico sugerimos que o professor não tenha muita preocupação com exercícios e exemplos envolvendo a quantização – nosso objetivo aqui é apenas introduzir este tópico nas aulas de ensino médio, com ênfase no caráter informativo e contextualizado – porque imaginamos que as “contas” afugentariam o interesse dos alunos (para o ensino superior a situação pode ser outra), mas é óbvio que o mesmo tem toda condição de avaliar quão profundamente poderá apresentar o conteúdo, de acordo com seus objetivos, uma vez que conhece o nível de suas turmas.

Durante as explicações do capítulo 3 podem ser oferecidas aos educandos esferas de isopor para que possam visualizar e marcar com canetas hidrocor as definições e os elementos notáveis da esfera. Para evitar o descarte mais imediato destas, que ficarão inevitavelmente muito riscadas, alguns desses elementos notáveis podem ser vistos com elásticos (daqueles que se prendem dinheiro, por exemplo).

Em seguida, sugerimos uma leitura, na forma de slides ou folhas impressas, uma adaptação de (Petit, 1982). Este livro, na forma de tirinhas, pode ser baixado gratuitamente em <http://www.savoir-sans-frontieres.com>. Aqui serão necessárias intervenções em momentos onde claramente surgirão dúvidas dos alunos. Explicações sobre

porque a menor distância entre dois pontos numa esfera é a geodésica, não uma paralela (no conceito geográfico) e para tal sugerimos uma visita ao site <https://bit.ly/215ykL7> pelos alunos. O cálculo de áreas na esfera, comparativamente menor que no plano, podem ser feitas.

Havendo a disponibilidade de um laboratório de informática, o professor poderá encaminhar a turma para que sejam realizadas pesquisas. Apresentamos algumas sugestões de assuntos:

- A Navisfera de Wilson.
- A geometria esférica e as navegações modernas.
- A geometria esférica e a astronomia posicional.

A seguir, daremos a proposta de uma lista com treze exercícios de aplicação com sugestões de solução e onze atividades, onde o objetivo de cada uma dessas últimas é abordado.

3.1 Exercícios de aplicação

O objetivo desta seção é o de fixar alguns conceitos e os elementos principais dos objetos geométricos estudados no ensino básico. Os exercícios de 1 a 8 foram extraídos de (Machado, 1988, páginas 211-219) e de 9 a 13 extraídos de (Dolce e Pompeo, 2005, p. 350)

1. (MAUÁ–SP) Uma cunha esférica corresponde a um diedro de 75° tem volume igual a $V = \frac{15\pi}{2}m^3$. Determine a área do fuso esférico correspondente (superfície da esfera que corresponde à cunha).
2. (CESCEM–SP adaptado) A área da intersecção de um plano com uma bola de raio 13 é 144π . Calcule a distância do plano ao centro da bola.
3. (Sta Casa–SP adaptado) Uma esfera é cortada por dois planos paralelos. As intersecções dos planos com a esfera são círculos, cujos raios medem 12 cm e a distância entre os planos é 18 cm. Quanto mede o raio da esfera, em centímetros?
4. (MACK–SP adaptado) Os planos α, β, γ são paralelos e α passa pelo centro de uma esfera. Os círculos que α, β, γ determinam na esfera têm raios 10, 8 e 5 respectiva-

mente. Se β e γ estão no mesmo semiespaço determinado por α , calcule a distância entre β e γ .

5. (CESGRANRIO adaptado) Supondo a Terra esférica de centro C , o comprimento do paralelo PP' é a metade do comprimento do Equador EE' , onde PP' e EE' definem os diâmetros. Qual a latitude (\widehat{PCE} ou $\widehat{P'CE'}$) do paralelo?
6. (CESGRANRIO adaptado) Macapá e Porto Alegre estão situadas sobre o mesmo meridiano. A primeira cidade está sobre a linha do Equador e a segunda tem latitude de 30° Sul, contada a partir do Equador. Suposta a Terra esférica, com circunferência máxima de 40.000 km, qual a melhor aproximação da distância entre as duas cidades, ao longo do meridiano?
7. (CESGRANRIO adaptado) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R , composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo terá que valor?
8. (UF-PA) A área da superfície de uma esfera é $16\pi \text{ cm}^2$. Qual o diâmetro da esfera?
9. Determine a área de uma esfera em que uma zona de 10 cm de altura tem área de $120\pi \text{ cm}^2$.
10. Determine a altura de uma zona esférica, sabendo que sua área é igual ao quádruplo da área do círculo máximo da esfera que a contém.
11. Qual é a fração da área da superfície da Terra suposta esférica ($\text{raio} = 6.300 \text{ km}$) observada por um astronauta que se acha à altura de 300 km?
12. Determine a altura que se deve elevar um astronauta para ver $\frac{1}{36}$ da superfície da Terra.
13. Um ponto luminoso está situado a 2 m de distância de uma esfera de raio 4 m. Qual o valor da área da porção iluminada da esfera?

Sugestões de solução:

1. Definidos α como o ângulo do fuso e r o raio da esfera que o contém, a área do fuso é dada por $A_f = 2\alpha r$. Como conhecemos α , nos resta determinarmos r . Para tal,

estabeleça uma regra de três entre o volume da esfera para 2π e o volume da cunha para 75° em radianos. Substitua o valor de r e obtenha como resposta $A_f = \frac{15\pi}{2}m^2$.

2. A intersecção do plano com a bola que aqui consideraremos uma esfera nos dá um círculo cuja área é $144\pi = \pi r^2$, daí $r = 12$. Defina E o centro da esfera, C o centro do círculo e R o raio da esfera. Construa um triângulo retângulo EM E de lados R , r e \overline{CE} e aplique o teorema de Pitágoras para determinar \overline{CE} , que terá como valor 5.
3. Se os raios dos círculos são iguais, os dois planos são equidistantes do centro. Seja α um plano paralelo aos outros dois passando pelo centro E da esfera, de tal sorte que E será o ponto médio da distância entre estes planos. Seja C o centro de um dos círculos a escolher e r o raio da esfera. Então $\overline{CE} = 9 \text{ cm}$ e construindo um triângulo retângulo em E com lados 12, 9 e hipotenusa r , aplicando o teorema de Pitágoras obtem-se $r = 15 \text{ cm}$.
4. Analogamente aos exercícios 2 e 3, construa triângulos que sejam retângulos nos centros dos círculos menores e cujas hipotenusas sejam o raio do círculo maior. Assim, aplique o teorema de Pitágoras para calcular a distância entre os planos α e β , que é 6, e entre α e γ de valor $5\sqrt{3}$. A distância entre β e γ será a diferença $5\sqrt{3} - 6$.
5. Defina A o centro do círculo que contém o paralelo e r o raio da Terra, que por sua vez é o mesmo do Equador. Construa um triângulo retângulo em A com lados \overline{AC} , r e o raio do paralelo ($= \frac{r}{2}$) e defina o ângulo em C neste triângulo como β , de forma que α seja seu complementar (AC é perpendicular a R) e é quem define a latitude. Aplique a relação trigonométrica $\sin \beta = \frac{\text{cat.oposto}}{\text{hipotenusa}}$ onde o cateto oposto é o raio do paralelo e a hipotenusa é r . Assim $\beta = 30^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$.
6. A circunferência da Terra, de raio r , é $40.000 = 2\pi r$. Então $r = \frac{40.000}{2\pi}$. O comprimento de um arco α é $C = \alpha r$. Daí, para $\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ tem-se $C = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{40.000}{2\pi} \simeq 3.333 \text{ km}$
7. Note que as duas faces planas do “gomo” da laranja são semicírculos com o mesmo raio do fuso esférico, de área $A_f = 2\alpha r^2$ onde $\alpha = \frac{2\pi}{12}$ (são 12 gomos). Agora some

as áreas das três faces e obtenha a área da superfície $A_s = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{2\pi r^2}{6}$ de maneira que o resultado é $A_s = \frac{4\pi r^2}{3}$.

8. É um exercício de aplicação direta da fórmula da área de uma superfície esférica. Usando nossa nomenclatura, $A = 4\pi r^2$ então $16\pi = 4\pi r^2$ daí o diâmetro ($2r$) terá medida 4 cm.
9. Valendo-se das nossas notações, a área de uma esfera é $A = 4\pi r^2$ e podemos calcular o valor de r diretamente com a fórmula da área da zona esférica $A_z = 2\pi r h$ obtendo a equação $120\pi = 2\pi r 10$, que resulta em $r = 6$ cm. Substituindo r na fórmula da área da esfera temos $A = 144\pi$ cm².
10. Nas notações anteriores, sendo $A_z = 2\pi r h$ a área da zona esférica e $A_m = \pi r^2$ a área do círculo máximo, estabeleça a relação entre as áreas: $2\pi r h = 5\pi r^2$. Assim, $h = \frac{5r}{2}$.
11. Para a resolução de tal exercício, sugerimos a construção da figura 3.1 auxiliar.

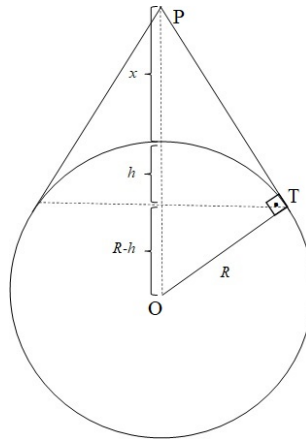


Figura 3.1: Figura auxiliar.

Defina x como a altura do astronauta, R o raio da terra, h a altura da calota visível, T a intersecção entre o paralelo que define a calota e o raio da terra, A e A_c como as áreas da superfície esférica e da calota, respectivamente. O problema trata-se de calcular a fração $\frac{A_c}{A} = \frac{2\pi R h}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R}$. Para determinar h utilize no triângulo PTO a relação métrica $R^2 = (R - h)(R + x)$ de onde $h = \frac{Rx}{x + R}$. Substituindo h na primeira fração temos a igualdade $\frac{h}{2R} = \frac{x}{2(R + x)}$ (1) e finalmente, substitua os

valores de R e x para obter $\frac{h}{2R} = \frac{1}{44}$ da superfície da terra.

12. Use a mesma notação do exercício (11) e a igualdade (1) para resolver este exercício, obtendo como resposta $x = \frac{R}{17}$.
13. A parte iluminada é uma calota esférica cuja área $A_c = 2\pi r h$. Como $R = 4$, nos resta determinarmos h . Da igualdade (1) do exercício (11), usando as mesmas notações, temos $\frac{h}{2R} = \frac{x}{2(R+x)}$ onde $R = 4$ e $x = 2$, de forma que $h = \frac{4}{3}$ m. Substituindo o valor de R e h na fórmula da área da calota temos $A_c = \frac{32\pi}{3}$.

3.2 Atividades

As atividades 1 e 2 foram adaptadas de (Superinteressante, 1989).

Vamos à elas:

Atividade 1. Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor é o urso?

Objetivos: verificar o entendimento de ângulos retos em superfícies não planas. Identificar as geodésicas como retas. Pré-requisitos: conhecimento dos pontos cardeais, dos polos (e das antípodas) e das faunas dos polos.

Atividade 2. Imaginemos seres bem pequenos, habitantes de uma esfera polida com as dimensões da Terra. Eles tomam sobre o equador um segmento AB de 1 metro de comprimento; nas extremidades A e B levantam duas perpendiculares e marcam AC e BD também de 1 metro de comprimento. Eles pensarão ter traçado duas paralelas, imaginando que, por mais que prolonguem os segmentos AC e BD - cuidando que os sucessivos metros sejam exatamente o prolongamento do anterior - as duas linhas manter-se-ão indefinidamente separadas. Estão corretos? Utilize a esfera de isopor para tirar suas conclusões.

Objetivos: verificar o entendimento e a construção de ângulos retos em superfícies não planas. Verificar a inexistência de retas paralelas numa superfície esférica. Pré-requisitos: utilização de transferidor, conhecimento do 5º postulado para geometria elíptica.

Atividade 3. Pense na seguinte situação: O nosso herói Anselmo encontra-se no polo norte, quando alienígenas do planeta Euclidesgeo, os planofix, o aprisionam dentro de uma armadilha circular com um elástico gigante, intransponível. Como sua tecnologia é diferente da nossa, o elástico é extremamente leve e sua elasticidade infinita. Então nosso herói, usando seus conhecimentos de geometria não Euclidiana, reverte completamente a situação aprisionando os planofix dentro de sua própria armadilha. É possível?

Objetivos: Verificar o entendimento da mudança de raio da superfície à partir do equador. Pré-requisitos: Conhecimento e entendimento dos polos e antípodas e mudança de curvatura para o raio da superfície maior que $\frac{1}{4}$ do comprimento da geodésica.

Atividade 4. Construção - Faça construções na esfera de isopor que ilustrem as respostas às perguntas:

1. Quantas retas passam por um ponto P?
2. Duas retas na esfera sempre têm um ponto em comum?
3. Quantas retas passam por dois pontos da esfera?
4. Dado um ponto A, construa o seu ponto antípoda B. Quantas retas passam por A e B?

Objetivos: verificar a compreensão das propriedades da geometria esférica, apresentadas na seção 2.3. Pré-requisitos: as propriedades da geometria esférica.

Atividade 5. Sabemos que a soma dos ângulos internos em um triângulo no plano é 180° . Compare a soma dos ângulos internos de um triângulo numa superfície esférica com a soma de um no plano. Se os outros dois ângulos forem retos, existe um limite para o 3° ? Para auxiliá-lo, desenhe triângulos na esfera, a partir de uma geodésica, com tamanhos diferentes.

Objetivos: verificar que numa superfície esférica a soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180° e o terceiro ângulo limitado superiormente e inferiormente se um dos lados estiver numa geodésica. Pré-requisito: Utilização do transferidor.

Atividade 6. Observe que no globo terrestre temos os meridianos e as paralelas. Na geometria esférica são mesmo paralelas?

Objetivos: Verificar a compreensão das definições de retas e de paralelas. Pré-requisitos: definições de retas e paralelas.

Os objetivos das atividades de 7 até 11 é verificar as impressões sobre a geometria esférica, o interesse e a relevância sobre o assunto, na visão do aluno.

Atividade 7. Fale da sua impressão sobre a geometria não-Euclidiana.

Atividade 8. Você acha que é possível a inserção da geometria não-Euclidiana, assim como lhe foi apresentada, no currículo do ensino médio?

Atividade 9. Dê sua opinião sobre a inserção da geometria não-Euclidiana na formação de seu professor.

Atividade 10. Dê sua opinião sobre a importância da geometria não-Euclidiana na sua formação de aluno, quanto sujeito crítico e com autonomia de pensamento.

Atividade 11. Dê sua opinião sobre a importância da geometria não-Euclidiana no desenvolvimento de tecnologias humanas.

Considerações finais

No início deste trabalho imaginamos algo inédito. Quanta pretensão! Vários estudos e dissertações foram elaboradas com o tema, e o que no começo teve ares de decepção se tornou uma prazerosa pesquisa tendo como base as pesquisas, dissertações e artigos já realizados e publicados, mostrando uma diversidade de caminhos possíveis para a abordagem do tema. Foi como se, ao tentar espiar pelo buraco de uma fechadura, esbarrasse numa porta que, aberta, se escancarou e nos mostrou algo muito além do esperado em magnitude e beleza!

Tomar conhecimento do trabalho de Jean-Pierre Petit, da existência da navis-fera de Wilson, das aplicações da geometria esférica na astronomia e em navegações me mostrou a grande curiosidade do homem e a sua infindável busca pelo conhecimento. A própria história sobre o quinto postulado de Euclides já indicava isso. Que atividade intelectual monstruosa! O desconhecido causa espanto e admiração. Não por acaso as grandes descobertas trazem desconforto e estranheza antes de serem aceitas.

Conforme citado na introdução, tanto o aluno quanto o professor necessitam de um “estímulo” a mais durante as aulas. É fatídico que a impressão que temos enquanto alunos é de uma Matemática pronta, definitiva, como um prato que seguindo a receita corretamente, o final é apenas servi-lo. Não são mostradas as etapas de preparação, e assim, ao tentar reproduzir certamente não terão o mesmo sabor: faltam os detalhes da preparação. Neste contexto se encaixa perfeitamente o objeto do nosso trabalho, pois ao descrever desde o início do conhecimento registrado a evolução da geometria e seus desdobramentos estamos dando aos envolvidos na educação os “detalhes” do prato principal. Mostrar que existe a possibilidade do novo, da contestação, da busca, do erro, não só serve para desmistificar a disciplina como “*matemática*” – onde as fórmulas aparecem “do nada” – para algo palpável, acessível e perfeitamente manipulável por

pessoas “normais”.

Cabe ao professor que se interessar em incluir o tópico no currículo do ensino básico determinar a profundidade e o que vai ser abordado sobre tema, respeitando obviamente as características de cada turma, buscar os exemplos de contextualização mais pertinentes à realidade dos alunos sob o risco de, por exemplo, tentar ensinar a um morador dos trópicos os passos para se construir um boneco de neve. O conteúdo permite uma grande interdisciplinarização, associando-o à Geografia, História e Física.

Espera-se, portanto, que este trabalho seja de grande valia na disseminação da História da Matemática, da construção do conhecimento científico e da humanização da disciplina estimulando professores e alunos a buscarem este “algo mais” que sempre nos parece que falta nas aulas de Matemática..

Referências Bibliográficas

- Andrade, P. (2013). *Introdução à Geometria hiperbólica: O modelo de Poincaré*. SBM, Rio de Janeiro–RJ.
- Cyrino, M. C. C. T., Nacarato, A. M., e Paiva, M. A. V. (2006). *Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática*, páginas 77–88. Autêntica, Belo Horizonte–MG.
- Dolce, O. e Pompeo, J. N. (2005). *Geometria Espacial: posição e métrica*. Atual, São Paulo–SP, 6ª edição.
- Feitosa, H. A. e Locci, V. (2001). *O Fazer Matemático*, volume 22, páginas 63–81. MI-MESIS, Bauru–SP.
- Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and nonEuclidean geometries: Development and history*. W. H. Freeman and company, New York–NY, 3ª edição.
- Heath, S. T. L. (1956). *The Thirteen Books Of Euclids Elements: translated with an introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*, volume 1. Dover Publications, New York–NY, 2ª edição.
- Machado, A. S. (1988). *Áreas e volumes*, volume 4: Matemática temas e metas. São Paulo–SP.
- Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria (Coleção PROFMAT)*. SBM, Rio de Janeiro–RJ, 1ª edição.
- Petit, J.-P. (1982). *As aventuras de Anselmo o curioso: os mistérios da geometria*. Don Quixote Publicações, Lisboa.

- SBM (2017). Profmat: Uma reflexão o e alguns resultados. URL:http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2017/07/PROFMAT-relatorio_DIGITAL.pdf. Acesso 20 de março de 2018.
- SEDUC-MT (2010). *Orientações curriculares da educação Básica: Área da Ciências da Natureza e Matemática*. Governo do Estado do Mato Grosso, Cuiabá.
- Silva, W. D. (2015). Uma introdução à geometria esférica. Dissertação de Mestrado, IGCE–UNESP, Rio Claro–SP.
- Souza, C. B. et al. (2015). Geometria hiperbólica: consistência do modelo de disco de poincaré. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife–PE.
- Superinteressante (1989). Geometria com urso e sem urso colocando a matemática em xeque. URL:<https://super.abril.com.br/ciencia/geometria-com-urso-e-sem-urso-colocando-a-matematica-em-xeque/>. Acesso 5 de novembro de 2017.

Apêndice

A.1 Demonstrações de áreas e volumes de revolução

Sejam dados $a < b$ números reais tais que $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ seja uma função positiva e diferenciável com sua derivada $f' : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ contínua. Fixaremos um sistema de coordenadas cartesianas com eixo e das abscissas em um plano no espaço onde teremos o gráfico de f denominado de ζ^1 . A **superfície de revolução** $\varrho^2(e; \zeta)$ de eixo e e **geratriz** ζ é o conjunto de pontos do espaço obtidos pela rotação de ζ em torno do eixo e , de tal forma que para um $x \in (a, b)$ o ponto $(x, f(x))$ descreve um círculo de raio $f(x)$ com centro em $x \in e$ contido no plano perpendicular a e que passa por x conforme a figura A.1 abaixo.

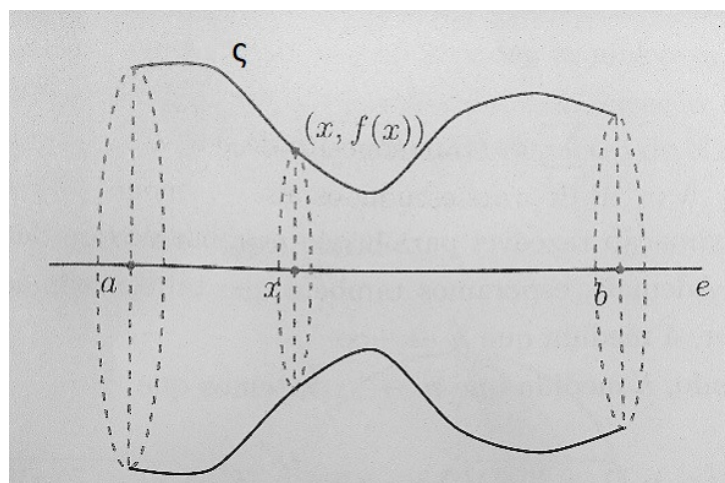


Figura A.1: Superfície de revolução $\varrho(e; \zeta)$.

Se tomarmos os números reais $c, d \in (a, b)$ com $c < d$ e definirmos a superfície $\varrho_{[c,d]}$ como a porção de $\varrho(e, \zeta)$ situada entre os planos perpendiculares a e nos pontos c e d , podemos definir a área de $\varrho_{[c,d]}$ considerando os números reais $c = x_0 < x_1 < x_2 <$

¹Letra grega onde se lê sigma.

²Letra grega onde se lê rô.

... $< x_n = d$ tais que $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ sejam iguais a $\frac{d-c}{n}$ para $1 \leq i \leq n$. Para um n suficientemente grande, teremos uma aproximação razoável do tronco de pirâmide de raios $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$ e altura Δx_i em relação à superfície $\varrho_{[c,d]}$ limitada pelos planos que passam por x_{i-1} e x_i . Para representar a situação, temos a figura A.2.

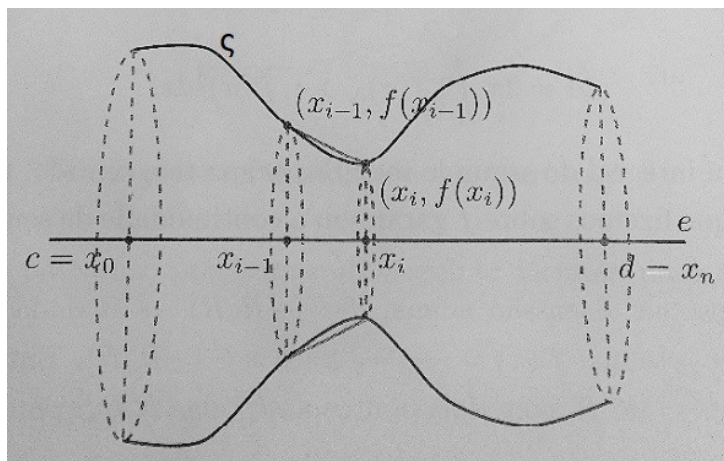


Figura A.2: Área do tronco de cone.

A área lateral deste³ tronco de cone é dada por

$$A_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \quad (\text{A.1})$$

O teorema do valor médio nos garante que existe $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$. Além disso, podemos considerar para n muito grande que a variação de f em $[x_{i-1}, x_i]$ é muito pequena, de tal sorte que podemos considerar $f(x_{i-1}) \cong f(x_i) \cong f(\xi_i)$. Assim, fazendo as devidas substituições, a nossa equação A.1 se torna

$$A_i \cong 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i$$

³Definiremos aqui a área de um tronco de cone genérico. Seja um cone de revolução de raio da base R e altura h intersectado por um plano α perpendicular ao eixo de revolução e à uma distância $d < h$ do plano da base do cone formando um círculo de raio R' . À parte do cone limitada pela base e o plano α é denominada **tronco de cone** e sua área A é dada por:

$$A_i = \pi(R + R')d \sqrt{1 + \left(\frac{R - R'}{d}\right)^2}$$

Fica como tarefa para o leitor estabelecer a relação entre as variáveis.

e a soma de todas as aproximações acima dos n troncos de cone nos dá

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i$$

Ora, nossa expectativa é que esta aproximação se torne cada vez melhor quando $n \rightarrow +\infty$. De fato, se isso ocorre temos

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2} \Delta x_i \rightarrow 2\pi \int_c^d f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

de forma que definimos a área A de $\rho_{[c,d]}$ fazendo

$$A = 2\pi \int_c^d f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \tag{A.2}$$

Como nossas considerações feitas sobre f garantem a continuidade do integrando acima, a integral da equação tem sentido.