UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros

Patrícia Fantini

Dissertação de Mestrado do Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Patrícia Fantini

Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Esther de Almeida Prado Rodrigues

USP – São Carlos
Agosto de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F216s

Fantini, Patrícia
Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros / Patrícia Fantini; orientadora Esther de Almeida Prado Rodrigues. -- São Carlos, 2018.
113 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Número Inteiros. 2. Reta numérica. 3. Materiais manipuláveis. 4. Matemática. I. Rodrigues, Esther de Almeida Prado, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Patrícia Fantini

Suggestions for manipulatives in order to reduce obstacles in learning whole numbers

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC – a USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Esther de Almeida Prado Rodrigues

USP – São Carlos
August 2018

Este trabalho é dedicado aos meus pais Nivaldo e Nirele, com todo meu amor e gratidão, por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida e às minhas irmãs Giovanna e Giuliana por me acompanharem e incentivarem cada novo passo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais Nivaldo e Nirele que sempre primaram pela minha educação e para isso abriram mão de inúmeras coisas para que eu chegasse até aqui. Em especial à minha mãe que fez questão de me lembrar tantas vezes que eu era capaz de alcançar o tão sonhado título de mestre. Às minhas irmãs Giovanna e Giuliana que sempre acreditaram em mim e estiveram presentes nesses anos de estudos me apoiando incondicionalmente.

Agradeço também aos colegas do mestrado, pelos risos e lágrimas compartilhadas nesses anos de estudo, pela troca de experiência e conhecimento e pela companhia fundamental nessa trajetória.

À minha professora na graduação Esther que acreditou no meu potencial e aceitou prontamente a me orientar nessa jornada.

Aos funcionários do SVPG – ICMC pela atenção e dedicação e sempre se mostraram dispostos a ajudar.

À Universidade de São Paulo (USP) pela minha formação, desde a graduação, e que sempre será a melhor e mais importante parte da minha vida profissional.

Agradeço a Capes pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

“Onde quer que haja mulheres e homens, há sempre o que fazer, há sempre o que ensinar, há sempre o que aprender.”

(Paulo Freire)

RESUMO

FANTINI, P. **Sugestões de materiais didáticos manipuláveis a fim de diminuir os obstáculos na aprendizagem dos números inteiros.** 2018. 116 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Este trabalho tem como objetivo contribuir para uma melhor aprendizagem dos alunos da educação básica sobre o conceito dos números inteiros, em particular, a reta numérica. A metodologia utilizada é a pesquisa bibliográfica. Observamos que os documentos oficiais orientam para o uso da história como um elemento que contribui para a aprendizagem, nesse sentido, nos baseamos na ideia de sentidos contrários, dos comerciantes medievais, para entender os sentidos contrários na reta numérica dos números inteiros. Elaboramos uma sequência de atividades para o ensino, inicialmente, da reta dos números naturais que evidenciam seus elementos constitutivos: (a) sua origem, (b) seus sentidos e (c) seus deslocamentos, considerando as várias possibilidades de posição da reta, horizontal, vertical e inclinada. A esses elementos foi possível acrescentar a necessidade da expansão da reta dos números naturais, criando um novo lugar, que necessita de um novo número, os números negativos. Essa nova reta, a dos números inteiros, tem seus elementos constitutivos a partir da reta dos naturais, portanto, é uma expansão dela. Finalizamos com a sugestão de dois materiais didáticos manipuláveis que podem ser propostos como uma complementação da sequência de atividades, visando facilitar o processo de ensino e aprendizagem a fim de diminuir as dificuldades dos alunos nesse campo numérico.

Palavras-chave: Números inteiros, Reta numérica, Materiais manipuláveis, Matemática.

ABSTRACT

FANTINI, P. **Suggestions of manipulatable didactic materials in order to reduce the obstacles in the learning of the whole numbers.** 2018. 116 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

This work aims to contribute to a better learning for students of basic education on the whole numbers, in particular, the numerical line. The methodology used is the bibliographical research. We note that the official documents guide to the use of history as an element that contributes to the learning, in this sense, this work is based on the idea of contrary senses, of medieval traders, to understand the opposite directions in the numerical line of whole numbers. We draw up a sequence of activities for teaching, initially, of the line of the natural numbers that evince its constituent elements: (a) its origin, (b) its directions and (c) its displacements, considering the various possibilities of position of the line, horizontal, vertical and slanted. To these elements it was possible to add the need for the expansion of the line of natural numbers, creating a new place, which needs new numbers, the negative ones. This new line, that of the whole numbers, has its constituent elements from the line of the natural ones, so it is an expansion of it. We conclude with the suggestion of two manipulatable didactic materials that can be proposed as a complement of the sequence of activities, aiming to facilitate the process of teaching and learning, in order to reduce the students a difficulties in this numerical field.

Keywords: Whole number, Numerical line, Manipulatable materials, Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATPC – Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo

CDCC – Centro de Divulgação Científica e Cultural

ICMC – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

IFSC – Instituto de Física de São Carlos

IQSC – Instituto de Química de São Carlos

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD – Programa Nacional de Livros Didáticos

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 2010, concluí a Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em Matemática, curso Interunidades em conjunto com o IFSC[1], IQSC[2] e ICMC[3], na USP, campus São Carlos/SP, e nesse mesmo ano ingressei como professora temporária em uma escola estadual na periferia de Araraquara, interior do estado de São Paulo. A princípio, atuei nos anos finais do Ensino Fundamental, oitavo e nono anos, e nas primeiras e terceiras séries do Ensino Médio. Logo no início, propus uma avaliação diagnóstica e observei que a maioria dos alunos tinham dificuldades para desenvolver os conteúdos propostos para cada série/ano pelos documentos oficiais, Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo, 2012) e Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998). A maior parte dessas dificuldades estava relacionada ao uso de números inteiros.

Posteriormente, ministrei aulas em outras escolas públicas, e também pude observar a mesma dificuldade em diferentes turmas, desde classes dos anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, ou seja, o número inteiro se apresentava como um problema geral. Sabendo que a maior parte dos alunos tinham dificuldades em aprender esse tópico, era sempre necessário retornar às ideias dos números inteiros para desenvolver conceitos que necessitavam deles.

Em 2014, tornei-me docente efetiva da rede estadual paulista. Ao mesmo tempo, ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) com o objetivo de complementar minha formação e dar continuidade no meu processo de formação docente. Nesse momento, optei por pesquisar mais sobre o conceito números inteiros e pensar em maneiras diferentes para apoiar o desenvolvimento desse campo do conhecimento da matemática escolar.

Em 2016, tive a oportunidade de ministrar aulas em uma sala de sétimo ano, ensino fundamental, onde, pelo Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012), apresentada no Quadro 1 dos conteúdos do sétimo ano, introduz-se o conceito de Números Inteiros, responsável por tanta dificuldade/obstáculo observada até aquele momento.

Assim, tive a oportunidade de desenvolver esse conteúdo e pela dificuldade observada na aprendizagem dos alunos comecei a pesquisar diferentes maneiras para abordar assuntos

[1] Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo
[2] Instituto de Química de São Carlos da Universidade de São Paulo
[3] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo

relacionados aos números inteiros de maneira que os alunos tivessem uma interação maior com esse conceito.

E na busca por diferentes abordagens, encontrei diversos materiais didáticos que podem ser utilizados como ferramentas facilitadoras para a compreensão do conteúdo pelos alunos. Alguns desses materiais serão descritos neste trabalho com o objetivo de aprimorar, diversificar e auxiliar o processo de ensino-aprendizagem. E principalmente verifiquei que os contextos históricos auxiliavam meu entendimento sobre os números inteiros, assim como a necessidade de uma explicação e desenvolvimento de atividades mais direcionadas para o desenvolvimento do ensino e a aprendizagem da reta numérica dos números inteiros.

No Capítulo 1, vamos discutir as dificuldades de aprendizagem indicadas por Shubring (1998), Glaeser (1985) e Nascimento (2004), as propostas das orientações curriculares oficiais para os números inteiros nos anos finais do Ensino Fundamental. A seção 1.3 apresenta os quadros de conteúdos e habilidades para cada série/ano, disponível no Currículo do Estado de São Paulo, destacando os principais momentos em que o tema em foco é abordado. Posteriormente, será comentado sobre a utilização de materiais manipuláveis nas aulas de matemática para facilitar a aprendizagem dos números inteiros.

O Capítulo 2, apresentamos a metodologia utilizada no presente trabalho e fazemos uma análise dos livros didáticos no ensino dos números inteiros focando a reta numérica.

No Capítulo 3, na seção 3.1, mostramos a necessidade do aprimoramento de anotações para a contabilidade da sociedade ocidental até início do século XVI, bem como o conceito de perdas e ganhos, apresentados por escrituração por partidas dobradas, dando início a representações das perdas através de números negativos. A seção 3.2 apresenta a necessidade da expansão da reta numérica e como ela proposta neste trabalho, exibindo atividades a serem desenvolvidas durante as aulas para verificar essa necessidade e aprofundar em conceitos do novo conjunto numérico.

O trabalho é finalizado no Capítulo 4, com algumas propostas de materiais manipuláveis que podem ser utilizados nas aulas referentes ao conteúdo estudado.

1 O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS

1.1 Dificuldades ou obstáculos na aprendizagem dos números inteiros

Em uma sala de aula, não é uma tarefa fácil explicar que “menos vezes mais é menos”. Independente do motivo, seja pela maneira do professor expor o conteúdo, pela carência de material adequado ou pela falta de maturidade e interesse do aluno, é necessário sempre considerar as dificuldades de aprendizagem que, para Schubring (1998), faz parte do próprio conhecimento e que “residem na natureza do conhecimento matemático, razão pela qual não podem ser evitados, já que são constitutivos dos respectivos conhecimentos e identificados na história dos conceitos”. (SCHUBRING, 1998, p.18). Neste trabalho consideraremos como obstáculos, as dificuldades indicadas por esse autor.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento publicado pelo Ministério da Educação (MEC) em 1998, expressam:

> (...) o saber matemático como algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e entre os seus vários modos de representação, e, também, permeável aos problemas nos vários outros campos científicos. Um saber matemático desse tipo pode ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento. (BRASIL, 1998, p.26)

Segundo os PCN, no volume específico de matemática, tem-se que:

> Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. (BRASIL, 1998, p. 33)

Assim é possível que o professor desempenhe seu “papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno” (BRASIL, 1998, p. 36). É de extrema importância identificar quais são essas dificuldades, pois caso essas lacunas não sejam identificadas, fará com que o aluno não progrida.

Na obra de Glaeser (1985), nota-se que a construção formal dos números inteiros levou vários séculos, ou seja, desde quando apareceram, no fim do século III nas obras de Diofante, até meados do século XIX, quando Hankel eximiu-se da preocupação de explicar os números relativos a partir de exemplos do real e propôs uma explicação formal para os mesmos. Durante o percurso da obra, o autor identifica vários entraves de natureza epistemológica e os torna evidentes, no desenrolar da compreensão dos números relativos, tendo como fonte documentos deixados por matemáticos de determinadas épocas, entre eles: Diofante, Simon Stevin, Descartes, Colin McLaurin, Euler, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel. As seis dificuldades apontadas por Glaeser (1985, p. 5) são:

1. Inaptidão para manipular quantidades negativas isoladas;
2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas;
3. Dificuldade em unificar a reta numérica manifestada pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semirretas opostas, ou ainda por desconsideração do caráter simultaneamente dinâmico e estático dos números;
4. A ambiguidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem;
5. Dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos: fixação no estágio das operações concretas por oposição ao formal;
6. Desejo de um modelo unificador.

> Do ponto de vista cognitivo, a compreensão dos números inteiros requer algumas operações, às quais se chega como regulações construídas pela criança na medida em que tenta preencher as lacunas ou resolver as contradições que comparecem ao estender os esquemas assimiladores dos números naturais a realidades às quais eles não se aplicam. A perturbação se instala quando a subtração (a – b) é aplicada a casos em que b > a, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as formas (operações) geram um novo conteúdo. Admitir a realidade deste novo resultado implica reconhecer a existência de uma nova classe de número – os negativos. (TEIXEIRA, 1993, p. 62)

Segundo Nascimento (2004, p. 2), até o 6º ano do Ensino Fundamental, os alunos devem compreender operações do tipo a + b e a – b, com a > 0, b > 0 e a > b. É no início do ano seguinte, no 7º ano que surgem os números inteiros, como será mostrado mais adiante no Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 1998), caderno de Matemática e suas Tecnologias. As dúvidas que instigavam questionamentos dos matemáticos citados por Glaeser (1985), são as mesmas que surgem hoje para os alunos da educação básica ao se ter contato com os números inteiros. Entre essas dúvidas, está a multiplicação de um número positivo por um número negativo e a multiplicação de dois números negativos.

> A construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas [...] sabemos que na perspectiva histórica ou da evolução do pensamento matemático, tal ampliação encontrou muitas dificuldades e **obstáculos** (TEIXEIRA, 1993, p. 62). (grifos nossos)

Nascimento (2004) também enfatiza que quando se introduz o conceito de número negativo na escola, os professores começam a perceber, em determinadas situações, alguns erros nas operações de adição e de subtração, pois, para os alunos, os números não estão mais relacionados a objetos contáveis. Também nos PCN (BRASIL, 1998) tal dificuldade é indicada:

> (...) na escola o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades, e os resultados, no que se refere à sua aprendizagem ao longo do ensino fundamental, têm sido bastante insatisfatórios. (BRASIL, 1998, p.97)

As dificuldades apresentadas podem ser decorrentes da falta de correspondência dos números inteiros com o mundo físico do aluno. Portanto, entendemos ser interessante considerar a realidade da criança como ponto de partida, ou seja, os conteúdos da experiência cotidiana. Uma opção para isso é utilizar materiais concretos que podem ser manipulados pelos próprios alunos, servindo como instrumento facilitador da aprendizagem.

1.2 A utilização de materiais manipuláveis como ferramenta facilitadora para a aprendizagem dos números inteiros

As maiores dificuldades encontradas nos alunos dentro do ambiente escolar estão relacionadas aos conteúdos matemáticos. Acreditamos que esse fato pode estar associado ao grau de abstração com que os conceitos matemáticos são abordados em sala de aula. Na aprendizagem dos números inteiros negativos, por exemplo, fica explícito o nível de abstração necessário para se alcançar a aprendizagem, já que agora nem todos os números tem correspondência com o mundo concreto.

Acreditamos que para facilitar a compreensão de determinados conceitos matemáticos, pincipalmente, a partir do 7º ano do ensino fundamental, uma das alternativas é fazer o uso de atividades lúdicas, utilizando, por exemplo, materiais didáticos manipuláveis – objetos que podem ser sentidos, tocados, manipulados, movimentados, englobando atividades experimentais, jogos, materiais concretos, etc, afastando-nos da “visão obscura de passividade e desmotivação”, indicada por Araújo (2000, p. 15):

> Em face a esta visão obscura de passividade e desmotivação vem a proposta de utilização da ludicidade no intuito de reverter este quadro, tornando a Matemática algo simples e acessível a todo e qualquer aluno. Através de atividades lúdicas, tornar as aulas dinâmicas e prazerosas facilitando assim, o ensino-aprendizagem e levando o aluno a se apropriar do conhecimento, vivenciando, experimentando e se tornando uma pessoa autônoma para poder aplicar seus conhecimentos na vida. (ARAÚJO, 2000, p.15)

Sousa e Oliveira (2010) consideram que:

> [...] faz-se necessário que haja por partes dos educadores uma revisão sobre a situação atual da prática docente, identificando novos meios e propostas de tornar sua aula mais proveitosa, visando à interação do aluno com o conteúdo estudado e fazendo com que ele tenha uma maior afinidade com os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula. [...] o uso de materiais manipuláveis e jogos como uma proposta pedagógica para tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e proveitosas. [...] esses recursos podem, além de despertar o interesse dos alunos, fazer com que eles tenham uma maior interação com o conteúdo estudado. (SOUSA; OLIVEIRA, 2010, p.2)

Acreditamos que esses materiais manipuláveis podem beneficiar a aprendizagem do aluno, motivando e auxiliando na socialização de ideias, fazendo com que o aluno se torne um “integrante ativo no processo de ensino e aprendizagem” (MENEGHETTI; BEGA, 2016, p. 227). Ou seja, de acordo com as autoras citadas, as atividades lúdicas, se bem elaboradas e usadas adequadamente pelo professor, tornam-se um facilitador para que esse processo se concretize.

A utilização de materiais lúdicos é orientada também pelos documentos oficiais, após a publicação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), Lei nº 9.394/96. Os elaboradores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), por exemplo, salientam que o uso desses materiais

> [...] podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 1998)

Sousa e Oliveira (2010) ainda ressaltam que o uso desses materiais em sala de aula desenvolve, além dos conceitos matemáticos, conceitos sociais como a colaboração com o próximo, respeito, convívio com perdas e ganhos, entre outros, ou seja, entendemos que são importantes para a formação do cidadão como um todo.

Ao fazermos uso de atividades desse cunho, é provável que cativemos os alunos, afastando-os da concepção de matemática como uma disciplina muito difícil, e também relacionada a aulas exclusivamente teóricas e maçantes e passem a percebê-la como uma ciência viva e acessível. Nesse sentido Araújo (2000) considera que:

> Difundir e desmistificar o uso de atividades lúdicas, com fundamentações pedagógicas adequadas, favorece um aprendizado efetivo, representando estratégias – altamente proveitosas – para que o aluno tenha acesso ao conhecimento e ao desenvolvimento de suas capacidades. (ARAÚJO, 2000, p.11)

O Currículo do Estado de São Paulo (2012) aponta o uso da utilização de recursos tecnológicos, principalmente para conteúdos matemáticos, como uma opção para deixar de lado as aulas do tipo lousa-giz-professor. É importante destacarmos que não é o material em si que vai melhorar o ensino. A eficácia deste recurso didático depende também da maneira como ele será utilizado e das concepções pedagógicas do professor. Nacarato (2005, p. 5) enfatiza que “nenhum material didático – manipulável ou de outra natureza – constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática. Sua eficácia ou não dependerá da forma como o mesmo for utilizado”.

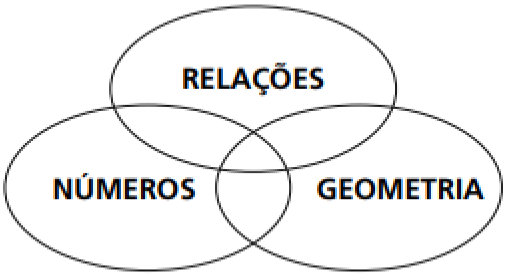
Consideramos que cabe ao professor ser criativo para adaptar ou criar novas atividades mais próximas do contexto sociocultural dos alunos, proporcionando um papel mais ativo, dando mais significado ao conteúdo desejado, tornando a aula mais dinâmica e interessante para que, assim, os resultados sejam mais efetivos.

1.3 Os números inteiros no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo

O objetivo principal do Currículo do Estado de São Paulo (2012) é estruturar o extenso território do conhecimento, revestindo-o por meio de disciplinas articuladas onde, em cada uma delas, os conteúdos são organizados de forma que possibilitam o tratamento dos dados, transformando-os em informações, de modo que o estudo dessas informações sirva de base para a construção do conhecimento. Por meio das relações entre as disciplinas, de maneira organizada, os elaboradores buscam o desenvolvimento das competências básicas para formação pessoal dos indivíduos.

O Caderno de Matemática e suas Tecnologias, um dos volumes do Currículo do Estado de São Paulo (2012), organiza os conteúdos disciplinares, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, em três grandes blocos temáticos, apresentados abaixo, que se interceptam, deixando evidente que é praticamente impossível abordar um deles sem a participação dos demais.

Figura 1 – Blocos temáticos.



Fonte: SÃO PAULO, 2012, p. 39.

No Currículo (SÃO PAULO, 2012), o objetivo de cada bloco é apresentado de maneira detalhada, enfatizando, no de nosso interesse – Números – as relações de equivalência e ordem. A relação entre esses três blocos promove uma harmonização entre os diversos conteúdos, aproximando vários assuntos, gerando uma espécie de “interdisciplinaridade interna” (SÃO PAULO, 2012, p. 40) na própria Matemática.

> Os NÚMEROS envolvem as noções de contagem, medida e representação simbólica, tanto de grandezas efetivamente existentes quanto de outras imaginadas a partir das primeiras, incluindo-se a representação algébrica das operações fundamentais sobre elas. Duas ideias fundamentais na constituição da noção de número são as de equivalência e de ordem. (SÃO PAULO, 2012, p.39)

O bloco que aqui nos interessa, tem por objetivo principal, no Ensino Fundamental, um desenvolvimento da linguagem numérica, que a princípio é restrita a situações e problemas envolvendo contagens e medidas, que são também ponto de partida associadas ao bloco temático “Relações”. Entendemos que a extensão dos números naturais para os inteiros, como será discutido no Capítulo 3, ocorreu devido às necessidades urgentes do desenvolvimento comercial e financeiro, indicado por Crosby (1999), é um exemplo da “ampliação dos campos numéricos por meio de situações significativas” (SÃO PAULO, 2012), gerando novas necessidades.

Tendo os objetivos específicos traçados, o Currículo de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) apresenta um quadro de conteúdos e habilidades, separados por série/ano e por bimestre, para os quatro anos finais do Ensino Fundamental e os três anos do Ensino Médio.

O documento básico do Currículo de São Paulo (2012) se completa com um segundo conjunto de documentos com orientações para os professores e os alunos, denominados por Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2012) e Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2012). Estes são organizados por disciplina, série e bimestre e neles são apresentadas Situações de Aprendizagem que tem o objetivo de orientar o trabalho do professor no ensino dos conteúdos e a aprendizagem dos alunos. Os Cadernos do Aluno (SÃO PAULO, 2012) de matemática são compostos por uma sequência de atividades que apoiam os alunos no desenvolvimento de competências e habilidades, como um espelho dos Cadernos do Professor (SÃO PAULO, 2012).

Apresentamos a seguir o Quadro 1 com os conteúdos e habilidades da 6ª série/7º ano[4] do Ensino Fundamental (SÃO PAULO,2012, p. 59) que orientam sobre os conteúdos a serem trabalhados e as habilidades a serem desenvolvidas em relação aos números inteiros.

Quadro 1 – Quadro de conteúdos e habilidades da 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental.

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Sistemas de numeração • Sistemas de numeração na Antiguidade • O sistema posicional decimal Números negativos • Representação • Operações Números racionais • Representação fracionária e decimal • Operações com decimais e frações (complemetos)	• Compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração e realizar cálculos simples com potências • Compreender a relação entre uma fração e a representação decimal de um número, sabendo realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com decimais • Saber realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, compreendendo o significado das operações realizadas • *Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos* • *Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos*

Fonte: SÃO PAULO, 2012, p. 59.

Na 6ª série/7º ano, o conceito de números negativos é introduzido a partir de situações que os elaboradores entendem que são cotidianas, como por exemplo, a análise de um extrato bancário. Tanto no Caderno do Professor quanto no do Aluno, as atividades apresentadas

[4] O Ensino Fundamental era composto por 8 anos (1ª à 8ª série) e a partir de 2006, tendo até 2010 para todas as escolas se adequarem ao novo modelo, o Ensino Fundamental passou a ser composto por 9 anos (1º ao 9º ano), onde o último ano da Educação Infantil passou a ser o primeiro ano do Ensino Fundamental. Assim, a 6ª série passou a ser denominada de 7º ano.

enfatizam somente as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, focando basicamente em conceitos memorizados para resolver essas operações.

Observamos que para as 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, embora a expressão “inteiros” não esteja presente no Quadro 2 de conteúdos e habilidades, sabemos que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números reais. Dessa forma, o tema é retomado na 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental, focando na localização dos números reais, entre eles os negativos, na reta numérica.

Quadro 2 – Quadro de conteúdos e habilidades da 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

8ª série/9º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números reais • Conjuntos numéricos • Números irracionais • Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$ • Notação científica	• *Compreender a necessidade das sucessivas ampliações dos conjuntos numéricos, culminando com os números irracionais.* • Saber representar os números reais na reta numerada. • Incorporar a ideia básica de que os números irracionais somente podem ser utilizados em contextos práticos por meio de suas aproximações racionais, sabendo calcular a aproximação racional de um número irracional. • Saber realizar de modo significativo as operações de radiciação e de potenciação com números reais • Compreender o significado e saber utilizar a notação científica na representação de números muito grandes ou muitos pequenos.

Fonte: SÃO PAULO, 2012, p. 63.

Pelos Quadros 1 e 2, é possível verificar que o trabalho com números inteiros na reta numérica é pouco comentado para seu desenvolvimento em sala de aula. Observamos que o Caderno do Aluno da 6ª série/7º ano (SÃO PAULO, 2012) tem como foco desse conteúdo as quatro operações básicas. Já no Caderno do Aluno da 8ª série/9º ano (SÃO PAULO, 2012), é trabalhada a localização dos números reais na reta numerada. Embora o conjunto dos números inteiros esteja contido no conjunto dos números reais, o foco maior das atividades propostas é para os números irracionais.

Assim, nossa pesquisa tem como foco propor atividades para alunos da 6ª série/7º ano utilizando a reta numérica dos números inteiros, com o objetivo de contribuir para sua compreensão pelos alunos da educação básica.

2 METODOLOGIA

Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica, pois "implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo" (LIMA; MIOTO, 2007, p. 38), ou seja, reúne informações e dados que servirão de base para a construção do estudo proposto.

Embora o objeto de estudo da Educação Matemática, em geral, ainda se encontre em processo de construção, devemos lembrar que um estudo sobre ensino, por exemplo, não deve ser necessariamente prático, podendo ser também teórico, histórico e/ou bibliográfico (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 11). Sendo assim, a investigação não precisa de coleta de dados empíricos, basta uma pesquisa teórica. (FIORENTINI; LORENZATO2006, p. 61)

Nesse caso, a leitura é a principal técnica utilizada, podendo ser realizada em livros, periódicos, artigos entre outras fontes (PIZZANI, 2012). Segundo Lima e Mioto (2007), é através dela que se pode identificar as informações e os dados contidos no material selecionado, bem como verificar as relações existentes entre eles de modo a analisar a sua consistência.

Portanto, a metodologia da pesquisa bibliográfica possibilita uma ampla abrangência de informações, permitindo a utilização de dados contidos em inúmeras publicações, tendo vantagem principalmente quando o objeto de estudo requer dados muito dispersos no espaço. (GIL, 2008, p. 50)

Para esse trabalho, foram realizadas pesquisas em livros, artigos e periódicos sobre as dificuldades de aprendizagem dos alunos no desenvolvimento do conceito dos números inteiros, a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula para facilitar a aprendizagem, conceitos históricos relacionados a criação dos números inteiros, a compreensão e utilização da reta numérica nos livros didáticos atuais e os documentos oficiais curriculares.

Analisamos três livros didáticos que fazem parte do meu acervo pessoal. Ambos indicados no Programa Nacional de Livros Didáticos (PNLD): Matemática (BIANCHINI, 2011), indicado no PNLD 2011, Projeto Velear: matemática (BIGODE, 2012), PNLD 2014 e Projeto Teláris: matemática (DANTE, 2015), inscrito no PNLD 2015. Além deles, os documentos oficiais Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

2.1 Análise dos Livros didáticos

Para entender melhor como o assunto sobre reta numérica dos números inteiros é apresentado para os alunos dos 7º anos, três livros didáticos foram analisados: Matemática – Projeto Teláris, do autor Luiz Roberto Dante, Matemática – Projeto Velear, do autor Antônio José Lopes Bigode e Matemática, do Autor Edwaldo Bianchini.

Figura 2 – Livros didáticos analisados.

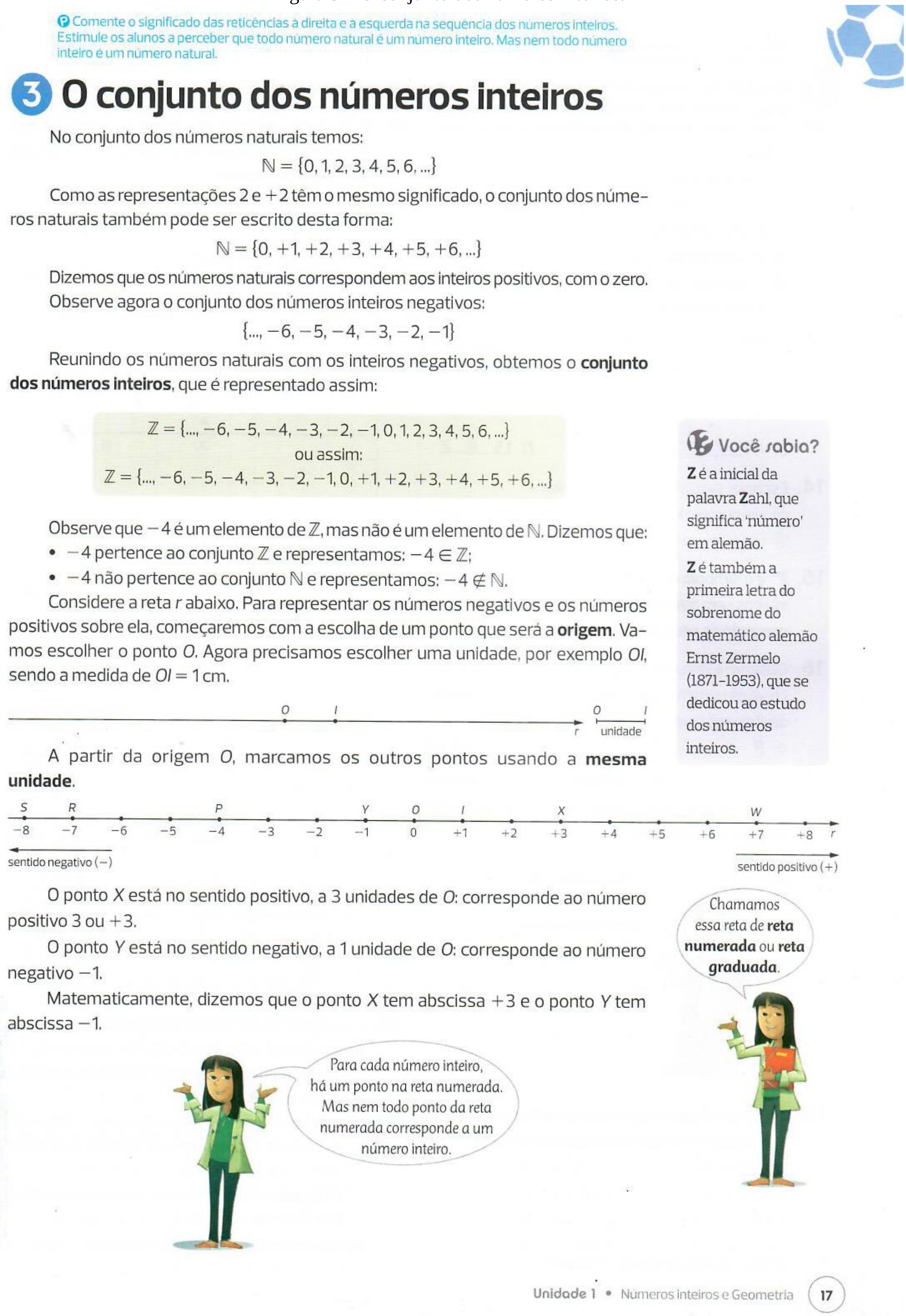
Fonte: Autoria própria.

Buscando a apresentação na reta numérica dos números inteiros nesses livros, encontramos alguns momentos importantes que indicaremos a seguir.

Livro 1:

O primeiro livro analisado é do Projeto Teláris do autor Luiz Roberto Dante da Editora Ática, ano de 2015.

Figura 3 – O conjunto dos números inteiros.



Comente o significado das reticências à direita e à esquerda na sequência dos números inteiros. Estimule os alunos a perceber que todo número natural é um número inteiro. Mas nem todo número inteiro é um número natural.

3 O conjunto dos números inteiros

No conjunto dos números naturais temos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Como as representações 2 e +2 têm o mesmo significado, o conjunto dos números naturais também pode ser escrito desta forma:

$$\mathbb{N} = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$$

Dizemos que os números naturais correspondem aos inteiros positivos, com o zero.

Observe agora o conjunto dos números inteiros negativos:

$$\{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Reunindo os números naturais com os inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, que é representado assim:

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

ou assim:

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$$

Você sabia?

Z é a inicial da palavra **Z**ahl, que significa 'número' em alemão.

Z é também a primeira letra do sobrenome do matemático alemão Ernst Zermelo (1871-1953), que se dedicou ao estudo dos números inteiros.

Observe que -4 é um elemento de $\mathbb{Z}$, mas não é um elemento de $\mathbb{N}$. Dizemos que:

- -4 pertence ao conjunto $\mathbb{Z}$ e representamos: $-4 \in \mathbb{Z}$;
- -4 não pertence ao conjunto $\mathbb{N}$ e representamos: $-4 \notin \mathbb{N}$.

Considere a reta *r* abaixo. Para representar os números negativos e os números positivos sobre ela, começaremos com a escolha de um ponto que será a **origem**. Vamos escolher o ponto *O*. Agora precisamos escolher uma unidade, por exemplo *OI*, sendo a medida de $OI = 1$ cm.

A partir da origem *O*, marcamos os outros pontos usando a **mesma unidade**.

O ponto *X* está no sentido positivo, a 3 unidades de *O*: corresponde ao número positivo 3 ou +3.

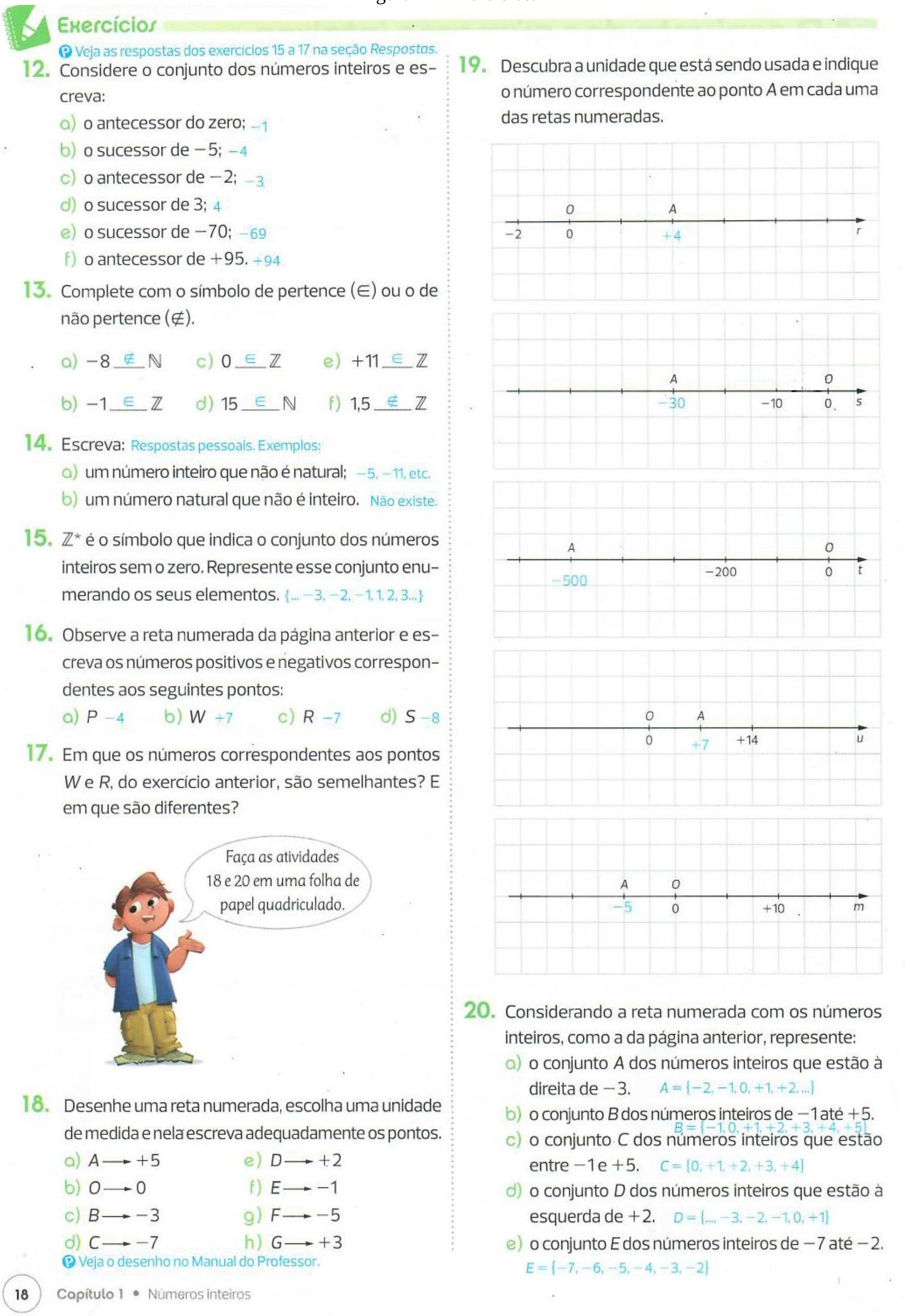
O ponto *Y* está no sentido negativo, a 1 unidade de *O*: corresponde ao número negativo −1.

Matematicamente, dizemos que o ponto *X* tem abscissa +3 e o ponto *Y* tem abscissa −1.

Unidade 1 • Números inteiros e Geometria 17

Fonte: DANTE, 2015, p. 17.

Figura 4 – Exercícios.



Exercícios

Veja as respostas dos exercícios 15 a 17 na seção *Respostas*.

12. Considere o conjunto dos números inteiros e escreva:

a) o antecessor do zero; −1
b) o sucessor de −5; −4
c) o antecessor de −2; −3
d) o sucessor de 3; 4
e) o sucessor de −70; −69
f) o antecessor de +95. +94

13. Complete com o símbolo de pertence (∈) ou o de não pertence (∉).

a) −8 ∉ ℕ
b) −1 ∈ ℤ
c) 0 ∈ ℤ
d) 15 ∈ ℕ
e) +11 ∈ ℤ
f) 1,5 ∉ ℤ

14. Escreva: Respostas pessoais. Exemplos:

a) um número inteiro que não é natural; −5, −11, etc.
b) um número natural que não é inteiro. Não existe.

15. ℤ* é o símbolo que indica o conjunto dos números inteiros sem o zero. Represente esse conjunto enumerando os seus elementos. {..., −3, −2, −1, 1, 2, 3...}

16. Observe a reta numerada da página anterior e escreva os números positivos e negativos correspondentes aos seguintes pontos:

a) *P* −4
b) *W* +7
c) *R* −7
d) *S* −8

17. Em que os números correspondentes aos pontos *W* e *R*, do exercício anterior, são semelhantes? E em que são diferentes?

18. Desenhe uma reta numerada, escolha uma unidade de medida e nela escreva adequadamente os pontos.

a) *A* → +5
b) *O* → 0
c) *B* → −3
d) *C* → −7
e) *D* → +2
f) *E* → −1
g) *F* → −5
h) *G* → +3

Veja o desenho no Manual do Professor.

19. Descubra a unidade que está sendo usada e indique o número correspondente ao ponto *A* em cada uma das retas numeradas.

20. Considerando a reta numerada com os números inteiros, como a da página anterior, represente:

a) o conjunto *A* dos números inteiros que estão à direita de −3. *A* = {−2, −1, 0, +1, +2, ...}
b) o conjunto *B* dos números inteiros de −1 até +5. *B* = {−1, 0, +1, +2, +3, +4, +5}
c) o conjunto *C* dos números inteiros que estão entre −1 e +5. *C* = {0, +1, +2, +3, +4}
d) o conjunto *D* dos números inteiros que estão à esquerda de +2. *D* = {..., −3, −2, −1, 0, +1}
e) o conjunto *E* dos números inteiros de −7 até −2. *E* = {−7, −6, −5, −4, −3, −2}

18 Capítulo 1 • Números inteiros

Fonte: DANTE, 2015, p. 18.

Pelas imagens da Figura 3, podemos observar que a reta numérica é apresentada de uma maneira breve, nos parece que o autor supõe que os alunos dominem todos os aspectos de uma reta numérica, como: origem e sentidos da reta.

O autor não estabelece relações com a reta numérica dos números naturais, não discute a reta dos números inteiros como uma necessidade da ampliação da reta dos números naturais para os números negativos, e não é discutida a possibilidade da reta numérica estar em uma posição diferente da horizontal. Os exercícios exigem do aluno apenas memorização da reta numérica para verificar o antecessor e sucessor, localização de um ponto na reta e relação de pertinência de um elemento no conjunto numérico.

Posteriormente, a reta é utilizada para comparar dois números inteiros, como nas Figuras 5 e 6.

Figura 5 – Comparação de números inteiros.

4 Comparação de números inteiros

Comparar dois números significa dizer se o primeiro é maior do que (>), menor do que (<) ou igual ao (=) segundo número.

Para comparar dois números inteiros positivos, basta pensar em dois números naturais, ou seja, o maior deles é o que tem o módulo maior.

Por exemplo: $+378 > +169$ e $+94 < 100$.

Para comparar um número inteiro positivo com o zero, o maior deles é sempre o número positivo. Por exemplo: $+76 > 0$ e $0 < 85$.

Para fazer a comparação de números inteiros em outros casos, podemos usar vários recursos, como pensar em medidas de temperatura, em débitos e créditos, usar a reta numerada, entre outros. Veja os três casos a seguir:

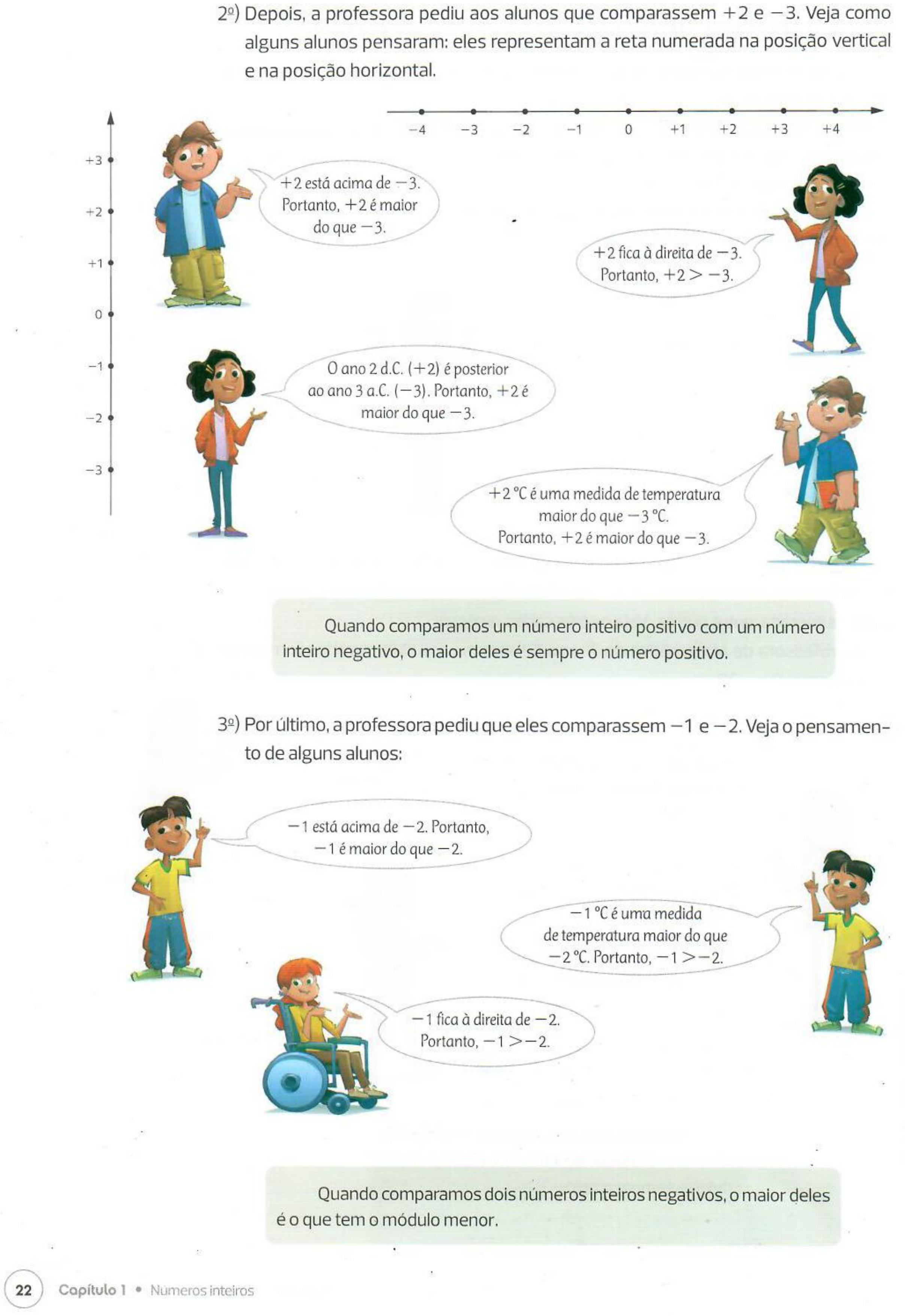
1º) A professora de Matemática do 7º ano **C** mostrou aos alunos várias formas de comparar 0 e -39:

Podemos dizer que, quando comparamos um número inteiro negativo com o zero, o maior deles é sempre o zero.

Unidade 1 • Números inteiros e Geometria 21

Fonte: DANTE, 2015, p. 21

Figura 6 – Comparação de números inteiros (continuação).



2º) Depois, a professora pediu aos alunos que comparassem +2 e −3. Veja como alguns alunos pensaram: eles representam a reta numerada na posição vertical e na posição horizontal.

Quando comparamos um número inteiro positivo com um número inteiro negativo, o maior deles é sempre o número positivo.

3º) Por último, a professora pediu que eles comparassem −1 e −2. Veja o pensamento de alguns alunos:

Quando comparamos dois números inteiros negativos, o maior deles é o que tem o módulo menor.

22 Capítulo 1 • Números inteiros

Fonte: DANTE, 2015, p. 22.

No caso 1º, Figura 5, o autor propõe uma situação de comparação entre os números 0 e –39 e utiliza a posição desses números na reta dos números inteiros, sem indicar na reta.

No exercício 2º, observamos que o autor indica a reta numérica em duas posições, horizontal e vertical, a posição vertical não foi discutida na introdução deste assunto, Figura 1.

Nos parece que esta maneira, breve, de desenvolver a reta numérica dos números inteiros pode contribuir para as indicações de Glaeser (1985): 2) Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; 3) Dificuldade em unificar a reta numérica manifestada pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semirretas opostas, ou ainda por desconsideração do caráter simultaneamente dinâmico e estático dos números.

Figura 7 – Exercícios sobre comparação de números inteiros.

Exercícios e problemas

28. Complete com >, < ou =. Use o processo que julgar mais conveniente.

a) −3 _<_ +9
b) +16 _>_ 0
c) +6 _>_ +2
d) −6 _<_ −2
e) +4 _>_ −4
f) +8 _=_ 8
g) 0 _<_ +11
h) −374 _<_ −200
i) +623 _>_ +519
j) 86 _>_ −100

29. Depois de tudo o que você estudou sobre comparação de números inteiros, você pode tirar algumas conclusões. Complete os itens abaixo.

a) Quando comparamos um número positivo com um número negativo, o maior deles é sempre o _número positivo_.
Exemplos: +87 _>_ −95 e −326 _<_ +188.

b) Quando comparamos um número positivo com o zero, o maior deles é sempre o _número positivo_. Exemplos: +76 _>_ 0 e 0 _<_ 85.

c) Quando comparamos um número negativo com o zero, o maior deles é sempre o _zero_. Exemplos: −39 _<_ 0 e 0 _>_ −149.

d) Quando comparamos dois números positivos, o maior deles é o que tem o módulo _maior_.
Exemplos: +378 _>_ +169 e +94 _<_ 100.

e) Quando comparamos dois números negativos, o maior deles é o que tem o módulo _menor_.
Exemplos: −25 _<_ −20 e −169 _>_ −200.

30. Observe o saldo bancário de cinco pessoas.

João: saldo negativo de R$ 350,00	−350
Marta: saldo positivo de R$ 200,00	+200
Lúcia: saldo positivo de R$ 150,00	+150
Marcelo: saldo negativo de R$ 180,00	−180
André: saldo zero	0

- Escreva o número inteiro correspondente ao saldo de cada pessoa. Por exemplo: João ⟶ −350.
- Faça a comparação desses números nos casos seguintes.

a) João e Marta −350 < +200
b) Marta e Lúcia +200 > +150
c) André e Marcelo 0 > −180
d) Lúcia e André +150 > 0
e) Marcelo e João −180 > −350
f) Lúcia e Marcelo +150 > −180

- Escreva os cinco números em ordem crescente. −350; −180; 0; +150 e +200.

31. Coloque em ordem decrescente os números que aparecem nos quadrinhos. 9; +7; +5; 0; −2; −6 e −10.

−10 | −2 | 0 | 9 | +5 | +7 | −6

32. Examine o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$):

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$$

Agora, responda às perguntas a seguir.

a) Qual é o menor número inteiro positivo? +1
b) Qual é o maior número inteiro positivo? Não existe.
c) Qual é o menor número inteiro negativo? Não existe.
d) Qual é o maior número inteiro negativo? −1

33. Indique os números de cada item e compare-os.

a) Medidas de temperatura de 5 graus Celsius abaixo de zero e de 7 graus Celsius acima de zero. −5; +7; −5 < +7.
b) Altitude ao nível do mar e altitude a 2 metros abaixo do nível do mar. 0; −2; 0 > −2.
c) Débito de 200 reais e débito de 350 reais. −200; −350; −200 > −350.
d) Saldo positivo de 6 gols e saldo negativo de 6 gols. +6; −6; +6 > −6.
e) Lucro de 500 reais e lucro de 600 reais. +500; +600; +500 < +600.

Você sabia?
A expressão **estar no vermelho** indica condição de prejuízo ou de dívida, significando que um indivíduo, empresa, etc. está com saldo negativo.

34. Veja o que Letícia afirmou a seu professor:

"Se um número inteiro é maior do que +5, então seu oposto é menor do que −5."

A afirmação dela está correta? Explique.
Sim. Veja alguns exemplos: +6 > +5, −6 < −5; +8 > +5, −8 < −5.

35. Quais são:

a) os números inteiros negativos maiores do que −5? −4, −3, −2, −1.
b) os números inteiros maiores do que −3 e menores do que +5? −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4.

Livro para análise do Professor. Venda proibida.

Unidade 1 • Números inteiros e Geometria 23

Fonte: DANTE, 2015, p. 23.

Para os exercícios acima descritos, basta que os alunos memorizem as “regras” para comparar dois números inteiros. Com isso, é possível responder todos os exercícios sem utilizar a construção da reta numérica. Acreditamos que esse aspecto acentua a dificuldade dos alunos na compreensão da reta numérica dos números negativos.

Figura 8 – Adição de números inteiros.

5 Operações com números inteiros

Vamos agora estudar as seguintes operações no conjunto dos números inteiros: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Adição de números inteiros

Adição de dois números inteiros com sinais iguais

Somando inteiros positivos

Para adicionarmos **dois números inteiros positivos**, podemos pensar na adição de dois números naturais, ou seja:

> Quando as duas parcelas são positivas, o resultado da adição é sempre positivo e o módulo do resultado é obtido somando os módulos das parcelas.

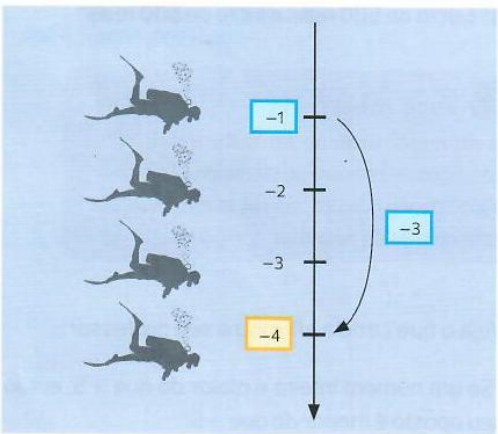
Por exemplo: a adição de $(+4)$ e $(+3)$ é o mesmo que a adição de 4 e 3, que é representada por $(+4) + (+3) = 4 + 3 = 7$ ou $+7$.

Somando inteiros negativos

Para adicionarmos **dois números inteiros negativos**, podemos utilizar vários recursos. Analise o exemplo e, se quiser, pode imaginar outras formas de cálculo.

Adição de (-1) e (-3)

Podemos usar a ideia de nível do mar e pensar assim:

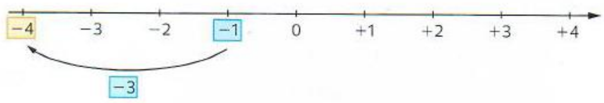


Paulo Manzi/Arquivo da editora

Um mergulhador estava a 1 metro abaixo do nível do mar (-1) e vamos adicionar -3 metros, ou seja, o mergulhador vai descer 3 metros. Ele vai para 4 metros abaixo do nível do mar ou -4 metros.

Podemos também usar a reta numerada.

Estamos no (-1) e adicionamos -3 unidades, ou seja, andamos 3 unidades para a esquerda. Iremos para o (-4).



Indicamos assim:

$$(-1) + (-3) = -4 \quad \text{ou} \quad -1 - 3 = -4$$

> Quando as duas parcelas são negativas, o resultado da adição é sempre negativo e seu módulo é obtido somando os módulos das parcelas.

Analise estes outros exemplos:

a) $(+4) + (+5) = +9$

b) $(-8) + (-9) = -17$

c) $+8 + 2 = +10$

d) $-6 - 1 = -7$

24 Capítulo 1 • Números inteiros

Fonte: DANTE, 2015, p. 24.

Figura 9 – Adição de números inteiros (continuação).

Adição de dois números inteiros com sinais diferentes

Somando inteiros opostos

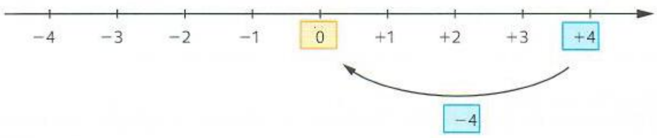
Para adicionarmos **dois números inteiros opostos**, vamos usar a ideia de temperatura. Analise o exemplo:

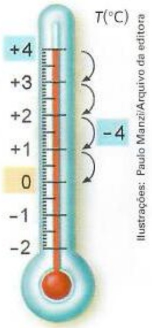
Adição de $(+4)$ e (-4)

A medida da temperatura começa em $+4$ graus Celsius (4 graus Celsius acima de zero) e vamos adicionar -4 graus Celsius, ou seja, a medida da temperatura vai cair 4 graus Celsius. A nova medida da temperatura será de 0 grau Celsius.

Podemos também usar a reta numerada.

Estamos no $(+4)$ e adicionamos -4 unidades, ou seja, andamos 4 unidades para a esquerda. Iremos para o 0.





Termômetro

Indicamos assim:

$$(+4) + (-4) = 0 \text{ ou } +4 - 4 = 0$$

Quando as parcelas são dois números inteiros opostos ou simétricos, o resultado é zero.

Somando inteiros não opostos

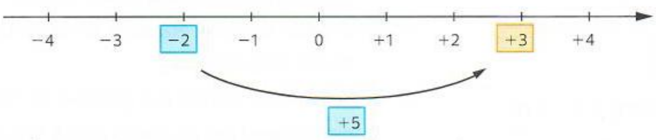
Para adicionarmos **dois números inteiros de sinais diferentes** e que não são opostos, vamos também usar a ideia de temperatura, mas você pode utilizar outros recursos. Analise o exemplo:

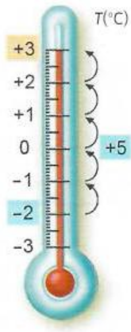
Adição de (-2) e $(+5)$

A medida da temperatura começa em -2 graus Celsius (2 graus Celsius abaixo de zero) e vamos adicionar $+5$ graus Celsius, ou seja, a medida da temperatura vai subir 5 graus Celsius. A nova medida da temperatura será de $+3$ graus Celsius, ou 3 graus Celsius acima de zero, ou 3 graus Celsius positivos.

Podemos também usar a reta numerada:

Estamos no (-2) e adicionamos $+5$ unidades, ou seja, andamos 5 unidades para a direita. Iremos para o $+3$.





Termômetro

Indicamos assim:

$$(-2) + (+5) = +3 \text{ ou } -2 + 5 = +3$$

Quando as parcelas têm sinais diferentes e não são números opostos, o sinal do resultado é o sinal do número que tem maior módulo. E o módulo do resultado é obtido subtraindo o módulo menor do módulo maior.

Fonte: DANTE, 2015, p. 25.

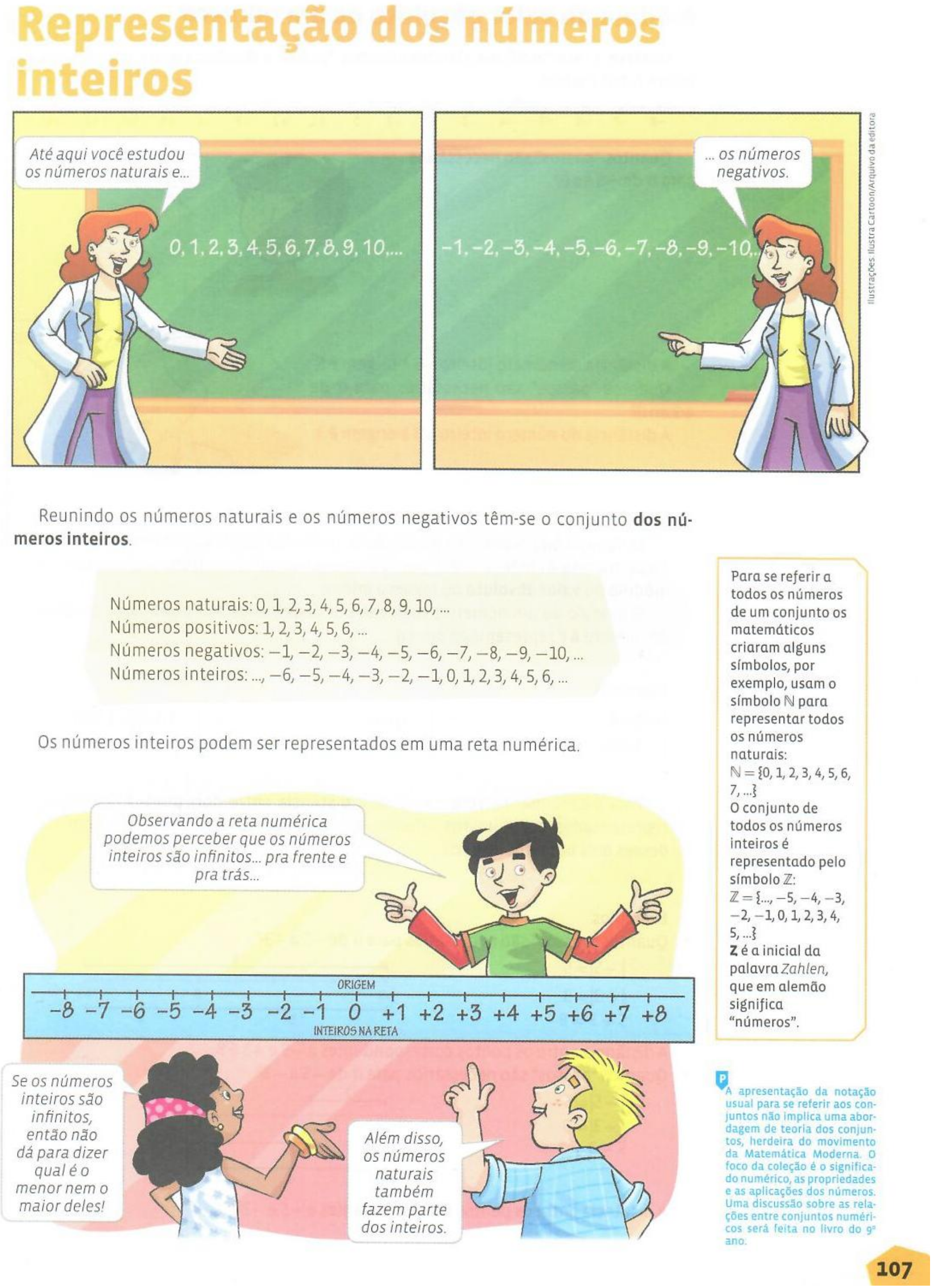
Os deslocamentos na reta numérica são apresentados na operação de adição entre números inteiros. A maioria deles é mostrado como variação de temperatura, utilizando um termômetro vertical. A teoria sempre termina com uma regra para os alunos memorizarem e colocarem em prática nos exercícios.

A próxima operação a ser apresentada, a subtração, é exibida apenas como a soma de um número oposto. O foco já não é a reta numérica, já que é trabalhado somente com as regras de memorização, por isso não será apresentado nessa seção.

Livro 2:

O segundo livro a ser analisado é do Projeto Velear do autor Antônio José Lopes Bigode da Editora Scipione, ano de 2013. Primeiramente observamos como é feita a apresentação desses números.

Figura 10 – Representação dos números inteiros.



Representação dos números inteiros

Reunindo os números naturais e os números negativos têm-se o conjunto **dos números inteiros**.

Números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...
Números positivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
Números negativos: –1, –2, –3, –4, –5, –6, –7, –8, –9, –10, ...
Números inteiros: ..., –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Os números inteiros podem ser representados em uma reta numérica.

Para se referir a todos os números de um conjunto os matemáticos criaram alguns símbolos, por exemplo, usam o símbolo $\mathbb{N}$ para representar todos os números naturais:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$
O conjunto de todos os números inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$:
$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
Z é a inicial da palavra *Zahlen*, que em alemão significa "números".

P A apresentação da notação usual para se referir aos conjuntos não implica uma abordagem de teoria dos conjuntos, herdeira do movimento da Matemática Moderna. O foco da coleção é o significado numérico, as propriedades e as aplicações dos números. Uma discussão sobre as relações entre conjuntos numéricos será feita no livro do 9º ano.

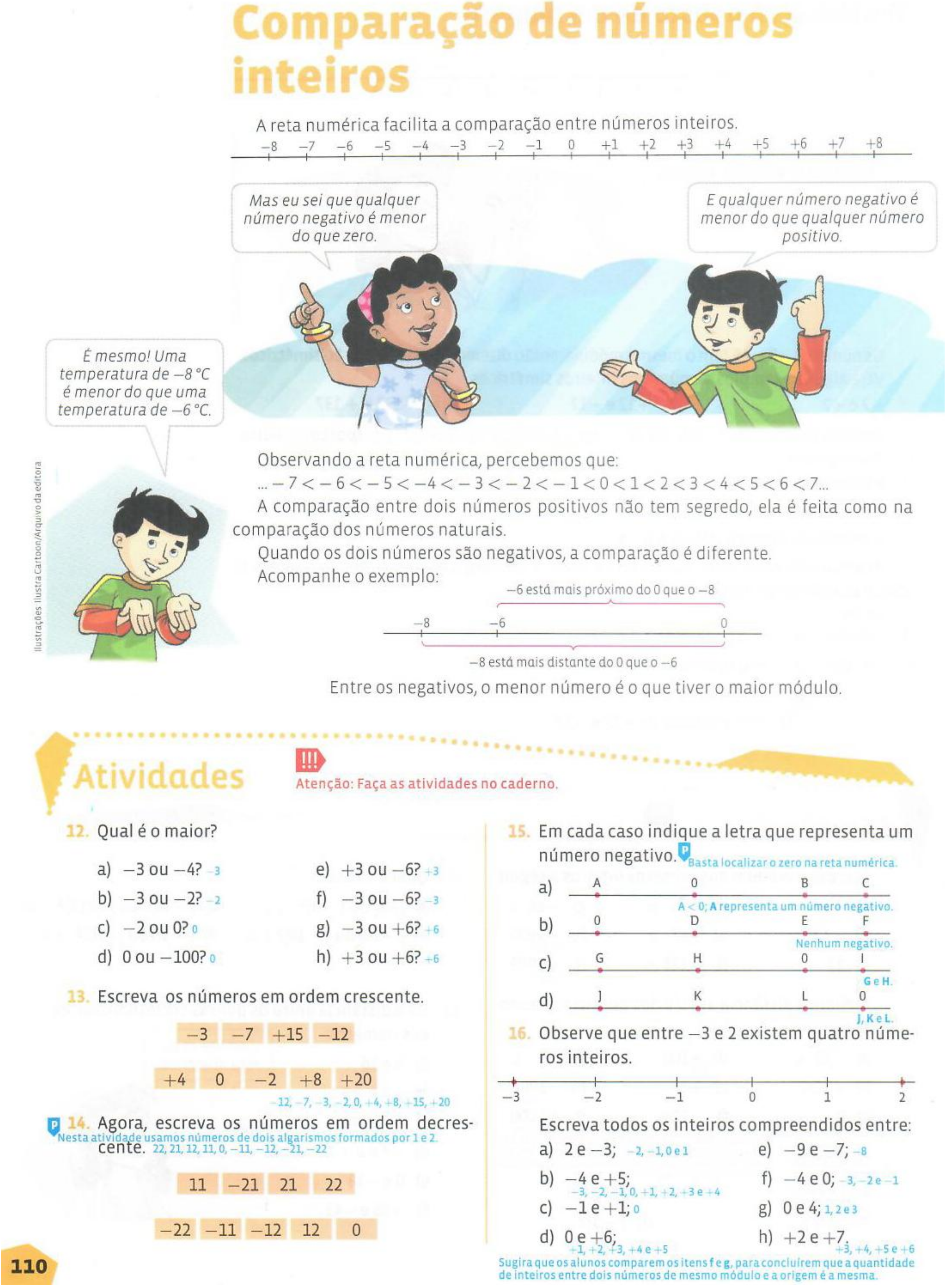
107

Fonte: BIGODE, 2012, p. 107.

Os números inteiros são apresentados como a união dos números naturais com os números negativos. Os mesmos são representados em uma reta numérica e é enfatizado que os números inteiros são infinitos.

Neste livro, também observamos que a reta numérica é proposta de modo breve, apenas na posição horizontal, com a origem e os sentidos já determinados.

Figura 11 – Comparação de números inteiros.



Comparação de números inteiros

A reta numérica facilita a comparação entre números inteiros.

−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

Observando a reta numérica, percebemos que:

... − 7 < − 6 < − 5 < −4 < − 3 < − 2 < − 1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7...

A comparação entre dois números positivos não tem segredo, ela é feita como na comparação dos números naturais.

Quando os dois números são negativos, a comparação é diferente.

Acompanhe o exemplo:

Entre os negativos, o menor número é o que tiver o maior módulo.

Atividades

Atenção: Faça as atividades no caderno.

12. Qual é o maior?

a) −3 ou −4? −3
b) −3 ou −2? −2
c) −2 ou 0? 0
d) 0 ou −100? 0
e) +3 ou −6? +3
f) −3 ou −6? −3
g) −3 ou +6? +6
h) +3 ou +6? +6

13. Escreva os números em ordem crescente.

−3	−7	+15	−12	
+4	0	−2	+8	+20

−12, −7, −3, −2, 0, +4, +8, +15, +20

14. Agora, escreva os números em ordem decrescente. 22, 21, 12, 11, 0, −11, −12, −21, −22

Nesta atividade usamos números de dois algarismos formados por 1 e 2.

11	−21	21	22	
−22	−11	−12	12	0

15. Em cada caso indique a letra que representa um número negativo. Basta localizar o zero na reta numérica.

16. Observe que entre −3 e 2 existem quatro números inteiros.

Escreva todos os inteiros compreendidos entre:

a) 2 e −3; −2, −1, 0 e 1
b) −4 e +5; −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3 e +4
c) −1 e +1; 0
d) 0 e +6; +1, +2, +3, +4 e +5
e) −9 e −7; −8
f) −4 e 0; −3, −2 e −1
g) 0 e 4; 1, 2 e 3
h) +2 e +7. +3, +4, +5 e +6

Sugira que os alunos comparem os itens f e g, para concluírem que a quantidade de inteiros entre dois números de mesmo módulo e a origem é a mesma.

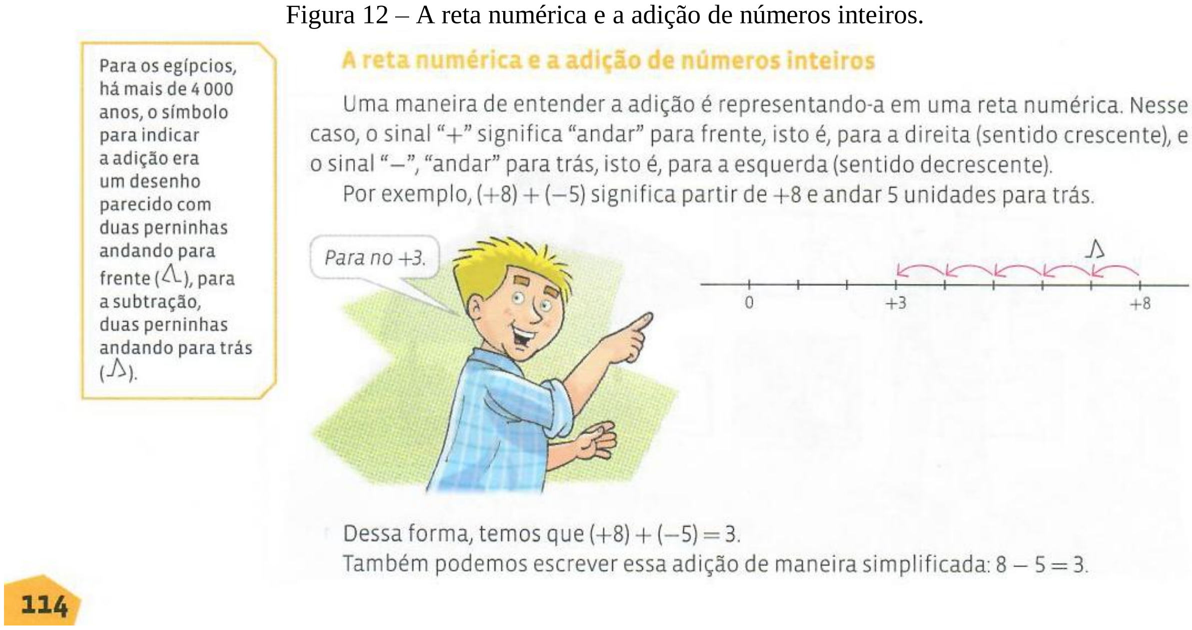
110

Fonte: BIGODE, 2012, p. 110.

Dos exercícios apresentados no livro, apenas dois utilizam a reta numérica: um para indicar se um número representado por uma letra é positivo ou negativo e o outro para descrever os números presentes em um determinado intervalo.

O momento em que mais é trabalhada a ideia da reta numérica é na adição de números inteiros, Figura 12. Essa operação é indicada como movimentos na reta no sentido crescente ou decrescente da reta, termos que não foram apresentados anteriormente nesse capítulo desse livro. A reta numérica permanece na posição horizontal.

Figura 12 – A reta numérica e a adição de números inteiros.



Para os egípcios, há mais de 4 000 anos, o símbolo para indicar a adição era um desenho parecido com duas perninhas andando para frente, para a subtração, duas perninhas andando para trás.

A reta numérica e a adição de números inteiros

Uma maneira de entender a adição é representando-a em uma reta numérica. Nesse caso, o sinal "+" significa "andar" para frente, isto é, para a direita (sentido crescente), e o sinal "–", "andar" para trás, isto é, para a esquerda (sentido decrescente).

Por exemplo, $(+8) + (-5)$ significa partir de $+8$ e andar 5 unidades para trás.

Para no +3.

0 +3 +8

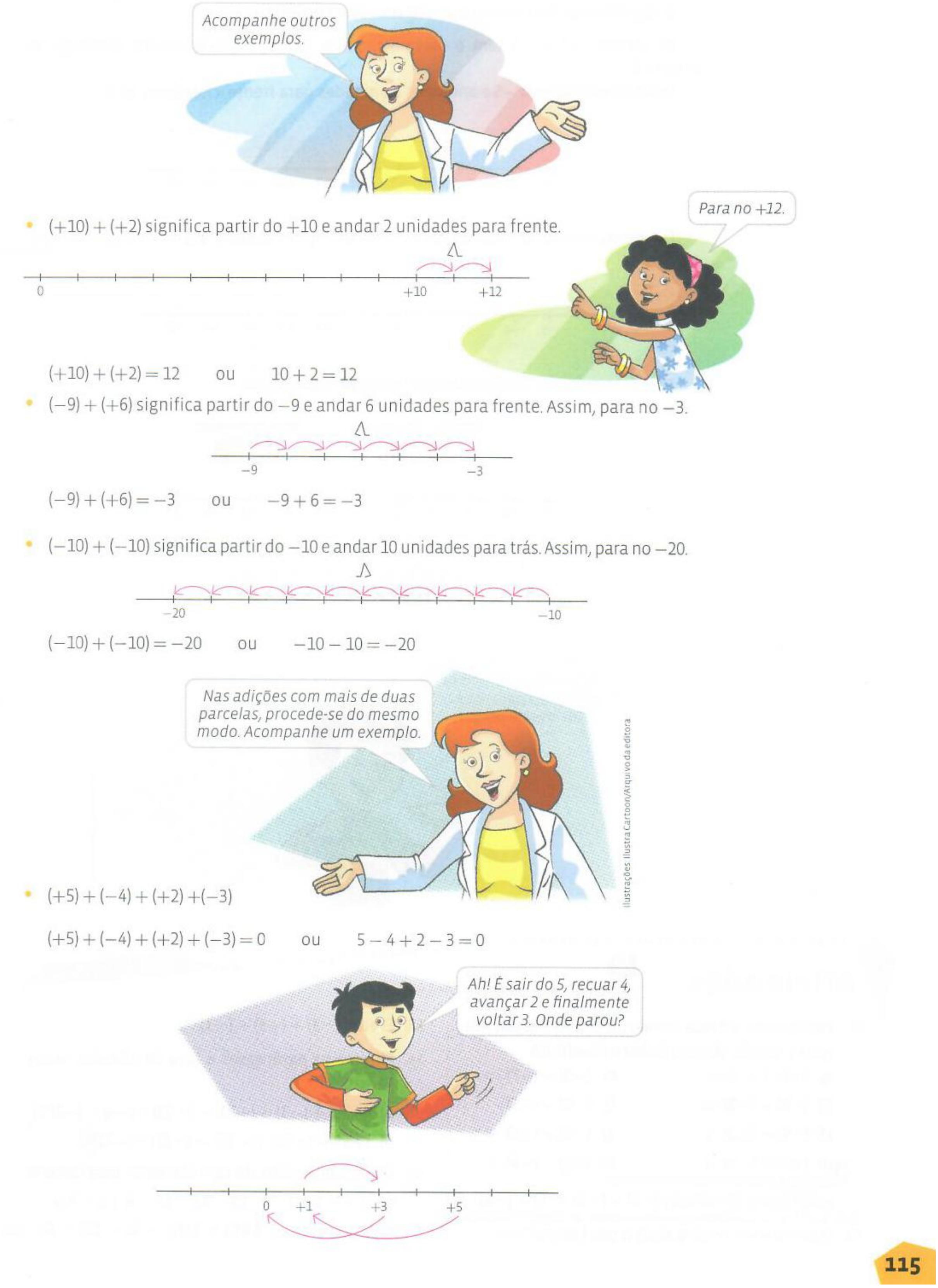
Dessa forma, temos que $(+8) + (-5) = 3$.

Também podemos escrever essa adição de maneira simplificada: $8 - 5 = 3$.

114

Fonte: BIGODE, 2012, p. 114.

Figura 13 – A reta numérica e a adição de números inteiros (continuação).



Acompanhe outros exemplos.

- $(+10) + (+2)$ significa partir do $+10$ e andar 2 unidades para frente.

Para no $+12$.

$(+10) + (+2) = 12$ ou $10 + 2 = 12$

- $(-9) + (+6)$ significa partir do -9 e andar 6 unidades para frente. Assim, para no -3.

$(-9) + (+6) = -3$ ou $-9 + 6 = -3$

- $(-10) + (-10)$ significa partir do -10 e andar 10 unidades para trás. Assim, para no -20.

$(-10) + (-10) = -20$ ou $-10 - 10 = -20$

Nas adições com mais de duas parcelas, procede-se do mesmo modo. Acompanhe um exemplo.

- $(+5) + (-4) + (+2) + (-3)$

$(+5) + (-4) + (+2) + (-3) = 0$ ou $5 - 4 + 2 - 3 = 0$

Ah! É sair do 5, recuar 4, avançar 2 e finalmente voltar 3. Onde parou?

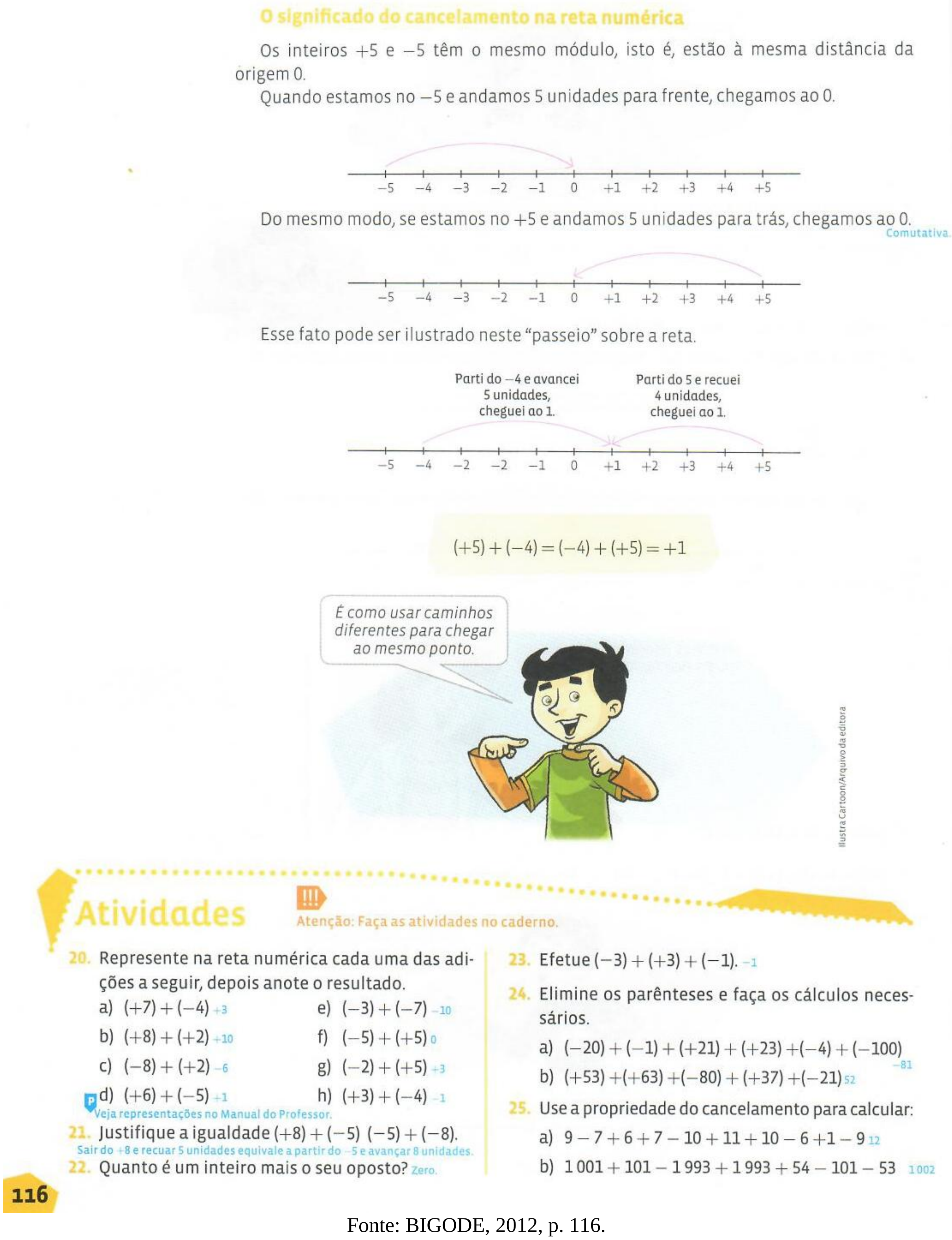
Ilustrações: Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

115

Fonte: BIGODE, 2012, p. 115.

Observamos nesta sequência de exemplos, certa dinamicidade na reta numérica dos inteiros, partir de um ponto e andar para frente ou para trás. Movimento que é discutido na operação de adição e não na introdução da reta.

Figura 14 – Cancelamento na reta numérica.



Fonte: BIGODE, 2012, p. 116.

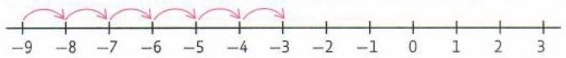
Após a adição é trabalhado o conceito da subtração, apresentando o sinal de menos (–) com a ideia do oposto de um número. E assim, é possível transformar uma subtração em uma adição. O conceito não é trabalhado na reta numérica uma vez que já foi discutido nas páginas anteriores.

A ideia é reforçada na parte seguinte do livro, apresentada a seguir, quando são discutidas as operações inversas.

Figura 15 – Operações inversas na reta numérica.

O significado das operações inversas na reta numérica

Ao escolher um ponto qualquer na reta numérica e avançar certo número de passos, temos:

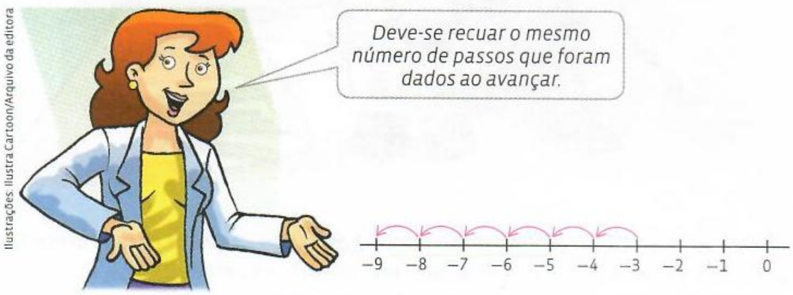


Nesse caso, o ponto escolhido foi −9 e foram dados 6 passos para a direita, chegando ao ponto −3.

Veja como expressar isto com uma igualdade numérica:

$$(-9) + (+6) = -3 \text{ ou } -9 + 6 = -3$$

O que deve ser feito para voltar ao ponto de partida?



$$-3 + (-6) = -9 \text{ ou } -3 - 6 = -9$$

Dessa forma, o inverso de adicionar 5 é subtrair 5; o inverso de subtrair 7 é adicionar 7, etc.

A operação inversa da adição é a subtração.
A operação inversa da subtração é a adição.

Atividades

Atenção: Faça as atividades no caderno.

31. Antecipe os números que aparecerão como resultado no visor das calculadoras antes de teclar =, escrevendo-os em seu caderno. Em cada caso, responda: depois de digitar quantas vezes o sinal = vai aparecer um número negativo no visor?

a) 10 − 3 = = = = = = = = = = = = = = =
7, 4, 1, −2, −5, −8, −11, −14, −17, −20, −23, −26, −29, −32; 4 vezes

b) 20 − 5 = = = = = = = = = = = = =
15, 10, 5, 0, −5, −10, −15, −20, −25, −30, −35, −40; 5 vezes

c) 21 − 4 = = = = = = = = 17, 13, 9, 5, 1, −3, −7, 6 vezes

d) 100 − 10 = = = = = = = = = = = = =
90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0, −10, −20; 11 vezes

32. Observe na calculadora quantas vezes você terá que acionar a tecla = para que o resultado continue sendo positivo.

a) 85 − 3 = = =... 28 vezes   b) 79 − 4 = = =... 19 vezes

33. Desafio olímpico Veja comentário no Manual do Professor.

Quantas vezes você terá que acionar a tecla = para que o resultado continue sendo positivo.

1 001 − 10 = = = ...

1ª dica:
Experimente resolver um problema parecido, mas com números menores.

2ª dica:
Este desafio equivale ao seguinte problema: Quantos são os múltiplos de 10 entre 0 e 1 001?

3ª dica:
Se você levar em conta as dicas anteriores, é possível chegar perto da resposta fazendo apenas uma operação na calculadora.

121

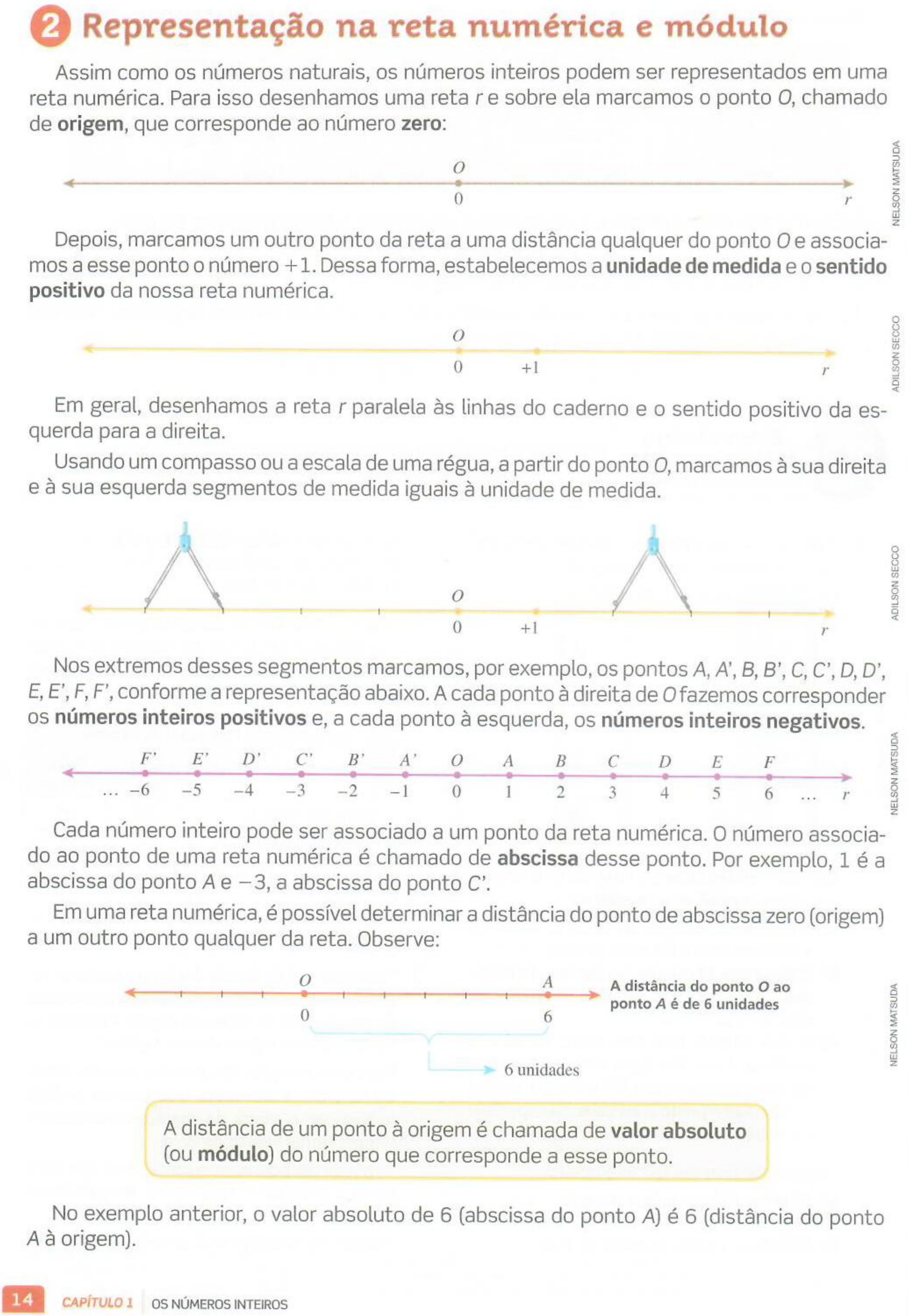
Fonte: BIGODE, 2012, p. 121.

Livro 3:

O terceiro livro analisado é o Matemática do autor Edwaldo Bianchini da Editora Moderna, ano de 2011.

Inicia o assunto discutindo a necessidade da representação de outros números como para representar uma altitude abaixo do nível do mar, temperaturas abaixo de zero graus e classificação de times de futebol. Posteriormente, indica como representar os números inteiros na reta numérica, e marcando o zero, definindo uma unidade de medida e escolhendo o sentido positivo da reta. Dos livros analisados, é o único que deixa livre para o aluno escolher qual o sentido positivo da reta, porém destaca que normalmente, a reta é desenhada horizontalmente e se atribui o sentido positivo para a direita.

Figura 16 – Representação na reta numérica.



2 Representação na reta numérica e módulo

Assim como os números naturais, os números inteiros podem ser representados em uma reta numérica. Para isso desenhamos uma reta *r* e sobre ela marcamos o ponto *O*, chamado de **origem**, que corresponde ao número **zero**:

Depois, marcamos um outro ponto da reta a uma distância qualquer do ponto *O* e associamos a esse ponto o número +1. Dessa forma, estabelecemos a **unidade de medida** e o **sentido positivo** da nossa reta numérica.

Em geral, desenhamos a reta *r* paralela às linhas do caderno e o sentido positivo da esquerda para a direita.

Usando um compasso ou a escala de uma régua, a partir do ponto *O*, marcamos à sua direita e à sua esquerda segmentos de medida iguais à unidade de medida.

Nos extremos desses segmentos marcamos, por exemplo, os pontos *A*, *A'*, *B*, *B'*, *C*, *C'*, *D*, *D'*, *E*, *E'*, *F*, *F'*, conforme a representação abaixo. A cada ponto à direita de *O* fazemos corresponder os **números inteiros positivos** e, a cada ponto à esquerda, os **números inteiros negativos**.

Cada número inteiro pode ser associado a um ponto da reta numérica. O número associado ao ponto de uma reta numérica é chamado de **abscissa** desse ponto. Por exemplo, 1 é a abscissa do ponto *A* e −3, a abscissa do ponto *C'*.

Em uma reta numérica, é possível determinar a distância do ponto de abscissa zero (origem) a um outro ponto qualquer da reta. Observe:

A distância do ponto *O* ao ponto *A* é de 6 unidades

6 unidades

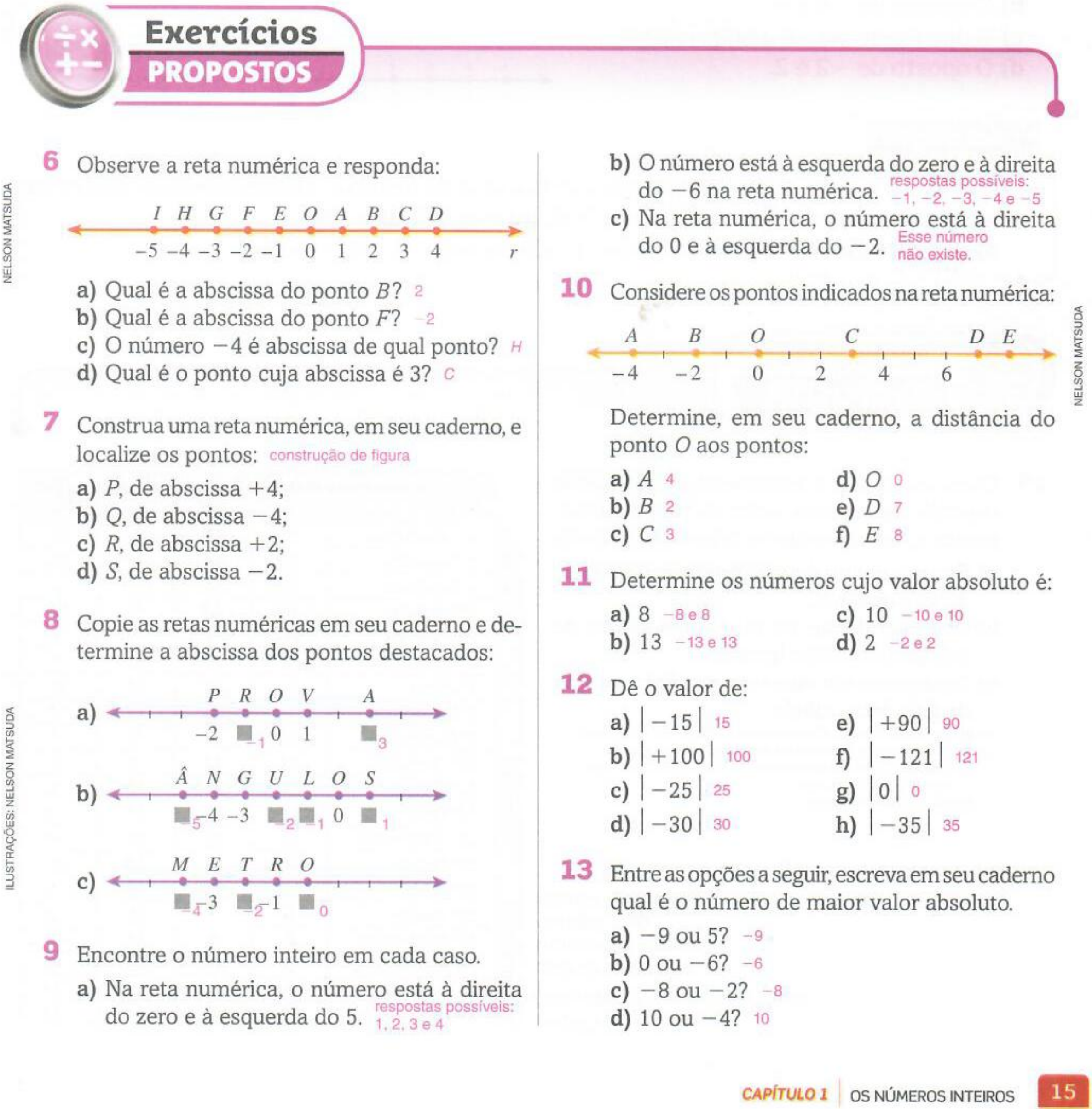
> A distância de um ponto à origem é chamada de **valor absoluto** (ou **módulo**) do número que corresponde a esse ponto.

No exemplo anterior, o valor absoluto de 6 (abscissa do ponto *A*) é 6 (distância do ponto *A* à origem).

14 CAPÍTULO 1 OS NÚMEROS INTEIROS

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 14.

Figura 17 – Exercícios de representação na reta numérica.



Exercícios PROPOSTOS

6 Observe a reta numérica e responda:

I H G F E O A B C D
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 r

a) Qual é a abscissa do ponto *B*? 2
b) Qual é a abscissa do ponto *F*? −2
c) O número −4 é abscissa de qual ponto? *H*
d) Qual é o ponto cuja abscissa é 3? *C*

7 Construa uma reta numérica, em seu caderno, e localize os pontos: construção de figura

a) *P*, de abscissa +4;
b) *Q*, de abscissa −4;
c) *R*, de abscissa +2;
d) *S*, de abscissa −2.

8 Copie as retas numéricas em seu caderno e determine a abscissa dos pontos destacados:

a) P R O V A
−2 ■ −1 0 1 ■ 3

b) Â N G U L O S
■ −5 −4 −3 ■ −2 ■ −1 0 ■ 1

c) M E T R O
■ −4 −3 ■ −2 −1 ■ 0

9 Encontre o número inteiro em cada caso.

a) Na reta numérica, o número está à direita do zero e à esquerda do 5. respostas possíveis: 1, 2, 3 e 4
b) O número está à esquerda do zero e à direita do −6 na reta numérica. respostas possíveis: −1, −2, −3, −4 e −5
c) Na reta numérica, o número está à direita do 0 e à esquerda do −2. Esse número não existe.

10 Considere os pontos indicados na reta numérica:

A B O C D E
−4 −2 0 2 4 6

Determine, em seu caderno, a distância do ponto *O* aos pontos:

a) *A* 4
b) *B* 2
c) *C* 3
d) *O* 0
e) *D* 7
f) *E* 8

11 Determine os números cujo valor absoluto é:

a) 8 −8 e 8
b) 13 −13 e 13
c) 10 −10 e 10
d) 2 −2 e 2

12 Dê o valor de:

a) $|-15|$ 15
b) $|+100|$ 100
c) $|-25|$ 25
d) $|-30|$ 30
e) $|+90|$ 90
f) $|-121|$ 121
g) $|0|$ 0
h) $|-35|$ 35

13 Entre as opções a seguir, escreva em seu caderno qual é o número de maior valor absoluto.

a) −9 ou 5? −9
b) 0 ou −6? −6
c) −8 ou −2? −8
d) 10 ou −4? 10

NELSON MATSUDA
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

CAPÍTULO 1 | OS NÚMEROS INTEIROS 15

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 15.

Embora o livro, a princípio, não imponha o sentido da reta, os exercícios são apresentados todos da maneira tradicional: reta horizontal, números positivos à direita do zero e números negativos à esquerda do zero. E não observamos dinamicidade, ou seja, indícios de movimentos sobre a reta.

Figura 18 – Comparação de números inteiros.

4 Comparação de números inteiros

Vamos supor que em certo dia os termômetros registrem −4 °C em São Joaquim, 25 °C em Recife e 25 °C em São Paulo.

São Joaquim (SC).

Recife (PE).

São Paulo (SP).

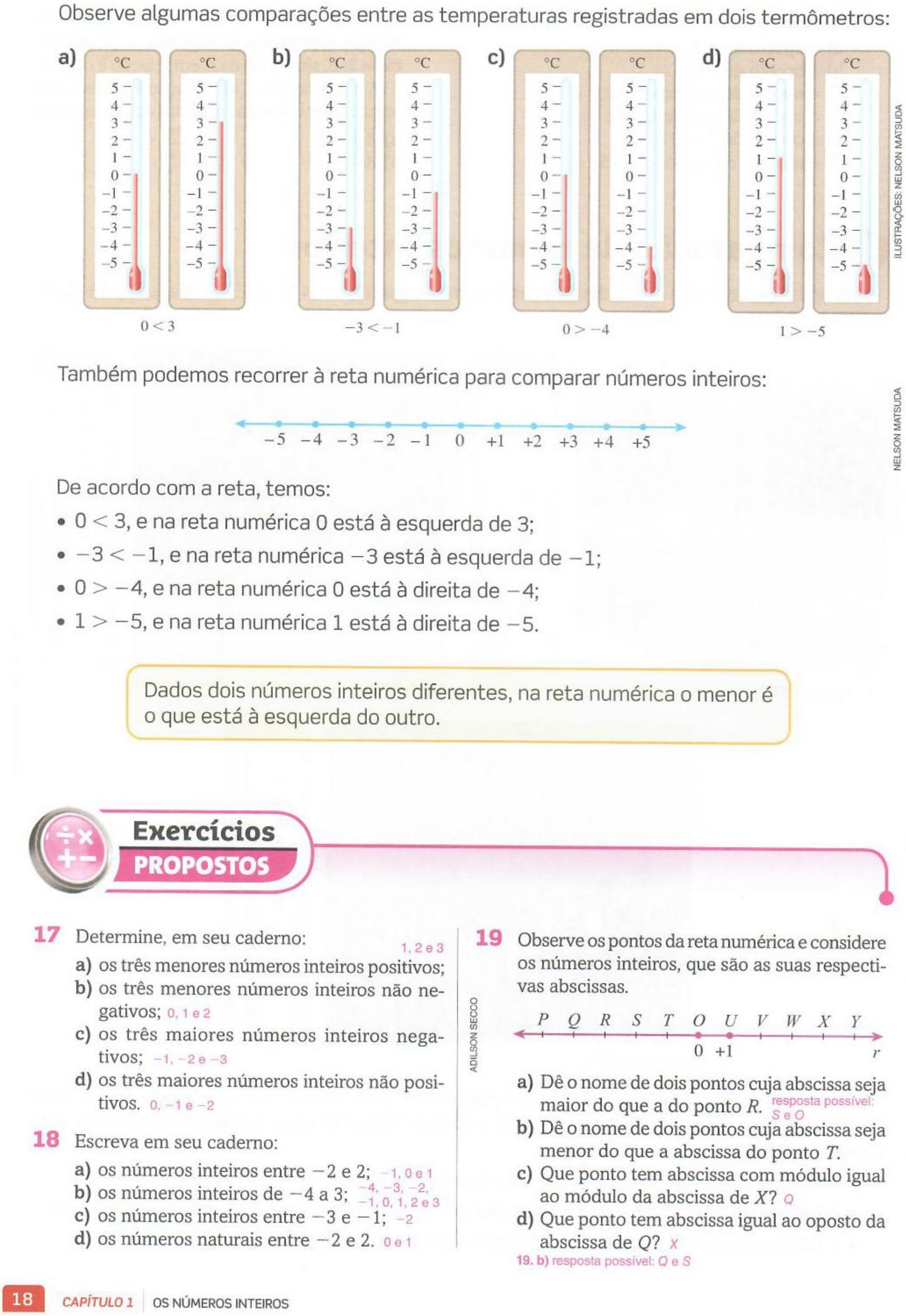
Com base nesses dados, podemos estabelecer uma relação de igualdade ou de desigualdade entre as temperaturas dessas cidades. Fazendo isso, estamos realizando uma **comparação entre números inteiros**.

- A temperatura em São Paulo é igual à temperatura em Recife (25 = 25).
- A temperatura em São Paulo é mais alta que a temperatura em São Joaquim (25 > −4).
- A temperatura em São Joaquim é menor que a temperatura em Recife (−4 < 25).

CAPÍTULO 1 | OS NÚMEROS INTEIROS 17

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 17.

Figura 19 – Comparação de números inteiros (continuação).



Observe algumas comparações entre as temperaturas registradas em dois termômetros:

a) $0 < 3$

b) $-3 < -1$

c) $0 > -4$

d) $1 > -5$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Também podemos recorrer à reta numérica para comparar números inteiros:

$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5$

NELSON MATSUDA

De acordo com a reta, temos:

- $0 < 3$, e na reta numérica 0 está à esquerda de 3;
- $-3 < -1$, e na reta numérica -3 está à esquerda de -1;
- $0 > -4$, e na reta numérica 0 está à direita de -4;
- $1 > -5$, e na reta numérica 1 está à direita de -5.

Dados dois números inteiros diferentes, na reta numérica o menor é o que está à esquerda do outro.

Exercícios PROPOSTOS

17 Determine, em seu caderno:

a) os três menores números inteiros positivos; 1, 2 e 3

b) os três menores números inteiros não negativos; 0, 1 e 2

c) os três maiores números inteiros negativos; -1, -2 e -3

d) os três maiores números inteiros não positivos. 0, -1 e -2

18 Escreva em seu caderno:

a) os números inteiros entre -2 e 2; -1, 0 e 1

b) os números inteiros de -4 a 3; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3

c) os números inteiros entre -3 e -1; -2

d) os números naturais entre -2 e 2. 0 e 1

ADILSON SECCO

19 Observe os pontos da reta numérica e considere os números inteiros, que são as suas respectivas abscissas.

P Q R S T O U V W X Y

0 +1 r

a) Dê o nome de dois pontos cuja abscissa seja maior do que a do ponto R. resposta possível: S e O

b) Dê o nome de dois pontos cuja abscissa seja menor do que a abscissa do ponto T.

c) Que ponto tem abscissa com módulo igual ao módulo da abscissa de X? Q

d) Que ponto tem abscissa igual ao oposto da abscissa de Q? X

19. b) resposta possível: Q e S

18 CAPÍTULO 1 OS NÚMEROS INTEIROS

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 18.

Embora os autores tenham, na introdução, apresentado a reta numérica apenas na horizontal, nos exercícios sobre temperatura, os termômetros estão na vertical. Entendemos que essas duas posições, bem como as inclinadas, também devem estar presentes na introdução deste estudo, para que o aluno perceba que a reta numérica pode estar representada de qualquer maneira.

Figura 20 – Exercícios sobre comparação de números inteiros.

20 Em seu caderno, coloque os números em ordem crescente, usando o sinal < entre os números.

a) $-8, -4, +2, -3, 0, +1$ $-8 < -4 < -3 < 0 < +1 < +2$

b) $+2, -9, 0, +1, +6, -10$ $-10 < -9 < 0 < +1 < +2 < +6$

21 Em determinado dia, o saldo bancário de Flávia era -2.000 reais e o de Luiz Antônio, -350 reais. Qual deles estava devendo mais ao banco? Justifique sua resposta.
Flávia, pois 2.000 reais é um valor maior que 350 reais.

CLAUDIO CHIYO

22 O calendário gregoriano, atualmente utilizado por nós, adota o ano do nascimento de Cristo como ano 1. Os anos antes de Cristo são indicados por **a.C.**, e os depois de Cristo, por **d.C.** Como exemplo, o ano 35 antes de Cristo é indicado por 35 a.C., e o ano 35 depois de Cristo, por 35 d.C.

Considerando essa informação, leia os textos abaixo e, em seguida, responda à questão em seu caderno.

HERITAGE IMAGES/CORBIS/LATINSTOCK

Pitágoras de Samos – Nasceu em Samos por volta de 580 a.C. Foi um filósofo grego responsável por importantes progressos nas áreas da Matemática, da Astronomia e da Teoria da Música.

Tales de Mileto – Nasceu na cidade grega de Mileto por volta de 624 a.C. Rico comerciante de azeite, tinha na Matemática uma de suas paixões. Muitos historiadores acreditam que a Geometria grega tenha começado com seus trabalhos.

BETTMANN/CORBIS/LATINSTOCK

Quem nasceu primeiro: Pitágoras ou Tales?
Tales de Mileto

23 Qual é o número maior em cada item? Responda em seu caderno.

a) 20 ou 18 20

b) -20 ou -18 -18

c) 0 ou -20 0

d) 0 ou 18 18

e) -15 ou -40 -15

f) -8 ou 20 20

24 Entre as sentenças a seguir, corrija em seu caderno as falsas.

a) O zero é maior que qualquer número negativo. V

b) O zero é maior que qualquer número positivo. O zero é menor que qualquer número positivo.

c) Qualquer número negativo é maior do que qualquer número positivo.

d) Qualquer número positivo é maior do que qualquer número negativo. V

e) Se dois números forem positivos, o maior será aquele que tem o menor módulo.

f) Se dois números forem negativos, o maior será aquele que tem o menor módulo. V

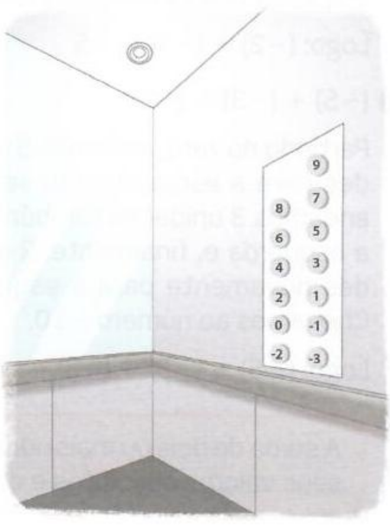
25 Reúna-se com um colega. Associem o andar térreo de um edifício com o zero. Usando números inteiros positivos ou negativos, escrevam no caderno o andar onde está um elevador quando:

a) partindo do andar térreo, subir 6 andares e, em seguida, subir mais 2 andares; $+8$

b) partindo do primeiro andar, descer 3 andares; -2

c) partindo do terceiro andar, subir 4 andares e, em seguida, descer 7 andares; 0

d) partindo do andar térreo, descer 3 andares e, em seguida, subir 1 andar. -2



CLAUDIO CHIYO

CAPÍTULO 1 | OS NÚMEROS INTEIROS 19

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 19.

A comparação entre os números inteiros é brevemente trabalhada na reta numérica. É destacado que, em uma reta, o menor número é sempre o que está à esquerda do outro. A partir disso, vários exercícios são propostos mas somente um traz a representação da reta numérica.

A próxima situação a ser apresentada utilizando a reta numérica é na operação de adição de números inteiros, como mostrados a seguir.

Figura 21 – Adição de números inteiros.

5 Adição de números inteiros

Acompanhe, nas situações a seguir, como procedemos para adicionar números inteiros fazendo uso da reta numérica.

▶ Situação 1

Na aula de laboratório, Silvana aqueceu uma certa quantidade de água que estava a zero grau Celsius. Notou que no 1º minuto a temperatura subiu 4 °C, e que no minuto seguinte a temperatura subiu outros 2 °C. Qual era a temperatura dessa água ao fim do 2º minuto?

Partindo do zero, andamos, em primeiro lugar, as unidades indicadas na primeira parcela e, em seguida, as indicadas na segunda. Chegamos, então, a um ponto cuja abscissa é a soma dos números dados.

Vamos estabelecer que o deslocamento será:

- para a direita se o número for positivo;
- para a esquerda se o número for negativo.

Então, temos: (+4) + (+2)

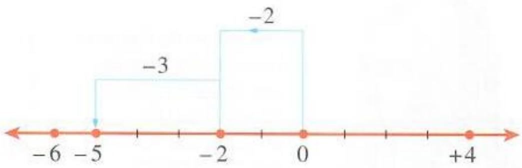
Partindo do zero, andamos 4 unidades para a direita e, em seguida, mais 2 unidades também para a direita. Chegamos ao número +6, ou seja, 6.

Logo: (+4) + (+2) = 6

Veja mais exemplos de adição de números inteiros de mesmo sinal:

a) (−2) + (−3)

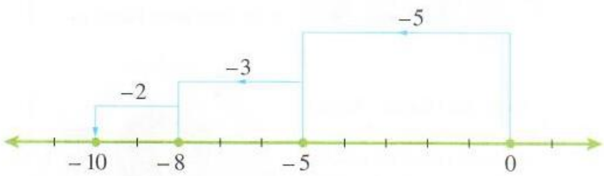
Partindo do zero, andamos 2 unidades para a esquerda e, em seguida, mais 3 unidades também para a esquerda. Chegamos ao número −5.



Logo: (−2) + (−3) = −5

b) (−5) + (−3) + (−2)

Partindo do zero, andamos 5 unidades para a esquerda, em seguida andamos 3 unidades também para a esquerda e, finalmente, 2 unidades novamente para a esquerda. Chegamos ao número −10.



Logo: (−5) + (−3) + (−2) = −10

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

> A soma de dois ou mais números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando o sinal comum.

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 20.

Figura 22 – Adição de números inteiros (continuação).

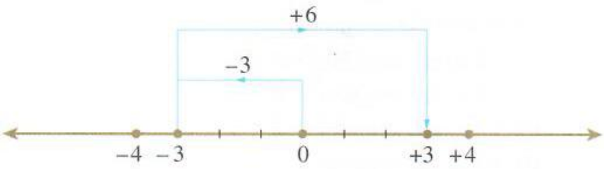
Situação 2

Em sua casa, Fernando havia congelado um suco de uva, o que fez a sua temperatura variar de 0 °C a −3 °C. Para o lanche da tarde, colocou o suco no micro-ondas e elevou a temperatura em 6 °C. Ao beber o suco, qual era a sua temperatura?

Temos: $(-3) + (+6)$

Partindo do zero, andamos 3 unidades para a esquerda e, em seguida, 6 unidades para a direita. Chegamos ao número +3, ou seja, 3.

Logo: $(-3) + (+6) = 3$

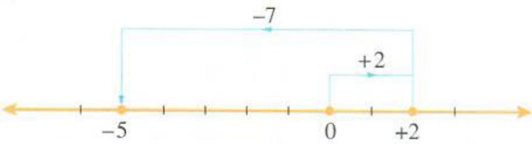


Veja outros exemplos de adição de números inteiros de sinais diferentes:

a) $(+2) + (-7)$

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a direita e, em seguida, 7 unidades para a esquerda. Chegamos, assim, ao número −5.

Logo: $(+2) + (-7) = -5$

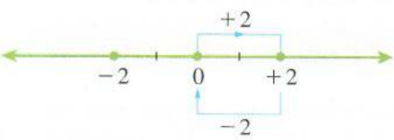


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

b) $(+2) + (-2)$

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a direita e, em seguida, 2 unidades para a esquerda. Voltamos ao número zero.

Logo: $(+2) + (-2) = 0$



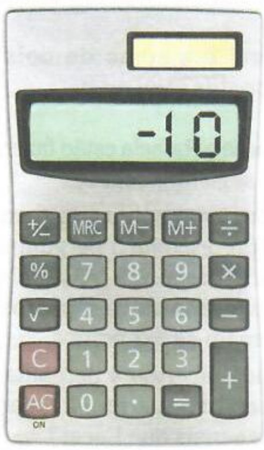
A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos e dando ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto. Caso esses números sejam opostos, a soma será igual a zero.

Também podemos fazer adições com números inteiros usando uma calculadora. Veja alguns exemplos:

a) Para fazer a adição $(+9) + (-2)$, apertamos as seguintes teclas:

b) Para fazer a adição $(-8) + (-2)$, apertamos as seguintes teclas:

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

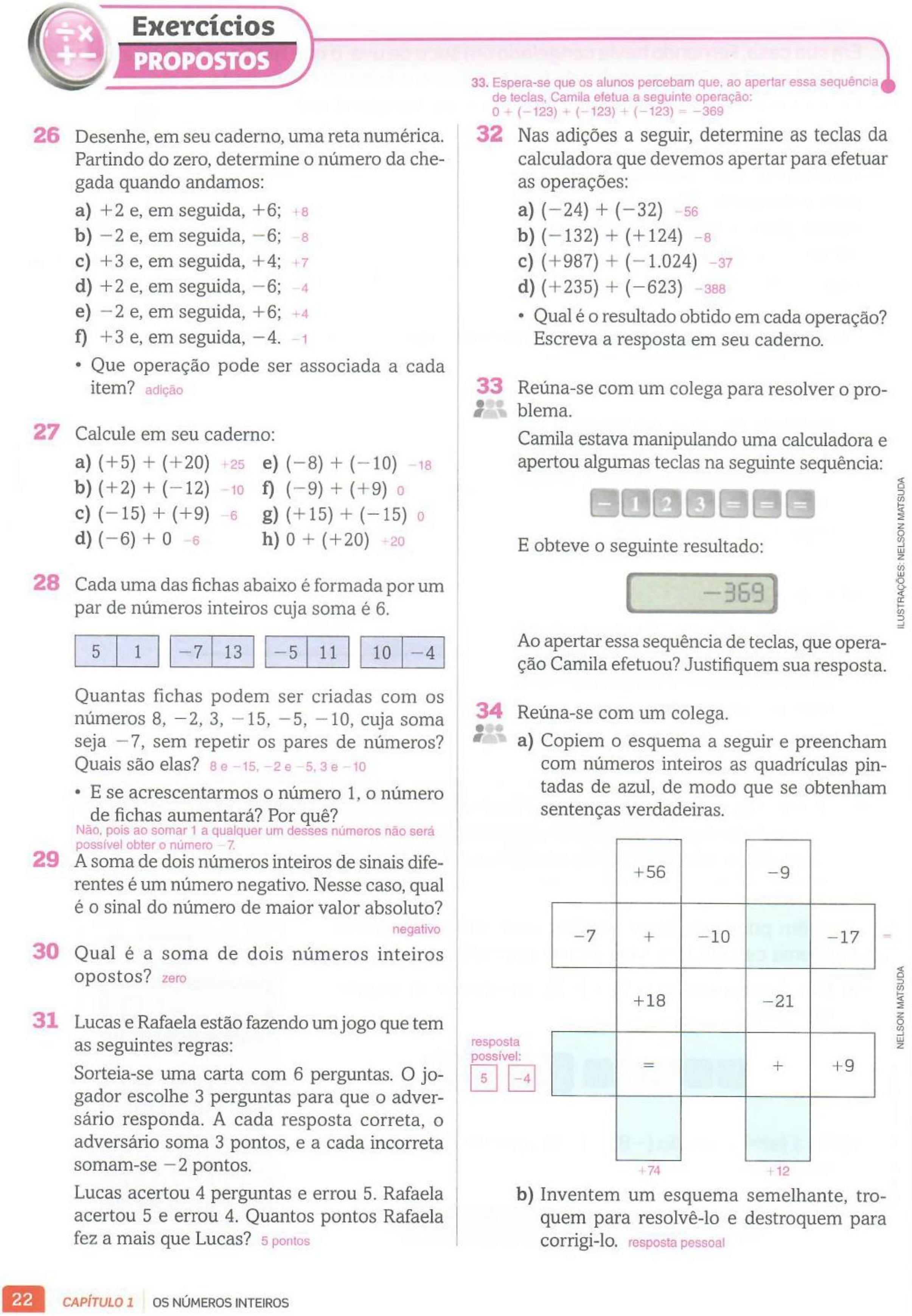


WILLIAM KING/SUPERSTOCK/KEYSTONE

CAPÍTULO 1 | OS NÚMEROS INTEIROS 21

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 21.

Figura 23 – Exercícios sobre adição de números inteiros.



Exercícios PROPOSTOS

26 Desenhe, em seu caderno, uma reta numérica. Partindo do zero, determine o número da chegada quando andamos:

a) +2 e, em seguida, +6; +8
b) −2 e, em seguida, −6; −8
c) +3 e, em seguida, +4; +7
d) +2 e, em seguida, −6; −4
e) −2 e, em seguida, +6; +4
f) +3 e, em seguida, −4. −1

- Que operação pode ser associada a cada item? adição

27 Calcule em seu caderno:

a) (+5) + (+20) +25
b) (+2) + (−12) −10
c) (−15) + (+9) −6
d) (−6) + 0 −6
e) (−8) + (−10) −18
f) (−9) + (+9) 0
g) (+15) + (−15) 0
h) 0 + (+20) +20

28 Cada uma das fichas abaixo é formada por um par de números inteiros cuja soma é 6.

5	1	−7	13	−5	11	10	−4

Quantas fichas podem ser criadas com os números 8, −2, 3, −15, −5, −10, cuja soma seja −7, sem repetir os pares de números? Quais são elas? 8 e −15, −2 e −5, 3 e −10

- E se acrescentarmos o número 1, o número de fichas aumentará? Por quê?
Não, pois ao somar 1 a qualquer um desses números não será possível obter o número −7.

29 A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é um número negativo. Nesse caso, qual é o sinal do número de maior valor absoluto? negativo

30 Qual é a soma de dois números inteiros opostos? zero

31 Lucas e Rafaela estão fazendo um jogo que tem as seguintes regras:

Sorteia-se uma carta com 6 perguntas. O jogador escolhe 3 perguntas para que o adversário responda. A cada resposta correta, o adversário soma 3 pontos, e a cada incorreta somam-se −2 pontos.

Lucas acertou 4 perguntas e errou 5. Rafaela acertou 5 e errou 4. Quantos pontos Rafaela fez a mais que Lucas? 5 pontos

33. Espera-se que os alunos percebam que, ao apertar essa sequência de teclas, Camila efetua a seguinte operação: 0 + (−123) + (−123) + (−123) = −369

32 Nas adições a seguir, determine as teclas da calculadora que devemos apertar para efetuar as operações:

a) (−24) + (−32) −56
b) (−132) + (+124) −8
c) (+987) + (−1.024) −37
d) (+235) + (−623) −388

- Qual é o resultado obtido em cada operação? Escreva a resposta em seu caderno.

33 Reúna-se com um colega para resolver o problema.

Camila estava manipulando uma calculadora e apertou algumas teclas na seguinte sequência:

− 1 2 3 = = =

E obteve o seguinte resultado:

−369

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Ao apertar essa sequência de teclas, que operação Camila efetuou? Justifiquem sua resposta.

34 Reúna-se com um colega.

a) Copiem o esquema a seguir e preencham com números inteiros as quadrículas pintadas de azul, de modo que se obtenham sentenças verdadeiras.

	+56		−9	
−7	+	−10		−17
	+18		−21	
	=		+	+9
	+74		+12	

resposta possível: 5 −4

NELSON MATSUDA

b) Inventem um esquema semelhante, troquem para resolvê-lo e destroquem para corrigi-lo. resposta pessoal

22 CAPÍTULO 1 OS NÚMEROS INTEIROS

Fonte: BIANCHINI, 2011, p. 22.

Dos livros analisados, este é o único que apresenta a soma de números inteiros somente na reta numérica. Os outros dois, primeiro apresentam a operação de adição com regras de memorização e posteriormente na reta. Nesse, é o inverso: dos movimentos na reta numérica, é extraída a regra para adição desses números.

O primeiro exercício dessa parte, sugere o uso da reta numérica onde, partindo-se do zero, faz-se dois movimentos consecutivos, como apresentado nas Situações 1 e 2, Figuras 21 e 22. Posteriormente, os exercícios exigem a utilização da técnica criada para adição a partir da ideia de movimento na reta.

A partir das análises dos três livros didáticos, observamos que os elementos da reta, como, (a) origem; (b) sentido do movimento na reta; (c) posições possíveis de uma reta; (d) movimentos na reta, isto é, partir de um ponto, observar um sentido e verificar o ponto de chegada; e (e) discutir a reta numérica dos números inteiros como uma expansão da reta dos números naturais, são elementos pouco discutidos na constituição da reta dos números inteiros.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Entendemos que, como orientado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.42) “a História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento”. Neste capítulo apresentamos um breve contexto histórico sobre o surgimento dos números inteiros, bem como a presença deste campo no Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012).

3.1 Um pouco de história

A invenção dos números corresponde à preocupação de ordem prática e utilitária (IFRAH, 1992, p. 25), ou seja, surgiu a partir da necessidade de enumerar objetos, população, alimentos entre outros. Para Ifrah (1992) a evolução do homem, que deixando de ser nômade se fixou em um só lugar, passou a praticar não somente a caça, mas também o cultivo de plantas e criação de animais. Para o autor, é quando a necessidade de controlar quantidades se fez cada vez mais presente.

A partir da necessidade do homem de controlar a quantidade de animais do seu rebanho, foi indispensável a criação de instrumentos para o controle de quantidades cada vez maiores (IFRAH, 1992, p. 25). Para fazer esse controle, Ifrah (1992, p.29) aponta a utilização de procedimentos concretos como, por exemplo, entalhes em madeira ou ossos, pedras e nós em cordas, onde cada corte na madeira, pedra ou nó representava um animal. Dessa forma, ao se recolher um rebanho, utilizavam a relação inversa, ou seja, se sobrasse alguma pedra significava que estava faltando algum animal.

> Vejamos o exemplo de um pastor que guarda um rebanho de carneiros todas as noites numa caverna. São cinqüenta e cinco animais, mas este pastor, [...] não sabe contar, [...]. Ele sabe apenas que há "muitos" carneiros. [...] vai recorrer a um procedimento concreto que os homens pré-históricos conheceram vários milênios antes dele: a prática do entalhe. Ele se senta à entrada da caverna e faz entrar um por um os animais. Com um seixo, faz um entalhe num pedaço de osso cada vez que um carneiro passa a sua frente. Assim, sem conhecer a verdadeira significação matemática [...] poderá em seguida verificar sem dificuldade se seu rebanho está completo ou não. Toda vez que voltar do pasto ele fará os carneiros seguirem um por um, colocando cada vez um dedo num talho. Se sobrar algum talho quando todos os animais tiverem passado, é porque algum se perdeu; senão, tudo vai bem. Se nascer algum filhote, bastará fazer um talho suplementar no seu pedaço de osso. (IFRAH, 1992, p. 29)

Utilizando o princípio de correspondência um a um, era possível obter resultados satisfatórios mesmo que a linguagem ou a memória fossem completamente falhas.

> Mas em vez da prática do entalhe podemos naturalmente recorrer a vários outros instrumentos materiais para aplicar este princípio. Nosso pastor poderia ter empregado pedrinhas para verificar se os carneiros que ele soltara de manhã haviam todos voltado à noite. Bastaria associar uma pedra a cada cabeça a seu encargo, guardar todas estas peças e depois, na volta, proceder à correspondência inversa. Ao ver o último animal corresponder à última pedra de seu monte, ele poderia estar certo de que nenhuma cabeça se perdera. E, se um carneiro viesse ao mundo nesse meio tempo, bastaria acrescentar uma nova pedrinha a seu monte... (IFRAH, 1992, p. 30)

Segundo Ifrah (1992), a fim de fazer essa equiparação, utilizaram também conchas, pauzinhos e até excrementos secos, tudo amontoado ou enfileirado. Os dedos das mãos ou os membros das diferentes partes do corpo humano, com uma ordem previamente estabelecida, também passaram a ser usados nesses casos e, posteriormente, a enumeração de seres e coisas foram feitas com sequências de palavras invariáveis fixadas em memória, como por exemplo, as palavras de uma oração, os meses do ano, as letras do alfabeto, entre outros.

Tendo em vista a necessidade de controlar seus pertences, além da contagem abstrata, foi necessário recorrer a outra técnica, originando os códigos para representar essas quantidades. Esses códigos foram chamados de “números”, os quais utilizamos hoje, e revolucionaram o método de contagem. Segundo Ifrah (1992, p. 44), “"contar" os objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo (uma palavra, um gesto ou um sinal gráfico, por exemplo) correspondente a um número tirado da "seqüência natural de números inteiros"(...)”

Na época do Renascimento, com o comércio na Europa Medieval, Crosby (1999) relata que “o Ocidente em direção ao capitalismo” (p. 188) deveria “racionalizar seus negócios” e que, desse modo, estaria “prestando um favor à humanidade”, ensinando-a a ser “metodicamente organizada”. O autor ressalta que “metódico significa cuidadoso e meticuloso e é, na prática, uma questão de números.” (CROSBY, 1999, p. 188).

Crosby (1999) indica que alguns comerciantes anotavam em pergaminho e papel os chamados livro razão, a quantificação dos seus negócios para assim, poupar-se de um caos e para atingir esse objetivo, a principal técnica utilizada foi a escrituração por partidas dobradas. (CROSBY, 1999, p. 191).

Considera que com o crescimento do comércio da época, foi necessário o uso dessa técnica, onde “muitos comerciantes anotavam os recebimentos nas seções iniciais de seus livros e as despesas na parte final” (CROSBY, 1999, p. 194), tornando difícil a comparação desses dados. Posteriormente, foi utilizado o método das anotações em colunas paralelas numa mesma página ou em páginas adjacentes, garantindo clareza, mas não honestidade. (CROSBY, 1999, p. 194).

> A escrituração por partidas dobradas, no entanto tem um mandamento (muitas regras, mas um só mandamento), que reza que é preciso fazer o balanço, ainda que desonesto, de todas as contas, reconhecendo em seu fechamento um lucro ou prejuízo final. (CROSBY, 1999, p.194)

O autor ressalta que Luca Pacioli (1445 – 1517), embora não tenha sido o inventor da escrituração por partidas dobradas, nasceu duzentos anos depois, foi chamado de “pai da contabilidade por partidas dobradas”. (CROSBY, 1999, p.197).

> Para fazer o balanço do livro razão, recomendava Pacioli, pegue um pedaço de papel (disponível na Itália desde o século XIII) e relacione, do lado esquerdo os totais dos débitos e, do lado direito, os totais de créditos. Some separadamente as duas colunas e compare-as. Se o total de todos os débitos, “mesmo que haja dez mil deles”, for igual ao total dos créditos, excetuando os lucros ou perdas reconhecidos, é muito provável que as contas estejam corretas. Se essas somas forem diferentes, terá havido algum erro de cálculo, omissão ou falseamento em algum lugar. Estes terão que ser “diligentemente” buscados. (CROSBY, 1999, p.204)

Para Crosby (1999, p. 203), Pacioli considerava que eram necessários, ao negociante, três livros de registro: o de apontamentos, o diário e o razão. Em todos eles, buscava-se verificar as “entradas e saídas”, “débitos e créditos”, mas somente o livro razão fazia uso da escrituração por partidas dobradas. Assim, o objetivo desses registros era de facilitar a visualização das mãos-duplas das atividades comerciais, ou seja, se estavam sendo bem ou malsucedidos. Foi durante essas atividades comerciais que surgiu o primeiro registro dos sinais de mais (+) e menos (–).

> O primeiro registro dos símbolos + e – ocorreu numa aritmética de autoria de Johann Widman (nascido c. 1460 na Boêmia), publicada em Leipzig no ano de 1489. No caso, esses símbolos eram usados meramente para indicar excesso e deficiência e não com os significados operacionais de hoje. É bastante provável que o primeiro desses sinais seja uma contração da palavra latina *et*, que era usada frequentemente para indicar adição; e é possível que o segundo desses sinais decorra da abreviação $\bar{m}$ para menos. (EVES, 1995, p.298)

Crosby (1999, p. 207) cita que Pacioli, em uma de suas obras, expôs as técnicas para “reduzir o mundo a algo visual, quantitativo e, por conseguinte, compreensível e possivelmente controlável”, simplificando os registros com sinais de mais (+) e menos (–) utilizados nos dias atuais, como já havia sido registrado por Johann Widman. Entendemos que as situações dos comerciantes são significativas na problematização da necessidade de ampliação dos campos numéricos. Que também são situações indicadas no Currículo de São Paulo (2012)

> Tais situações podem estar apoiadas na história, como, por exemplo, a ampliação dos números naturais para os inteiros devido às necessidades prementes do desenvolvimento comercial e financeiro dos séculos XV e XVI (...) (SÃO PAULO, 2012, p. 40).

3.2 Os números inteiros

Como indicado por Ifrah (1992), Crosby (1999) e Eves (1995), durante milhares de anos os números naturais, que são inteiros e positivos, supriram as necessidades da humanidade, ou seja, de efetuar contagens, cálculos e indicar medidas. Com o crescimento das atividades comerciais, houve a necessidade da criação de novos tipos de números a fim de indicar e calcular, principalmente, os sentidos contrários do movimento dos comerciantes. A entrada ou saída de mercadorias ou dinheiro, o lucro ou perda, venda ou compra. Para indicar as quantidades e em que sentido ela ocorre, foi necessário a criação de uma forma de registro que indicasse, além da quantidade, o seu sentido. Para Lima e Moisés (1998) o número inteiro é um desenvolvimento

> [...] que ocorre no interior do campo da ideia de contagem, geradora do número natural. É uma continuidade deste (campo). Porém, o pensamento novo que o número inteiro traz é a ruptura com o número natural: a contagem de quantidades contrárias. (LIMA E MOISÉS, 1998, p. 3)

Entendemos que o movimento dos comerciantes medievais, entendido como o controle de quantidades contrárias, tem o aspecto da dinamicidade indicada por Glaeser (1985).

3.2.1 Considerações ao desenvolver o conceito teórico

O início do desenvolvimento do conceito de números inteiros em sala de aula, partindo da realidade dos alunos e dos conhecimentos prévios, pode parecer bastante simples. Mostrar exemplos de situações onde aparecem números negativos faz com que eles compreendam sua existência. Porém, ao introduzir a ideia de módulo ou valor absoluto, simétrico ou oposto de um número inteiro e a comparação entre esses números, é possível notar que alguns alunos já apresentam dificuldades, pois já não se parece com o que, até então, era “concreto”, no sentido de não ser familiar aos alunos. Os conceitos são mais teóricos e abstratos. Sendo assim, o presente trabalho tem como objetivo a representação dos números inteiros na reta numérica através da proposta de atividades baseadas em Lima e Moisés (1998) e tem como objetivo que o aluno perceba a necessidade da expansão dos números naturais e seus aspectos em uma nova reta numérica.

3.2.2 Ponto de partida

Considerando que os números naturais nasceram da necessidade de contar as coisas, como o pastor de ovelhas que precisava controlar seu rebanho, Lima e Moisés (1998, p. 48) consideram que os “números naturais nos indicavam apenas a quantidade das coisas”, isto é, a “contagem das unidades inteiras que constituem uma quantidade”.

Para os números inteiros, os autores indicam uma diferença fundamental deste novo campo numérico, ele vai além dos números naturais quando “contam as unidades inteiras e *contam* o contrário destas unidades”, nos indicando a orientação dessas unidades. (idem).

Concordamos com Lima e Moisés (1998, p. 48) que os números inteiros são uma nova maneira de pensar e contar as coisas em seus dois sentidos contrários, isto é, em um sentido ou no outro.

Quadro 3 – Diferença entre Números Naturais e Números Inteiros.

Conjunto numérico	**Objetivo**
Números Naturais	Contar as quantidades das coisas
Números Inteiros	Contar as quantidades das coisas e o seus contrários

Fonte: Autoria própria.

Portanto, consideramos os números inteiros como uma expansão dos números naturais. Lima e Moisés (1998) indicam que, assim como, os matemáticos atribuíram um símbolo para os números naturais, a letra $\mathbb{N}$, os matemáticos também atribuíram um símbolo para os números inteiros, a letra $\mathbb{Z}$.

Quadro 4 – Símbolo dos conjuntos numéricos.

Números	**Símbolo**
Naturais	$\mathbb{N}$
Inteiros	$\mathbb{Z}$

Fonte: Autoria própria.

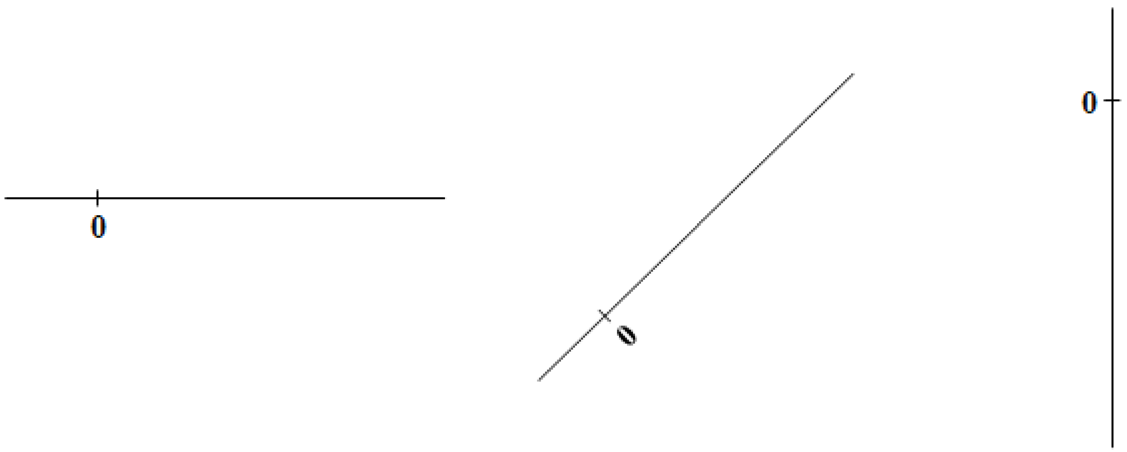
A partir dessas considerações vamos iniciar as propostas das atividades para a sala de aula, algumas baseadas em Lima e Moisés (1998), outras desenvolvidas pela autora.

3.2.3 Atividades na reta numérica com representação dos naturais

3.2.3.1 A reta numérica natural e os seus elementos constitutivos: zero

Com o número zero já localizado na reta dos números naturais, Lima e Moisés (1998) propõem que seja marcado, a partir dele, os números naturais.

Figura 24 – Localização do número zero na reta numérica.

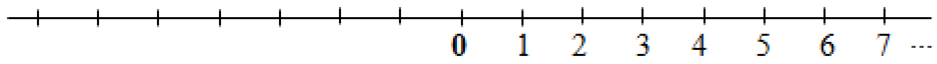


Fonte: Autoria própria.

3.2.3.2 A reta numérica natural e os seus elementos constitutivos: 1, 2, 3,... e seu sentido crescente em N

A partir do zero, vamos marcar os números naturais já conhecidos, 1, 2, 3,... no sentido que já os conhecemos. Para isso, basta fixarmos uma unidade de medida entre o número zero e o número 1 e utilizar essa mesma medida entre os demais números da reta (BIANCHINI, p. 14).

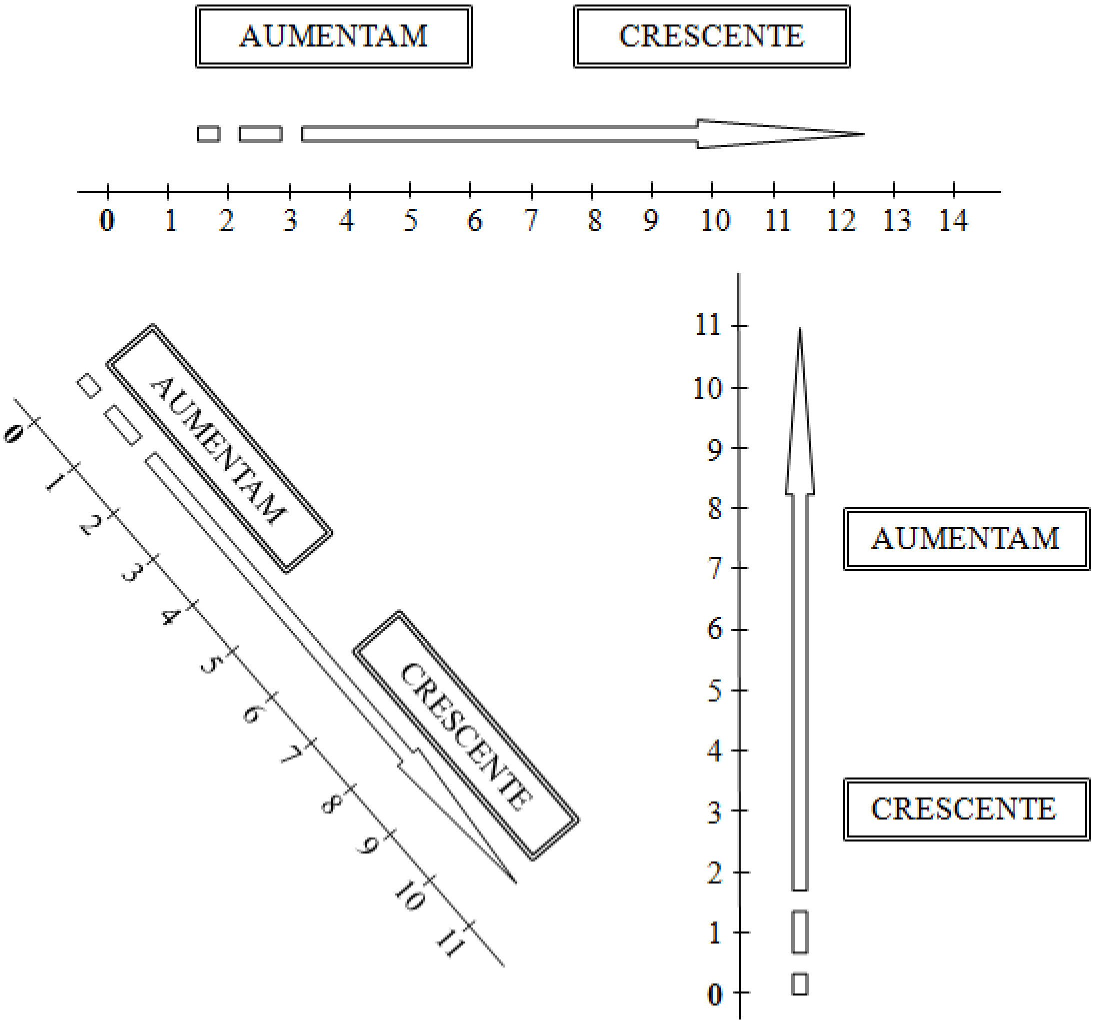
Figura 25 – Inserção dos números naturais a partir do zero.



Fonte: Autoria própria

Partindo do zero, os números aumentam de um em um para a direita, ou seja, nesse sentido, os números crescem, denominando de sentido crescente.

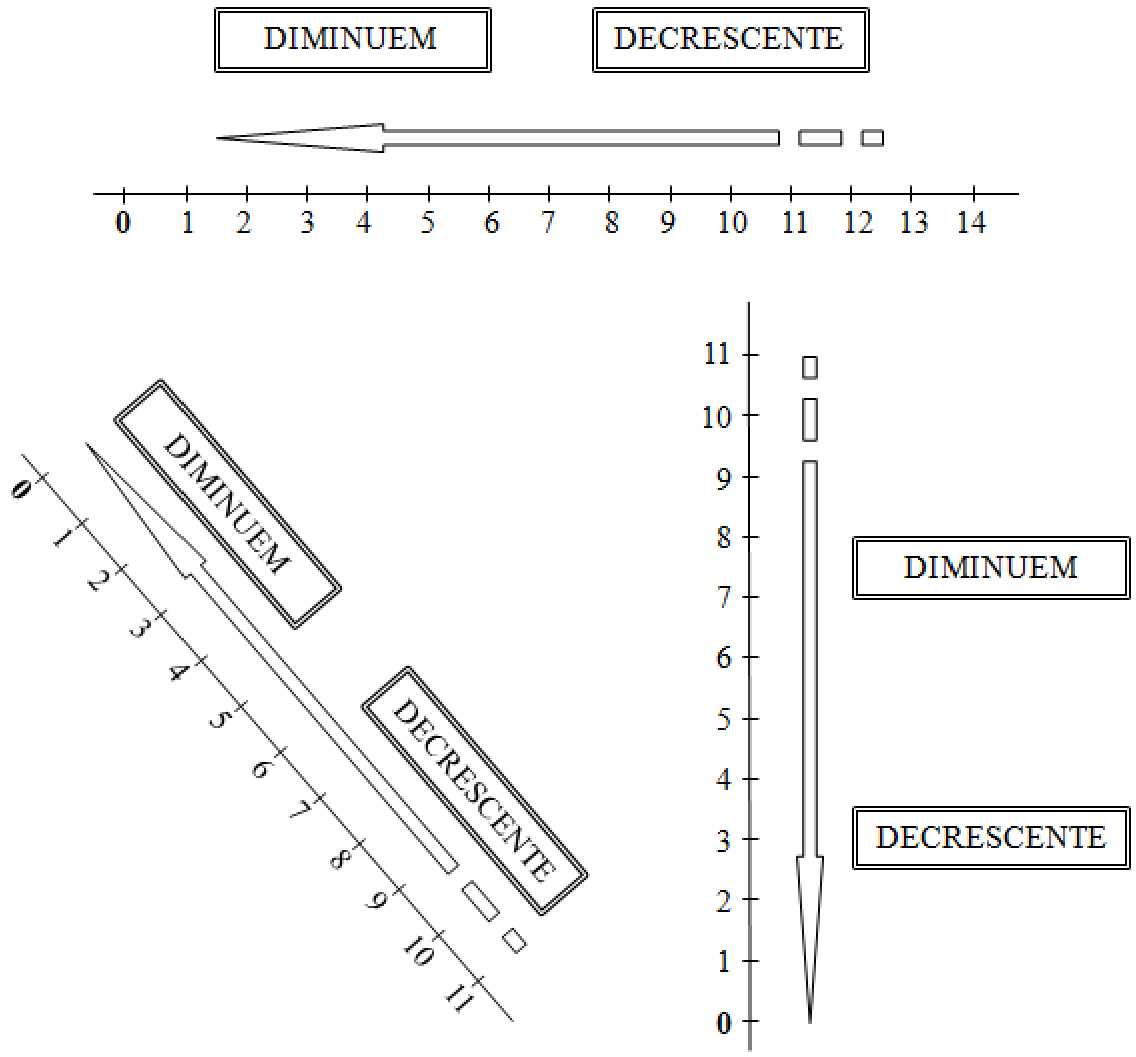
Figura 26 – Sentido crescente da reta numérica natural.



Fonte: Autoria própria.

Se caminharmos no outro sentido, as quantidades numéricas diminuirão, e o sentido será decrescente.

Figura 27 – Sentido decrescente da reta numérica natural.



Fonte: Autoria própria.

ATIVIDADES: representação do sentido da reta numérica ℕ.

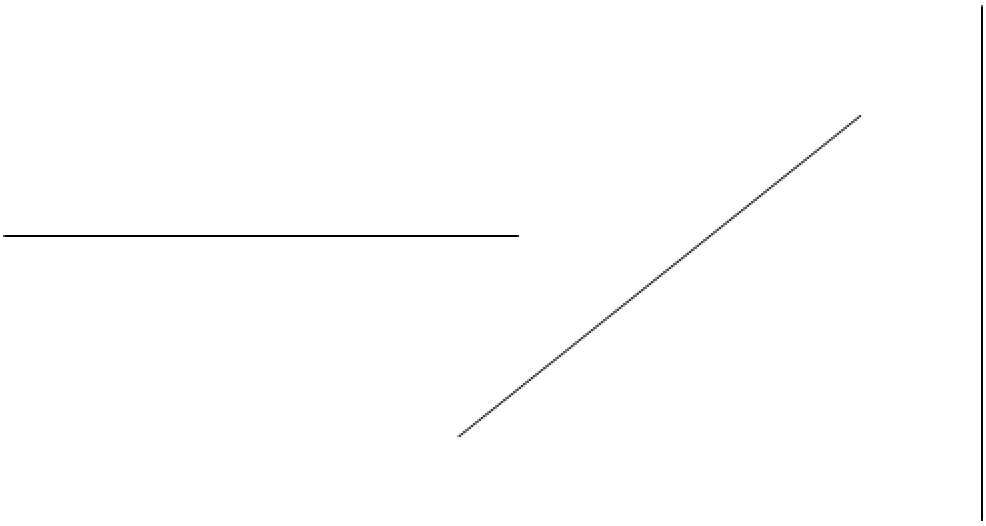
1) A seguir temos as retas numéricas naturais, indique:

   a. O zero.

   b. Os números de 1 a 5.

   c. Desenhe com uma seta o sentido crescente.

Figura 28 – Retas para resolução do exercícios 1.

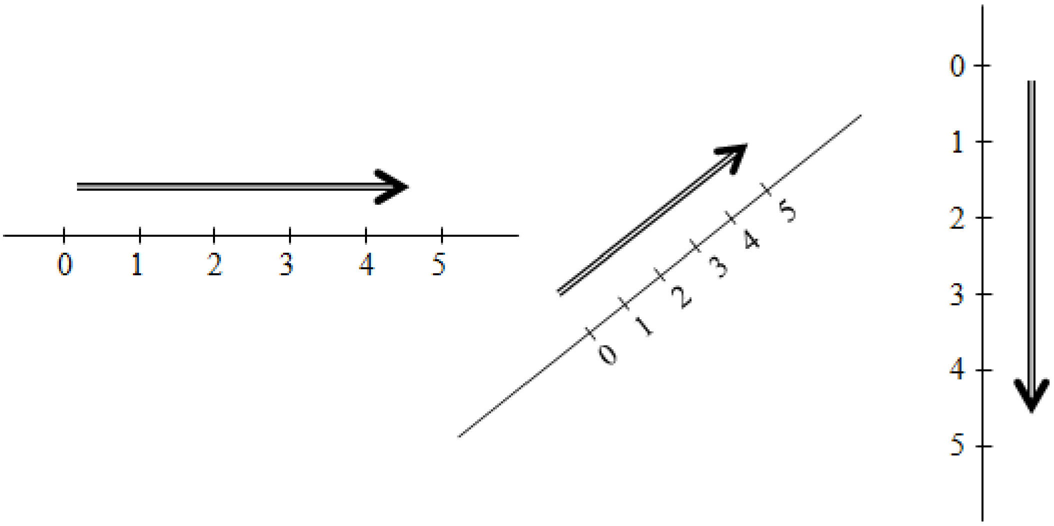


Fonte: Autoria própria.

OBSERVAÇÕES: nesta atividade a proposta é a visualização da reta numérica natural em várias posições no plano. Acreditamos que marcar os seus elementos constitutivos e atribuir o sentido crescente a ela, contribuirá para visualização do aluno de retas em diversas situações.

Possíveis respostas:

Figura 29 – Possíveis respostas do exercício 1.



Fonte: Autoria própria.

CONSIDERAÇÕES: Para localizar os números na reta, é necessário primeiro posicionar o zero num local aleatório e atribuir o sentido crescente da reta e, a partir disso, localizar os demais números. Compreendendo essa estrutura, é possível colocar a reta em qualquer posição que o sentido da mesma será de fácil visualização para o aluno.

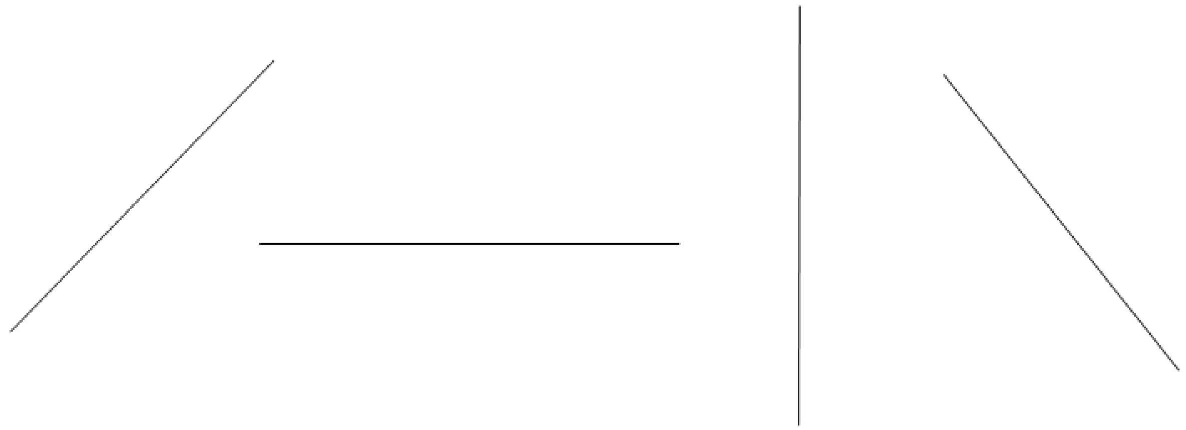
2) Nas retas numéricas naturais, indique:

a. O zero,

b. Os números de 1 a 5,

c. Desenhe com uma seta o sentido decrescente

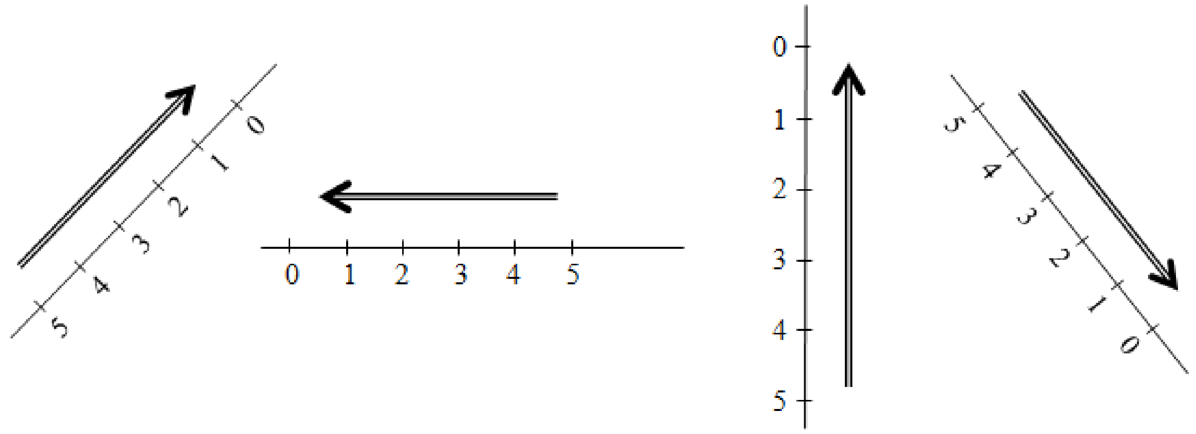
Figura 30 – Retas para resolução do exercícios 2.



Fonte: Autoria própria.

Possíveis respostas:

Figura 31 – Possíveis respostas do exercício 2.



Fonte: Autoria própria.

CONSIDERAÇÕES: Os livros didáticos atuais pouco contribuem para o entendimento da reta numérica dos números inteiros. O conceito é apresentado brevemente como uma reta horizontal, marcando o zero como origem e indicando que à direita dele, estão os números positivos e à esquerda os negativos. Os termos “crescente” e “decrescente” não são citados nesse momento. A atividade aqui apresentada faz com que o aluno perceba que independente da direção da reta (horizontal, vertical, inclinada), cabe a cada um determinar o posicionamento do zero e dos demais números, bastando conhecer qual o sentido que se quer atribuir à reta, fazendo com que o aluno tenha autonomia em decidir como a reta será representada sem que perca as características da mesma.

3.2.3.3 Os seus elementos constitutivos: o deslocamento na reta numérica dos naturais no sentido crescente e no sentido decrescente.

O objetivo desta atividade é proporcionar ao aluno a realização de movimentos na reta dos naturais que também estarão presentes na reta dos números inteiros, a partir desses movimentos pretendemos preparar a expansão da reta dos naturais para a reta dos inteiros, que ocorrerá na próxima atividade.

ATIVIDADE: o movimento na reta dos naturais

1) Vamos imaginar as retas numéricas como uma estrada com seus marcos quilométricos.
   I. Pense nos números indicados a seguir como ponto de partida (o primeiro) e ponto de chegada (o segundo),
   II. Indique os movimentos na reta através de marcas de sua preferência,
   III. Indique por uma seta que vai do ponto de partida até o ponto de chegada,
   IV. Classifique se o movimento foi crescente ou decrescente.

Figura 32 – Retas para realizar os movimentos propostos no exercício 1.

a) de 3 a 5

b) de 6 a 2

c) de 2 a 1

d) de 4 a 3

e) de 0 a 4

f) de 5 a 0

g) de 3 a 7

h) de 7 a 3

i) de 2 a 10

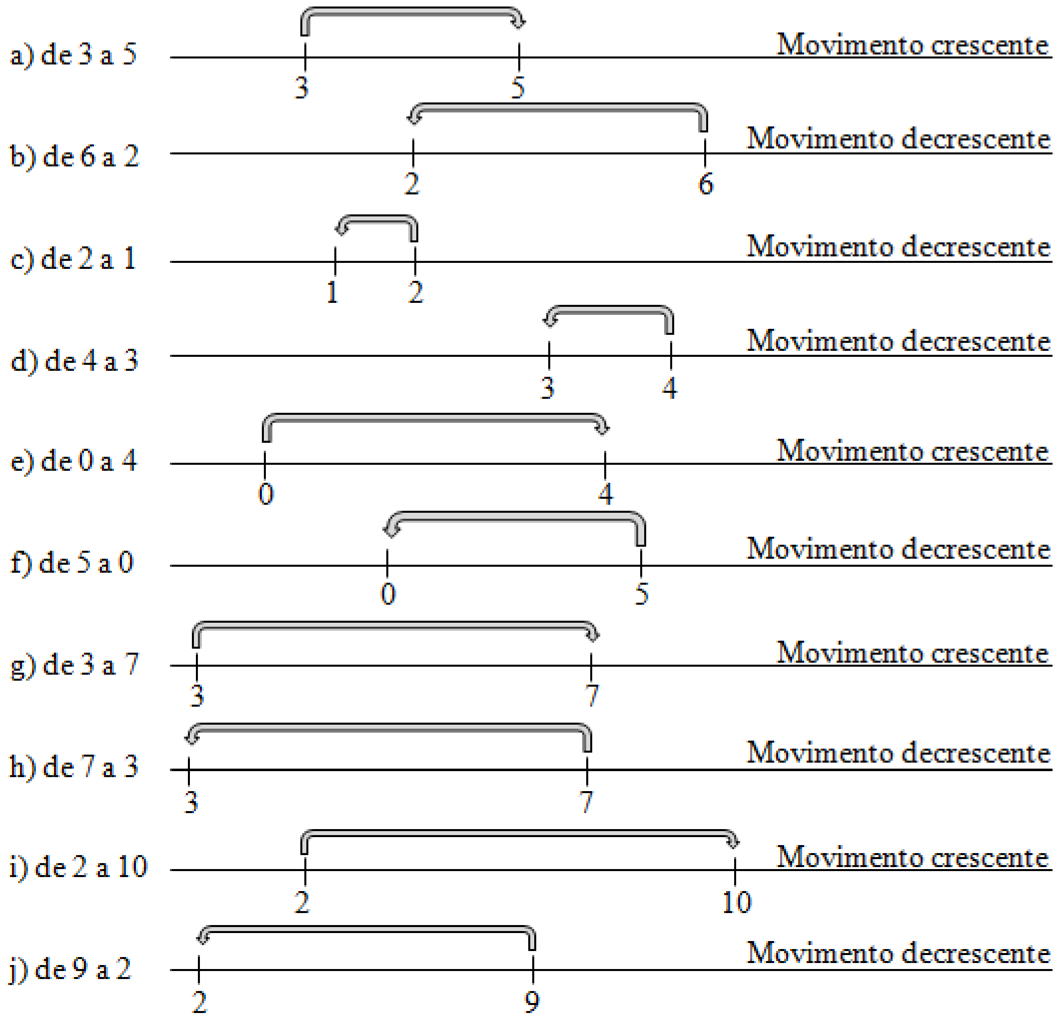
j) de 9 a 2

Fonte: Autoria própria.

CONSIDERAÇÕES: Tanto os documentos oficiais, como PCN (BRASIL, 1998), Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) quanto os livros didáticos atuais apresentam atividades com deslocamentos nas retas quando se referem às operações de soma e subtração. A atividade apresentada é fundamental para a compreensão dos movimentos na reta dos naturais, pois os alunos aprendem a pensar e visualizar os números na reta e identificar o sentido dos movimentos, ou seja, se "andam" para a direita ou para a esquerda. Vale salientar que, como dito anteriormente, a reta pode estar em qualquer direção, não necessariamente na horizontal como apresentada nessa atividade.

Possíveis respostas:

Figura 33 – Possíveis respostas do exercício 1.



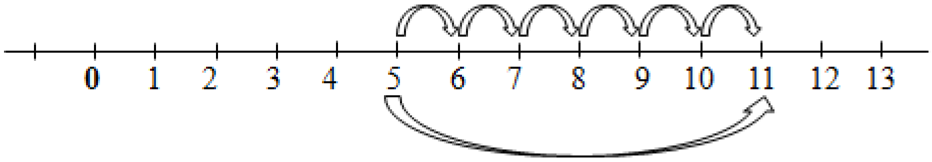
Fonte: Autoria própria.

3.2.3.4 Atribuição de sinais para os movimentos nos sentidos crescentes e decrescentes da reta dos naturais.

Como apresentado, os deslocamentos na reta dos naturais são realizados tanto para a direita quanto para a esquerda.

Como exemplo, tem-se o movimento de 5 a 11 que pode ser indicado como mostra a Figura 34, tendo o 5 como ponto de partida e o 11 como ponto de chegada.

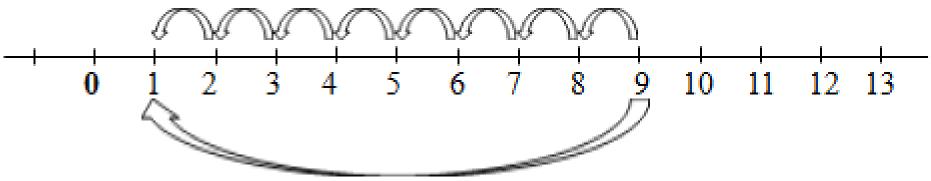
Figura 34 – Movimento de 5 a 11.



Fonte: Autoria própria.

E no movimento de 9 a 1 pode ser indicado como a seguir, partindo do 9 e tendo o 1 como ponto de chegada.

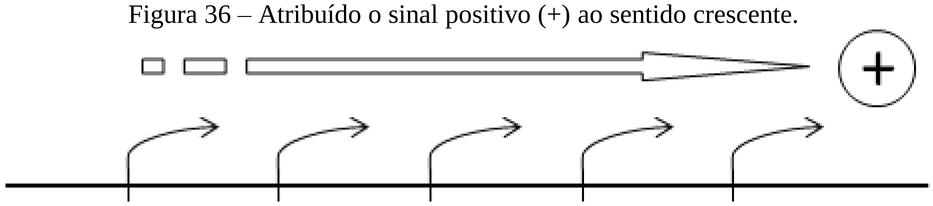
Figura 35 – Movimento de 9 a 1.



Fonte: Autoria própria.

A partir dessa atividade, é possível concluir que nos movimentos da esquerda para a direita da reta, ou seja, no sentido crescente, os números aumentam e então podemos atribuir a esse movimento o sinal positivo (+).

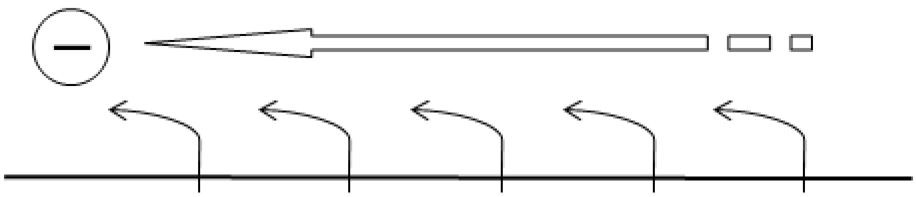
Figura 36 – Atribuído o sinal positivo (+) ao sentido crescente.



Fonte: Autoria própria.

Quando o movimento ocorre no outro sentido contrário, da direita para a esquerda, ou seja, no sentido decrescente, o valor dos números está diminuindo. Assim, atribuímos o sinal negativo (–).

Figura 37 – Atribuído o sinal negativo (–) ao sentido decrescente.



Fonte: Autoria própria.

ATIVIDADE: O movimento na reta dos naturais utilizando os sinais (+) e (–).

1) Tendo como base a reta dos naturais, são dados os pontos de partida e a quantidade do movimento. Indique os movimentos na reta e determine seu ponto de chegada em cada item.
   a) 2 e movimento +5;

b) 13 e movimento –7;

c) 10 e movimento +2;

d) 0 e movimento +4;

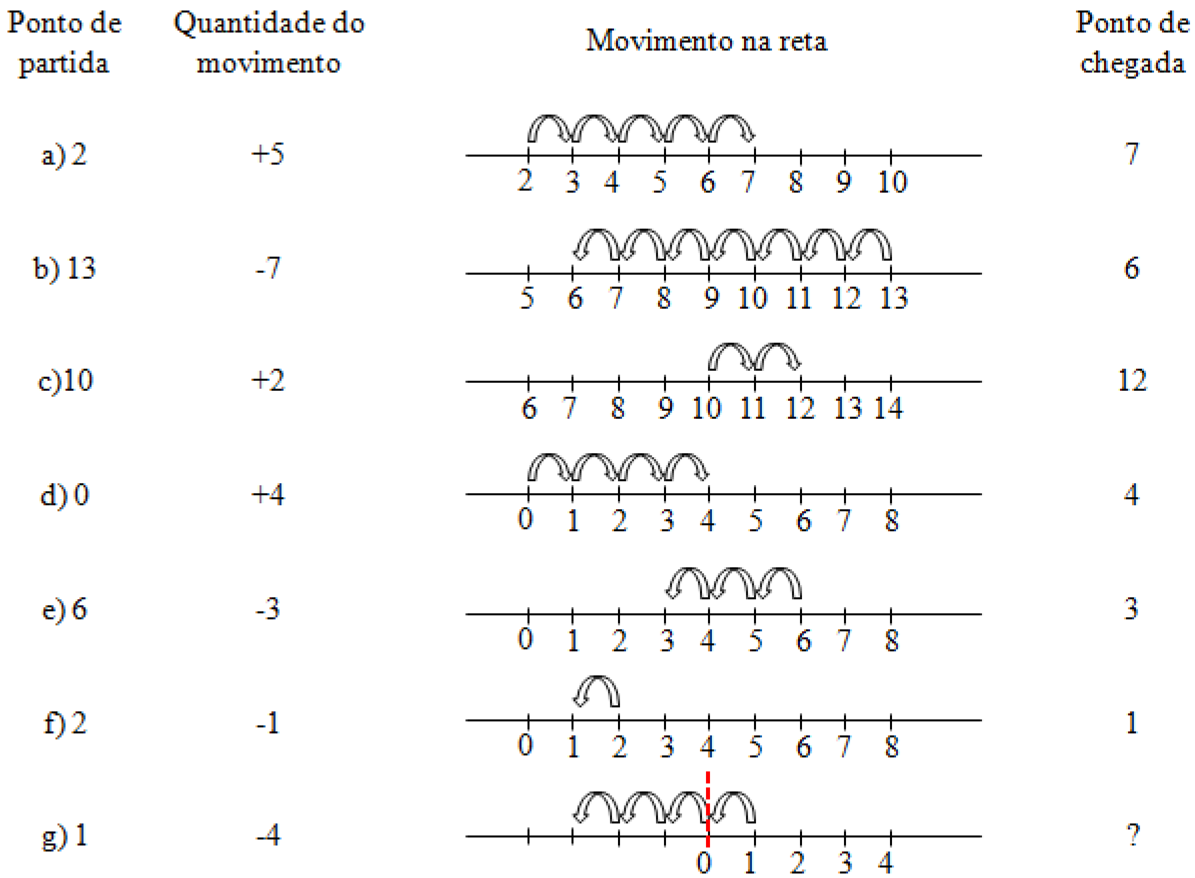
e) 6 e movimento –3;

f) 2 e movimento –1;

g) 1 e movimento –4.

Possíveis respostas:

Figura 38 – Possíveis respostas do exercício 1.



Fonte: Autoria própria.

Pelo último item (g) da atividade proposta, observa-se que é impossível realizar o movimento sugerido. Como partir de 1 e se movimentar 4 unidades para a esquerda se na reta dos naturais só existe um número à esquerda do 1?

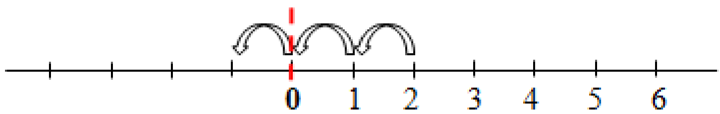
Para que seja possível responder a esse último item e identificar qual o ponto de chegada do movimento sugerido, é necessário que "apareçam" números para a esquerda do zero, ou seja, que haja uma expansão da reta numérica.

3.2.3.5 Os seus elementos constitutivos: o deslocamento para a expansão da reta dos naturais para a reta dos inteiros.

Como no último item da atividade apresentada, um movimento de uma em uma unidade negativa na reta dos naturais pára no zero. Sugerimos três movimentos na reta dos naturais: tendo 2 como ponto de partida e um movimento de quantidade –3; ponto de partida 1 e movimento –2 ; e ponto de partida 4 e movimento –6.

As próximas figuras representam esses deslocamentos na reta.

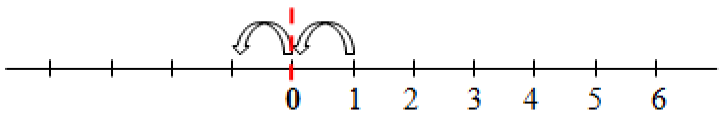
Figura 39 – Movimento partindo de 2 e tendo quantidade –3.



Fonte: Autoria própria.

Nesse deslocamento, é preciso que se mova 3 unidades para a esquerda partindo do número 2. Pela Figura 39, é possível observar que a reta só permite o deslocamento até o número zero. Dessa forma, é de necessário que haja um número à esquerda do zero para determinarmos o ponto de chegada do movimento.

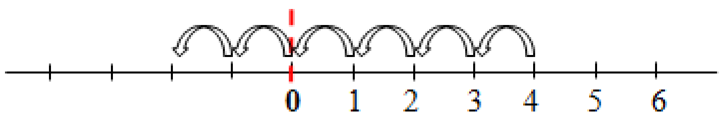
Figura 40 – Movimento partindo de 1 e tendo como quantidade –2.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 40, termos a representação do movimento partindo de 1 e tendo como quantidade –2. Deslocando-se uma casa para a esquerda, estamos no ponto zero, sendo impossível determinarmos o ponto de chegada já que não existem outros números à esquerda de zero.

Figura 41 – Movimento partindo de 4 e tendo como quantidade –6.



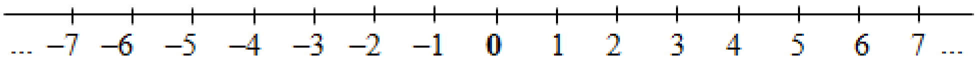
Fonte: Autoria própria.

A Figura 41, mostra o último movimento partindo de 4 e se movendo 6 casas no sentido decrescente da reta. Observa-se que só é possível deslocar quatro unidades, onde se atinge o número zero. Falta ainda se deslocar 2 unidades para a esquerda do zero para completar o movimento sugerido.

Para que seja possível qualquer movimento no sentido negativo em uma reta, é preciso expandi-la, marcando para a esquerda do zero, os números negativos. Partindo do zero, com um movimento negativo de uma unidade se alcance o número –1, com mais uma unidade negativa alcance o número –2, depois o –3, –4, –5 e assim por diante. (LIMA; MOISÉS, 1998, p.50).

A reta numérica fica representada pelo 0 (zero), número sem sinal pois não é nem positivo nem negativo, à direita do zero ficam os números positivos que podem ser escritos com ou sem o sinal (+) e, à esquerda do zero se encontram os números negativos que são escritos com o sinal (–).

Figura 42 – Expansão da reta numérica.



Fonte: Autoria própria.

ATIVIDADE: O movimento na reta expandida.

1) Tendo como base a reta numérica expandida, chamada agora de reta dos números inteiros, ou reta dos inteiros, identifique o número de chegada do movimento que parte de:

   I) Considere o primeiro número dado como ponto de partida e o segundo indicando a quantidade do movimento;

   II) Faça os movimentos na reta através de marcas de sua preferência;

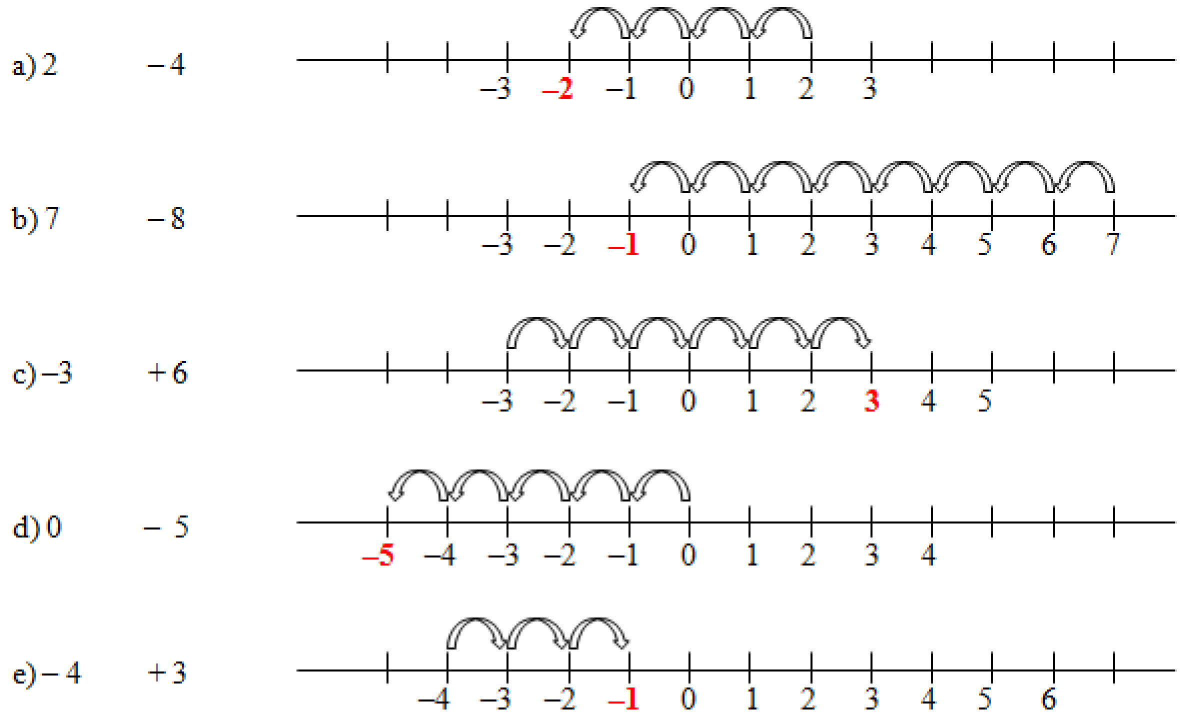
   III) Destaque, na reta, o ponto de chegada.

Figura 43 – Reta dos inteiros para resolução do exercício.

Fonte: Autoria própria.

Possíveis respostas:

Figura 44 – Possíveis respostas do exercício.



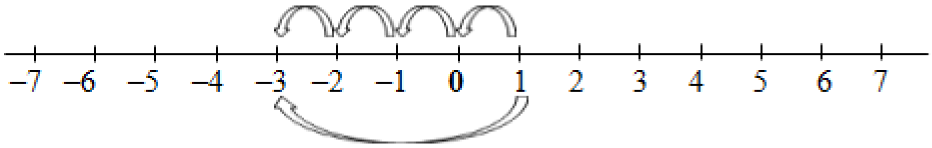
Fonte: Autoria própria.

3.2.4 Atividades na reta numérica inteira

As atividades aqui apresentadas foram baseadas nas ideias de Lima e Moisés (1998).

Conhecendo-se a reta numérica já expandida, é possível retomar a atividade que sugeria um movimento de quantidade –4 tendo como ponto de partida o número 1, observando que agora somos capazes determinar o ponto de chegada, no caso, o número –3.

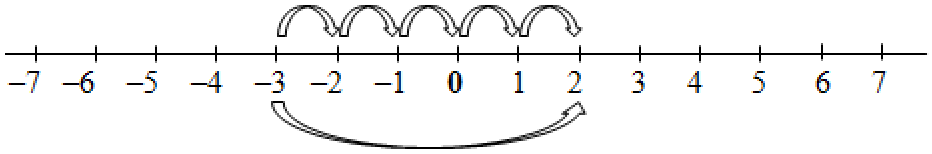
Figura 45 – Movimento de quantidade –4 partindo do número 1.



Fonte: Autoria própria.

Sendo o ponto de partida um número negativo, independente do sentido do movimento, os mesmos podem ser feitos de forma análoga aos números naturais.

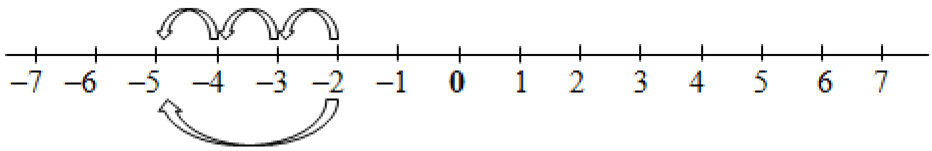
Figura 46 – Partindo de –3 e tem como quantidade +5.



Fonte: Autoria própria.

Os movimentos acontecem da mesma forma quando o ponto de partida é um número negativo e o movimento tem quantidade negativa.

Figura 47 – Movimento de quantidade –3 tendo –2 como ponto de partida.

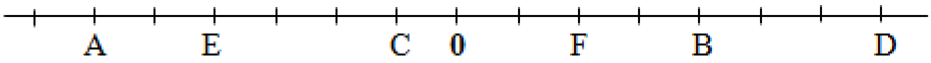


Fonte: Autoria própria.

Conhecendo-se a reta numérica expandida, algumas atividades de verificação podem ser desenvolvidas. A seguir, está listada uma sequência de exercícios para ser desenvolvida durante as aulas.

1) Dada a reta numérica, onde apenas o número zero e algumas letras são registradas, indique corretamente a que número inteiro que cada letra representa.

Figura 48 – Identificação de números inteiros na reta numérica.



Fonte: Autoria própria.

2) Indicar o antecessor e o sucessor dos números abaixo:

a) 2
b) –8
c) 89
d) –761
e) –100

3) Escrever uma sequência de:

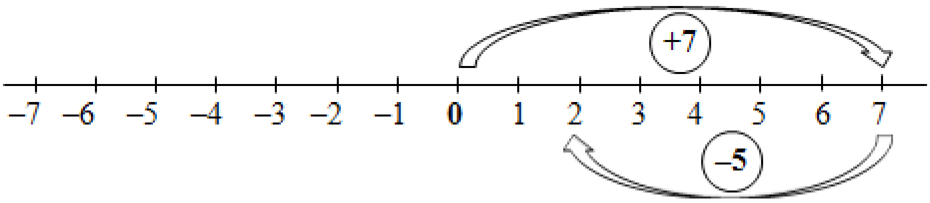
a) Cinco números inteiros consecutivos sendo um deles o –9.
b) Quatro números inteiros consecutivos sendo um deles o 0.

4) Partindo do zero, indique o número de chegada após fazer os movimentos indicados nas alternativas.

a) +7 –5
b) –2 –1 +6

Utilizando a primeira alternativa como exemplo, é preciso realizar o primeiro movimento (+7) e logo em seguida o movimento (–5), identificando o número 2, ponto de chegada.

Figura 49 – Movimentos sucessivos na reta numérica: +7 –5.



Fonte: Autoria própria.

Ao realizar os exercícios de movimentos sucessivos na reta, é esperado que esses movimentos sejam feitos mentalmente indicando apenas o número de chegada.

A mesma ideia pode ser trabalhada com atividades envolvendo temperaturas e termômetros.

5) Observe o registro das temperaturas de dez dias de um mês em uma cidade do sul do Brasil e faça o que se pede:

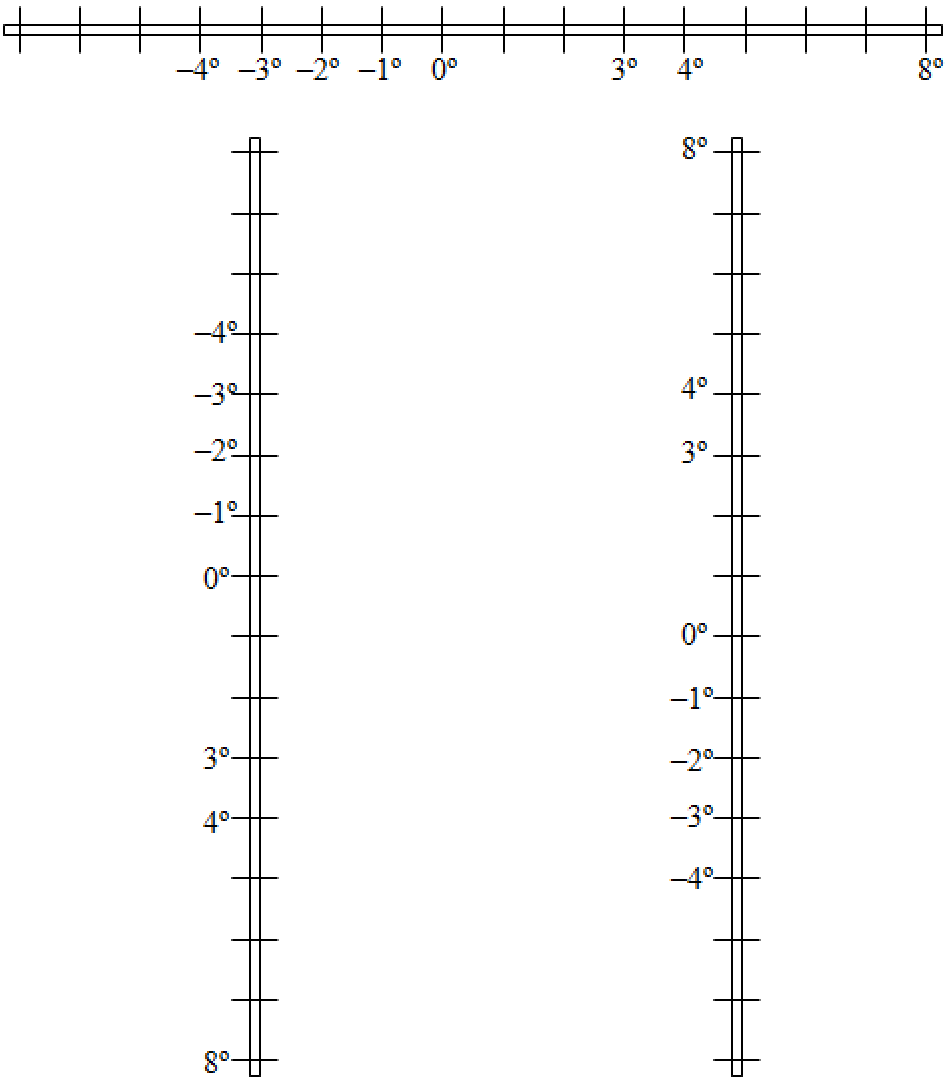
Tabela 1 – Registro de temperaturas em uma cidade no sul do Brasil.

Dia	Temperatura	Dia	Temperatura
1º	8°C acima de zero	6º	3°C abaixo de zero
2º	3°C acima de zero	7º	4°C abaixo de zero
3º	0°C	8º	2°C abaixo de zero
4º	1°C abaixo de zero	9º	3°C acima de zero
5º	2°C abaixo de zero	10º	4°C acima de zero

Fonte: LIMA E MOISÉS, 1998, p. 52.

a) Utilizando a reta numérica, desenhe um termômetro para marcar essas temperaturas registradas.

Figura 50 – Termômetro em várias posições com o registro das temperaturas.



Fonte: Autoria própria.

b) Baseado na tabela de registro e no esquema do termômetro, responda:

i) Até que dia a temperatura abaixou?

ii) Quantos graus abaixou?

iii) Qual a temperatura registrada no dia mais quente? E no dia mais frio?

iv) Qual dia fez mais frio: no 3º ou no 8º? Por quê?

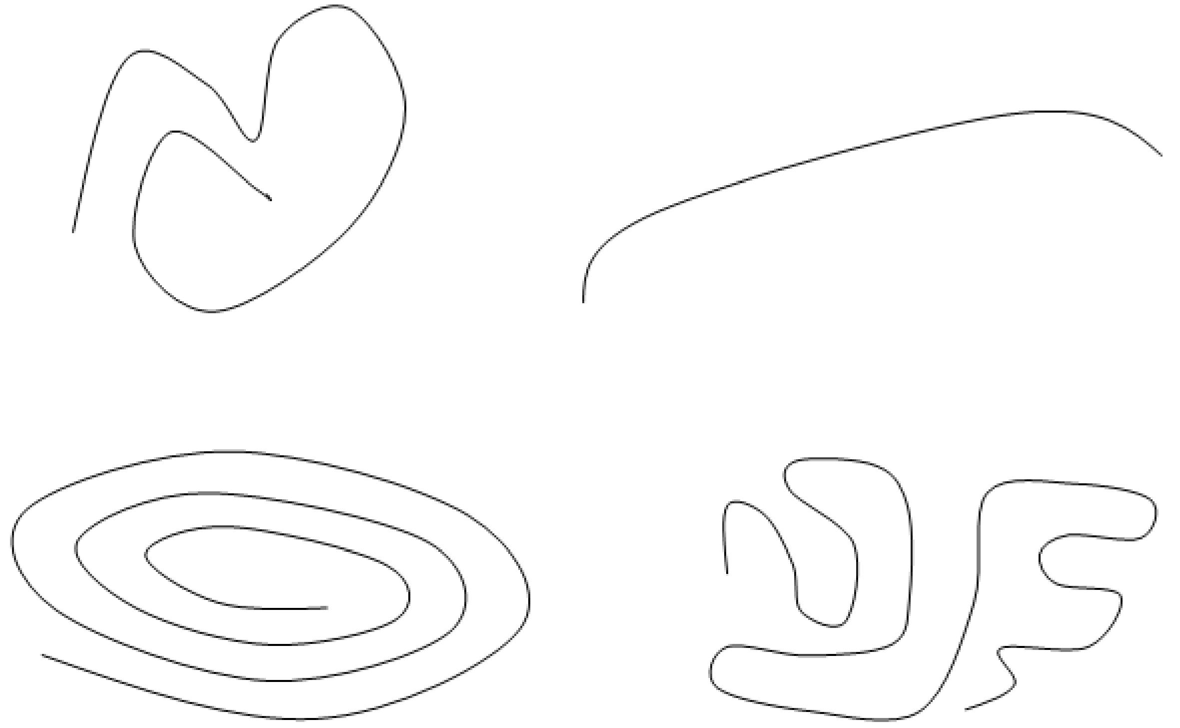
v) Em que dia a temperatura começou a subir?

vi) O que aconteceu com a temperatura do 7º ao 10º dia?

Vale salientar que o termômetro pode ser desenhado com direção vertical ou horizontal. O importante é que determinem a localização do zero e, a partir dele, indiquem as temperaturas nos lugares corretos. Assim, todas as questões podem ser respondidas utilizando os movimentos na reta numérica.

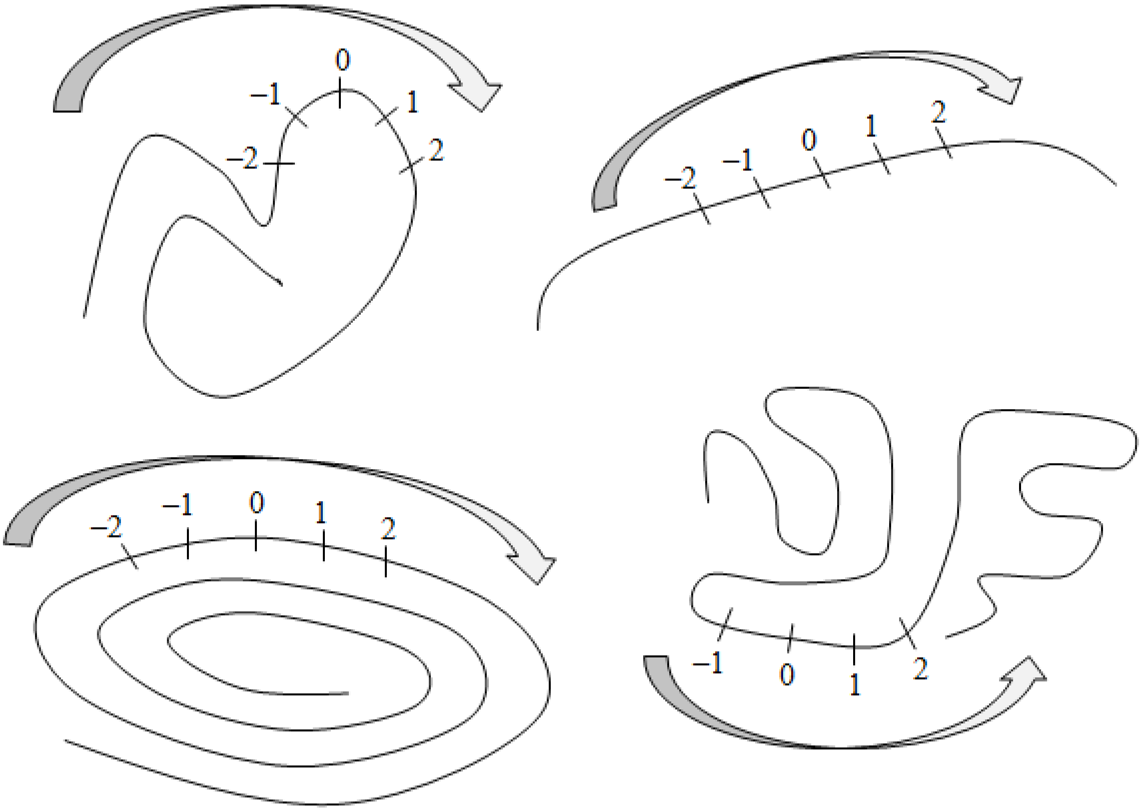
6) Oriente as linhas a seguir utilizando os números inteiros. Para isso é preciso localizar o zero, marcar a partir dele os números positivos e negativos e, indicar, com uma flecha, o sentido crescente.

Figura 51 – Linhas sugeridas no exercícios 6.



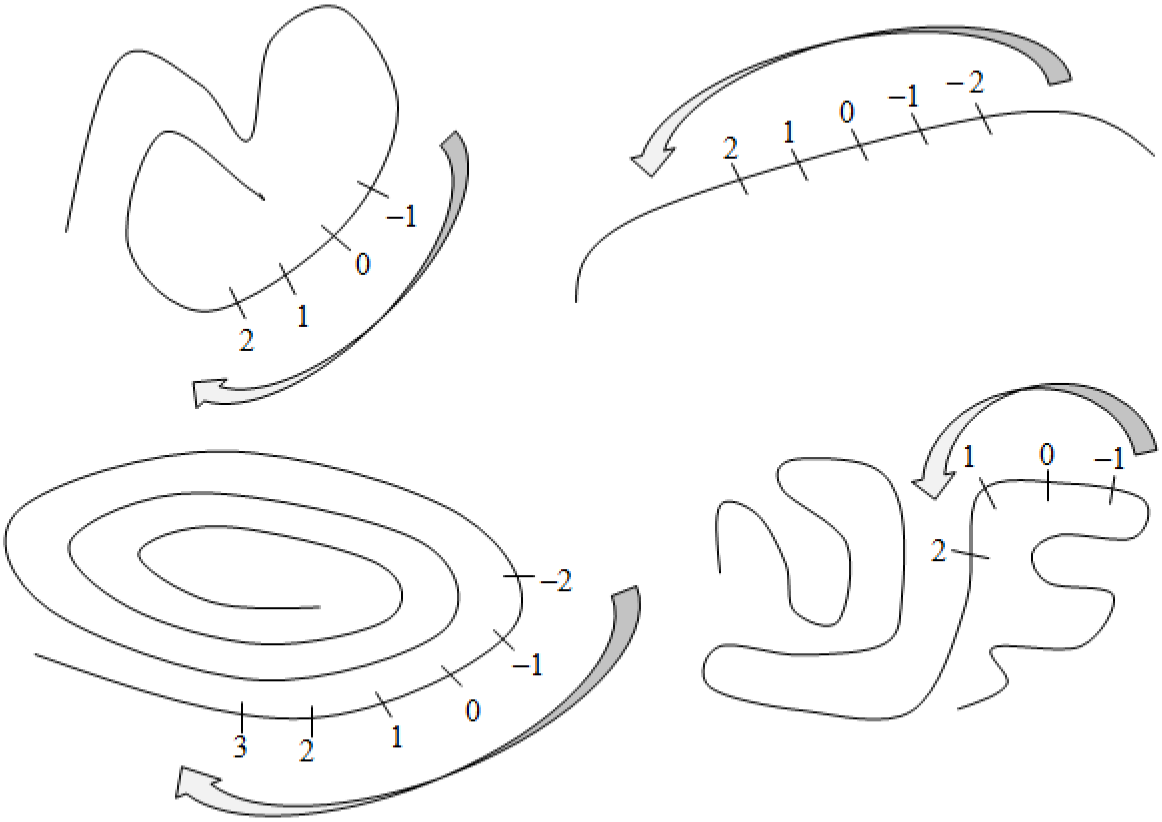
Fonte: Autoria própria.

Figura 52 – Orientações em linhas aleatórias: sentido crescente da esquerda para a direita.



Fonte: Autoria própria.

Figura 53 – Orientações em linhas aleatórias: sentido crescente da direita para a esquerda.



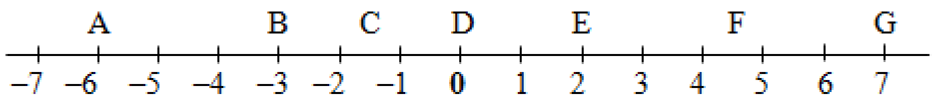
Fonte: Autoria própria.

3.2.5 Atividades de revisão do conteúdo

Após trabalhar com as atividades propostas, baseadas em Lima e Moisés (1998), descritas na seção anterior, elaboraremos atividades similares a fim de verificar se os alunos aprenderam a trabalhar na reta numérica dos números inteiros. Essas atividades estão descritas na sequência.

1) A partir de uma reta numérica desenhada a seguir, onde as letras representam os números da reta, responda as questões:
   a) Quais letras correspondem a números positivos? E naturais?
   b) Quais letras correspondem a números negativos? E inteiros?
   c) Quais letras correspondem a números inteiros que não são naturais?
   d) Quais letras correspondem a números naturais que não são inteiros?
   e) Quais as letras que correspondem a números que não são nem inteiros nem naturais?

Figura 54 – Reta numérica para responder as questões da atividade.



Fonte: Autoria própria.

2) A partir de letras que correspondem a números dados, traçar uma reta numérica e localizar nela as letras dadas pelos números A(–3), B(8), C(0), D(–7) e E(2).

3) Desenhar a reta numérica e marcar as letras indicadas abaixo:
   a) A letra A corresponde a um número negativo.
   b) A letra B corresponde a um número natural.
   c) A letra C corresponde a um número inteiro que não seja natural.
   d) D representa um número natural que não é inteiro.
   e) E corresponde a um número que não é inteiro.

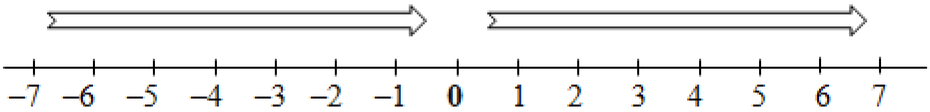
   Foi possível localizar todas as letras desejadas? Por quê?

4) Desenhe a reta dos números inteiros:
   a) Na parte positiva da reta, indique por meio de uma seta, o sentido em que os números aumentam, ou seja, o sentido crescente.

b) Na parte negativa, fazer outra seta indicando o sentido em que os números crescem (sentido crescente).

c) A partir do desenho feito, responda: qual é o sentido crescente da reta dos números inteiros?

Figura 55 – Seta indicando o sentido crescente da reta.



Fonte: Autoria própria.

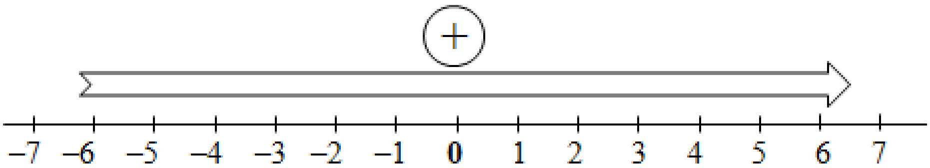
Nota-se que para retas representadas como a da Figura 55, o sentido crescente é sempre da esquerda para a direita e o inverso se trata do sentido decrescente.

5) Diga:

a) Qual é o sinal que indica o sentido crescente de um movimento? Qual o seu sentido?

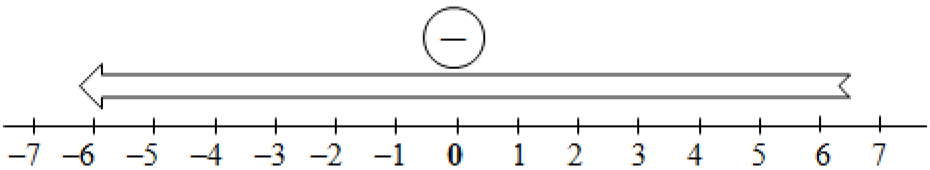
b) Qual é o sinal que indica o sentido decrescente de um movimento? Qual o seu sentido?

Figura 56 – Sinal do sentido crescente.



Fonte: Autoria própria.

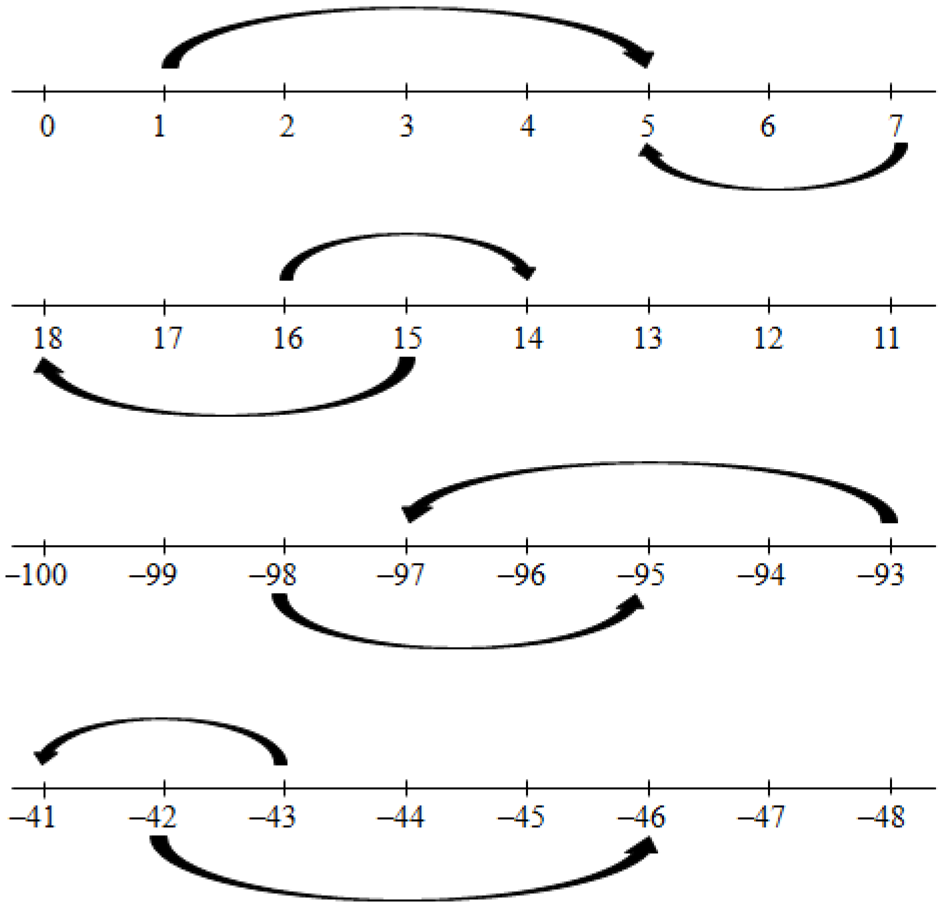
Figura 57 – Sinal do sentido decrescente.



Fonte: Autoria própria.

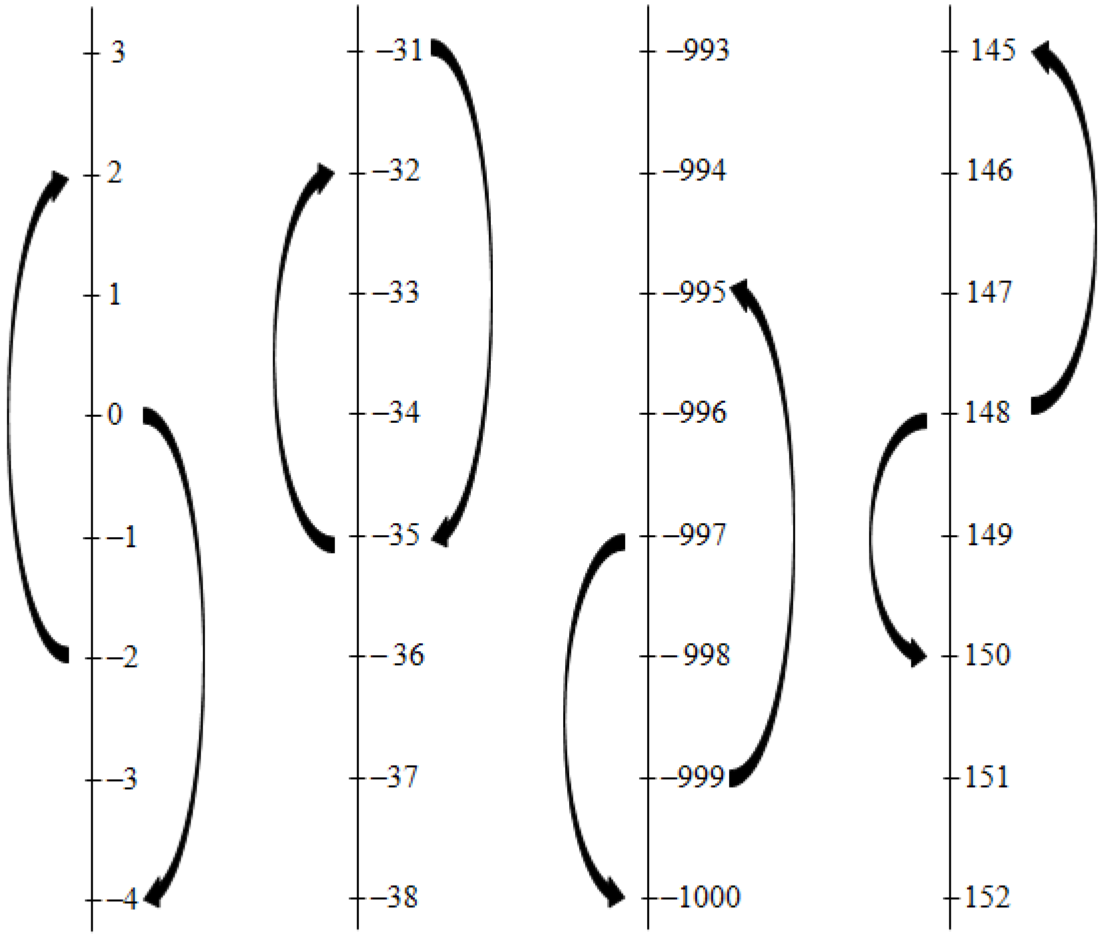
6) Em cada reta abaixo temos dois movimentos indicados por setas. Utilizando os sinais de (+) ou (–), indicar se o movimento é crescente ou decrescente.

Figura 58 – Identificação da direção do movimento com retas horizontais.



Fonte: Autoria própria.

Figura 59 – Identificação da direção do movimento com retas verticais.



Fonte: Autoria própria.

7) Desenhe na reta numérica:

   a) Um movimento decrescente que salte cinco unidades a partir do número 2.

   b) Um movimento crescente que salte 3 unidades a partir do número –8.

   c) Um movimento negativo que salte 6 unidades a partir do número –144.

   d) Um movimento (–) que salta 5 casas partindo do número –2 e, logo em seguida, um movimento (+) que salta 9 unidades.

Para finalizar o trabalho com a reta numérica dos números inteiros, com o objetivo de revisar a expansão da reta e a localização dos números na mesma, solicita-se que os alunos desenvolvam mais algumas atividades.

8) Desenhe:

   a) A parte da reta que contém apenas números positivos.

   b) A parte da reta que não contém números positivos e negativos.

c) A parte da reta que contém apenas números naturais.
d) A parte da reta que contém apenas números inteiros.

9) Responda:
a) Um número que está à direita de outro na reta é maior ou menor que este? Por quê?
b) Um número que está à esquerda de outro na reta é maior ou menor que este? Por quê?

10) Utilizando as respostas dos exercícios anteriores, escreva:
a) Cinco números consecutivos em ordem crescente onde o maior deles é 3.
b) Escrever quatro números inteiros consecutivos em ordem decrescente sendo –7 o menor deles.

11) Organize os números:
a) –2, 1, 9, –7, 0, –98, 34 em ordem crescente.
b) –10, 83, –9999, 123, –4, –1000 em ordem decrescente.

4 OPÇÕES DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO RECURSOS DE ATIVIDADES LÚDICAS

Como estudante graduada na Universidade de São Paulo – USP, São Carlos/SP, tive o privilégio de conhecer e atuar nos projetos desenvolvidos pelo Centro de Divulgação Científica e Cultural – CDCC/USP, que tem como objetivo facilitar o acesso da população aos meios e resultados de produções científicas e culturais da universidade, fazendo com que desperte, principalmente nos jovens, o interesse pela ciência e pela cultura. A fim de ampliar o acervo do CDCC, foi criada a Experimentoteca, que é um Laboratório de Ciências que incentiva o uso de material experimental nas salas de aula. A Experimentoteca conta com um acervo de 102 kits temáticos[5], distribuídos nas áreas de Matemática, Química, Física e Biologia. Do total, 20 kits são destinados a área de Matemática, sendo 12 referentes a conteúdos do Ensino Fundamental e 8 relacionados a conteúdos do Ensino Médio, como indica o Quadro 5.

Quadro 5 – Kits de Matemática da Experimentoteca

ENSINO FUNDAMENTAL	ENSINO MÉDIO
Operações com Números Inteiros	Estudo da poluição numa aula de matemática
Jogo dos Dinossauros	O jogo dos discos
Bingo das retas fracionárias	A tábua da fortuna
Representação das frações	Genética e combinatória
Jogo da trilha geométrica	Jogando e ganhando
Construindo tangram com dobraduras	Sinal de uma permutação
Um pastor esperto	Futebol e os cartolas
Medindo ângulos	Permutações, arranjos e combinações
Mico dos poliedros	
Estimando alturas	
Pontos notáveis	
Comprovação do Teorema de Pitágoras	

Fonte: Autoria própria.

[5] Informação disponível no site http://www.cdcc.sc.usp.br/experimentoteca.

Cada kit é formado por 10 exemplares do mesmo experimento, possibilitando o uso simultâneo de pelo menos 10 grupos de alunos. Neles, estão disponíveis também a "Orientação para o professor" e "Orientação para o aluno".

Consideramos importante a utilização do material lúdico em sala de aula como facilitador da aprendizagem. Apresento a seguir, sugestões de alguns materiais para serem desenvolvidos na 6ª série/7º ano do Ensino Fundamental, onde o conceito de reta dos números inteiros é introduzido.

4.1 Jogo do Dinossauro

O Jogo do Dinossauro faz parte do acervo da Experimentoteca e tem como objetivo trabalhar com o conceito de ordenação, adição dos números inteiros e a multiplicação de um número inteiro por (+1) ou (–1). O material é composto por um tabuleiro de dinossauro, 3 dados (1 vermelho, 1 branco e 1 dado de sinais), 4 peões de cores diferentes e uma carta com as regras do jogo.

Figura 60 – Kit "Jogo do Dinossauro".

Fonte: CDCC[6]

Lembrando que no kit estão disponíveis as orientações para os alunos, apresentado no Anexo A[7]. As fotos desse material foram registradas pela própria autora.

---

[6] Disponível em http://www.cdcc.sc.usp.br/experimentoteca/fundamental_matematica.html.
[7] Disponível em http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_fundamental/2f_jogo_do_dinossauro_a.pdf.

Para iniciar o jogo, é necessário que a sala seja dividida em grupos de, no máximo, quatro alunos cada, onde cada um escolhe a cor do seu peão para utilizar durante a partida. O jogo consiste em quatro rodadas.

4.1.1 Primeira Rodada

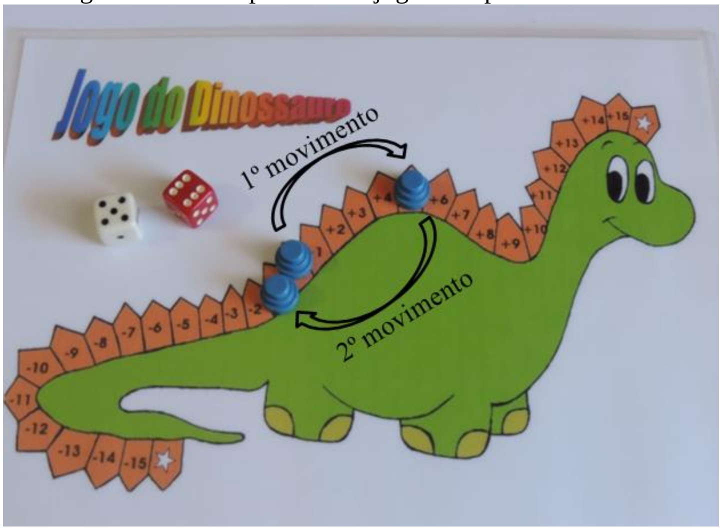
Segundo as regras do jogo, contida na carta e descritas na própria orientação do aluno, a partida se inicia na casa zero do tabuleiro, que pode ser observada quase na cauda do dinossauro, como mostra a figura abaixo:

Figura 61 – Tabuleiro do jogo.

Fonte: Autoria própria.

O dado branco representa adição e o dado vermelho representa subtração, ou seja, deve-se subir no dinossauro o número de pontos retirado no dado branco e descer o número de pontos retirado no dado vermelho. Deve-se jogar os dados (branco e vermelho) simultaneamente e se, por exemplo, no dado branco sair o número 5 e no dado vermelho sair o número 6, indica que, no primeiro movimento, o jogador deve subir 5 casas e logo em seguida, no segundo movimento, descer 6 casas, parando então na casa –1 e passando a vez para o próximo jogador. Respeitando a ordem dos jogadores, vence a partida aquele que chegar primeiro em uma das casas com a estrela.

Figura 62 – Exemplo de uma jogada da primeira rodada.



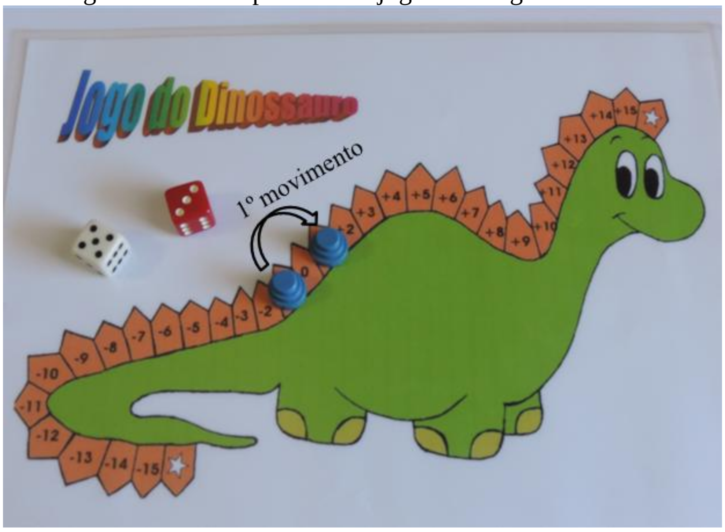
Fonte: Autoria própria.

4.1.2 Segunda Rodada

Consiste na mesma ideia da primeira rodada, porém agora, jogados os dois dados, os alunos devem calcular mentalmente e, com apenas um movimento, colocar o peão na casa correta. Caso erre, o participante continua no mesmo lugar.

Se em uma jogada, por exemplo, o peão estiver na casa –1 e sair o número 3 no dado vermelho e 5 no dado branco, o aluno deve pensar que (–3) + (+5) = (+2) e, portanto, ele deve subir duas casas, parando no +1. Essa conta pode ser realizada observando e contanto mentalmente a quantidade de casas que deveria subir e descer no tabuleiro.

Figura 63 – Exemplo de uma jogada da segunda rodada.



Fonte: Autoria própria.

4.1.3 Terceira Rodada

Partindo das instruções da primeira rodada (zero como casa inicial, dado branco como adição e dado vermelho como subtração), será utilizado agora o dado de sinais. Para cada jogada, após jogar os dados branco e vermelho e andar as casas necessárias, deve-se jogar o dado de sinais. Cada sinal tem um significado:

1º) Se cair o sinal positivo (+), o peão permanecerá na casa em que chegou;

2º) Se cair o sinal negativo (–), o peão deverá "pular" da casa que está para a mesma casa de sinal oposto.

Tomemos como exemplo um peão que está na casa –4. Ao jogar os dados, obtém-se 2 no dado branco e 5 no dado vermelho. Já tendo praticado a primeira e segunda rodada, espera-se que o aluno determine com facilidade que deverá se deslocar para a casa –7. Parado agora no –7, o mesmo jogador lança o dado de sinais. Se na face voltada para cima estiver o sinal (+), o peão continua onde está (no –7). Se cair o sinal (–), o peão deve pular para o número simétrico, ou seja, deve ir para o +7. Dessa forma o jogo prossegue e ganha quem chegar primeiro em uma das casas com a estrela.

Figura 64 – Exemplo de uma jogada da terceira rodada.

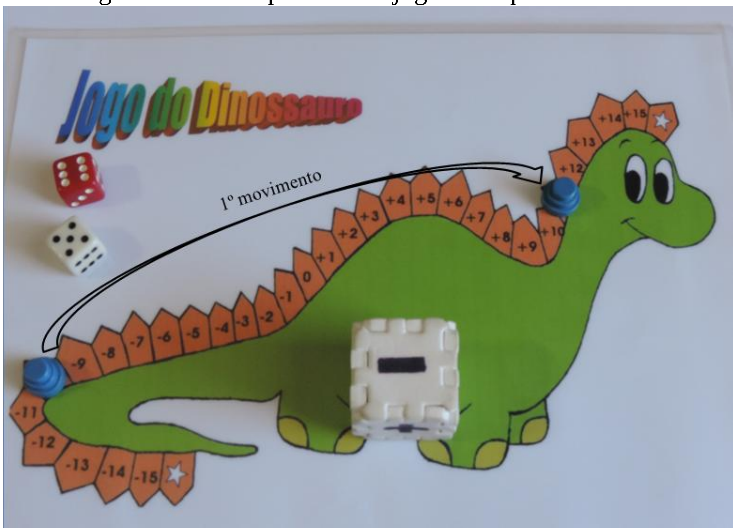
Fonte: Autoria própria.

4.1.4 Quarta Rodada

Essa última rodada é uma combinação da segunda com a terceira, ou seja, será utilizado também o dado de sinais (introduzido na terceira rodada) e os cálculos dos valores obtidos nos dados que indicam para onde o peão deve se deslocar, precisa ser feito mentalmente (introduzido na segunda rodada). Assim, com apenas um movimento, o jogador deve deslocar seu peão para a casa certa, caso contrário, permanece onde está.

Suponha que um peão esteja posicionado na casa –10. Jogando-se os dados, obtém-se 5 no dado branco e 6 no dado vermelho. Tendo jogado outras três rodadas, espera-se que o aluno já tenha em mente que deveria se deslocar uma casa para baixo, ou seja, descer para a casa –11. Porém, o que determina para onde o peão vai é o dado de sinais. Supondo que ao jogá-lo, em seguida, se obtenha o sinal de menos (–). Como descrito nas regras do jogo, o sinal de (–) faz o peão se deslocar para a casa simétrica, ou seja, para o mesmo número com sinal oposto, sendo assim, em um único movimento, o aluno deve levar seu peão do –10 para o +11. Como nas demais rodadas, vence o jogo aquele que chegar primeira na casa da estrela.

Figura 65 – Exemplo de uma jogada da quarta rodada.



Fonte: Autoria própria.

Finalizadas as quatro rodadas, espera-se que os alunos tenham tido algumas percepções, como por exemplo: o zero agora é visto como origem e não apenas como valor absoluto, obstáculo apresentado por Glaeser (1985); um número é sempre menor do que qualquer um que estiver a sua direita (por exemplo: –7 é menor que –2, pois –2 está à direita de –7). Semelhante ao tabuleiro se trabalha então a reta numérica, destacando sempre o zero como origem e enfatizando a ordenação dos números inteiros: *Quem é menor? Quem é maior?* Pelas duas últimas rodadas, é possível trabalhar com a ideia de multiplicar uma operação por (+1) ou por (–1), salientando, nesse último caso, a troca de sinal do resultado. A partir disso, é possível trabalhar também, na prática, com a subtração desses números. A segunda e a quarta rodada exige que os alunos desenvolvam técnicas de cálculo mental. Cada aluno pode pensar de uma maneira diferente, o importante é que cheguem ao resultado correto. Alguns preferem primeiro pensar no número negativo e depois no positivo e outros o contrário.

4.2 Soma e subtração nas réguas numéricas

Aos professores que não tem o privilégio de estarem próximos à Experimentoteca para o empréstimo dos kits, podem desenvolver outras atividades nas aulas. Na internet, encontra-se um grande acervo de ideias diferentes para elaboração de materiais manipuláveis. Normalmente os alunos gostam de trabalhos manuais como nos desenvolvidos nas aulas de Arte, por isso, construir com eles o material que será utilizado na aula já faz com que haja um interesse pelo que vai acontecer depois. Dentro da grande diversidade de materiais que pode ser elaborado, aqui vamos focar a construção e utilização de uma régua numérica[8], que tem como objetivo auxiliar nas operações de adição e subtração de números inteiros.

Na escola em que atuo da rede estadual paulista, por falta de verbas destinadas a compra de materiais, é preciso pensar e elaborar atividades que utilizem materiais de baixo custo, pois muitas vezes, este será comprado pelo professor. A atividade aqui apresentada foi confeccionada por mim e requer o uso de:

- ✓ Papel cartolina de duas cores diferentes
- ✓ Caneta
- ✓ Régua
- ✓ Tesoura

A cartolina pode ser substituída por materiais mais resistentes, como papel cartão ou papelão.

4.2.1 Construção da régua

Abaixo, estão descritos os passos a serem seguidos para a construção do material sugerido pela revista Nova Escola (2000) baseado na ideia de movimentos na reta numérica. O material foi elaborado e fotografado pela própria autora.

[8] Sugestão de atividade disponível na Revista Nova Escola

Passo 1 – Em uma das cartolinas corte um retângulo de 22 x 8 centímetros. Trace uma reta no centro e a gradue de –9 a 9, deixando 1 centímetro de espaço entre os números e nas pontas.

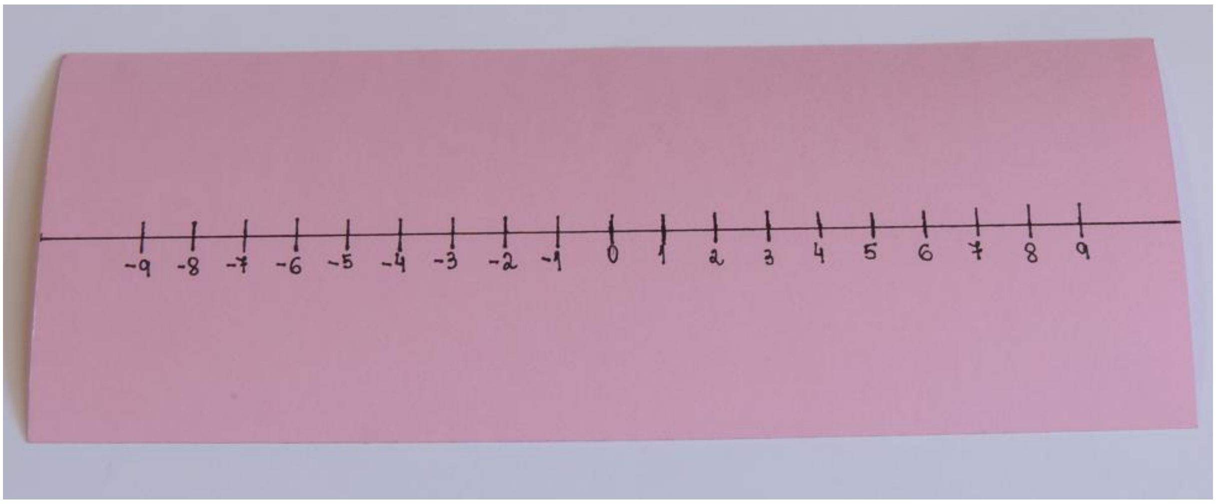


Figura 66 – Passo 1.

Passo 2 – Em outra cartolina, corte um retângulo de 22 x 6 centímetros e abra uma janela central de 20 x 2 centímetros.

Figura 67 – Passo 2.

Passo 3 – Abaixo da abertura, trace também uma escala numérica de –9 a 9.

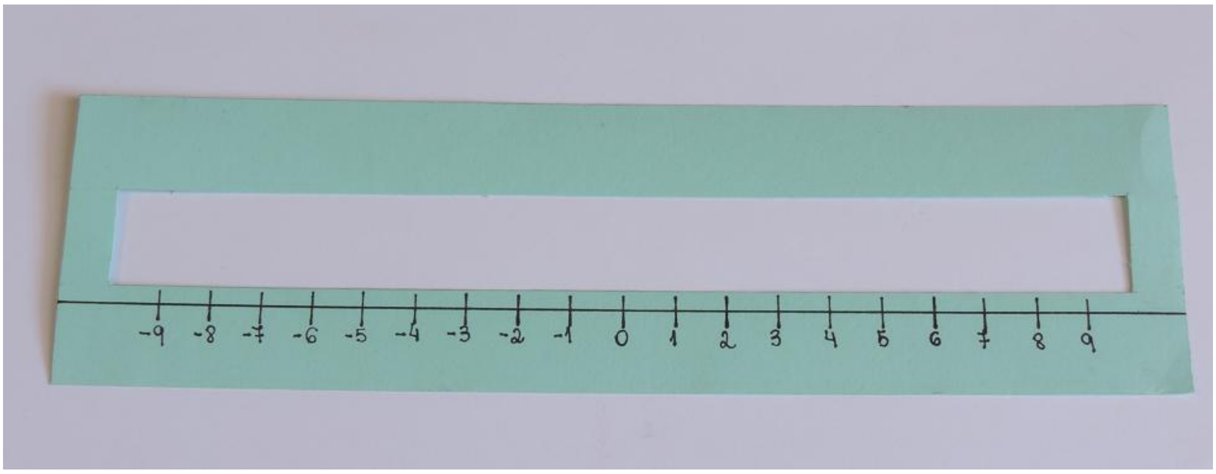


Figura 68 – Passo 3.

Passo 4 – Sobreponha as duas partes de forma que o retângulo com a janela fique por cima. Dobre as extremidades da maior sobre a menor.

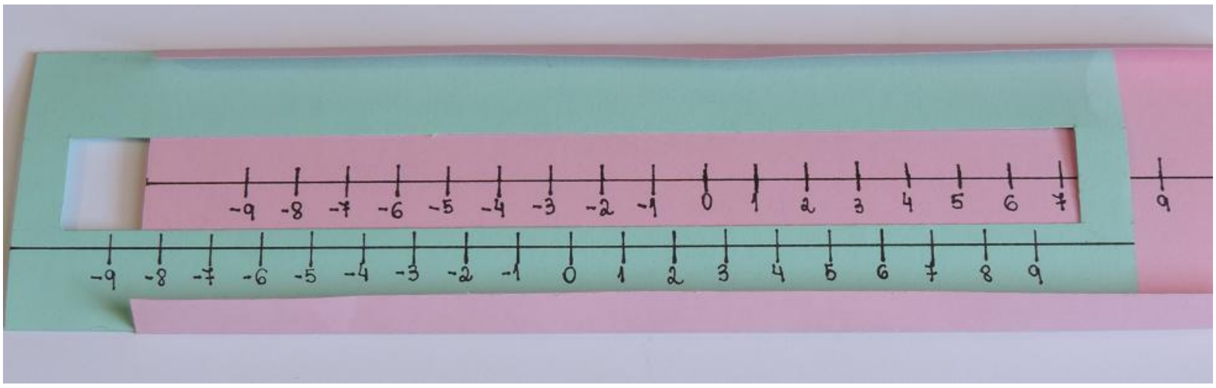


Figura 69 – Passo 4.

Passo 5 – Com a régua fechada e os números das duas retas coincidindo, o material está pronto para ser utilizado.

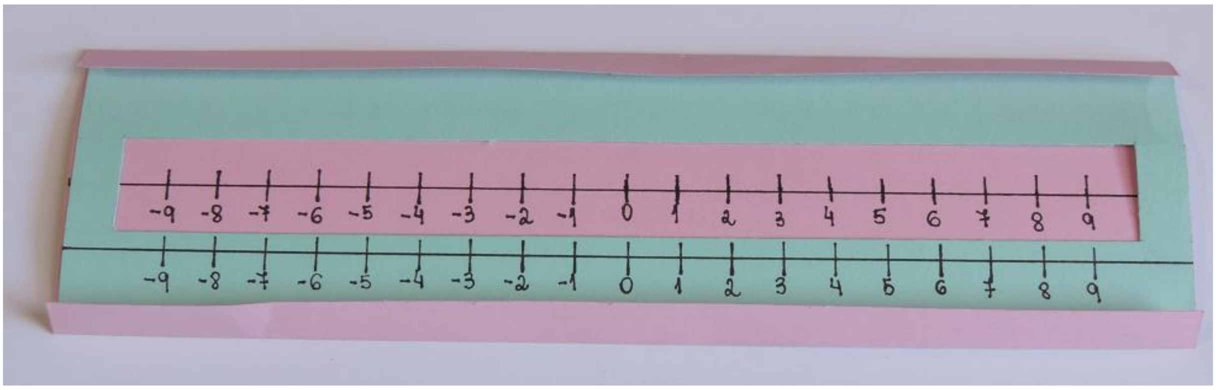


Figura 70 – Passo 5.

4.2.2 Utilizando o material

Com a régua construída é possível realizar adições e subtrações dos números inteiros. Na verdade, ela serve como um instrumento facilitador para observar os resultados desejados.

Queremos, por exemplo, encontrar o resultado de –5 + 3. O mesmo pode ser obtido seguindo os passos abaixo.

Passo 1 – Deslize a lâmina verde de cima até que o seu zero (0) encontre o –5 da lâmina rosa de baixo.

Passo 2 – Sem mover a régua, localize o +3 da lâmina verde.

Passo 3 – O resultado é o número que se encontra na lâmina de baixo, acima do +3, ou seja, –2.

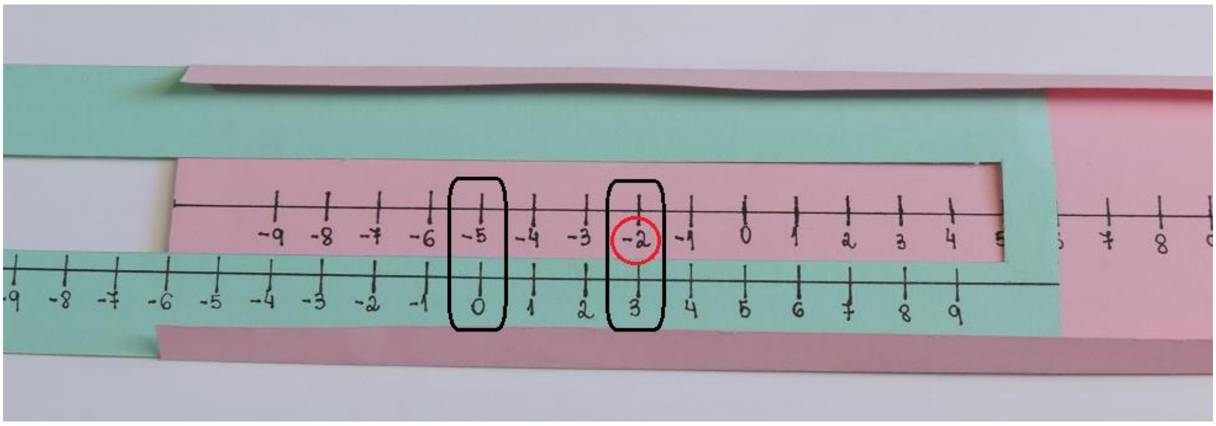


Figura 71 – Resultado de –5 + 3.

Para utilizar esse material é preciso que o aluno já tenha alguns conhecimentos sobre os números inteiros como sua localização na reta numérica e operações. É fundamental a compreensão de que um número, antecedido por um sinal positivo (+), permanece com o mesmo valor e se antecedido por um sinal negativo (–), inverte-se o valor. Se for solicitado, por exemplo, a resolução da operação (–3) – (+6), como o aluno fará isso na régua? É preciso então que eles lembrem que o sinal de (–) trocará o sinal do (+6), transformando a operação em – 3 – 6, que agora sim, eles sabem resolver utilizando esse material.

5 CONCLUSÃO

Esse trabalho foi pensado para contribuir com o ensino e a aprendizagem dos alunos, ensinar de forma diferente o conceito de números inteiros para que as dificuldades de aprendizagem dos alunos possam ser minimizadas. O foco do trabalho é o estudo dos números inteiros na reta numérica, identificando sua origem, seus sentidos e movimentos possíveis na reta.

Acreditamos que a sequência didática apresentada no trabalho traz dinamicidade ao aprendizado, pois propõe, passo a passo, a construção da reta dos números inteiros a partir da reta numérica dos naturais.

Nos livros didáticos analisados, não observamos a indicação dessas etapas e sim uma breve apresentação com a reta numérica dos inteiros já pronta, com imagens na horizontal e apenas quando tratavam de situações com termômetros, a imagem da reta era indicada na vertical.

Acreditamos que, conhecendo-se a origem da reta dos números naturais, seus elementos constitutivos e a possibilidade de realizar movimentos nos seus dois sentidos, a necessidade de expandir essa reta será melhor compreendida pelos alunos. Assim, compreendem como e porque a reta dos inteiros é formada, aspecto importante para um conteúdo que deixa de ser concreto e passa a ser abstrato, facilitando o aprendizado. Outro aspecto importante dessa sequência didática é que traz ideias que os livros didáticos não apontam, como a representação da reta numérica, não necessariamente em uma linha reta, podendo ser linhas de diferentes formas. E quando trabalhada com linhas retas, essas podem ser representadas em inúmeras posições, como horizontal, vertical ou inclinada, bastando apenas o aluno escolher, a partir da localização do número zero (a origem), o sentido crescente ou decrescente da reta, trazendo livre arbítrio aos alunos e possibilidades de respostas diversificadas.

Acredita-se que tal sequência contribuirá para diminuir as dificuldades apresentadas por Glaeser (1985), principalmente as que dizem respeito a dar sentido a quantidades negativas isoladas, ou seja, corresponder com o concreto, palpável, e unificar a reta numérica pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas.

Por fim, acreditamos que os dois materiais manipuláveis apresentados auxiliam no entendimento dos deslocamentos na reta numérica, trazendo cor, habilidades manuais, trabalho em equipe para construção do material, despertando interesse pelo aprendizado, contribuindo para uma melhor compreensão do campo dos números inteiros.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, I. R. O. **A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil, 2000.

BIANCHINI, E. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, A. J. L. **Projeto Velear: matemática.** São Paulo: Scipione, 2012.

BRASIL**. LEI Nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996**. [S.l.], 1996.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** [S.l.], 1998.

CID, E. **Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos**, Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10, 2000. Disponível em http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm. Acessado em: 11 jul 2017.

CROSBY, A. W. **A mensuração da realidade: a quantificação e a sociedade ocidental, 1250 - 1600.** Tradução: Vera Ribeiro. São Paulo: Editora UNESP. (UNESP/Cambridge), 1999.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: matemática**: ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues, Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 2008.

GLAESER, G. **Epistemologia dos números relativos.** Tradução: Lauro Tinoco. RJ: Revista GEPEM, nº 17, 1985

IFRAH, G. **Os números: A história de uma grande invenção**. Tradução: Stella M. de Freitas Senra. 4ª edição. São Paulo: Editora Globo, 1992.

LIMA, L. C.; MOISÉS, R. P. **O número inteiro: numerando movimentos contrários.** São Paulo: CEVEC-CIARTE, 1998.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. **Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica.** Revista Katálusis, Florianópolis, v. 10 n. esp., p. 37-45, 2007.

MENEGHETTI, R. C. G.; BEGA, M. F. **Sobre a utilização de materiais didáticos manipuláveis na educação básica na visão dos professores.** Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Espanha, número 45, p. 225 – 241, Março 2016.

NASCIMENTO, R**. Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos**. VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004. Recife. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. p. 1 – 6.

NACARATO, A. M. **Eu trabalho primeiro no concreto.** Revista de Educação Matemática, 9(9), 1-6, 2005.

PESCO, D. U.; ARNAUT, R. G. T. **Matemática básica.** Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

PIZZANI, L. et al. A arte da pesquisa bibliográfica na busca do conhecimento. **Revista Digital de Biblioteconomia e Ciência da Informação – RDBCI,** Campinas, SP, v. 10, n. 1, p. 53-66, jul. 2012. ISSN 1678-765X.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade: a polêmica multiplicação de números inteiros.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

Revista Nova Escola. **Sem medo dos números negativos.** Edição 133, Junho 2000. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/2717/sem-medo-dos-numeros-negativos. Acessado em: 7 nov. 2017

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2012.

SCHUBRING, G. **Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição)**. Tradução: Pedro Goergen. Zetetiké. Revista do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. vol. 6, nº 10. Campinas/SP, jul/dez, 1998. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646782/13684. Acessado em: 2 nov. 2017.

SOUSA, G. C., & OLIVEIRA, J. D. S. **O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática.** In Encontro Nacional de Educação Matemática, 10 (p. 1-11). Salvador, Bahia: SBEM, 2010.

TEIXEIRA, L. R. M. **Aprendizagem Operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades.** Revista Pro-Posições, vol. 4, nº 1[10], UNICAMP. Março, 1993.

ANEXO A

CDCC - USP
EXPERIMENTOTECA

MATEMÁTICA

2 NÚMEROS INTEIROS

Jogo do Dinossauro

NOME ________________________________
ESCOLA ______________________________
EQUIPE ____________ SÉRIE ____________
PERÍODO ___________ DATA ____________

REGRAS DO JOGO

1ª rodada – Para a primeira rodada, devemos obedecer às seguintes regras:

- O início da partida se dá na casa zero (0) do tabuleiro do dinossauro.
- O dado branco representa a operação de adição e indica quantas casas o peão deverá subir no dinossauro.
- O dado vermelho representa a operação de subtração e indica quantas casas o peão deverá descer no dinossauro.

O vencedor será quem chegar primeiro em uma das casas marcada com uma estrela.

2ª rodada – Terminada a primeira rodada, o grupo dará início à segunda etapa. Agora, a regra é um pouco mais elaborada: Os peões deverão ser posicionados na faixa zero (0) para o início do jogo. Os dados serão jogados e agora os jogadores terão que dizer para qual casa do dinossauro irão, sem mexer no peão. Se errar, o participante continua no mesmo lugar.

3ª rodada - Os jogadores deverão seguir as instruções da 1ª rodada, sendo que após ser efetuada cada jogada, haverá a utilização do novo dado. Este dado poderá alterar a posição do peão no dinossauro, dependendo do sinal + (mais) ou – (menos) que será determinado no lançamento do mesmo.

Para exemplificar as novas regras, observe a seguinte situação:

Considere que um dos peões esteja na casa (+2) do tabuleiro e seja (–3) o resultado da jogada dos dados branco e vermelho. O jogador deverá então descer três casas, indo para a casa (–1). O mesmo jogador deverá lançar o dado dos sinais; podem ocorrer dois resultados:

a) Caso saia o sinal de + (mais) na face do dado, o peão permanecerá na mesma casa do tabuleiro em que se encontra, ou seja, o sinal de + (mais) não interferirá na posição do mesmo.
b) Caso saia o sinal de – (menos), o peão deverá se deslocar da casa (–1) em que se encontra para a casa (+1) do tabuleiro (troca de sinal). Neste caso, o sinal de – (menos) altera a posição do peão levando-o para a casa simétrica com relação a 0 (zero).
O jogo deve prosseguir e vence quem chegar primeiro em uma das casas com a estrela.

4ª rodada - O jogo deverá obedecer às mesmas regras estabelecidas na 2ª rodada, utilizando o dado dos sinais a cada jogada.

Agora é com você jogador raciocínio e boa sorte!!!