UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RICARDO AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

USO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA E FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA NO ENSINO BÁSICO

BELÉM
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RICARDO AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

USO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA E FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes

BELÉM
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48u Oliveira da Silva, Ricardo Augusto
USO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA E FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA NO ENSINO BÁSICO / Ricardo Augusto Oliveira da Silva. — 2018
99 f. : il. color

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes

1. Princípio de Indução Matemática. 2. . Recorrência. Ensino Básico. 3. OBMEP. I. Nunes Fernandes, José Augusto , *orient.* II. Título

---

CDD 511.1

RICARDO AUGUSTO OLIVEIRA DA SILVA

USO DO PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA E FÓRMULAS DE RECORRÊNCIA NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará.

Fernandes

Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Orientador – UFPA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma – UFPA
Membro-externo

Prof. Dra. Joelma Morbach– UFPA
Membro-interno

RESULTADO: Aprovado

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e a minha família, simplesmente por que a amo e por estarem ao meu lado na minha vida acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A DEUS pelo simples fato de me dar força para realizar o meu trabalho.

Aos meus professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da UFPA por terem me ajudado e incentivado para realização da minha formação e da conclusão desse trabalho.

Aos meus pais José Augusto Batista da Silva e Elza Tereza Bastos de Oliveira, pois sempre foram muito solícitos e prezaram pela minha educação dando-me apoio e acreditaram em mim.

Ao meu irmão Rafael Gibson Oliveira da Silva por sempre me apoiar.

Aos meus amigos de mestrado que sempre estiveram comigo durante todos os momentos.

Ao professor Dr. Francisco Paulo Marques por me indicar e fornecer material de estudo.

Ao professor Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma por fazer parte da banca.

A professora Dra. Joelma Morbach por fazer parte da banca.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes, pela orientação e contribuição para a realização desse trabalho.

A Myrna Adriana Pereira Villar, por sempre me apoiar e acreditar em mim.

Ao meu amigo e irmão Leonardo Carvalho Barra, por sempre acreditar em mim.

A Matemática é a mais simples, a mais perfeita
e a mais antiga de todas as ciências.
(Jacques Hadarmard)

RESUMO

Este trabalho apresenta noções, conceitualizações e aplicações do princípio de Indução Matemática e de Recorrência que comumente não são ensinados no Ensino Básico, tendo como algo tangente às sequências numéricas, mas que apresenta funcionalidade de uso em exames de massa, como o Exame Nacional do Ensino Médio, Olimpíadas de Matemática, entre outros. Com a significativa quantidade de proposições apresentadas juntamente com questões resolvidas e outras por resolver em anexo, pretende-se facilitar a compreensão e o exercício de atividades que ampliem a autonomia de alunos e professores do Ensino Básico em relação ao princípio Indução Matemática e a Recorrência.

Palavras-chave: Princípio de Indução Matemática. Recorrência. Ensino Básico. OBMEP.

ABSTRACT

This paper presents notions, conceptualizations and applications of the Principle of Mathematical Induction and Research in Basic Mathematics, but has the functionality of measuring numerical expressions, but which present the functionality of doing mass examinations, such as the National Exam of Teaching. Middle, Mathematics Olympics, among others. With a significant number of purposes, with the questions solved and others to be resolved in the annex, it is intended a greater understanding and exercise of activities that extend the autonomy of students and teachers of Basic Education in relation to the Principle of Mathematical and Recurrent Induction.

Keywords: Principle of Mathematical Induction. Recurrence. Basic Education. OBMEP.

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nesse trabalho, pretendemos esclarecer a professores e alunos do Ensino Básico que o entendimento de problemas e do uso adequado de estratégias para sua solução são mais recomendáveis do que simplesmente decorar as fórmulas e aplicá-las, que nem sempre solucionarão problemas mais elaborados, como os de Olimpíadas de Matemática. Além disso, como previsto nos PCN's.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. PCN's (BRASIL, 2000, p.40)

Como há uma significativa quantidade de problemas que envolvem o raciocínio de professores e alunos, e não só meras realizações das contas, iremos apresentar o princípio de Indução Matemática e a Recorrência para que professores e alunos do Ensino Básico percebam como podemos desenvolver estratégias de resolução em varias situações problemas com o uso do raciocínio recursivo junto com o emprego de Recorrências no Ensino Básico, como encontrado nos PCN's.

> O ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação a e (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia e estimativa. (BRASIL, 2000, p.56)

Nesse sentido, o nosso foco será apresentar as teorias de princípio de Indução Matemática e definir a Recorrência para solucionar os problemas que apresentem essas características com foco nas soluções de problemas do ENEM e de Olimpíadas de Matemáticas entre outros vestibulares e exames de massa.

No nosso trabalho, temos no capítulo um, uma breve citação sobre o número, a sua evolução ao longo dos anos e assim a construção dos números naturais ($\mathbb{N}$) que de forma axiomática e, por imediato, veremos o axioma do princípio de Indução Matemática (PIM) que norteará esse capítulo.

Em seguida, no capítulo dois faremos uma abordagem sobre a Recorrência que também é conhecida como Indução Matemática completa, pois entre o PIM e a Recorrência existe uma relação muito próxima, nesse capítulo exemplificaremos algumas proposições dentre elas as de 1ª e 2ª ordem, muito cobradas em exames de massa.

Na sequência do próximo capítulo, trataremos de alguns problemas clássicos e suas resoluções, e ,por este viés, teremos uma seleção de problemas/proposições de exames de massa.

Ao término desse trabalho, pretendemos que o leitor tenha como resultado a compreensão e autonomia perante os problemas/proposições em relação ao princípio de Indução Matemática e à Recorrência no Ensino Básico.

2 PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos e definiremos o princípio de Indução Matemática, mas ,antes, apresentaremos algumas considerações.

Os números são um dos elementos principais que ocupam a matemática como objetos de estudo abstratos, desenvolvidos pelo homem, como modelos, que os permitem contar, medir e comparar.

Elon de Lages Lima e os compêndios tradicionais, dizem:

> Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e uma unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma *contagem* e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real. (LIMA, E. L. et al.2006, p 25)

Porém, nos dias atuais, esse conceito não segue o rigor matemático, pois nas palavras do próprio Elon, faz uso de ideias como grandeza e unidade, e também se utiliza processos de comparação que a comunidade dos matemáticos não considera como elemento de prova.

2.1 O conjunto dos números naturais

O conjunto dos números naturais pode ser construído de tal forma que possamos estabelecer, matematicamente, definições apropriadas em relação ao mesmo e principalmente demostrar suas propriedades.

Lentamente, à medida que a humanidade se civilizava, apropriando-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro...) que são os números naturais, a noção intuitiva de número, nascida da contagem, foi evoluindo até tornar-se uma construção teórica, desenvolvida com o método axiomático, que consiste em fazermos uma coleção completa de proposições e conceitos básicos de onde resultarão as outras proposições e conceitos que devem ser consistentes, isto é, devemos ter certeza que através de inferências lógicas nunca chegaremos a uma contradição.

Podemos, hoje, descrever brevemente e precisamente o conjunto ℕ, que é o conjunto dos números naturais, partindo dos conceitos primitivos de "número", "zero" e de "sucessor" e valendo-nos dos axiomas formulados pelo matemático italiano Giuseppe Peano[1].

Falaremos agora sobre os axiomas de Peano (1858 a 1932) a partir dos quais foram construídos os números naturais. Esse matemático obteve as propriedades dos números naturais a partir de um pequeno número de axiomas.

2.2 Axiomas de Peano

Segundo RUSSELL (1963), em 1889, Peano apresentou 5 (cinco) axiomas que são importantes no estudo da Indução Matemática e Recorrência, os quais passamos a descrever.

1. Zero é um número;
2. O sucessor de um número também é um número;
3. Números distintos possuem sucessores distintos;
4. Zero não é sucessor. (Ou seja, o zero será o nosso primeiro elemento da nossa serie);
5. Se uma propriedade vale para o zero, e, valendo para um número n e também vale para o seu sucessor, então, essa propriedade vale para todos os números naturais. (princípio de Indução Matemática);

Queremos mostrar que ℕ, juntamente com o seu elemento 0 (zero) e a operação de "sucessor", satisfaz os axiomas de Peano e ,portanto, constitui um Sistema axiomático de Peano, que é o conjunto de axiomas para defini a teoria dos números naturais e que constituem as proposições mais simples a partir das quais se demostram os resultados dessa teoria.

A ideia de sucessor, no conjunto dos números naturais, é formada apenas por números e não contém números repetidos, por isso, é possível

[1] Nasceu no dia 27 de agosto de 1858 em Cuneo, Piemont, Itália, e morreu em 20 de abril de 1932 em Turin, Itália.

escolher, entre dois números naturais distintos, aquele que é maior e aquele que é menor. Quando um número natural a é maior do que um número natural b em uma unidade, dizemos que a é sucessor de b.

Para exemplificar a operação de sucessor, basta olhar na lista dos números naturais, colocada em ordem crescente, ou seja, o sucessor de um número natural é sempre o próximo número à sua direita. Daí:

2 é o sucessor de 1, pois 2 = 1 + 1;

3 é o sucessor de 2, pois 3 = 2 + 1;

4 é o sucessor de 3, pois 4 = 3 + 1.

E assim sucessivamente.

Formalmente dizemos que: se a $\in \mathbb{N}$, a + 1 é sucessor de a.

O último axioma de Peano, que do nosso ponto de vista operacional é o mais importante, pois ele é o axioma que caracteriza os números naturais, sem o quinto axiomas, podemos criar outros conjuntos que serão satisfeitos pelos demais axiomas. Um exemplo é o conjunto A = {0, 1, 2, 3,...}, de tal forma que adicionado dois elementos x e y, no conjunto A, na qual x seja sucessor de y e y o sucessor de x, será satisfeita pelos quatro primeiros axiomas.

O quinto axioma permite de tal maneira que nos possamos estabelecer de forma matematicamente apropriada definições relativas aos números naturais, e principalmente demostrar propriedades referente a esses números.

O uso do princípio de Indução Matemática e a Recorrência no Ensino Básico, quando trabalhados comumente, não se dão de forma adequada, e esses princípios são importantes para compreensão de certos conceitos, como por exemplo, o de conjunto e o de infinito, além de úteis para a solução de problemas e estabelecimento de proposições mais elaboradas.

Em meio a todos os números que a nós se apresentam, os números naturais foram os primeiros a serem mencionados, primeiramente com o intuito de contar. Apesar de esses números serem os primordiais, isso, não quer dizer que eles sejam totalmente compreendidos, tendo ainda muitos mistérios que os circulam e que devem ser desvendados. (HEFEZ, 2009, p 01)

Aprendemos no Ensino Médio o que teria sido o procedimento de Gauss para calcular a soma dos 100 (cem) primeiros números, o qual serviria para, em seguida, mostrar que a soma dos n primeiros números naturais, é calculada pela fórmula:

$S_n = 1 + 2 + 3 + ... +n = n(n + 1)/2$ para $n \in \mathbb{N}$.

Poderíamos, no entanto, nos deparar com algumas indagações:

-Qual técnica comprova a veracidade dessa fórmula?

-Há um contraexemplo que desabilite esta fórmula?

Por outro lado podemos ter a necessidade de obter valores para outras situações como as que se seguem:

-Quando teremos que $2^{n+1} \geq n^2 + 2$ para $n \in \mathbb{N}$?

Ou ainda:

-Para quais valores de $n \geq 0$ teremos que $2^{n+1} \geq n^2 + 3$ para $n \in \mathbb{N}$?

Podemos nos perguntar também:

Em quaisquer dessas fórmulas apresentadas, é possível determinar um menor contraexemplo[2], chegando a uma contradição? Se for o caso, façamos isso e apresentemos uma conclusão pela(s) sua(s) nulidade(s). Caso contrário, devemos buscar formas de mostrar suas validades para todo e qualquer número natural.

Suponhamos, por exemplo, que a fórmula para cálculo da soma (S) dos n primeiros números naturais, $S_n = n(n + 1)/2$, seja falsa, então deve haver um menor n que contradiga esse resultado.

Assim, para qualquer número natural k menor do que n, temos que:

$$S_k = 1 + 2 + ... + k = k.(k + 1)/2.$$

Para k = 1, teríamos:

$$S_1 = (1 + 1)/2 = 1.$$

O que torna verdadeira a equação da soma, então (S) é válida quando k = 1 e, portanto, o menor contraexemplo não é k = 1.

[2] Menor número natural que contraria a proposição.

Será então que há um maior contraexemplo[3] compreendido entre k e n. Tentemos ,então, para o valor (n – 1). Substituindo (n – 1) na equação da soma chegará a:

$S_{n-1} = 1 + 2 + ... + n - 1 = (n - 1 + 1)(n - 1)/2 = (n - 1)n/2.$

Como queremos determinar $S_{n,}$ portanto, adicionaremos n em ambos os membros e teremos:

$S_n = 1 + 2 + ... + n - 1 + n = (n - 1)n/2 + n;$

$S_n = 1 + 2 + ... + n - 1 + n = (n^2 - n + 2n)/2;$

$S_n = 1 + 2 + ... + n - 1 + n = n(n + 1)/2.$

O que é verdadeiro, logo, (n - 1) não é um contraexemplo, assim, não há contraexemplos também para a fórmula S = n(n + 1)/2 e a mesma é válida para todos os naturais n.

O passo crucial nessa verificação foi provarmos que a proposição p(n - 1) implica na proposição p(n), que iremos representar por p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n).

Referindo-nos agora à proposição p(n) tal que $2^{n+1} \geq n^2 + 2$, verificamos que para valores pequenos de n nos levam a acreditar que esta proposição é verdadeira, pois são válidas para n = 0, n = 1, n = 2, etc..., mas queremos provar que a mesma é válida para todos os naturais.

Para fazer isso, assumimos que a declaração p(n) é verdadeira para todos os números naturais. Por outro lado, quando uma afirmação "para todos" é falsa, deve haver pelo menos um n (o contraexemplo) que a contraria.

Admitamos, então, que há um número natural k menor do que n tal que contrarie a proposição (ou seja, p(k): $2^{k+1} \geq k^2 + 2$), então existe k = (n - 1), um número natural inferior a n, que satisfaz à proposição, passando a ter:

$p(n - 1): 2^{n-1+1} \geq (n - 1)^2 + 2.$

Assumindo que p(n) é verdadeira para todos os naturais tomemos k = (n - 1) quando então teremos:

$p(n - 1): 2^n \geq n^2 - 2n + 1 + 2 = n^2 - 2n + 3.$

---

[3] Maior número natural que contraria a proposição.

Queremos provar que $2^{n+1} \geq n^2 + 2$ para $n \geq 0$, a partir disso, objetivamos criar uma contradição, então temos uma hipótese que isso implica em uma tese e a demonstração por absurdo é negarmos a nossa tese, lembrando que nunca negamos a hipótese, logo negar a tese implica em um absurdo, o que contradiz os conceitos matemáticos.

Então, temos $P \Rightarrow Q \therefore \sim Q \Rightarrow$ absurdo, ou seja, a nossa negação está errada; devido a isso, vale a negação da negação, isso é, a proposição é verdadeira, daí teremos que $\sim(\sim Q) = Q$.

Logo, suponhamos por absurdo que $p(n)$: $2^{n+1} < n^2 + 2$ para $n \geq 0$ seja válida. Como mencionamos existe uma $p(n - 1)$ que é verdadeira, daí temos: $p(n - 1)$: $2^n \geq n^2 - 2n + 1 + 2 = n^2 - 2n + 3$ e, para alcançarmos $p(n)$, basta multiplicamos ambos os membros dessa última desigualdade por 2, sem perda de generalidade, devido o 2 ser positivo e não irá alterar a desigualdade, então obtemos, $2.2^n < 2(n^2 - 2n + 3) \Rightarrow 2^{n+1} < 2n^2 - 4n + 6$.

Então $p(n)$: $2^{n+1} < 2n^2 - 4n + 6 = (n^2 + 2) + (n^2 - 4n + 4) = n^2 + 2 + (n - 2)^2$, para $n \geq 0$, porém quando $n = 2$ essa desigualdade falha (contraexemplo). Temos $2^3 = 8 < 6 = 2^2 + 2 + (2 - 2)^2$, absurdo, portanto $p(n)$: $2^{n+1} \geq n^2 + 2$, para $n \geq 0$ é verdadeira.

Podemos nos perguntar: Afinal, o que provamos?

Seja a proposição $p(n)$: $2^{n+1} \geq n^2 + 2$, provamos que $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$, observando que, em um ponto de nossa prova, já tínhamos considerado o caso com $n = 0$. Embora tenhamos dado uma prova por contraexemplo, é natural nos perguntarmos se seria mais sensato tentar provar a declaração diretamente, ou seja, com outra técnica e não por contradição.

Como já temos que $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ então a demonstração por contradição pode ser desnecessária, basta observarmos que a partir de $n = 0$ teremos que $p(0) \Rightarrow p(1)$, $p(1) \Rightarrow p(2)$, $p(2) \Rightarrow p(3)$ e assim sucessivamente, de modo que $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$.

Agora, vamos considerar outra proposição $p(n)$: $2^{n+1} \geq n^2 + 3$ na qual observamos que para $n = 0$ e $n = 1$ não é válida, mas vamos tentar provar que

$2^{n+1} \geq n^2 + 3$ vale para $n \geq 2$. Podemos provar que p(2) é valida, pois $2^{2+1} \geq 2^2 + 3$, ou seja, $8 \geq 7$.

Agora, suponhamos que entre os números naturais maiores do que 2 existe um contraexemplo m para p(m), isso é, que há um m tal que $m > 2$ e p(m) seja falso. Então, há um k entre 2 e (m - 1), mas como mostramos em caso anteriores, basta mostrar $p(k - 1) \Rightarrow p(k)$.

Quando olharmos para trás em nossa prova de que $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$, veremos isso, quando $n \geq 2$, essencialmente a mesma prova se aplica a k também, ou seja, com cálculos análogos podemos mostrar que $p(k - 1) \Rightarrow p(k)$, desde que $k \geq 2$. Assim, desde p(m - 1) é verdade, nossa implicação nos diz que p(m) também é verdadeira. Isso é uma contradição com o nosso pressuposto de que p(m) é falso. Portanto, p(m) é verdade. Mais uma vez, podemos concluir a partir de p(2) teremos que $p(2) \Rightarrow p(3)$ e p(3) é verdadeiro, e de $p(3) \Rightarrow p(4)$ e p(4) é verdadeiro, e assim por diante. A implicação que tivemos provar foi $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ feita anteriormente para $n \in \mathbb{N}$.

Caso tivermos um contraexemplo para uma declaração p(n) para $n \in \mathbb{N}$, isto significa que existe um m tal que p(m) é falso. Para encontrar um menor contraexemplo, nós precisaríamos examinar p (0), p (1),..., talvez, todos os naturais até p(m), a fim de encontrar um menor contraexemplo, que é um menor número k tal que p(k) é falso.

Como isso envolve apenas um número finito, mas não necessariamente pequeno, será que faz sentido afirmar que existe um menor contraexemplo? E qual seria? Só poderíamos afirmar a existência do menor contraexemplo analisando a nossa proposição caso a caso.

No entanto, não faz sentido afirmar que existe um maior contraexemplo, porque há infinitos casos de n que teríamos que verificar se esperamos encontrar um maior contraexemplo, e assim, nós poderíamos nunca achar o caso.

Para provar isso, porém, não verificamos todos os casos. Em vez disso, com base em nossa intuição iremos utilizar o quinto axioma de Peano (princípio de Indução Matemática).

Às vezes, há o maior contraexemplo (como nós achamos na proposição $2^{n+1} \geq n^2 + 3$ que foi n = 1). Então, mostramos que estávamos certos, visitando que entre os números maiores ou iguais a dois não há menor contraexemplo.

Também, às vezes, não há o maior contraexemplo, n em uma declaração p(n): por exemplo, $2n < n$ é falso para todos os números naturais n e, portanto, não há maior contraexemplo.

2.3 O princípio de Indução Matemática

Pode parecer claro que, repetidamente, usando a implicação $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ provaremos p(n) para todos os n, pois essa é a ideia central do princípio da Indução Matemática PIM, que estamos prestes a apresentar. Em uma discussão teórica de como construímos os números naturais por meio dos axiomas de Peano (primeiros princípios), o princípio da Indução Matemática (ou o princípio equivalente de que cada conjunto dos números naturais possui um menor elemento, permitindo-nos usar a técnica do "menor contraexemplo") é um dos primeiros que assumimos.

O princípio de Indução Matemática é ,geralmente, descrito em duas formas, quais sejam, aquele sobre o qual falamos até agora é chamado de "indução fraca", que se aplica a declarações sobre números naturais n, e a outra que é denominada de “indução forte”, que será vista no próximo tópico.

A seguir, trataremos dessas duas formas.

2.4 O princípio fraco de Indução Matemática

Se a afirmação p(b) for verdadeira e a declaração $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ é verdade para todos $n \geq b$, então p(n) é verdadeira para todos os naturais $n \geq b$. Suponhamos, por exemplo, que desejemos dar uma prova indutiva direta de que $2^{n+1} > n^2 +3$ para $n \geq 2$, podemos proceder da seguinte forma:

Devemos provar por Indução Matemática que é valida a proposição p(n): $2^{n+1} > n^2 + 3$ para $n \geq 2$.

Primeiro, vamos verificar para o primeiro número natural admissível, n = 2, quando teremos $2^{2+1} = 2^3 = 8 > 2^2 + 3 = 7$ e, como $8 > 7$, é verdadeira a proposição para esse menor valor de n. Agora, vamos provar p(n - 1) ⇒ p(n).

Suponhamos que $n > 2$ e que para p(n - 1): $2^{n-1+1} > (n - 1)^2 + 3$, ou seja: $2^n > n^2 -2n + 1 + 3$.

Agora, multiplicamos ambos os lados dessa desigualdade da proposição p(n - 1): $2^{n-1+1} > (n - 1)^2 + 3$ por 2, resultando em $2.2^{n-1+1} = 2^{n+1} > 2(n^2 -2n + 1) + 6 = 2n^2 - 4n+ 2 + 6 = n^2 + 3 + n^2 - 4n + 4 + 1 = n^2 + 3 + (n - 2)^2 + 1$. Uma vez que $(n - 2)^2 + 1$ é positivo para $n > 2$, isso prova $2^{n+1} > n^2 + 3$. Nós apenas mostramos que a partir da hipótese de p(n - 1) podemos provar p(n). Agora, podemos aplicar a regra para afirmar que p(n - 1) ⇒ p(n). Portanto $2^n > (n - 1)^2 + 3 \Rightarrow 2^{n+1} > n^2 + 3$, pelo PIM, $2^{n+1} > n^2 + 3$ para $n \geq 2$.

Na prova que acabamos de apresentar, a sentença "$2^{2+1} = 2^3 = 8 > 2^2 + 3 = 7$" é denominada de **caso base**. Consistiu em provar que p(b) é verdadeira, neste caso para b = 2 confirmando que $2^{n+1} > n^2 + 3$.

Para $n \geq 2$ temos que $2^n \geq (n - 1)^2 + 3$ o que denominamos de **hipótese indutiva**. Este é o pressuposto para que p(n - 1) seja verdadeira.

Em provas de Indução Matemática, sempre utilizaremos hipóteses para provar a implicação p(n - 1) ⇒p(n), o que denominamos de **passo indutivo** da prova e a fase final da prova é chamada de **conclusão indutiva** e passamos a dispor de um método, com base lógica, que nos permitirá decidir sobre a validade, ou não, de uma proposição.

Muitas vezes, em provas por Indução Matemática, menosprezamos a caso base, pelo fato de ser muito simples, porém ele é de extrema importância, pois como o PIM é uma demonstração por implicação, ela é demonstrada de forma que p(n - 1) ⇒ p(n), e o fato de uma implicação ser válida, não depende diretamente da propriedade ser verdadeira.

Então, é possível demostramos o **passo indutivo**, de uma propriedade errada, ou seja, o que estamos somente demostrando que p(n - 1) ⇒ p(n) e isso é possível, mesmo que a propriedade seja falsa, então se a propriedade é falsa e a implicação é válida, logo o **caso base** esta errado, devido a essa problemática é fundamental verificar o valor de n a partir do qual a propriedade é verdadeira, ao final do capítulo, iremos explicar a importância do **caso base**.

Teremos, portanto, no PIM os seguintes procedimentos:

I – Verificar o **caso base**, ou seja, se a proposição é válida para o menor valor natural de seu domínio;

II – Admitimos o **passo indutivo**, ou seja, como verdadeira a proposição para um dado k = n - 1;

III – Mostramos a validade da proposição, **conclusão indutiva**, ou seja, se a proposição é válida par qualquer valor natural n.

Com o PIM, poderemos, por exemplo, provar as validades de proposições como as que apresentamos a seguir:

a) $p(n): 1 + 3 + 5 + ... + (2.n - 1) = n^2$, para $n \geq 0$.
b) $p(n): 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$
c) $p(n): 2 + 5 + 8 + ... + (2 + 3.n) = n(4 + 3.n)/2$
d) $p(n): 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$
e) $p(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2.n + 1)/6$
f) O número de diagonais de um polígono convexo de n lados e pode ser calculado por $d_n = n(n - 3)/2$
g) Dado um conjunto A finito com n elementos, então P(A), conjunto das partes de A, que tem 2^n elementos

A título de exemplificação, inicialmente demonstraremos pelo PIM, a validade da primeira dessas proposições, $p(n): 1 + 2 + 3 + ... + (2.n - 1) = n^2$, para $n \geq 0$.

Verificando o nosso **caso base** notamos que a fórmula é válida quando n = 1, pois $1 = 1^2$.

Suponhamos indutivamente que a fórmula é válida quando n = k - 1, de modo que $1 + 3 + ... + (2(k -1) - 1) = 1 + 3+ ... + 2.k - 3 = (k - 1)^2$, ou seja $1 + 3+ ... + 2.k - 3 = k^2 - 2.k +1$.

Verifiquemos agora se a conclusão indutiva é válida para todo n = k.

Adicionando (2k – 1) em ambos os lados da última equação, teremos:

$1 + 3 + ... + (2k - 3) + (2k - 1) = k^2 - 2.k + 1 + 2.k - 1 = k^2$.

Portanto pelo PIM a proposição p(n): $1 + 2 + 3 + ... + (2.n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo $n \geq 0$.

Observamos que, na nossa discussão sobre essa proposição, p(n): $1 + 3 + 5 + ... + (2.n - 1) = n^2$, para $n \geq 0$, é a afirmação que obtemos ao substituir n por k na fórmula, e na equação nós estávamos provando $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$.

Pelo fato de não deixarmos explicitamente que iríamos dar uma prova por Indução Matemática, dizíamos que faríamos a **hipótese indutiva**: "Assuma indutivamente isso...". Esta convenção torna a técnica mais eficiente, apesar disso, ainda estaremos utilizando o PIM.

Observemos, também, como a notação da declaração nos ajudou a escrever a prova. Caso declararmos que estamos tentando provar em termos de uma variável diferente de n, digamos k, então podemos assumir que a declaração desejada é válida quando esta variável k é igual a n - 1 e depois provar que a declaração é válida quando k = n.

Sem este dispositivo de notação, temos que mencionar nossa afirmação p(n) explicitamente, ou evitar qualquer discussão de substituição e valores na fórmula que estamos tentando provar. Nossa prova da proposição $2^{n+1} > n^2 + 3$ explica essa última abordagem para escrever uma prova por Indução Matemática em uma forma simples.

Este é geralmente o modo, digamos, "mais limpo" de escrever uma prova por Indução Matemática, mas que ,muitas vezes, torna-se a técnica mais difícil de dominar. Usaremos essa abordagem para a próxima proposição.

Suponha que desejamos saber para quais valores de $n \in \mathbb{N}$ de modo que p(n): $2^n > n^2$ é válida. Usando o princípio de Indução Matemática para mostrar que a proposição p(n) é valida.

Notamos que para n = 1 proposição é verdadeira, pois $2^1 > 1^2$, porém a desigualdade falha para n = 2, 3, 4. No entanto, para n = 5, temos $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Agora, assumimos, intuitivamente, que para $n \geq 5$ temos $2^{n-1} > (n - 1)^2$. Multiplicarmos por 2 ambos os membros da desigualdade de termos:

$2.2^{n-1} = 2^n > 2.(n - 1)^2$;

$2^n > 2.(n^2 - 2.n + 1)$;

$2^n > n^2 + n^2 - 4.n + 2 > n^2 + n^2 - n.n = n^2$.

Uma vez que $n > 5$ implica que $-4n > -n.n$. (Também usamos o fato de $n^2 + n^2 - 4n + 2 > n^2 + n^2 - 4n$).

Assim, pelo princípio de Indução Matemática, temos que p(n): $2^n > n^2$ para todos $n \geq 5$.

Observamos como o método "mais limpo" simplesmente pressupõe que saibamos que estamos fazendo uma prova por Indução Matemática do nosso "Assumiremos indutivamente...", e nos fornece o p(n) apropriado e provamos $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$.

Aqui está uma pequena variação da técnica de mudança de variáveis. Para provar que $2^n > n^2$ quando $n \geq 5$, observamos que a desigualdade se mantém quando $n = 5$ desde $32 > 25$.

Supomos, indutivamente, que a desigualdade é válida quando $n = k$, de modo que $2^k > k^2$. Quando $k \geq 5$, multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por 2 teremos:

$2^{k+1} > 2.k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5.k > k^2 + 2.k + 1 = (k + 1)^2$.

Desde $k \geq 5$ implica que $k^2 \geq 5.k$ e $5.k = 2.k + 3.k > 2.k + 1$. Assim, pelo princípio de Indução Matemática, $2^n > n^2$ para todos os $n \geq 5$.

Esta última variação da prova ilustra duas ideias, a saber: não há necessidade de perpetuar o nome n para a variável que usamos na aplicação do princípio de Indução Matemática, bem como usamos k como a nossa "variável de indução" nesta situação, isto é, não há necessidade de nos restringirmos para provarmos a implicação $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$.

Nesse caso, provamos a implicação $p(k) \Rightarrow p(k + 1)$, que é correspondente a $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$, o que podemos verificar por mudança de variável.

Essas duas implicações são equivalentes desde que n varie em todos os números naturais maiores do que b (b será o nosso **caso base**) e k variam em todos os números naturais maiores ou iguais a b.

Tendo em vista o que acabamos de expor, procuraremos, agora, demostrar a proposição: g) Dado um conjunto A finito com n elementos, então P(A), é o conjunto das partes de A, que tem 2^n elementos.

Consideremos a proposição p(n) a afirmação de que se um conjunto possui n elementos então ele tem 2^n subconjuntos.

Para n = 1, p(n) é verdadeira, nosso **caso base**, pois se o conjunto A = $\{a_1\}$, P(A) = $\{\{a_1\}, \varnothing\}$, o número das partes de A é n(P(A)) = $2^1 = 2$.

Supomos p(n - 1) seja verdadeira, **hipótese indutiva**, para um conjunto com (n - 1) elementos, ou seja, o número de subconjuntos do mesmo será igual a 2^{n-1} e provaremos para o conjunto A com n elementos que n(P(A)) = 2^n.

Para fazer isso, adicionaremos o elemento a_n a nossa **hipótese de indução**, A = $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$ e n(P(A))= $2.2^{n-1} = 2^n$ subconjuntos, o que prova que p(n) é verdadeira, **passo indutivo,** para um conjunto A com n elementos.

Vale ressaltar que a nossa proposição foi multiplicada por 2, pois o novo elemento a_n, será adicionado e formará novos conjuntos a cada 2^{n-1} conjuntos já existentes. Devemos lembrar que o mesmo não formará um novo elemento com Ø.

Para ficar claro, vamos mostrar a situação para n = 2, n = 3 e n = 4:

Para n = 2, $\{a_1, a_2\} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \varnothing\}$ = 4 conjuntos = 2^2 subconjuntos;

Para n = 3, $\{a_1, a_2, a_3\} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \varnothing\}$ = 8 conjuntos = $2.2^2 = 2^3$ subconjuntos;

Para n = 4 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \varnothing\}$ = 16 conjuntos = $2.2^3 = 2^4$ subconjuntos.

O que podemos perceber é que a cada novo elemento adicionado, o valor de subconjuntos dobra.

Assim, a nossa **conclusão indutiva,** pelo princípio de Indução Matemática temos que p(n) é verdadeira para todos os valores de n natural.

2.5 O princípio forte de Indução Matemática

Até agora o que sabemos sobre o princípio de Indução Matemática que é um método para provar se uma propriedade é válida para todos os números naturais, a partir de um determinado valor (**caso base**) e para provar isso usamos os seguintes passos.

Primeiramente, como dito anteriormente, verificamos a validade para um **caso base**, ou seja, a propriedade vale para um determinado valor.

Em seguida, provamos o **passo indutivo**, passo esse que garante que uma propriedade de uma proposição de um número é verdadeira, então vale para o próximo, seu sucessor. Esse método é o que conhecemos como indução fraca.

Podemos nos perguntar: isso é tudo o que o princípio de Indução Matemática é?

Podemos perceber que não, pois, apesar do princípio fraco de Indução Matemática ser um método extremamente poderoso para resolver e provar certas proposições, ela recebe este nome devido ao quanto o **passo indutivo** é fraco, pois a propriedade vale para certo número, que é o nosso **caso base**. Já em comparação ao **passo indutivo,** que veremos essa hipótese é fraca.

Geralmente, há outro princípio de Indução Matemática, denominado de princípio forte de Indução Matemática, que comumente é utilizado quando não podemos demonstrar utilizando a indução fraca. Esses tipos de métodos diferem no **passo indutivo**.

Em uma demonstração de indução fraca, no **passo indutivo** temos que mostrar que toda vez que p(n - 1) é verdadeira, p(n) também será verdadeira.

Observamos que na indução fraca, utilizamos apenas uma instância da **hipótese de indução**.

Em uma demonstração utilizando indução forte, no nosso **passo indutivo** temos que mostrar que toda vez que uma proposição p(k) é verdadeira para todo $k \leq n - 1$ então p(n) também será verdadeira.

Observamos que na indução forte, podemos aplicar várias instâncias da **hipótese de indução** e/ou não restringe a aplicação da mesma em uma única instância do **passo indutivo** como é feito na indução fraca.

Mais uma vez, podemos evitar o passo de gerar uma contradição da seguinte maneira. Suponhamos primeiro que nós temos uma prova de que q(0) é válida suponhamos também que tenhamos uma prova de que.

$q(0) \land q(1) \land q(2) \land ... \land q(k - 1) \Rightarrow q(k)$, para todo $k > 0$.

Então, a partir de q(0) podemos provar q(1), de $q(0) \land q(1)$ podemos provar q(2), de $q(0) \land q(1) \land q(2)$ podemos provar q(3) e assim por diante, dando-nos uma prova de q(n) é verdadeira para qualquer n que desejarmos.

Esta é outra forma do princípio da Indução Matemática e nós a usamos, quando podemos obter uma implicação da forma $q(k') \Rightarrow q(k)$ para algum $k' < k$ ou quando podemos obter uma implicação da forma:

$$q(0) \land q(1) \land q(2) \land ... \land q(k - 1) \Rightarrow q(k).$$

Descrevemos agora, mais detalhadamente o método de prova conhecido como o princípio forte da Indução Matemática que nos diz que: Se a afirmação p(b) (**caso base**) for verdadeira e declaração $p(b) \land p(b + 1) \land ... \land p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ é verdadeiro para todos $n > b$, então p(n) é verdadeiro para todos os números naturais $n \geq b$. Em outras palavras se a propriedade vale para todos os números menores de n, então a propriedade vale pra n.

A título de exemplificação, mostraremos que todo natural é uma potência de um número primo ou produto de potência de números primos. Nessa proposição podemos observar que 1 é uma potência de um número primo; por exemplo, $1 = 2^0$. Assumimos agora que cada número natural anterior a n é uma potência de um número primo, ou um produto de potência de números primos.

Então, se n não é um número primo, é um produto de dois números menores, cada um dos quais é, por nossa suposição, uma potência de um número primo, ou um produto de potência de números primos. Portanto, n é uma potência de um número primo ou um produto de potência de números primos. Assim, pelo princípio forte da Indução Matemática, todo número natural é uma potência de um número primo ou um produto de potência de números primos.

Observamos que não houve uma menção explícita de uma implicação da forma $p(b) \wedge p(b+1) \wedge \ldots \wedge p(n-1) \Rightarrow p(n)$. O que é comum com as provas pelo princípio forte da Indução Matemática. Também que não identificamos explicitamente o **caso base** ou a **hipótese indutiva**, **passo indutivo**, em nossa prova, isso também é comum de ocorrer.

As provas por Indução Matemática são reconhecidas quando está sendo dado o **caso base** e também uma implicação da forma $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ ou $p(b) \wedge p(b + 1) \wedge \ldots \wedge p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ está sendo provada.

A Indução Matemática é usada com frequência em matemática discreta e ciências da computação, quando estamos interessados em medir, por exemplo, o tempo de execução, espaço de memória utilizada por um programa, valores esses que normalmente são números naturais e, um programa, normalmente é restrito a números naturais e, portanto, a Indução Matemática é a maneira natural de provar os fatos sobre esses valores.

Não iremos distinguir entre o princípio fraco de Indução Matemática e o princípio forte de Indução Matemática, pensaremos neles apenas como princípio de Indução Matemática, pois ambos provam qualquer propriedade referente aos números naturais.

2.6 Induções em geral

Para resumir o que dissemos até agora, uma prova típica por Indução Matemática, mostrando que uma declaração $p(n)$ é verdadeira para todos os números naturais $n \geq b$, consiste em três etapas.

1ª Mostraremos que p(b) é verdadeiro. Isso é "estabelecer o **caso base**".

2ª Então mostraremos que para completar a prova de implicação faremos a **hipótese indutiva** de p(n - 1) ou p(b) $\wedge$ p(b + 1) $\wedge$ ... $\wedge$ p(n - 1), para chegarmos em p(n), **passo indutivo**, seja n $>$ b, p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n), ou para todos n $>$ b, p(b) $\wedge$ p(b + 1) $\wedge$ ... $\wedge$ p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n).

3ª Finalmente, concluímos, com base no princípio da Indução Matemática, que p(n) é verdadeira para todos os números naturais n maiores ou iguais a b, o que denominamos de **"conclusão indutiva"**.

O segundo passo é o núcleo da prova por Indução Matemática, este é geralmente onde precisamos dar maior atenção no que estamos tentando provar. A ideia da nossa discussão sobre a proposição p(n): $2^n > n^2$, deve ser claro que no segundo passo é simplesmente uma mudança de variável para uma prova indutiva.

É importante perceber que a indução surge em algumas circunstâncias que não se encaixam no enunciado da descrição típica de Indução Matemática que temos mencionado. Essas circunstâncias surgir muitas vezes em ciência da computação, no entanto, as provas indutivas sempre envolvem três coisas que veremos a seguir.

Primeiramente vale percebermos que, sempre precisamos de um **caso básico** ou **de casos básicos**. Em segundo lugar, precisamos mostrar uma implicação que demonstra que p(n) é verdadeira, dado que p(n_0) é verdadeira para algum conjunto de $n_0 < n$. E por fim, chegamos a nossa **conclusão indutiva** com base nos dois primeiros passos.

2.7 Aspectos formais do princípio de Indução Matemática

Rememorando os dois princípios de Indução Matemática apresentados, temos que:

O princípio fraco de Indução Matemática afirma que se a afirmação p(b) for verdadeira, e a afirmação p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n) é verdade para todos n $>$ b, então p(n) é verdadeira para todos os números naturais n $\geq$ b;

O princípio forte da Indução Matemática afirma que se a afirmação p(b) for verdadeira e a indicação $p(b) \wedge p(b + 1) \wedge \ldots \wedge p(n - 1) \Rightarrow p(n)$ é verdadeira para todos $n > b$, então p(n) é verdadeira para todos os números naturais $n \geq b$.

Caso base - toda prova por Indução Matemática, fraca ou forte, começa com um caso base que estabelece que o resultado esteja sendo provado para pelo menos um valor da variável em que estamos induzindo. Este caso base deve provar o resultado para o menor valor da variável da qual estamos afirmando o resultado. Em uma prova com vários casos base, os casos base devem cobrir todos os valores da variável que não são cobertos pelo passo indutivo da prova.

Hipótese indutiva - toda prova por Indução Matemática inclui uma hipótese indutiva em que assumimos o resultado da proposição p(n) que estamos tentando provar é verdadeira quando $n = k - 1$ ou quando $n < k$ (ou em que assumimos uma declaração equivalente).

Passo Indutivo - cada prova por Indução Matemática inclui um passo indutivo no qual provamos a implicação de que $p(k - 1) \Rightarrow p(k)$ ou a implicação de que $p(b) \wedge p(b + 1) \wedge \ldots \wedge p(k - 1) \Rightarrow p(k)$, ou alguma implicação equivalente.

Conclusão indutiva - uma prova por Indução Matemática deve incluir, pelo menos implicitamente, uma declaração conclusiva da forma "Assim, pelo princípio da Indução Matemática". Que afirma que, pelo princípio da Indução Matemática, o resultado p(n) que estamos tentando provar é verdadeiro para todos os valores de n, incluindo e além do(s) caso(s) base.

Agora vamos solucionar o item d) p(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, mas vamos supor que nos temos somente a soma e queremos achar a fórmula (propriedade), ou seja, p(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = ?$, Para tanto, temos que começar fazendo um trabalho exploratório, investigaremos para achar o padrão matemático da nossa proposição.

p(1): $2^0 = 1$;

p(2): $2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$;

p(3): $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$;

p(4): $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$;

p(5): $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$.

Então podemos supor que é a fórmula $2^n - 1$, pois:

p(1): $2^0 = 1 = 2^1 - 1$;

p(2): $2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$;

p(3): $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 +2 + 4 = 7 = 2^3 - 1$;

p(4): $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 2^4 - 1$;

p(5): $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 2^5 - 1$.

Contudo, podemos concluir que essa é a fórmula?

Ainda não, temos que mostrar todo o processo de Indução Matemática.

Então seja p(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$, iremos provar que p(n) é verdadeira.

Vamos verificar o **caso base.**

p(1): $2^1 - 1 = 1$, que é verdadeira.

Agora, suponhamos que p(n - 1) seja verdadeira, **hipótese indutiva**, e queremos provar que p(n) também seja verdadeira, **possa indutivo**, ou seja, p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n).

P(n - 1): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{(n-1)-1} = 2^{(n-1)} - 1$, para obter p(n), basta adicionar 2^{n-1} em ambos os membros da igualdade, daí teremos:

P(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{(n-1)-1} + 2^{n-1} = 2^{(n-1)} - 1 + 2^{n-1}$, fazendo as devidas operações no segundo membro, obteremos;

P(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{(n-1)-1} + 2^{n-1} = 2.2^{(n-1)} - 1 = 2^n - 1$.

Por tanto, pelo princípio de Indução Matemática p(n) é verdadeira.

É muito importante desenvolver a capacidade de reconhecer um padrão matemática nos alunos do Ensino Básico e generalizar o padrão, porém isso é uma péssima atitude afirmar para o discente que é suficiente observar o padrão e obter uma fórmula baseado pelo mesmo e afirmar que é valido para todos os números naturais.

Então, o padrão permite nos elaboramos uma conjectura, que são candidatos a teoremas, e é de fundamental importância, no trabalho da matemática, usar a intuição, dedução, experimentação e também casos particulares, para que nos convencemos de determinada propriedade seja verdadeira.

Como a nossa demonstração é da forma de implicação temos que ter certos cuidados, quando uma afirmativa $P \Rightarrow Q$, uma situação que devemos nos preocupar é quando P é verdadeira, pois quando P e Q são verdadeiras a nossa implicação é verdadeira, mas se P é verdadeira e Q é falsa a nossa implicação é falsa.

Agora, se P for falsa, não importa se Q é verdadeira ou não, teremos implicações verdadeiras, então o caso que nos interessa é quando P é verdadeira, por isso que a nossa demonstração por implicação, consiste em verificar (examinar) o caso em que P é verdadeira e mostrar que Q também é verdadeira para a proposição.

Então para demostrar a implicação, suponhamos que $p(n - 1)$ seja verdadeira para $n \in \mathbb{N}$ e em seguida temos que provar $p(n)$ e para isso, cada caso terá a sua própria estratégia.

Como já afirmamos anteriormente, a estrutura de uma demonstração por Indução Matemática, consiste em verificar o **caso base**, que é o valor de n que a partir do qual a propriedade é válida e o **passo indutivo** é demonstrar esse fato que é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbb{N}$ quando, $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$.

Logo, demostramos esses dois passos, o quinto axioma de Peano nos garante de que o subconjunto dos números naturais para os quais $p(n)$ é válida é o próprio $\mathbb{N}$, ou seja, a propriedade vale para todo n natural.

Contudo, continua sem lógica, pois estamos utilizando a própria propriedade que queremos demostrar na própria demonstração, então iremos mitigar esse desconforto.

Suponhamos que para o item d) que solucionamos, propusermos uma conjectura da forma, $p(n)$: $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 2$, que está errada, pois se fizermos para $n = 1$, teremos como resultado 0 (zero), logo esta incorreto.

Digamos que não iremos verificar o **caso base**, pois como foi mencionado anteriormente ele é trivial, vamos fazer a **hipótese de indução** e logo em seguida o **passo indutivo** e então veremos o que ocorrerá.

Suponhamos que seja válida p(n – 1): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{(n-1)-1} = 2^{n-1} - 2$, para provarmos que p(n) é verdadeira somaremos 2^{n-1} em ambos os membros.

p(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{(n-1)-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} - 2 + 2^{n-1} = 2.2^{n-1} - 2 = 2^n - 2$, pois é exatamente a proposição p(n): $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 2$ na qual falamos como verdadeira, ou seja, provamos que p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n).

O fato da implicação ser verdadeira, não depende diretamente da propriedade também ser verdadeira. Acabamos de mostrar que é perfeitamente possível demostrar o **passo indutivo** para uma propriedade falsa.

Então, podemos anuir que se a propriedade é falsa e p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n), o **caso base** está errado como mencionamos anteriormente.

Mostramos que no **passo indutivo** é algo que temporariamente supomos que a propriedade da proposição p(n) é verdadeira para um (n - 1) e para demonstramos que é verdadeira para n, mas esse fato esta desvinculado até certo ponto da propriedade ser verdadeira ou não, estamos demonstrando somente uma implicação, logo verificar o **caso base** é fundamental.

Um exemplo clássico é o caso dos dominós, que se tivermos uma fileira (sequência), de tal forma que cada um derrubasse o seguinte, isso é o 1º derrubasse o 2º, o 2º derrubasse o 3º e assim por diante, ou seja, sempre o próximo será derrubado não importando a quantidade de dominós, todos serão derrubados.

Comparando com a situação que nos não verificamos o caso base, imaginemos que fixássemos o 1º domino, logo não iremos derrubá-lo e, por conseguinte não iremos derrubar os demais.

Logo, para provarmos pelo PIM temos que fazer todos os passos e finalizarmos dizendo que “pelo princípio de Indução Matemática a propriedade da proposição p(n) é válida para todos n $\in \mathbb{N}$”.

3 RECORRÊNCIA

Vamos iniciar o nosso capítulo falando sobre a relação de Recorrência (ou passo recorrente) é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmos partindo de problemas particulares para problemas genéricos, isto é, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

As relações de Recorrência são compostas por duas partes importantes:

1. A condição inicial ou condições iniciais: que devem ser conhecidas;
2. A equação de Recorrência: que é a regra que permitirá calcular os próximos termos em função dos antecessores.

A equação de Recorrência não pode definir sequências sem as condições iniciais, ou seja, não é uma relação de Recorrência.

A Recorrência é uma regra que nos permite calcular um termo qualquer de uma sequência em função de termos anteriores, para nos familiarizamos com esse objeto matemático vamos definir inicialmente o que é uma sequência.

Para definirmos melhor uma sequência iremos exemplificar comparando com um conjunto, relembrando que um conjunto é representado por uma letra maiúscula e seus elementos estão entre chaves.

Sendo A = {x, y, z}, percebemos que o conjunto {z, y, x} é o mesmo conjunto A, pois o que define os conjuntos são os seus elementos independente de sua ordem, por tanto se os elementos dos dois conjuntos não estejam na mesma ordem, mas sejam iguais, então eles são o mesmo conjunto.

Para escrever uma sequência utilizamos um par de parênteses diferente dos conjuntos, então iremos comparar as sequências (x, y, z) e a sequência (z, y, x), percebemos que são sequências diferentes, pois na primeira sequência o primeiro elemento é x, o segundo é y e o terceiro é z; já na segunda sequência o primeiro elemento é z, o segundo é y e o terceiro é x.

Então, uma sequência é todo conjunto, ou grupo, no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem, ou seja, a ordem já importa nessa situação.

Neste estudo da matemática temos um tipo de sequência: a sequência numérica. Essa sequência que estudaremos em matemática é composta por números que estão dispostos em uma determinada ordem preestabelecida.

Exemplo: os múltiplos positivos de 4 nos números naturais não nulos.

(4, 8, 12, 16, 20, 24,...), mas também podemos ter sequência como (π, 9, 13, $-\sqrt{11}, \ldots$).

A diferença fundamental entre estas sequências é que a primeira tem uma regra, uma lei de formação, enquanto a segunda nos parece não possuir uma lei de formação.

Neste trabalho trataremos de sequências numéricas em que as mesmas terão uma lei de formação. É muito importante termos cuidado com essas leis, pois às vezes elas podem ser tão complicadas que nós não as enxergamos e pensamos que elas não existe, vejamos o exemplo:

Em um concurso foi solicitado o próximo número da sequência a seguir (2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, ...).

Observamos que seria muito complicado encontrar uma lei numérica para essa sequência e de fato é. Porém ela apresenta uma lei que é a sequência dos números naturais crescentes cuja denominação começa com a letra D, logo o próximo elemento será o "duzentos".

Outro exemplo seria de estabelecer qual será o próximo elemento da sequência (1, 3, 5, ...), de situações como essa seria a de se determinar.

Possivelmente pensaríamos no número 7, pois é o próximo número ímpar, mas essa sequência também pode ser representada por outras leis de formação como, por exemplo:

$T_n = - n^3/6 + n^2 + n/6.$

Provavelmente é difícil de acreditar que essa sequência seja formada por essa lei de formação, então vamos verificar a sequência. Para calcular os termos da nossa sequência basta substituir n por 1 para obtermos o primeiro termo, por 2 para obtermos o segundo termo, por 3 para obtermos o terceiro termo e assim por diante, então:

Para n = 1 teremos:

$T_1 = - 1^3/6 + 1^2 + 1/6 = - 1/6 + 1 + 1/6 = 1.$

Para n = 2 teremos:

$T_2 = - 2^3/6 + 2^2 + 2/6 = - 8/6 + 4 + 2/6 = 3.$

Para n = 3 teremos:

$T_3 = - 3^3/6 + 3^2 + 3/6 = - 27/6 + 9 + 3/6 = 5.$

E nesse caso, o próximo termo para n = 4 teremos:

$T_4 = - 4^3/6 + 4^2 + 4/6 = - 64/6 + 16 + 4/6 = 6.$

Esse exemplo foi retirado de uma aula do Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP do professor Fabio Henrique Teixeira de Souza em 22 de set de 2016.

Esses exemplos serviram para nos mostrar que não devemos presumir o próximo termo de uma sequência numérica se não soubermos exatamente qual é a lei de formação da mesma.

Além disso, com o conhecimento da lei de formação de uma sequência numérica podemos calcular quaisquer de seus termos, sem que seja necessário calcular os termos anteriores, caso desejássemos calcular o quadragésimo termo de uma dada sequência em que conhecemos a sua lei de formação p(n) da referia sequência, basta substituir 40 no lugar de n e iremos saber quem ele é sem ter a necessidade de calcular os termos anteriores.

Quando chegamos nesse estágio da lei de formação, dizemos que ela é a fórmula fechada que nos permite calcular seus termos, mas nem sempre ela virá nessa forma, ou seja, ela poderá vir num formato de recursão.

Vejamos os exemplos a seguir:

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = 2.T + 1 \\ (3, 7, 15, \ldots) \end{cases}$$

Notemos que a nossa sequência já está iniciada com o primeiro termo igual a 3, o segundo termo igual a 7, o terceiro termo igual a 15 e a lei de formação foi dada. Vamos entender o que cada coisa significa, o que a lei de formação nos traz é que se você pegar um termo multiplica ele por 2 e soma com 1 conseguimos encontrar o termo seguinte, por isso tem o T_{n+1}, percebemos que esse n+1 não está sendo somado ao valor do termo e está se referindo a posição do termo, mas como assim?

Caso pegarmos o primeiro termo que é 3, então estamos pensando em n = 1, vamos multiplicar por 2 teremos 6 e somarmos com 1 dando 7 que é o segundo termo, de forma análoga pegando o segundo termo que é 7 multiplicarmos por 2 obtemos 14 e somarmos com 1 obtemos 15, que é o terceiro termo e assim por diante.

Assim, $T_{n+1} = 2.T_n + 1$ é a lei de formação na forma recursiva, uma desvantagem da forma recursiva tem em relação a forma fechada é que se quisermos calcular o trigésimo termo, temos que calcular termo a termo, ou seja, temos que reproduzir toda a nossa sequência até o termo desejado, como mencionado a forma fechada é mais direta. Com isso iremos fechar um pouco mais o nosso ambiente de estudo.

Agora vamos trabalhar com sequências numéricas com lei de formação na forma recursiva, este vai ser o nosso objeto de estudo a partir de agora.

Tendo em vista o nosso objeto de estudo vamos analisar a seguinte sequência, a sequência de números ímpares (1, 3, 5,...), então iremos escrever essa lei de formação, essa recursão, que corresponde a nossa sequência de números ímpares. Para formar essa lei percebermos que basta somar duas unidades ao termo anterior, então a lei será $T_{n+1} = T_n + 2$, não esquecendo de que n e (n + 1) são indicadores da posição dos termos.

Mas, contudo vamos verificar outra sequência, a sequência dos números pares (2, 4, 6,...) escrevendo a lei de formação dessa sequência percebemos que e a mesma dos números ímpares, ou seja, $T_{n+1} = T_n + 2$.

Esses exemplos foram escolhidos para mostrar que uma mesma lei de formação pode servir para mais de uma sequência, então o que faremos para tirar essa ambiguidade? Quais das duas sequências iremos trabalhar? Com os números pares ou números impares?

Para isso vamos “avisar” o leitor dando a lei de Recorrência e também o primeiro termo da nossa sequência, no caso da sequência dos números impares, $T_1 = 1$ e na sequência dos números pares $T_1 = 2$, daí com esse par de informações é suficiente para definir a nossa sequência.

Então percebemos que a sequência dos números impares é:

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = T_n + 2 \\ T_1 = 1 \end{cases}$$

E a sequência dos números pares é:

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = T_n + 2 \\ T_1 = 2 \end{cases}$$

Vamos agora exemplificar de uma maneira mais abrangente com o próximo exemplo:

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = T_n + 4 \\ T_1 = 3 \end{cases}$$

Então, a nossa sequência é (3, 7, 11, 15,...) esse tipo de sequência é um tipo muito conhecido no Ensino Básico, principalmente no ensino médio, que é a progressão aritmética. Lembrando que a definição de uma progressão aritmética é uma sequência em que temos um termo inicial e que de um termo para o outro vamos somando sempre a mesma quantidade e essa quantidade é denominada de r (razão), então no nosso exemplo, 4 é a nossa razão, daí podemos dizer que toda progressão aritmética é escrita:

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = T_n + r \\ T_1 = a \end{cases}$$

Onde a é o nosso primeiro termo. Então, essa é a forma geral de uma progressão aritmética na forma de recursão, e que a nossa sequência é (a, a + r, a + 2r, a + 3r,...), ou seja, uma progressão aritmética também é uma recursão.

Veremos agora o caso em que ao invés da soma teremos um produto, então seja a sequência definida por:

$$T_n:\begin{cases} T_{n+1} = 3.T_n \\ T_1 = 4 \end{cases}$$

Daí, temos que a sequência é (4, 12, 48, ...), pois o primeiro termo é quatro o segundo é doze, pois é três vezes quatro, o terceiro é doze vezes três que tem como resultado quarenta e oito e assim por diante, ou seja, são os múltiplos de três, iniciando do quatro.

Percebemos que essa sequência também é bastante conhecida no Ensino Básico que é a progressão geométrica. Mais uma vez lembrando a definição de uma progressão geométrica é uma sequência que temos um termo inicial e de um termo para o outro iremos multiplicar sempre pelo mesmo número e esse número também é chamado de razão, mas na progressão geométrica será representada por q.

Da mesma forma que a progressão aritmética foi escrita, a nossa progressão geométrica podemos também escrever de uma forma de Recorrência de seguinte aspecto:

$$T_n:\begin{cases} T_{n+1} = q.T_n \\ T_1 = a \end{cases}$$

Notemos que esse tipo de sequência é definida da seguinte forma (a, a.q, a.q^2, a.q^3,...) que conhecemos como progressão geométrica.

Agora vejamos outro exemplo:

$$T_n:\begin{cases} T_{n+2} = T_{n+1}+T_n \\ T_1 = 3 \end{cases}$$

Percebemos que a lei de formação nos diz que para calcular o novo termo precisamos dos dois termos que o antecede, porém temos somente o primeiro termo. Notemos que algo está faltando, para que comecemos o nosso processo de Recorrência para gerar a nossa sequência, então conhecendo o primeiro termo não é suficiente para gerar essa sequência, pensando em n = 1 iremos calcular o T_3, mas como iremos calcular se não temos o T_2?

Num exemplo como esse, precisamos do segundo termo, dessa forma vamos completar a nosso lei de formação adicionando o $T_2 = 4$.

$$T_n: \begin{cases} T_{n+2} = T_{n+1} + T_n \\ T_1 = 3 \\ T_2 = 4 \end{cases}$$

Portanto, com esse conjunto de três informações, definimos corretamente e de maneira única a nossa sequência (3, 4, 7, 11, 18, 29,...).

Assim sendo, o que queremos mostrar é que nem sempre basta sabermos o primeiro termo, ou seja, dependendo do tipo de lei de Recorrência precisamos de outros termos para iniciar o nosso processo de Recorrência.

Vejamos um exemplo muito famoso:

$$T_n: \begin{cases} T_{n+2} = T_{n+1} + T_n \\ T_1 = 1 \\ T_2 = 1 \end{cases}$$

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...) Essa é a sequência de Fibonacci, que a vermos em capítulo futuro.

Dado o exemplo a seguir:

$$T_n: \begin{cases} T_n = (T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n)/n \quad \text{para } n \geq 2 \\ T_1 = 6 \\ T_2 = 8 \end{cases}$$

Então, vamos descrever a sequência $T_n = (T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n)/n$, ou seja, para calcularmos o novo termo da nossa sequência precisamos calcular a média aritmética dos termos anteriores, e também temos uma nova informação, $n \geq 2$, que é uma condição para o uso da lei de Recorrência, em outras palavras só podemos usar a lei para 2 ou mais termos.

Essa condição é posta para evitarmos o seguinte problema, percebemos que foi definido o nosso primeiro termo igual a 6 e o segundo igual a 8, entretanto se essa condição não estivesse, poderíamos pensar em $n = 1$, que por sinal está proibido pela condição $n \geq 2$, então iremos calcular o segundo termo, o T_2, daí temos que dividir o primeiro termo por 1, e isso daria o próprio primeiro termo, o T_1, o que faríamos $T_2 = 6$ e isso desobedece a nossa definição que dizemos que o $T_2 = 8$, ou seja, não é essa a sequência que queremos construir.

A justificativa dessa condição é devida a nós termos T_1 e T_2, ou seja, os valores já estão vinculados a nossa sequência.

Então, vamos a nossa sequência, como já temos os dois primeiros termo que são $T_1 = 6$ e $T_2 = 8$, e de agora em diante, para calcularmos o T_3 precisamos calcular a média aritmética de 6 e 8 que nos dar 7, agora para calcularmos o T_4 precisamos calcular a média dos três primeiros termos que também nos dá 7, observando a nossa sequência, temos: (6, 8, 7, 7, ...) e o que podemos nos intrigar é que a partir do terceiro termo ela nos dá a média aritmética e esse número fica constante.

Quando observamos essa sequência pela primeira vez, parece algo extraordinário, mas como dissemos em situações anteriores não podemos presumir a nossa sequência, devido conhecermos alguns termos.

Desse modo mostraremos esse fenômeno, começando com $T_1 = x$ e $T_2 = y$ e então temos nossa sequência que é (x, y, ...) para calcularmos o terceiro termo temos que tirar a média aritmética de x e y que é $(x + y)/2$, daí temos a nossa sequência que é $(x, y, (x + y)/2,...)$, agora para encontrarmos o quarto termo devemos tirar a média dos três primeiros termos, então, $(x + y + (x + y)/2)/3 = (3x + 3y)/6 = (x + y)/2$, ou seja o quarto termo também é a média aritmética de x e y $(x, y, (x + y)/2, (x + y)/2...)$.

E para justificarmos esse valor da nossa sequência, a ideia é bem simples. Imaginemos que temos vários dados e calculamos a média desses dados, e iremos adicionar um novo dado aos demais, então termos 3 caos.

1° caso: se o novo dado for menor que a média, a nova média será "puxada" para baixo;

2° caso: se o novo valor for maior que a média, a nova media será "puxada" para cima;

3° caso: se o novo valor for igual à média, a nova média será igual, ou seja, permanecerá a mesma.

Exemplificaremos de uma maneira mais palpável. Imaginamos que no ano letivo de uma determinada instituição escolar a média das notas de um estudante seja 8, e na próxima prova ele tire 8 também. A sua média aritmética não irá alterar, então essa é a ideia desse fenômeno.

A facilidade com que resolvemos essas Recorrências e provamos nossa solução correta não deve ser um acidente, pois a Indução Matemática e a Recorrências estão intimamente relacionadas.

Segundo o professor Fabio Henrique Teixeira de Souza do PIC da OBMEP, a relação entre o princípio de Indução Matemática e as Recorrências são razoavelmente transparentes, uma vez que as Recorrências dão uma maneira natural de analisar algoritmos recursivos. Recursão e Recorrências são abstrações que permitem que você especifique a solução para uma instância de um problema de tamanho n como algumas funções de soluções para instâncias menores.

Observamos, mais criteriosamente, que a solução matemática das proposições por Recorrência é provada naturalmente por Indução Matemática. Na verdade, a resolução das Recorrências na definição do número de etapas necessárias para resolver um problema recursivo, também é provada naturalmente por Indução Matemática. A Recorrência ou a estrutura recursiva do problema torna-se simples através da criação da prova pelo PIM.

3.1 Problemas de Recorrência

Na proposição b) do capítulo 2, quando nos propusemos a determinar a fórmula para a soma dos n primeiros números naturais, nos referíamos a uma história que seria sobre o de autoria do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Conta-se que quando Gauss ainda era garoto, na escola em que estudava, seu professor, para aquietar a turma, teria mandado os alunos calcularem a soma de todos os números naturais de 1 até 100.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100.$$

Qual foi a surpresa quando, pouco tempo depois, o menino deu a resposta: 5050. O professor queria saber como Gauss tinha descoberto tão rapidamente o resultado, então teria descrito o método a seguir:

$$S_n = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51).$$

O que equivale a:

$$S_n = (1 + 100)50 = 101 \times 50 = 5050.$$

Mais tarde, a fórmula para calcular a soma dos n primeiros números naturais, S_n, passou a ser obtida da seguinte forma:

Desejamos calcular:

$$S_n = 1 + 2 + ... + n.$$

Somando a igualdade acima, membro a membro, com ela mesma, porém com as parcelas do segundo membro em ordem invertida, temos que:

$$S_n = 1 + 2 + ... (n - 1) + n \quad + \quad S_n = n + (n - 1)1 + ... + 2 + 1.$$

Teremos:

$$2.S_n = (n + 1) + (n + 1) + ...+ (n + 1).$$

Daí obtemos que $2.S_n = n(n + 1)$ e logo:

$$S_n = n(n + 1)/2.$$

Seremos críticos com relação à prova acima, pois embora a mesma possa parecer primorosa para grande parte das pessoas, poderíamos nos indagar sobre o que está “escondido” no lugar dos 'pontinhos' e talvez nos sentíssemos embaraçados.

Como ter a certeza de que nada acontece fora do nosso controle, exatamente na imensa região coberta pelos “pontinhos”?

Para não ter nenhuma dúvida sobre o nosso resultado, vamos provar a fórmula utilizando o princípio da Indução Matemática PIM, e para tal, vamos considerar a sentença aberta sobre os naturais.

$$p(n) = 1 + 2 + ... + n = n.(n + 1)/2.$$

Notemos que:

$$p(1) = 1.(1 + 1)/2 = 1 \text{ é verdadeira } (\textbf{caso base}).$$

Assumimos ser verdadeira para qualquer n (**hipótese indutiva**).

$$p(n) = 1 + 2 + ... + n = n.(n+1)/2.$$

Verificaremos se continua verdadeira para o sucessor de n, ou seja, para n + 1.(passo indutivo).

$$p(n + 1) = 1 + 2 + ... + n +(n + 1) = n.(n + 1)/2 +n.(+ 1);$$

$$p(n + 1) = [n.(n + 1) + 2.(n + 1)]/2 = (n + 1).(n + 1 + 1)/2;$$

$$p(n + 1) = (n + 1).(n + 2)/2.$$

O que nos prova que é verdade p(n + 1), portanto, pelo PIM, temos que a fórmula p(n) = 1 + 2 + ... + n = n.(n+1)/2 é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ (**conclusão indutiva**).

Observação: note que no capítulo 2 falamos sobre $p(n - 1) \Rightarrow p(n)$, porém isso é equivalente a $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$, ambos são sucessores.

3.2 Recorrências lineares de 1ª ordem

Uma Recorrência linear e de primeira ordem, é quando cada termo depende exclusivamente do termo anterior e também a equação de Recorrência for do mesmo modelo que as funções do primeiro grau. O que queremos encontrar é uma fórmula fechada para essa Recorrência, ou seja, uma fórmula que permita calcular T_{n+1} em função de n e não de um termo anterior.

Exemplo 3.2.1: Vamos a um exemplo para visualizar essa situação, seja a proposição.

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = T_n + 6 \\ T_1 = 4 \end{cases}$$

Desenvolvendo a nossa proposição temos que:

$$T_n: \begin{cases} T_1 = 4 \\ T_2 = T_1 + 6 \\ T_3 = T_2 + 6 \\ \vdots = \vdots \\ T_n = T_{n-1} + 6 \\ T_n = 4 + 6 + 6 + ... + 6 \end{cases}$$

Utilizando a ideia da progressão aritmética que foi dada anteriormente, faremos a soma de todas essas equações membro a membros temos:

$$T_1 + T_2 + ... + T_{n-1} + T_n = 4 + T_1 + 6 + T_2 + \dots + 6 + T_{n-1} + 6.$$

Cancelando os termos, sobrará $T_n = 4 + 6 + 6 +... + 6$, percebemos que existe (n - 1) termos daí obtemos $T_n = 4 + 6.(n - 1)$ essa é a fórmula fechada.

Podemos nos perguntar por que fizemos a soma na técnica. Percebemos que o padrão da Recorrência é a soma, isto é, uma progressão aritmética que definimos anteriormente.

Há pouco tempo falamos sobre fórmula fechada, mas o que é isto? É que na fórmula de Recorrência se queremos calcular um elemento n qualquer, temos que calcular o elemento (n - 1) e para saber o de (n - 1), precisamos saber o de (n - 2) e assim por diante, ou seja, precisamos construir toda a sequência desde **caso base** até o enésimo termo, já a fórmula fechada ela facilita a nossa conta, pois ela é uma fórmula ou uma lei de formação na qual iremos substituir o valor desejado no lugar de n.

Exemplo 3.2.2: Outro exemplo dessa situação pode ser.

$$T_n: \begin{cases} T_{n+1} = 3.T_n \\ T_1 = 2 \end{cases}$$

$$T_n: \begin{cases} T_1 = 2 \\ T_2 = 3.T_1 \\ T_3 = 3.T_2 \\ \vdots = \vdots \\ T_n = 3.T_{n-1} \end{cases}$$

Utilizando a ideia da progressão geométrica que foi dada anteriormente, faremos o produto de todas essas equações membro a membros temos:

$$T_1.T_2.....T_{n-1}.T_n = 2.3T_1.3T_2.....3T_{n-1}.$$

Cancelando os termos membro a membro, sobrará $T_n = 2.3. ... .3$ (terão o dois multiplicado por (n - 1) vezes o número 3), logo $T_n = 2.3^{n-1}$ é a nossa fórmula fechada.

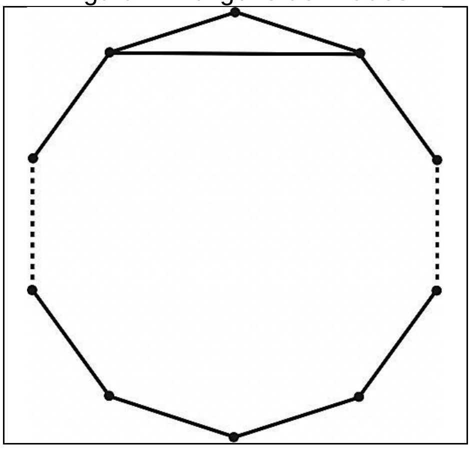
Exemplo 3.2.3: A soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Iremos escrever uma fórmula fechada de Recorrência para a soma dos ângulos internos de um poligono convexo, como observamos em situações anteriores para definirmos uma sequência utilizando Recorrência precisamos de uma lei de formação e também de um termo inicial.

Como estamos trabalhando compolignos convexos é sensato que comecemos com um triângulo como nosso termo inicial. E a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, dessa forma usaremos S_3 para representar a soma dos ângulos de um polígono de três lados $S_3 = 180º$, contudo, não temos S_1 e nem S_2, pois não existem polígonos de um ou dois lados.

Por imediato, temos um certo poligono de n lados, deixamos reticências para generalizarmos essa situação apresentamos a figura 1, a seguir, com a intenção de calcular a soma dos ângulos intermos de um poligono de n lados.

Figura 1: Polígono de n lados



Fonte: Elaborada pelo autor

Percebemos que se ligarmos um vértice a outro em sequência, mas não adjacente, como ilustra na figura, teremos um polígono de (n - 1) lados, pois perdemos dois lados, mais ganhamos um lado e a soma dos ângulos internos desse polígono construído será S_{n-1} e também para completar a soma S_n precisamos somar 180º que é a soma dos ângulos internos do triângulo formado. Daí teremos a nossa fórmula de Recorrência para soma dos ângulos internos de polígonos convexos.

$$S_n = S_{n-1} + 180^o \text{ e } S_3 = 180^o$$

A técnica que iremos usar é bem simples, iremos escrever as linhas iniciais e o nosso ponto de partida é o S_3 e em seguida utilizaremos a regra de Recorrência, na qual diz que o próximo valor de S_n é o valor atual mais 180°, com isso terminamos com uma expressão genérica, pois o nosso objetivo é de fato generalizar.

$$S_n: \begin{cases} S_3 = 180° \\ S_4 = S_3 + 180° \\ S_5 = S_4 + 180° \\ \quad \vdots = \vdots \\ S_n = S_{n-1} + 180° \end{cases}$$

Uma observação importante, é que começamos pelo S_3 logo teremos (n - 2) linhas. Vamos para a outra etapa do processo que consiste em somar todos os elementos que estão no lado esquerdo e também que estão no lado direito da igualdade, naturalmente o resultado continua sendo igual, então iremos fazer as devidas simplificações e teremos como resultado.

$Sn = 180^o.(n - 2)$ que é a nossa fórmula fechada e só tem validade para $n \geq 3$.

Exemplo 3.2.4. Número de diagonais de um polígono convexo.

Então, o nosso polígono tem n lado e em consequência terá n vértices a nossa estratégia para calcularmos a quantidade de diagonais que esse polígono terá será mesma técnica que foi usada no exemplo 3.2.3, daí D_n é a quantidade de diagonais do nosso polígono de n lados.

Notemos que se ligarmos um vértice a outro em sequência, mas não adjacente, como bem ilustra na figura 1 vista anteriormente, apresentaremos um polígono de (n - 1) lados, como perdemos dois lados, mas recebemos um lado, processo idêntico a do exemplo anterior.

O nosso novo polígono de (n - 1) lados e contém D_{n-1} diagonais, bom agora observamos a, figura 1, que o polígono de n lados terá todas as diagonais do polígono de (n - 1) lados e mais uma diagonal, pois esse lado, virou uma diagonal e também como acionamos um novo vértice e dele partira (n - 3) diagonais, por que dele não poderá ligar com ele mesmo e os outros dois vértices adjacentes, então:

$$D_n = D_{n-1} + 1 + n - 3$$

$$D_n = D_{n-1} + (n - 1) - 1$$

Daí, teremos que:

$$D_n : \begin{cases} D_n = D_{n-1} + (n - 1) - 1 \\ D_3 = 0 \end{cases}$$

$$D_n : \begin{cases} D_3 = 0 \\ D_4 = D_3 + 3 - 1 \\ D_5 = D_4 + 4 - 1 \\ \quad \vdots = \vdots \\ D_n = D_{n-1} + (n - 1) - 1 \end{cases}$$

Observando que começamos pelo D_3, pois não há polígono com 1 ou 2 lados, somente com três lados então o nosso ponto de partida será D_3, logo utilizando das técnicas passadas da progressão aritmética, teremos:

$$D_n = n.(n - 3)/2.$$

A escolha desses exemplos não foi à toa, pois eles têm algo em comum. Todos eles são Recorrências lineares de 1° ordem e também, os coeficientes dos termos que antecedem os termos recorrentes são iguais e iremos denomina-los de **A**, além disso, do termo recorrente temos algo adicionado que pode ser uma constante ou função f(n), ou seja, em todos eles temos o seguinte formato.

$$A.T_n = A.T_{n-1} + f(n).$$

Quando isso ocorre podemos utilizar a técnica que foi mostrada para encontrar as fórmulas fechadas. Mas agora podemos nos perguntar quando isso não ocorre, o que faremos? Vamos analisar a próxima proposição para responder tal pergunta e encontrar uma estratégia de solução.

Exemplo 3.2.5: Veremos a seguinte proposição de sequência.

$$X_n : \begin{cases} X_{n+1} = 2.X_n + 1 \\ X_1 = 1 \end{cases}$$

Iremos fazer o mesmo procedimento, mas há uma diferença, não podemos mais cancelar os termos quando somamos todas as equações, devido os coeficientes serem diferentes, então podemos nos perguntar como resolvemos isso? Para começar a resolver esse problema iremos fazer o mesmo procedimento.

$$X_n: \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 2.X_1 + 1 \\ X_3 = 2.X_2 + 1 \\ \vdots = \vdots \\ X_{n-2} = 2.X_{n-3} + 1 \\ X_{n-1} = 2.X_{n-2} + 1 \\ X_n = 2.X_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Percebemos que ao somarmos as equações, não poderemos cancelar devido aos coeficientes serem diferentes, questionamo-nos então: quais medidas tomaremos para solucionar tal impasse?

Olhando a sequência de X_n de baixo para cima para cancelar o $2X_{n-1}$ da última linha teremos que multiplica por dois o X_{n-1} que está na penúltima linha, assim forçando a situação de cancelamento, não se esquecendo que devemos multiplicar toda a penúltima linha, que teremos:

$2.X_{n-1} = 2.(2X_{n-2} + 1);$

$2.X_{n-1} = 2^{2.}X_{n-2} + 2.1.$

Só que agora pra cancelar o $2^2.X_{n-2}$ teremos que multiplicar a próxima linha de cima para baixo por 2^2 que ficará:

$2^2.X_{n-2} = 2^2.(2X_{n-3} + 1);$

$2^2.X_{n-2} = 2^3.X_{n-3} + 1.2^2.$

E assim vamos proceder de baixo para cima, mas para saltarmos para as linhas iniciais teremos que tomar certo cuidado, porque quem é que deve ser colocado para multiplicar as linhas? Por isso é importante percebermos certos padrões, observemos que o número que colocamos para a multiplicação é uma potência de dois e o expoente que aparece somado com o índice do X da sempre n, então podemos nos perguntar, como isso ocorre?

Pegando a penúltima linha temos $2^1.X_{n-1}$, então $1 + n - 1 = n$.

Já a antepenúltima linha temos $2^2.X_{n-2}$, então 2 + n - 2 = n.

Para o $X_3 = 2.X_2 + 1$, temos que multiplicar por 2^{n-3} e assim sucessivamente. Somando os termos membro a membro e cancelando os termos teremos:

$$\begin{cases} 2^{n-1}.X_1 = 1.2^{n-1} \\ 2^{n-2}.X_2 = 2^{n-1}.X_1 + 1.2^{n-2} \\ 2^{n-3}.X_3 = 2^{n-2}.X_2 + 1.\ 2^{n-3} \\ \vdots = \vdots \\ 2^2.X_{n-2} = 2^3.X_{n-3} + 1.2^2 \\ 2.X_{n-} = 2^2.X_{n-2} + 1.2 \\ X_n = 2.X_{n-1} + 1 \end{cases}$$

$$X_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+2^2+2^1+2^0.$$

Percebemos que o X_n é uma soma de potência de dois, agora para finalizar o problema temos que solucionar essa soma, porém isso é uma progressão geométrica de razão 2 aplicando a técnica da soma dessa sequência, concluímos que:

$$X_n = (2^n - 1)/(2 - 1).$$

Lembrando que a soma de uma progressão geometria é dada pela fórmula $S_n = a_1.(q^n - 1)/(q - 1)$.

Por tanto, a fórmula fechada para o problema é $X_n = 2^n - 1$. Notemos que a fórmula fechada irá funcionar, pois para n = 1 temos $X_1 = 1$e para n = 2 temos $X_2 = 3$ e assim por diante.

Em capítulos futuros iremos ver essa mesma proposição de uma forma mais elaborada, que iremos denominar de problema das torres de Hanói.

Exemplo 3.2.6: Vamos verificar mais uma proposição.

$$X_n: \begin{cases} X_n = 3.X_{n-1} + 5 \text{ , } n \geq 2 \\ X_1 = 2 \end{cases}$$

Faremos o mesmo procedimento da proposição anterior, teremos:

$$X_n: \begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = 3.X_1 + 5 \\ X_3 = 3.X_2 + 5 \\ \vdots = \vdots \\ X_{n-2} = 3.X_{n-3} + 5 \\ X_{n-1} = 3.X_{n-2} + 5 \\ X_n = 3.X_{n-1} + 5 \end{cases}$$

Agora, vamos multiplicar por 3 a penúltima linha, pois é o coeficiente de X_{n-1} que está na última linha e também as demais linhas como fizemos no exemplo anteriores, por tanto:

$$X_n: \begin{cases} 3^{n-1}.X_1 = 2.3^{n-1} \\ 3^{n-2}.X_2 = 3^{n-1}.X_1 + 5.3^{n-2} \\ 3^{n-3}.X_3 = 3^{n-2}.X_2 + 5.3^{n-3} \\ \vdots = \vdots \\ 3^2.X_{n-2} = 3^3.X_{n-3} + 5.3^2 \\ 3.X_{n-1} = 3^2.X_{n-2} + 5.3 \\ X_n = 3.X_{n-1} + 5 \end{cases}$$

$$X_n = 2.3^{n-1} + 5(3^{n-2} + 3^{n-3} + ... + 3^2 + 3^1 + 3^0).$$

Usando a técnica da soma da progressão geométrica, temos:

$$X_n = 2.3^{n-1} + 5(3^{n-1}-1) / (3 - 1);$$

$$X_n = 2.3^{n-1} + 5 / 2(3^{n-1} - 1).$$

Arrumando a nossa fórmula fechada, teremos:

$$X_n = (9.3^{n-1} - 5)/2.$$

Essa é a fórmula fechada para o problema de Recorrência da sequência definida desta proposição.

Sempre é bom verificar se a fórmula fechada realmente funciona, dai teremos:

Para n = 1 temos:

$X_1 = (9.3^{1-1} - 5)/2 = (9.1 - 5)/2 = (9 - 5)/2 = 4/2 = 2;$

$X_1 = 2.$

Para n = 2 temos:

$X_2 = (9.3^{2-1} - 5)/2 = (9.3 - 5)/2 = (27 - 5)/2 = 22/2 = 11;$

$X_2 = 11$.

Para n = 3 temos:

$X_3 = (9.3^{3-1} - 5)/2 = (9.9 - 5)/2 = (81 - 5)/2 = 76/2 = 38$;

$X_3 = 38$.

Então para $X_1 = 2$, $X_2 = 11$ e $X_3 = 38$ e assim por diante, percebemos que a fórmula fechada de fato funciona.

3.3 Recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de 1ª ordem

Agora, vamos direcionar o nosso foco e iremos falar sobre as Recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de 1º ordem.

Exemplo 3.3.1: Vamos exemplificar este tipo de Recorrência.

$$X_n : \begin{cases} X_n = 2.X^{n-1} \; ; \; n \geq 1 \\ X_0 = 7 \end{cases}$$

Antes de prosseguir, devemos alertar que a Recorrência é linear como a do exemplo dado, devido a X_n e X_{n-1} terão os termos da Recorrência com expoente um, caso um deles tivesse o expoente diferente de um ela deixaria de ser linear e, além disso, ela é de primeira ordem por que o termo X_n depende exclusivamente do termo anterior, X_{n-1}, ou seja, depende de um único termo, assim se faz que ela seja de primeira ordem e também de coeficientes constantes porque há Recorrências lineares de primeira ordem em que no lugar do coeficiente 2 poderia ser uma variável n, ai o coeficiente deixa de ser constante, agora o que iremos trabalhar serão com esses coeficientes constantes, na qual em X_n é um e em X_{n-1} é dois e também é homogênea, pois não existe outro termo adicionado somente X_n e X_{n-1}.

Assim sendo, vamos solucionar a nossa Recorrência:

$$X_n: \begin{cases} X_0 = 7 \\ X_1 = 2.X_0 \\ X_2 = 2.X_1 \\ \vdots = \vdots \\ X_{n-2} = 2.X_{n-3} \\ X_{n-1} = 2.X_{n-2} \\ X_n = 2.X_{n-1} \end{cases}$$

Para verificar a veracidade, iremos utilizar a técnica que usamos nos exemplos anteriores, então temos:

$$X_n: \begin{cases} 2^n.X_0 = 7.2^n \\ 2^{n-1}.X_1 = 2^n.X_0 \\ 2^{n-2}.X_2 = 2^{n-1}.X_1 \\ \vdots = \vdots \\ 2^2.X_{n-2} = 2^3.X_{n-3} \\ 2.X_{n-1} = 2^2.X_{n-2} \\ X_n = 2.X_{n-1} \end{cases}$$

Usando os processos que utilizamos anteriormente teremos que a nossa fórmula fechada é $X_n = 7.2^n$.

Podemos generalizar Recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes desse formato:

$$X_n: \begin{cases} X_n = b.X_{n-1} \text{ ; } n \geq 1 \\ X_0 = a \end{cases}$$

Na qual b é o coeficiente do termo anterior e a o nosso termo inicial, ou seja, a obtenção de uma fórmula fechada para esse tipo de Recorrência sempre será dessa forma:

$$X_n = a.b^n.$$

Vamos fazer o estudo de outro tipo de Recorrência, que é a de segunda ordem.

3.4 Recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de 2ª ordem

Vamos exemplificar este tipo de Recorrência.

Exemplo 3.4.1: Seja a proposição.

$$X_n: \begin{cases} X_n = 5.X_{n-1} - 6.X_{n-2} \\ X_1 = 5 \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

Mais uma vez percebemos que ela é de segunda ordem porque depende de dois termos anteriores, e é linear, pois seus termos são de 1° grau e também homogênea por que não há nenhum termo que independa dos termos da Recorrência e os coeficientes são constantes de $X_n = 1$, $X_{n-1} = 5$ e $X_{n-2} = -6$.

Vamos buscar uma solução geral para esse tipo de Recorrência:

Pelo simples fato de não ter uma ideia como solucionar essa Recorrência e como acabamos de ver que a resolução de uma Recorrência linear homogênea de 1ª ordem tem sempre soluções $X_n = a.b^n$ iremos supor que as soluções dessa Recorrência de 2ª ordem também tenha o mesmo formato, ou seja, para saber se é de fato solução do problema temos que testar. Agora vamos ter o cuidado que se:

$X_n = a.b^n$;

$X_{n-1} = a.b^{n-1}$;

$X_{n-2} = a.b^{n-2}$.

Então, iremos substituir isso na nossa lei de Recorrência e veremos o que vai ocorrer: após as substituições na regra de Recorrência obtivemos:

$$a.b^n = 5.a.b^{n-1} - 6.a.b^{n-2}.$$

Como queremos as soluções não triviais, ou seja, as diferentes de "zero", então presumimos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e a ideia é dividir a expressão por $a.b^{n-2}$, fazendo isso cairemos em uma equação do segundo grau $b^2 = 5.b - 6$ cuja as soluções são $b_1 = 3$ ou $b_2 = 2$.

Isso quer dizer que a solução dessa Recorrência pode ter esse formato de $X_n = a.b^n$, desde que o b seja 3 ou 2, então vamos substituir um dessas valores:

Para b = 3, teremos $X_n = a.3^n$, a solução ainda não está definida por que precisamos descobrir o valor de a, este valor precisa respeitar os dois termos iniciais da nossa Recorrência, ou seja, quando o nosso n = 0 tem como resultado um e quando n = 1 tem o resultado cinco, daí temos:

$X_0 = a.3^0 = 1 \Rightarrow a = 1;$

$X_1 = a.3^1 = 5 \Rightarrow a = 5/3.$

Temos um absurdo, pois o a tem que valor 1 para satisfazer o X_0 e valor 5/3. Para satisfazer o X_1, então estamos fazendo algo de errado nessa solução, e percebemos que se fizermos b = 2, teremos exatamente o mesmo problema, pois teríamos dois resultados para o a.

Vimos que esses dois são os candidatos da solução dos nossos problemas, isso quer dizer que ao substituir lá na nossa lei de Recorrência que está mantida a igualdade, e, além disso, percebemos que essas igualdades continuam valendo para qualquer que seja o valor de a_1 e o mesmo para a_2, caso somarmos as igualdades a soma obtida do 1º membro tem que ser igual a do 2º membro.

$$X_n : \begin{cases} \text{Se } X_n = a_1.3^n \Rightarrow a_1.3^n = 5.a_1.3^{n-1} - 6.a_1.3^{n-2} \\ \text{Se } X_n = a_2.2^n \Rightarrow a_2.2^n = 5.a_2.2^{n-1} - 6.a_2.2^{n-2} \end{cases}$$

$$a_1.3^n + a_2.2^n = 5.a_1 3^{n-1} - 6.a_1.3^{n-2} + 5.a_2.2^{n-1} - 6.a_2.2^{n-2};$$

$$a_1.3^n + a_2.2^n = 5.a_1.3^{n-1} + 5.a_2.2^{n-1} - 6.a_1.3^{n-2} - 6.a_2.2^{n-2};$$

$$a_1.3^n + a_2.2^n = 5.(a_1.3^{n-1} + a_2.2^{n-1}) - 6.(a_1.3^{n-2} + a_2.2^{n-2}).$$

Percebemos que a soma ainda está valendo e ainda é a mesma forma da nossa lei de Recorrência, é como a soma do primeiro membro fosse gerar um novo candidato, que iremos denominar de X_n, pois os expoentes do primeiro membros é n, e agora iremos chamar de X_{n-1} o produto de 5 e de X_{n-2} o produto de -6.

Ou seja, acabamos de achar um novo candidato para solução do nosso problema e este candidato é $X_n = a_1.3^n + a_2.2^n$, mas lembrando que ele tem que obedecer as condições anteriores que é $X_0 = 1$ e $X_1 = 5$. Então, quando substituir n = 0 na equação, tem como resultado 1, e quando substituir n = 1 tem como resultado 5, isso recairá num sistema que vamos solucionar.

$a_1.3^0 + a_2.2^0 = 1;$

$a_1.3^1 + a_2.2^1 = 5;$

$a_1 + a_2 = 1;$

$3.a_1 + 2.a_2 = 5.$

Logo, como solução $a_1 = 3$ e $a_2 = -2$, portanto a nossa solução é:

$X_n = 3.3^n - 2.2^n;$

$X_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$

3.5 Recorrências homogêneas

Na abordagem das Recorrências lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes, nós observamos que as soluções para esse tipo de Recorrência é:

$$T_n: \begin{cases} T_0 = a \\ T_n = b.T_{n-1} \end{cases}$$

Logo, $T_n = a.b^n$, onde a e b são constantes e o a é calculado de forma que satisfaça a condição inicial da Recorrência, por tanto, que de fato $T_0 = a$.

Agora abordando as Recorrências homogêneas de segunda ordem tomando o seguinte modelo:

$$T_n: \begin{cases} T_0 = p \\ T_1 = q \\ T_n = A.T_{n-1} + B.T_{n-2} \end{cases}$$

Na qual p e q são os termos iniciais e A e B são os coeficientes dos termos anteriores.

Nós testamos o modelo de primeira ordem no da segunda ordem, nos dando e substituímos na nossa lei de Recorrência, daí obtemos foi à equação a seguir:

$$a.b^n = A.a.b^{n-1} + B.a.b^{n-2}.$$

Também percebemos que podemos simplificar essa equação por $a.b^{n-2}$, que nos vai gerar uma equação do segundo grau, $b^2 = A.b + B$, cujo os coeficientes são exatamente os da nossa lei de Recorrência de segunda ordem, com isso podemos concluir que o modelo da Recorrência de primeira ordem nos serve para a de segunda ordem, contudo o a pode ser um valor qualquer, pois ele será simplificado por $a.b^{n-2}$, mas o b precisará cumprir algumas condições.

O b terá raiz da equação do segundo grau e encontramos duas raízes e ao testarmos nesse modelo uma das raízes, nós percebemos que não são o suficiente para satisfazer as duas condições iniciais, isso ocorre cada vez que testávamos com uma das duas raízes, então se usássemos as duas raízes simultaneamente que vamos representar por r_1 e r_2 e pensar na solução como uma composição das raízes, teremos:

$$T_n = a_1.r_1^n + a_2.r_2^n.$$

Que será uma solução para a nossa Recorrência e também obedecem as duas condições iniciais. Daí entendemos que a chave para a solução de uma Recorrência homogênea de segunda ordem é trabalhar com o formato

$$T_n = a_1.r_1^n + a_2.r_2^n.$$

De solução e r_1 e r_2 são as raízes da equação do segundo grau, ou seja, são as raízes do **polinômio característico** que surge a partir da nossa regra de Recorrência e as constantes a_1 e a_2 são calculadas de forma para satisfazer as condições inicias da nossa Recorrência e iremos utilizar essa técnica para encontrar a solução, ou seja, a fórmula fechada de vários problemas futuros.

4 PROBLEMAS CLÁSSICOS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA E RECORRÊNCIA E SUAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO

Apresentaremos a seguir três problemas clássicos de Indução Matemática e Recorrência.

4.1 As torres de Hanói

Trata-se de um quebra-cabeça que foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas[4]. Segundo DÖRRIE (1965). Ele teve inspiração em uma lenda para construir o jogo das torres de Hanói em 1883, cujo nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, no Vietnã.

Há várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo Hindu, situado no centro do universo. Diz-se que Brama (É o primeiro deus da Trimúrti) supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brama ordenara-lhes que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. As regras eram simples: apenas um disco poderia ser movido por vez e nunca um disco maior deveria ficar por cima de um disco menor. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo iria desmoronar e o mundo desapareceria. Não é claro se Édouar Lucas inventou essa lenda ou foi inspirado por ele.

Existem muitas variações sobre esta lenda, por exemplo, em algumas narrativas, o templo é um mosteiro e os sacerdotes são monges, sendo que templo e mosteiro podem estar em diferentes partes do mundo - incluindo Hanói no Vietnã, e podem ser associados a qualquer religião. Em algumas versões, são introduzidos outros elementos, tais como o fato de a torre ter sido

---

[4] (Amiens, 4 de Abril de 1842 - Paris, 3 de Outubro de 1891) foi um matemático francês.

Foi o criador do jogo matemático torre de Hanói, a sequência de Lucas e os números de Lucas são denominados em sua memória. É também o autor do teorema de Lucas.

criado no início do mundo, ou que os padres ou monges podem fazer apenas uma mudança por dia.

Para exemplificar a lenda, se o problema das torres de Hanói com 64 discos, seguindo as regras do jogo, indicando que o número de movimentos seria de $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ o que daria mais do que 5 bilhões de séculos, se cada movimento fosse feito em 1 segundo.

Nos dias de hoje o problema das torres de Hanói temos uma base que possui três hastes numeradas 1, 2 e 3 ou não numeradas, preso nesta base e temos uma pilha de n discos em uma das hastes com diâmetros diferentes, a solução deste problema é passar a pilha de discos de uma haste para outra com o menor número de movimentos possível e temos que obedecer a duas regras:

1. Só é permitido passar um disco por vez;
2. Em nenhum momento pode haver um disco maior sobre um disco menor.

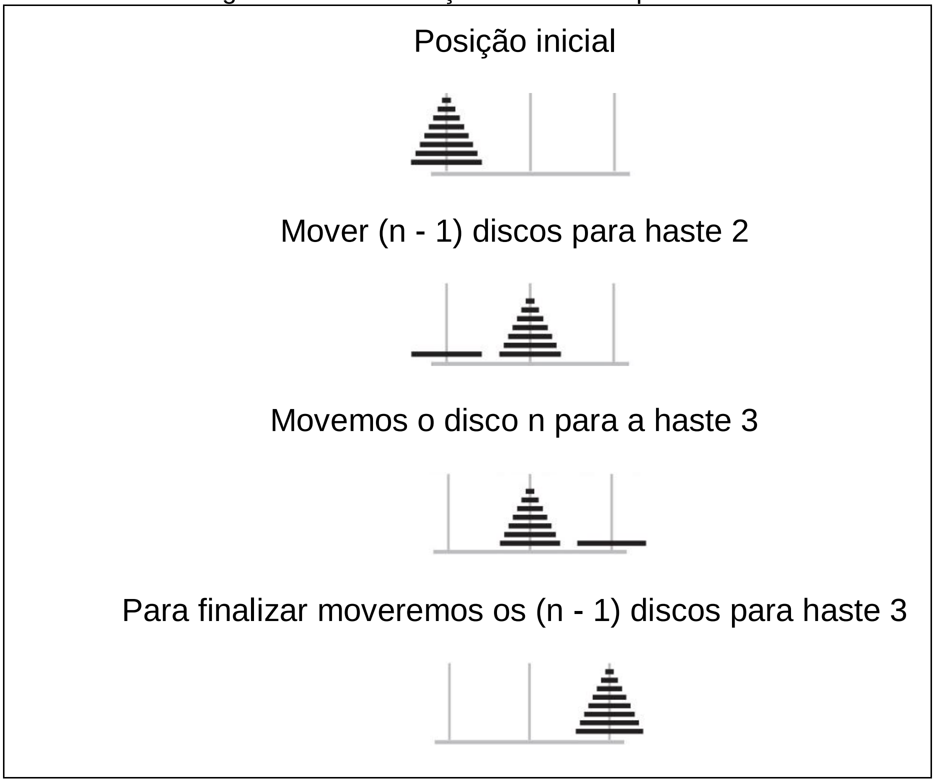
Vamos solucionar o problema de uma forma geral usando a Indução Matemática e Recorrência.

Adotaremos o disco com menor diâmetro que denominaremos ele de disco 1, o de segundo menor de diâmetro disco 2 e assim sucessivamente em ordem crescente, até o de maior diâmetro que chamaremos de disco n.

Para solucionamos o problema de mover de modo geral, apresentaremos a figura 2, na qual teremos que mover todos os discos da haste 1 para haste 3, fazemos os seguinte passos:

1. Movemos os primeiros (n - 1) discos para uma haste 2;
2. Movemos o maior disco para a haste 3;
3. Concluímos o quebra cabeça movendo (n - 1) discos para a haste 3.

Figura 2: movimentação de n discos para outra haste



Fonte: ***INDUCTION, RECURSION, AND RECURRENCES***

Então, de forma geral faremos os seguintes passos:

Faremos a movimentação de (n - 1) discos da haste 1 para o haste 2 e movemos o disco n para haste 3. Recursivamente, movemos (n - 1) discos na haste 2 para haste 3.

Assim, se M(n) é o número de movimentos mínimos para mover n discos de haste i para haste j, sendo i e j as numerações das hastes que podem ser de números 1,2 ou 3, temos $M(n) = 2.M(n - 1) + 1$.

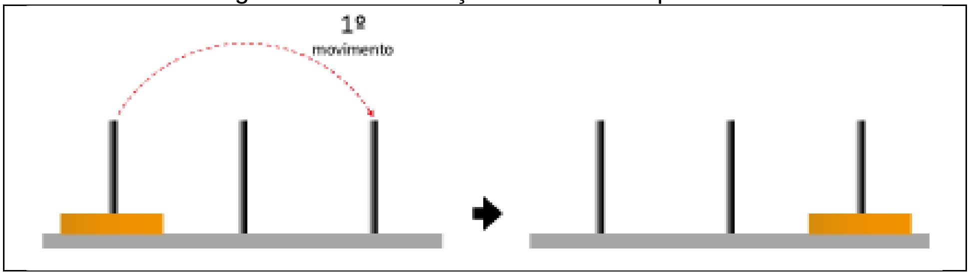
Este é um exemplo de uma equação de Recorrência para uma função definida no conjunto de números naturais maiores ou igual a algum número do **caso base**, pois a partir desse caso é aquele que conta como calcularmos o enésimo valor de uma função a partir do (n - 1) este valor ou alguns ou todos os valores antecedendo n.

Para especificar completamente uma função com base em uma Recorrência, inicialmente devemos dar informações suficientes sobre a função. Esta informação é chamada de condição inicial, ou condições iniciais, que também chamaremos de **caso base** para a Recorrência.

Neste caso, temos M(0) = 0. Usando isso, obtemos da Recorrência que:

Para n = 1, temos M(1) = 1, pois M(1) = 2.M(0) + 1 = 2.0 + 1 = 1.

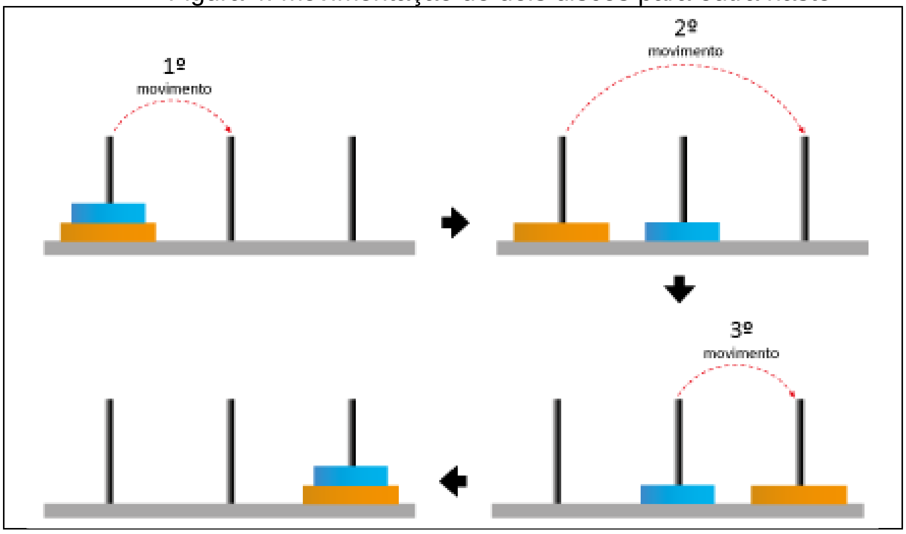
Figura 3: movimentação de um disco para outra haste



Fonte: Dantas ND

Para n = 2, temos M(2) = 3, pois M(2) = 2.M(1) + 1 = 2.1 + 1 = 3.

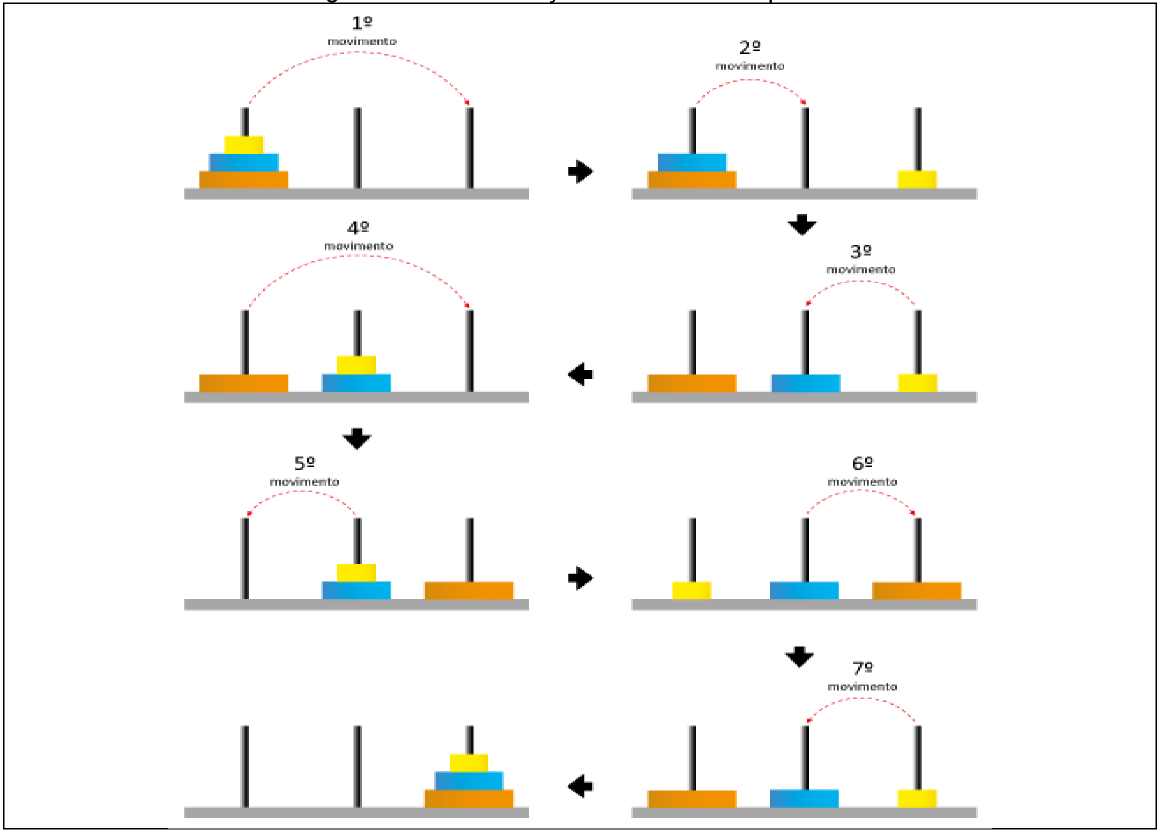
Figura 4: movimentação de dois discos para outra haste



Fonte: Dantas ND

Para n = 3, temos M(3) = 7, pois M(3) = 2.M(2) + 1 = 2.3 + 1 = 7.

Figura 5: movimentação de três discos para outra haste



Fonte: Dantas ND

Como:

$M(1) = 1$, ou seja, $M(1) = 2^1 - 1$;

$M(2) = 3 = 2^2 - 1$;

$M(3) = 7 = 2^3 - 1$;

$M(4) = 15 = 2^4 - 1$;

$M(5) = 31 = 2^5 - 1$.

Então somos levados a conjecturar que $M(n) = 2^n - 1$.

Formalmente, nós escrevemos nossa Recorrência e condição inicial junto. Daremos a seguir uma prova por Indução Matemática de que nosso palpite está correto, pois somente conjecturamos a situação.

O **caso base** é trivial, como nós definimos $M(0) = 0$, pois $0 = 2^0 - 1 = 0$. Para a **hipótese indutiva**, assumimos que $n > 0$ e $M(n - 1) = 2^{n-1} - 1$.

O passo indutivo da nossa Recorrência, temos que M(n) = 2.M(n - 1) + 1. Contudo, M(n - 1) = 2^{n-1} - 1, permitindo entender que:

M(n) = 2.M(n - 1) + 1 = $2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$.

Portanto a nossa **conclusão indutiva**, pelo princípio da Indução Matemática, M(n) = 2^n - 1 para todos os números naturais n, o que quer dizer que em uma torre de Hanói de 7 discos teremos a quantidade mínima de movimentos necessária para atingir o objetivo proposto igual a $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$.

4.2 Pizza Steiner

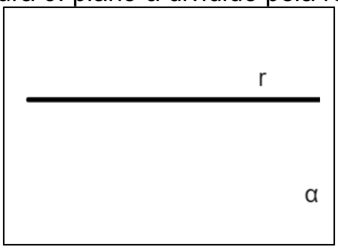
O matemático Jakob Steiner[5], segundo DÖRRIE (1965) propôs e resolveu, em 1826, a seguinte situação problema. Qual é o maior número de partes em que se pode dividir um plano com n cortes de retas? Este problema de Recorrência é conhecido como a pizza de Steiner.

Iremos solucionar essa situação problema tentando encontrar algum padrão matemático pela construção que nos dê condições de solucionar tal problema.

Então, suponhamos que o nosso plano α e iremos construir os cortes no plano.

1. Para a primeira reta dividiremos o plano em duas partes, como ilustra a figura 6.

Figura 6: plano α dividido pela reta r.

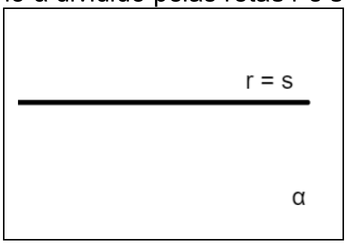


Fonte: Elaborada pelo autor

2. Para o segundo corte, ou seja, segunda reta, temos que levar em consideração a disposição dessas retas, elas podem ser, coincidentes, paralelas ou concorrentes:

   1°caso retas coincidentes: teremos o mesmo número de regiões;

Figura 7: plano α dividido pelas retas r e s coincidentes.



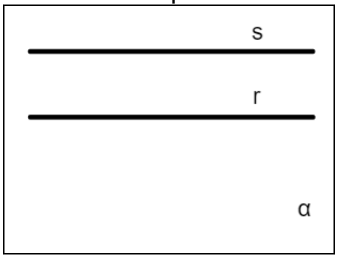
Fonte: Elaborada pelo autor

---

[5] (Utzenstorf, Suíça, 18 de março de 1796 - Berna, 1 de abril de 1863) foi um matemático suíço que trabalhou principalmente na área de geometria.

2°caso retas paralelas: teremos três regiões no nosso plano;

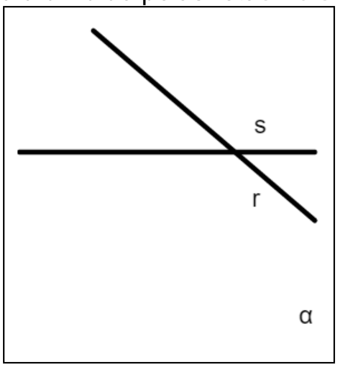
Figura 8: plano α dividido pelas retas r e s paralelas.



Fonte: Elaborada pelo autor

3°caso retas concorrentes: teremos quatro regiões no nosso plano.

Figura 9: plano α dividido pelas retas r e s concorrentes.



Fonte: Elaborada pelo autor

Então, para satisfazer às condições usaremos o 3° caso que são as retas concorrentes, pois percebemos que das três possibilidades é a que vai nos dar um maior número de regiões, pois as retas coincidentes não alterará o número de regiões e as retas paralelas não nos darão o número máximo de regiões, logo as novas retas serão concorrentes em relações às retas já existentes no nosso plano, essa será a nossa primeira regra para construção da nossa Recorrência.

Outra regra muito importante para essa proposição é que nas novas retas não pode intersectar pontos de interseção já existente, pois se o fizer não teremos o número máximo de regiões.

Essa questão, no máximo, é devido escolhermos retas que estejam em posição geral, ou seja, cada reta não passará por nenhum ponto de intersecção já existente.

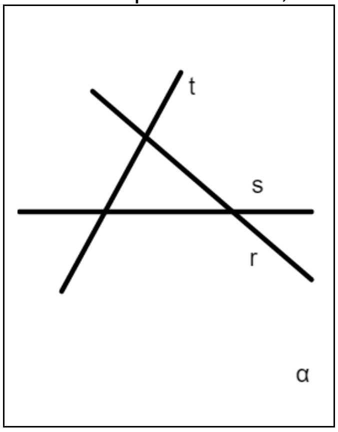
Agora, que já sabemos as duas regras para essa proposição, então iremos definir a nossa Recorrência, para isso começaremos pelo trabalho exploratório, isso é verificar caso a caso, e também iremos fazer uso de uma tabela e chamaremos de n o número de retas e R_n o número máximo de regiões definidas por n retas.

Para uma reta percebemos que há 2 regiões como ilustra a figura 6.

Agora, vamos construir as regiões a partir de duas retas concorrentes.

Quando existem duas retas, temos um total de quatro regiões como mostra a figura 9, agora adicionando mais uma reta teremos um total de 7 regiões como indica a figura 10.

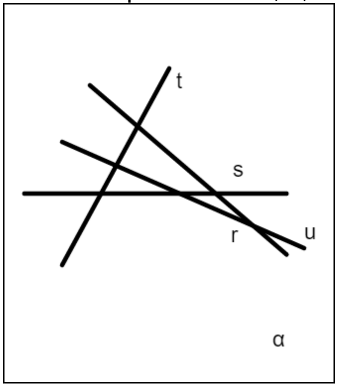
Figura 10: plano α dividido pelas retas r, s e t concorrentes.



Fonte: Elaborada pelo autor

Adicionando mais uma reta teremos um total de 11 regiões como ilustra a figura 11.

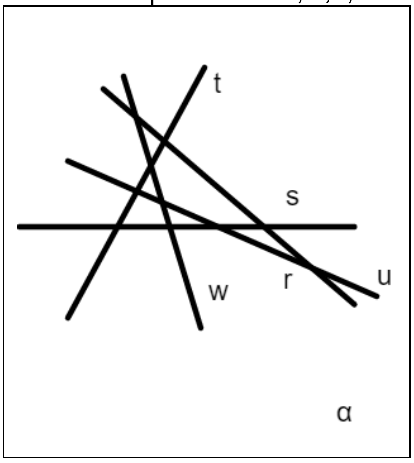
Figura 11: plano α dividido pelas retas r, s, t e u concorrentes.



Fonte: Elaborada pelo autor

Para 5 retas teremos um total de 16 regiões como mostra a figura 12.

Figura 12: plano α dividido pelas retas r, s, t, u e w concorrentes.



Fonte: Elaborada pelo autor

A nossa tabela irá nos auxiliar na organização dos dados e também para percebermos se existe um padrão matematico.

Tabela 1: relação entre o nº de retas e o nº máximo de regiões

n	R_n
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
⋮	⋮
n	?

Notemos que a nossa sequência mostra certa regularidade, percebemos que a partir da primeira reta, quando adicionamos a segunda reta temos duas novas regiões, quando colocamos a terceira reta são acrescentadas mais três regiões, na quarta reta serão adicionadas mais quatro, já na quita reta teremos mais cinco regiões, então podemos supor que na enésima reta teremos as regiões já existentes mais n novas regiões.

Logo, podemos conjecturar:

$$R_n = R_{n-1} + n \text{ e o nosso ponto de partida é } R_1 = 2.$$

Agora, vamos mostrar a fórmula fechada:

$$R_n: \begin{cases} R_n = R_{n-1} + n \\ R_1 = 2 \end{cases}$$

$$R_n: \begin{cases} R_1 = 2 \\ R_2 = R_1 + 2 \\ R_3 = R_2 + 3 \\ \vdots = \vdots \\ R_{n-1} = R_{n-2} + n - 1 \\ R_n = R_{n-1} + n \end{cases}$$

Observando que começamos pelo R_2 então a nossa fórmula fechada é:

$$R_n = 2 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n.$$

Desmembrando 2 em 1 + 1 teremos:

$$R_n = 1 + 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n.$$

Percebemos que temos 1 + a soma dos n primeiros números naturais, demonstrada no capítulo 2, então:

$$R_n = n(n + 1)/2 + 1.$$

Logo, a nossa fórmula fechada é $R_n = n(n + 1)/2 + 1$,verificando para alguns valores de n, temos:

$n = 1$, $R_n = 1(1 + 1)/2 + 1 = 1 + 1 = 2$;

$n = 2$, $R_n = 2(2 + 1)/2 +1 = 3 + 1 = 4$;

$n = 3$, $R_n = 3(3 + 1)/2 +1 = 6 + 1 = 7$.

Contudo, como falamos anteriormente, isso não é suficiente para a nossa demonstração, temos que provar pelo princípio da Indução Matemática.

Chamando de $p(n)$: $R_n = n(n + 1)/2 + 1$.

Verificando o **caso base**, temos:

$p(1)$, $R_1 = 2$, verdadeira.

Agora, a nossa **hipótese de indução**, dizemos que vale para um $p(n - 1)$, daí, $R_{n-1} = (n - 1)(n - 1 + 1)/2 + 1$ é válido.

O nosso **passo indutivo**, temos que mostrar que vale para p(n), então, para p(n - 1) $\Rightarrow$ p(n), basta adicionarmos n novas regiões, como foi mencionando anteriormente, em ambos os lados, daí temos:

$R_n = R_{n-1} + n = (n - 1)(n - 1 + 1)/2 + 1 + n = (n - 1)n/2 + n +1 =$

$(n^2 - n + 2n)/2 + 1 = (n^2 + n)/2 + 1 = n(n + 1)/2 +1.$

Com isso podemos anuir que pelo princípio de Indução Matemática o número máximo de partes em que se pode dividir um plano α com n cortes de retas é dada pela fórmula fechada $R_n = n(n + 1)/2 + 1$, e com isso o matemático Jacob Steiner propôs e resolveu essa situação problema.

4.3 Sequência de Fibonacci

Em Boyer (1974) e EVES (2008), encontramos informações de que o matemático italiano Leonardo Pisano [6] ou Leonardo de Pisa, adquiriu o conhecimento matemático islâmico viajando pelo Mediterrâneo e, quando regressou a sua terra natal, utilizou os conhecimentos adquiridos em suas viagens para escrever trabalhos. Um deles é o *Liber Abbaci* (Livro do Ábaco) refere-se ao estudo do cálculo aritmético e apresenta, ainda, alguns métodos para somar séries. Dentre os problemas contidos no *Liber Abbaci*, destaca-se o conhecido problema dos coelhos, que se refere ao número de casais em uma população de coelhos após doze meses, considerando-se que:

1. No primeiro mês tem-se apenas um casal;
2. Casais reproduzem-se somente após o segundo mês de vida;
3. Não há problemas genéticos no cruzamento cossanguíneo;
4. Todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
5. Os coelhos nunca morrem.

Tal problema questiona: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?

Ao fixar como mês um o início do processo, tem-se um único casal jovem. Já no segundo mês, esse casal será adulto. Considerando-se que um par adulto produz um novo par a cada mês, no início do terceiro mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par adulto e outro recém-nascido. No início do quarto mês o par adulto produzirá mais um par, enquanto que o outro par completará um mês de vida e ainda não estará apto a reproduzir.

Assim, existirão três pares de coelhos, sendo um par adulto, um par com um mês de idade e mais um par recém-nascido. No início do quinto mês existirão dois pares adultos, sendo que cada um já reproduziu um novo par e mais um par que completou um mês de vida. Logo, existirão cinco pares. No início do sexto mês existirão três pares adultos, sendo que cada um já produziu

[6] (Pisa, 1170 — Pisa 1250) mais reconhecido como **Fibonacci** foi um matemático italiano nomeado como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média.

um novo par e mais dois pares que completam um mês de vida. Logo, existirão oito pares.

Seguindo-se o mesmo raciocínio para os outros meses, obtém-se a famosa Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

A sequência de Fibonacci é uma das mais ilustres sequências, uma vez que, dentre todos os mistérios da Matemática, essa sequência é considerada uma das mais fascinantes da história. A sequência de números proposta pelo matemático, possui o numeral 1 como o primeiro e o segundo termo da ordem, e os elementos seguintes são originados pela soma de seus dois antecessores, observamos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181,...

Analisada como uma sequência numérica, ela não passa de uma simples organização de numerais que recebem um toque de lógica matemática. Mas o que faz dessa ordem de números, uma descoberta especial, é a sua ligação com os fenômenos da natureza e o valor aproximado da constante de 1,618..., quociente da divisão entre um número e seu antecessor na sequência, a partir do número 3.

Os grandes estudiosos sempre procuraram a proporção ideal a ser aplicada nas construções e nas artes. Teria sido com esse propósito que os gregos criaram o retângulo de ouro e os egípcios construíram suas pirâmides. O retângulo obedecia a uma relação entre o comprimento e a largura, sendo a divisão entre eles, igual a 1,618...

Esse quociente também era registrado entre as pedras utilizadas na construção das pirâmides, considerando que a pedra inferior seria maior que a superior. Nesse caso, a divisão entre elas também seria 1,618..., pois esse valor era considerado um símbolo de perfeição nas construções, chegando a receber o nome de divina proporção.

Agora, vamos achar a fórmula fechada da nossa proposição:

$$T_n: \begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 1 \\ T_n = T_{n-1} + T_{n-2} \end{cases}$$

Como a sequência de Fibonacci é uma Recorrência homogênea de 2° ordem iremos utilizar o **polinômio característico** que definimos anteriormente, então teremos:

$b^2 = b + 1.$

E as raízes dessa equação é $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ e $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, logo o candidato a solução é:

$T_n = a_1[(1 + \sqrt{5})/2]^n + a_2[(1 - \sqrt{5})/2]^n.$

Lembrando que a_1 e a_2 são coeficientes que tem que satisfazer as condições inicias da nossa proposição, ou seja, quando n = 0 o nosso resultado tem que ser 1 e quando n = 1 o nosso resultado também tem que ser 1.

$T_0 = a_1[(1 + \sqrt{5})/2]^0 + a_2[(1 - \sqrt{5})/2]^0 = a_1 + a_2 = 1;$

$T_1 = a_1[(1 + \sqrt{5})/2]^1 + a_2[(1 - \sqrt{5})/2]^1 = a_1(1 + \sqrt{5})/2 + a_2(1 - \sqrt{5})/2 = 1.$

Solucionando o sistema acima teremos como resultado:

$a_1 = (\sqrt{5} + 1)/(2\sqrt{5}).$

$a_2 = (\sqrt{5} - 1)/(2\sqrt{5}).$

Agora, iremos substituir na nossa fórmula fechada encontrando os valores:

$T_n = (1 + \sqrt{5})/(2\sqrt{5}).(1 + \sqrt{5}\ /2)^n + (\sqrt{5} - 1)/(2\sqrt{5}).(1 - \sqrt{5}\ /2)^n.$

Ajustando a equação passando o $(1 + \sqrt{5})/2$ para dentro do parênteses da potencia de expoente n e de forma análoga iremos fazer para o$(1 - \sqrt{5})/2$.

$T_n = (1/\sqrt{5})(1 + \sqrt{5}\ /2)^{n+1} - (1/\sqrt{5})(1 - \sqrt{5}\ /2)^{n+1}.$

Arrumando a nossa equação teremos:

$T_n = [((1 + \sqrt{5})/2)^{n+1} - ((1 - \sqrt{5})/2)^{n+1}]/\sqrt{5}.$

Esse é um ótimo exemplo na qual percebemos que o uso da fórmula fechada, não é mais confortável que a construção da nossa sequência termo a termo, visualmente ela parece bem complicada de trabalhar, mas ela é de fato a nossa fórmula fechada. Para calcularmos o 10º termo da sequência de Fibonacci, é mais simples construir através da soma dos termos anteriores, ao invés de desenvolvermos dos dois binômios com o expoente 11.

Um fato curioso é qualquer que seja o valor de $n \in \mathbb{N}$ mesmo que os números da nossa fórmula fechada sejam estranhos sempre teremos como resultado um número natural, isso é algo interessante, pois visualmente é difícil acreditarmos em tal fato e qualquer que seja o valor de n o resultado será um número natural e também será um número da sequência de Fibonacci.

4.4 Atividades didáticas no Ensino Básico

Segundo FREITAS (2009) os materiais e equipamentos didáticos também conhecidos como “recursos” ou “tecnologias educacionais”, eles são todo e qualquer recurso utilizado em um procedimento de ensino, visando estimular o discente para a aproximação do conteúdo.

Para a matemática é muito importante ter em mãos esse material, pois pode ser tornar um facilitador no pensar matemático, e com isso levar o aluno a questionar, conjecturar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

São inúmeros e variados os materiais e equipamentos didáticos existentes no Ensino Básico, sem contar que podemos criar ou aproveitar recursos empregados para outros fins, dentre eles temos o geoplano, blocos lógicos, material dourado, sólidos geométricos discos de frações, ábaco e as torres de Hanói, o último além de um problema clássico de Indução Matemática e Recorrência, ele pode ser trabalhado em níveis de desenvolvimento com crianças.

As Torres de Hanói que é um quebra-cabeça (jogo) é uma forma lúdica de aprendizado, ou seja, uma brincadeira que utilizamos para treinar o raciocínio matemático, na pré-escola e também no Ensino Básico, com regras simples de separação de cores e tamanhos, as torres de Hanói ajuda em questões de coordenação motora, identificação de formas, ordem crescente e decrescente, entre outras formas de aprendizagem.

De uma forma geral, o jogo pode ser usado para estabelecer estratégias de transferência das peças, pois trabalhando com o formato de algoritmo recursivo e com isso torna o quebra-cabeça mais compacto e também facilita o entendimento pela criança, como a contagem dos movimentos e raciocínio. Iniciando com um número menor de peças, ou seja, resolvendo problemas mais simples e ao longo do seu desenvolvimento ampliaremos o grau de dificuldade (aumento de número de discos), assim teremos oportunidade de conhecer uma das mais importantes formas de raciocínio matemático.

E para concluirmos é muito importante lembrar que nenhum equipamento didático pode, por mais bem elaborado que seja, garantir, por si só, a qualidade e a efetividade do processo de ensino e aprendizagem. Eles cumprem a função de mediação e não podem ser utilizados como se fosse o começo, meio e fim de um processo didático.

5 PROBLEMAS DE INDUÇÃO E RECORRÊNCIA NAS PROVAS DE OBMEP

Os objetos de estudos matemáticos, o princípio de Indução matemática e a Recorrência, comumente são trabalhados no Ensino Superior, dentre outras conexões, a OBMEP vem para fazer o elo entre o Ensino Básico e o Ensino Superior e iremos trabalhar alguns problemas que podem ser solucionado com técnicas que fazem uso da Indução Matemática e Recorrência.

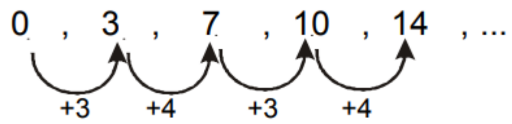
A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática não com o intuito de concorrência e sim de identificar talentos na área, o público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio, ou seja, engloba grande parte do Ensino Básico.

Iremos resolver 10 itens de provas da OBMEP que podemos utilizar com o uso das técnicas de Indução Matemática e Recorrência, de diferentes níveis e fases, dessa que é uma das maiores competições de conhecimentos e, como anexo, deixaremos mais itens propostos nas provas da OBMEP e outras questões clássicas de Indução Matemática.

5.1 Problemas da OBMEP e suas resoluções

a) (OBMEP 2005 2ª Fase Nível 3) A sequência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, ... é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.



(A) Escreva os 20 primeiros termos desta sequência.

Observando a lei de formação da nossa sequência, podemos escrever que os 20 primeiros termos são 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, 24, 28, 31, 35, 38, 42, 45, 49, 52, 56, 59, 63 e 66.

(B) Qual é o 1000º termo desta sequência?

Podemos perceber que essa sequência pode ser decomposta em duas sequências a primeira é (0, 7, 14, 21, 28,...) e a segunda é (3, 7, 17, 24, 31,...), ou seja, a primeira são os múltiplos de 7 com $n \geq 0$ e a segunda é os múltiplos de 7 adicionado com 3 para $n \geq 0$, daí temos:

1ª sequência $X_n = 7n$;

2ª sequência $X_n = 7n + 3$.

A primeira é composta pelos termos impares e a segunda pelos termos pares, como queremos o 1000º termo temos que utilizar a segunda equação. Logo o termo que procuramos é:

$X_{499} = 7.499 + 3 = 3496$, pois 1000 é par, vemos que o 1000º termo da nossa sequência original é o 500º termo da segunda sequência. Este termo corresponde a $n = 499$ uma vez que o primeiro termo de corresponde a $n = 0$.

(C) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

Para o 2000 ser termo da sequência ele tem que ser escrito da primeira ou segunda equação, como 2000 não é múltiplo de 7 e também $2000 = 7.285 + 5$, então 2000 não pertence a sequência. Outra forma é achar o valor de n nas equações $2000 = 7n$ e $2000 = 7n + 3$ e n não é um número natural.

b) (OBMEP 2006 1ª Fase Nível 3) Os termos de uma sequência são formados usando se apenas os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, como segue:

1º termo: 123454321;

2º termo: 12345432123454321;

3º termo: 1234543212345432123454321 e assim por diante.

Quantas vezes o algarismo 4 aparece no termo que tem 8001 algarismos?

Podemos perceber que o termo da sequência com 8001 algarismos é formado por um padrão de 1000 agrupamentos de 8 algarismos da forma 12345432 mais o algarismo 1, como no diagrama abaixo:

12345432   12345432   ...   12345432   1

Como podemos verificar em cada agrupamento temos dois algarismos de 4, entoa temos 2.1000 = 2000 vezes que o algarismo 4 aparece.

Gabarito C

(A) 1000

(B) 1001

(C) 2000

(D) 2001

(E) 4000

c) (OBMEP 2006 2ª Fase Nível 2) Na tabela, o Capitão Rodrigo escreveu a letra *Q* embaixo de todos os números que são quadrados perfeitos e a letra *N* embaixo de todos os outros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...	2004	2005	2006
Q	*N*	*N*	*Q*	*N*	*N*	*N*	*N*	*Q*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*Q*	*N*	...	*N*	*N*	*N*

(A) Quantas vezes o Capitão Rodrigo escreveu a letra *Q*?

Podemos perceber que o padrão onde o Capitão Rodrigo escreveu Q nas casas de número de quadrados perfeitos, como 1^2, 2^2, 3^2,..., n^2 então como 2006 esta entre 44^2 e 45^2, pois $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$, então a última letra Q escrita pelo Capitão Rodrigo foi a casa 44^2, daí temos um total de 44 Q.

(B) Que número esta acima do milésimo *N* a partir da esquerda?

Usando o mesmo padrão dos quadrados perfeitos temos que 1000 estas entre $31^2 = 961$ e $32^2 = 1024$, então até a 1024ª posição temos 32 Q, logo temos 1024 - 32 = 992 N, para chegar em 1000 N, então o milésimo N esta na posição 1024 + 8 = 1032 e não haverá nenhum Q, pois o próximo Q será $33^2 = 1089$.

(C) O Capitão Rodrigo percebeu que em uma parte da tabela aparece a sequência $Q\overbrace{NNNN\ldots NNNN}^{100 \text{ letras } N}Q$, ou seja, uma letra *Q* seguida de 100 letras *N* seguidas de outra letra *Q*. Que número esta acima do primeiro *Q* dessa sequência?

Percebemos que os números de N entre cada Q aumenta sempre em dois em dois, onde o primeiro termo é dois, daí podemos escrever na forma de equação recursiva $X_n = 2.n$, $X_1 = 2$, onde X_n é a quantidade de N entre os quadrados perfeitos e n é o número de Q . Logo $X_n = 100 = 2.n$, por tanto n = 50. Daí temos que o primeiro Q entre os 100 N $50^2 = 2500$.

Como o número 2500 não esta na tabela, não temos em nenhum lugar os 100 N.

d) (OBMEP 2008 1ª Fase Nível 2) Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas. Se Estefânia embaralhar as cartas 74 vezes, qual carta estará no topo da pilha?

Quando Estefânia embaralhar as cartas 6 em 6 vezes elas voltarão à posição inicial, isso é, um padrão recursivo cíclico. Então podemos escrever que 74 = 12.6 + 2, embaralharmos as cartas 74 vezes, isso quer dizer que teremos 12 ciclos e mais duas embaralhadas, o que deixa a carta E no topo da pilha.

Gabarito E

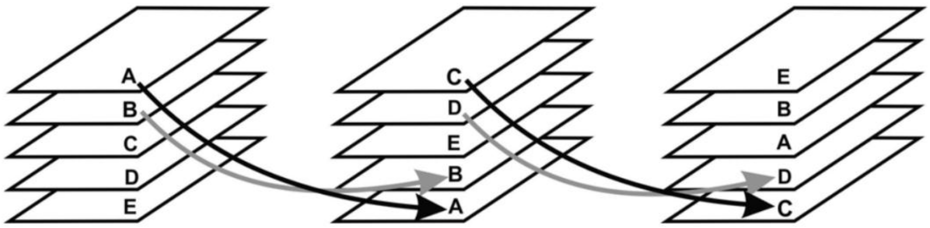
(A) A

(B) B

(C) C

(D) D

(E) E



e) (OBMEP 2009 1ª Fase Nível 3) Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?

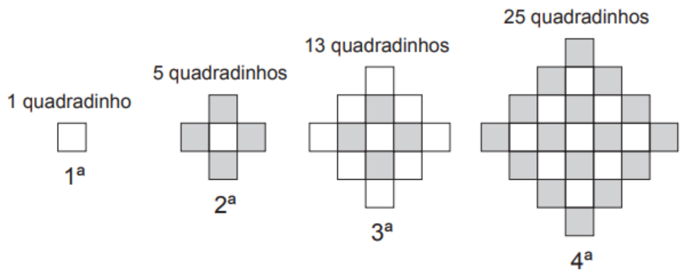
(A) A 30ª

(B) A 31ª

(C) A 32ª

(D) A 33ª

(E) A 34ª



Para encontrar um padrão recursivo, vamos separar as quantidades de quadradinhos de cores brancas e escuras:

Figura	Brancas	Escuras	Total
1ª	$1 = 1^2$	$0 = 0^2$	$1^2 + 0^2$
2ª	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$2^2 + 1^2$
3ª	$9 = 3^2$	$4 = 2^2$	$3^2 + 4^2$
4ª	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$4^2 + 3^2$

Podemos perceber que há uma Recorrência, pois conjecturamos na forma que a figura de n lados terá $n^2 + (n - 1)^2$ quadradinhos. Para solucionar o nosso problema basta achar o valor de n para $n^2 + (n - 1)^2 \geq 2009$, para $n \in \mathbb{N}$. Analisando o sinal do polinômio $n^2 + (n - 1)^2 - 2009 =$

$2n^2 - 2n - 2008$, porém esse processo será mais eficaz solucionando por aproximações.

Como $n^2 > (n - 1)^2$, para $n \geq 1$, teremos que $2n^2 > 2009$, ou seja, $n^2 > 1005$, daí temos que $n > 31$. Agora vamos verificar cada caso.

Para n = 32;

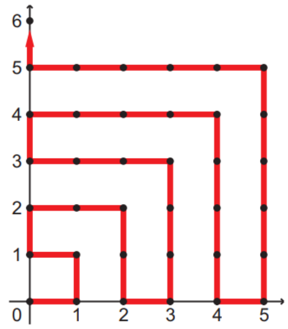
$32^2 + 31^2 = 1985$, para n = 32 não Server.

Para n = 33;

$33^2 + 34^2 = 2113$, logo ele se encontra no 33ª figura.

Gabarito D

f) (OBMEP 2011 2ª Fase Nível 3) A linha poligonal da figura parte da origem e passa por todos os pontos do plano que têm coordenadas inteiras não negativas, de acordo com o padrão indicado. A unidade de comprimento nos eixos é 1 cm. O comprimento da poligonal da origem até um ponto (a,b) é chamado de lonjura de (a,b); por exemplo, a lonjura de (1,2) é 5 cm.



(A) Determine a lonjura dos pontos (3,2) e (0,4).

Fazendo a simples contagem obtemos (3,2) = 11 cm e (0,4) = 16 cm.

(B) Quantos pontos de coordenadas inteiras estão contidos no interior e nos lados do quadrado cujos vértices são (0,0), (n,0), (n,n) e (0,n)?

Podemos conjecturar a nossa equação de Recorrência em função de n que será o número de lados. Percebemos que se pegamos um quadrado de n lados teremos (n + 1) linhas e (n + 1) pontos em cada linha, logo temos $(n + 1).(n + 1) = (n + 1)^2$ pontos em um quadrado de n lados, mas como queremos somente os pontos da borda temos que retirar os pontos internos de forma recursiva vamos retirar duas linhas e teremos (n - 1) linhas e (n - 1) pontos de em cada linha, daí temos $(n - 1).(n - 1) = (n - 1)^2$. Então os pontos da nossa borda são:

$(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = n^2 + 2n +1 - (n^2 - 2n +1) = n^2 + 2n +1 - n^2 + 2n - 1 = 4n$.

(C) Explique por que a lonjura do ponto (n,n) é $n^2 + n$.

Ao analisarmos a situação problema percebemos que para chegar no ponto (n,n) a poligonal percorrerá todos os pontos exceto os pontos da última horizontal caso n seja impar ou da última vertical caso n seja par.

Conjecturando a nossa sequência temos $(n + 1)^2 - n = n^2 + n +1$, com relação ao 1 é que quando partimos da origem estamos contando que ela mede uma unidade, por tanto temos que retirar essa unidade chegando em $n^2 + n$.

(D) Qual é o ponto cuja lonjura é 425?

Pelo item anterior mostramos que a lonjura de qualquer ponto (n,n) e dado pela fórmula fechada $n^2 + n$, por tanto para achar o ponto cuja a lonjura é 425, basta fazermos uma aproximação, o valor mais próximo é (20,20) que nos dará um valor de $20^2 + 20 = 420$, mas temos que analisar se o ponto irá locomoverá para horizontal ou vertical, notemos que 20 é par e também que os números pares na nossa poligonal da forma (n,n) sempre se move na vertical para baixo, então o ponto com lonjura 420 é (20,15).

g) (OBMEP 2012 1ª Fase Nível 3) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?

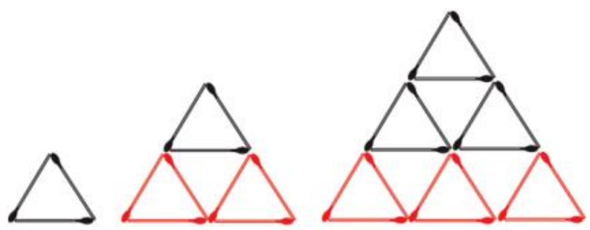
(A) 36

(B) 39

(C) 42

(D) 45

(E) 48



Consideremos $x_1 = 3$ o número de palitos utilizados para construir o primeiro triângulo. Para construir o segundo triângulo a partir do primeiro são necessários mais 6 palitos , ou seja, $x_2 = x_1 + 6 = x_2 = x_1 + 2.3$,e para montar o terceiro triângulo são necessários a partir do segundo triângulo são necessários mais 9 palitos, daí temos $x_3 = x_2 + 9 = x_3 = x_2 + 3.3$, e assim sucessivamente. E dessa relação podemos montar uma relação de Recorrência.

$$x_n : \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = x_1 + 2.3 \\ x_3 = x_2 + 3.3 \\ \quad \vdots = \vdots \\ x_n = x_{n-1} + n.3 \end{cases}$$

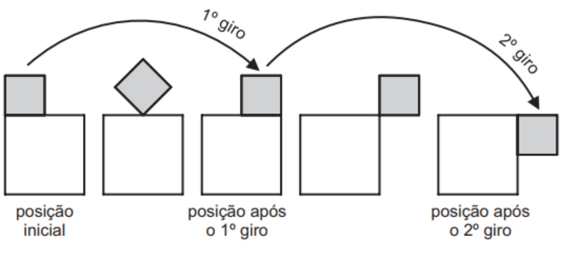
Somando membro a membro das igualdades teremos $x_n = 3(1 + 2 + 3 + ... + n) = 3n(n+1)/2$.

Para construirmos o quinto triângulo, basta calcularmos o x_5, logo:

$x_5 = 3.5(5+1)/2 = 15.6/2 = 15.3 = 45$.

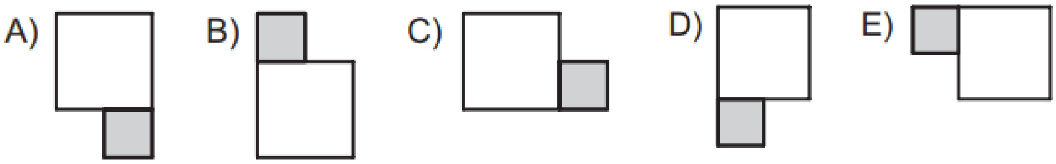
Gabarito D

h) (OBMEP 2012) Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

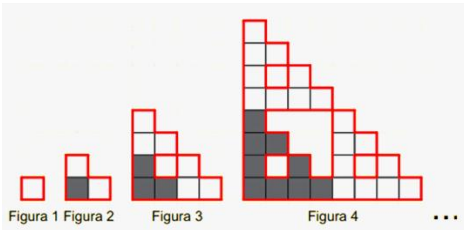


Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

Nessa situação problema percebemos que para cada giro do quadrado menor ele percorre 1/8 do perímetro do quadrado maior, então para completar um ciclo (uma volta) o quadrado menos terá que fazer 8 movimento para retornar na posição inicial, notemos que isso é um padrão, ou seja, uma Recorrência cíclica. Então 2012 = 251.8 + 4, isto quer dizer que o quadrado menor dará 251 voltas no quadrado maior e ainda fará 4 movimentos, assim parando na alternativa A.



i) (OBMEP 2014 1ª Fase Nível 2) Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?



(A) 88 cm

(B) 164 cm

(C) 172 cm

(D) 488 cm

(E) 492 cm

Para resolvermos esse item, teremos que calcular a medida do contorno destacada nas figuras em sequências, portanto vamos encontrar um padrão, ou seja, uma fórmula recursiva ou fechada.

Na primeira figura temos um quadrado de lado 1 cm, então a medida é 4 cm;

Na segunda figura temo 3 três quadrado, ou seja, 3.4 = 12 lados, porém sabemos que há lados da figura antiga e das outras duas nova que não tem o contorno, duas da figura antiga e uma de cada das figuras nova.

Notemos que esse é o padrão, triplicamos o valor antigo e subtraímos de 4 unidades. Logo a nossa fórmula de Recorrência é $X_{n+1} = 3X_n - 4$ e $X_1 = 4$, como estamos tratando de valores baixos podemos montar uma tabela e desenvolver até encontrarmos o número de figura.

Figura	Contorno (cm)
1ª	4
2ª	3.4 - 4 = 8
3ª	3.8 - 4 = 20
4ª	3.20 - 4 = 56
5ª	3.56 – 2.2 = 164
6ª	3.164 - 4 = 488

Gabarito D

Outra forma de solucionar o nosso problema é encontrando a fórmula fechada, em capítulos anteriores mostramos o processo.

$$x_n: \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = x_1 - 4 \\ \vdots = \vdots \\ x_n = x_{n-1} - 4 \end{cases}$$

Usando as técnicas a nosso fórmula fechada é $x_n = 2.3^{n-1} + 2$ e substituindo n por 6 temos:

$x_6 = 2.3^{6-1} + 2 = 2.243 + 2 = 486 + 2 = 488.$

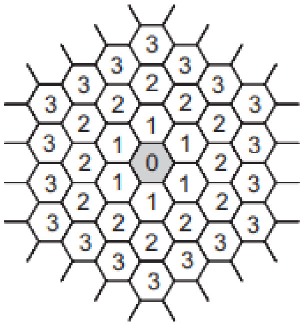
j) (OBMEP 2015 1ª Fase Nível 2) Na malha hexagonal, a casa central recebeu o número 0 e as casas vizinhas a ela receberam o número 1. Em seguida, as casas vizinhas às de número 1 receberam o número 2 e assim sucessivamente, como na figura. Quantas casas receberam o número 6?

Para solucionar a situação problema, iremos observar a figura na qual percebemos que são 6 malhas com o número 1, são 12 malhas com o número 2, são 18 malhas com o número 3, notemos que sempre quando vamos para a numeração sucessora aumenta em seis unidades, então podemos escrever uma função recursiva para esse problema:

$X_{n+1} = X_n + 6$, para $X_1 = 6$, para achar o X_6 podemos encontrar cada termo até ele ou achar a nossa fórmula fechada que já mencionamos no capítulo de Recorrência, na qual a nossa fórmula fechada é $X_n = 6n$. logo:

$X_6 = 6.6 = 36$

Gabarito B



(A) 32

(B) 36

(C) 42

(D) 48

(E) 54

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho trata sobre técnicas de resolução de problema/proposição pouco usual no Ensino Básico, quando comumente usamos de forma geral, fórmulas predeterminadas pelos livros didáticos atualmente.

Nosso trabalho tem como objetivo despertar o interesse por essas técnicas, para isso, é necessário que os professores estimulem seus alunos a descobrirem padrões assim modelando a situação problema, pois como mencionado anteriormente, elas são muito úteis para solucionar tipos de sequências numéricas não triviais de situações reais ou não.

Destacamos que ao abordarmos o princípio de Indução Matemática e as Recorrências lineares de 1ª e de 2ª ordem, pretendemos mostrar que suas técnicas são importantes na obtenção de uma modelagem matemática. Compete ao professor, que fizer uso desse trabalho, usando os assuntos que julgar pertinentes ao nível do Ensino Básico que atua, fazendo os ajustes necessários a realidade dos alunos.

Essas proposições são encontradas com mais frequência em exames de massa como, olimpíadas matemáticas, provas militares, os próprios exames do PROFMAT e entre outros exames, no presente trabalho damos ênfase nos itens das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas (OBEMP), uma das maiores competições de conhecimento matemático.

No trabalho foram apresentados e resolvidos itens, das duas fazer e dos três níveis da OBMEP e em anexo encontram-se mais itens propostos nas provas da OBMEP e outras questões clássicas de princípio de Indução Matemática retiradas de livros das referências.

Esperamos ter conseguido atingir o objetivo de estimular o interesse pela resolução desse tipo de problema/proposição de forma mais lógica e não somente a de reprodução de fórmulas e contas como é comumente trabalhada e também fomentar o interesse pela resolução desse tipo de situação problema que vem se tornando comum no Ensino Básico.

Ao resolvermos problemas/preposições que se encontra em livros didáticos, exames de massa ou em olimpíadas de matemática, estávamos mostrando que os padrões matemáticos já estão inseridos nos itens, esperando apenas que o professor mostre aos seus alunos o conhecimento recursivo na modelagem da resolução. Daí a importância de se iniciar o estudo da Recorrência ainda no Ensino Básico.

Esperamos que este trabalho venha contribuir com a prática docente de sala de aula e que, a partir dele, se viabilize aos alunos a oportunidade de descobrirem padrões, modelando-os na utilização de técnicas indutivas e recursivas.

Em situações futuras pretendemos aprimorar mais sobre esse objeto matemático, pois o mesmo é relevante para o estudo da matemática e em diversas outras ciências.

7 REFERÊNCIAS

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

DANTAS, S. Torre de Hanói. ND. Disponível em http://jogadamais.blogspot .com /2013/11/torre-de-hanoi_19.html. Acesso em 20/06/2018.

DÖRRIE, H. **Cem Grandes Problemas da Matemática Elementar, Sua História e Solução.** Dover, 1965

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2008.

FREITAS, O. **Equipamentos e materiais didáticos**. – Brasília: Universidade de Brasília, 2009

HEFEZ, A. **Indução Matemática.** Programa de Iniciação Científica – OBMEP. Rio de Janeiro: SBM. 2009. Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/ apostila4.pdf. Acesso em 22/11/2017.

HISTÓRIA DA PROPORÇÃO ÁUREA. Autoria e ano de publicação desconhecidos. Disponível em http://editorarealize.com.br/revistas /epbem/trabalhos/ Comunicacao_Cego_491.pdf. Acesso em 22/11/2017.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática**, Brasília-DF, Editora Universidade de Brasília, 1985.

IMPA. Portal https://impa.br/ e http://www.youtube.com/impabr. Acesso em 10/01/2018.

INDUCTION, RECURSION, AND RECURRENCES. Autoria e ano de publicação desconhecidos. Disponível em https://math.dartmouth.edu/archive /m19f03/public_html/Chapters4-6.pdf. Acesso em 22/11/2017.

JECH, T. J. **The Axiom of Choice**. Dover Publications, Nova York, 2008.

LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1. **Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio. Vol. 2. **Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Vol 1, 12ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MAURI C. N. **O Método Axiomático em Ciências**. Depto. Matemática - UNESP/Bauru. Disponível em http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Geo /axiomatico .pdf Acesso em 22/11/2017.

MORGADO, A. C. CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta. **Coleção PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OBMEP. Portal http://www.obmep.org.br/ Acesso em 22/11/2017.

Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. Portal http://www.obmep.org.br/pic.htm e https://www.youtube.com/user/PICOBMEP Acesso em 22/11/2017.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia da matemática.** 10ª impressão. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1963.

ANEXO

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Aqui apresentamos alguns exercícios clássicos de Indução Matemática retirados das diversas referências bibliográficas e que deixaremos ao encargo do leitor provar as suas propriedades.

1. Agora vamos aperfeiçoar os nossos conhecimentos sobre o princípio de Indução Matemática provando que as identidades abaixo são verdadeiras para todo $n \in N$:
   a) $1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3$
   b) $1/(1.2) + 1/(2.3) + ... + 1/(n(n + 1)) = n/(n + 1)$
   c) $1^2 + 3^2 + (2n - 1)^2 = n(2n - 1)(2n + 1)/3$
   d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1}.n^2 = [(-1)^{n-1}.n(n + 1)]/2$
   e) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = [n(n + 1)/2]^2$
   f) $1^3 + 3^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$
   g) $n! \geq 2^n$ para todo $n \geq 4$;
   h) $n! \geq 3^n$ para todo $n \geq 7$;
   i) $n! \geq 4^n$ para todo $n \geq 9$;

2. Sejam X , Y conjuntos não-vazios finitos com m e n elementos, respectivamente. Mostre, por Indução Matemática sobre n que o conjunto das funções $f : X \to Y$ tem n^m elementos.(dica use a resolução do exercício g) do capítulo de Indução Matemática).

3. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m divide n se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. Este fato é denotado por $m|n$. Prove a veracidade das seguintes afirmações, para todo $n \in \mathbb{N}$:
   a) $6|n^3 + 11n$
   b) $9|4^n + 15n - 1$

c) $3^{n+2}|10^{3n} - 1$

d) $7|2^{3n} - 1$

e) $8|3^{2n} + 7$

f) $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$

g) $171|773^{n} - 602^{n}$

h) $424|193^{2n+1} + 231^{2n+1}$

i) $169|3^{3n+3} - 26n – 27$

4. Mostre que $7^n - 1$ é divisível por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Seja $\{u_n\}$ a sequência de Fibonacci. Mostre que para todo $n \geq 1$ prove as veracidade dos itens a seguir:

a) $u_1^2 + ... + u_n^2 = u_n.u_{n - 1}$;

b) u_{3n} é par;

c) $u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{2n+1} - 1$;

d) $u_1 + u_3 + ... + u_{2n−1} = u_{2n}$;

e) $u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

f) $u_1 - u_2 + u_3 − u_4... + (−1)^{n+1}.u_n = (−1)^{n+1}.u_{n−1} + 1$.

g) $1u_1 + 2u_2 + ... + nu_n = nu_{n+2} – u_{n+3} + 2$

h) $u_{2n} = (u_{n+1})^2 – (u_{n-1})^2$

OUTROS ITENS DA OBMEP

A OBMEP vem ganhando espaço nas instituições do Ensino Básico, com o propósito de motivar o estudo de situações problemas de matemática e ao longo dos anos vem apresentando itens que vai de encontro com os modelos que domina a sala de aula, fazendo uma breve analise sobre os itens da OBMEP, percebemos que para o aluno resolvê-las necessita de algo a mais do que modelos prontos.

a) (OBMEP 2006 1ª Fase Nível 3) Qual é a soma dos algarismos do número $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{2005} + 10^{2006}$?

A) 1

(B) 10

(C) 2 006

(D) 2 007

(E) 20 060

b) (OBMEP 2007 1ª Fase Nível 1) O professor Samuel preencheu uma tabela com 507 linhas e 1007 colunas de acordo com o padrão a seguir:

Como ele preencheu a casa marcada com o X?

(A) Com o número 2

(B) Com a letra B

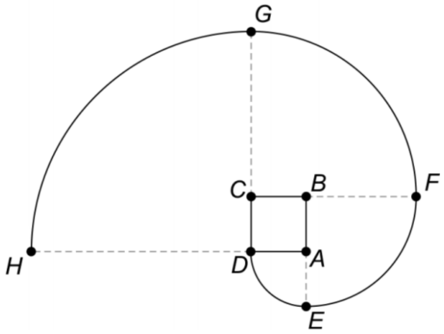
(C) Com a letra M

(D) Com o número 7

(E) Com o símbolo 

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	...	1007
1	O	B	M	E	P	O	B	M	E	P	...	...	
2	2	0	0	7		2	0	0	7		...	...	
3	O	B	M	E	P	O	B	M	E	P	...	...	
4	2	0	0	7		2	0	0	7		...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
507													X

c) (OBMEP 2008 1ª Fase Nível 3) A figura mostra um quadrado ABCD de lado 1 cm e arcos de circunferência DE, EF, FG e GH com centros A, B, C e D, respectivamente. Qual é a soma dos comprimentos desses arcos?



(A) 5π cm

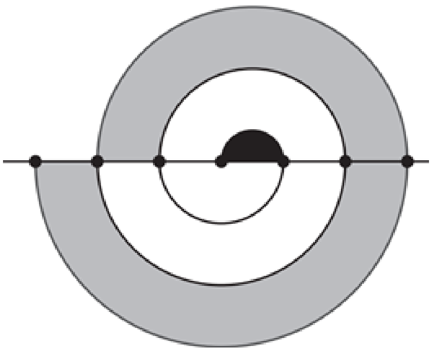
(B) 6π cm

(C) 7π cm

(D) 8π cm

(E) 9π cm

d) (OBMEP 2010 1ª Fase Nível 3) Na figura ao lado os pontos destacados sobre a reta estão igualmente espaçados. Os arcos que ligam esses pontos são semicircunferências e a região preta tem área igual a 1. Qual é a área da região cinza?



(A) 15

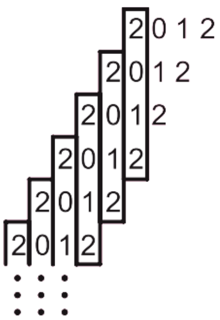
(B) 18

(C) 25

(D) 30

(E) 36

e) (OBMEP 2012 1º Fase Nível 2) Carlinhos escreveu várias vezes o número 2012 horizontalmente, como indicado na figura. Em seguida, ele desenhou 2012 retângulos, cada um ao redor de cada um dos números 2012 que podiam ser lidos verticalmente. Qual é a soma de todos os algarismos escritos por Carlinhos?



(A) 10000

(B) 10060

(C) 10075

(D) 12012

(E) 20120

f) (OBMEP 2013 1º Fase Nível 1) Qual é o algarismo das dezenas da soma

$$\underbrace{7}_{\substack{\text{um}\\ \text{sete}}} + \underbrace{77}_{\substack{\text{dois}\\ \text{setes}}} + \underbrace{777}_{\substack{\text{três}\\ \text{setes}}} + \underbrace{7777}_{\substack{\text{quatro}\\ \text{setes}}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\substack{\text{setenta e seis}\\ \text{setes}}} + \underbrace{777\ldots777}_{\substack{\text{setenta e sete}\\ \text{setes}}}?$$

(A) 5

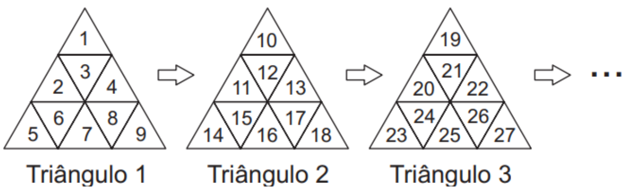
(B) 6

(C) 7

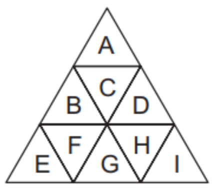
(D) 8

(E) 9

g) (OBMEP 2014 1ª Fase Nível 1) Guilherme começa a escrever os números naturais em figuras triangulares de acordo com o padrão abaixo:



Nomeando as casas de cada um desses triângulos com as letras A, B, C, D, E, F, G, H e I, como na figura ao lado, ele pode codificar cada número natural por meio do número do triângulo e da letra da casa em que ele aparece.



Por exemplo, o número 5 é codificado por 1E, pois aparece na casa E do Triângulo 1. Já o número 26 é codificado por 3H, pois aparece na casa H do Triângulo 3. Como Guilherme codifica o número 2014?

(A) 222E

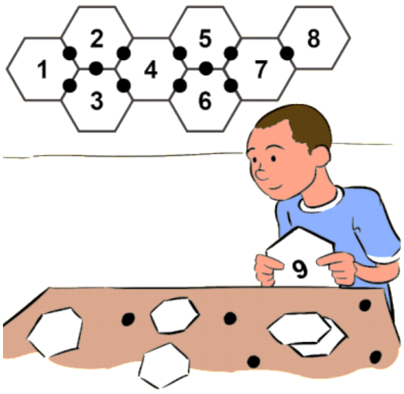
(B) 222G

(C) 223H

(D) 224E

(E) 224G

h) (OBMEP 2014 1ª Fase Nível 1) Gustavo fez uma tira com 300 hexágonos, fixando-os pelos lados comuns com um adesivo redondo, como na figura. Quantos adesivos ele usou?



(A) 495

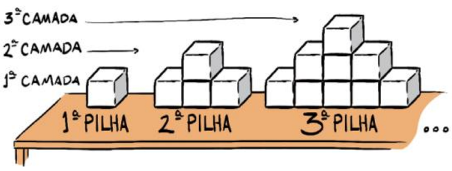
(B) 497

(C) 498

(D) 499

(E) 502

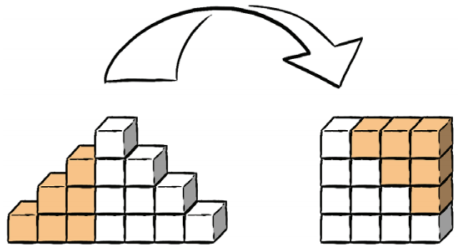
i) (OBMEP 2014 2º Fase Nível 2) Pedro constrói uma sequência de pilhas com cubinhos de tamanhos iguais. Ele começa com um único cubinho. As pilhas são construídas sempre de forma triangular, a partir da anterior, aumentando-se dois cubinhos em cada camada e colocando-se um cubinho no topo. Na figura, estão representadas as três primeiras pilhas da sequência. Observe que na primeira camada da terceira pilha há cinco cubinhos.



(A) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da quinta pilha?

(B) Quantos cubinhos deverá ter a primeira camada da 2014ª pilha?

(C) Pedro observou que podia transformar qualquer pilha triangular em uma pilha quadrada, reorganizando os cubinhos dessa pilha. Observe na figura como ele fez isso com a quarta pilha.



Ele usou essa ideia para calcular quantos cubinhos são necessários para construir uma pilha triangular com 99 cubinhos em sua primeira camada. Que resultado ele obteve?

j) (OBMEP 2015 1ª Fase Nível 3) Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

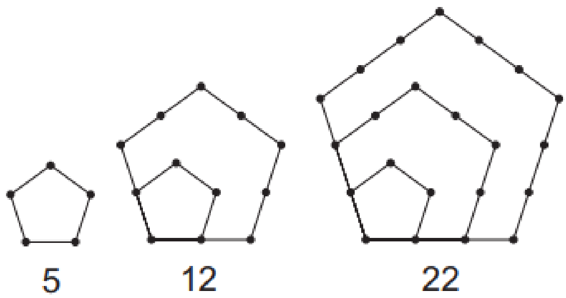
(A) 656

(B) 695

(C) 715

(D) 756

(E) 769



k) (OBMEP 2016 1ª Fase Nível 1) Abaixo temos uma sequência de figuras formadas por quadradinhos de 1 cm de lado. Cada figura da sequência, a partir da segunda, é formada acrescentando-se à figura anterior um retângulo igual ao da Figura 1, deslocando-o de um quadradinho, ora para cima, ora para baixo, como mostra a ilustração. Qual é o perímetro da figura com 1 000 quadradinhos?

(A) 220 cm

(B) 380 cm

(C) 400 cm

(D) 414 cm

(E) 418 cm

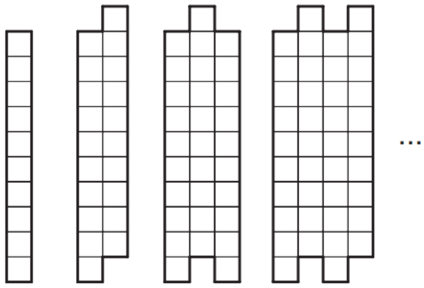
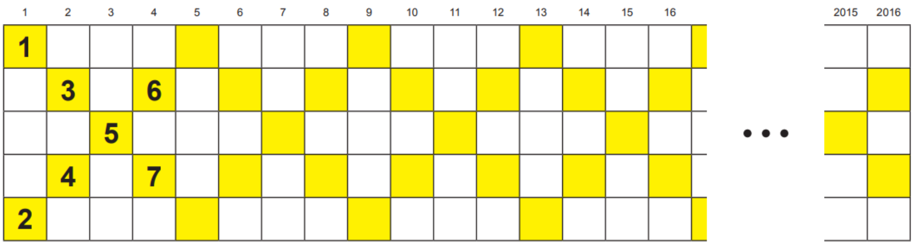


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

l) (OBMEP 2016 2ª Fase Nível 1) Joana fez um quadriculado com 5 linhas e 2016 colunas com as casas amarelas seguindo o padrão da figura, ou seja, subindo e descendo diagonalmente. Em seguida, ela escreveu os números naturais nas casas amarelas em ordem crescente, a partir do 1, de cima para baixo e da esquerda para a direita. Observe abaixo como Joana começou a escrever os números no quadriculado. c) Em qual coluna foi escrito o número 597? b) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 2016?



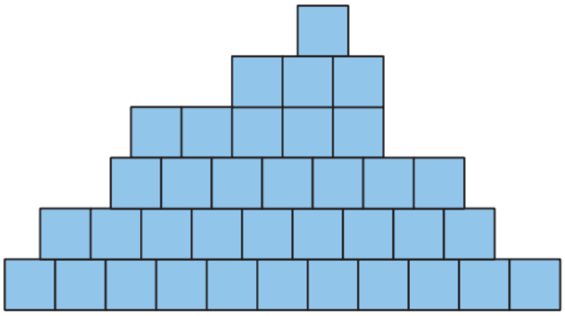
(A) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 9?

(B) Qual foi o maior número que Joana escreveu na coluna 2016?

(C) Em qual coluna foi escrito o número 597?

(D) Em qual coluna a soma dos dois números escritos é 713?

m) (OBMEP 2016 2ª Fase Nível 3) Uma figura é construída por fileiras horizontais de quadradinhos 1x1, dispostos lado a lado, sem sobreposição e sem espaçamento. Cada fileira, com exceção da primeira, está encostada inteiramente na fileira de baixo. A primeira fileira possui um número ímpar de quadradinhos e cada uma das demais possui dois quadradinhos a menos do que a fileira imediatamente abaixo. A última fileira sempre contém um único quadradinho. Vemos uma figura na qual a primeira fileira contém 11 quadradinhos.



(A) Encontre a área e o perímetro de uma figura com 13 quadradinhos na primeira fileira.

(B) Mostre que, independentemente do número de quadradinhos da primeira fileira, o número total de quadradinhos de uma figura é o quadrado de um número natural.

(C) Mostre que, independentemente do número de quadradinhos da primeira fileira, a área A e o perímetro p da figura satisfazem a igualdade $(p + 2)^2 + = 36A$.

n) (OBMEP 2017 1ª Fase Nível 1) Com pentágonos regulares com 1 cm de lado, formamos uma sequência de polígonos como na figura. O perímetro do primeiro polígono é 5 cm, o perímetro do segundo é 8 cm, e assim por diante. Quantos pentágonos são necessários para formar um polígono com perímetro igual a 1736 cm?

(A) 570

(B) 572

(C) 574

(D) 576

(E) 578