Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: um estudo com alunos do 4º Ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânnica do IFPI Campus Floriano

André Luiz Ferreira Melo

Teresina - 2013

André Luiz Ferreira Melo

Dissertação de Mestrado:

A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: um estudo com alunos do 4º Ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânnica do IFPI Campus Floriano

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora:
Profª. Drª. Liane Mendes Feitosa Soares

Teresina - 2013

MELO, A. L. F.

2013 A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: um estudo com alunos do 4º Ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânnica do IFPI Campus Floriano.

André Luiz Ferreira Melo – Teresina: 2013

Orientadora: Profª. Drª. Liane Mendes Feitosa Soares.

1. Matemática

CDD 516.36

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado o dom da vida e a capacidade de ajudar minha gente por meio da educação e dos números

Agradeço à meus pais, Maria de Lourdes Ferreira e Francisco Melo Teixeira, e minha família, em especial à minha Madrinha Sandra Rejane, por serem minha fortaleza, sem eles nada disso teria sentido bem como nenhuma das minhas vitórias teriam acontecido.

Agradeço à minha namorada e futura dona da minha família, Ana Valéria, por seu amor, carinho e compreensão.

Agradeço aos meus amigos de infância Rômulo, Leandro, Eduardo, Tiago, André, Anselmo, Ramásio, Diogo, Idelgardy, aos meus amigos de curso em especial Valdemi, Wandersom, Rogério, Luiz Carlos, Francildo, Jeovan, Creyton, em especial aos meus amigos do EJC, que me trouxeram de novo aos braços do Senhor. Agradeço em particular ao meu grande amigo Claudio de Sousa Galvão, que foi mais do que um parceiro de caminhada, foi um ícone de inspiração tanto pela matemática que domina como pela determinação que possui.

Agradeço aos meus mestres, desde os da Escola Pequeno Príncipe até os da Graduação no IFPI, em especial ao professor Odimógenes pela sua importância na minha formação e à professora Socorro Carvalho.

Agradeço de modo especial à dois grandes amigos, comparados à irmãos, Marcelo Carneiro e Gildon César, por estarem do meu lado sempre, nas alegrias e nas tristezas não me abandonado nunca e sempre servindo de porto seguro.

Agradeço à CAPES e ao IMPA por acreditarem na formação de professores através do PROFMAT.

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo. ".

Nelson Mandela

Resumo

É inegável a importância da Matemática para a vida moderna, pois está é uma criação humana que culmina em um misto de ciência, ferramenta e mecanismo de transformação social. Nessa perspectiva o seu ensino deve ser objeto de estudo da ciência, tomando como base a necessidade de se construir, reconstruir e perpetuar os conhecimentos produzidos por ela, que tem como principal função, enquanto mecanismo de transformação social, capacitar as pessoas para resolverem problemas, usando como recursos seus conhecimentos adquiridos [8]. Nesse sentido, este trabalho delimitou o ensino do Cálculo Diferencial na Educação Básica como objeto de estudo, tendo por base sua importância e aplicabilidade tanto no conhecimento matemático quanto nas ciências naturais [2]. Pretende-se mostrar neste trabalho, através de um estudo de caso com alunos do 4º Ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânica do Instituto Federal do Piauí- IFPI, Campus Floriano, como é possível lograr êxito no ensino de tópicos de matemática, relacionados à Otimização e Geometria, e sobretudo à tópicos de física arrolados a Mecânica e em particular à Cinemática e ao Movimento Harmônico Simples, tendo como alicerce os conhecimentos oriundos do Cálculo Diferencial, de forma prática e dinâmica. Defendendo a integração deste tópico de matemática no Currículo do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino de Matemática, Cálculo Diferencial, Matemática aplicada à Física.

Abstract

There is no denying the importance of mathematics for modern life, because this is a human creation that culminates in a mix of science, mechanism and tool for social transformation. From this perspective their teaching should be studied science, based on the need to build, rebuild and perpetuate the knowledge produced by it, whose main function as a mechanism for social change, empowering people to solve problems, using their acquired knowledge and resources [8] . In this sense, this work defined the teaching of Calculus in Basic Education as an object of study, based on their importance and applicability both as mathematical knowledge in the natural sciences [2]. It is intended to show in this paper, through a case study with students of 4th year high school Integrated Technician Electromechanical Federal Institute of Piaui, IFPI, Campus Floriano, as you can achieve success in the teaching of topics in mathematics related to Optimization and Geometry, and on all the topics listed mechanics and physics in particular the kinematics and Simple Harmonic Motion, with the knowledge from the foundation of differential calculus, a practical and dynamic. Defending the integration of this topic in mathematics at the High School Curriculum.

Keywords: Teaching of Mathematics, Calculus, Physics, Applied Mathematics.

Sumário

Introdução

É de conhecimento na comunidade científica que grandes mudanças ocorreram no mundo, principalmente a partir da última década do século passado, mudanças políticas, econômicas, sociais e tecnológicas que geraram a necessidade de se pensar a vida do homem moderno, sobre tudo o que diz respeito à sua educação. Outro movimento de modernização da educação surgiu na década de 80 e com ele a necessidade de se reformular os currículos da educação básica, em especial o de Matemática. Dentre as temáticas surgiram modelagem, informática educativa, resolução de problemas e, em particular, ressurgiu uma antiga discussão sobre o Cálculo na Educação Básica, que é o objeto de estudo desse trabalho.
Conforme [11], ao se olhar para o programa de matemática a ser trabalhado nos Ensinos Fundamental e Médio, percebe-se de forma imediata a presença de alguns elementos e resultados do Cálculo Diferencial.
Segundo [7], O estudo do Calculo Diferencial é hoje considerado um dos mais importantes para a formação básica, dada a sua importância e aplicabilidade nas mais diversas áreas de conhecimento. Porém, em termos de Ensino médio pouco se valoriza esse conteúdo da Matemática, ao passo que alguns pesquisadores em ensino da Matemática têm levantado a questão do ensino do Cálculo no Ensino médio, dada a sua importância para as ciências e tecnologias modernas. É importante salientar também que o Cálculo deve retornar a ser trabalhado no Ensino médio não tão somente para reparar um erro do passado quando os reformistas do ensino da Matemática na tentativa de modernizá-la criticavam o que era ensinado nas escolas e ironicamente descartaram o Cálculo, cujas ideias surgiram antes do ano de 1700, e que era o que de mais moderno começava a surgir na Matemática.
É notório também entender que conforme [8] a Matemática é considerada uma importante ferramenta para o Ensino de Física uma vez que proporciona a elaboração de modelos que resultam da interpretação dos problemas que expressam situações envolvendo fenômenos físicos. Logo, fica evidente surgir uma conexão entre matemática e física por conta princi-

palmente das dificuldades matemáticas que os alunos enfrentarem, certamente, poderem interferir na aprendizagem em Física, em virtude de não conseguirem desenvolver os modelos matemáticos necessários para resolver os problemas de Física.

Conforme [2], o Cálculo é moderno porque traz ideias novas que tem grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Além disso, O Cálculo, desde que apresentado convenientemente, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante pelas ideias novas que traz e pelo poder e alcance de seus métodos, haja vista as interessantes aplicações da derivada, por exemplo, a problemas de máximos e mínimos, da função exponencial a problemas de crescimento de populações, decaimento radioativo e outros mais.

Em fim, entende-se que descartar o Cálculo no ensino é grave, pois deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Tendo em vista os fatos supracitados, esse trabalho justifica-se por investigar a importância do Cálculo no ensino de Matemática na Educação Básica, analisando o conhecimento prévio dos alunos acerca da temática, apresentando algumas de suas aplicações tanto em matemática como em física e averiguando o conhecimento adiquirido por eles após a exposição dos conceito do Cáluclo.

Os resultados desta pesquisa aprensentam o Cálculo como uma grande ferramenta matemática ratificando o seu ensino nas escolas de nível médio baseado na sua importância para a educação moderna, muito por conta de sua imemsa aplicabilidade.

O trabalho foi dividido em 5(cinco) capítulos, no primeiro foram apresentados tópicos sobre Cálculo Diferencial relacionados à limite, derivada, regras de derivação e valores de máximo e mínimo. O segundo capítulo discorre sobre a aplicação do Cálculo na Física, em especial na Cinemática e Movimento Harmônico Simples. No terceiro capítulo foi descrita a metodologia da pesquisa, no quarto capítulo foram apresentados os resultados e por fim, no quinto capítulo, foi feita a conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Falando sobre Cálculo Diferencial

O Cálculo é uma das grandes ferramentas matemática da História da Humanidade, seus tópicos foram desenvolvidos desde Arquimedes e culminaram com os Estudos de Newton e Leibniz, que o dividiram em Cáculo Diferencial e Integral. Neste Capítulo serão descritos as principais abordagens do Cálculo Diferencial de Funções de uma Variável Real.

1.1 Tópicos sobre Limite

O desenvolvimento teórico de grande parte do Cálculo foi feito utilizando a noção de limite, o conceito de limite é uma das ideias que distinguem o Cálculo da Álgebra e da Geometria. Por exemplo, as definições de derivada e de integral definida, independente de seu significado geométrico ou físico, são estabelecidas usando limites.

Inicialmente será apresentada a ideia intuitiva de limite, estudando o comportamento de uma função $y = f(x)$ nas proximidades de um ponto que não necessariamente pertence ao seu domínio.

A grosso modo tomando uma função $f(x)$, diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ quando os valores de $f(x)$ estão arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto se queira), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados) mas não igual a a. e lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L.

Para melhor endendimento, será apresentado um exemplo.[16]

Exemplo: Dada a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Através do uso de uma tabela percebe-se que, embora $f(1)\nexists, \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
0,5	1,5
0,75	1,75
0,875	1,875
0,9375	1,9375
0,9685	1,9685

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
1,5	2,5
1,25	2,25
1,125	2,125
1,0625	2,0625
1,03125	2,03125

$\square$

O estudo de Limites laterais se faz necessário, haja vista a interpretação das imagens de uma função quando os elementos do domínio dela se aproxima de um número real a tanto pela esquerda como pela direita.

Definição 1. *Dada uma função f, diferenciável, diz-se que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ quando os valores de $f(x)$ estão arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto se queira), tornando x suficientemente próximo de a (pela esquerda). e lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a a pela esquerda, é igual a L.*

Definição 2. *Dada uma função f, diferenciável, diz-se que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ quando os valores de $f(x)$ estão arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto se queira), tornando x suficientemente próximo de a (pela direita). e lê-se: o limite de $f(x)$, quando x tende a a pela direita, é igual a L.*

De posse das definições supracitadas, tem-se que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.
No intuito de internalizar os conceitos de limites, será apresentado um exemplo, onde os limites laterais existem e são diferentes, pois o exemplo supracitado da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ é um caso onde os limites laterais são iguais.

Problema 1. *Dada a função f, calcule limite de f(x) quando x tende a 2.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{Se} \quad x < 2 \\ x, & \text{Se} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$$

Com o auxílio das tabelas percebe-se que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$ e que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$, logo o $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \nexists$.

x	$f(x) = x^2$
1,5	2,25
1,75	3,0625
1,875	3,515
1,9375	3,754
1,9685	3,875

x	$f(x) = x$
2,5	2,5
2,25	2,25
2,125	2,125
2,0625	2,0625
2,03125	2,03125

□

No estudo de limite é notória a importância da definição precisa de limite. Neste trabalho ela será usada na demonstração do Teorema do Confronto.

Definição 3. *[4]: Seja f uma função diferenciável definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então diz-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se $\forall \varepsilon > 0$ existe um correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon \to |x - a| < \delta$.*

No estudo de Cálculo, um importante teorema a ser utilizado é o Teorema do Sanduíche ou Teorema do Confronto, pois em alguns exemplos e aplicações este será de grande aplicabilidade.

Teorema 1. *(Teorema do Confronto)[16]: Sejam f,g,h funções de uma variável, contínuas e diferenciáveis em um intervalo $[a, b]$, onde $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.*

Demonstração: Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$ então $\forall \varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon \to |x - a| < \delta$ e $|h(x) - L| < \varepsilon \to |x - a| < \delta$, ou seja,

$$\begin{aligned} |f(x) - L| < \varepsilon \ &\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < L + f(x) - L < L + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} |h(x) - L| < \varepsilon \ &\Leftrightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < L + b(x) - L < L + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \end{aligned}$$

como $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, tem-se que,

$$L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

com isso,

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad &\Leftrightarrow L - \varepsilon - L < g(x) - L < L + \varepsilon - L \\ &\Leftrightarrow \varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

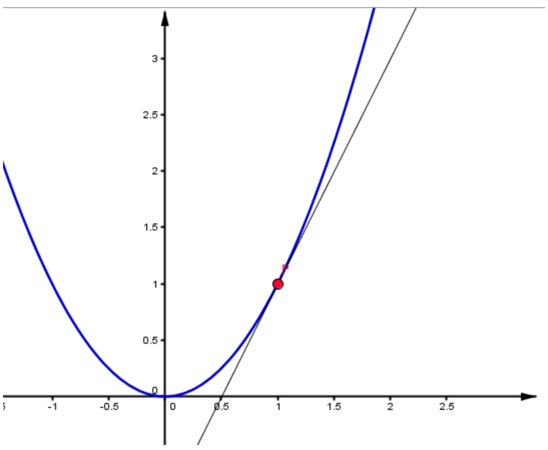
Assim $|g(x) - L| < \varepsilon \rightarrow |x - a| < \delta$, logo $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

$\square$

1.2 Tópicos sobre Derivada e Regras de Diferenciação

Nesta sessão será estabelecida a noção de derivada de uma função. É importante salientar que a derivada envolve a variação ou a mudança no comportamento de vários fenômenos, ao passo que o conceito de derivada está intimamente ligado à visão geométrica de uma reta tangente à uma curva representada por uma função. Serão também apresentadas propriedades de derivadas e algumas regras de diferenciação como derivadas de funções polinomiais e trigonométricas.

Como motivação para esta temática segue um problema: Qual é a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto (1,1)?

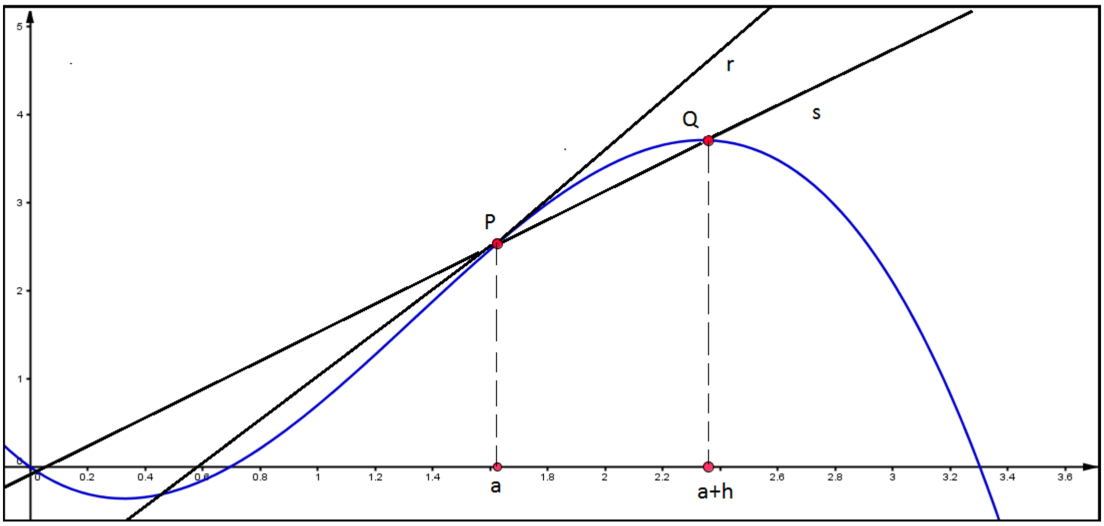


Dada uma função f, diferenciável, a derivada de uma função f em um ponto do domínio a, denotada por $f'(a)$ é dada por:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

, se o limite existir.

Uma boa interpretação da derivada é a geométrica, sendo ela: Dada uma função f de uma variável real, a reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem como inclinação $f'(a)$, a derivada de f em a.



Tomando por base a figura percebe-se que dada a curva f onde $y = f(x)$ tanto o ponto $P = (a, f(a))$, quanto o ponto $Q = (a + h, f(a + h))$ pertencem à curva, e que a reta s que passa pelos pontos P e Q é uma reta secante à curva f, entretanto, a medida que o ponto Q se aproxima de P, ou seja $h \to 0$, a reta s se aproxima de ser uma reta tangente r à curva f. Tomando por base o fato de a inclinação de s ser dada por m_s tem-se que a equação de s é dada por $y - f(a) = m_s.(x - a)$, onde,

$$m_s = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Assim para que r seja tangente à f, basta que sua inclinação seja dada por m_r, tal que,

$$m_r = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Portanto, a equação de r é dada por:

$$y - f(a) = f'(a).(x - a)$$

Voltanto ao problema proposto no início desta sessão que é o de encontrar a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$, este pode ser atacado da seguinte maneira:

A reta a ser encontrada tem taxa de variação m dada por:

$$m = f'(1)$$

, onde

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(1+h)^2-1^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{(1^2+2h+h^2-1^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{2h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{h(2+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2+h) \\ &= 2 \end{aligned}$$

.

□

Assim a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1,1)$ tem equação $y - f(1) = f'(1).(x-1)$, ou seja, r: $y - 1 = 2.(x-1)$.

□

Até então, estava se considerando a derivada apenas como um número real, obtido a partir da ideia de limite, agora se faz necessário entender a derivada como uma função de uma variável real, obtida a partir de outra função.

Definição 4. *Dada uma função* $f(x)$ *contínua em um intervalo*$[a,b]$*, existe uma função* $f'(x)$ *denomida função derivada de* $f(x)$*, obtida da seguinte maneira:*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Nessa perspectiva, se faz necessário destacar algumas regras de diferenciação, como são chamados alguns teoremas decorrentes da definição de limite de função. A seguir serão apresentadas derivadas de funções polinomiais e trigonométricas.

Teorema 2. *(Regra da Potência): Dado* $n \in Z$*, e dada uma função* $f : R \longrightarrow R$ *tal que* $f(x) = x^n$ *tem-se que:*

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

Demonstração:

Antes de mais nada, temos que,

$$x^n - a^n = (n-a).(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

Ao passo que, pela definição de derivada notamos que:

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Assim pode-se observar que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \tfrac{x^n-a^n}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \tfrac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= (a^{n-1} + a^{n-2}a + \ldots + aa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= na^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Dois conceitos importantes, oriundos do Cálculo Diferencial, são os de derivadas da soma e da subtração de duas funções, estes serão apresentados a seguir.

Teorema 3. *Dada a função* $f(x) = g(x) + j(x)$, *onde* $g(x)$ *e* $j(x)$ *são diferenciáveis, tem-se que* $f'(x) = g'(x) + j'(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)+j(x+h)-[g(x)+j(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)+j(x+h)-g(x)-j(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)+j(x+h)-j(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \lim_{h\to 0} \frac{j(x+h)-j(x)}{h} \\ &= g'(x) + j'(x) \end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Dada a função* $f(x) = g(x) - j(x)$, *onde* $g(x)$ *e* $j(x)$ *são diferenciáveis, tem-se que* $f'(x) = g'(x) - j'(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-j(x+h)-[g(x)-j(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-j(x+h)-g(x)+j(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)-[j(x+h)-j(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \left[-\lim_{h\to 0} \frac{j(x+h)-j(x)}{h}\right] \\
&= g'(x)-j'(x)
\end{aligned}$$

□

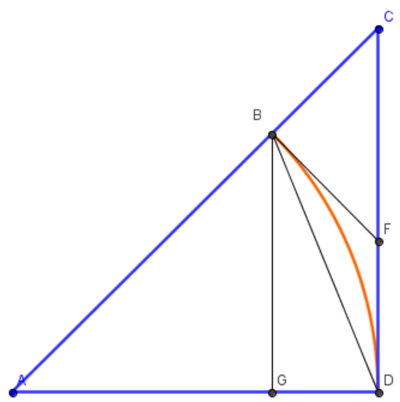
Dentro dos estudos de derivada se faz importante compreender as Derivadas de Funções trigonométricas, inicialmete a derivada da função seno e da função cosseno, ao passo que as outras derivadas de funções trigonométricas são oriundas das regras de derivação tratadas à frente. Nessa parte do trabalho serão expostas as derivadas da função seno e da função cosseno.

Teorema 5. *Dada a função diferenciável* $f(x) = \text{sen}(x)$, *tem-se que* $f'(x) = \cos(x)$.

Demonstração: Para a demosntração desse teorema será necessário fazer o uso de dois lemas, descritos à frente.

Lema 1. *Dada função* $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ *tem-se que* $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

Demonstraçao: Para a demosntração será necessário o uso de conceitos de geometria tomando por base a figura à frente:



Percebe-se que a figura supracitada é composta pelo o setor circular de centro A tendo como ângulo central x e raio $AD = 1$. Nota-se inicialmente que x está compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, que o arco $BD = x$ e que $AB = 1$. Percebe-se que $BG < BD$ assim sendo,

$$sen(x) = \frac{BG}{AB} \to sen(x) = BG < BD \to sen(x) < x \to \frac{sen(x)}{x} < 1$$

Nota-se também que, o arco BD é menor que $DF + FB$, em especial $FB < FC$, haja o visto o fato de FC ser a hipotenusa do triângulo $\triangle FBC$. Assim, tem-se que:

$$x < DF + FB < DF + FC$$

Observa-se também que $DF + FC = DC$ e que,

$$tg(x) = \frac{DC}{AD} \to tg(x) = DC$$

logo,

$$x < tg(x) \to x < \frac{sen(x)}{cos(x)} \to cos(x) < \frac{sen(x)}{x}$$

De posse das deduções geométricas supracitadas, tem-se que:

$$cos(x) < \frac{sen(x)}{x} < 1$$

pelo Teorema do Confronto, temos que se $\lim_{x\to 0} cos(x) = 1$e $\lim_{x\to 0} 1 = 1$ então,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

□

Lema 2. *Dada função* $f(x) = \frac{cos(x)-1}{x}$ *tem-se que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} = 0$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} . \frac{cos(x)+1}{cos(x)+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)^2}{x.(cos(x)+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)}{x} . \frac{sen(x)}{x(cos(x)+1)} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{cos(x)+1}
\end{aligned}$$

Do lema anterior tem-se que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x} &= -1. \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{cos(x)+1} \\
&= -1. \frac{sen(0)}{cos(0)+1} \\
&= -1. \frac{0}{1+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Continuando a demonstração da deridada da função $f(x) = sen(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x).cos(h) + sen(h).cos(x) - sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} [\frac{sen(x).cos(h) - sen(x)}{h} + \frac{cos(x).sen(h)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0} [sen(x)\frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x)\frac{sen(h)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0} [sen(x)\frac{cos(h) - 1}{h} + \lim_{h\to 0} cos(x)\frac{sen(h)}{h}] \\
&= sen(x) \lim_{h\to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h}
\end{aligned}$$

Pelos lemas supracitados tem-se que,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [sen(x)].0 + [cos(x).]1 \\
&= cos(x)
\end{aligned}$$

□

Teorema 6. *Dada a função* $f(x) = cos(x)$ *tem-se que* $f'(x) = -sen(x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h) - cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x).cos(h) - sen(h).sen(x) - cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} [\frac{cos(x).cos(h) - cods(x)}{h} - \frac{sen(x).sen(h)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0} [cos(x)\frac{cos(h) - 1}{h} - sen(x)\frac{sen(h)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0} [cos(x)\frac{cos(h) - 1}{h} - \lim_{h\to 0} sen(x)\frac{sen(h)}{h}] \\
&= cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} - sen(x) \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h}
\end{aligned}$$

Pelos lemas supracitados tem-se que,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= [cos(x)].0 - [sen(x).]1 \\
&= -sen(x)
\end{aligned}$$

□

1.3 Outras Regras de Derivação

Nesta sessão serão apresentadas três das mais importantes regras de diferenciação existentes, a Regra do Produto, a Regra do Quociente e a Regra da Cadeia, estão são as mais utilizadas na rersolução de problemas que envolvem o conhecimento de Cálculo.

Anteriormente foi mostrado que a derivada de uma soma ou diferença de duas funções era simplesmente a soma ou a diferença de suas derivadas. Porém as regras para a derivada de um produto ou de um quociente de duas funções não são tão simples. Nesta parte do trabalho serão expostas as técnicas de derivação do produto e do quociente.
Como motivação para o estudo da regra do produto, a seguir segue um problema.

Problema 2. *[16]: Uma companhia telefônica quer estimar o número de novas linhas residenciais que deverá instalar em um dado mês. No inicio de janeiro tinha* 100.000 *assinantes, cada um com* $1,2$ *linhas, em média. A companhia estimou o crescimento das assinaturas a uma taxa mensal de* 1.000*. Pesquisando os assinantes existentes, descobriu que cada um pretendia instalar uma média de* $0,01$ *linha telefônica nova até o final daquele mês. Estime o número de novas linhas no começo do mês até o final de janeiro, calculado a taxa de crescimento das linhas no começo do mês.*

Para resolver este problema se faz necessário o uso da Regra do Produto.

Teorema 7. *Regra do Produto [16]: Sejam* f *e* g *funções de uma variável diferenciáveis, tais que* $j(x) = f(x).g(x)$*, tem-se que* $j'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
j'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x+h).g(x) + f(x+h).g(x) - f(x).g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).[g(x+h) - g(x)] + g(x).[f(x+h) - f(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h).\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x).\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x).g'(x) + f'(x).g(x)
\end{aligned}$$

□

Voltando-se ao problema supracitado a solução é obtida da seguinte maneira, seja $f(x)$ o número de assinantes e $g(x)$ o número de linhas telefônicas por assinante em um instante x, onde x é dado em meses. Então o número total de linhas é dado por,

$$h(x) = f(x).g(x)$$

e o problema é resolvido encontrando-se $L'(0)$, de acordo com a regra do produto, tem-se que,

$$h'(0) = f'(0).g(0) + f(0).g'(0)$$

Assim tem-se que $f(0) = 100.000$, $g(0) = 1,2$. Conforme o problema observa-se também que $s'(0) = 1.000$, $n'(0) = 0,01$, consequentemente,

$$h'(0) = 100.000.0,01 + 1.000.1,2 = 2.200$$

$\square$

Teorema 8. *Regra do Quociente [4]: Sejam* f *e* g *funções de uma variável diferenciáveis, com* $g(x) \neq 0$*, tais que* $j(x) = f(x)/g(x)$ *tem-se que,*

$$j'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x).g(x)}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} j'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{g(x+\Delta x).g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{h}}{g(x+\Delta x).g(x)} \end{aligned}$$

Tomando

$$D = \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{h}$$

tem-se que:

$$j'(x) = \frac{\lim\limits_{h \to 0} D}{\lim\limits_{h \to 0} g(x+h).g(x)}$$

Nota-se que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} D &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x) - f(x).g(x) + f(x).g(x) - f(x).g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} - \frac{f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x). \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} - \lim_{h\to 0} f(x). \lim_{h\to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= f'(x).g(x) - f(x).g'(x)
\end{aligned}$$

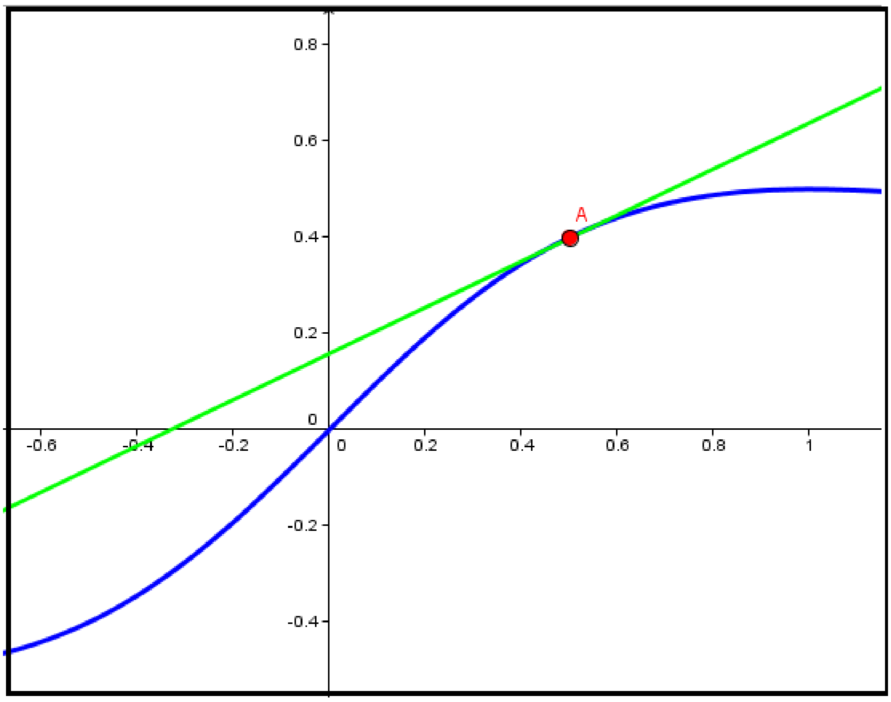
De posse dessas informações tem-se que,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} D}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x).g(x)} \\
&= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x).g(x)} \\
&= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x).g(x)}
\end{aligned}$$

$\square$

Uma das aplicações importantes da regra do quociente é o cálculo da reta tangente à serpentina.

Problema 3. *A serpentina é uma curva definida pela função* $f(x) = x/(1+x^2)$, *calcule a reta tangente à serpentina que passa pelo ponto* $(1/2, 2/5)$.



Resolução:

$$f(x) = g(x)/h(x)$$

Onde $g(x) = x$ e $h(x) = 1 + x^2$ Assim tem-se,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{1.(1+x^2) - x.(2x)}{[1+x^2]^2} \\ f'(1/2) &= \frac{1.(1+(1/2)^2) - (1/2).(1)}{[1+(1/2)^2]^2} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é dada por,

$$y - \frac{2}{5} = \frac{12}{25}.(x - \frac{1}{2})$$

□

A regra da cadeia, de acordo com [16] é uma das mais importantes técnicas de derivação do cálculo, pelo fato de fornecer um modelo de cálculo de funções, derivadas a partir de funções compostas.
Iniciar-se-á este tópico de cálculo com um problema apresentado por [4];

Problema 4. *Dada a função* $g(x) = [f(x)]^3$. *Calcule* $g'(x)$

.

Resolução: Fazendo uso da regra do produto, tem-se que,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x).f(x).f(x) + f(x).[f(x).f'(x) + f'(x).f(x)] \\ &= f'(x).f(x).f(x) + f(x).f(x).f'(x) + f(x).f'(x).f(x) \\ &= 3.f'(x).f(x).f(x) \\ &= 3.f'(x).f(x)^2 \end{aligned}$$

□

Percebe-se que neste caso, a regra do produto consegue resolver o problema, entretanto ela se apresenta limitada, por exemplo, para resolver o problema de se calcular a derivada da função $g(x) = sen[x^3]$. Para atacar problemas como este, faz necessário o conhecimento da regra da cadeia, enunciada à frente:

Teorema 9. *(Regra da Cadeia) [14]:Se* f *e* g *forem diferenciáveis e* j *for uma função composta definida por* $j(x) = f(g(x))$*, então j é diferenciável e* $j(x)$ *é dada pelo produto*

$$j'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Para a demonstração se faz necessário o uso do seguinte lema:

Lema 3. *Dada uma função* f *derivável em um ponto* x*, se e somente se, existem* $L \in \Re$ *e uma função* $r(x)$ *tal que,*

$$f(x + h) = f(x) + L.h + r(x)$$

onde $L = f'(x)$ *e* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(x)}{h} = 0$*.*

Demonstração: Como g é derivável em x, para um número h suficientemente pequeno, tem-se que,

$$g(x + h) = g(x) + g'(x).h + r(x)$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(x)}{h} = 0$
De maneira análoga, existe f'(g(x)), tal que:

$$f(g(x + h)) = f(g(x) + g'(x).h + r(x))$$

em que $k(h) = g'(x).h + r(x)$, assim,

$$f(g(x + h)) = f(g(x)) + f'(g(x)).k(h) + p(k(h)))$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} \frac{p(k(h))}{k(h)} = 0$
Nota-se, entretanto, que $k(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Daí tem-se que:

$$\begin{aligned} f(g(x + h)) &= f(g(x)) + f'(g(x)).g'(x).h + f'(g(x)).r(h) + p(k(h)) \\ &= f(g(x)) + f'(g(x)).g'(x).h + R(h) \end{aligned}$$

onde $R(h) = f'(g(x)).r(h) + p(k(h))$. Assim se for possível mostrar que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R(x)}{h} = 0$, então está demonstrado o teorema.

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \tfrac{R(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(g(x)).r(h) + p(k(h))}{h} \\ &= f'(g(x)). \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{p(k(h))}{h} \\ &= f'(g(x)). \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{p(k(h)).k(h)}{k(h).h} \\ &= f'(g(x)). \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{p(k(h))}{k(h)}. \lim_{h\to 0} \frac{k(h)}{h} \\ &= f'(g(x)).0 + 0.g'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Tomando por base o problema proposto anteriormente onde, dado $g(x) = sen[x^3]$ calcular $g'(x)$, agora pode-se atacar esse problema através da Regra da Cadeia, da seguinte maneira: $g(x) = g(u)$ e $u = h(x) = x^3$, assim $g'(u) = \cos(u)$ e $h'(x) = 3x^2$ assim,

$$g'(x) = g'(u).h'(x) = \cos(u).3x^2 = [\cos(x^3)].[3x^2] \rightarrow g'(x) = [\cos(x^3)].[3x^2]$$

A seguir será apresentado outro exemplo de problema relacionado à derivada que é resolvido através da regra da cadeia.

Problema 5. *Encontre a derivada da função* $y = (x^3 - 1)^{100}$.

Resposta: Tomando $y = f(x) = h(u)$ e $u = g(x) = x^3 - 1$, tem-se que, $g'(x) = 3x^2$, e que $h(u) = u^{100}$ e $h'(u) = 100.u^{99}$, logo

$$f'(x) = h'(u).g'(x) = 100.u^{99}.3x^2 = 100.(x^3 - 1)^{99}.3x^2 \rightarrow f'(x) = 100.(x^3 - 1)^{99}.3x^2$$

.

□

1.4 Valores Máximos e Mínimos e Otimização

Nesta seção serão apresentados os conceitos de máximo e mínimo decorrentes da intrerpretação do conceito de derivadas, estes são os mais utilizados em problemas de otimização. Esta, inicia-se com duas definições, em seguida serão apresentadas aplicações em forma de problemas.

Definição 5. *Uma função* f *tem máximo absoluto (ou máximo global) em* c *se* $f(c) \geqslant f(x)$ *para todo* x *em* D, *onde* D *é o domínio de* f. *O número* $f(c)$ *é chamado valor máximo de* f *em* D. *Analogamente, uma função* f *tem mínimo absoluto em* c *se* $f(c) \leqslant f(x)$ *para todo* x *em* D, *e o número* $f(c)$ *é denominado valor máximo de* f *em* D.

Definição 6. *Uma função* f *tem máximo local (ou máximo relativo) em* c *se* $f(c) \geqslant f(x)$ *quando* x *pertencer a um intervalo aberto contendo* c. *Analogamente,* f *tem mínimo local em* c *se* $f(c) \leqslant f(x)$ *quando* x *pertencer a um intervalo aberto contendo* c.

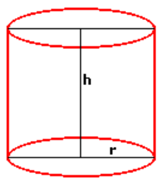
Em relação a valores de máximo e mínimo uma aplicação importante é a de cálcular o vértice da parábola, que tem como demonstração a análise da forma canônica, como segue em anexo, mas que pode ser mais simplismente compreendida atráves dos conceitos de derivada, haja visto o fato de, dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, seu ponto máxio ou mínimo é dado por $f'(x) = 0$. Como $f'(x) = 2ax + b$, tem-se que

$$\begin{aligned} 2ax + b &= 0 \\ 2ax &= -b \\ x &= \tfrac{-b}{2a} \end{aligned}$$

tomando $x_v = \frac{-b}{2a}$, tem-se que $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

□

Problema 6. *Dentre todos os cilindros circulares retos de volume* V*, qual é o que possui menor área total?*



Resolução:
Antes de mais nada é importante salientar que o volume é constante e dado por $V = \pi.r^2.h$ e que a área total A, é dada por $A = 2\pi.r(r + h)$, com isso tem-se que,

$$V = \pi.r^2.h \quad e \quad h = \tfrac{V}{\pi.r^2}$$

Assim, percebe-se que,

$$\begin{aligned} A(r) &= 2.\pi.r.(r + \frac{V}{\pi.r^2}) \\ &= 2.\pi.r.(\frac{\pi.r^3 + V}{\pi.r^2}) \\ &= 2.(\frac{\pi.r^3 + V}{r}) \\ &= 2.(\pi.r^2 + \frac{V}{r}) \end{aligned}$$

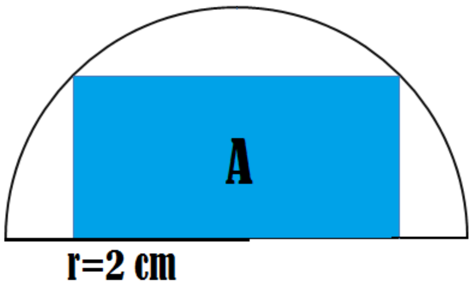
para encontrar o valor mínimo, deve-se utilizar o fato A'(r)=0;

$$\begin{aligned} A'(r) &= 2.(2.\pi.r - \frac{V}{r^2}) &= 0 \\ 2.\pi.r - \pi.h &= 0 \\ 2.\pi.r &= \pi.h \\ h &= 2r \end{aligned}$$

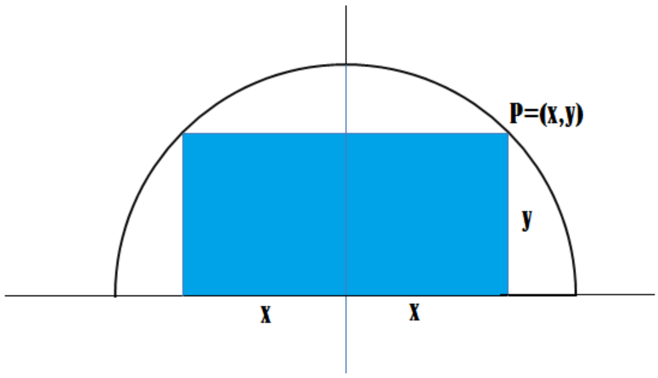
Assim o cilindro de menor área total é o cilindro equilátero.

□

Problema 7. *Qual é a área do maior retângulo inscrito en uma semicircunferência de raio 2?*



Resolução: Inicialmente, centra-se a semicircunferência no centro do plano cartesiano, conforme a figuara abaixo,



assim tem-se que a equação da curva é dada por $x^2 + y^2 = 2^2$, em particular o ponto P é dado por $P = (x, \sqrt{4 - x^2})$ e a área A é dada por $A = 2.x.y$ ou seja,

$$A(x) = 2.x.\sqrt{4 - x^2}$$

Logo, rsolver o problema resume-se a encontrar a área máxima, ou seja, Encontrar x tal que $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
A'(x) &= 2.\sqrt{4 - x^2} + 2x.\frac{-2x}{2.\sqrt{4 - x^2}} &= 0 \\
&= 2.\sqrt{4 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} &= 0 \\
2.\sqrt{4 - x^2} &= \frac{2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \\
4 - x^2 &= x^2
\end{aligned}$$

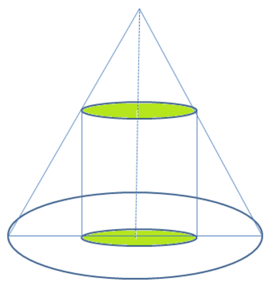
ou seja,

$$2x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{2}$$

Assim, tem-se que $y^2 = \sqrt{4-2} \rightarrow y = \sqrt{2}$, e com isso, a resposta para problema proposto é $A_{Max} = 2.x.y \rightarrow A_{Max} = 4cm^2$

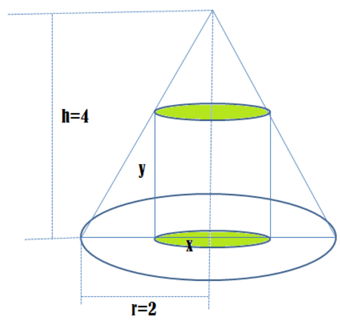
□

Problema 8. *Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura 4cm e base com raio 2cm. Encontre o volume máximo desse cilindro.*



Resolução:

Para resolver o problema, tomase o raio do cilindro como sendo x e a altura do cilindro como sendo y, assim o volume do cilindro é $V = \pi.x^2.y$, como mostra a figura.



Fazendo uso da semelhança de triângulos tem-se que,

$$\frac{x}{2-x} = \frac{4-y}{y} \rightarrow \frac{x}{2-x} = \frac{4}{y} - 1 \rightarrow \frac{1}{2-x} = \frac{4}{y} \rightarrow y = 4 - 2x$$

Assim, tem-se que $V = \pi.x^2.(4-2x) \rightarrow V = 4.\pi.x^2 - 2x^3$:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 8.\pi.x - 6x^2 &= 0 \\ &= x(8.\pi - 6x) &= 0 \\ &= (8.\pi - 6x) &= 0 \\ &= (8.\pi) &= 6x \end{aligned}$$

Com isso, $x = \frac{8\pi}{6}$ e o volume máximo é dado por $V_{max} = 4.\pi.(\frac{8\pi}{6})^2 - 2(\frac{8\pi}{6})^3$ ou seja,

$$V_{max} = \frac{64\pi}{9} + \frac{512\pi}{9} \rightarrow V_{max} = 64\pi$$

$\square$

Capítulo 2

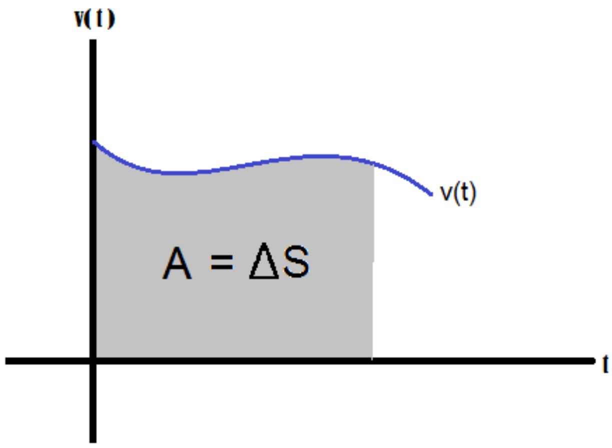
Cálculo Aplicado à Física

Nesta parte do trabalho serão expostos alguns conceitos de cinemática, sendo abordados alguns temas referentes à Movimento Retilíneo Uniforme e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, Movimento Circular e Movimento Harmônico Simples.

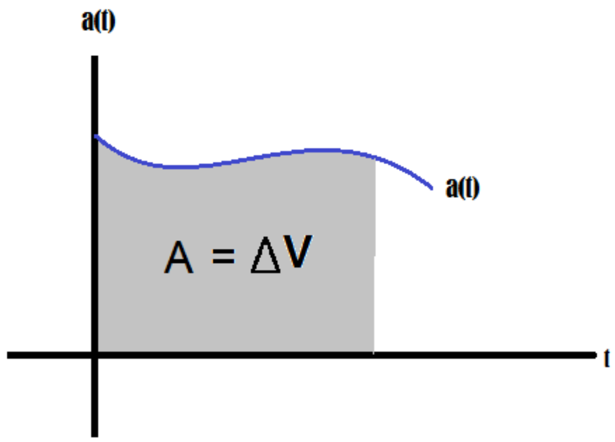
Newton usou o Cálculo para embasar suas teorias de física, sendo o primeiro a utilizar espaço, velocidade e aceleração, como sendo funções horárias do tempo. De acordo com [12] a velocidade deve ser entendida como a derivada do espaço em relação ao tempo, e a aceleração como sendo a derivada da velocidade em relação ao tempo.

Nesta sessão também serão utilizados dois conceitos apresentados por [12], que são demonstrado usando os conceitos de Cáculo Integral, como este não é objeto de estudo do trabalho os conceitos serão apresentados como definições, embora sejam aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição 7. *[12] Se a velocidade de um movimento puder ser descrita por um função cujo domínio é o tempo, então a área abaixo da curva reprersenta a variação de espaço daquele movimento.*



Definição 8. *[12] Se a aceleração de um movimento puder ser descrita por um função cujo domínio é o tempo, então a área abaixo da curva reprersenta a variação de velocidade daquele movimento.*

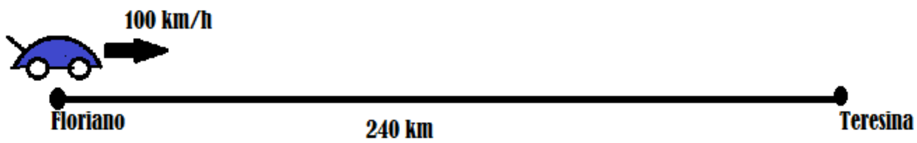


2.1 Conceitos de Cinemática

Quando um móvel possui sempre a mesma velocidade e se movimenta sobre uma reta diz-se que o movimento feito por este é um Movimento Retilíneo Uniforme, MRU [9]. Neste, a velocidade é constante, ou seja, não se altera no decorrer do tempo e o móvel percorre espaços iguais em intervalos de tempos iguais.

Tomando por base o problema abaixo, serão apresentados os conceitos de MRU.

Problema 9. *Um carro saiu de Floriano para Teresina fazendo um percurso de 240 km à uma velocidade constante de 100 km/h. Quanto tempo ele gastou para fazer este percurso?*



No MRU é possível estabelecer uma equação para um determinado móvel que possui uma velocidade constante a qualquer momento posterior determinar a sua posição ao longo da trajetória, e ainda conhecendo a posição saber o instante exato da passagem naquela posição.[5] Como sua velocidade é constante, ela é obtida pela razão entre a variação de espaço e a variação do tempo.

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Voltando ao problema anterior tem-se que:

$$\begin{aligned}
V_m &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\
V_m.\Delta t &= \Delta s \\
\Delta t &= \frac{\Delta s}{V_m} \\
\\
\Delta t &= \frac{240}{100}
\end{aligned}$$

Assim o tempo gasto na viagem foi de $2,4h$ ou $2h$ e $24min$.

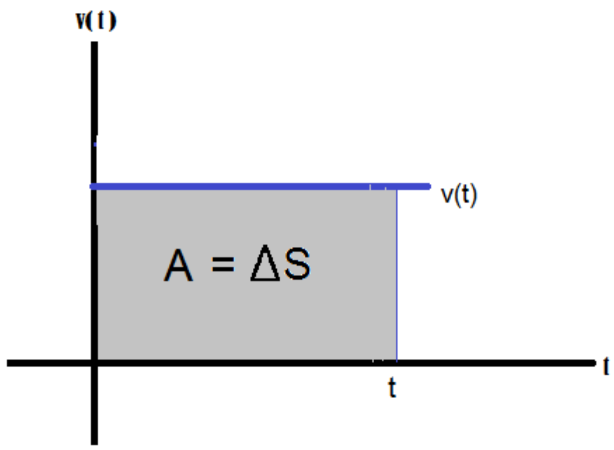
□

Outro importante conceito da cinemática é a função horária do MRU. Como motivação será apresentado o problema à frente.

Problema 10. *Um móvel incialmente na posição de* $3m$ *executa um movimento com velocidade constante de* $10m/s$*. Tendo em vista os fatos qual é a posição do móvel após* $9s$*?*

Teorema 10. *A função horária do deslocamento de um móvel que faz um movimento retilíneo uniforme partindo do espaço inicial* s_0 *com velocidade média* v *é dada por* $s(t) = s_0 + vt$.

Demonstração: Tomando por base o gráfico a seguir, bem como o fato de $\Delta S = s(t) - s_0$ e de $A = v.t$ tem-se que:



$$\begin{aligned}
\Delta s &= A \\
s(t) - s_0 &= v.t \\
s(t) &= s_0 + vt
\end{aligned}$$

□

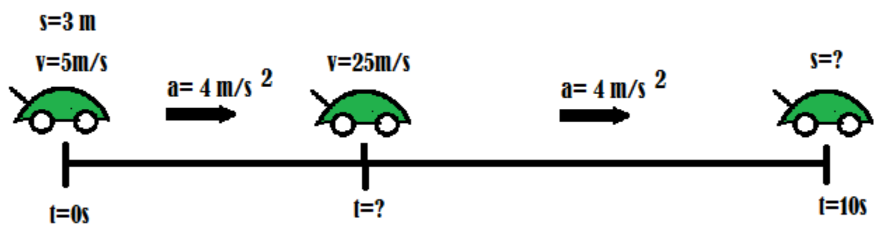
Resolvento o problema, tem-se que $s_0 = 3m$, $v = 10m/s$ e $t = 9s$, logo

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + vt \\ s(t) &= 3 + 10.9 \\ s(t) &= 93m \end{aligned}$$

□

Quando um móvel varia sua velocidade constantemente, ou seja, possui sempre a mesma aceleração, e se movimenta sobre uma reta diz-se que o movimento feito por este é um Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, MRUV. Neste, a velocidade se altera no decorrer do tempo e o móvel possui variações de velocidades iguais em intervalos de tempos iguais.[12]
Um problema relativo a MRUV é o seguinte:

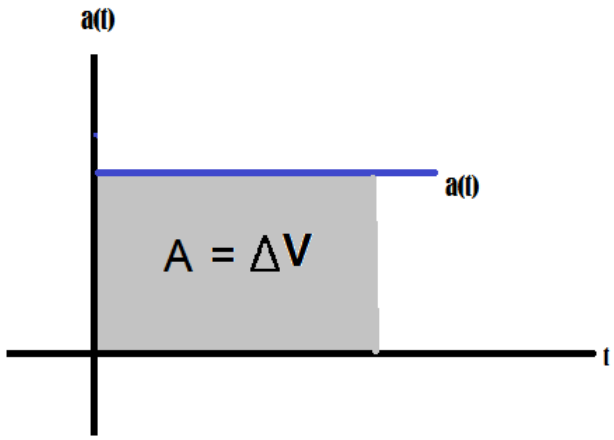
Problema 11. *Um móvel, incialmente na posição de* $3m$ *com velocidade de* $5m/s$ *se desloca com uma aceleração constante igual a* $4m/s^2$*. Tendo em vista os fatos, após quantos tempo o móvel atingirá a velocidade de* $25m/s$*? Em que posição o móvel se encontrará após* $10s$*?*



No MRUV é possível estabelecer uma equação para um determinado móvel que possui uma aceleração constante a qualquer momento, posteriormente pode-se determinar a sua posição e a sua velocidade ao longo da trajetória, e ainda conhecendo a posição saber o instante exato da passagem naquela posição. Como sua aceleração é constante, ela é obtida pela razão entre a variação de velocidade e a variação do tempo $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.
Além disso duas funções horárias, a do espaço em função do tempo e a da velocidade em função do tempo, recebem grande importância dentro do estudo de cinemática, haja visto suas aplicações na resolução de problemas, inclusive o supracitado. Estas serão apresentadas em forma de teorema.

Teorema 11. *A função horária da velocidade de um móvel que faz um movimento retilíneo uniforme variável partindo com uma velocidade inicial* v_0 *com aceleração constante* a *é dada por* $v(t) = v_0 + at$.

Demonstração: Tomando por base o gráfico a seguir, bem como o fato de $\Delta V = v(t) - v_0$ tem- se que $A = a.t$:



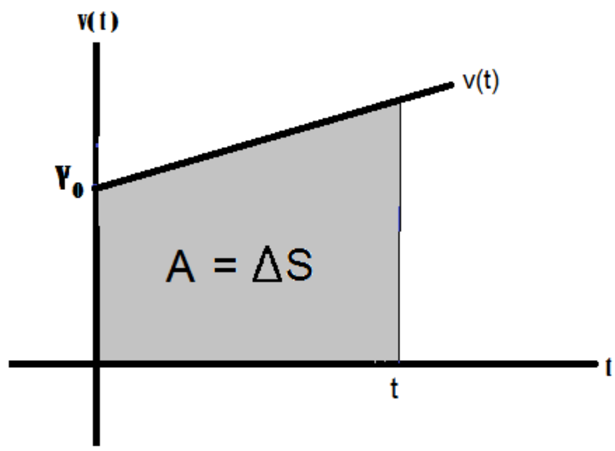
Logo

$$\begin{aligned} \Delta V &= A \\ v(t) - v_0 &= a.t \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

□

Teorema 12. *A função horária do deslocamento de um móvel que faz um movimento retilíneo uniforme variável partindo de um espaço inicial* s_0*, com uma velocidade inicial* v_0 *e com aceleração constante* a *é dada por* $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Demonstração: Tomando por base o gráfico a seguir, bem como o fato de $\Delta S = s(t) - s_0$, de $v(t) = v_0 + at$ e de $A = \frac{(v(t)+v_0).t}{2}$ tem-se que:



Logo

$$\begin{aligned}
\Delta S &= A \\
s(t) - s_0 &= \frac{(v(t) + v_0).t}{2} \\
s(t) - s_0 &= \frac{(v_0 + at + v_0).t}{2} \\
s(t) - s_0 &= \frac{(2v_0 + at).t}{2} \\
s(t) - s_0 &= v_0 t \frac{at^2}{2} \\
s(t) &= s_0 + v_0 t \frac{at^2}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

Voltando ao problema motivador, tem-se que:

(1)

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_0 + at \\
25 &= 5 + 4t \\
4t &= 25 - 5 \\
t &= 5s
\end{aligned}$$

$\square$

(2)

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_0 + v_0 t \frac{at^2}{2} \\
s(t) &= 3 + 5t + \frac{4t^2}{2} \\
s(10) &= 3 + 5.10 + \frac{4.10^2}{2} \\
s(10) &= 253m
\end{aligned}$$

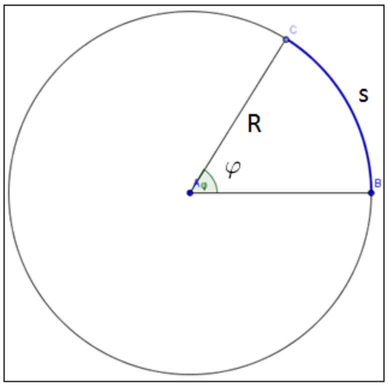
$\square$

No estudo de Mecânica Clássica, Movimento Circular é todo aquele movimento em que o objeto ou ponto material se desloca numa trajetória circular. Isto ocorre pelo fato de atuar neste sistema uma força, denominada Centrípeta, que muda de direção o vetor velocidade, sendo continuamente aplicada para o centro da circunferência. Esta força é responsável pela chamada aceleração centrípeta, orientada para o centro da circunferência [12]. Pode haver, ainda nesse movimento, uma aceleração tangencial, que é compensada por um incremento na intensidade da aceleração centrípeta a fim de que o móvel não saia da sua trajetória circular. Conforme a ausência ou a presença de aceleração tangencial o Movimento Circular classifica-se como uniforme (MCU) ou uniformemente variado

(MCUV).

Nos estudos de movimento angular, são introduzidos os conceitos de deslocamento angular, a velocidade angular e a aceleração angular e centrípeta, no caso do MCU existe ainda o conceito de período, que é também utilizado no estudo dos movimentos periódicos.

De acordo com [5] , as grandezas angulares supracitadas, podem ser obtidas por regra de três considerando algumas razões trigonométricas, como será exposto a seguir:



Tem-se que s está pra $2.\pi.R$ (Comprimento da Circunferência) assim como φ está para $2.\pi$ (Volta completa de uma circunferência), assim,

$$s \rightarrow 2\pi.R$$

$$\varphi \rightarrow 2\pi$$

Resolvendo a regra de três obtém-se que $s = \varphi.R$, mantendo assim a proporção entre as grandezas, $v = \omega.R$ e $a = \gamma.R$, onde φ é o espaço angular, ω é a velocidade angular e γ é a aceleração angular. É importante salientar também que, segundo xxxx, as relações do MCU e do MCUV respeita as proporções do MRU e do MRUV, assim apresentando as seguintes relações. Para o MCU,

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad e \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega.t$$

Para o MCUV

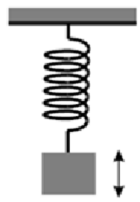
$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad e \quad \omega(t) = \omega_0 + \gamma.t \quad e \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\gamma.t^2}{2}$$

É importante aferir também que no MCU define-se período T como o intervalo de tempo gasto para que o móvel complete um deslocamento angular em volta de uma circunferência completa e frequência, f, como o número de vezes que essa volta é completada em determinado intervalo de tempo. Assim, o período é o inverso da frequência.

2.2 Movimento Harmônico Simples

Um fenômeno é dito periódico quando se repete, identicamente, em intervalos de tempos iguais, sendo seu período definido como o menor intervalo de tempo da repetição desse fenômeno[13]. Diz se que um ponto material efetua um movimento harmônico Simples quando, numa trajetória retilínea, oscila periodicamente sobre uma posição de equilíbrio sob a atuação de uma força cuja intensidade é proporcional à distância do ponto à posição do equilíbrio. Tal força é denominada força restauradora e é sempre orientada para a posição de equilíbrio.
Como problema motivador do estudo de MHS será apresentado o seguinte problema:

Problema 12. *A figura mostra um sistema ideal massa-mola, apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. O movimento deste sistema é regido pela função horária da elongação do objeto que encontra-se em MHS dado pela função* $s(t) = 5.\cos(\pi.t + \frac{\pi}{2})$*. Assim, qual é a posição do corpo no instante de* $4s$*? Qual é a função horária da velocidade desse movimento? Qual é a função horária da aceleração desse movimento?*



Para resolver este problema é necessária a apresentação de alguns conceitos relacionados ao Movimento Harmônico Simples.

Teorema 13. *Considerando uma partícula que descreve um Movimento Harmônico Simples, a função horária do espaço deste é dada por* $s(t) = R.\cos(\varphi_0 + \omega.t)$*.*

Demonstração: Existe uma relação entre Movimento Circular e Movimento Harmônico Simples, e o estudo de um inserido sobre os conceitos do outro permite chegar às equações cinemáticas do MHS [6].

Tomando por base a figura I, tem-se que a Partícula descreve um Movimento Circular Uniforme na circunferência de raio R. Pode-se observar que o espaço angular é dado por φ , assim como define-se neste movimento uma velocidade linear v e uma velocidade angular ω tendo assim as seguintes equação $s = \varphi.R$; $v = \omega.R$, devendo também serem consideradas as funções horárias do movimento circular $s = s_0 + vt$ (1)e $\varphi = \varphi_0 + \omega.t$ (2)

Seja agora a Partícula II, analisada na figura 1, percebe-se que esta descreve um Movimento Harmônico Simples sobre o plano horizontal se deslocando de acordo com a posição s(t), que varia conforme o tempo. Utilizando a relação do cosseno, tem-se que:

$$\cos\varphi = \frac{s(t)}{R} \quad e \quad s(t) = R.\cos(\varphi)$$

Considerando a equação (2) supracitada percebe-se que a função horária do Movimento Harmônico Simples pode ser definida por $s(t) = R.\cos(\varphi_0 + \omega.t)$.
A partir daí o cálculo pode servir como uma ferramenta importante para o entendimento desse fenômeno físico, haja visto o fato de a velocidade, enquanto função, ser compreendida como a derivada do espaço em relação ao tempo e da aceleração, enquanto função, ser identificada como a derivada da velocidade em relação ao tempo.

□

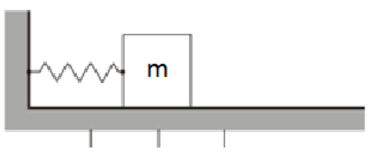
Teorema 14. *Considerando uma partícula que descreve um Movimento Harmônico Simples, a função horária da velocidade deste é dada por* $v(t) = -\omega.R.sen(\varphi_0 + \omega.t)$.

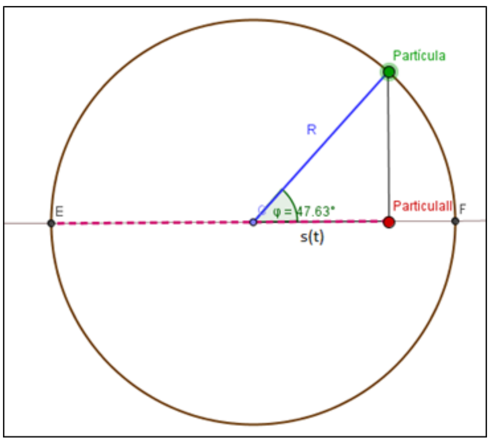
Demonstração: observando-se que $v(t) = s'(t)$ e $s(t) = R.\cos(\varphi_0 + \omega.t)$ tem-se,pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} v(t) \quad = s'(t) \quad &= \omega.R. - [sen(\varphi_0 + \omega.t)] \\ &= \omega.R. - [sen(\varphi_0 + \omega.t)] \\ &= \omega.R. - [sen(\varphi_0 + \omega.t)] \\ v(t) \quad &= -\omega.R.sen(\varphi_0 + \omega.t) \end{aligned}$$

□

Teorema 15. *Considerando uma partícula que descreve um Movimento Harmônico Simples, a função horária da aceleração deste é dada por* $a(t) = -\omega^2.R.\cos(\varphi_0 + \omega.t)$.





Demonstração: Como $a(t) = v'(t)$, a aceleração escalar é dada, de acordo com a regra da cadeia, por:

$$\begin{aligned} a(t) &= v'(t) &&= -\omega.\omega.R.[\cos(\varphi_0 + \omega.t)] \\ & &&= -\omega^2.R.\cos(\varphi_0 + \omega.t) \end{aligned}$$

$\square$

De posse dos dados acima, pode-se agora resolver o problema motivador:

(1)

$$\begin{aligned} s(t) &= 5.\cos\left(\pi.t + \frac{\pi}{2}\right) \\ s(4) &= 5.\cos\left(\pi.4 + \frac{\pi}{2}\right) \\ s(4) &= 5.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ s(4) &= 0m \end{aligned}$$

$\square$

(2)

$$\begin{aligned} v(t) = s'(t) &= (\pi.5.) - \left[sen\left(\frac{\pi}{2} + \pi.t\right)\right] \\ v(t) &= -5\pi.sen\left(\frac{\pi}{2} + \pi.t\right) \end{aligned}$$

$\square$

(3)

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= -\pi.\pi.5.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi.t\right)\right] \\ a(t) &= -\pi^2.R.\cos\left(\frac{\pi}{2} + pi.t\right) \end{aligned}$$

$\square$

Dessa forma finaliza-se a discussão teórica de algumas das aplicações mais importantes do Cálculo Diferencial, à frente serão discutidos os tópicos da pesquisa de campo do trabalho.

Capítulo 3

Metodologia

Nesta parte do trabalho será exposta a metodologia utilizada na pesquisa, sendo descritos o Campo da Pesquisa, o instrumento da pesquisa e o método de análise dos dados.

3.1 Descrição do Campo de Pesquisa

O trabalho consistiu de uma pesquisa de campo, de cunho experimental, feita através de um estudo de caso com alunos do quarto ano do Ensino Médio Integrado ao Técnico de Eletromecânica do IFPI Campus Floriano. Esta pesquisa é do tipo qualitativa e quantitativa e tem como instrumento o método de Engenharia Didática.

3.2 Descrição do Instrumento de Pesquisa

O instrumento da pesquisa foi a Engenharia Didática, que é conhecida como uma estratégia de pesquisa em educação matemática que consiste em realizar um estudo de caso com um grupo de controle e segue um cronograma de ações, que começam por uma análise prévia, em seguida faz uma análise a priori, logo após o grupo de controle é submetido a apresentação da metodologia pesquisada, neste caso a oficina de Cálculo, e por fim é feita uma análise a posteriori.

De acordo com [1], este é um avanço metodológico que surgiu na França na década de 1980, sendo uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio e aceita se submeter a um controle de tipo científico.[3] Tal metodologia tem como paradigma o fato de se apoiar no registro dos estudos de caso que a validação é essencialmente interna, fundamentada sobre a confrontação entre análise a priori e análise a posteriori.

Conforme [15] Diante da análise das pesquisas que vem sendo realizadas e que se utilizam a Engenharia Didática, percebe-se que essa metodologia delineia um caminho para pesquisas na área da didática,.pois, encarada como metodologia de pesquisa, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala, concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino.

A análise prévia constou de uma pesquisa que buscou identificar o perfil socioeconômico e a vida escolar dos alunos do estudo de caso.

Após isso foi feita a análise a priori através da aplicação um teste com os alunos no intuito de buscar saber se estes têm o domínio dos conteúdos de física relacionados à cinemática (MUV), Movimento Harmônico Simples, e dos conteúdos de matemática relacionados ao Vértice da Parábola, aplicação de Ponto de Máximo ou Mínimo e a Médias.

Em seguida os alunos foram submetidos a uma oficina sobre Cálculo Diferencial tratando de uma revisão sobre Funções, e apresentados aos conceitos de Limite de uma Função, Derivadas, Regras de Derivação (Derivadas de Funções polinomiais, Regra do Produto e do Quociente, Derivadas de Funções Trigonométricas e Regra da Cadeia). Além disso durante a oficina, que foi orientada com o auxílio do software Geogebra, foram apresentados alguns conceitos de Física relacionados a MUV e MHS, e por fim foram apresentadas aplicações do Cálculo Diferencial na Física (MUV e MHS), em Valores de Máximo e Mínimo e problemas de Otimização em Economia.

Por fim, foi feita a análise a posteriori, através da aplicação um teste que verificou a aprendizagem dos alunos após a oficina de cálculo e colheu a opinião dos alunos a respeito da importância do Cálculo no aprendizado de Matemática e Física no Ensino Médio.

3.3 Descrição do Método de Análise dos Dados

A Análise dos dados deu-se através da quantificação de acertos e erros das questões dos testes em forma de gráficos e tabelas, sendo as questões consideradas corretas, parcialmente certas e erradas, e através da análise qualitativa das escritas dos alunos do segundo teste, no qual estes expuseram suas opiniões acerca do aprendizado de Cálculo e de suas aplicações.

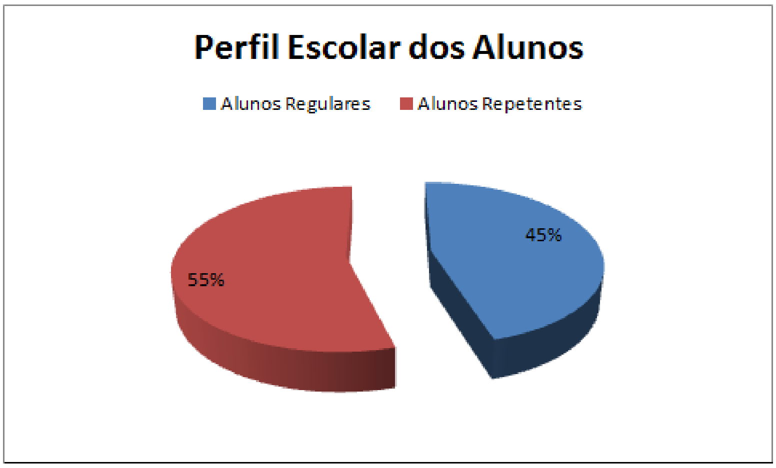
Capítulo 4

Apresentação dos Resultados

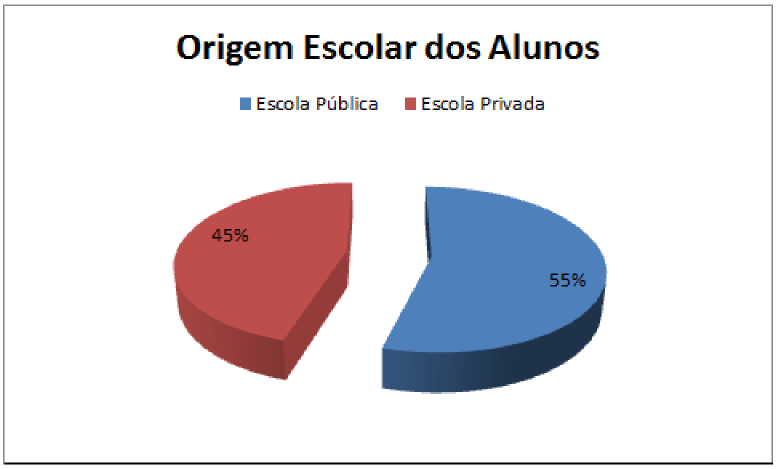
4.1 Dados Socioeconômicos dos Alunos

Em relação aos dados socioeconômicos serão apresentadas informações acerca da vida acadêmica dos alunos no IFPI, da origem escolar e do sexo destes.

Junto à coordenação de controle acadêmico, foram investigados os perfis socioeconômicos dos alunos do grupo de controle, primeiramente foi analisado o perfil acadêmico dos alunos que apresentou 55% dos alunos como repetentes.

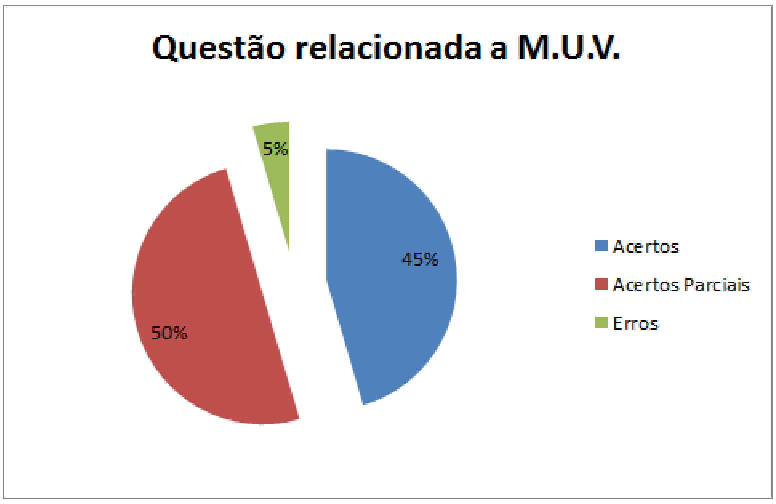


É importante salientar que 59% dos alunos são do sexo masculino e que, na pesquisa prévia, foi observado também que 55% dos alunos são oriundos de escola pública.

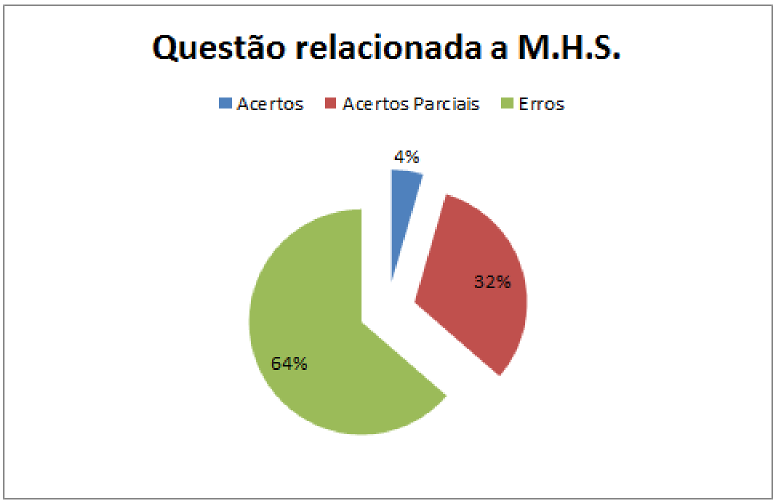


4.2 Análise a priori

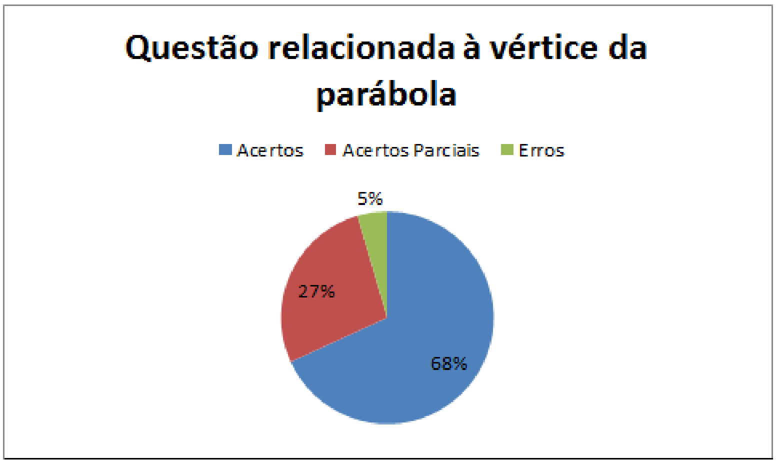
Na análise a priori foi apresentada ao grupo de controle cinco questões. A primeira foi relacionada a Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, é importante salientar que ocorreram apenas 5% de erros, o que mostra domínio desses conceitos por parte dos alunos, como mostra o gráfico abaixo.



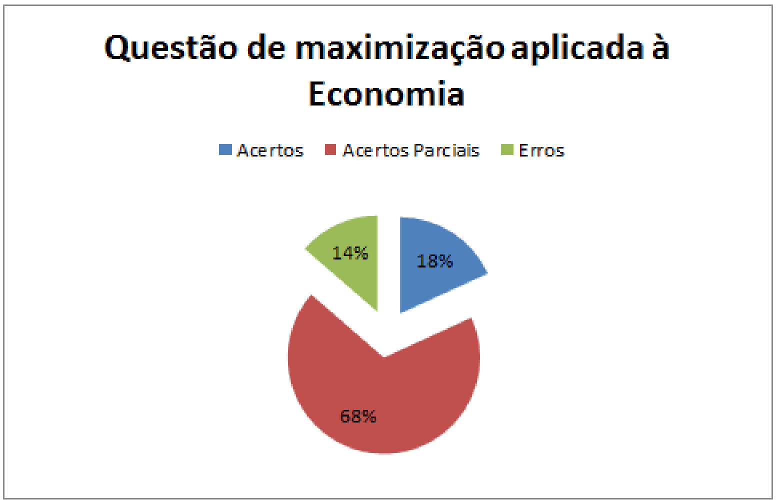
O grupo de controle também foi apresentado a uma questão relacionada a Movimento Harmônico Simples, o resultado foi preocupante, pois somente 4% dos alunos acertaram totalmente a questão e 64% erraram, como mostra o gráfico, neste caso se faz importante o surgimento de outra forma de abordagem deste conhecimento de física.



Os alunos também foram submetidos a resolverem problemas relacionados à função quadrática, em particular relacionados à vértice da parábola, os resultados foram gratificantes, pois apenas 5% dos alunos erraram esse problema.



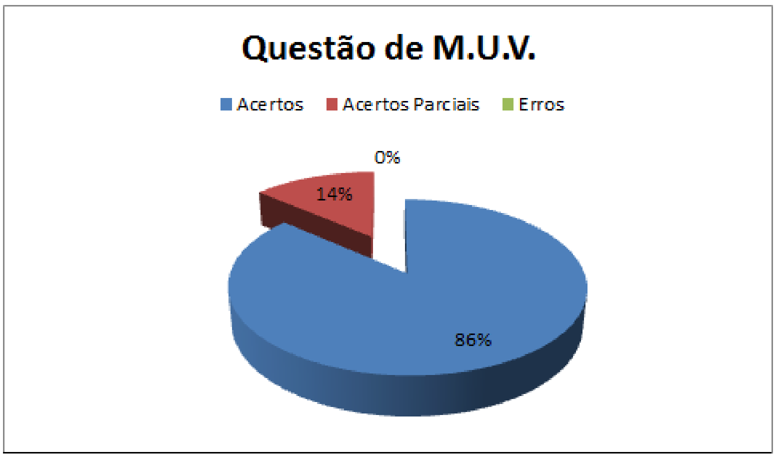
Quando submetidos ao problema relacionado à otimização aplicado a economia apenas 14% erraram, porem é importante notar que 68% dos alunos, como mostra o gráfico, acertaram parcialmente esse problema, fato que mostra a presença de dificuldade no ataque a esse tipo de problema.



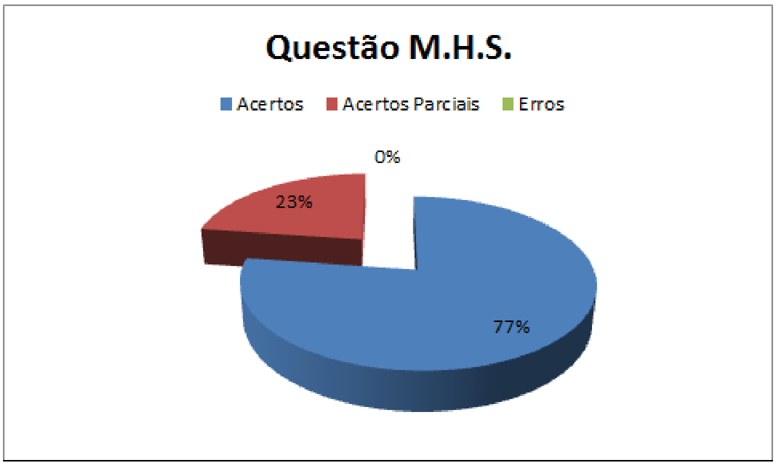
E por fim, os alunos foram apresentados ao problema de otimização aplicados à geometria, este configurou como o resultado mais preocupante, pois todos os alunos erraram a questão proposta.

4.3 Análise a posteriori

Após a Oficina de Cálculo, os alunos foram novamente submetidos à uma análise, a análise a posteriori, que, além de averiguar o conhecimento adquirido pelos alunos, aferiu a opinião deles acerca da temática abordada.
A primeira análise, feita a partir do problema relacionado a M.U.V, foi gratificante, pois mostrou que nenhum aluno errou a questão e que 68% dos alunos acertarm totalmente a questão, como mostra o gráfico.

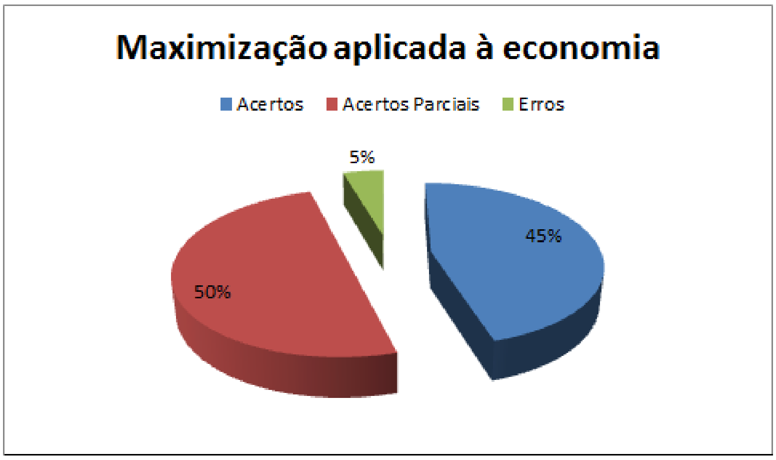


Outro resultado positivo foi o obtido na análise acerca do conhecimento adiquirido pelos alunos em relação à M.H.S., pois no problema proposto, nenhum alunos errou a questão e77% acertaramtotalmente a questão. Isso mostra a eficiencia do ensido de M.H.S. com a utilização dos conceitos do Cálculo Difenrencial.

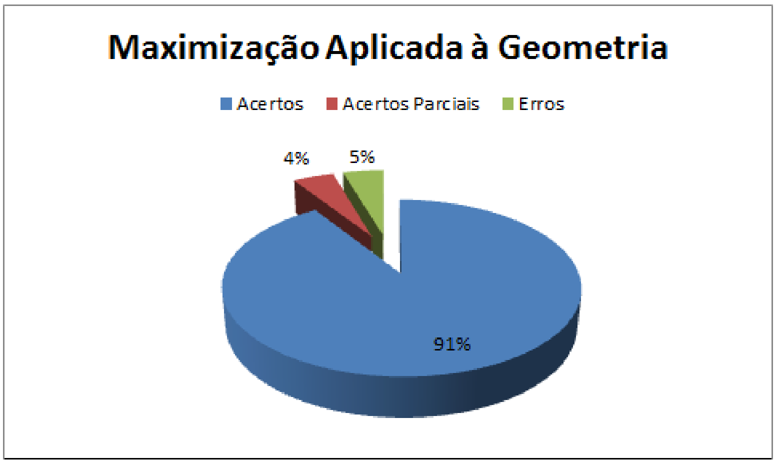


Cabe também ressaltar que todos os alunos também não erraram a questão de otimização referente ao conceito de vértice da parábola, sendo importante frizar que 90% dos alunos acertaram totalmente o problema proposto.

Houve também um bom resultado, por parte dos alunos, na resolução do problema de otimização aplicado à economia pois apenas 5% deles erraram o problema e 50% acertaram parcialmente.



Por fim, outro grande resultado positivo foi o apresentado na aplicação do cálculo em problemas de otimização aplicados à geometria, pois ao passo que todos, inicialmente, erraram o problema no teste a posteriori somente 5% dos alunos erraram e 91% dos alunos acertaram totalmente a questão. Fato que novamente ratifica a importância do cálculo diferencial no ensino de matemática na Educação Básica.



Foi percebido no comportamento dos alunos traços de empolgação, no que diz respeito ao aprendizados das ferramentas do Cálculo Diferencial, da análise a posteriori cabe destacar duas falas dos alunos que corroboram com a defesa da abordagem do Cálculo no Ensino Médio.

Aluno 1. *O Cálculo é muito bom, se eu tivesse aprendido ele antes talvez eu tivesse internalizado melhor outros conceitos e com certeza eu ira decorar bem menos fórmulas.*

Outro aluno, quando indagado sobre o grau de dificuldade de aprender o Cálculo Diferencial, disse:

Aluno 2. *O Cálculo é muito bom, se eu tivesse aprendido ele antes talvez eu tivesse internalizado melhor outros conceitos e com certeza eu ira decorar bem menos fórmulas.*

Essas falas vêm só corroborar com a ideia de se implementar noções de cálculo no Ensino Médio, ala visto a importância desta ferramenta para o ensino moderno de Matemática.

Capítulo 5

Conclusão

De maneira geral esta pesquisa mostrou que o Cálculo Diferencial pode sim ser objeto de estudo de matemática no Ensino Médio, pela sua ampla aplicabilidade tanto em problemas de matemática, quanto em tópicos das ciências naturais, em especial na física, como também pela facilidade de internalização de seus conceitos e combate ao uso exarcebado de algumas fórmulas tanto em matemática como em particular na física.

O que pôde ser observado no trabalho foi o fato de inicialmente os alunos apresentarem dificuldades de entendimento nos conceitos de otimização relacionados ao vértice da parábola, à economia e principalmente à geometria, como também externaram conhecimento razoável sobre M.U.V. e imensa dificuldade nos conceitos de M.H.S.

Com a oficina de Cálculo, foi percebido uma evolução global por parte dos alunos, que enraigaram mais ainda os conceitos que já haviam internalizado e desenvolveram seus conhecimentos, sobretudo, em relação à aplicação de otimização em geometria e do conceito de derivada no M.H.S.

Cabe ressaltar também que, segundo fala dos alunos, o Cálculo é grande ferramenta e sua aprendizagem em tempo hábil e com a transposição didática correta, melhora a internalização de outros conceitos e combate a aprendizagem mnemônica, memorização de fórmulas, além de ser perfeitamente entendível e aplicável à outros conhecimentos oriundos do Ensino Médio.

Tendo em vista os fatos supracitados, esse trabalho apresenta e defende o Cálculo Diferencial como uma excelente ferramenta de ensino de Matemática na Educação Básica, e entende que se faz necessários novos estudos, no sentido de corroborarem ou retificarem as informações destas pesquisa, bem como no sentido de investigarem a influencia do Cálculo Difenrencial e Integral na aprendizagem de outras ciências que fazem parte do núcleo comum do Ensino Médio, em especial na Eletricidade, na Fisico-Química e na Biologia, como também em disciplinas relativas aos cursos profissionalizantes como em mecânica, em edificações, na informática e em muitas outras.

Referências Bibliográficas

[1] ALMOULOUD, S. A., COUTINHO, C. de Q. e S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd.REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V3.6, p.62-77, UFSC, 2008.

[2] ÁVILA, G.A. - *O Ensino de Cálculo no 2o Grau.* Revista do Professor de Matemática. Vol.18, Rio de Janeiro-RJ, 1991.

[3] ARAUJO, P. C. de, IGLIORI, S. B. C. ENGENHARIA DIDÁTICA COMO UMA ESTATÍSTICA NÃO-PARAMÉTRICA. CADERNO DE FÍSICA DA UEFS 07 (01 e 02): 133-142, 2009

[4] EDWARDS JR., C.H., PENNEY, D.E. - *Cálculo com Geometria Analítica.* Pretice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro-RJ, 1994.

[5] GASPAR, A. - *Física, Mecânica.* Ática. São Paulo-SP, 2000.

[6] GASPAR, A. - *Física, Ondas, Óptica e Termodinâmica.* Ática. São Paulo-SP, 2000.

[7] GUEDES, A. G., ASSIS, M.M.A. de. - *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade do Natal/RN*, 2007.

[8] LOZADA, C. de O., Et all. - *A MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO ENSINO DE FÍSICA NO ENSINO MÉDIO.* Revista LOGOS,n. 14, 2006.

[9] LUZ, A.M.R., ÁLVARES, B.A. - *Curso de Física Volume 1.* Scipione. 3 ed. São Paulo SP, 1998

[10] LUZ, A.M.R., ALVARES, B.A.- *Curso de Física Volume 2.* Scipione. 3 ed. São Paulo SP, 1998

[11] PEREIRA, V.M.C. - *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade.*Universidade Federal do Rio de Janeiro- UFRJ, Rio de Janeiro-RJ , 2009.

[12] RAMALHO JÚNIOR, F., FERRARO, N.G., SOARES, A. de T. - *Os Fundamentos da Física Volume 1.* Moderna. 6 ed. São Paulo-SP, 1993.

[13] RAMALHO JÚNIOR, F., FERRARO, N.G., SOARES, A. de T. - em Os Fundamentos da Física Volume 2. Moderna. 6 ed. São Paulo-SP, 1993.

[14] SILVA, J. P. - *A Derivada e Algumas Aplicações.* Colóquio de Matemática da Região Nordeste. SBM, Teresina-PI, 2013.

[15] SOUSA, R. N. S. de, CORDEIRO, M. H. A contribuição da Engenharia-Didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica, UNIVALI,2007

[16] STEWART, J. - *Cálculo, Volume I.* Thomson Learning, São Paulo-SP, 2006.

[17] TORRES, T.I.M., GIRAFFA, L.M.M. - *O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE.* REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.1, p.18-25, UFSC, 2009.

Capítulo 6

Apêndices

6.1 Análise a priori

1- (QUESTÃO DE MUV) O movimento de um corpo é descrito de acordo com a função horária $s(t) = 3t^2 + 2t + 4$, onde o tempo é dado em segundos e o espaço em metros. Tendo em vista os fatos responda:

a) Qual é a posição do corpo no instante de 4s?

b) Qual é a função horária da velocidade desse movimento?

c) Qual é a velocidade do corpo no instante de 2s?

d) Qual é a aceleração do corpo?

2- (QUESTÃO DE MHS) A figura mostra um sistema ideal massa-mola, apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. Dada a seguinte função horária da elongação do objeto que encontra-se em MHS $s(t) = 4.\cos(2.\pi.t + \frac{3.\pi}{2})$, responda:

a) Qual é a posição do corpo no instante de 4s?

b) Qual é a função horária da velocidade desse movimento?

c) Qual é a velocidade do corpo no instante de 2s?

d) Qual é a função horária da aceleração desse movimento?

e) A aceleração escalar da partícula em t=5seg;

3- (MAXIMIZAÇÃO) Uma função é definida pela seguinte lei $f(x) = x^2 - 60x + 800$. Tendo em vista os fatos responda:

a) Qual é o valor do X_v?

b) Qual é o valor do Y_v?

c) Qual é o valor de $f(10)$?

4- (QUESTÃO DE MÁXIMO E MÍNIMO APLICADO) O lucro, L, de uma empresa é dado em função da quantidade, x, de unidades vendidas segundo a função $L(x) = -x^2 + 40.x$. Tendo em vista os fatos, responda:

a) Qual é o lucro obtido na venda de 10 unidades?

b) Quantas unidades são necessárias serem vendidas para que a empresa obtenha lucro máximo?

c) Qual é o lucro máximo da empresa?

5- (QUESTÃO APLICADA A GEOMETRIA) Um fazendeiro quer fazer um cercado retangular com 40m de cerca. Qual é o valor da área máxima desse cercado?

6.2 Análise a posteriori

1- (QUESTÃO DE MUV) O movimento de um corpo é descrito de acordo com a função horária $s(t) = 5t^2 + 2t + 1$, onde o tempo é dado em segundos e o espaço em metros. Tendo em vista os fatos responda:

a) Qual é a posição do corpo no instante de 2s?

b) Qual é a função horária da velocidade desse movimento?

c) Qual é a velocidade do corpo no instante de 4s?

d) Qual é a aceleração do corpo?

2- (QUESTÃO DE MHS) A figura mostra um sistema ideal massa-mola, apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito. Dada a seguinte função horária da elongação do objeto que encontra-se em MHS $s(t) = 5.\cos(\Pi.t + \frac{\pi}{2})$, responda:

a) Qual é a posição do corpo no instante de 4s?

b) Qual é a função horária da velocidade desse movimento?

c) Qual é a velocidade do corpo no instante de 2s?

d) Qual é a função horária da aceleração desse movimento?

e) A aceleração escalar da partícula em t=5seg;

3- (MAXIMIZAÇÃO) Uma função é definida pela seguinte lei $f(x) = x^2 - 40x + 300$. Tendo em vista os fatos responda:

a) Qual é o valor do Xv?

b) Qual é o valor do Yv?

c) Qual é o valor de f(2)?

4- (QUESTÃO DE MÁXIMO E MÍNIMO APLICADO) Corta-se um pedaço de arame de comprimento L em duas partes; com uma faz-se uma circunferência, com a outra um quadrado. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas compreendida pelas duas figuras seja máxima? E mínimo?

5- (QUESTÃO APLICADA A GEOMETRIA) Mostre que a área máxima de um retângulo de perímetro 80m é $400\mathfrak{m}^2$.

Capítulo 7

Anexos

7.1 Outras demonstrações

Teorema: Dado $a \in R$ e considerando a função $f(x) = x^n$, tem-se que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Lema: Dada a função $f(x) = a^x$, tem-se que $f'(x) = a^x.ln(a)$, em especial, dado $g(x) = e^x$ tem-se que $g'(x) = e^x$

$Lema_2$: Da a função $f(x) = ln(x)$, tem-se que $f'(x) = \frac{1}{x}$

Demonstração:

Inicialmente considera-se $f(x) = x^n$ como sendo $f(x) = e^{ln(x^n)} = e^{n.ln(x)}$, utilizando a regra da cadeia, supondo $g(x) = n.ln(x)$, e utilizando o $lema_2$ tem-se que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x).e^{g(x)} \\ &= n.\frac{1}{x}.e^{ln(x^n)} \\ &= \frac{n}{x}.x^n \\ &= n.x^{n-1} \end{aligned}$$

.

$\square$

Análise do Vértice da parábola pela forma canônica: Dada a função $f(x) = ax^2+bx+c$ tem-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2.\frac{bx}{2a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

.

Assim a função $f(x)$ terá um valor crítico quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ ou seja, quando $x = \frac{-b}{2a}$

$\square$