INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS
PARA O ENSINO MÉDIO

CLEVERTON SOUZA SANTOS

Aracaju, 2016

Cleverton Souza Santos

Introdução à Teoria dos Jogos:

para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática (Teoria dos Jogos), do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, Cidade Universitária “Prof. José Aloísio de Campos”, Campus de São Cristóvão.

Orientador: Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo

Agosto de 2016

DEDICATÓRIA

DEDICO

À minha querida esposa, Iraci José da Silva, que me apoiou durante esse período de estudos que me incentivou o tempo todo, sabendo entender minha ausência relativa em algumas ocasiões. Também a minha família, especialmente minha mãe Celeste e meu pai Nilton.

AGRADECIMENTOS

AGRADEÇO

A Deus, primeiramente, a minha existência e por ter me concedido, por meio de Seu infínito amor e sabedoria, o potencial de concretizar mais uma conquista em minha vida. À minha esposa Iraci, pela compreensão, força, estímulo, carinho, ajuda em momentos difíceis, por ter doado de bom grado o tempo dos sábados que deveriam ser dedicados a ela, e as contribuições sem as quais a realização deste trabalho se tornaria impossível. Muito obrigado a minha querida família, sempre presente em minha vida. Meus agradecimentos também ao meu orientador, Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo pela paciência, apoio e confiança. Aos professores do PROFMAT - ARACAJU, que proporcionaram momentos enriquecedores durante a Pós-Graduação. Aos amigos Pedro, Fernando e Wallison pelos momentos de estudos e descontrações indispensáveis. Mas não posso esquecer os demais companheiros que estiveram conosco nestes dois anos juntos estudando, aprendendo e colaborando uns com os outros. A todos do PROFMAT e às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho tem subsidiarimente uma proposta de ensino para o conteúdo de Lógica, Matrizes e Probabilidade no Ensino Médio, todavia o real objetivo é a pretensão da inserção, na grade curricular, da por si só relevante, Teoria dos Jogos. Uma introdução histórica motivadora do estudo seguida da apresentação situações ficcionais, mais distantes da realidade, bem como algumas próximas de problemas do cotidiano, tratadas com leveza, às vezes com alguma irreverência, trazem os elementos de Lógica, Matrizes e Probabilidade à tona. Também apresenta-se os elementos essencias da Teoria dos Jogos e algumas soluções propostas por ela. No trabalho consta, também, uma demonstração do Teorema Minimax accessível a todo estudante do Ensino Médio e por fim tem-se a exibição de uma matemática mais sofisticada fundamentando todo o contéudo.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Otimização

Abstract

This work has an educational proposal for the content of Logic, Matrices and Probability in high school, but the real goal is the intention of the insertion in the curriculum, of itself relevant, Game Theory. A historical introduction motivating the study followed the presentation fictional situations, distant from reality, as well as some close to everyday problems, treated lightly, sometimes with some irreverence, bring the Logic elements, Matrices and Probability to the fore. It also presents the essences elements of Game Theory and some solutions proposed by it. At work consists also a demonstration of the Minimax Theorem accessible to every high school student and finally has to display a more sophisticated mathematical reasons all content.

Keywords:Game Theory, Optimization

Lista de Figuras

Conteúdo

Capítulo 1

Histórico

Figura 1.1: O tempo

A passagem do tempo é uma das certezas que o homem possui. Assim, iniciaremos este trabalho realizando uma pequena viagem no tempo e contando o nascimento e o desenvolvimento desta vibrante teoria. Pesquisas arqueológicas encontraram sinais da existência de jogos de salão[1] remontando a 2.600 A.C., sendo que algumas culturas antigas utilizavam jogos em rituais religiosos e processos advinhatórios. Na cultura indiana os jogos além de entreterem também serviam de simulação de batalhas, o Shaturanga, precursor do xadrez é um exemplo. Na pedagogia moderna os jogos são instrumentos facilitadores no proceso de aprendizagem.

É inegável a presença marcante dos jogos na sociedade humana, fazendo parte do desenvolvimento humano, todavia seu estudo foi sempre visto com certa desconfiança se não descaso, principalmente pelo aspecto dos jogos mais populares envolverem elementos aleatórios e imprevisivéis que poderiam influenciar de forma favorável a um dos participantes do jogo - denominados de acaso ou sorte, ou sua falta, o azar - conhecidos por jogos de azar.

Tal situação somente começou a mudar com surgimento da Teoria das Probabilidades a partir do seculo XV. Pode-se considerar como um precursor do estudo das probabilidades a obra *Summa de Arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* ou simplesmente *Summa*, publicada em 1494 pelo frei Luca Pacioli ou Paciolo (1445-1517), que trazia basicamente um resumo de toda a matemática conhecida à época, contemplando aspectos de Aritmética, Algebra, Geometria, Trigonometria. Sendo a primeira obra conhecida a tratar de um jogo de azar, nela era analisado o problema da partiha do dinheiro envolvido em uma partida não terminada

[1]são os chamados jogos de mesa, no qual o jogador não costuma realizar uma atividade corporal intensa ou quase nenhuma, normalmente realizados em pequenos espaços, geralmente fechados (salas), com o uso de tabuleiros e pequenas peças para representação dos jogadores, nos quais as regras são pré-determinadas. Na atualidade quase todos jogos dessa natureza são pré-fabricados - industrializados.

em um jogo de dados (situação que passou a ser conhecida por *problema dos pontos* ou *divisão da aposta*). Tartaglia (1499-1557) ao publicar sua obra *General Trattato* abordou o problema dos pontos apresentando uma solução incorreta. Nesta epóca temos o ilustre matemático Girolamo Cardano (1501-1576) que publica seu livro *Liber de Ludo Aleae* em 1663, que na realidade é um manual de jogos de azar, dos quais, acredita-se entendia bem, pois a história o tem por um viciado nos dados. Nesta obra resolveu vários problemas de enumeração e retornou a análise do problema dos pontos de Paciolo. Ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados acreditando na existência de princípios científicos que não fossem a mera sorte. Tendo sido o precursor na utilização de técnicas de Combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis num evento aleatório e, desta forma, calcular a probabilidade de ocorrência do evento como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao evento. Todavia, seus estudos foram limitados a casos concretos e nunca produziu teoremas a cerca da matéria. Mas ainda assim, não seria exagero considerá-lo o pai da moderna Teoria das Probabilidades.

O passo seguinte foi em decorrência do conhecido jogador e nobre Antoine Gambaud (1607-1684), conhecido como cavaleiro de Méré, que conseguiu convencer Pascal a analisar o problema dos pontos. O qual iniciou uma correspondência com Fermat, onde além de discutir o problema dos pontos, em uma das cartas Pascal expõe algumas das conclusões que obteve acerca do triângulo aritmético que passaria a ter seu nome. As soluções distintas de cada um, apresentadas nestas cartas, mas de igual resultado podem ser consideradas o passo formal inicial da Teoria das Probabilidades.

Um formulação do problema resolvido por Pascal e Fermat é:

Divisão da quantia (problema dos pontos): *Dois jogadores disputavam um prêmio de 64 moedas que seria dado a quem primeiro fizesse 3 pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha 2 pontos e o segundo tinha 1 ponto, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?*

A solução apresentada por Pascal segue o seguinte raciocinio:

Seja A o jogador com duas vitórias, então na pŕoxima rodada se A ganhasse então ele levaria tudo, ou seja as 64 moedas, mas se perdesse ambos ficariam empatados e neste caso teriam direito a 32 moedas cada. O jogador A então pensaria: "Estou seguro de receber 32 moedas caso seja derrotado na próxima rodada, mas posso vir a ganhar e como as nossas chances são as mesmas (na segunda rodada pós interrupção de jogo), vamos dividir as 32 restantes". Portanto parando agora, levo 48 (= 32 + 16) moedas e você 16.

Fermat idealizou uma sistemática diferente por solução, fundamentando-se na análise combinatória.

*Sendo **a** quantidade de partidas ganhas pelo jogador A e **b** as ganhas pelo jogador B. Então após mais duas partidas certamente o jogo estaria encerrado, pois um dos dois oponentes teria os três pontos necessários. Desta forma, teríamos as seguinte possíveis situações: bb,ba,ab,aa. Onde, destas, três são favoráveis ao jogador A. Desta forma ele deveria receber 3/4 do total de moedas, ou seja, 3/4 de 64 = 48.*

Notemos que nas solução de Pascal e Fermat estão as raízes do conceito de Esperança Matemática, a relação: Casos Favoráveis/Casos Possíveis e o uso de técnicas combinatórias tão corriqueiro nos dias atuais.

As soluções apresentadas por ambos foram publicadas por Huygens em 1655(1629 - 1695) na obra *De Ratiociniis in Ludo Aleae* a qual despertou o interesse de Jacques Bernoulli (1654-1705), que trabalhando sobre a abordagem de Fermat iniciou o processo de sistematização da Teoria da Probabilidades. Os principais resultados de Bernoulli foram publicados postumamente em seu livro *Ars Conjectandi* de 1713. Mas a grande obra desde período surgiu em 1812 quando Laplace (1749 - 1827), publicou seu tratado *Théorie Analytique des Probabilités* o qual foi o maior marco dessa etapa clássica da Teoria das Probabilidades, onde entre diversos teoremas e regras é apresentada a regra de Bayes referente a probabilidade condicional. A partir daí, os estudos clássicos de probabilidades aceleraram-se e continuaram por grandes matemáticos, como Gauss, Poisson, Poincaré, Markov, Borel e outros.

O proximo marco histórico significativo na Teoria dos Jogos ocorre em torno de 1713, com a publicação da 2ª edição de *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, de Pierre Rémond de Montmort (1678-1719). Nesta obra consta a correspondência entre o autor Montmort, Nicolas Bernoulli e o Barão de Waldegrave de Chewton (1684–1741). Na qual Montmort discute o jogo de cartas denominado Le Her. Uma formulação do jogo (presente em TodHunter) é:

Le Her: *"Peter, de um pacote comum de cartas, retira uma carta aleatoriamente para Paul e também aletaoriamente uma outra para si mesmo. O objetivo principal de cada um é obter uma carta de maior valor que seu adversário. A ordem de valor é Ás, dois, três, ..., dez, Valete, Rainha e Rei. Agora, se Paul não está contente com sua carta ele pode obrigar Peter a trocar as cartas, mas se Peter tem um Rei pode recusar-se a realizar a troca e continuar com o Rei. Por outro lado, se Peter não está contente com sua carta original, ou eventualmente com a carta que foi obrigado a trocar com Paul ele pode trocar a sua carta por outra escolhida aleatoriamente da pilha de cartas restantes, mas se a carta for um Rei ele terá de continuar com a carta que lhe desagrada. Se Peter e Paul, finalmente, tem carta de mesmo valor Paul é considerado perdedor"(Todhunter, 1865, 106)*

O problema envolvido equivale a determinação das chances relativas de Peter e Paul e sua dependência com o fato deles usarem ou não seus direitos de troca.

Bernoulli afirma que em uma certa contingência do jogo cada um dos jogadores deve tomar um certo curso dos dois que lhe são possiveis, por sua vez Montmort discorda e afirma que não é certo que um curso de ação é preferível ao outro.

A análise do problema conforme nos informa Todhunter:

I - *no caso de Paul possuir uma carta de valor superior a sete é mais vantajoso para ele continuar com a carta que trocar, pois se for por exemplo um oito somente as cartas nove, dez, valete e rainha (observe que Peter não é obrigado a trocar o Rei) lhe seriam mais vantajosas; por outro lado as cartas rei, sete, seis, cinco, quatro, três, dois e ás lhe seriam mais desvantajosas. Portanto, existem mais possibilidades desvantajosas (8) que vantajosas (4). Sendo melhor, então, manter a carta original. Por um raciocinio analógo, se Paul obtiver uma carta igual ou inferior a seis é mais vantajoso efetuar a troca com Peter. Por outro lado se Paul não efetuar a troca, se Peter possuir uma carta de valor superior a oito, então é mais vantajoso manter a carta que trocá-la. Não havendo nestas situações dúvidas quanto a estratégia (escolha de ações) a ser adotada por cada jogador*

II - *Paul possui uma carta de valor igual a sete e agora existem duas possibilidades, Paul forçar ou não a troca.*

a: Paul força a troca.

Nesta situação ambos sabem o que o outro possui. Desta forma Peter somente permanece com a carta que recebeu de Paul, se Paul tiver um seis ou outra de menor valor e troca por uma da pilha de cartas restante se Paul tiver um oito ou outra de maior valor. Desta forma as chances de Paul vem da hipotese de Peter ter originalmente uma *Rainha* ou *Valete* ou *Dez* ou *Nove* ou, por fim, *Oito*. São cinco casos possíveis favoravéis a Paul, tomemos por exemplo que Peter tinha originalmente um *Dez*. Então, no ínicio do jogo Paul sabe que sua carta é um *Sete*, sobrando então 51 cartas das quais somente existem 4 *Dez* (Um para cada naipe - Paus, Espada, Ouro e Coração). Logo a chance de Peter iniciar o jogo com um *Dez* é $\frac{4}{51}$. Então Paul pega o *Dez* e Peter recebe o *Sete*. Agora das 50 cartas restantes, Peter escolhe uma aletoriamente, sendo que destas 39 são favoravéis a Paul, nomeadamente: *3 Setes*, *4 Reis* - apesar de ser uma carta de valor superior ao *Sete* conforme as regras do jogo Peter não pode ficar com a mesma - *4 Noves*, *4 Oitos*, *4 Seis*, *4 Cincos*, *4 Quatros*, *4 Três*, *4 Dois* e *4 Áses*. Assim, $\frac{39}{51}$ são as chances favoravéis a Paul, resultando neste caso um total de $\frac{4}{51}\cdot\frac{39}{51}$ chances favoráveis a Paul. Para o caso de Peter ter originalmente um *Nove*, a chance é de novamente $\frac{4}{51}$ e agora quando Peter for realizar a troca por uma das cartas restantes teremos 35 que são favoráveis a Paul: *3 Setes*, *4 Reis*, *4 Oitos*, *4 Seis*, *4 Cincos*, *4 Quatros*, *4 Três*, *4 Dois* e *4 Áses* e $\frac{35}{51}$ são as chances favoravéis a Paul, resultando neste caso um total de $\frac{4}{51}\cdot\frac{35}{51}$ chances favoráveis a Paul. Continuando com o mesmo raciocionio para os demais casos temos que as chances totais de Paul são:

$$\frac{4}{51}\cdot\frac{47+43+39+35+31}{50}=\frac{780}{51\cdot 50}$$

Fato relevante aqui é que as chances de Paul podem ser estimadas sem especulação sobre a conduta de Peter, pois não há duvida sobre a mesma

b: Paul não força a troca.

Nesta situação ambos não sabem o que o outro possui. Uma consideração, mais ou menos óbvia, é que se Peter tiver um *Nove* ou uma carta de maior valor irá mantê-la e se tiver um *Sete* ou outra carta de menor valor irá trocá-la. Assim, a questão (disputa) gira em torno do que Peter irá fazer se possuir um *Oito*.

(1): Peter adota a regra de manter o *Oito*

As chances de Paul surgem da hipotese de que Peter ter um *Sete*, *Seis*, *Cinco*, *Quatro*, *Três*, *Dois* ou *Ás*, pois assim ele irá trocá-la. Através de raciocinio semelhante ao já apresentado encontramos a chance de Paul:

$$\frac{3}{51}\cdot\frac{24}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}=\frac{720}{51\cdot 50}$$

São sete casos possíveis favoravéis a Paul, tomemos por exemplo que Peter tinha originalmente um *Sete*. Então, no ínicio do jogo Paul sabe que sua carta é um *Sete*, sobrando então 51 cartas, das quais somente existem 3 *Sete* disponiveis. Logo a chance de Peter iniciar o jogo com um *Sete* é $\frac{3}{51}$. Agora das 50 cartas restantes, Peter escolhe uma aletoriamente, sendo que destas 24 são favoravéis a Paul, nomeadamente: *4 Seis*, *4 Cincos*, *4 Quatros*, *4 Três*, *4 Dois* e *4 Áses*. Um detalhe importante é que apesar de Peter não poder manter um *Rei*, esta situação não é favorável, pois Peter mantém o *Sete* e como ambos possuem cartas de mesmo valor Peter ganha. Assim, $\frac{24}{51}$ são as chances favoravéis a Paul, resultando neste caso um total de $\frac{3}{51}\cdot\frac{24}{51}$ chances favoráveis a Paul. Para o caso de Peter ter originalmente um *Seis*, a chance é $\frac{4}{51}$ e agora quando Peter for realizar a troca por uma das cartas restantes, 27 são favoráveis a Paul: *3 Seis*, *4 Reis*, *4 Cincos*, *4 Quatros*, *4 Três*, *4 Dois* e *4 Áses* e $\frac{27}{51}$ são as chances favoravéis a Paul, resultando neste caso um total de $\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{51}$ chances favoráveis a Paul. Continuando com o mesmo raciocionio para os demais casos temos que as chances totais de Paul são:

$$\frac{3}{51}\cdot\frac{24}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}+\frac{4}{51}\cdot\frac{27}{50}=\frac{720}{51\cdot 50}$$

(2): Peter adota a regra de trocar o *Oito*

As chances de Paul são as mesmas da situação anterior acrescidas apenas de $\frac{4}{51}\cdot\frac{24}{50}$, ou seja, correspondem a $\frac{816}{51\cdot 50}$. Se Peter não tiver algum motivo em particular para escolher uma das regras, então podemos supor que a chance de escolher uma ou outra é a mesma. Desta forma podemos tomar que as chances de Paul são: $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{720}{51\cdot 50}+\frac{816}{51\cdot 50}\right)=\frac{768}{51\cdot 50}$.

Assim, temos que no caso I as chances de Paul sâo: $\frac{780}{51\cdot 50}$ e no caso II sâo: $\frac{768}{51\cdot 50}$. Portanto, no caso II as chances de Paul são menores e consequentemente ele deve adotar a regra de trocar de carta quando tiver um *Sete*. Este um dos argumentos nos quais Bernoulli se baseia. Por outro lado,tanto Montmort quanto Waldegrave não concordam com as conclusões de Bernoulli. Para tanto calculam as chances de Peter, no caso de adotar uma das duas regras estabelecidas.

Agora vamos calcular as chances de Peter para a situação em que possui um *Oito* e Paul não forçou a troca. Neste momento Peter pode argumentar (pensar) desta forma:

I. Supondo que Paul adote a regra de trocar o *Sete*; então ele tem um *Oito* ou uma carta maior. Então, existem 23 possíbilidades de carta com ele (*3 Oitos* , *4 Noves*, *4 Dez*, *4 Valetes*, *4 Rainhas* ou *4 Reis*) e

(1.) Se eu mantenho meu oito,neste caso somente os *3 Oitos* me são favoráveis. Logo minhas chances são:

$$\frac{3}{23}$$

(2.) Se eu troco meu oito,então minhas chances vem da hipotese de Paul possuir uma *Rainha*,um *Valete*, *Dez*,*Nove* ou um *Oito*; então minhas chances são:

$$\frac{4}{23}\cdot\frac{3}{50}+\frac{4}{23}\cdot\frac{7}{50}+\frac{4}{23}\cdot\frac{11}{50}+\frac{4}{23}\cdot\frac{15}{50}+\frac{3}{23}\cdot\frac{22}{50}=\frac{210}{23\cdot 50}.$$

II. Supondo que Paul adote a regra de manter o *Sete*. Então,

(1.) Se eu mantenho meu *Oito* minhas chances são: $\frac{7}{27}$. Pois agora são acrescidas 4 possibilidades às existentes (*4 Setes*) e destas somente os *4 Oitos* e *3 Setes* me são favoráveis.

(2.) Se eu troco meu *Oito* minhas chances são:

$$\frac{4}{27}\cdot\frac{3}{50}+\frac{4}{27}\cdot\frac{7}{50}+\frac{4}{27}\cdot\frac{11}{50}+\frac{4}{27}\cdot\frac{15}{50}+\frac{3}{27}\cdot\frac{22}{50}+\frac{4}{27}\cdot\frac{26}{50}=\frac{314}{27\cdot 50}.$$

Agora temos que para Peter, se o mesmo souber que Paul não irá adotar a regra de não fazer a troca então para ele é mais vantajoso também não fazer a troca. Por outro, se Peter souber que seu adversário irá a dotar a regra de trocar, será melhor então também efetuar a troca.

Enfim, criou-se um circulo vicioso. Pois, Paul deseja sempre agir de forma inversa a Peter e Peter por sua vez deseja agir sempre da mesma forma de Paul.

Diante disto Bernoulli conclui que para ambos os jogadores nos casos duvidosos (Peter com oito e Paul com sete) devem trocar suas cartas. Enquanto Montmort, conclui que não é possível determinar nenhuma regra para os jogadores.

Waldegrave, discorda de ambos. E analisa o problema através de outro enfoque. Ele considera o problema de escolher a estratégia que maximize a probabilidade de vitória dos jogadores (e minimize a probabilidade de vitória do adversário), para qualquer estratégia (regra) escolhida por seu oponente. Portanto, Waldegrave apresenta sem denominar uma solução minimax. Analisando a matriz de probabilidades de vitórias de Peter e Paul, ele conclui que cada jogador não deve escolher uma regra de forma fixa, mas com uma certa aleatoriedade. Concluindo que para Peter ele deve adotar a regra de manter cartas com valor igual a oito ou superior (e trocar cartas menores) com uma probabiliade de 5/8 e trocar cartas de oito abaixo com probabilidade de 3/8. E Paul deve utilizar, conforme esperado, as probabilidades contrárias, ou seja trocar com probabilidade de 5/8 e manter com probabilidade de 3/8. Esta solução, foi acatada por todos os envolvidos, onde Bernoulli inclusive elogia Waldegrave por sua analise.

A grande relevância desta discussão é que dois séculos antes dos conceitos de minimax e estratégia mista[2] serem formulados, Waldegrave apresenta uma solução que apresenta justamente estes elementos, superando um dos maiores gênios da história da matemática.

Apenas mais de um século depois,em 1838, temos o próximo fato digno de nota na Teoria dos Jogos, com a publicação de *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* de Augustin Cournot(1801-1877). No capitulo 7, *On the Competition of Producers* Cournot discute uma caso especial de concorrência. Onde o mercado é dominado por duas empresas. Sendo depois conhecido na literatura por "Duopólio de Cournot". Onde antecipa a idéia de equilíbrio apresentado por Nash[3]. As hipóteses do modelo de Cournot são:

- As empresas vendem produtos homogêneos, ou seja, os consumidores não distinguem entre os produtos por sua procedência;
- A variável de controle é a quantidade produzida;
- Cada empresa decide independentemente e simultaneamente a quantidade que produzirá;
- O custo é função somente da quantidade produzida, dado por $C(q_i) = cq_i$; onde:
  - * q_i é a quantidade produzida pela firma i;
  - ** c é custo de produção de uma unidade, considerado constante, denominado de custo marginal
- Não possuem restrições de capacidade, podem suprir toda demanda que receberem;
- As empresas vendem o produto por um mesmo preço, pois se assim não fosse em virtude da homogeneidade os consumidores iriam adquirir o produto mais barato;
- O preço é uma função linear da demanda: $P = a - bQ$; onde
  - ✠ Q é a demanda total a qual por sua vez é a soma das produções de cada firma, ou seja, $Q = q_1 + q_2$;
  - ✠ a é o maior valor que os consumidores pagariam por um unidade do produto;

Em virtude das hipóteses a receita da empresa é uma função da sua produção e do preço praticado, quer dizer $R_i = P \cdot q_i$ e os lucros resultantes são a subtração das receitas pelos custos:

$$L_i = R_i - C(q_i) = P \cdot q_i - c \cdot q_i = (P - c) \cdot q_i = ((a - bQ) - c) \cdot q_i = [(a - b(q_1 + q_2) - c] \cdot q_i$$

Uma condição importante derivada das hipóteses é que $a > c$. Se eventualmente o custo marginal for superior ao maior valor pago por unidade de produção,então não seria viável tal produção. Não há sentido em demanda, preço e custos negativos. Assim, $a > 0$ e $c > 0$. O interesse, óbvio, das empresas é maximizar seus lucros. Do cálculo sabemos que tal condição

[2]Consiste justamente na adoção das escolhas não de forma determinada mas com uma certa aleatoriedade, ou seja, com um distribuição de probabilidades de ocorrência. Justamente o proposto por Waldegrave

[3]Equilíbrio de Nash de uma maneira menos formal pode ser definido como a melhor escolha considerando todas as opções disponíveis para os outros jogadores (oponentes, adversários).

é atingida quando a derivada primeira da função lucro de cada empresa, em relação a sua produção, é nula, logo:

$$\frac{dL_1}{dq_1} = \frac{d[(a - b(q_1 + q_2) - c] \cdot q_1}{dq_1} = a - c - 2 \cdot b \cdot q_1 - b \cdot q_2 \Rightarrow 2q_1 + q_2 = \frac{a - c}{b}$$

$$\frac{dL_2}{dq_2} = \frac{d[(a - b(q_1 + q_2) - c] \cdot q_2}{dq_2} = a - c - 2 \cdot b \cdot q_2 - b \cdot q_2 \Rightarrow 2q_2 + q_1 = \frac{a - c}{b}$$

Neste momento devemos lembrar que cada empresa decide, de forma independente e sem conhecimento da outra, a sua produção. Assim, q_1 e q_2 são variavéis independentes e resolvendo as equações em funçao das mesmas teremos:

$$q_1 = q_2 = \frac{a - c}{3b}$$

Dada a simetria das hipoteses adotadas, não é surpresa que para maximizar seus lucros as empresas devem produzir a mesma quantidade. O fato relevante, é que esta situação é um caso particular do equilibrio de Nash conforme já mencionado.

O alcande da diversidade de atuação da Teoria dos Jogos, constata-se em 1871, na primeira edição de *The Descent of Man, and Selection in Relations to Sex* de Charles Darwin(1809-1882), onde ele apresenta o primeiro argumento (implicito) teórico de jogos, em biologia evolucionária. Darwin argumenta que a natureza age para equalizar a razão entre os sexos mantendo a mesma sempre o mas próximo possível de $1 : 1$. Pois, se por exemplo, o nascimento de fêmeas são menos comuns que de machos, então uma fêmea recém-nascida terá melhores perspectivas de acasalamento que um macho recém-nascido e, consequentemente, pode esperar ter mais filhos. Assim, pais geneticamente dispostos a produzir fêmeas tendem a ter maior número médio de netos e dessa forma os genes para produção de fêmeas tendem a se espalhar e o nascimento de fêmeas torna-se mais comum. A medida que a proporção de $1 : 1$ para os sexos é atingida a vantagem associada com a produção de fêmeas acaba. O mesmo raciocinio vale se machos são substituídos por fêmeas. Portanto, $1 : 1$ é a razão de equilibrio entre os sexos.

O primeiro teorema em Teoria dos Jogos somente apareceu em 1913, com Ernest Zermelo (1871-1953), em seu paper *Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des schachspiels*, no qual afirma que em um jogo de xadrez ou as brancas podem forçar a vitória, ou as negras podem forçar a vitória ou ambos os lados podem forçar ao menos um empate. Em outras palavras o xadrez é um jogo determinado.[4]

Entre 1921 e 1927 Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) publica quatro papers e uma errata sobre jogos estratégicos. Borel (1921) considerou um jogo de duas pessoas que era simétrico no sentido que se os dois jogadores adotarem a mesma estratégia, suas chances de vitoria seriam iguais. O número de possíveis estratégias puras era assumido infinito. Se A escolhe um método de jogo (estratégia pura), e B escolhesse o método, a probabilidade de A vencer é $a = \frac{1}{2} + \alpha_{ik}$ e a probabilidade de B vencer $b = 1 - a = \frac{1}{2} + \alpha_{ki}$, onde $\alpha_{ik} = 0$, para $k = i$ e $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$ e estão contidos entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Borel assume que cada jogador maximiza sua probabilidade de vitória. Visto (contanto) que os ganhos (payoffs) são de soma zero e simétricos, isto é equivalente a maximizar o ganho esperado. Borel elimina as estratégias, "más/ruins", C_i para as quais α_{ik} é negativo ou zero . O critério de eliminação de Borel de uma estratégia

[4]No apêndice A temos uma tradução (nossa) da demonstração do mesmo que encontra-se no artigo *Zermelo and the Early History of Game Theory*

era, no caso simétrico, equivalente ao critério corrente em Teoria dos Jogos para eliminação de estratégias fracas[5]. Borel, portanto, antecipa o critério de eliminação de estratégias fracas e observa que com tais eliminações, novas estratégias puras tendem a tornarem-se fracas. Se a estratégia C_h existe tal que α_{ik} é positiva ou zero para todo k, esta então é a melhor estratégia. Borel analisa o caso para $n = 3$, $n = 5$ e $n = 7$, encontrando para os mesmos o que hoje denomina-se solução minimax. Todavia, em um primeiro momento ele afirma que o problema não teria solução (minimax) para valores de n superiores a 7. Entretanto, em 1927 ele volta atrás e afirma que considera o problema em aberto.

Conforme, nos informa Munaro[6], uma contribuição para a Teoria dos Jogos, realizada em 1925, mas esquecida até 1960, quando foi publicada no *Naval Research Logistic Quaterly* foi o artigo *Definitions for a Theory of Games and Pursuit* de Hugo Steinhauss (1887-1972), onde estuda a construção de definições matemáticas para problemas que estão além dos limites estritos da matemática, como Xadrez, Perseguição Naval e Jogos de cartas. No caso da Perseguição Naval, ele observa que o navio fugitivo naturalmente tende a escolher a estratégia de maximizar o tempo de fuga e o perseguidor minizar o tempo de busca. Nas cartas, ele percebe um conflito semelhante, onde cada participante quer diminuir as chances de ganho do adversário e maximizar as suas. No Xadrez, ele impôe uma modificação para a sua análise. Existiria um número total máximo permitido de movimentos. Se as peças brancas nao vencerem antes do limite ser atingido, as pretas vencem. Desta forma, as pretas obviamente escolhem a estratégia que maximize a duração da partida, e as brancas por outro lado, adotam a estratégia de manter esse máximo em um minimo inferior ao total permitido. Assim, Steinhauss apresenta, sem usar o termo, a noção de minimax[7].

Em 1928, John Von Neumann (1903-1957), publica o artigo *Zur Theorie den Gesellschaftsspiele*, onde formula a seguinte questão: *"Dado n Jogadores em um jogo de estratégia, de que forma um deles deve proceder para obter um resultado mais vantajoso?"*. Admitindo ser um jogo de soma zero, com n finitas estratégias puras e com estratégias mistas permitidas, ele através de Topologia e Cálculo Funcional consegue provar o teorema Minimax para n finito. Em 1938, Jean Ville (1910 - 1989) fornece a primeira prova elementar do teorema Minimax, mas ainda utilizando Topologia. Somente em 1946, Lynn Harold Loomis (1915 - 1994),no paper *On a Theorem of Von Neumann*, apresenta a primeira prova inteiramente algébrica do teorema Minimax.

Uma contribuição, indireta, é o trabalho *The moral judgment of the children* publicado em 1932, de Jean Piaget(1896-1980), no qual faz uma comparação da aplicação real das regras pelas pessoas e a consciências das mesmas. O objetivo da comparação é definir a natureza pela qual os indivíduos atuam, em um sentido psicológico, ou sejam tomam decisões ou condutas frente a outros. Nos termos da atual Teoria dos Jogos seria a forma como as pessoas interagem nas situações estratégicas (os jogos). Mas, somente, em 1944, John Von Neumann junto com o economista Oskar Morgenstern (1902-1977) publicam o livro *Theory of Games and Economic Behavior*, sendo este o marco inicial formal da Teoria dos Jogos, apresentando conceitos como jogos coperativos, axioma da utilidade e uma prova revisada (da prova de Ville) mais simples do Teorema Minimax. Nesta obra, estudam em detalhes os jogos de dois jogadores de soma zero. Esta obra inicia um momento de intensa euforia e expectativa com a Teoria dos Jogos, sucedendo-se uma enormidade de artigos, teses e livros sobre o assunto até os dias atuais. Foi da exposição matemática presente nesta obra que iniciou-se um modelo para a economia, que tem como base a racionalidade social, isto é, o comportamento possível ou previsível dos individuos,

[5]Uma estratégia fraca é aquela na qual seu payoff é menor ou igual ao de alguma outra estratégia, não importando o que o outro jogador faz

[6]Xavier, Otávio Munaro. A Origem da Teoria dos Jogos de Equilibrio em Nash. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2013

[7]Neste contexto é a tentativa de maximizar meus ganhos através da redução a um minímo dos ganhos do adversário

que de forma intelegente, interagem com a sociedade e o mercado.

Também destaca-se os trabalhos (papers e tese de doutorado) de John Nash Junior, entre 1950 e 1953, com contribuiçõs importantíssimas, onde Nash prova a existência de uma estratégia de equilibrio[8] para jogos não cooperativos de soma diferente de zero e o programa Nash, no qual sugere uma abordagem de estudo dos jogos cooperativos via sua redução para a forma não cooperativa. Em *Bargain Problem (1950)* e *Two-Person Cooperative Games (1951)* inaugura a Teoria axiomática da Barganha, provando a existência da solução Nash de Barganha e fornecendo a primeira execução do programa Nash.

Em 1960, com a obra *Strategy of Conflit* de Thomas C. Shelling(1921 -), são apresentadas inúmeras intuições importantes em virtude da aplicação da Teoria dos Jogos às situações de cooperação ou conflito. Sendo uma delas, que a forma de deter uma ameaça é tornar a resposta à mesma imprevisível, não apenas para o inimigo mas para o ameaçado também. Pois, sendo a resposta não previsível, cria-se para o inimigo um risco que pode ser suficientemente forte para detê-lo. Uma outra, foi a idéia, que em certas situações, eliminar todas as suas opções mantendo apenas a pior pode ser interessante, citando o caso do general que eliminando totalmente a possibilidade de retirada demonstra ao inimigo (e aos seus próprios comandados) que em caso de ataque, a única alternativa será lutar até o fim. Outra contribuição foi a noção de ponto fixo: digamos que acabou de chegar em Porto da Folha, que possui 200 casas, cinco escolas, três pizzarias e uma igreja. Você deve encontrar-se com alguém, mas infelizmente, não há forma de comunicarem-se para marcar o local do encontro. Qual seria a escolha mais natural, para os dois se dirigirem? A igreja, afinal é unica destacando-se. Assim, ponto focal, é um elemento que destaca-se no contexto analisado. Outros tabalhos voltados a conflitos e trabalhos cooperativos foram as obras *Game-Theoretic Aspects of Gradual Disarmament(1966) e Repeated games with incomplete information(1995)* de Robert J. Aumann(1930 -), onde com suas formulações matemáticas demonstra que se a relação entre os jogadores tem uma boa chance de durar sem um prazo de término definido a cooperação deve ocorrer. Com seus trabalhos na Teoria dos Jogos ambos receberam o Nobel de Economia no ano de 2005.

A primeira aplicação na biologia evolucionária, ocorreu em 1961, com o paper de R.C. Lewontin(1929 -) *Evolution and the Theory of Games* ressaltando o pouco conhecimento dos biólogos da época sobre a mesma e as eventuais divergências entre a Teoria para seres humanos e os demais seres, nas palavras do mesmo:

> ‘A Teoria dos Jogos não é bem conhecida para os biólogos de modo que alguns de seus contornos gerais devem ser apresentados aqui. O que se segue não é uma estritamente descrição convencional da Teoria de jogos e alguns novos conceitos foram introduzidos. Há várias razões para isso. Em primeiro lugar, a Teoria dos Jogos tem suas raízes nas ciências sociais e, portanto, grande parte da terminologia tem conotações de comportamento intencional. As noções de um "jogador", "a escolha de uma estratégia","preferencia de um resultado"são estranhas à biologia mecanicista moderna e por isso devem ser descartadas ou com muito cuidado redefinidas. Em segundo lugar, alguns dos axiomas da Teoria dos Jogos fluem diretamente a partir de idéias de comportamento intencional. A própria definição do conceito de "utilidade"[9]. Em terceiro lugar por que muitos dos critérios adotados nas soluções não são aplicáveis por apelarem intuitivamente às preferências humanas. Esta última objeção é de alguma ajuda para o evolucionista, porque ele pode rejeitar muitas das soluções sugeridas e diminuir o campo de escolha para o que pode ser considerado como soluções evolutivamente importantes. Finalmente, os processos de evolução são suficientemente diferentes dos processos de escolha humana, que algumas novas idéias devem ser introduzidos no quadro clássico da Teoria dos Jogos. No que se segue,

[8]hoje denominado equilibrio de Nash: *situação na qual as partes envolvidas não possuem interesse em alterar o estado obtido, onde cada jogador adota a melhor resposta às estratégias adotadas pelos demais jogadores*

[9]Conforme veremos no próximo capitulo utilidade para Teoria dos Jogos nada mais é que a medida das preferências de um agente

> qualquer divergência com a teoria padrão de jogos será notada quando esta divergência é significativa." (Lewontin, R.C. Evolution and the Theory of Games, publicado em Topics in the Philosophy of Biology, Volume 84, D. Reidel Publishing Company, 1976)

Em 1966, o também ganhador do Nobel em 1994 com Nash, John C. Harsanyi (1920-2000), no paper *A General Theory of Rational Behavior in Game Situations*, deu a definição, a partir de então, mais comumente usada para distinguir entre jogos cooperativos e não-cooperativos. Um jogo é cooperativo se os compromissos - acordos, promessas, ameaças - são totalmente vinculativos e exequíveis. É não-cooperativo se os compromissos não são exequíveis. E entre 1967 e 1968 apresentou três artigos de fundamental importância na Teoria dos Jogos mostrando que, muitas vezes, alguns jogadores dispõem de mais ou melhores informações que os demais sobre algum aspecto importante do jogo. Em termos do mesmo, temos uma situação de *informação assimétrica*, desenvolvendo um modelo para tratar tal situação, possibilitando aos economistas tratar deste momento em diante tais situações.

Capítulo 2

Introdução

2.1 Por que estudar teoria dos jogos?

O ser humano ao classificar os animais, os denominou de irracionais, e a si próprio de racional. Onde tal racionalidade consiste em tomar decisões e fazer escolhas com suporte não apenas no instinto - como os demais animais, mas baseada no acúmulo de informações, na experiência e dentro de alguma lógica. Nos organizamos em uma sociedade, dentro da qual criamos estruturas (Estado, Justiça, Religião, etc) com regras para um convivio o mais harmônico possível. Todavia, apesar do nosso dito racionalismo e das nossas regras e estruturas, na sociedade existem inumeras situações de conflitos de interesses. Ventsel define situação de conflito como sendo : "*Situações nas quais duas (ou mais) partes antagônicas perseguem motivos opostos. O resultado de cada medida de uma das partes depende do tipo de ação elegida pelo contrário*". Temos situações de conflito que decorrem das relações interpessoais, tal como a escolha entre ir ao cinema ou ir ao futebol que um casal tem de realizar. No mundo empresarial, por exemplo : a guerra de preços entre concorrentes, introdução de novos produtos, negociações com sindicatos, etc. Existem, por certo conflitos entre nações, seja por motivos econômicos, como entre os blocos econômicos, para citar Mercosul × União Européia, sejam por disputas territoriais, tal como a guerra das Malvinas entre Argentina e Inglaterra - onde a guerra é a manifestação máxima de um conflito. Não estamos por afirmar que todas as nossas ações (decisões) são em situações de conflto de interesse, pois ao irmos a um supermercado para adquirir um bem não estaremos de forma direta em conflito com ninguém (apesar de que forma indireta pode-se pensar em um conflito entre o proprietário que quer vender pelo maior preço e nós queremos comprar pelo menor).

Por outro lado os jogos estão presentes desde há muito na existência da humanidade. Seja entretendo, seja servindo de ferramenta educacional, seja como paradigma de inteligência e racionalidade. Todavia, a sua natureza marcantemente lúdica tem a tendência de nos levar a desmerecer um estudo mais sério e detalhado dos mesmos. Entretanto, em nossa linguagem cotidiana estão presentes expressões do tipo "o jogo da politica internacional", "o jogo da livre concorrência", "o jogo de interesses", "o jogo da vida", e muitas outras, para nos referirmos a situações que não possuem nada de lúdico ou de entretenimento, mostrando que implicitamente percebemos uma similiaridade entre situações de interação humana e os jogos. E qual seria esta similiraridade?.

Em linguagem comum um jogo é qualquer passatempo ou diversão. Mas esta caracterização é por demais ampla, vamos por alguma ordem. Existem os jogos que se jogam em tabuleiros, os jogos de mesa, tal como xadrez, damas, combate, que são jogos de duas pessoas e detetive que no qual é possível jogar até quatro pessoas. No xadrez, damas e combate o resultado do jogo pode ser ganhar perder ou empatar, no detetive vencedor é aquele que descobre o assassino. Em seguida temos os jogos de cartas, as várias versões de paciência, buraco, vinte e um, etc.

Também temos os jogos desportivos, ou seja, os praticados de forma competitiva e profissional, o basquete, o futebol, voley, etc. Todos estes são jogos, com características tão diversas e distintas. Mas para classificarmos desta forma deve existir algum padrão que os unifique. E tal padrão consiste em que :

1. *Todos os jogos possuem regras*, as quais indicam o que cada jogador pode ou não fazer, os castigos, as penalidades e até podem prever a possibilidade de exclusão do jogo;

2. *Em todo jogo a estratégia é importante*, óbvio que existem estratégias boas e ruins, cabendo aos jogadores a (percepção primeiramente) escolha delas;

3. *Existe um resultado ao término do jogo*, por exemplo um ganha e outro(s) perde(m), ou mesmo o empate;

4. *O resultado não depende apenas das ações do jogador*, mas depende das ações e escolhas dos demais jogadores. Ao que denominamos por *interdependência estratégica*

Assim, podemos definir jogo como sendo : *qualquer situação regida por regras que possua um resultado bem definido o qual é caracterizado por uma interdependência estratégica.* Claro está que diversas situações cotidianas que não são na linguagem coloquial denominadas de jogos enquadram-se nesta definição. Tomemos as negociações entre O Palacio do Planalto e o Congresso Nacional sobre temas de politica econômica, por hipótese existem regras bem definidas entre eles, cada qual adota uma estratégia, existe um resultado bem definido que não depende apenas da ação de cada um, mas das ações e escolhas dos demais, temos o *o jogo politico.* Ou o caso de empresas competitindo em um mesmo setor, Brasil Kirim e AMBEV por exemplo, existem normas que regulamentam o que cada empresa pode ou não fazer, uma empresa que não cumprir as mesmas pode ser penalizada e em casos extremos como falência ser excluída do mercado (expulsa do jogo), o resultado desta competição é bem definido em termos monetários para cada empresa e não depende apenas das suas ações, mas está condicionado também às do seu adversário temos *o jogo empresarial.*

Para uma melhor compreensão do âmbito de aplicações da Teoria dos Jogos devemos ter em mente, de uma forma muito generalizada, as ações tomadas pelos agentes (pessoas, políticos, empresas, etc.) podem ser enquadradas em dois grandes contextos :

- Parametrizados;

- Estratégicos

No contexto parametrizado os agentes conhecem todos os parâmetros que afetam sua decisão, novamente um consumidor ao ir ao supermercado sabe todos os parâmetros relevantes : a sua capacidade econômica, os artigos em falta e/ou que deseja comprar, os preços dos bens. Uma pessoa em um elevador, ele deve saber qual andar deseja ir para poder realizar a escolha. Talvez seja mais esclarecedor o exemplo dado por Dan Ross, no site da *Stanford Encyclopedya of Philosophy*, e reproduzido com alterações : imagine que deseja atravessar um rio que possui três pontes. Não o sendo possível por nado, barco ou qualquer outro meio. Uma delas, digamos a primeira, é segura e livre de obstáculos, onde sua travessia ocorrerá sem problemas. A segunda possui o risco de desabamento de pedras e a terceira é infestada de cobras venenosas. A sua escolha será óbvia, a primeira. Portanto, a ação se processa com *certeza.* Mas há situações que ainda que sejam paramétricas a ação se processa com *incerteza.* No exemplo das pontes vamos supor que existam apenas as duas últimas pontes, ou seja, a das pedras e das cobras e que a probabilidade de uma pedra cair e a mesma de ser atacado por uma cobra. Temos todos os parâmetros, mas devemos tomar nossa decisão com total incerteza sobre a caída da pedra ou o ataque da cobra. De forma semelhante ao comprar um bilhete da megasena, que se encontra acumulada, a decisão é paramétrica, pois sabemos os valores da aposta e pode-se calcular a probabilidade dos nossos números escolhidos serem sorteados (uma grande incerteza). Devemos observar que a escolha da ação do agente, no contexto paramétrico, não muda os dados colhidos do ambiente, ou seja, os elementos presentes no ambiente não reagem à ação do agente.

No contexto estratégico, os resultados das ações ou escolha de um agente não dependem apenas de parâmetros, dependem também do que outros agentes façam. No exemplo da ponte, acrescentemos que estamos fugindo e o nosso perseguidor, armado, irá nos atingir no outro lado do rio, desde que atravessemos pela ponte na qual esteja nos esperando.Caso contrário escapamos. Agora a nossa decisão depende também da decisão do nosso perseguidor, pois se estamos pensando qual seria a melhor ponte para atravessar - um possível conjunto de raciocínio seria : a das cobras afinal é notório que o perseguidor é avesso a cobras -, o nosso perseguidor está fazendo o mesmo - por sua vez pensaria todos sabem que sou avesso a cobras então passará pela segunda. Por conseguinte, é neste contexto em que atua a Teoria dos Jogos. Então, jogos como basquete, futebol, xadrez, damas, etc, possuem a caracteristíca que cada jogador (onde tratamos uma equipe de basquete, futebol, um enxadrista ou qualquer grupo grupo que tenha interesses comuns com respeito ao jogo de jogador) age de forma a conseguir o melhor resultado possível (maximizar seus ganhos, se não minimizar suas perdas) mas é plenamente consciente que o resultado do jogo não depende apenas das suas ações mas também das ações do seu adversário (o outro jogador) , devendo cada jogador agir de forma adequada aos seus interesses em resposta as ações do seu oponente. É esta caracteristca dos jogos - **tomar decisões que mais convenham para ganhar, tendo em conta as regras do jogo e sabendo que os demais jogadores também influenciam nos resultados com suas decisões (a interdependência estratégica)** - que esta presente nas situações denominadas por Fianni de "interação estratégica : *situação na qual os participantes, sejam indíviduos ou organizações, reconhecem a interdependência mútua de suas decisões*". Desta forma eleições, balança de poder, evolução genética, as negociações comerciais e politicas, inúmeras relações interpessoais, etc, são situações que possuem característica semelhante aos jogos. Desta forma, podemos interpretar que indíviduos, organizações, naçoes, empresas, partidos politicos, sindicatos, etc, que estejam nestas situações estariam os mesmos participando de um jogo.

Então, além do desejo de conhecer a "verdade" que a Teoria dos Jogos pode oferecer, podemos citar algumas razões puramente práticas para estuda-la :

- A teoria pode ajudá-lo a ser um melhor economista ou melhor diretor;pois a mesma atualmente é o paradigma central da economia e das finanças;
- Pode ajudar a melhora sua capacidade para dirigir um negócio e para avaliar mudanças em politica econômica;
- Pode ajudar a melhorar sua capacidade de tomar decisões estratégicas, tornando-o mais consciente das sutilezas estratégicas de seus competidores e oponentes. Não sendo presa fácil de argumentos estrategicamente pouco sólidos e ao contrário saberá quando e quais perguntas capciosas fazer diante de comentários absurdos, diante de uma perspectiva estratégica;

2.2 Conceitos básicos

A Teoria dos Jogos surgiu justamente com o intuito de através da racionalidade humana fornecer instrumentos para subsidiar as partes antagônicas em um conflito na realização de suas melhores escolhas. Assim, a denominação mais adequada pára a mesma fosse *Teoria dos Conflitos ou Teoria da Interação Estratégica.* Em particular, no seu marco fundamental o livro *Theory* *of Games and Economic Behavior* publicado por John Von Neumann e Oskar Morgenstern, tinha o objetivo grandioso e nada modesto de dotar a economia de ferramentas capazes de torná-la uma ciência exata. Apesar de ainda não ter atingido este estágio, a Teoria dos Jogos possibilitou o desenvolvimento de diversos aspectos técnicos e teóricos significativos não apenas na economia, como na biologia, administração e na própria matemática. Assim, temos que para a teória dos jogos não é necessário haver entretenimento, mas sim interação entre os agentes participantes, que chamaremos jogadores.

Óbvio que as situações de interação estratégica que surgem entre grupos humanos antagônicos (pessoas, empresas, nações, etc.), são complexas e podem ter inumeras vinculações e interrelaçoes com diversas esferas da atividade humana que as tornam a primeira vista dificeis de analisar e descreve-las matematicamente de forma total e completa. Entretanto, a história humana é repleta de diversos outros fenômenos extremamente complexos (o movimento dos planetas,....) que se renderam a um estudo racional mediante simplificações convenientes, realizadas e/ou melhoradas uma e outra vez. Estas simplificações, consistem em extrair o essencial, o mais relevante, da situação tratada.Por exemplo ao se estudar a quantidade de movimento de um carro, não é relevante sabermos a cor do mesmo. De forma semelhante, ao estudarmos as situações de conflito devemos ao realizarmos nossas simplificações, descartar o superfluo, e atentar para os elementos imprescíndivéis ao entendimento da situação estudada. O processo de simplificação, consiste na realidade em uma modelagem da situação/fato/evento analisado. E este modelo denominamos "jogo".

Assim, uma definição formal do que matematicamente estuda a Teoria dos Jogos não nos seria de muita valia nesse momento, agora será mais conveniente analisarmos exemplos concretos, os mais elementais possíveis inicialmente, para apresentarmos os elementos essenciais à teoria. Pois, em qualquer ciência é aconselhável iniciar com problemas mais simples que motivem e preparem para tratar outros mais dificéis. Apesar dos jogos de uma pessoa, por certo, não possuirem interação estratégica, sendo desta forma *degenerados*, são boas ferramentas para iniciarmos nosso estudo, afinal a situação mais simples possível é aquela com uma pessoa, ou seja, um jogo de uma pessoa (jogador).

2.2.1 Estratégia e Forma Normal

Iniciemos então com o jogo do caldeirão de ouro.

Exemplo 1 - Caldeirão de Ouro : *Temos um labirinto, onde no final do mesmo encontra-se um caldeirão repleto de ouro, no valor de D (dinheiro) reais. O objetivo é alcancar o caldeirão sem colidir com nenhuma parede, onde neste caso ganha-se D, caso contrário nada se ganha, ou seja, ganha-se 0 (zero).* A figura a seguir representa a situação :

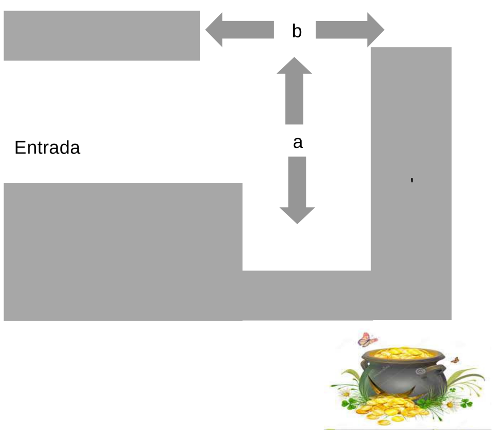

Figura 2.1: Caldeirão de ouro

Aqui, como na maioria das situações reais, o jogador deseja ganhar o máximo possível de dinheiro. Desta forma, seu objetivo é atravesar o labirinto sem chocar-se com nenhuma parade e obter D reais. Por comodidade de identificação chamemos nosso personagem (jogador) de A. Agora vamos junto com A andar pelo labirinto. Depois, de entrar no labirinto A chega ao ponto a, onde deve realizar uma escolha entre suas duas opções, seguir a direita ou a esquerda. Seguindo a direita encontrará uma parede e o jogo se encerra com A ganhando 0. Caso siga a esquerda em a chegará a outro ponto de decisão, b. Apresentando-se novamente duas opções, seguir a direita ou a esquerda. Seguindo a esquerda encontrará uma parede e como sabido ganhara 0 reais, por sua vez escolhendo a direita chegara ao caldeirão de ouro e ganhará D reais.

Assim as opções de A são :

- Escolher direita em a e ganhar 0 reais (perder o jogo), que denominamos E_1;
- Escolher a esquerda em a e a esquerda em b e ganhar 0 reais (novamente perder o jogo), E_2;
- Escolher a esquerda em a e a direita em b e ganhar D reais, E_3.

Uma forma, mais visual e fácil, de apresentarmos este jogo é :

Ação	Resultado
direita em a	0 reais
esquerda em a e esquerda em b	0 reais
esquerda em a e direita em b	D reais

Que pode ser ainda mais sintética :

Ação	Resultado
E_1	0
E_2	0
E_3	D

Esta forma de apresentação é denominada de Forma Normal. Através dela, elencamos todas as possíveis escolhas de A e o resultado associado a cada uma. Daremos mais detalhes da mesma através de mais exemplos.

Continuemos, agora, com um exemplo com duas pessoas. Vejamos o conhecido jogo de par ou impar.

Exemplo 2 - Par ou Impar : *Temos duas pessoas que devem escolher entre par e impar e em seguida mostram ao mesmo tempo, uma quantidade, escolhida por cada um sem o conhecimento do outro, dos dedos de uma das mãos. Sendo vencedor aquele que após a contagem total dos dedos acertou se ela é par ou impar.*

Em um primeiro momento poderiamos pensar que a quantidade de dedos mostrada por cada jogador seria algo relevante na nossa análise, e consequentemente na nossa modelagem. Teriamos seis casos para analisar para cada jogador, ou seja, apresentar 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos. Resultando em 36 situações possiveis. Que não são exageradas, mas um pouco trabalhosas. Todavia, refletindo um pouco mais observamos que da definição de numero par - $2k$ - e impar - $2k+1$ -, onde k pertence aos naturais, a soma de dois pares ou de dois impares é par e a soma de um par com um impar é impar. Assim, o relevante não é a quantidade de dedos mostrada, mas se tal é par ou impar. Logo cada jogador tem duas possibilidades, produzindo um total de apenas quatro possibilidades, que é muito melhor que 36.

Denominemos, de agora em diante, o primeiro jogador por A e o segundo por B. Sem perda de generalidade, adotamos que, A escolheu par. Vejamos, os possíveis resultados do jogo, do ponto de vista de A. Onde A mostrar par denominaremos de A_1 e mostrar impar de A_2, de forma semelhante para B temos, B_1 e B_2 e vitória de A por V e derrota por D, assim :

- A mostra par e B mostra impar, soma impar e A é derrotado (B vence);
- A mostra par e B mostra par, soma par e A vence (B perde);
- A mostra impar e B mostra impar, soma par e A vence (B perde);
- A mostra impar e B mostra par, soma impar e A é derrotado (B vence);

Equivalente a :

- A_1 e B_2, D;
- A_1 e B_1, V;
- A_2 e B_2, V;
- A_1 e B_2, D;

Representando na linha as possibilidades de A e na coluna as de B e sendo a interseção das mesmas o resultado do jogo, na forma normal fica :

	B_1	B_2
A_1	D	V
A_2	V	D

Nos exemplos anteriores, as regras e o número de participantes foram apresentadas, onde as ações (escolhas/jogadas) destes devem obedecer as condições impostas pelas regras. Assim foi possivel determinar todas as possibilidades de jogadas para cada participante (JOGADOR), ou seja, tais possibilidades eram finitas. Onde a quantidade aumentou de um exemplo para outro, sendo que no segundo graças a um raciocinio simples conseguimos reduzi-las mais. Essa capacidade de enuramerar todas as possíveis ações de um jogador é denominada de estratégia na Teoria dos Jogos. Em outras palavras, ***estratégia** é uma descrição completa de como uma pessoa (jogador) deverá agir sob quaisquer circunstâncias possíveis.* Não possuindo relação com destreza. Para ajudar a esclarecer tomemos a seguinte situação :

> "Dois jogadores de xadrez combinam uma disputa, mas nenhum deles tem condição de apresentar-se na hora aprazada. As apostas são elevadas e, não querendo que o jogo deixe de realizar-se, cada jogador se compromete a encaminhar ao árbitro, por escrito, uma descrição de como se propõe a mover as peças. O árbitro concorda em atuar no interesse de ambos os jogadores, movendo as peças de acordo com a orientação que receba, mas recusa-se a usar critério próprio ao fazer esses movimentos. Consequentemente, os planos que venham a ser apresentados devem descer a pormenores que permitam enfrentar quaisquer contingências". (Davis, Morton D.; Teoria dos Jogos : Uma introdução não-técnica, Cultrix, 1973).

Assim, este plano de ação detalhada e pormenorizado é a estratégia de cada jogador. Uma caracteristica importante na noção de estratégia, dos exemplos tratados até agora, é que a mesma é finita, ou seja, a quantidade de ações de cada jogador é limitada, ainda que possa ser enorme. Assim, em relação ao número de possíveis estratégias os jogos são classificados em "finitos" e "infinitos". Um jogo *finito* é quele em que cada jogador somente pode ter um número finito de estratégias. Um jogo finito de duas pessoas, onde jogador A pode possuir m e o jogador B n estratégias, é chamado de jogo $m \times n$.

Por conseguinte, a forma normal é uma representação tabular que permite visualizar todas as estratégias de cada jogador e o resultado ao final do jogo em decorrência destas. Sendo uma forma particularmente simples de descrever e analisar um jogo. Suponhamos, que tenhamos um jogo, onde na forma normal a seguir, nas linhas representamos as estrategias do jogador A e nas colunas as do jogador B, sendo V vitória das brancas, D derrota das brancas (vitória das negras) e E empate.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	E	D	V	V
A_2	V	V	V	V
A_3	D	D	V	V
A_4	E	E	D	V

Neste caso, admitindo que ambos os jogadores são conhecedores da tabela, como deve proceder cada jogador? Observemos que para a estratégia A_2, independente de qualquer estratégia adotada pelas negras o jogador A sempre sairá vitorioso. Resulta, que para as brancas bastará seguir tal estratégia e será vencedor. Para as negras restará torcer por um (ou induzir o adversário ao) erro. Mas se a forma normal fosse esta agora :

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	D	D	V	V
A_2	D	V	V	V
A_3	D	D	V	V
A_4	D	E	D	V

Nesta situação, as negras independente do que façam as brancas podem sair vitoriosas bastando seguir (adotar) a estratégia B_1. E passam a ser as brancas a esperar por um erro do adversário.

E se a situação fosse

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	D	V	V	V
A_2	D	V	V	V
A_3	E	V	V	V
A_4	D	E	D	V

Como deveria proceder cada jogador? Nossa situação é um pouco mais complexa, afinal não existe nenhuma estratégia que garanta a vitória para um dos jogadores independente do que o outro faça. Vamos supor, que cada jogador, sendo racional, prefira o empate a derrota. Logo, o jogador A, poderia pensar em usar a estratégia A_1, que lhe possibilita vitória para as estratégias B_2, B_3 e B_4, mas existe a pssibilidade de jogador B, possuindo ou não a informação que A utilizará A_1, adotar B_1. Raciocionio semelhante pode ser executado para as demais estratégias, desta forma, para o jogador A sua melhor estratégia é A_3, pois asim garante que o seu pior resultado é um empate. Por sua vez, para o jogador B a melhor estratégia é B_1, que também lhe garante por pior resultado o empate. Assim, sendo ambos racionais, e agindo com o intuito de garantir o mínimo de perdas, concluímos que as estratégias adotadas devem ser A_3 e B_1, e consequentemente o resultado esperado do jogo é o empate.

O Homo sapiens é uma espécie naturalmente curiosa, especialmente tratando-se de outro Homo sapiens. Mas um dos principais objetivos, da teoria, é motivado não por curiosidade, mas por necessidade, afinal pode-se estar tentando resolver um conflito com um irmão, participando de uma competição desportiva, competindo no mercado, ou conspirando em um reality show de TV. Seria útil ter algumas orientações sobre o que fazer e quando interagir com outras pessoas. A análise na formal normal das três situações anteriores permitiu que realizassemos este objetivo, que seja, determinar a melhor estratégia para cada jogador, levando em conta a atuação do adversário. Aqui, o leitor poderia estar pensando que os nossos exemplos podem parecer tolos, irreais, mas :

> "...Nossa intuição não educada, não é muito fiável em situações estratégicas. Necessitamos treinar nossa intuição estratégica tomando exemplos instrutivos. Não é necessário que estes exemplos sejam realistas. Ao contrário, em muitas situações desfrutaremos de vantagens substanciais estudando *jogos*, que se escolhem cuidadosamente. Nestes jogos podemos descartar todos os detalhes irrelevantes típicos dos problemas do mundo real, de maneira que podemos centrar a atenção em questões estratégicas e para fornecer respostas a estas questões estratégicas há a *Teoria dos Jogos*"(Binmore, Ken. Teoria dos Jogos. MacGraw-Hill, 1982)

Contudo, dado que até o presente momento apresentamos jogos que não tratavam de possíveis situações reais, comecemos a mudar isso, apresentando "casos reais", ou seja, situações que tentem emular eventos do nosso cotidiano.

Exemplo 3 - Encontro em Aracaju : *Cláudio e Ana estão separados e incomunicáveis. Eles marcaram, anteriormente, de se encontrarem em algum lugar no centro às 12 :00 hs para almoçar. Mas deixaram o lugar em aberto, dentre duas opções : Rua do Turista ou Museu da Gente Sergipana. E então perderam a comunicação. Cada um tem de decidir aonde ir.*

Temos, obviamente, que os possíveis resultados são : almoçar juntos ou não almoçar juntos. E as estratégias possíveis de cada são : Ir à Rua do Turista (T) ou ao Museu da Gente Sergipana (M).

Então, a forma normal é :

		ESTRATEGIAS ANA	
		Rua do Turista	Museu da Gente Sergipana
ESTRATÉGIAS CLÁUDIO	Rua do Turista	Encontram-se	Não se encontram
	Museu da Gente Sergipana	Não se encontram	Encontram-se

Ou mais simplesmente :

		ESTRATEGIAS ANA	
		T	M
ESTRATÉGIAS CLÁUDIO	T	Encontram-se	Não se encontram
	M	Não se encontram	Encontram-se

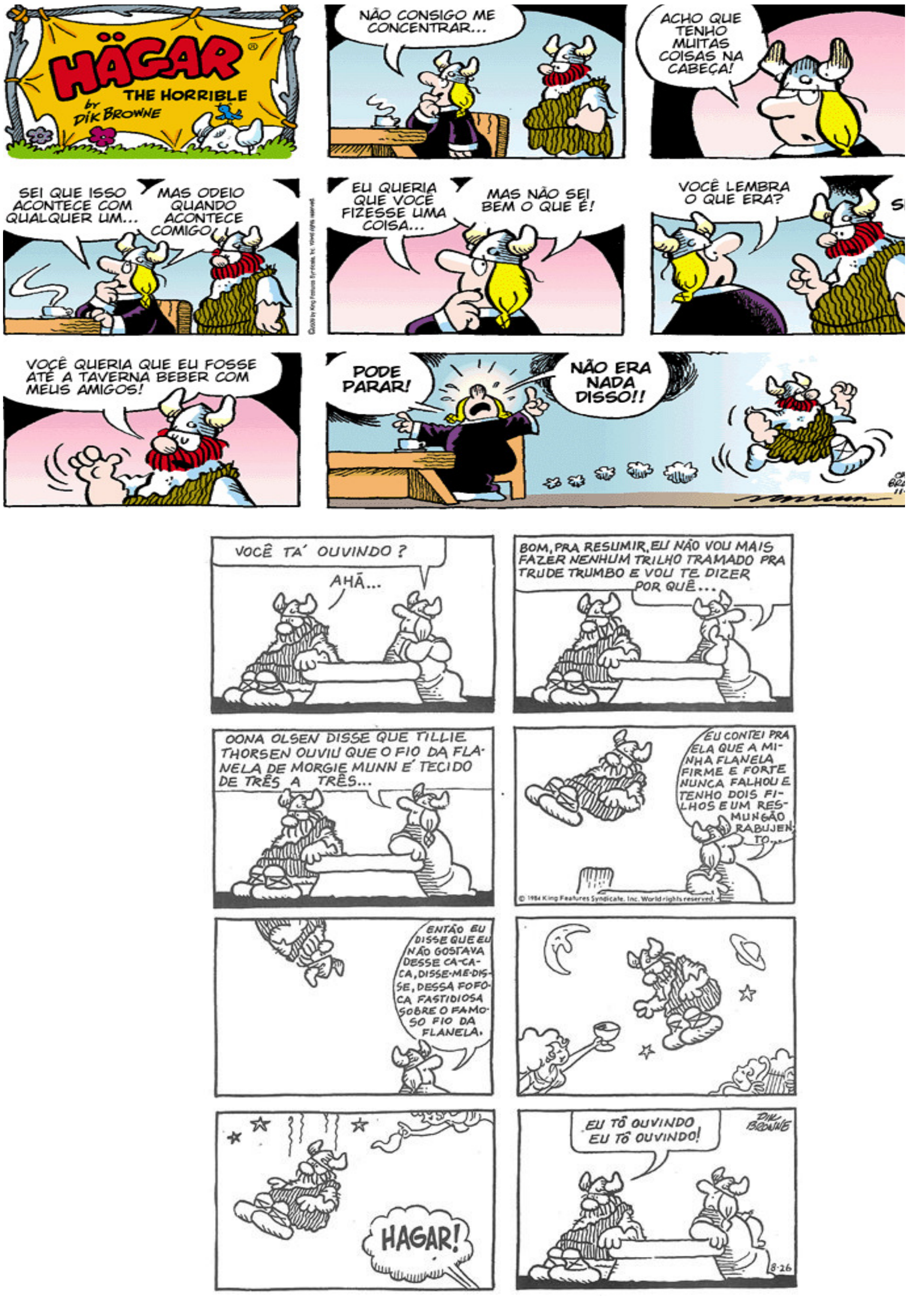

Figura 2.2: Preferencias

Nas tirinhas retrata-se cômicamente a forma que nossas prefências influenciam as nossas, açoes, escolhas, enfim o nosso comportamento e em certa medida dos outros nas relações interpessoais. Sendo este um aspecto significativo na Teoria dos Jogos. Um empresa está em dúvida se lança um novo refrigerante no mercado ou se apenas lança a versão zero do seu produto mais consagraçado. A maior preferência dos consumidores por produtos novos ou produtos diet irá decidir qual atitude será tomada pela empresa. Certo, que este não é o único fator que a empresa irá avaliar, mas indiscutivelmente é um ponto relevante. Naturalmente, no exemplo 3, cada um possui uma preferência em relação ao local onde desejaria encontrar-se, fato que afeta inegavelemente a ação de cada um. O que torna, a solução não tão óbvia, visto que até o presente momento não temos ferramentas para quantificar tais preferências. Nas próximas seções retornaremos a este problema quando estivermos munidos de um arsenal maior de elementos teóricos.

Exemplo 4 - Jogo do Covarde : *O jogo do covarde ("the chicken game"). Nesse jogo dois motoristas, 1 e 2, se encontram em um estrada. Naquele lugar específico, há uma ponte estreita, de modo que apenas um veículo passa de cada vez. Logo, cada um pode avançar ou esperar o outro passar primeiro. Se algum dos jogadores, 1 por exemplo, avança e o outro espera, ele segue sua viagem e o outro espera um pouco mais - e vice-versa. Mas se ele avança e o oponente também, então há uma colisão e ambos perdem.*

As opções de cada jogador são : Avançar (AV) ou Esperar (ES).

Sendo os resultados possíveis : Passar (P) ou Colidir (C). Resultando na formal a seguir :

		ESTRATÉGIAS 2	
		AV	**ES**
ESTRATÉGIAS 1	**AV**	C	P
	ES	P	C

Os exemplos 2, 3, e 4 são em contéudo totalmente diferentes, mas qual (ou quais) elemento (s) possuem em comum? No jogo do Par ou Impar, os jogadores apresentam os dedos simultâneamente, não sendo possível nenhum dos dois saber a escolha do outro de forma antecipada. No exemplo 3, Encontro em Aracaju, não sabemos se a decisão de cada um é feita ao mesmo tempo, mas afeta em algo se Cláudio ou Ana quem escolhe primeiro, temporalmente, para onde irá aguardar o parceiro? Não, pois cada qual não sabe a decisão do outro, não podem comunicar-se, apenas escolher e aguardar a chegada ou não do outro (Somente assim, sabendo a escolha realizada pelo outro). De forma semelhante no jogo do covarde, ninguém sabe antecipadamente qual será a escolha do outro, e a decisão deve ser tomada em pouquissimo tempo, não permitindo que nenhum deles possa reagir em tempo hábil a escolha do outro, ou seja, para fins práticos as escolhas processam como se fossem simultâneas. Isto é, quando escolhem suas estratégias, os jogadores, não sabiam qual foi toda a história pregressa do jogo até então, não observavam, o que os demais jogadores tinham feito. De outra forma, o jogo ocorria como se fosse simultâneo. Outro detalhe relevante, é que nas situações apresentdas os jogadores não contemplam ações futuras do jogo, nada indicando que estão considerando possíveis desdobramentos no tempo de suas escolhas, comportam-se em função apenas das consequencias imediatas. Jogos que possuem estas características são denominados *Jogos Simultâneos.*[1]

Porquanto a forma normal nos forneça quantos são os jogadores, todas as combinações possíveis de ações dos jogadores, assim como seus resultados : nos informando quem fez o quê e o quanto (ou quê) conseguiu em função de suas escolhas a mesma é uma representação mais simplificada, posto que coloca toda a sequencia de decisões que devem ser tomadas enquanto o jogo se processa em apenas uma e particular decisão : *a escolha de estratégia.* Possuindo uma limitação perceptível : não é a melhor representação para descrever interações estratégicas que se desenrolam de forma sucessiva, ou seja, um jogador após o outro. Afinal há diversos jogos - situações de conflito - da vida real, que se processam efetivamente de forma sequencial (extensiva), ou seja, as decisões vão sendo tomadas uma após a outra. A forma normal não fornece informações sobre eventuais desdobramentos futuros das escolhas dos jogadores, nas inumeras situações de interação estratégica onde ao menos uma das ações dos jogadores depende das ações passadas dos demais. Assim, na próxima seção trataremos de uma representação que melhor se adeque a estas situações.

[1] Também chamados Jogos Estáticos

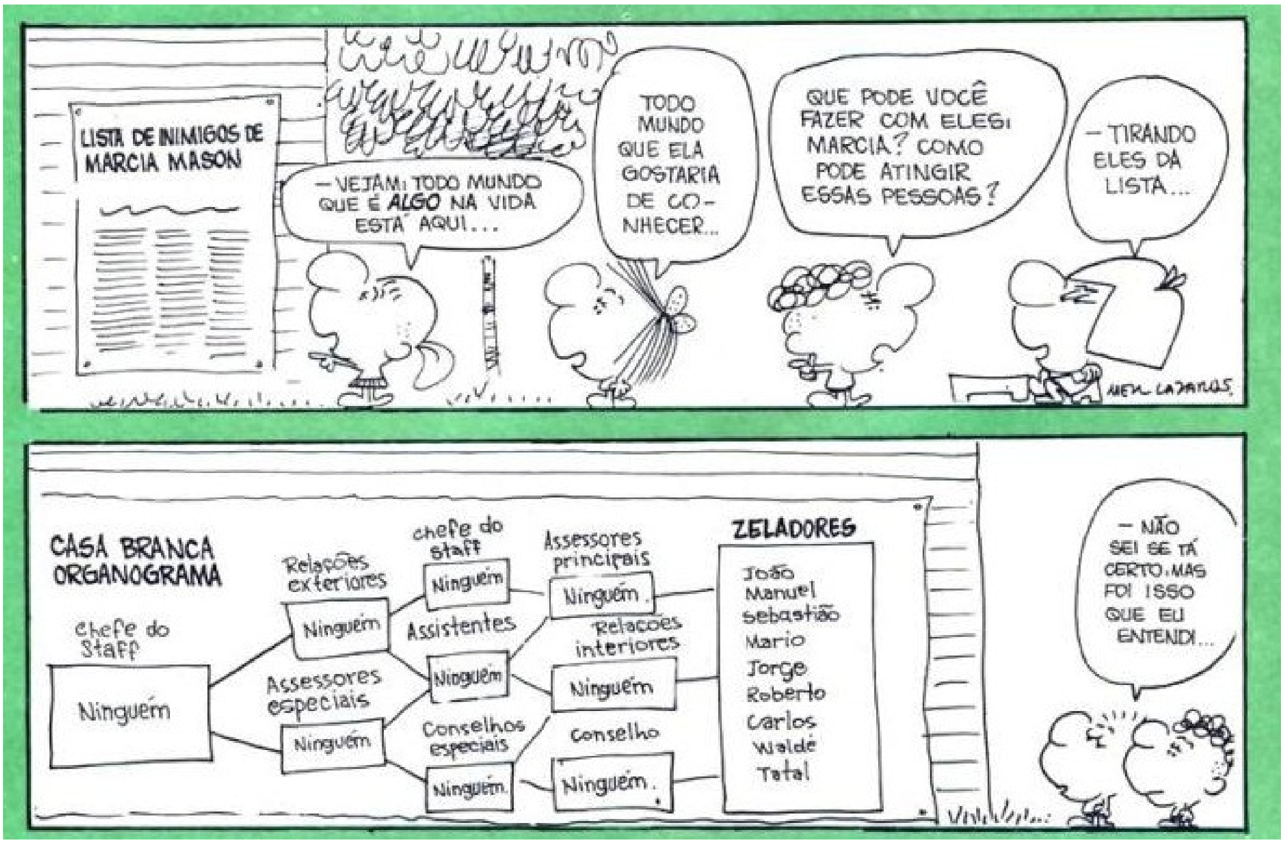

Figura 2.3: Uso de Árvores

2.2.2 Forma extensiva, Informação Completa e Perfeita

Essa seção abordará jogos em que as escolhas dos jogadores se dão sequencialmente. Esses jogos são ditos jogos dinâmicos. Aqui os jogadores atuam um após o outro, existe uma ordem predeterminada na ação, possibilitando que um ou mesmo os dois (no caso de jogo de duas pessoas) conheçam toda a história pregressa do jogo, que seja, as escolhas (ações) realizadas por si mesmo e seu (s) contricante (s). E também as escolhas atuais devem considerar as consequências futuras, uma vez que os demais jogadores podem (e devem) reagir às nossas ações nas suas próximas jogadas[2]

Continuando com nossos exemplos temos agora o jogo dos seis palitos de fósforos. O qual consiste em que :

Exemplo 5 - Seis Palitos *Dadas duas pessoas, temos seis palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um ou dois fósforos. O perdedor é aquele que se vê eventualmente obrigado a tirar o último palito*

Enumerando cada uma das possibilidades de escolha (ação) para cada jogador, onde consideramos que o primeiro jogador é A e o segundo B, temos :

a) A retirar um palito

a.1) B retirar um palito

a.1.1.) A retira um palito

a.1.1.1.) B retira um palito

a.1.1.1.1) A retira um palito. B se vê obrigado a retirar o último palito

a.1.1.1.2) A retira dois palitos e perde (improvável, A deseja a vitória)

[2] Jogada consiste na *escolha de uma das possíveis variantes das ações dentro das regras do jogo*

a.1.1.2.) B retira dois palitos. A se vê obrigado a retirar o último palito
a.1.2.) A retira dois palitos
a.1.2.1.) B retira um palito. A se vê obrigado a retirar o último palito
a.1.2.2.) B retira dois palitos e perde (improvável, B deseja a vitória)
a.2) B retira dois palitos
a.2.1.) A retira um palito
a.2.1.1.) B retira um palito. A se vê obrigado a retirar o último palito
a.2.1.2.) B retira dois palitos e perde (improvável, B deseja a vitória)
a.2.2.) A retira dois palitos. B se vê obrigado a retirar o último palito
b) A retirar dois palitos
b.1) B retira um palito
b.1.1.) A retira um palito
b.1.1.1) B retira um palito. A se vê obrigado a retirar o último palito
b.1.1.2) B retira dois palitos e perde (improvável, B deseja a vitória)
b.1.2.) A retira dois palitos. B se vê obrigado a retirar o último palito
b.2) B retira dois palitos
b.2.1.) A retira um palito.B se vê obrigado a retirar o último palito
b.2.2.) A retira dois palitos e perde (improvável, A deseja a vitória)

Agora, sendo leitor amigo, o jogador A, qual seria sua estratégia para obter a vitória? Concordemos que havendo uma forma de representação mais visual nos ajudaria signifcativamente na escolha. Mas, felizmente para voçê prezado amigo e para todos os téoricos dos jogos, tal existe sendo uma velha conhecida, a representação em árvore (ou grafo[3]) conforme exemplificado na figura 2.3.

Desta forma :

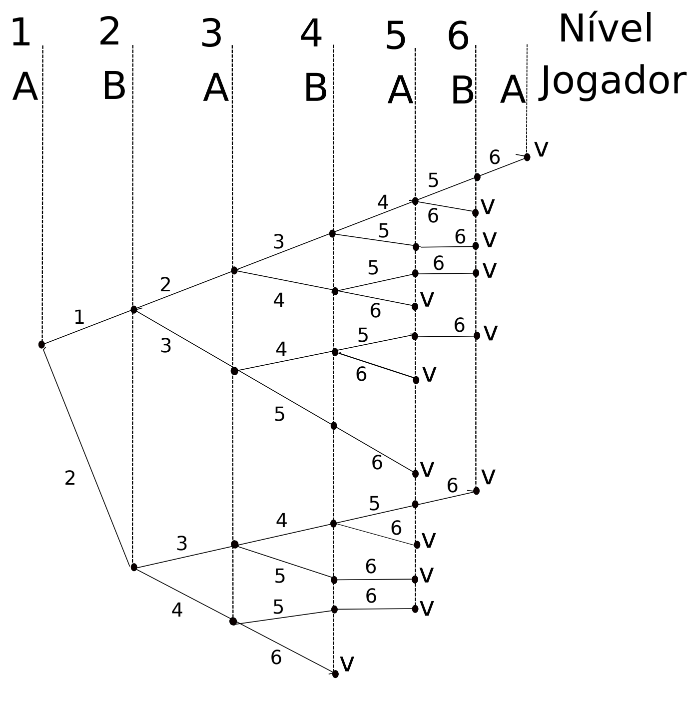

Figura 2.4: Árvore do Jogo seis pálitos

Agora, graças a nossa representação com a árvore (ou grafo), na terminologia da Teoria dos Jogos, *Forma Estendida*, podemos extrair as seguintes informações :

[3]Os grafos possuem uma extensa e conhecida teoria dentro da matemática, mas por hora não necessitaremos de tal teoria

1. Existem dois jogadores;
2. A quantidade de alternativas (estratégias) disponíveis para cada jogador em cada momento de decisão;
3. Identifica a ordem do jogo, ou seja, joga A e depois joga B;
4. O grau de informação de cada jogador dispõe ao executar sua jogada, assim quando o jogador A jogar o jogador B já poderá ter decidido sua opção e A saberá disso e de forma semelhante para B;
5. Para as combinações possíveis (no caso, treze possíveis partidas) é possível determinar o resultado do jogo, ou seja, o vencedor;

Os pontos representam uma situação de decisão, onde o jogador deve escolher dentre as opções disponiveis, em conformidade as regras preestabelecidas do jogo. Estes são denominados *nós*[4]. Em cada traço (os quais chamaremos de *ramos*), após um nó, representam uma escolha possível para o jogador, no jogo em questão, estão assinalados a quantidade de palitos retirada[5]. Uma árvore é um conjunto de nós conectados mediante ramos que representam uma relação de precedência temporal. Se um nó está a direita de outro isso significa que este nó intervêm depois do que está a sua esquerda. Assim, alguns nós tornam possíveis a existência de outros nós, ou seja, para atingirmos determinados nós devemos passar por algum outro nó antes :

> "Em outras palavras, determinadas escolhas de um jogador, em uma dada etapa do jogo, tornam possíveis outras escolhas dos demais jogadores nas etapas seguintes, assim, como muitas vezes, outras escolhas do mesmo jogador no futuro". (Fiani, Ronaldo. Teoria dos Jogos, Campus, 2009, pag. 82)

Natural, então, termos nós chamados de *antecessores* e *sucessores.* Por certo, então, que um nó não pode possuir dois antecessores, ou em outras palavras, de dois nós não podem sair ramos que acabem em um mesmo nó.

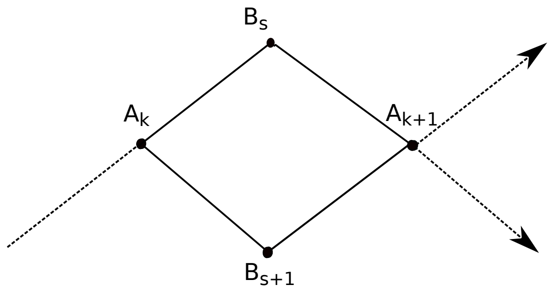

Figura 2.5: Nó com dois antecessores

Na figura acima, temos que as setas pontilhadas depois do nó A_{K+1} que o jogo continua após este nó, de forma semelhante o ramo pontilhado antes de A_K é para informar que ocorreram jodaqas anteriores. Os nó A_{K+1} é precedido por dois nós do jogador B, respectivamente B_s e B_{s+1}, significando que estando o jogador A na posição retratada por meio do nó A_K, não importa qual escolha o jogador B faça, B_s e B_{s+1}, o jogador A atingirá sempre A_{k+1}. Consequentemente, por qual motivo é necessário considerar a escolha de B, posto que tal escolha em nada afeta o desenrolar do jogo?.

[4]Alguns autores chamam de *vértices*

[5]Logo, está determinado, de forma indireta, a quantidade retirada por cada jogador, ou seja, a escolha possível em cada nó

Existe um ponto de partida (o começo do jogo), assim temos o *nó inicial ou raiz*, que possui a característica de não possuir nenhum antecessor. O nó da última ação (escolha) possível é o *nó terminal*, que por sua vez não há suessores a este, o qual indica o resultado do jogo (Vitória de A ou B).

A convenção utilizada na árvore de decisão da figura 2.4 é a seguinte : o ramo direito que parte de qualquer nó corresponde a tomar dois fósforos e a esquerda tomar um fósforo. Uma partida, ou realização efetiva do jogo completo, é uma poligonal que une o nó inicial (base da árvore) a um dos vértices finais.

Todo nó pertence a um *nível* n, onde n é um número natural. Um nível pode ser par ($n = 2k, k \geq 1$) ou impar ($n = 2k + 1, k \geq 1$). Os niveis n e n+1 se chamam contiguos. Os niveis 2n-1 e 2n+1 se chamam niveis impares contiguos. Similarmente, os niveis 2n e 2n+2 se chamam niveis contiguos pares. Os niveis impares correspondem as diversas possibilidades ou alternativas que se oferecem ao jogador A quando é a sua vez de executar uma jogada, por sua vez os níveis pares são relativos ao jogador B. Neste caso em particular tem-se sempre duas possibilidades para cada jogada, exceto é claro a última. O nível mais alto em uma árvore é por definição sua ordem, sendo igual a longitude máxima de uma partida do jogo dado[6].

As estratégias possíveis para cada jogador podem ser "visualizadas"e as consequências (resultados) da escolha de cada uma delas. Por exemplo, digamos que o jogador A adote a estratégia de sempre retirar um palito independentemente do que B faça. Então, teríamos as seguintes possibilidades :

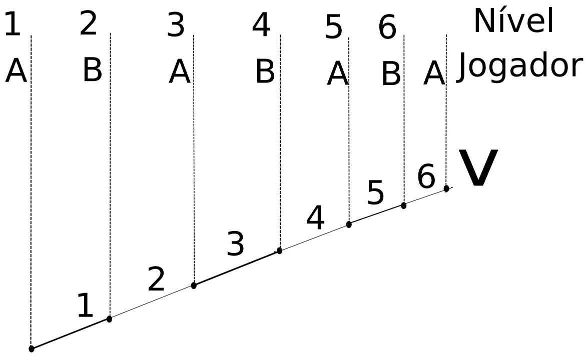

Figura 2.6: Derrota B retirando um palito

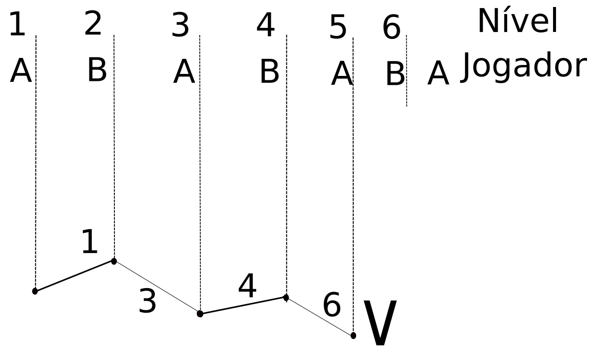

Figura 2.7: Derrota B retirando dos palitos

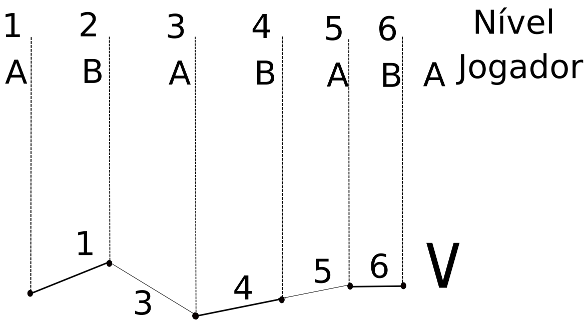

Figura 2.8: Vitoria B retirando um e dois palitos

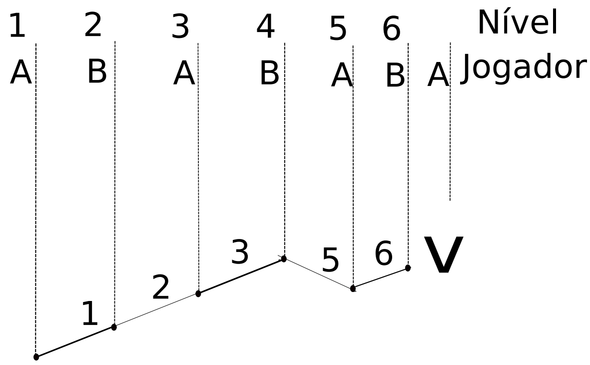

Figura 2.9: Vitória B retirando dois e um palito

O jogador A ao realizar tal escolha não consegue vencer sempre, afinal nos dois primeiros ramos A obtém a vitória e nos dois últimos B é o vencedor. Assim, continuamos com a questão

[6] Claro que estamos tratando de jogos finitos

: qual seria estratégia para A obter a vitória? Poderiamos continuar por tentativa e erro. Mas, estamos tentando formalizar raciocínios. Pensemos um pouco. Para obter a vitoria A precisa obrigar B retirar o último palito. Na sua vez, devem ter três ou dois palitos. E na vez anterior cinco ou quatro palitos e no inicio temos os seis palitos. O jogador A retirando um palito, deixa 5, e desta forma permite que B tenha a possibilidade de vitória, pois, B retira um palito ficando quatro e

- se A retirar um palito, ficando três. B ganha retirando dois sendo A obrigado a retirar o último;

- Por outro lado se A retirar dois, ficando dois, B retira um e novamente A é obrigado a retirar o último.

Então para A vencer deve retirar dois palitos, restanto quatro e agora a situação acima inverte-se e

- se B retirar um palito, ficando três. o jogador A ganha retirando dois sendo B obrigado a retirar o último;

- Por outro lado se B retirar dois, ficando dois, A retira um e novamente B é obrigado a retirar o último.

Então o jogador A possuí uma estratégia que sempre lhe garante a vitória, que seja :

- Primeiro retira dois palitos; - Se B retirar um, então a seguir A deve retirar dois e se B retirar dois, então retirar um. Ou, de uma forma mais elegante, denominando de K a quantidade retirada por B, A deve retirar 3-K.

Para encontrar a melhor estratégia realizamos um pensamento retrógrado e a seguir pensamos em possibilidades futuras. Este método, é um principio geral presente principalmente em jogos sequencias, onde cada jogador deve imaginar quais serão as respostas futuras dos demais jogadores e utilizar esta informação para determinar qual jogada é a que mais lhe convém em cada momento. Está idéia é tão importatnte que consiste em regra na Teoria dos Jogos :

INDUÇÃO RETROATIVA :[7] *VISUALIZE ADIANTE E RACIOCINE PARA TRÁS*[8]

Uma utilização curiosa desta regra é apresentada em *El arte de la estrategia*, que em uma tradução livre de nossa parte é mais ou menos assim :

> "Na primeira edição, norte-americana, do programa televisivo *Sobreviventes*, no último episódio restavam três competidores, o rechonchudo nudista Richard Hatch, o militar reformado do grupo de operacões especiais de 72 anos Rudy Boesch e Kelly Wiglesworth, guia monitora de esportes fluviais de 23 anos. No último desafio, os três tinham que permanecer em cima de um poste agarrando com um mão o ídolo de imunidade. Aquele que mais tempo suportasse entraria na final. E, o que era de igual importância, poderia escolher qual seria seu adversário na final. Tal vez sua primeira impressão seja que se tratava de simplesmente de um concurso de resistência física. Pense novamente. Os três jogadores compreendiam que Rudy era o mais popular dos três. Se aguentava até a final, provavelmente ganharia. O melhor que podia acontecer com Richard era que Kelly fosse sua rival na final Isso poderia ocorrer de duas formas. Uma era Kelly ganhava o desafio de permanecer suspensa no poste e escolhia Richard. A outra era que Richard ganhava e escolhia Kelly. Richard podia confiar que Kelly o escolheria. Ela também era consciente da popularidade de Rudy. O Melhor que lhe podia acontecer para ganhar era que seu rival na final fosse Richard. Parecia que se no último desafio ganhava Ricard ou Kelly, cada deles esolheria o outro com adversário. Portanto, Richard devia tratar de aguentar, ao menos até que Rudy caísse. O único problema era que Richard e Rudy tinham uma aliança desde o ínicio do programa. Se Richard ganhava o desafio e não escolhia Rudy, isso colocoria a Rudy (e a todos os seus amigos) contra Richard, o que poderia lhe custar a vitória. Uma das caracteristicas de *Sobreviventes* era que os concorrentes eliminados

[7]Look Forward and Reason Backward

[8]Também conhecida por *Mire no futuro e Raciocine com o passado*

decidiam por meio de uma votação quem ganhava o programa. Então do ponto de vista de Richard, o desafio podia acabar de uma das três formas seguintes :

i. Ganha Rudy. Neste caso, Rudy escolhe Richard, porém Rudy seria o vencedor provavelmente;

ii. Ganha Kelly, Kelly seria sufientemente esperta para saber que o melhor é escolher Richard eliminando Rudy;

iii. Ganha Richard. Se escolhe Rudy, este o vence na final. Se escolhe Kelly, esta poderia derrotá-lo, já que Richard perderia o apoio de Rudy e de seus numerosos amigos.

Comparando estas opções, Richard obtém melhores resultados perdendo. Quer que Rudy seja eliminado, entrementes é melhor que Kelly faça o trabalho sujo por ele. A melhor aposta para ele seria que Kelly ganhasse o desafio. A mesma havia ganhado a três dos últimos quatro e como guía de esportes ao ar livre estava em melhor forma física dos três. Se ainda fosse pouco, perdendo deliberadamente o jogo Richard se livrava do problema de estar trepado em um poste sob um sol escaldante. No inicio do jogo, o apresentador ofereceu um pedaço de laranja a qualquer que estivesse disposto a abandonar. Richard desceu do poste e pegou a laranja. Depois de 4 horas e 11 minutos, Rudy perdeu o equlibrio ao mudar de postura, soltou o ídolo de imunidade e perdeu. Kelly escolheu Richard para ir a final. Rudy emitiu o voto definitivo a favor de Richard e Richard Hatch converteu-se no primeiro vencedor de *Sobreviventes. A posteriori*, pode parecer tudo fácil. O que faz a jogada de Richard impressionante é que foi capaz de prever cada passo antes que de ocorrer.[9] (Dixit/Nalebuff, El arte de la estratégia, 2010, 27-28)"

Para representar de forma mais precisa as opções possíveis em um jogo de estratégia, podemos utilizar árvores, mas devemos ter em conta que um jogo possui dois ou mais jogadores, pelo que, nos diversos nós da árvore, pode haver diferentes jogadores tomando decisões. Assim, uma pessoa que toma uma decisão em um ponto anterior (nó antecessor) tem que observar adiante, não apenas as suas decisões futuras mas também as que os demais jogadores tomarão. Tendo que por-se no lugar destes pensando como estes pensariam. Esta consiste em uma segunda regra na Teoria dos Jogos :

COLOQUE-SE NO LUGAR DO SEU ADVERSÁRIO[10]

Vejamos alguns exemplos :

Exemplo 6 - Jogo do Subir/Descer : *Neste jogo você joga primeiro e depois seu adversário. Você tem duas opções de movimento : subir ou descer. Posteriormente seu concorrente também as mesmas duas opções de reação : subir ou descer. Dependendo das decisões, vocês vão ganhar "pontos". O objetivo é ganhar o máximo possível. O jogo tem apenas uma rodada.*

- *Se você escolher subir e seu adversário subir, você **ganha 14** e ele 10 pontos;*
- *Se você escolhe subir e seu adversário descer, você **ganha 7** e ele 12 pontos;*
- *Se você escolhe descer e seu adversário subir, você **ganha 10** e ele 22 pontos;*
- *Se você escolhe descer e seu adversário descer, você **ganha 12** e ele 4 pontos;*

[9]Richard teria feito bem em prever as consequências de não pagar impostos sobre o prêmio de 1 milhão de doláres. Em 16 de maio de 2006, foi condenado a 51 meses de prisão por evasão de impostos

[10]Um "causo"do futebol, retrata bem a idéia. Conta-se que na Copa do Mundo de Futebol de 1958, antés do jogo contra a, extinta, União Soviética o técnico da seleção brasileira Vicente Feola durante a preleção teria dito : *No meio do campo, Nilson Santos, Zito e Didi trocam passes curtos para atrair a atenção dos russos. Vavá puxaria a marcação da defesa deles caindo para o lado esquerdo do campo. Depois da troca de passes no meio de campo, repentinamente a bola seria lançada por Nilton Santos nas costas do marcador de Garrincha. Garrincha venceria facilmente seu marcador na corrida e com a bola dominada iria até a à área dos russos, sempre pela direira, e ao chegar à linha de fundo cruzaria a bola na direção da marca de pênalti; Mazzola viria de frente em grande velocidade já sabendo onde a bola seria lançada...e faria o gol!.*. Garrincha com a camisa jogada no ombro, ouvia sem muito interesse a preleção, e com sua natural simplicidade perguntou ao técnico; **Tá legal, seu Feola... mas o senhor já combinou tudo isso com os russos?**

E agora o que fazer (subir ou descer) para maximizar o seu resultado? Em uma passada de olho a pontuação acima, poderia dizer que prefere esquerda pensando em ganhar 14 pontos. Todavia, esta é uma situação estratégica, onde cada ação sua gera uma reação e o resultado depende de ambas decisões (sua e do seu concorrente).

Para melhor visualizar o jogo, usemos a **árvore de decisões (forma estendida do jogo)** a seguir :

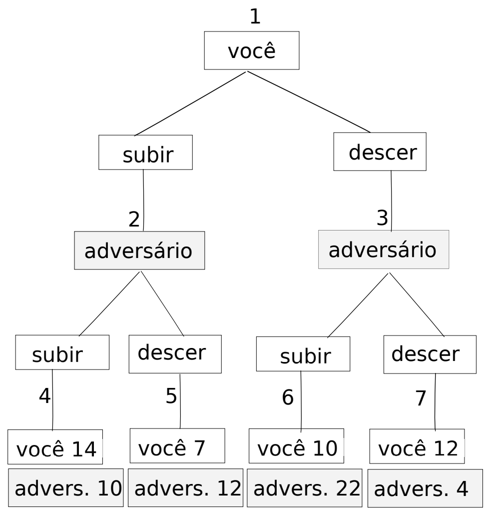

Figura 2.10: Árvore do Jogo sobe/desce

Novamente com esta representação os elementos básicos importantes são facilmente perceptíveis. Temos dois jogadores (você e seu adversário), cada um tem duas alternativas, você joga primeiro em seguida o adversário. Desta forma, quando ele jogar você já terá jogado e ele saberá disso (sabendo inclusive sua escolha). Os resultados possíveis para cada umas das combinações de escolhas, correspondendo aos nós 4, 5, 6 e 7. Para seu adversário se você escolher subir no nó 2[11] ele tem duas opções - subir com 10 pontos e descer com 12 pontos, sua escolha em virtude do desejo de maximizar seus resultados. De forma semelhante caso você siga o nó 3, descer, ele tem - subir com 22 pontos e descer com 4 pontos. Precisamos, nos pôr em seu lugar e deduzir o que ele fará.

Com o uso da indução retroativa, a situação está mais reduzida, pois raciocinou-se quais as ações do adversário com o objetivo de maximizar seus ganhos, ou seja, o mesmo irá sempre escolher a opção que lhe dê o maior retorno de pontos. Assim, a nossa árvore reduz-se a :

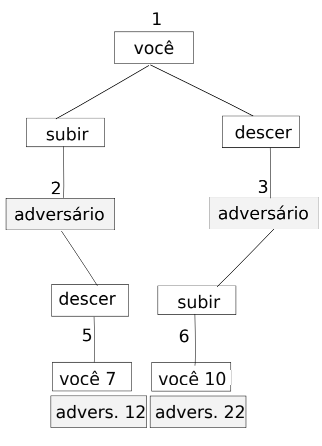

Figura 2.11: Árvore reduzida do Jogo sobe/desce

[11]os pontos de decisão e os eventuais resultados foram numerados para facilitar a explanação

Visualizando para trás e raciocinando adiante, as opções ficam ainda reduzidas. Descer ganha 7 e subir ganha 10. Dado o interesse de obter o maior resultado possível, a escolha natural é subir. Sendo então o resultado do jogo dado por :

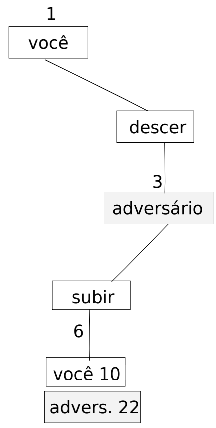

Figura 2.12: Resultado do Jogo sobe/desce

Ambos desejam maximizar seus resultados, com a pontuação dada, é claro então que jamais conseguiremos os 14 pontos que teoricamente seria seu maior resultado. Entretanto, os 10 pontos do nó 6 representam o melhor resultado possível. É natural, que fique no mínimo perturbado com o fato de seu adversário conseguir a melhor pontuação possível dele (22 pontos) que é muito superior a sua, mas faz parte da dinâmica do jogo e a pontuação foi definida antes das ações de cada um. Seria uma opção escolher uma estratégia que não seja a ótima, subir, e assim reduzir os ganhos do seu adversário, entretanto nesta situação o seu ganho também seria menor.

Aqui cabe observar que as estórias contidas nos exemplos não possuem relevância em si, bastando a mera intuição, na maioria das situações retratadas, para saber qual é a estratégia correta (a melhor dentro dos objetivos desejados), mas desta forma destaca-se com maior clareza as idéias por detrás. Por certo, as pessoas e empresas não realizam este mapeamento de forma extremamente rigorosa, sempre, mas exemplos simples e didáticos ajudam a transmitir os conceitos e a ampliar as situações tratadas.

Exemplo 7 - Jogo do Construir Edifício mais alto que o Maria Feliciana : *Neste jogo temos que o maior edifício da cidade de Aracaju é o Maria Feliciana, pertencente a COSIL*[12]*, que em virtude da sua localização e do seu tamanho possui um elevado valor comercial para as suas salas. Agora uma empresa, a CONTRUÇÕES SOCIEDADE ANÔNIMA, a COSA, está pensando em construir um edifício ainda mais alto. Vamos supor, que a empresa que possui o edifício mais alto ganhe um grande lucro, diminuindo o das demais. Todavia, a COSIL (ou qualquer outro concorrente) pode construir outro prédio ainda mais alto, reduzindo o retorno/lucro da COSA. Através da análise de mercado e outros métodos de administração as partes envolvidas obtém os seguintes dados :*

- Se COSA escolhe NÃO CONSTRUIR, ela ***nada ganha, ou seja, 0*** *e a COSIL mantém seus ganhos em 200;*

- Se COSA escolhe CONSTRUIR e a COSIL decide NÃO CONSTRUIR MAIOR, COSA ***ganha 120*** *e COSIL 80;*

- Se COSA escolhe CONSTRUIR e COSIL decide CONSTRUIR MAIOR, COSA tem um prejuízo de 60, ou seja, ***ganha*** -60 *e a COSIL 30;*

Que resulta na árvore a seguir :

[12]é uma mera suposição esta relação de posse, apenas para evidenciar a competição entre construtoras

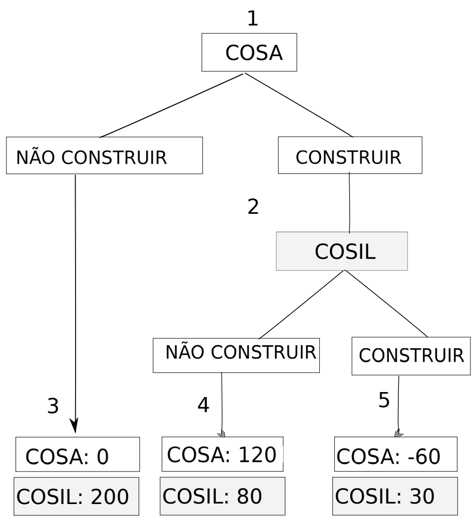

Figura 2.13: Árvore do jogo Construir Edifício mais alto

A COSIL, de forma óbvia, deseja que a COSA não ingresse no mercado construindo um novo edifício, posto que mantém os seus ganhos em 200 (correspondendo ao nó 3). Todavia, esta não é uma decisão dela, mas da COSA e tudo qu pode fazer é reagir a esta decisão. Utilizando, a nossa regra 1, e assumindo que a COSIL sempre tende a agir para maximizar seu retorno, a COSIL com a entrada da COSA no mercado tem duas opções - CONSTRUIR E NÃO CONSTRUIR um prédio mais alto. Se não construir seu retorno será de 80 e ao construir será de 30. Em virtude de assumirmos que a COSIL, quer sempre maximizar seu resultado, a mesma irá escolher NÃO CONSTRUIR. Por sua vez, a COSA, que conhece as duas regras acima do pensamento estratégico, sabe que a COSIL irá pensar de forma a maximizar seus lucros então escolhe CONSTRUIR, tendo o jogo o resultado esperado a seguir :

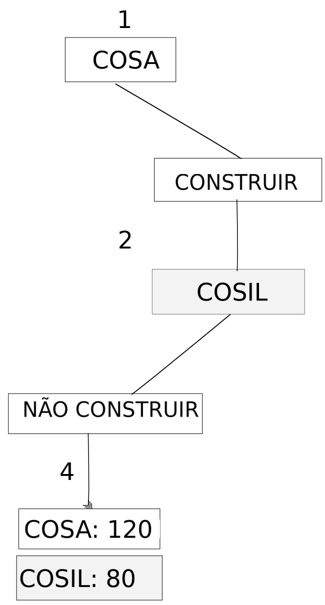

Figura 2.14: Resultado jogo Construir Edifício mais alto

Devemos perceber que a nossa modelagem possui inumeras simplificações, afinal na vida real existem uma quantidade maiores de alternativas. Por exemplo a COSA poderia construir um prédio mais baixo, ou a COSIL poderia construir outro prédio independente da COSA entrar no mercado, ou mesmo a COSIL pode preferir quebrar a concorrente escolhendo a opção de CONSTRUIR ainda que a COSA construa, pois isso levaria a um prejuízo da rival. Todavia, estas simplificações, são **utéis para explicar a dinâmica da Teoria dos Jogos**, na cosntrução de situações (cenários) e a forma de tomar decisões neste tipo de análise.

O uso das regras, não está condicionado à confecção de árvores. Com a prática e a experiência irá perceber-se que diversas situações estratégicas da vida diária ou do trabalho prestam-se a uma análise pr méio da lógica de árvores, sem entretanto termos a necessidade de construí-las. Vejamos o exemplo, retratado na situação da denominada de *Inconsistência temporal em politíca monetária*

Exemplo 8 - Politica Monetária e a Independência do Banco Central[13] *Aqui existem dois grupos de jogadores. Por um lado o Governo que, supomos, persegue a maximização do bem estar social. Por outro lado, os agentes econômicos que tomam decisões no mercado. Os agentes econômicos, são muitos, nós os trataremos por um jogador coletivo e estes intervêm no jogo somente formando expectativas.A economia neste momento caracteriza-se por um elevado desemprego, causado por um conjunto de externalidades*[14]*. Por exemplo, pode ser que os atuais salários sejam elevados, o que faz com que os impostos sobre o trabalho sejam elevados. O governo quer conseguir o maior bem estar social possível, assim intervém com o propósito de reduzir o desemprego. Para isto, introduz, de surpresa, inflação aumentando a massa monetária. Essa inflação, no curto prazo, reduz os salários reais, estimulando assim a criação de emprego. Para formalizar as estratégias dos jogadores, definimos a função de resultado do Governo :*

$$R = b(\pi - \pi^e) - \frac{a}{2}\pi^2 \qquad a, b > 0$$

Esta função pode ser interpretada do seguinte modo : O primeiro termo da expressão $(b(\pi - \pi^e))$ são os beneficios em termos de criação de emprego, onde π é a inflação real, a inflação esperada pelos agentes econômicos é π^e, b é um parâmetro que regula os beneficíos que se conseguem com a inflação não esperada (diferença entre a inflação real e a esperada). O segundo termo $(\frac{a}{2}\pi^2)$ são os custos que surgem com o crescimento do emprego em termos de inflação, onde a mede a sensibilidade do Governo à inflação. Quanto maior b maiores os beneficios e quanto maior a mais importância se atribui a inflação.

Atuando o Governo, sem limitações de nenhum tipo, intentando maximizar o beneficio social, de forma discricional, adotará a taxa de inflação [15] $\pi^d = b/a$.

O problema, agora, consiste é que os agentes econômicos possuem espectativas sobre a atuação do Governo, conhecem a função de resultado da mesmo e pior conhecem a indução retroativa, e são capazes de antecipar a decisão do Governo e portanto a inflação não os pegará de surpresa. Quer dizer, para os agentes econômicos agora a inflação esperada $\pi^e = \pi_d = b/a$ e a função de resultado do Governo passa a ter o seguinte valor :

---

[13]exemplo extraído, em uma tradução livre, Teoria de Juegos, Sańchez-Cuenca, 2009, 78-79, 2ªedição

[14]Diz que uma atividade gera externalidades quando as decisões de um agente geram custos ou beneficios para outros agentes, sem que o agente que gerou esses custos ou beneficios tenha de ressarcir os outros (no caso de gerar custos) ou ser remunerado por eles (no caso de beneficios).Uma outra forma de dizer é que : Externalidades são os efeitos sociais, econômicos e ambientais indiretamente causados pela venda de um produto, prestação de um serviço ou intervenção do Governo. Exemplos de EXTERNALIDADE NEGATIVA : A poluição emitida por uma fábrica que afeta a saúde dos moradores da região, O ruído provocado pelos aviões que operam em aeroporto próximo a zona residencial, A erosão decorrente da derrubada de uma floresta ou mata. Exemplos DE EXTERNALIDADE POSITIVA : O aumento de segurança em uma cidade em virtude da contratação de força policial pelo estado, Melhoria nas condições de tráfego de automóveis e pedestres decorrente da instalação de novas estradas e passarelas.

[15]Do cálculo diferencial, sabemos que a derivada primeira em relação a π é $R^{'} = \frac{dR}{d\pi} = (b - \frac{a}{2})2\pi$ e a derivada segunda é $R^{''} = -a$ é negativa. Portanto, o ponto em que a derivada primeira é nula é de maximo da função, ou seja, $\frac{dR}{d\pi} = (\frac{a}{2})2\pi = 0$, resultando que $\pi^d = b/a$ é a taxa de inflação que satisfaz a igualdade retro e produz o maior valor da função resultado

$$R_d = b(\pi_d - \pi^e) - \frac{a}{2}\pi^2{}_d = b(\pi_d - \pi_d) - \frac{a}{2}\pi^2{}_d = 0 - (\frac{a}{2})(\frac{b}{a})^2 = -\frac{b^2}{2a}$$

O resultado será negativo, agindo o Governo de forma discricionaria. Gerando apenas custos, em virtude da capacidade dos agentes econômicos anteciparem a ação do Governo. Se, por outro lado, o Governo decide seguir uma regra que o forçará a perseguir uma inflação zero (0). Os agentes econômicos antecipando o resultado da regra adotam uma inflação esperada igual à da inflação da regra, ou seja, $\pi^e = \pi_r = 0$. Logo, os resultados serão nulos, quer dizer $R_r = 0$.

Assim, se o Governo segue a regra, o resultado é melhor que se atua de forma discricionária. A dificuldade encontra-se no fato se os agentes acreditam que o Governo irá usar a regra, o Governo passa a ter incentivos para desviar-se da regra e introduzir inflação. Assim, de acordo com o que vimos anteriormente, o Governo se desviara da regra introduzindo inflação $\pi_t = b/a$, onde o subindíce t indica a tentação de romper com a regra. Entretanto, os agentes são racionais, antecipam a atuação do Governo e voltamos outra vez a resultados negativos.

Em outras palavras, a regra que o Governo anuncia não é crível, por que o Governo tem incentivos para rompê-la e os agentes econômicos o sabem. Em consequência, sobe a inflação sem que se aumente os empregos, acabando a sociedade em situação pior. Para sair desta armadilha, os Governos delegam a politíca monetária a um Banco Central independente cujo principal objetivo é conter a inflação. Deste modo, o Governo se ata as mãos, pois eliminou de suas opções a possibilidade de introduzir inflação de surpreza no curto prazo para reduzir o desemprego.

Aqui podemos nos questionar se as pessoas realmente resolvem jogos (problemas do cotidiano) raciocinando para trás?

Figura 2.15: Pensando de forma retroativa

Na situação retratada acima, a gente que não raciocinar para trás vai contra, de forma explicíta ou intuítiva, seus próprios interesses. Na nossa experiência diária, quem ao ser mal-atendido em um estabelecimento comercial, não pesa isso ao pensar em retornar em tal estabelecimento. Ou naquela tarde chuvosa, no horário de pico do movimento, não utilizamos nossas (ou daquelas que tomamos conhecimento) experiências passadas para decidir se compensa ou não sairmos. Nos negócios, na politica, nos esportes profissionais da vida real, e nos jogos os quais as pessoas já tenham jogado antes (e continuam jogando), é natural supor que há muito mais conhecimento acumulado e que naturalmente escolherão boas estratégias baseadas em um cálculo deliberado (ou apenas na intuição) baseado na experiência que vai se formando. No caso de alguns jogos mais complexos, os jogadoreds que pensam estrategicamente podem utilizar computadores, tanto nos esportes, quanto na economia, politica ou mesmo na biologia, para a realização dos seus cálculos. Esta é uma prática ainda esparsa, mas que com certeza se ampliará. De qualquer maneira, existe uma crença no mundo cientifico, a qual, por nós é compartilhada, que o *Raciocínio Para Trás* deve ser o nosso ponto de referencia para analisar os jogos estratégicos e predizer seus resultados. Esta primeira aproximação pode-se modificar mais adiante segundo o contexto, por exemplo, para ter em conta que os jogadores principiantes podem cometer erros e que alguns jogos são demasiados complexos para serem resolvidos sem ajuda especializada.

Os exemplos 5, 6, 7 possuem uma propriedade muito interessante, não há a menor incerteza sobre os interesses (motivos) e decisões dos jogadores. Apesar da obviedade, façamos alguns comentários. Em todos os exemplos sempre que cada jogador iria executar sua jogada (salvo a primeira), sabia exatamente o que o próprio já havia jogado, bem como a(s) jogada(s) anterior(es) do adversário. Existem diversos jogos que possuem elementos que são frutos do puro acaso, por exemplos diversos jogos de cartas, tal qual o buraco, nos quais as cartas são distribuídas de forma aleatória[16] e cada jogador não sabe quais as cartas dos demais jogadores.[17]. No exemplo 5, cada jogador sabe que o objetivo do outro é a vitória (deixar o último palito para o adversário), no exemplo 6 obter o máximo de pontos e no exemplo 7 ambos querem maximizar seus lucros.Em muitos jogos e nos esportes competitivos que isto ocorra é mais que natural. Todavia, nos negócios, na politica, na economia, nas relações sociais[18], está não é uma realidade. Afinal, nestes jogos os motivos costumam ser a combinação de vários interesses, alguns egoistas outros altruístas, preocupações com justiça e igualdade, tempo de retorno : se longo ou curto prazo, etc. Por fim, em diversos jogos existe a incerteza de não saber quais foram ou podem ser as jogadas dos demais jogadores, o que às vezes denomina-se por *incerteza estratégica*, para distinguir dos aspectos naturais, como por exemplo a distribuição de cartas no jogo de 21. Assim podemos classificar os jogos com base na quantidade de informação disponível aos jogadores. Quando todos os jogadores conhecem a) O conjunto de jogadores b) As estratégias disponíveis para cada jogador c) os resultados para todos os jogadores, quando isto ocorre dizemos que este é um **jogo de informação completa** e se ao menos um dos jogadores desconhece tais informações o **jogo é de informação completa**. Segundo Harsany (Rational Behavior, 1977) um jogo de informação completa é quando os jogadores conhecem todas as *regras* do jogo, que para ele corresponde a conhecer a forma extendida do mesmo, e no jogo de infomação incompleta os jogadores não tem certeza de qual jogo estão jogando, pois afinal não conhecem todas as suas regras. Todavia, ainda que os jogadores possuam as informações acima, ainda podem não saber tudo sobre os jogadores (ou em alguns caso sobre si mesmo), ou sobre as jogadas por estes efetuadas. Por exemplo, A Coréia do Sul pode possuir pouca ou nenhuma informação sobre a preparação da Coréia do Norte para uma eventual guerra ou A Coca-Cola pode ter muita ou pouquissíma informação sobre os investimentos e os planos de pesquisa para um novo produto da PEPSI. Nos jogos, nos quais sabemos todas as jogadas anteriores (ações/escolhas/decisões/movimentos) dos demais jogadores são ditos de **jogos de informação perfeita** e caso contrário **jogos de informação imperfeita**. Ou conforme Fiani :

> "Um jogo é de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas, enfim conhecem todas as jogadas realizadas pelo seu adversário e obviamente as suas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali é o jogo dito de informação imperfeita". (Fiani, Ronaldo. Teoria dos Jogos, Campus, 2009)

Resulta que a quantidade de informação disponível a cada jogador é um elemento de significativa importancia na escolha da forma de representar um jogo - forma estratégica ou estendida. Se os jogadores, em um processo de interação estratégica (jogo), decidem não sabendo quais foram as decisões dos seus adversários, então temos um jogo de informação imperfeita, independente destas decisões ocorrerem em momentos temporais distintos, este é um jogo simultâneo

[16]Estamos supondo não haver cartas marcadas nem manipulação, afinal existem jogadores que conseguem embaralhar e distribuir as cartas ao seu bel-prazer

[17]Se bem que com o desenrolar do jogo, e atenção do jogador, as jogadas anteriores podem servir de base para eventuais deduções sobre possíveis cartas

[18]Os diversos tipos de jogos estratégicos do mundo real

e tais jamais podem ser de informação completa, pois cada jogador efetua sua jogada sem o conhecimento prévio do que o outro jogou. Reforçando o fato que a noção de tempo em jogos sequencias tem sentido mais lógico que temporal. Não sendo o critério cronológico o utilizado para escolher pelo jogo simultâneo ao tratarmos de situações de interação estratégica. Assim, somente os jogos sequenciais podem ser de informação completa. Mas, se para tais jogos a forma estendida (árvore) é a melhor alternativa, então como representar o quanto cada jogador sabe das decisões dos demais jogadores? No exemplo 6, o nosso adversário ao tomar sua decisão sabe se escolhemos subir ou descer, ou em outras palavras, ele sabe com certeza se está no nó 2 ou 3. Semelhante no exemplo 5, o jogador sempre sabem precisar exatamente em qual nó se encontra na sua vez de jogar. Mas, se o mesmo não ocorrer, não existir certeza de qual nó me encontro, significa que não sei qual foi a jogada feita anterior. Então a falta de certeza em qual nó o jogador encontra-se pode ser utilizada para a caracterização do jogo e assim definimos conjunto de informação como sendo *O conjunto constituído pelos nós que o jogador acredita ter alcançado, em uma dado momento do jogo, quando da sua vez* . Não faz sentido, então, que um conjunto de informação, contenha nós de diferentes jogadores ou nós em sequência. Podemos agora, de uma forma mais precisa, definir que um jogo de informação perfeita será aquele em que todos os conjuntos de informação de cada jogador possuem apenas um nó, isto é, são unitários[19]. Notemos que a dúvida consiste em qual nó encontra-se o jogador, o que pode ser indicado com um circulo tracejado abrangendo os dois nós, ou seja, representando o seu conjunto de informação

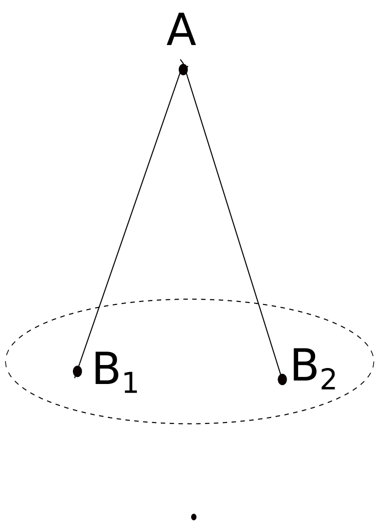

Figura 2.16: Conjunto com dois nós

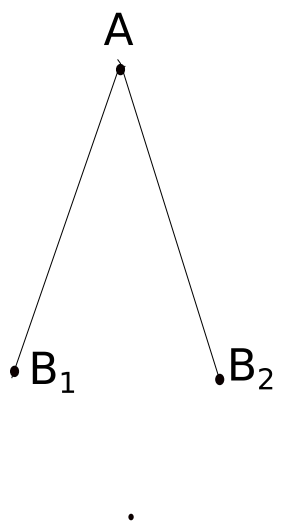

Figura 2.17: Conjunto Unitário (Singleton)

Neste momento podemos definir subárvore, como sendo qualquer parte de uma árvore (representação de um jogo na forma extensiva) que atende as seguintes regras :

1. Inicia-se em um nó da árvore, ou seja, possui apenas uma raiz;

2. Contém todos os nós sucessores do nó inicial (raiz) da subárvore;

3. Não contém conjuntos de informação incompletos, que seja, ao conter um nó pertencente a um conjunto de informação deverá conter todos os nós do conjunto de informação.

A figura retrata algumas possíveis subárvores para o jogo dos seis palitos :

A árvore além de ser uma representação de um jogo (sua forma extensiva) é uma definição em si mesma de um jogo, como dos exemplos anteriores. A figura a seguir generalizando a idéia apresenta algumas variantes :

[19]do inglês SINGLETON

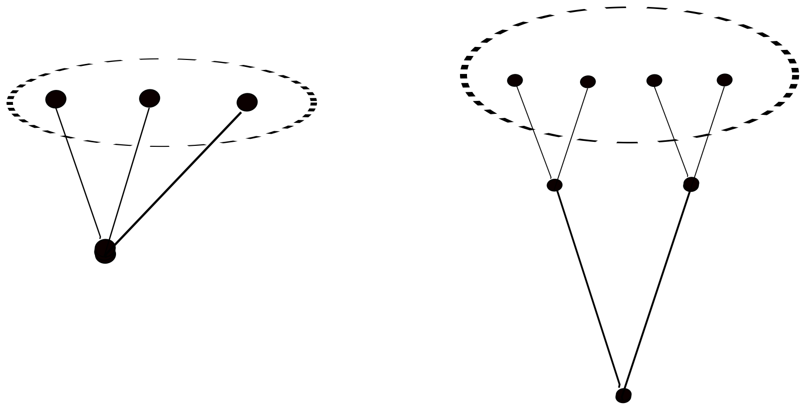

Figura 2.18: Conjunto de informação com três e quatro nós

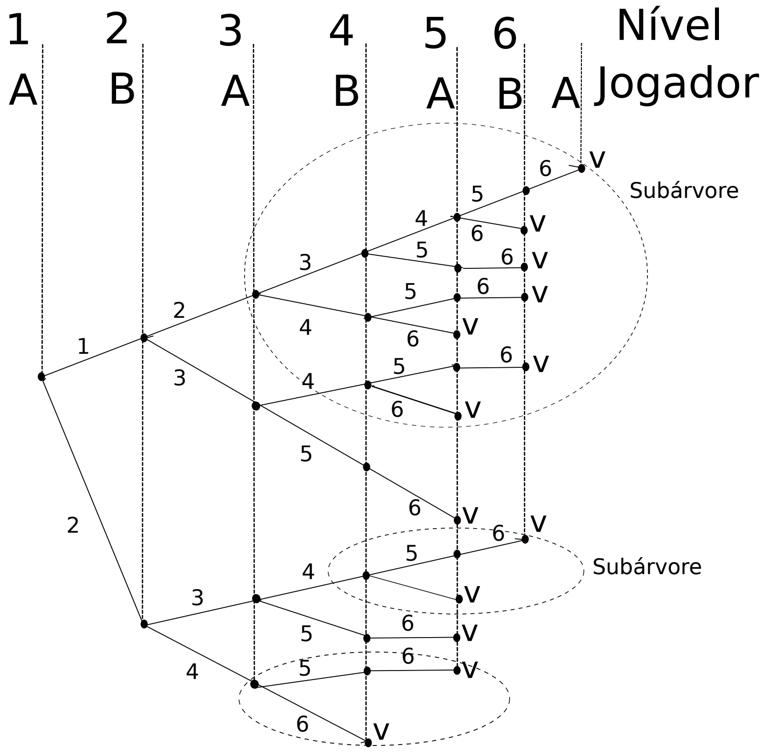

Figura 2.19: Subárvores do jogo seis pálitos

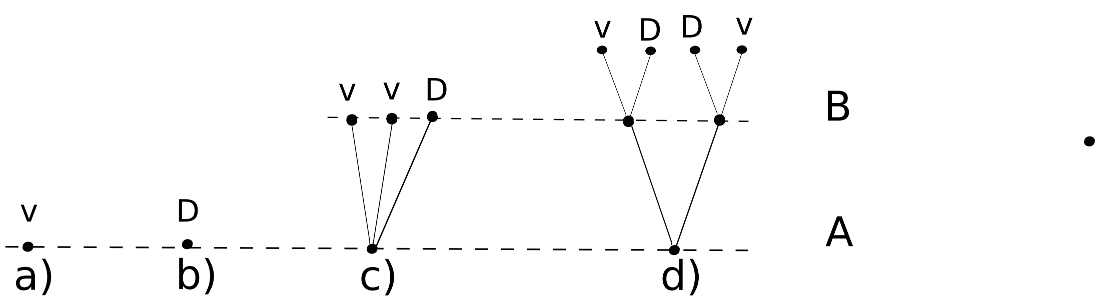

Figura 2.20: Definição de jogos por suas arvores associadas

Na figura 20-a e 20-b representam o denominado jogo vazio (no qual não haveria jogada alguma, ou seja de ordem zero), onde no primeiro o jogador A é o vencedor e no segundo o jogador B é o vencedor (derrota de A). Na figura 18-c é apresentado um jogo com exatamente uma jogada, o jogador A realiza uma das suas três jogadas possíveis e o jogo se encerra com vitória do mesmo em duas possibilidades. Por fim, na figura 18-d, retrata-se um jogo com exatamente duas jogadas, A inicia realizando uma das suas duas possíveis jogadas e a seguir B realiza uma das suas duas jogadas possíveis, neste jogo existem duas possibilidades para ambos de vitória. E, por consequência lógica do apresentado até agora, uma subárvore define um subjogo.

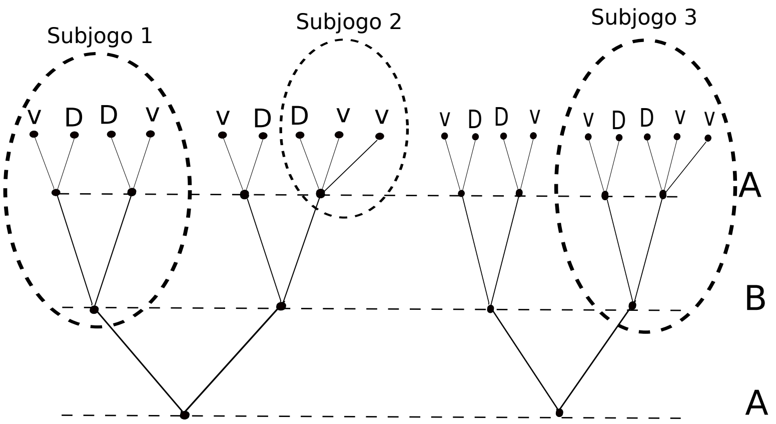

Figura 2.21: Subjogos por suas arvores associadas

Para encerrar esta seção, recordemos que introduzimos a noção de estratégia utilizando termos, palavras da nossa linguagem, ou seja do português, o que sempre é passível de interpretações errôneas ou no mínimo contrárias ao senso comum, além de não possuir nenhuma garantia de ser impecável do ponto de vista semântico ou lógico. A forma estendida (árvore do jogo), sendo uma entidade matemática abstrata, nos permite uma definição com precisão e sem ambiguidades (ao menos se espera).

Relembrando dos nossos estudos de vetores, temos que *um vetor fixo* no plano, é um segmento de reta orientado, com origem em um ponto **a** e extremidade em um ponto **b** Dada uma árvore (forma estendida) de um determinado jogo. Seja **a** um vértice no nível n e seja **b** um outro vértice em um nivel contiguo n+1, ambos conectados por uma ramo. Chama-se *flecha de origem **a** e extremo **b** ao vetor fixo com origem no vértice **a** e extremo no vértice **b**.*[20]. Todo vértice que não é origem de nenhuma flecha é dito *solitário*.

Uma estratégia para um dado jogador, denominado A, é o conjunto de flechas definido sobre a árvore do jogo, que satisfaz as seguintes propriedades :

1. Toda flecha da estratégia tem sua origem em um vértice que pertence a um nível impar da forma $2n-1, n \geq 1$, por definição de flecha, o extremo estará localizado em um vértice pertencente ao nível $2n, n \geq 1$ contiguo;

2. Todo vértice **a** pertencente a um nível impar $2n-1$ ou é solitário ou pertence a uma flecha com extremo em um vértice do nível $2n$ contiguo;

3. Se existe um vértice não solitaŕio **a** no nível $2n-1$, então tal vértice é a base de uma subárvore onde cada vértice do nível impar sucessivo $2n+1$ é origem de uma flecha da estratégia.

Naturalmente, como consequencia do que acabamos de expressar para A, uma estratégia para B, pode-se definir de maneira analóga, considerando agora flechas com origem em vértices de ordem par $2n$.

Apesar de termos dito que terminaríamos a seção com a "redefinição"de estratégia, acredito que você leitor (interessado e amigo), precisa digerir um pouco as idéias e informações ate aqui

[20]Assim, as flechas são definidas apenas entre vértices pertencentes a niveis contiguos e conectados por um ramo

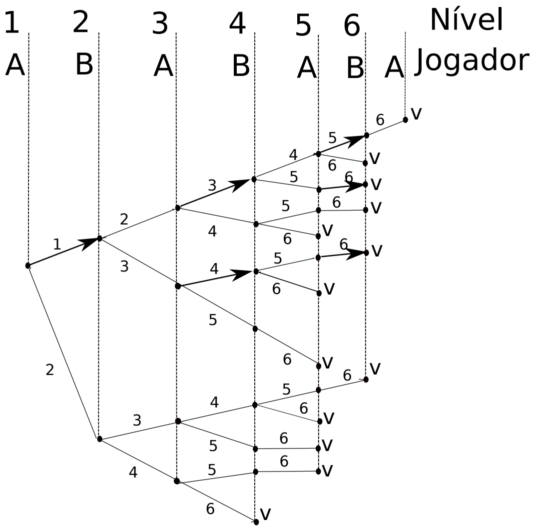

Figura 2.22: A retira sempre 1 palito

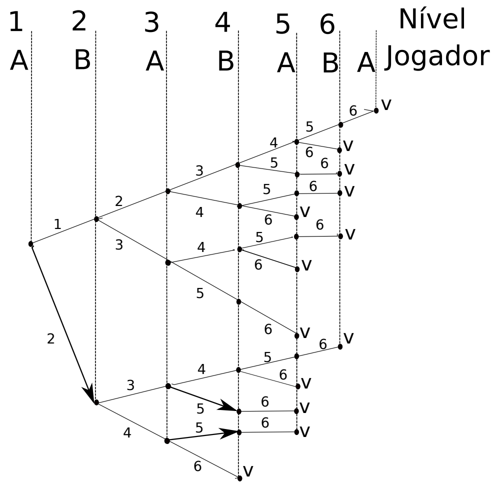

Figura 2.23: Estratégia Ganhadora para A

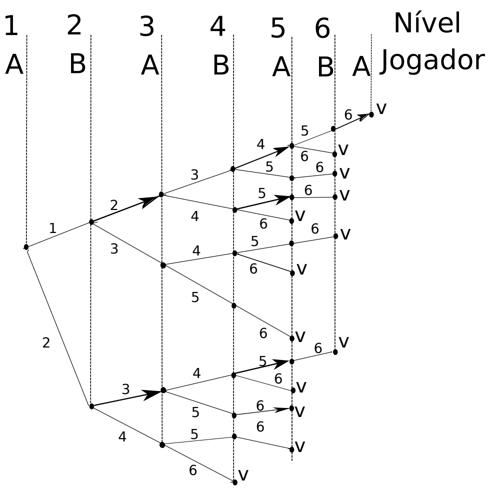

Figura 2.24: B retira sempre 1 palito

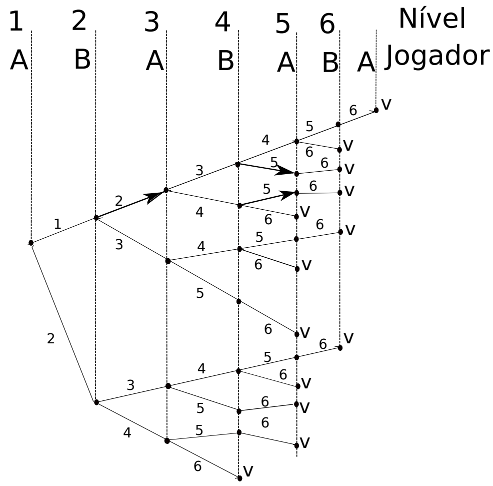

Figura 2.25: Estratégia Ganhadora para B, caso A retire 1 palito na primeira jogada

apresentadas. Com este intuito apresentamos três versões do jogo dos palitos para que possa exercitar-se, por assim dizer são exercícios para relaxar.

Exercício 1 - Vinte e um Palitos *Dadas duas pessoas, temos vinte e um palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um, dois ou três fósforos. O ganhador é aquele que retirar o último palito. Existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Se afirmativo, qual seria esta?*

Exercício 2 - Vinte Palitos *Dadas duas pessoas, temos vinte palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um, dois ou três fósforos. O ganhador é aquele que retirar o último palito. Existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Se afirmativo, qual seria esta?*

Exercício 3 - Vinte e um Palitos Modificado *Dadas duas pessoas, temos vinte e um palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um, dois ou três fósforos. O perdedor é aquele que eventualmente se vê obrigado a retirar o último palito. Existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Se afirmativo, qual seria esta?*[21]

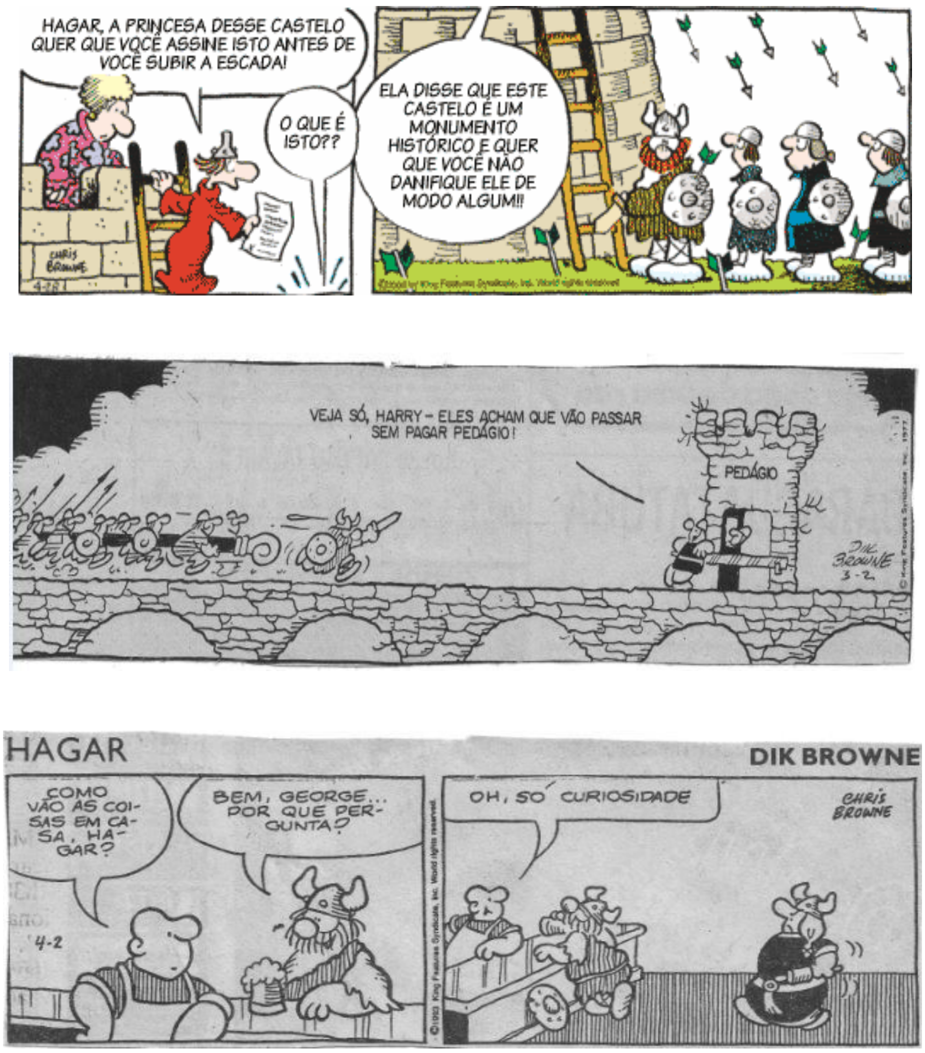

Figura 2.26: Situações irreconciliavéis

2.2.3 Jogos de Soma Zero, Espaço de estratégias e Estratégias mistas

Nas tirinhas acima, em uma partida de xadrez, damas, tênis, em todos os esportes competitivos profissionais[22], na guerra da Bosnia-Sérvia, na atual guerra cívil na Síria, todas estas situações apresentam a caracteristica que as partes envolvidas (os jogadores) possuem interesses que são totalmente opostos, que seja, são irreconciliavéis. Esta interação estratégica, conflito irreconciliavél, é denominada de jogo estritamente competitivo. Para analisarmos com mais detalhe este tipo de jogo, retomemos o exemplo 2, o jogo de par ou impar, onde interesses dos jogadores são opostos, vamos acrescentar o fato que estão jogando com um fim econômico, materializado no fato que o vencedor ganha uma moeda de R$ 1, 00 e, utilizando as idéias da contabilidade e economia, representamos 1 quando ganha uma moeda e por -1 quando perdemos uma moeda. Então, temos o exemplo 2 modificado :

Exemplo 2, modificado - Par ou Impar : *Temos duas pessoas que devem escolher entre par e impar e em seguida mostram ao mesmo tempo, uma quantidade, escolhida por cada um sem o conhecimento do outro, dos dedos de uma das mãos. Sendo vencedor aquele que após a contagem total dos dedos acertou se ela é par ou impar, onde o vencedor ganha uma moeda de R$1, 00 do perdedor*

[21] Aos mais ansiosos (ou curiosos) as nossas propostas de soluções encontram-se no apêndice B.

[22] e em muitos amadores, pois afinal mesmo naquela peladinha entre amigos o desejo de ganhar está bem presente

Como antes temos que o primeiro jogador é A, que escolhe par, e o segundo B, e A mostrar uma quantidade de dedos par denominaremos de A_1 e uma quantidade impar de A_2, e de forma semelhante para B, B_1 e B_2 e da nossa análise prévia :

- A mostra par (A_1) e B mostra par (B_1), soma par e A vence, ganha uma moeda, seu resultado é 1 (B perde, perde uma moeda, seu resultado é -1);
- A mostra par (A_1) e B mostra impar (B_2), soma impar e A é derrotado, perde uma moeda, ou seja, seu resultado é -1 (B vence, ganha uma moeda, seu resultado é 1);
- A mostra impar (A_2) e B mostra par (B_1), soma impar e A é derrotado, perde uma moeda, seu resultado é -1 (B vence, ganha uma moeda, seu resultado 1);
- A mostra impar (A_2) e B mostra impar (B_2), soma par e A vence, ganha uma moeda, seu resultado é 1 (B perde, perde uma moeda, seu resultado é -1);

Então do ponto de vista do jogador A, temos a forma normal :

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

E do ponto de vista do jogador B, temos :

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

As tabelas apesar de serem bem parecidas não são as mesmas, o que gera um problema, pois assim ao tratarmos de jogos na forma normal teriamos de fazer uma tabela para cada jogador, então um jogo com 100 participantes teríamos 100 tabelas? Não, é desnecessária construção de mais tabelas, simplesmente representamos os dois resultados possíveis, da seguinte forma :

	B_1	B_2
A_1	(1, -1)	(-1, 1)
A_2	(-1, 1)	(1, -1)

Onde o primeiro elemento do par corresponde ao resultado do jogador na linha, ou seja, A e o segundo elemento o resultado do jogador coluna, quiça, B. Sendo este procedimento estendível para n jogadores.

Facilmente, da forma normal acima, percebe-se que a soma dos resultados de A e B é zero (nula), para qualquer combinação de estratégias adotadas. Temos, que jogos onde os interesses dos contricantes são diametralmente opostos (estritamente competitivos) denominam-se jogos de soma zero. A expressão "soma zero" originou-se dos jogos de salão, como o pôquer, onde não se cria nem se destroi riqueza. Quem quiser ganhar dinheiro terá de obtê-lo de um outro jogador. Encerrado o jogo, a soma dos ganhos é sempre zero (afinal as perdas são consideradas ganhos negativos).

Uma categoria de interesse ao menos teórico, são os jogos que possuem as seguintes propriedades (ou características):

1. São de dois jogadores;

2. Os jogadores tem interesses totalmente opostos, ou seja, o jogo é de soma zero;

3. O jogo é finito, onde por finito entende-se que cada jogador, em cada jogada, possui uma quantidade finita de alternativas (estratégias) e, não menos importante, o jogo encerra-se após uma quantidade finita de jogadas;

4. O jogo é de informação perfeita.

Estes são os jogos finitos de duas pessoas e de informação perfeita, tais jogos são *estritamente determinados*, entre estes temos o xadrez, afinal são dois jogadores, por certo os ganhos de um jogador advém das perdas do outro (soma zero), o jogo é finito[23] e com certeza cada jogador conhece as jogadas efetuadas por seu adversário, ou seja, é de informação perfeita. Nesta modelagem, não é relevante o tamanho do tabuleiro, o número de peças, a maneira como cada peça se movimenta ou captura as demais e outros pontos particulares, mas apenas o fato de atenderem as quatro condições acima. O jogo dos seis palitos, do exemplo 5, também enquadra-se nesta categoria de jogos (confira). Naquele exemplo, fomos capazes de determinar uma estratégia ganhadora para o jogador A, independente das ações do jogador B. Esta, é justamente a idéia dos jogos estritamente determinados, nos mesmos *ao menos um dos jogadores possui ao seu alcance uma estratégia, que se escolhida, lhe garantirá a vitória, independentemente da forma que o adversário venha a se comportar.*

É oportuno, observar, que ao afirmar que possui uma estratégia vencedora, não estamos afirmando ser possível descer ao detalhe de encontrá-la, pois devido a enormidade de possibilidades de jogadas e ou estratégias, esta pode não ser uma possibilidade prática. Vejamos, o xadrez sendo um jogo estritamente determinado possui uma estratégia vencedora para o jogador A[24], mas na primeira jogada o jogador A possui 16 opções de iniciar com os peões e 4 com os cavalos, totalizando 20, na sua jogada seguinte esta quantidade pode pular para 30, este aumento é cada vez maior a cada jogada. Portanto, em que pese afirmarmos que existe uma estratégia vencedora, ainda não é factível determiná-la de antemão. Apesar de parecer ser uma debilidade da Teoria dos Jogos afirmar, por assim dizer, que existe uma solução para o jogo mas não ser capaz de realizar a sua determinação, tendo a teoria uma restrita aplicação prática, entrementes, não devemos nos esquecer que tal limitação ocorre em outras ciências e na própria matemática, afinal :

> "Não se exige que uma pessoa que dominou a técnica das grandes divisões seja capaz de realmente dividir (utilizando papel e caneta) um número de um milhão de algarismos por outro de dez mil; basta que possa indicar como proceder "(Davis, Morton D.; Teoria dos Jogos : uma introdução não técnica, Cultrix, 1973, pag. 31)

O fato que os jogos, finitos, de duas pessoas de soma zero e informação perfeita são estritamentente determinados é um teorema geral, aqui apresentaremos dois esboços de demonstração com o intuito de desenvolvermos o uso de elementos vistos anteriormente, como estratégia e forma estensiva, bem como nos familiarizarmos com técnicas de demonstração.

Primeiramente demonstraremos que se assumir que nenhum dos jogadores possui uma estratégia vitoriosa, obtemos uma contradição e assim de forma indireta provamos que ao menos um deles possui uma estratégia vitoriosa.

---

[23]O xadrez possui uma regra que se uma dada disposição de peças repetir-se tês vezes o jogo é declarado empate, tornando então limitada quantidade de jogadas possíveis

[24]Demonstrado por Zermelo que possui ao menos uma estratégia que lhe garante o empate, conforme apresentado no apêndice A

"Demonstração 1":*Iniciaremos partindo da suposição que o jogo nenhum dos jogadores possui uma estratégia vencedora, que seja, não é estritamente determinado.* Não possuindo nenhum dos jogadores uma estratégia vitoriosa, então, partindo da posição inicial, nenhum dos jogadores dispõe de uma estratégia que lhe garanta a vitória. Decorre, então, duas situações possivéis :

1. *Qualquer posição a qual o jogador A, quem efetua a primeira jogada, possa atingir a partir da posição inicial não será para ele posição de vitória.* Pois, se não o fosse, A poderia passar para uma posição X que fosse vitoriosa desde o seu lance inicial, ou seja, sua estratégia seria a de executar sua jogada para alcançar esta posição;

2. *Existe ao menos uma posição a qual o jogador A pode alcançar, a partir da posição inicial, que não é uma posição de vitória para B.* Mais uma vez, se isto não ocorre, então B, disporia, desde o inicio do jogo, de uma posição de vitória. Simplesmente espere A jogar, qualquer que fosse a jogada, e em seguida por em prática a estratégia vitoriosa.

De 1 e 2 temos que existe uma posição imediatamente posterior à inicial que não garante vitória a nenhum dos jogadores. Esta posição chamemos Y. De forma exatamente igual podemos mostar que há uma posição imediatamente posterior a Y que não garante vitória a nenhum dos jogadores.É possível continuar indefinidamente, e o jogo nunca terminaria, pois se terminasse seria porque um dos jogadores atingiu uma posição de vitória. Contradizendo o fato do ser finito, assim nossa suposição é falsa. Por conseguinte, um dos jogadores possui uma estratégia vencedora, que seja, o jogo é *estritamente determinado*

Neste próximo esboço, utilizaremos a técnica de indução finita[25] *sobre a ordem n dos jogos*[26]

"Demonstração 2":*Para o caso de n=0*, a menor ordem para um jogo de duas pessoas, e conforme figura 18, existem apenas duas possibilidades, ou o jogador A vence ou o jogador vence B (A perde), então para este caso o teorema está provado. Agora, supomos o teorema válido para todos os jogos de ordem $n = k > 0$, em outras palavras, *para todo jogo de ordem máxima k, ou o jogador A ou o jogador B possui uma estratégia vitoriosa.*

A figura a seguir representa uma árvore associada a um possível jogo de ordem $n = k + 1$:

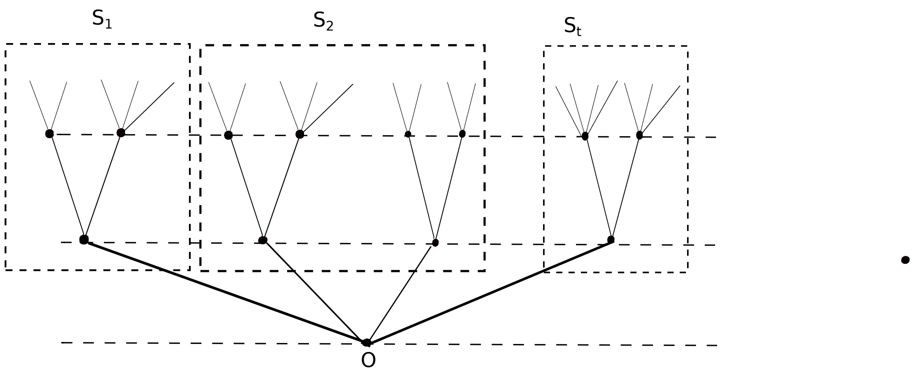

Figura 2.27: Árvore de um jogo de ordem k+1

[25]tal técnica de forma muito simplificada, consiste em seguir as seguintes três etapas :

1. Provamos válido o "teorema" para o menor caso, $k \geq 0, k\ natural$, possível, com ;
2. Supomos válido para um $k \geq$ menor caso possível , a hipótese indutiva;
3. Provamos válido para $k + 1$.

[26]Relembrando a ordem corresponde ao nível mais alto na árvore do jogo, o que corresponde ao tamanho (duração) máximo do jogo

Em um jogo de ordem $k+1$, como o representado na figura 27, do vértice inicial O, situado no nivel 1, partem ramos (ao menos um) que chegam aos vértices situados no nível 2. Cada um destes vértices é o nó inicial de uma subárvore $(S_1, S_2, ..., S_t)$ de ordem máxima k, em outros termos, ao menos uma das subárvores possui ordem k. Cada subárvore $S_1, S_2, ..., S_t$, define, por si própria, um jogo (subjogo), onde em cada um deles vale a hipotese indutiva. Que seja, para todos estes jogos ou A ou B possuem uma estratégia ganhadora. Caso A tenha uma estratégia ganhadora para todos eles, então tem de maneira evidente uma estratégia ganhadora para o jogo completo, afinal ao conjunto restringido de flechas que começam no nível 2 dos subjogos (que correspondem ao nível 3 do jogo ampliado), se agregam todas as flechas baseadas na origem O. Por outro lado, se B tem uma estratégia ganhadora para todos os jogos (subjogos)$S_1, S_2, ..., S_t$, resulta que tem uma estratégia ganhadora para o jogo completo, pois simplesmente o nível 2 deste corresponde ao primeiro nível de todos os jogos associados com subárvores de nível $k-1$, concluindo a nossa demonstração.

Os jogos de informação perfeita não são comuns, infelizmente quase raros, na vida cotidiana das pessoas, empresas, etc. Afinal, a incerteza sobre as ações dos nossos contrincantes em uma situação de conflito é o usual. Que seja, uma empresa ao decidir sobre o lançamento de um produto não sabe antecipadamente se o seu concorrente irá lançar algo semelhante ou não. Em uma licitação, os participantes não sabem quais foram as propostas dos seus concorrentes antes de realizar a sua (estamos supondo que não é o Brasil e a licitação é não viciada). No nosso dia-a-dia, os jogos mais comuns são os de informação imperfeita. Dito isso, continuemos com mais um exemplo.

Exemplo 9 - Jogo do Cara ou Coroa. *Dois jogadores, A e B, sem mirar um ao outro, colocam em uma mesa uma moeda de R$ 1, 00 cada um, com a face cara ou coroa virada para cima (visível), segundo seu próprio parecer. Se colocam a mesma posição para cima (os dois puseram cara ou os dois puseram coroa), então o jogador A fica com as duas moedas, caso contrário o jogador B fica com elas.*

O jogo consta apenas de duas jogadas, a nossa (assumimos o papel do jogador A) e a do nosso adversário, B. Ao efetuar nossa jogada, não sabemos a jogada do nosso adversário e o mesmo ocorre com ele, logo este não é um jogo de informação perfeita. As estratégias disponíveis para nós são : cara e coroa. Estas também são as estratégias do nosso adversário.

O conjunto de estratégias de um jogador, obviamente chama-se, *conjunto de estratégias puras* ou, para sair do óbvio, *espaço de estratégias puras* e denominamos por E. Na situação acima temos que o espaço de estratégias de A é $E_A = \{$ cara, coroa $\}$ e o de B é $E_B = \{$ cara, coroa $\}$. Para fixarmos esta idéia, vejamos os espaços de estratégias dos exemplos anteriores.

- No exemplo 1 : $E_A = \{$ Esquerda, Direita $\}$;
- No exemplo 2 : $E_A = \{$ Par (A_1), Impar $(A_2)\}$ e $E_B = \{$ Par (B_1), Impar $(B_2)\}$;
- No exemplo 3 : $E_{Claudio} = \{$ Rua do Turista, Museu da Gente Sergipana $\}$ e $E_{Ana} = \{$ Rua do Turista, Museu da Gente Sergipana $\}$;
- No exemplo 4 : $E_1 = \{$Avançar (AV), Esperar (ES)$\}$ e $E_2 = \{$Avançar (AV), Esperar (ES)$\}$;
- No exemplo 5 : $E_A = \{$ Retirar 1 palito, Retirar 2 palitos $\}$ e $E_B = \{$ Retirar 1 palito, Retirar 2 palitos $\}$;
- No exemplo 6 : $E_{Tua} = \{$Subir, Descer $\}$ e $E_{Adv.} = \{$ Subir, Descer $\}$;
- No exemplo 7 : $E_{COSA} = \{$ Construir, Não Construir $\}$ e $E_{COSIL} = \{$ Construir, Não Construir $\}$;

- No exemplo 8 : $E_{Gov.}$ {Seguir a Regra, Não Seguir a Regra } e $E_{Ag.}$ = {Acreditar que seguirá a regra, Não Acreditar que seguirá a regra }.

Retornando ao nosso exemplo, temos :

* A põe a moeda com cara visível (A_1) e B põe a moeda com cara visível (B_1), A vence, ganha uma moeda de B, seu resultado é 1 (B perde, perde uma moeda, seu resultado é -1);
* A põe a moeda com cara visível (A_1) e B A põe a moeda com coroa visível (B_2) e A é derrotado, perde uma moeda, ou seja, seu resultado é -1 (B vence, ganha uma moeda, seu resultado é 1);
* A põe a moeda com coroa visível (A_2) e B A põe a moeda com cara visível (B_1), A é derrotado, perde uma moeda, seu resultado é -1 (B vence, ganha uma moeda, seu resultado 1);
* A põe a moeda com coroa visível (A_2) e B põe a moeda com coroa visível (B_2), A vence, ganha uma moeda, seu resultado é 1 (B perde uma moeda, seu resultado é -1).

Resultando na seguinte forma normal :

	B_1	B_2
A_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
A_2	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Se este jogo for disputado uma única vez não há sentido de falar de estratégia melhor ou pior que outra. Todavia, a situação altera-se com o jogo sendo jogado repetidamente. Imagine, que nosso adversário tem o superpoder de ler mentes, ou seja, ele é capaz de saber se vamos colocar a nossa moeda com cara ou coroa visível, então de que forma devemos proceder para minmiizar nossas eventuais perdas? Brincadeiras a parte, de outra forma, se nós (jogador A) escolhermos uma mesma estratégia repetidamente, por exemplo jogarmos sempre cara o nosso adversário, fatalmente, irá "ler nossa mente" e contestará da melhor forma, ou seja, respondendo coroa. Melhor então variarmos nossas jogadas. Entrementes, digamos que alternemos nossas jogadas, mas de forma previsível (definida), que seja por exemplo, jogo duas vezes caras e depois duas vezes coroa é natural esperar que mais uma vez nosso adversário responda também da melhor forma para si. Concluímos que o nosso rival pode observar e explorar qualquer padrão sistemático com a mesma facilidade com que faria com a repetição de uma estratégia única. Somente nos resta alternar a escolha de qual face é visível de uma forma que nem nós mesmos saibamos, ou seja, utilizando algum componente aleatório, por exemplo um baralho do qual saco uma carta em sendo de paus será visível cara e senão será coroa. Desta forma a probabilidade de exibir cara é cartas de paus em 52 cartas possíveis, $\frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 25\%$ e de exibir coroa é 39 cartas restantes de 52 possíveis, $\frac{39}{52} = \frac{3}{4} = 75\%$. Resultando que as estratégias puras { cara, coroa } são jogadas de forma aleatória, mas com uma certa probabilidade definida. Sendo esta justamente a "definição"de estatégias mistas, *Uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de estratégias puras.*

Percebam que a real questão é o nosso de desejo de *tentar surpreender o adversário* e ao mesmo tempo *evitar ser surpreendido.* Enfim :

> "Quando os jogadores partem do princípio de que os demais jogadores podem surpreendê-los, intencionalmente ou não, é razoável supor que eles podem escolher tomar suas decisões tentando evitar o pior resultado que podem obter."(Fiani, Ronaldo. Teoria dos Jogos, Campus, 2009, pag. 191)

Os jogadores, diante da possibilidade de uma surpresa desagradável, adotam uma postura de "perder pouco é ganhar muito", ou o popular "dos males o menor ". E desta forma, aplicam algum mecanismo de aleatoriedade. Essa postura, alternar estratégias sem saber previamente qual será adotada, ou seja, aplicando uma certa distribuição de probabilidades, pode parecer estranha ao leitor, se não irracional, afinal entregar ao "azar" a determinação de nossas ações (estratégia empregada) é aparentemente uma loucura. Na guerra, por exemplo, um bom comandante deve manter o inimigo em suspense se e quando irá atacar, mas se as coisas não forem muito bem e uma comissão para formação de uma corte marcial questionar suas decisões, e este oficial prefira manter-se fora de um hospital psiquiátrico é sensato negar ter baseado a sua decisão de se ou não atacar por meio do lançamento de uma moeda. No entanto, as pessoas que comumente se opõem a decidir questões importantes através do rolar dos dados, não devem também seguir, cega e servilmente, alguma regra fixa que faria o seu comportamento em um jogo fácil de prever. As forças evolutivas - tanto sociais e biológicas - tenderiam a eliminar tal comportamento (ser prevísivel). Pois nas palavras de Gintis :

> "Alguma vez você já se perguntou por que tantas das criaturas de Deus são bilateralmente simétricas? Bem, uma das razões é que a maioria das tais criaturas devem perseguir e/ou fugir de predadores. A raposa, por exemplo, é mais rápido do que o coelho, mas o coelho pode mudar de direção mais facilmente do que a raposa. Suponha o coelho é forte no lado esquerdo e fraco no lado direito. Então para ele seria mais facil saltar para a direita, mas com dificuldade para a esquerda. Porquanto sua tendência seria principalmente saltar para a direita. Sabendo que o coelho vai saltar a direita, a raposa vai perseguir o coelho com um viés para a direita, e com um predisposição para saltar para a direita, tornando assim o benefício de saltar para a direita menos valioso para o coelho. Mas, em seguida, coelhos mutantes que reverteram essa padrão de força e fraqueza seriam mais prováveis de sobreviver, tornando extintos os coelhos com a tendência para a direita. E assim por diante. No equilíbrio, o coelho seria bilateralmente simétrico, da mesma forma como seria a raposa. Resultando que estratégias mistas, limitando as opções de um oponente por misturar suas ações, são de fundamentais importância na interação estratégica."(Gintis, Game Theory Evolving, 1999, pag. 82)

O resultado é que as pessoas acabam jogando com estratégias mistas sem estar ciente de que estão fazendo isso. Isso pode acontecer porque não importa se você realmente vai escolher ao acaso, desde que a sua escolha seja imprevisível.

Esta é justamente a conduta adotada pelo governo, por intermédio da Receita Federal, ao selecionar quem será inspecionado no ajuste anual, ou seja, quem cairá em malha fina. Afinal, o que aconteceria se houvesse uma fórmula determinada e conhecida que realizasse essa seleção? Eu, você e a torcida do Flamengo, antes de entregar sua declaração de ajuste anual, aplicaria a formula para saber se será ou não inspecionado. Constatando que seria, implica que existe alguma "anomalia", que sendo possível, prontamente providenciaríamos sua "correção" para que ao ser aplicada a fórmula pela Receita não mais sejamos selecionados. E não sendo possível "a correção", tornando-se inevítavel a seleção, só nos resta dizer a verdade em nossa declaração. Porquanto, se as inspeções fossem asim previsíveis, todos os inspecionados já teriam previsto o que lhes ia acontecer e escolheram agir honestamente e aqueles que realmente deveriam ser inspecionados escapariam. Ou, imaginemos que o Governador de Sergipe, com a intenção de reprimir o tráfico de drogas na capital, Aracaju, aumenta o número de policiais em patrulha na cidade. Um traficante de drogas em um bairro pode atuar ou em uma esquina de rua ou em uma praça. Cada dia, ele decide onde se estabelece, sabendo que a sua localização vai espalhar-se entre os usuários. Na falta de um bom informante, a polícia não sabe a localização da atuação do traficante. O policial responsável pelo patrulhamento, então, precisa decidir se a patrulha será nas praças ou esquinas, enquanto não descobre onde o traficante está. As decisões do gestor e o do "negociante" determinam a extensão da droga comercializada naquele dia. Suponha que, sem interrupção pela polícia, 100 transações ocorrem. O pagamento (resultado - ganho - payoff) de um "negociante" é igual ao número de negócios que ele consuma. Para o oficial, sua recompensa é o número de negócios que interrompe (que é simplesmente 100 menos o número de negócios que ocorrem). Se ambos acabam na praça, o oficial patrulhando e o traficante vendendo, há somente 40 comércios, o que significa que 60 comércios são interrompidos. Dado o tamanho da praça, ainda há uma quantidade razoável de atividade. O retorno do policial é, então, 60 e o retorno do negociante é 40. Se o traficante esta na praça, mas o oficial está nas ruas, o retorno do policial é zero e do negociante é 100. Se o oficial está patrulhando as ruas e o negociante está em uma esquina, ocorrem apenas 20 comércios. Finalmente, se o comerciante está em uma esquina, mas o oficial está patrulhando a praça, então 90 transações ocorrem. (Alguns tráfico de drogas são interrompidos devido ao patrulhamento). Cada jogador quer escolher um local que é imprevisto pelo outro jogador. Um traficante de drogas não irá sempre as praças, porque tal previsibilidade induziria o policial a patrulhar as praças e interromper os negócios. Pela mesma razão, "o comerciante" não gostaria de estar sempre em uma esquina. O que parece natural, para o traficante de drogas, é mudar a sua localização, às vezes estar em uma esquina, às vezes na praça. Claramente, um oficial não quer ser previsível, pois se está sempre na praça, o comerciante pode realizar um bom dia de negócios ao ficar em uma esquina. De modo semelhante se ficar somente nas esquinas. Então, ambos empregam estratégias mistas. Para surpreender o adversário.

Ocorrem situações semelhantes na competição entre empresas. Imagine o mercado do leite UHT, e suponha-se que a SABE, por exemplo, oferece regularmente uma promoção de desconto, digamos que toda primeira quarta-feira do mês. O seu concorrente, PARMALAT, também por exemplo, pode antecipar-se a SABE com uma oferta de desconto melhor (ou mais produtos pelo mesmo preço). Mas a SABE conhecedora da ação da PARMALAT pode antecipar sua oferta ou melhorá-la. Todavia, este processo conduzria a uma competição saguinária entre as empresas com ambas conseguindo menos beneficios. Entretanto, se ambas utilizam estratégias imprevíveis, ou seja, com uma certa distribuição de probabilidade em seu uso, podem inclusive reduzir a concorrência. Nos esportes profissionais é notório o fato de que devesse alternar suas jogadas. Um jogador de tênis, ao realizar seu saque, pode efetuá-lo a esquerda ou direita, se o fizer sempre da mesma forma, o recebor estará preparado e poderá responder da pior forma para o sacador. No futebol, se um batedor de penaltis for conhecido por bater sempre no mesmo lado, o que esperar da atitude do goleiro. É perceptível, agora, a importância da aleatoriedade das estratégias, tanto na Teoria dos Jogos, quanto em nossas vidas "reais".

Porquanto, todo o exposto, também é possível, definir estratégia mista em relação à estratégia pura, da seguinte forma :

> *Quando, em vez de escolher entre suas estratégias uma dada, e especifica estratégia para jogá-la com certeza (em termos matemáticos com probabilidade igual a 1), um jogador (ou mais de um, ou mesmo todos) decide alternar entre suas estratégias de forma aleatoria, atribuindo uma probabilidade (entre 0 e 1, obviamente) a cada estratégia a ser escolhida, diz que o jogador utiliza* ***estratégias mistas****. Caso contrário, ou seja, se o jogador escolhe uma e determinada estratégia (sem aplicação de uma distribuição de probabilidades), diz-se que emprega* ***estratégias puras***

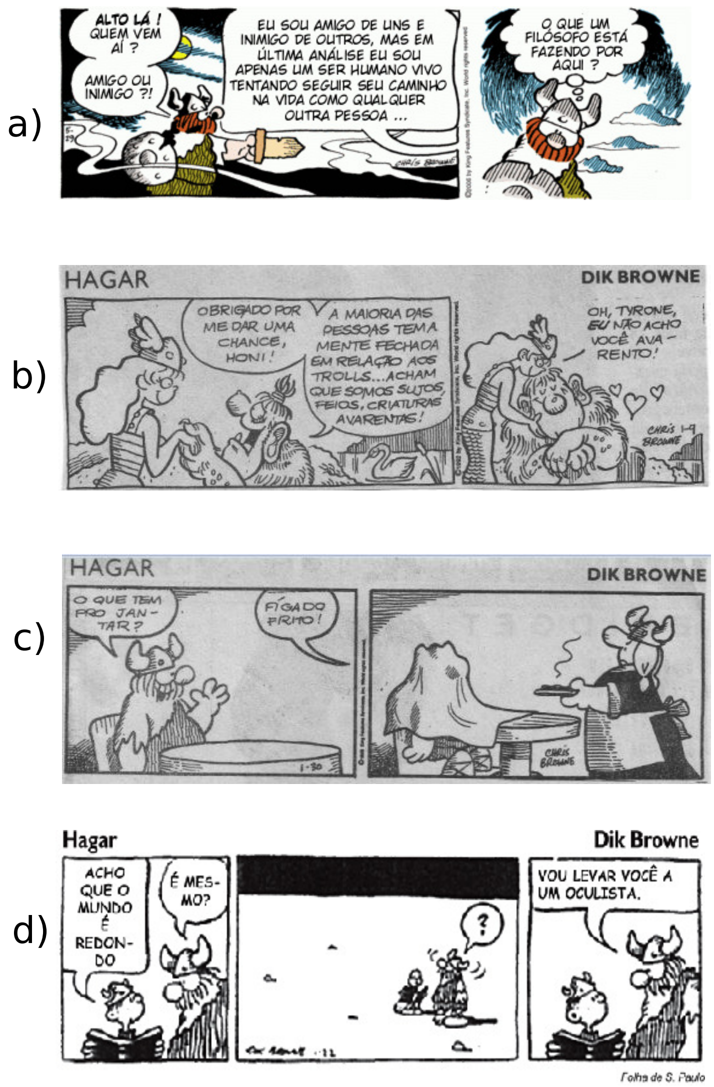

Figura 2.28: Racionalidade, Preferências e Crenças

2.2.4 Utilidade e Racionalidade

No item a) da figura anterior, o quê leva a Hagar concluir que o seu interlocutor é um filosófo? Somos seres pensantes (ao menos alguns de nós pensam ser), e ao pensarmos sobre a resposta fornecida ao questionamento feito por Hagar, exercemos a nossa capacidade de raciocinar e nos questionamos sobre o sentido de tal resposta e ao fazermos tal coisa, atingimos o objetivo básico da filosofia que é raciocinar (pensar). Então, a conclusão de tratar-se de um filosófo advém do fato de ter sido necessário pensar para compreender a sua resposta. E ao pensar agimos de forma racional, que seja, aplicamos nossa racionalidade.

No item b) o comportamento de Honi é racional ou não racional? Observemos que não houve constestação ao fato de ser sujo e feio, mas apenas afirmação que não é avarento, que seja, o mesmo é pródigo em agradá-la material e/ou economicamente. Portanto, ela está aumentando suas "posses" de alguma forma e podemos supor que este é o seu objetivo. Ou :

> "um pai ao jogar cartas com o filho, apostando alguns centavos, sendo o seu objetivo motivar o filho e aumentar sua auto-estima estaria agindo de forma racional ao não ser muito competitivo e não buscar a vitória sempre, mas sim aumentar seu (e do filho) bem-estar. Ou seria o mesmo pai, mais racional se tratar o filho como um adversário qualquer e buscasse sempre a vitória com o intuito de aumentar seus ganhos"(Davis, Morton D. Teoria dos Jogos : uma introdução não técnica, Cultrix, 1973, pag. 65, adaptado)

> "Um indivíduo que coletasse todas as informações relevantes sobre as decisões dos demais investidores, o comportamento das empresas e a situação do mercado de capitais, e a partir daí aplicasse seu dinheiro em ações de empresas com melhores perspectivas de ganho, estaria agindo tão ou mais racionalmente quanto um indivíduo que estivesse levantando informações acerca das formas mais eficientes de transferir seus fundos para a população de rua"(Fianni, Teoria dos Jogos, Campus, 2009, 21, adaptado)

No item c), há alguma dúvida que figado frito não é uma das maiores preferências de Hagar. E esta preferência condiciona uma ação sua. Podemos supor que sua esposa é consciente de tal preferência, em caso afirmativo, o que a levou a cozinhar tal prato? Seria uma punição, um castigo? Então a preferência de Hagar, também exerceu influência sobre a ação de Helga. Os apreciadores de "uma boa cerveja", possuem preferências especificas, digamos Budweiser ou Heineken, ao chegar em um estabelecimento, caso o mesmo não disponha delas pode chegar a retirar-se. Por outro lado o proprietário, ao constatar que determinada marca é a mais preferida pelos consumidores, naturalmente irá passar a adquirir mais desta marca.

Por último, mas não menos importante, no item c), vemos o relacionamento entre as nossas crenças e a percepção da realidade ao nosso redor. Esta questão de crença (acreditar em algo ou alguma coisa ou atitude/comportamento de outrem) foi abordada no exemplo 8 - Politica Monetária e a Independência do Banco Central. Imagine a seguinte situação : Eu e você, pretendemos roubar uma fazenda e sair com um boi multipremiado para vender a um receptador previamente acertado. Um de nós deve levar o animal, para o receptador, que o levará em um caminhão, e receber o dinheiro. Você, óbvio, promete dividir o fruto do nosso "trabalho" comigo. Entretanto, de que forma posso crêr que isso ocorrerá, afinal somos ladrões. E uma vez de posse do animal, o que impediria de ficar com o dinheiro todo, pois não posso queixar-me a polícia sem ir preso. Então, esta falta de crença, poderia ser superada instalando algum tipo de mecanismo que bloqueia o caminhão e alarma muito alto, e somente eu sei o código. Se tentar ir sem o caminhão para e o alarme soa e seremos pegos. Ou seja, a minha falta de crença, gera uma ação. Onde, novamente, percebemos mais uma váriavel que pode influenciar a tomada de decisões.

O que é racionalidade? Ou melhor, o que é um comportamento racional? Há diversas versões do que é racionalidade :

* *Significa tornar reflexivo, empregar o raciocínio para resolver problemas.Trata-se de uma operação mental complexa que consiste em estabelecer relações entre elementos dados*;

* *Faculdade de raciocinar*;

* *É a qualidade ou estado de ser sensato, com base em fatos ou razões.*

“Racionalidade"tem conotações diferentes e especializadas em diferentes aréas e ciências tais como a sociologia, psicologia, biologia evolutiva e ciência política. Existem versões mais exigentes que outras com respeito ao conteúdo de racionalidade.Que uma versão de racionalidade seja mais exigente que outra, significa que parte de presupostos mais restritivos sobre a forma que o agente (pessoas, governos, empresas, etc) toma suas decisões. Quanto mais exigente seja a definição de racionalidade, menos realista resulta. Por exemplo a idéia do filosófo David Hume que afirmou : "*A razão é a escrava das paixões*", ao explicar que a racionalidade é sobre meios, em vez de fins. Sendo esta noção a predominante no senso comum. Quando no nível do senso comum estamos falando da escolha racional, geralmente pensamos em uma escolha dos meios mais adequados para um determinado fim. Por exemplo, podemos dizer que é "racional" tratar a pneumonia com antibióticos modernos, porque estes foram desenvolvidos para serem altamente eficazes na realização do objetivo médico desejado; mas é "irracional", usar vários remédios populares tradicionais, porque estes não parecem produzir o resultado desejado. Ainda em termos de senso comum, o conceito de comportamento racional é muitas vezes um poderoso princípio explicativo, porque ele pode ser responsável por um grande número de fatos empíricos, possivelmente, complicados sobre o comportamento das pessoas em termos de metas (ou fins) que eles estão tentando alcançar. Por exemplo, uma longa sequência de ações complexas por parte do paciente, sua família e seu médico muitas vezes pode ser explicada em termos da simples hipótese que todas essas pessoas buscam a recuperação do paciente como seu objetivo (ou como um de seus objetivos).

A Teoria dos Jogos, por certo, possui sua própria noção do que venha a ser um comportamento racional. Para apresentar esta noção devemos relembrar que a Teoria dos Jogos lida com uma situação estratégica, a qual é descrita por um ambiente e as pessoas (jogadores) que interagem nesse ambiente. Assim, antes de prosseguir, vale a pena perguntar o que define uma pessoa para fins da Teoria dos Jogos. Se for solicitado para descrever alguém que conhece, possivelmente muitos detalhes viriam à sua mente, incluindo a personalidade da pessoa, inteligência, conhecimento, cor do cabelo, sexo, etnia, história familiar, filiação política, saúde, higiene, gostos musicais, e assim por diante. Mas, conforme sugerido na figura anterior, em Teoria dos Jogos, no entanto, podemos ignorar quase todos esses detalhes, porque, na maioria das situações, a compreensão ou o previsão do comportamento exige saber apenas duas características : *preferências* e *crenças.*

Que vem a ser *preferencias*?. Segundo Sanchez-Cuenca é : *Os desejos de cada pessoa de como gostaria que o mundo fosse.* . Extremamente filosófica esta definição, aventura-se a destrinchá-la?, mas definições a parte, a noção de preferências está ligado ao fato de "desejar/gostar" de um objeto mais do que outro objeto[27]. Afinal, entre ir ao dentista ou curtir uma piscina em um dia ensolarado, qual seria a sua *"preferência"*. Ou suponha que tenhamos três frutas : jaca, manga e banana, qual a sua preferência entre elas. Prefere a banana a manga, ou prefere jaca a banana e por aí vai. **Um pressuposto fundamental na Teoria dos Jogos é que uma pessoa pode sempre decidir**; isto é, quando confrontados com duas alternativas, é capaz de dizer de que (ou quem) gosta mais ou se acha-os igualmente atraentes. Ocorrendo apenas uma das três possibilidades. A isso denomina-se completude de preferências. No caso das frutas, a pessoa saberá dizer sempre se prefere uma fruta a outra ou se é indeferente às duas. Desta pessoa dizemos possuir preferências completas.

Imagine um menu simplificado de um restaurante contendo : (1) sanduiche de atum e (2) sanduiche de porco. Assim, existem quatro opções de escolha : comer nada, atum, porco ou ambos. Por exemplo, você escolhe o de atum, e não há nada de estranho nisso. Mas quando o garçon chega para anotar o seu pedido, ele diz que também tem sanduiche de queijo. O efeito desta informação é que agora você tem um menu de três itens de sanduiche : (1) atum, (2) porco e (3) queijo. Daí você muda de opinião e escolhe porco. De novo, não há nada de mais na sua escolha de porco. Mas claramente há alguma coisa de inapropriada no seu padrão de escolha : sua opção mudou quando o menu foi acrescido de um item que você não quer, o de queijo. Nesta situação, a adição de um item irrelevante (que você não quer) não deveria afetar a sua decisão. Não faz sentido mudar de opinião entre atum e porco porque apareceu a opção de queijo. Isso seria incoerente. Então as suas preferências não são coerentes.

Um outro tipo de incoerência ocorre quando, por exemplo, no caso das frutas, tendo de escolher entre jaca e manga prefira jaca e ao escolher entre manga e banana prefira manga. Espera-se que ao escolher entre jaca e banana prefira jaca, e afirmamos que as preferências são transitivas. Mas se preferir banana, dizemos que as preferências carecem de "coerência interna"ou seja, são intransitivas.

Tomemos uma situação, um pouco mais complexa, para avaliar a importância das preferências serem transitivas. O contrato de telefone celular atual expirou, e Kalazas está avaliando

[27] Onde objeto para a Teoria dos Jogos abrange desde jaca, cavalos, parentes, pessoas, produtos, filmes, enfim quase tudo

duas operadoras de telefonia celular : OI e VIVO. As empresas possuem diferenças de preços, planos e aparelhos telefonicos que oferecem. (Especialmente atraente é o suporte da Oi para o iPhone). Sendo Kalazas possuidor de preferências completas, isso significa que no contexto das operadoras de telefonia celular, prefere OI a VIVO, ou prefere VIVO a OI, ou é indiferente entre os dois planos. Se as suas preferências não forem transitivas e temos mais uma empresa : TIM. Por exemplo, se Kalasas prefere OI a TIM e TIM a VIVO, em seguida, VIVO a OI. Suas preferências seriam, então, como segue :

1. OI é melhor do que TIM.
2. TIM é melhor do que a VIVO.
3. VIVO é melhor do que a OI.

Vejamos qual problema surge para Kalasas com essas preferências. Se Kalasas começou examinando a OI e comparando-a com a TIM, decidiria que a OI é melhor. Então iria comparar a OI com a VIVO e pensa, "VIVO tem um negócio melhor."Mas, assim agora que está prestes a comprar o plano da VIVO, decide comparar com a TIM, e eis que, a TIM é melhor. Então retorna e compara TIM com a OI e voilá, mais uma vez, constata que a OI é melhor. E esse processo de comparação iria entrar em um ciclo infinito e Kalasas nunca iria decidir! Para descartar tais casos problemáticos, outro pressuposto da Teoria dos Jogos é que as **preferências são transitivas**.

Preferências são transitivas se, *sempre que a opção A é preferível a B e B é preferível a C, segue-se que A é preferível a C*

O problema com as preferências intransitivas vai muito além da possibilidade de ficar eternamente em dúvida : pode-se acabar quebrado! Suponha que João tem preferências intransitivas em que prefere A a B, B a C e C a A. Suponha também que você (leitor conhecedor da Teoria dos Jogos) possui o item A e João tem itens B e C. Você propõe a João que você vai dar-lhe A em troca de B e, uma quantia insignificante, digamos, um real. Agora, suponha que João prefere A suficiente a B de tal sorte que ele iria desistir de B e um real a fim de obter A. Então agora você tem B e um real, enquanto João tem A e C (e está um real mais pobre). Você, então, propõe dar-lhe B em troca de C e mais um real. Porque João prefere B a C, João faz a troca. Agora que você possui C e dois reais. O próximo passo é oferecer C em troca de A e um real. Desde que João prefere C a A ele novamente vai fazer a troca. Agora você tem A e três reais, está lembrado que começou com A e nenhum dinheiro. Se o leitor for suficientemente paciente para repetir o mesmo ciclo tantas vezes quantas forem necessárias, João acabará sem nenhum dinheiro. Esta negociação com João, é conhecida na literatura por *uma bomba de dinheiro!*. Essa é a triste vida de alguém cujas preferências não são transitivas, assim é oportuno guardar este "causo"e sempre ter as suas preferências transitivas!

Se as preferências são completas e transitivas, então há uma maneira de atribuir números[28] para todos os itens (preferências) possíveis, onde o número associado é conhecido como *Utilidade* de um item, de modo que as escolhas fundamentadas nas preferências possam ser representadas como sendo escolher o item com a maior utilidade. Reiterando a utilidade nada mais é que uma quantificação das preferências de uma pessoa especifica sobre itens especificos. Para ser mais concreto, suponha que há quatro operadoras de telefonia celular disponíveis para Kalasas : OI, CLARO, TIM e VIVO. Suas preferências são como se segue : OI é melhor do que CLARO. CLARO é melhor do que a TIM. TIM e VIVO são igualmente atraentes. Este conjunto de preferências implica a seguinte ordenação de planos : OI é a melhor, CLARO é a segunda melhor, TIM e VIVO estão empatadas em terceiro melhor. O próximo passo é assinalar o valor

[28]No capitulo 4 é apresentada uma demonstração formal, pois lá apresentamos a teoria da *Escolha Racional* com suas definições e demonstrações matemáticas

da utilidade para cada uma destas opções de forma que escolher o plano com o utilidade mais alta é equivalente a escolher o plano mais preferido. Tal atribuição de utilidades pode ser :

Utilidade Empresas conforme preferencias Kalasas

Planos	Utilidade
OI	10
CLARO	8
TIM	4
VIVO	4

Podemos agora descrever o comportamento de Kalasas, dizendo que sua escolha é aquela que produz maior utilidade. Se todos os quatro planos estão disponíveis em sua área, sabemos por suas preferencias que vai escolher a OI. Se dizemos que ele escolhe o plano com o utilidade mais alta, isso significa que escolhe OI, porque a **UTILIDADE** da OI é 10, que é maior do que 8 da CLARO e 4 seja da TIM ou da VIVO. Agora, suponha que OI a não está disponível na sua área, de forma que possa escolher apenas entre CLARO, TIM e VIVO. Em conformidade com suas preferências a CLARO é classificada como melhor que as outras duas, de modo que é dela que vai comprar. Escolhendo CLARO, é a escolha que maximiza a utilidade, pois 8 é maior que 4. Para assegurar que a escolha da opção com a maior utilidade seja equivalente a escolha da opção mais preferida, os números devem ser atribuídos de modo que a utilidade da opção A é seja maior do que a utilidade da opção B se e somente se A é mais preferido que B e a utilidade de A é igual à de B, se e somente se o indivíduo que escolhe é indiferente entre A e B. Note que não há uma maneira única de fazer isso. Ou seja, em vez de atribuir 10, 8, 4 e 4, teria funcionado tão bem ter utilizado 14, 12, 11 e 11 ou 4, 3, 0, e 0. Portanto, enquanto a utilidade é maior para itens mais preferidos, tudo estará bem.

A noção de Utilidade adotada na Teoria dos Jogos não é exatamente o conceito do senso comum. Todavia, não há nada profundo sobre o conceito de utilidade, na Teoria dos Jogos. A ideia é que as pessoas são dotados de preferências que descrevem como se classificam diferentes alternativas. Se as preferências são completas e transitivas, então há uma maneira para atribuir um número a cada alternativa que permite que o comportamento de uma pessoa possa ser descrito associado a fazer a escolha da utilidade mais alta.

Uma lista de opções e suas utilidades associadas, como a tabela das preferências de Kalasas, é conhecida como uma função de utilidade. A função de utilidade de uma pessoa capta todas as informações relevantes sobre as preferências da pessoa. Escrever as preferências de uma pessoa levanta a questão de onde elas vêm. Por que alguém prefere rock and roll à ópera? gatos aos cães? pizza a galinha?. As preferências poderiam ser determinadas por genes, cultura, produtos químicos, experiência pessoal, e quem sabe mais o quê. De onde as preferências vêm não nos diz respeito. Vamos nos contentar em levar preferências como dadas e explorar o que elas implicam sobre o comportamento. Em outros termos, *os agentes (os jogadores)* de uma *interação estratégica (jogo)* para a Teoria dos Jogos são elementos dados, não possuindo a teoria a capacidade (e provavelmente interesse) em exercer crítica nem sobre os jogadores nem sobre o próprio jogo. Nas Palavras de Binmore :

> "A Teoria dos Jogos é completamente neutra sobre o que motiva as pessoas. Assim como aritmética diz-lhe como adicionar 2 e 3 sem perguntar por que você precisa saber a resposta, então a Teoria dos Jogos diz-lhe como conseguir o que deseja sem perguntar por que você quer.[29]. Fazer julgamentos morais seja a favor ou contra - é essencial em uma sociedade civilizada, mas você tem que usar seu "chapéu" de ética e não o seu "chapéu"de

[29]Apenas, necessita saber suas preferências, impondo que as mesmas sejam completas e transitivas

> Teoria dos Jogos ao fazê-lo."(Binmore, Ken, Oxford, 2007, Playing For Real - A Text on Game Theory. pag 12. Tradução livre).

Assim, reforçamos que a *função de utilidade* é a **quantificação** das preferências de uma pessoa com relação a certos objetos. Na situação das frutas, anteriormente retratada, começamos por associar a cada fruta um número que especifica seu grau de atratividade (interesse/desejo/etc). Se a jaca é mais e banana é a menos atrativa, a utilidade da jaca será a maior e a da banana será a menor, e obviamente a da manga deve ser intermediária. Mas, a função de utilidade não se limita a frutas ou companhias de telefonia. Pode incluir tudo que abarque as preferências. Por exemplo, um sorteio cujos prêmios sejam frutas. Seja um sorteio em que há cinquenta por cento de possibilidade de ganhar jaca e vinte e cinco por cento de ganhar manga e vinte cinco por cento de ganhar banana e a este sorteio atribuimos utilidade 8. Se as utilidades da jaca, manga e banana, forem respectivamente, 10, 8 e 4, significa que é a jaca é preferível ao sorteio e o sorteio é preferível a banana e indiferente a manga. Existem algumas condições que seus idealizadores[30] impuseram às suas funções de utilidade, sendo uma delas que

> "...as mesmas devem ser acomodadas de tal modo que a utilidade de qualquer sorteio seja sempre igual à "média ponderada" da utilidade de seus prêmios"(Davis, Morton D., Teoria dos Jogos, Cultrix, 1977, pag. 68).

Na situação do nosso sorteio, temos que a probabilidade de ganhar jaca é de cinquenta porcento, então sendo sua utilidade de 10, cinquenta por cento corresponde a 5. Por sua vez, a probabilidade de ganhar manga é de vinte e cinco porcento e sua utilidade é de 8, logo vinte cinco por cento é 2, e sendo a probabilidade de ganhar banana também é vinte cinco porcento, e sendo sua utilidade 4, então vinte cinco porcento corresponde a 1. Temos que a utilidade do sorteio é 5+1+2=8.

Afirmar que a função de utilidade necessita atender a determinadas condições, na realidade implica que as preferências devem atender a condições que as tornem coerentes, não podendo existir um comportamento como o retratado na situação do restaurante. Na literatura são apresentadas diversas condições, que são em última análise equivalentes, sendo que as duas primeiras já foram apresentadas (completeza e transitividade) aqui seguiremos as adotadas por Davis (1977), que são :

1. *Tudo é suscetível de comparação.* Dados dois objetos, o jogador deve preferir um ao outro ou mostrar-se indiferente a ambos; não há dois objetos insucestíves de serem comparados;

2. *Preferência e Indeferença são transitivas.* Sendo A, B e C três objetos diferentes, se o jogador preferir A a B e B a C, ele preferirá A a C. Se jogador for indiferente a A e B e a B e C, será indiferente a A e C;

3. *Um jogador é indiferente diante de prêmios equivalentes.* Em um certo sorteio um prêmio é substituído por outro permanecendo as demais condições. Se o jogador for indiferente ao antigo e ao novo prêmio, ele será indiferente face aos sorteios. Se ele preferir um prêmio ao outro, ele preferirá o sorteio que ofereça o prêmio de maior preferência;

4. *O jogador sempre se arriscará se as possibilidades forem suficientemente boas.* Sejam três objetos A é preferido a B e B é preferido a C. Seja um sorteio em que haja probabilidade p de obter A e uma probabilidade *(1-p)* de obter C. Note-se que se p for zero, o sorteio será equivalente a C e que se p for igual à unidade, o sorteio será equivalente a A. No primeiro caso, o sorteio será preferível a B, enquanto que no segundo caso B será preferível ao sorteio. A condição 4 estabelece que existe um valor p, entre zero e um, que tornará o jogador indiferente, quando posto face a B e ao sorteio;

[30] Von Neuman e Morgenstein

5. *Um sorteio será tanto melhor quanto mais ampla a possibilidade de conseguir o prêmio.* Nos sorteios I e II, há dois prêmios possíveis, os objetos A e B. No sorteio I, a possibilidade de obter A é p. No sorteio II, a possibilidade de obter A é q. O objeto A é preferível ao objeto B. A condição 5 requer que se p for maior que q, o sorteio I seja preferido ao sorteio II; e inversamente, que, se o sorteio I for preferido ao sorteio II, p será maior que q;

6. *Os jogadores são indiferentes ao tipo de jogo.* A atitude de um jogador frente a um sorteio duplo depende apenas dos prêmios finais e da probabilidade de ganho, tal determinada pelas leis da probabilidade. Não importa o efetivo mecanismo do jogo.

Mas, uma vez que seja necessária (e útil)[31], a função de utilidade, como procedemos para determiná-la? De forma bem geral, pede-se que a pessoa da qual desejamos determinar as preferências faça muitas escolhas simples entre duas coisas (dois objetos), que podem ser frutas, companhias telefônicas, sorteios, sabores de sorvete, enfim tudo pode ser comparado. Pede-se a pessoa que diga se prefere jaca ou manga, se prefere manga ou banana, se prefere jaca ou banana. Ou ainda se prefere um talão de sorteio em que haja 2/3 de possibilidades de ganhar uma jaca e 1/3 de possibilidade de ganhar banana ou se prefere a certeza de ganhar manga. Se prefere sorvete de morango ou jaca, Se prefere a OI a jaca, etc. Confrontada com estes questionamentos a pessoa deve expressar preferência por umas opções ou deixar clara a sua indiferença. Com base nestas escolhas simples estabelecer uma função de utilidade única que atribua um número às frutas, as companhias telefônicas, aos sabores e ao sorteio. Desta forma, colocamos objetos diferentes, companhias telefônicas, frutas, sabores de sorvete e sorteios, em uma mesma dimensão, na qual podem ser comparados entre si e entre outros objetos. tal dimensão é a : UTILIDADE.

Mas :

> "Deve-se entender que ao longo do processo de estabelecimento da função de utilidade nada se acrescenta; a ordenação final está implicita nas escolhas simples anteriormente feitas. É, contudo, enorme a vantagem prática de contar com uma função de utilidade concisa em vez de preferêncis individuais numerosas."(Davis, Morton D., Teoria dos Jogos : uma introdução não técnica, Cultrix, 1977, pag. 72).

Pensaram que havia esquecido das crenças, não é mesmo. Engaram-se! Em muitas situações, a utilidade de um objeto que é atribuída por uma pessoa não depende apenas das escolhas que a pessoa faz, mas também das escolhas dos outros. Por exemplo, muitas companhias de telefonia celular projetaram seus planos para criar uma interdependência entre as escolhas que as pessoas fazem. Para a maioria dos planos, o preço cobrado por minuto é mais baixo se você estiver chamando alguém na mesma rede (ou seja, alguém que tenha escolhido a mesma operadora) do que se você estiver chamando alguém em outra rede. Significa que o melhor fornecedor para alguém pode muito bem depender dos fornecedores usados pelas pessoas a quem chama.

Com isto em mente, considere que Kalasas deve decidir sobre um plano de telefone celular, sabendo que passa a maior parte de seu tempo chamando sua melhor amiga e esposa Linda. Embora Kalasas realmente goste da OI (porque pode ter um iPhone), é mais crítico para ele escolher a mesma rede que Linda. Natural, então que os maiores valores para a utilidade que Kalasas atribui a cada operadora ocorram quando as preferências de Kalasas e Linda sejam as mesmas, ou seja, quando escolhem juntos a mesma operadora. Ressaltemos, que de forma pouco real, estamos supondo que Kalasas efetivamente não sabe as escolhas que a esposa fará, podendo apenas formular crenças a cerca do seu comportamento. A função de utilidade consistente com essas preferências para Kalasas é mostrada na tabela a seguir :

[31] não pude resistir ao jogo de palavras

Preferencias (Utilidade) Kalasas de acordo escolha Linda

Operadora	Operadora	Utilidade
OI	OI	10
OI	CLARO	5
OI	TIM	3
OI	VIVO	3
CLARO	CLARO	8
CLARO	OI	4
CLARO	TIM	2
CLARO	VIVO	2
TIM	TIM	6
TIM	VIV0	4
TIM	CLARO	3
TIM	OI	2
VIVO	VIVO	7
VIVO	OI	1
VIVO	CLARO	1
VIVO	TIM	3

Note-se que a maior preferência de Kalasas é sempre a operadora que Linda escolhe. Se Linda escolhe OI, assim, OI é quem tem maior utilidade para Kalasas. Se Linda escolhe CLARO, resulta, que a CLARO é a operadora que maximiza a utilidade para Kalasas. Dado que Kalasas realmente gosta (prefere) da OI, sua maior utilidade vem quando ambos escolhem a OI.

Para fazer a melhor escolha, Kalasas precisa formar crenças a respeito de quem Linda planeja escolher. Esta condição nos leva ao segundo atributo pessoal chave que é relevante para a Teoria dos Jogos : a capacidade de uma pessoa para formar crenças quanto ao que outros farão. Enquanto vamos supor que as pessoas são dotadas de preferências, tais como as descritas na tabela de preferências de Kalasas, elas não são dotados com as crenças. Na verdade, uma das principais funções da Teoria dos Jogos é derivar crenças razoáveis em relaçao ao que os outros jogadores irão fazer.

Existem basicamente duas formas a partir da qual essas crenças possam surgir. Em uma delas, a mais comum, adotada por quase todas as pessoas de forma consciente ou não, consiste simplesmente na experiência, o que é referido na literatura como aprendizagem experiencial. Ao interagir de novo e de novo com uma outra pessoa espera-se com ou sem razão, que esta pessoa repita o que ele fez no passado. E assim formamos nossas crenças a cerca do pensamento/comportamento desta pessoa. Este processo tem grande universalidade, uma vez que pode ser praticado por crianças pequenas e muitas espécies do reino animal.

O outro processo, considerado por alguns especialistas de inteligente, para formar crenças é chamado introspecção simulada. Introspecção é o exame dos próprios pensamentos e sentimentos, enquanto em introspecção simulada uma pessoa está simulando o processo introspectivo de outra pessoa, a fim de descobrir o que esse indivíduo vai fazer. A introspecção simulada é algo sutil e simultaneamente complexo. Para ter a capacidade de simular as razões do outro, uma pessoa deve ter auto-consciência, o que significa estar consciente da sua própria existência. Isto é, não é suficiente pensar; uma pessoa deve ser capaz de pensar sobre o pensar. Confesso que é algo abstrato, que somente com a prática e utilizando técnicas e métodos da psicologia torna-se mais palpável. Para os fins deste trabalho, as crenças serão tratadas como elementos dados. Não sendo necessario nos preocuparmos com a forma que foram obtidas/concebidas. Bem, uma vez apresentada as preferências e por conseguinte as suas utilidades, tem-se que na Teoria dos Jogos racionalidade, ou melhor, *comportamento racional* **é quando um agente (jogador) atua em função das suas preferências**. Significando que o agente age buscando o melhor frente ao pior. Sendo denominadado de comportamento *auto-interessado*.Em sintese, irracionalidade é interpretada de várias formas e as pessoas, no senso comum, relacionam com emoção ao contrastar a racionalidade ligada a razão. Mas, para a Teoria dos Jogos, com efeito relacionado a um padrões de escolhas, irracional é o comportamento incoerente, inconsistente ou ilógico a um padrão de preferências. Como a situação retratada no restaurante, em que a inclusão de um item não desejado (sanduíche de queijo), alterou o pedido. Irracionalidade não é associada com emoção, intuição ou tomar uma decisão rápida sem pensar. A uma confusão no pensamento das pessoas não conhecedores da Teoria dos Jogos em que associa *comportamento auto-interessado* como sinônimo de *egoísmo*. Ou pior, que racionalidade é sinômino de motivação egoísta. Entretanto :

> "Comportamento auto-interessado não implica necessariamente comportamento egoísta. O agente pode ser egoísta, no sentido que apenas preocupe-se com seu bem-estar, mas pode ser também altruísta (ou invejoso), no sentido que além do seu próprio bem-estar preocupa-se também com bem-estar dos demais. Se o agente tem preferências acerca do bem-estar dos demais, segue sendo auto-interessado, pois atua, todavia, em função das suas preferências. O altruísta alegra-se que os demais melhorem suas condições, entrementes, o invejoso lamenta-se"(Cuenca-Sachez, Teoria de Juegos, 2009, Cuadernos Metodológicos, pag. 33, tradução livre)

Para Teoria dos Jogos racionalidade relaciona-se com os *meios* que os agentes adotam para alcançar seus *fins* e não com os *fins* em si mesmos. Pois, a análise dos fins pressupões padrões morais, sociáis e/ou éticos. Todavia, a Teoria dos Jogos não pode (e nem se propõe) a oferecer nenhum padrão ético. Acaso tenham esquecido, a Teoria dos Jogos considera os *jogadores e sua interação estratégia* **dados**, assim não pode (e nem pretende) realizar análises morais ou éticas sobre os jogadores. Não quer dizer que a Teoria dos Jogos imagina que todos são "bonzinhos", nem "mauzinhos", ela tenta modelar a realidade da situação apresentada. Porquanto, a Teoria dos Jogos, em seus pressupostos, não assume que os jogadores são necessariamente egoístas. Ainda que dois jogadores (João e Maria) sejam modelados como sendo avidos por dinheiro, quem pode dizer por que eles querem o dinheiro? Talvez eles planejem aliviar o sofrimento dos pobres e necessitados. A teoria, descarta qualquer tentativa de explicar por que João e Maria se comportam como eles fazem. Em vez de uma teoria explicativa, contenta-se com uma teoria descritiva. Logo :

> "... A hipótese de jogadores que buscam o máximo de benefício, sem se importarem com o prejuízo que isso possa causar aos outros[32] (sendo que, em alguns caso, o máximo de benefício para si significa justamente o máximo de prejuízo para os outros, é em geral adotada em *modelos de competição* econômica e política, em que há fortes razões para acreditar que ese é realmente o objetivo de cada jogador. Portanto, a definição do objetivo do jogador como egoísta, ou altruísta, depende da natureza do processo de interação em que os jogadores estão envolvidos, assim como dos objetivos que o analista acredita que eses jogadores buscam. **Nada tem a ver com o fato de serem, ou não, "racionais"** "(Fianni, Teoria dos Jogos, Campus, 2009, 22)

Os críticos da Teoria dos Jogos dizem que a mesma erra (falha) em assumir que as pessoas se preocupam apenas com dinheiro, pessoas reais se preocupam com todos os outros tipos de outras

[32]mais egoísta que isso impossível

coisas imaginavéis (alguns inimaginavéis). Em particular, se preocupam com outras pessoas e com a comunidade em que vivem. Mas, novamente reiteramos, a Teoria dos Jogos não assume nada sobre o que as pessoas querem. Tem a pretensão, sim nada modesta, de dizer apenas o que devem fazer se querem maximizar seus retornos, estes "medidos"por suas preferências as quais são quantificadas através das funções de utilidade. Ela não diz que o retorno de um jogador é necessariamente o dinheiro que encontra milagrosamente o caminho para seu bolso. Os teóricos do jogo compreendem perfeitamente que dinheiro não é a única coisa que motiva as pessoas. Também nos apaixonamos e votamos nas eleições. Alguns, principiantes, até mesmo escrevem monografias que nunca vão lhe trazer algum dinheiro (nem para cobrir o custo e o tempo de escrevê-la).

A Teoria dos Jogos lida com indivíduos que racionalmente exercem o seu próprio auto-interesse (e assim incorporando todos os seus valores, tanto egoístas e altruístas, para o quais a sua função de utilidade atribui algum valor) contra outros indivíduos que também de forma racional atuam em seu próprio auto-interesse (e que também incorporam todos os seus outros valores, os quais são incluídos em suas próprias funções de utilidade). Podemos afirmar que o objetivo central da teoria dos Jogos é a busca racional do interesse próprio (englobando os valores pessoais) contra outros indivíduos racionais que perseguem seus próprios interesses (com seus próprios valores pessoais).

A teória dos jogos, por padrão, está interessada em orientar como as pessoas racionais vão jogar os jogos, sempre que possível, sugeririndo alternativas para obtenção de um retorno o maior possível ou a minimização de eventuais perdas. Entretanto, um dos principais problemas é que um jogador geralmente não sabe o que o outro jogador vai fazer. Para prever o que ele vai fazer em um jogo, temos de assumir que ele é suficientemente racional que as escolhas que ele faz em um jogo são consistentes com as escolhas que ele faz na resolução de problemas decisão simples de uma só pessoa. Um exemplo para clarear. Professor Pardal, um teórico dos jogos famoso, com um guarda-chuva ainda mais famoso. Ele sempre o carrega em dias de chuva, e também sempre o carrega em dias de sol. Mas vai levá-lo amanhã? Se o seu comportamento no futuro é consistente com o seu comportamento no passado, então, obviamente, ele vai. O fato de não sabermos se amanhã será chuvoso ou ensolarado é irrelevante para o comportamento do Professor Pardal. Sendo esta a suposição chave nas analises que realizaremos no proximo capitulo, a qual podemos sintetizar da seguinte forma :**"Se um tomador de decisão (jogador) prefere a opção 1 sobre a opção 2 quando o evento A ocorre, e ele prefere a opção 1 sobre a opção 2, quando o evento A não ocorre, então ele deve preferir a opção 1 sobre a opção 2, mesmo antes de descobrir se o evento A ocorrerá ou não.**

Figura 2.29: Racionalidade ou Irracionalidade

Para encerrar esta seção, após o que foi exposto como classificaria o comportamento de Hagar, na tirinha acima : Racional ou Irracional? E, principalmente, sob que argumento?

2.3 Considerações e Reconsiderações

Figura 2.30: Argumentação e Fatos

Prezado leitor fostes apresentado à Teoria dos Jogos, com seus termos, definições e interpretações, mas nenhuma apresentação é suficiente para nos tornarmos conhecedor de algo ou alguém é necessário o convívio, a familiaridade, enfim por assim dizer a rotina. Não desejamos agir como Hagar, impondo simplesmente nosso pensamento, estamos apresentando uma teoria nova (sim nova, foi há menos de um século a publicação da obra seminal de von Neuman e Morgertern) e em uma apresentação, a primeira impressão pode ser impactante, mas está sempre aberta a novos olhares, a percepção de detalhes que podem ter nos escapado, impressões e/ou conclusões que poderiam ser equivocadas. Nesta seção é uma tentativa de desfazer possíveis enganos ou equivocos a que o leitor possa ter sido induzido por nós, por nossa pouca habilidade literária. Dito isto vamos em frente.

2.3.1 Nem só de clássicos vive a Teoria dos Jogos

Figura 2.31: Descendência

Em todos os exemplos e situações tratadas estava atendendo-se alguma necessidade (desejo, vontade, etc) e lembrando-se que a economia estuda a relação entre recursos e nossas necessidades (que segundo a economia são infinitas), logo desta perspectiva é que a Teoria dos Jogos apresentada é denominada *Teorica Econômica dos Jogos*, também chamada de *Teoria Clássica dos Jogos*, onde procura-se estabelecer métodos matemáticos para a maximização do retorno (ganho ou pagamento). Entretanto, esta não é a única vertente da Teoria dos Jogos, pode-se dizer que a mesma possui diversos filhos, sendo uma grande disciplina dentro da *Matemática Aplicada* que influencia e é influenciada pela Investigação Operacional, Economia, Teoria de Controle, Ciência da Computação, Psicologia, Biologia e Sociologia (para citar algumas disciplinas). Podendo ser classificada em mais três sub-categorias principais :

1. Teoria Combinatória dos Jogos;
2. Teoria dos Jogos Dinâmica (ou Diferencial);
3. Outros tópicos em Teoria dos Jogos. Aqui abarca os temas que são derivados a partir dos três outros ramos. Exemplos incluem, mas não estão limitados a :
   (i) Teoria dos Jogos Evolucionária, que tenta modelar a evolução como competição entre as espécies;
   (ii) Jogos Duais, em que os jogadores podem escolher a partir de um número infinito de estratégias, mas o tempo não é um fator;
   (iii) Teoria dos Jogos Experimental, onde as pessoas são estudados para determinar verdadeiramente a precisão dos modelos da Teoria dos Jogos clássica.

A Teoria dos Jogos Combinatória centra-se em jogos de duas pessoas, onde os jogadores alternam-se nas jogadas, não considera os ditos jogos de azar, ou seja, não incorpora nenhum tipo de aleatoriedade, não admitindo a existência de acasos, muito menos a possibilidade de incertezas. Seu objetivo é determinar a melhor jogada. É usada para investigar jogos como xadrez, damas ou Go. De todos os ramos, Combinatória é o menos diretamente relacionado com cenários da vida real. Para tornar mais palpável sua utilização vejamos um exemplo.

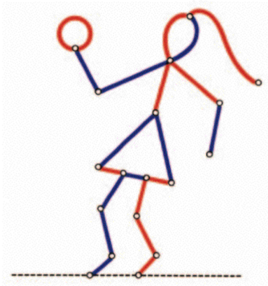

Figura 2.32: Jogo da Eliminação

Seja um jogo de eliminação jogado com uma imagem como a da figura 30. Chamaremos os dois jogadores de A e B. o jogador A mover significa a exclusão de qualquer borda azul, juntamente com quaisquer arestas (sejam azuis ou vermelhas) que não estejam ligadas à terra (que é a linha pontilhada na figura), e B mover é a exclusão de uma borda vermelha, juntamente com quaisquer arestas que não estejam ligadas à terra. Muito em breve, um dos jogadores vai descobrir que ele não pode se mover, porque não existem arestas da sua cor no que resta da imagem, ou simplesmente na sua vez de jogar não há mais imagem, e o primeiro preso dessa forma é o perdedor. Bem, o que pode-se fazer sobre isso? Para nós, incipientes no jogo, provavelmente fosse uma boa idéia parar, sentar e analisar algumas jogadas em primeiro lugar, para se certificar de que compreendemos muito bem as regras do jogo. Supondo que o jogador A pode mover-se em primeiro lugar, e apagar o pé esquerdo da menina, mas isto deixaria o resto do corpo apoiado sobre a perna direita que está em contato com a terra e B, venceria o jogo, afinal poderia apagar toda a garota simplesmente deletando a perna direita, pois as demais arestas não possuem mais contato com a terra, e A não teria mais nenhuma aresta para apagar. Não parecendo ser então um bom começo para A. Todavia, há outras arestas que realmente podem desaparecer e ainda manter a menina em contato com a terra, A poderia usar seu primeiro movimento para remover o braço da menina, quando o resto do seu braço e a maçã também desapareceriam, e desta forma as demais arestas ainda teriam as duas pernas em contato com a terra. Agora, que aparentemente, entendemos as regras, e queremos ganhar, pensar na figura 32 pode ser um pouco difícil para os principiantes, então vamos olhar para figura 33.

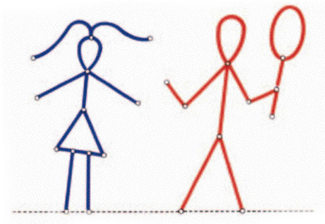

Figura 2.33: Menina Azul e Menino Vermelho

Na qual as arestas azuis e vermelhas estão separadas em peças que não podem interagir. Claramente a menina pertence a A, em certo sentido, e o menino a B, e os dois jogadores vão alternadamente excluir bordas de suas pessoas. Desde que a menina que tem mais bordas, A pode sobreviver mais tempo do que B, e pode, portanto, ganhar, não importa quem começa. Na verdade, uma vez que a menina tem 14 arestas (bordas) e o menino 11, o jogador A termina com pelo menos 14-11 = 3 movimentos de vantagem (reposição).

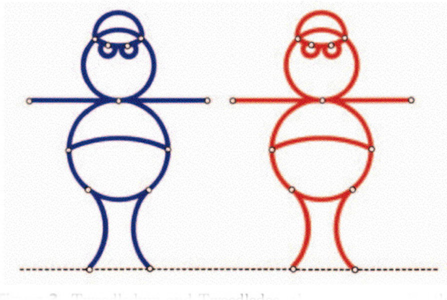

Figura 2.34: Cosme e Damião Unicolor

Na figura 34, os nossos personagens serão denominadas por nós de Cosme e Damião, pois semelhante a gemêos são muito parecidos, mas não são extamente iguais, as imagens possuem o mesmo número de arestas cada uma, de modo que A, possui $19 - 19 = 0$ movimentos de vantagem. O que isto significa? Se A começa, e ambos os jogadores jogam de forma sensata, eliminando arestas de cima para baixo, os movimentos serão alternados A, B, A, B, até que cada jogador fez 19 jogadas, e será a vez de A se mover quando nenhuma aresta permanece. Então, se A começa, perde, e da mesma forma B começa, perde. Então, nesta posição inicial, ou posição zero, quem começa perde.

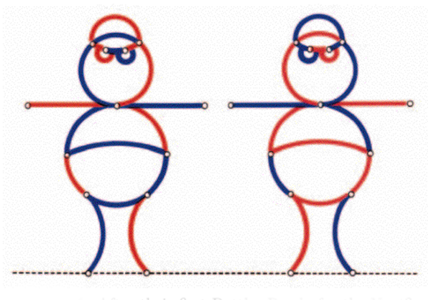

Figura 2.35: Cosme e Damião Multicolor

Na figura 35, trocamos algumas arestas de modo que ambos, agora, possuem algumas arestas de cada cor. Mas dado que obtivemos o novo Cosme e o novo Damião trocando exatamente uma aresta azul com uma vermelha, nenhum jogador parece ter qualquer vantagem. É a figura 35 ainda uma posição zero no mesmo sentido que quem começa é quem perde? Sim, pois o segundo jogador a mover pode copiar qualquer um dos movimentos de seu oponente, simplesmente cortando a borda correspondente do outro gêmeo. Se ele faz isso durante todo o jogo, tem a certeza de ganhar, porque ele nunca ficará sem um movimento disponível. Dentro da Teoria dos Jogos combinatória, este comportamento de "copiar" o comportamento do adversário é denominada estratégia dos gemêos, de cópia ou Cosme e Damião. Portanto, apresentamos uma pequena amostra das idéias desenvolvidas em Teoria dos Jogos combinatória.

A Teoria dos Jogos Dinâmica ou Diferencial Foca na análise dos jogos em que os jogadores devem tomar decisões ao longo do tempo e essas decisões afetam o resultado no próximo momento no tempo. Assentado-se, conforme o nome sugere, em equações diferenciais para modelar o comportamento dos jogadores ao longo do tempo. Sendo utilizada para ajudar a otimizar o comportamento dos veículos não tripulados, ou no futebol, um torpedo perseguindo um navio, um míssil de intercepção de uma aeronave, um artilheiro que protege um alvo contra um invasor, são modelos típicos de jogos diferenciais. Os jogadores fazem as suas decisões por meio da escolha dos valores de certas variáveis de controle. Estas, por sua vez, governam os valores de algumas outras quantidades chamadas variáveis de estado. E, por sua vez, estas últimas são tais que, se os seus valores são conhecidos, em qualquer instante, o estado atual do jogo é totalmente determinado deste modo. Para ser claro, vamos declarar este conceito em três formas equivalentes. As variáveis de estado devem desfrutar das propriedades :

1. Os seus valores devem ser conhecidos no início, a fim de determinar a resultado de um jogo;

2. Elas são exatamente os valores que são relevantes a cada instante a um jogador na tomada de decisões sobre a forma de jogar;

3. Se um jogador teve de ser substituído durante um jogo, as informações que são necessários para retomar o jogo são apenas os valores atuais das variáveis de estado.

Os valores atuais das variáveis de estado são sempre conhecidos por ambos os jogadores; assim, trata-se apenas jogos com informações completas. Sendo essa talvez a maior limitação na teoria, especialmente no domínio da estratégia militar.

As variáveis de estado devem ser quantidades (para ambos os lados) que sejam indicativas do estado atual das coisas relevantes para o modelo selecionado, que deve necessariamente ser uma versão simplificada da realidade. Estas irão incluir itens como número de homens, aviões, tanques, navios e outras munições, possivelmente subdivididos por imputação a diferentes setores ou por classificação em diferentes tipos, o número de quilometros avançados por uma frente, e assim por diante. No capitulo 1 mencionamos a situação da perseguição naval, estão lembrados, ela enquadra-se bem no objeto de estudo da teoria dinâmica. Vamos generalizar denominando de jogo da perseguição onde temos o *Caçador* e a *Presa*. Assim, sejam dois indivíduos um caçador C e uma presa P, cada um deles se movendo com velocidade constante v_C e v_P. O caçador deseja minimizar o tempo de captura. Por outro lado, a presa tem em vista impedir de ser alcançado, se possıvel, ou, ao menos, maximizar o tempo de captura. Uma forma de avaliarmos a performance de cada um dos jogadores é estabelecermos uma função de pagamento. O jogo começando no instante digamos t = 5. Se o caçador alcança a presa em t= 16, obtém digamos uma recompensa de t = 11, se não alcança obtém uma recompensa de t = 0. De forma geral, a função de ganho pode ser indicado por $G_{t_0}(t) = t - t_0$. Onde, obviamente o caçador tentará minimizar e a presa maximizar. Todavia, a noção de alcançar ou capturar é vaga, para precisar, podemos definir captura por coincidência, quando estão na mesma posição, ou tambem posssível que seja, baseada em proximidade, quer dizer quando a distância entre eles seja menor que um certo valor. De qualquer maneira, observa-se que o problema envolve a maximização ou minimização de uma função, sendo este problema muito bem tratado através da análise diferencial. Por ser assunto além do escopo deste trabalho encerramos neste ponto a discussão sobre este tópico da Teoria dos Jogos, os interessados podem encontrar nas referências obras que tratam do assunto de forma mais abrangente e detalhada.

Outros Tópicos, a diversidade de aplicações da Teoria dos Jogos é impressionante, mas inegavelmente a que chama mais a atenção é a relacionada com aplicações biologicas, que seja a denominada *Teoria dos Jogos Evolutiva*. No capitulo 1, tivemos a oportunidade apresentar um exemplo extraído de Darwin, antes mesmo da teoria existir formalmente, os seus argumentos já eram presentes. Duas características inovadoras distingue a teoria jogos evolutiva da teoria clássica dos jogos. Na teoria evolucionária, organismos (os jogadores) herdam, em vez de escolher suas estratégias e as recompensas determinam diretamente a dinâmica que regem mudanças temporais nas frequências de estratégia, em termos da teoria clássica, determinam as estratégias mistas. O marco fundamental da teoria evolutiva foi o livro *Evolution and theory of Games* publicado em 1982, por *John Maynard Smith* (1920-2004), biológo, professor emérito da Universidade de Sussex. Um jogo evolucionário enquadra-se dentro do domínio da evolução darwiniana. Como a teoria clássica, a teoria evolutiva tem jogadores, estratégias, conjuntos de estratégia, e retornos. Os jogadores são os organismos individuais, em qualquer nível de organização biológica que manifesta pagamentos/retornos separados e estratégias distintas. Sob o ponto de vista da herança mendeliana, genes individuais não podem ser os jogadores, porque as suas recompensas esperadas são a mesmas que a de todo o organismo. No entanto, quando se estuda as consequências evolutivas de fenômenos como a unidade da meiose, genes individuais podem ser jogadores e ter retornos "pessoais" divergentes de outros genes dentro do organismo. Da mesma forma, como simbioses (por exemplo, líquens) ou estruturas sociais (insetos sociais) podem não ser jogadores individuais, os organismos individuais podem deixar de ser jogadores separados. A relação simbiótica resultante ou supra-organismo pode se tornar o jogador que manifesta a estratégia e recebe a recompensa. Na verdade, a presença ou ausência de um objetivo individual dentro de uma rede social forte pode fornecer os melhores meios para definir e separar sistemas sociais que são altamente despótico (indivíduos retem objetivos pessoais e estratégias dentro de um contexto social) versus o eu social. Por exemplo, a busca e a exploração de recursos alimentares das formigas apoia a noção de um supra-organismo. Formigas parecem subordinar completamente quaisquer objetivos individuais para o bem do grupo. Por outro lado, a busca e a exploração de recursos alimentares das hienas demonstra agendas individuais dentro de um grupo social coeso. Com os jogos evolutivos, pode-se atribuir estratégias e pagamentos para a colônia de formigas, enquanto atribui-se estratégias e pagamentos para as hienas individualmente dentro de um bando. Dependendo das circunstâncias, os jogadores que possuem estratégias e pagamentos podem ser uma colônia de formigas, uma hiena individual ou uma célula.

Um questionamento natural é como pensar em racionalidade para seres irracionais ou mesmo para genes. Esta questão implica em uma mudança de paradigma, que nas palavras de Maynard significam que :

> "... a hipótese central da Teoria dos Jogos clássica é que os jogadores irão se comportar de forma racional, e de acordo com algum critério de auto-interesse. Tal suposição seria claramente absurda em um contexto evolutivo. Em vez disso, o critério de racionalidade é substituído pela dinâmica e estabilidade populacional, e o critério de auto-interesse pela aptidão/adaptabilidade darwiniana. "(Smith, John Maynard, Evolution and Theory of Games, 1982, Cambridge University Press, pag. 02)

Na teoria clássica dos jogos, os jogadores têm um conjunto de estratégia a partir do qual escolhem estratégias particulares. Na teoria evolutiva, espécies têm conjuntos de estratégia, que são as variantes genotípicas, dos quais os indivíduos herdam uma ou outra variante (talvez mutante), que, em seguida, utilizam (jogam) em suas interações estratégicas. Este raciocínio estende-se muito bem para o tratamento de cultura na sociedade humana. Nós dizemos que a sociedade tem a estratégia definida (o conjunto de formas culturais alternativos), e os indivíduos herdam ou escolhem entre elas. Para ilustrar as idéias apresentadas seguem exemplos extraídos da literatura :

> "Considere a ereção num macho. Por que será que a evolução escolheu um mecanismo tão trabalhoso para que um pênis fique em condições de penetrar uma fêmea? Por que não

um osso, tão mais simples (e comum em outras espécies) em vez desse complicado processo hidráulico, com sangue sendo bombeado em alta pressão? A utilidade – o objetivo de um jogador, lembra? – para os seres vivos é a propagação de seus genes. Machos em todos os contextos biológicos têm uma inclinação maior para trapacear no jogo do sexo, por uma questão de economia : óvulos são raros, espermatozóides são abundantes. Machos simplesmente não perdem nada – ou perdem muito pouco – sendo promíscuos : copulando com o maior número possível de fêmeas, eles maximizam as chances de propagar os próprios genes. O esperma gasto é rapidamente substituído. Fêmeas, ao contrário, têm muito a perder se entregarem seus preciosos óvulos para qualquer um fecundar. Perdem tempo e energia – se gerarem crias doentes, por exemplo. Perdem também a possibilidade de gerar outras crias no período da gestação. O conflito de interesses é evidente no jogo do sexo. Enquanto os machos aprenderam formas mais elaboradas de "propaganda enganosa" – prometer e não cumprir, aparentar sem ser –, as fêmeas tornaram-se progressivamente melhores na detecção dessas fraudes e reagiram utilizando sua arma mais letal : negando a cópula. Isso forçou a mudança de comportamento dos machos. Eles tiveram que se provar verdadeiramente dignos de copular com determinada fêmea. É aí que entra – sem duplo sentido – a ereção. Por meio dela, o macho está dizendo : "Pode copular comigo, eu sou saudável. Não corro risco de gerar crias doentes. Machos doentes não têm ereção". É impossível trapacear nesse campo. Um pênis flácido não pode fingir estar ereto. Assim como as emoções, outro equipamento humano, mostra com clareza o que as palavras poderiam tentar esconder."(Superinteressante, edição 175, Abril de 2002, disponível em http ://super.abril.com.br/ciencia/tudo-esta-em-jogo, acessado em 24 de junho de 2016)

"Em um universo onde o aumento da desordem é uma lei física, organismos complexos (incluindo os seres humanos e, mais amplamente falando, organizações sociais) podem persistir somente se eles se comportam de uma forma que tende a aumentar a sua probabilidade de sobreviver e reproduzir-se. Assim, um argumento de seleção evolucionária sugere que os indivíduos tendem a maximizar o valor esperado de alguma medida de sobrevivência geral e aptidão reprodutiva "(Myerson, Roger B., Game Theory : Analysis of Conflit, Harvard University Press, 1991)

2.3.2 Relevante ou não Relevante : Eis a questão

Os jogos são modelos da realidade, porquanto por sua própria natureza, não podem conter todos os elementos da mesma, pois se os contivesse não seria um modelo, mas a realidade em si. É necessário delimitar os aspectos relevantes, assim surge a natural questão do que é relevante, em outros termos, como determinar o que realmente é significativo para o modelo em questão, para tornar o modelo verossímel e efeciente[33]. Exemplificando, vejamos uma das mais bem-sucedidas abstrações da física, a teoria gravitacional. Sejam os planetas, as estrelas, os cometas, enfim os corpos celestes que compõem o que denominamos por *Sistema Solar*, vamos supor que podemos, a fim de estudar seus movimentos, substituir cada um deles por um ponto; que cada ponto possui uma massa igual à do corpo que substitui; que cada par de pontos experimenta uma atração mútua; que podemos estimar esta força atrativa multiplicando a massa de um ponto e a massa do outro ponto, e após dividir esse produto pelo quadrado da distância entre os pontos; que podemos negligenciar tudo mais. Em uma primeira análise não nos parece extremamente irreal e que de certo modo patentemente estúpido para considerarmos esta teoria de forma séria. Entretanto, é fato a *Teoria da Gravitação*, conforme apresentada, tem sido adequada para prever os movimentos dos planetas por mais de dois séculos, e isto com uma verificação constante por astrônomos, com tecnologias cada vez mais precisas, veja o Hubble, os quais são razoavelmente precisos. Mas, ainda assim, existem falhas, que necssitam de aprimoramento. O pior caso veio da órbita de Mercúrio, que inexplicavelmente se desviou do

[33]Por eficiente entenda que o modelo seja capaz de explicar fenômenos conhecidos e capaz de predizer alguns ainda não percebidos

lugar previsto. Entretanto a teoria melhorada, por Einstein, consegue explicar essa discrepância e muitas outras da teoria gravitacional claśsica.

Figura 2.36: Escolhas e Opções

Por tratar de situações de conflito entre dois ou mais jogadores um elemento essencial é a quantidade de jogadores. Para Teoria dos Jogos existem três quantidades significativas de jogadores : Um, dois ou mais de dois jogadores com um conjunto distinto de interesses. Os jogos de uma pessoa, não são efetivamente tratados, pois afinal não existe um conflito a ser analisado. Aqui, há um ponto fundamental, a quantidade de jogadores está intimamente relacionada com os interesses. Pois, suponhamos que a Heineken, a Budweiser resolvam ingressar no mercado brasileiro de refrigerantes e decidem formar um grupo denominado de Budneikem, para competir com os já existentes (Schin, Coca, etc). Neste caso, a Budweiser e Heineken não são dois jogadores, mas apenas um, pois os seus interesses estão agregados.

O verdadeiro jogo de duas pessoas é o mais tratado na teoria, pois afinal é a quantidade mínima relevante para a Teoria dos Jogos, e nada mais natural que tratar primeiro o básico. Tal jogo ocorre com frequência e sua solução normalmente encontra-se dentro das nossas possibilidades tanto no aspecto conceitual quanto tecnológica. Sendo a situação de conflito mais comum. Tem-se um adversário que, presumidamente, é inteligente e está tentando ganhar de você, mas principalmente, objetivando maximizar seus ganhos. Ao escolher um curso de ação que parece favorável, ele pode descobrir seus planos e definir uma armadilha com base na sua escolha. Muitas situações que não são estritamente jogos de duas pessoas podem ser tratadas como se fossem; Podemos citar um jogo de poker de cinco homens, onde poderia atribuir os interesses presentes na mesa a duas "pessoas", a si mesmo e todos os demais. Quando o número de pessoas distintas é superior a dois, isto é, conjuntos de interesses, excede dois, o principal fator são as identidades (e os interesses) das pessoas que podem sofrer alterações no decorrer do jogo, como coalizões temporárias que são formadas e quebradas; ou certos jogadores podem formar uma coalizão permanente parcial em alguma área de ação onde concebem que lhes seja mais benéfico. No caso do poker de cinco pessoas, você pode querer juntar-se com outros, informalmente, mas de forma eficaz, para agir contra um jogador mais forte, ou que esteja com dinheiro; sua motivação pode ser o medo de que ele iria deixar o jogo levando a maior parte do dinheiro consigo, ou pode preferir ver mais do mesmo nas mãos de um jogador mais fraco. O entendimento de jogos que envolvem mais de duas pessoas é menos completo, ainda, que de jogos de duas pessoas, sendo um assunto mais complicado.

A teoria trata de situações de conflito, a nossa querida interação estratégica, então há interesses divergentes em relação a algo material ou não. Existe um desejo de obter ganho (retorno, recompensa, ou outro que mais lhe agrade), reitero material ou não. Este ganho[34] a teoria materializa através das funções de utilidade, que por sua vez são a expressão das preferências de cada jogador. A noção de utilidade é necessária para evitar uma das principais dificuldades

[34]na literatura inglesa é o *payoff*

conceituais da teoria na aplicação em situações "reais" é quando tentamos identificar os valores do retorno de cada jogador. Em geral, temos que assumir que a recompensa pode, em princípio, ser medida numericamente; e que além disso sabemos como medi-la com precisão suficiente. Além disso, as unidades de medida devem ser as mesmas para todos os jogadores, além de serem simples. Que seja, não estamos preparados para lidar com retorno em reais para um jogador e em gramas de maconha para outro ou um beijo da Gina Lolobrigida, a menos é claro que por acaso sabiamos as relações de troca entre estes itens e assim poder eliminar a heterogeneidade das unidades de medida. Mas, se associamos o ganho (retorno) com as funçoes de utilidade, não precisamos realmente ficar preocupados em quantificar quanto vale monetariamente uma grama de ouro ou um beijo roubado. Com a utilidade podemos tratar de coisas imateriais e materias conjuntamente. Quanto maior for o valor da função de utilidade maior será o nosso ganho. Portanto, uma forma de visualizar a solução de um jogo é a maximização da sua função de utilidade. Entretanto, ainda existe o problema de quais critérios devem ser adotados ao avaliar os resultados de um jogo. Para melhor esclarecer vejamos a seguinte situação :

> "... considere uma dona de casa que tem R$ 50.00 para gastar em carne. O que ela deve comprar? Se o seu critério é simplesmente quantidade, deveria comprar o tipo mais barato e medir o retorno em reais. Se é variedade, deve comprar quantidades mínimas, úteis, de vários tipos, começando com os tipos mais baratos; Neste caso ela mede a recompensa pelo número de tipos que compra. Ou ela pode estar interessado em proteína, gordura ou calorias. Ela pode ter que satisfazer várias condições colaterais, ou trabalhar dentro de determinados condicionalismos, tais como alergias, gostos, ou tabus. Ela pode estar interessada em realizar o menor esforço total, e pode dizer : "Eu quero cinquenta reais de cozido de carne do acougue mais próximo". Teoria dos jogos defende um comportamento-padrão muito explícito e definido com base nas medições de preferências, ou seja, a utilidade. A teoria assume a posição que se há alguma maneira como as pessoas devem se comportar não se refere a uma obrigação com base em lei ou ética. Pelo contrário, refere-se a um tipo de moralidade matemática, ou pelo menos a frugalidade, que afirma que o objetivo sensível do jogador é ganhar tanto do jogo quanto possível, com segurança, em face de um adversário habilidoso que está buscando, em antítese, o mesmo objetivo. Este é o nosso modelo de comportamento racional. Tal como acontece com todos os modelos, o sapato tem que ser julgado em cada vez que que é utilizado para ver se o ajuste é tolerável; mas é bem conhecido no universo militar, por exemplo, que um lote de terreno pode ser coberto de sapatos que não se encaixam perfeitamente."(Williams, J.D. The Compleat Strategyst, Dover Publications, 1954, pag 22, traduzido e adaptado)

Sabemos quantos são os jogadores, e presumidamente quem eles são, e seus objetivos, todavia como vão agir para atingir estes objetivos? Desta ótica, estratégias podem ser vistas como as ações, em cada situação possível do jogo, a serem tomadas com o intuito de atingir o nosso objetivo. Conhecimento é poder, é uma frase popular para indicar a importância que a informação possui e que pode ser observado em alguns dos exemplos apresentados anteriormente. Logo, neste trabalho consideramos como elementos indispensáveis para a modelagem e análise das interações estratégicas :

1. A quantidade de jogadores (e presumidamente a identidade dos mesmos);
2. As preferências dos jogadores, representadas nas suas funções de utilidade[35];
3. A quantidade e o tipo de informação[36] disponível para cada jogador;
4. As estratégias, ou ações que cada jogador pode executar.

[35]Incluso aqui esta o possível ganho com o jogo, por assim dizer o resultado do jogo, consistindo naquilo que o jogador consegue após o término do jogo de acordo com suas preferências e as escolhas feiras por ele e os demais jogadores

[36]Embutido, aqui, as regras do jogo

2.3.3 Conclusões precipitadas, evitemos

Os jogos simultâneos (ou estáticos) foram abordados através da forma normal, enquanto nos jogos sequencias vimos por meio da árvore de decisão, ou na linguagem da Teoria dos Jogos na forma extensiva. Porém, não devemos concluir que um jogo simultâneo não pode ser representado na forma extensiva e tampouco que um jogo sequencial não dispõe de representação na forma normal. Apenas, a forma normal representa de forma mais adequada os jogos simultâneos e de forma semelhante com a forma extensiva e os jogos sequenciais. Que seja, podemos representar um jogo simultâneo na forma estendida, e também podemos representar um jogo sequencial na forma normal, onde a opção por uma forma ou outra dependerá estritamente de qual forma melhor represente a situação a qual o jogo representa.Um jogo simultâneo com mais de dois jogadores, digamos três jogadores, não seria muito fácil de ser presentado em uma tabela, afinal seriam necessários "três dimensões" para sua representação. E se fossem quatro jogadores, mais uma dimensão e com dez não seria nada prático a forma normal, sendo natural optar pela forma extensiva. Sendo possível o intercâmbio entre as duas formas a qualquer momento, temos que no exemlo 2 modificado tinhamos a seguinte forma normal :

•	B_1	B_2
A_1	(1, -1)	(-1, 1)
A_2	(-1, 1)	(1, -1)

Tendo em mente, que a caracterização de um jogo simultâneo é o fato de que os jogadores não possuem informação a cerca das escolhas (jogadas) dos outros jogadores ao executar a sua própria. Implica, que o conjunto de informação de ao menos um dos jogadores será composto com mais de um nó. Destarte, a maneira de representar um jogo simultâneo na forma extensiva é especifcando os conjuntos de informação que indicam o fato de que os jogadores estão decidindo sem conhecer as decisões dos demais jogadores. No exemplo 2 modificado, o jogador B, não sabe qual foi a escolha do jogador A ao realizar sua jogada (o mesmo ocorre com o jogador A. Todavia, devemos iniciar de algum ponto e adotamos o jogador A), assim a sua correspondente forma extensiva é :

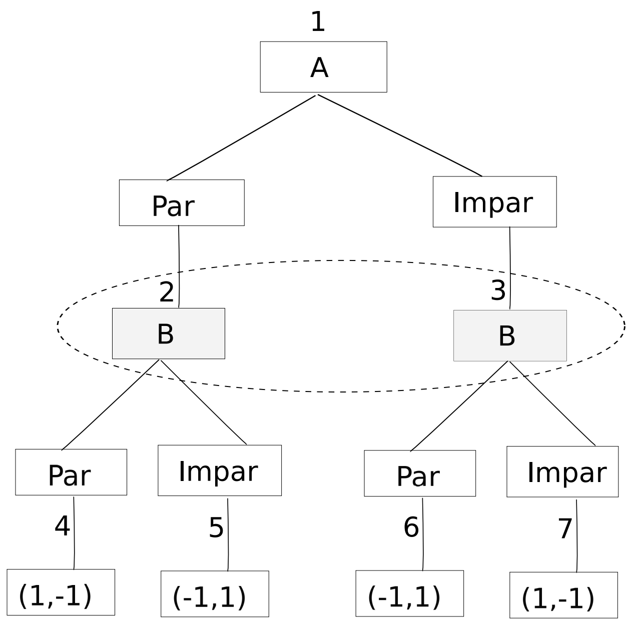

Figura 2.37: Forma extensiva jogo par ou impar

Na figura acima o fato do jogador B não conhecer a escolha do jogador A é representado pelo conjunto de informação de B conter dois nós (2 e 3) e por outro lado o jogador A não conhece a escolha de B, pois faz sua escolha *antes* na árvore do jogo. Desta forma, ambos os jogadores não conhecem a escolha do adversário. Ressaltamos, que na representação em forma extensiva de um jogo simultãneo a ordem em que os jogadores jogam é irrelevante, pois na árvore do jogo é indiferente se trocarmos o jogador A por B, se o nó raiz iniciar com B (faça essa verificação leitor, se és do time de São Tomé : ver para crer).

Bem, vimos a representação de um jogo simultâneo na forma extensiva, agora então partamos para um jogo sequencial na forma normal. Tomemos o **Exemplo 6 - Jogo do Subir/Descer :** cuja forma extendida é :

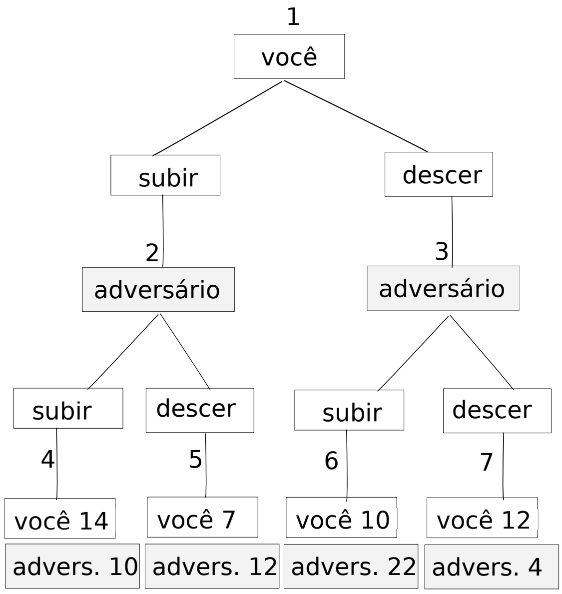

Figura 2.38: Árvore do Jogo sobe/desce

Um aspecto muito importante neste jogo, conforme já visto, é que o adversário toma a decisão de subir ou descer, *conhecendo* sua jogada, ou seja ele sabe se você escolheu subir ou descer. Na forma normal todas as estratégias devem estar representadas para cada momento do jogo. Você toma sua decisão apenas no inicio do jogo e suas possibilidades são : subir ou descer que são as mesmas do seu adversário. Assim a forma normal associada é :

	Subir	Descer
Subir	(14, 10)	(7, 12)
Descer	(10, 22)	(12, 4)

Uma outro aspecto que pode levar a interpretações equivocadas é o conceito de utilidade. Um equivoco muito comum é afirmar que as pessoas elevam sua utilidade por que são racionais, primeiramente observam-se as preferências de uma pessoa, e se forem coerentes, que seja as mesmas são **completas** e **transitivas**, então, em seguida determina-se sua função de utilidade. A racionalidade está associada às preferências, a Teoria dos Jogos entende que racional é a pessoa que age conforme suas preferências (completas e transitivas).

> "Se uma pessoa encarar a vida como uma série de jogos em que a boa e a má sorte se anulam, poderá ela decidir elevar ao máximo seu ganho médio, em reais; e estará tudo muito bem. Mas, se a mesma pessoa preferir alternativas menos ariscadas, também isto estará bem, ainda que reduza seu ganho médio esperado. A teoria da utilidade se adequará a ambas atitudes"(Davis, Morton D. Teoria dos Jogos, uma introdução não técnica, Cultrix, 1978, pag. 71)

Figura 2.39: Preferências (Utilidade)

Pode-se pensar que as condições apresentadas tornam tudo perfeito. Infelizmente a teoria da utilidade esperada possui alguns problemas ainda não totalmente solucionados, pois afinal estamos lidando com o ser humano e ainda não foi possível conceber um modelo matemático que abarque todas as facetas e nuances da espécie humana. As preferências das pessoas podem mudar com o tempo, isto pode ser observado nos movimentos grevistas quando no ínicio do movimento as preferências são na direção de uma certa intransigência, mas conforme o tempo passa tais preferências podem suavizar ou radicalizar mais ainda. Outro aspecto que constata-se experimentalmente é que certas variavéis, aparentemente não relevantes, acabam por afetar o comportamento das pessoas. Por exemplo uma pessoa que joga cartas ao vivo possui um comportamento distinto quando joga "on-line", o mesmo acontecendo com participantes de leilão quando fazem suas ações pessoalmente ou através dos meios digitais. Aqui o meio não deveria ser relevante, o jogo é o mesmo nas duas situações, não houve alterações de regras ou qualquer fator que a Teoria dos Jogos considere relevante. Mas o fato de ser presencial ou não afeta as preferências e isto sim afeta a ánalise.

Figura 2.40: Intransitividade

O comportamento humano é extramente complexo e curioso. Dentre as alternativas a seguir quais seriam as suas escolhas :

1. Você prefere a situação A ou a situação B?

   Situação A : certeza de ganhar 100 milhões de reais;

   Situação B : 10 % de probabilidade de ganhar 500 milhões de reais; 89 % de probabilidade de ganhar 100 milhões de reais; 1% de probabilidade de não ganhar nada.

2. Você prefere a situação C ou a situação D?

   Situação C : 11% de probabilidade de ganhar 100 milhões de reais; 89% de probabilidade de não ganhar nada.

   Situação D : 10% de probabilidade de ganhar 500 milhões de reais; 90% de probabilidade de não ganhar nada.

Quais foram suas escolhas? Verificou-se a existência da preferência por segurança na vizinhança da certeza demonstrada especialmente quando se colocavam em jogo grandes somas em dinheiro, isto é, somas muito elevadas em relação à renda das pessoas consultadas. Dentro da teoria da utilidade sendo A preferível a B, existe alguma dúvida?, implica que C é preferível a D. No entanto, através de diversos experimentos observou-se que mesmo pessoas muito cuidadosas, acostumadas ao cálculo de probabilidade e consideradas racionais (embora com rendas relativamente pequenas se comparadas com os ganhos do exemplo anterior), preferiam A a B, mas ao mesmo tempo preferiam D a C. Uma vez que para Teoria dos Jogos se consideram evidentes os axiomas dos quais deduzem as formulações, reputa-se a esse resultado, um paradoxo, tendo sido realizado por Maurice Allais (1911-2010), na década de 1950, é conhecido por **Paradoxo de Allais**.

Quanto não bastasse a complexidade do comportamento individual, existem situações em que mesmo sendo o comportamento individual racional, ou seja, as preferências são completas e transitivas, o comportamento coletivo pode não o ser. Para ilustrar, o departamento de matemática precisa decidir quantas turmas de calculo I serão ofertadas no próximo período, os membros do Conselho que realiza a decisão por maioria, são : Fábio, Zaqueu e Evilson. Fábio deseja que sejam 5 turmas. Mas se esse não for o resultado vencedor, ele espera que pelo menos a proposta de 7 turmas vença a de 10. Zaqueu quer 7 turmas. Não sendo isso possível, deseja que a proposta de 10 vença. Evilson deseja 10 turmas. Ele também é temperamental : se o seu voto por 10 turmas não ganhar, ele quer que a proposta de 5 vença. As preferências são representadas na tabela a seguir :

Ordem	Fábio	Zaqueu	Evilson
1º	5	7	10
2º	7	10	5
3º	10	5	7

O resultado é definido com uma votação em dois turnos. No primeiro, a proposta de 5 disputa com a de 10. Levando em contas suas preferências, a votação seria :

- - Fábio : 5 turmas;
- - Zaqueu : 10 Turmas;
- - Evilson : 10 Turmas.

A proposta de 10 turmas vence em primeiro turno e o segundo seria então entre ela e a proposta de 7 turmas, novamente levando em conta as preferências, a votação seria :

- - Fábio : 7 turmas;
- - Zaqueu : 7 Turmas;
- - Evilson : 10 Turmas.

Sendo vencedora a proposta de 7 turmas.

Entretanto, se o primeiro turno fosse entre a proposta de 5 e 7 turmas. Mais uma vez, levando em conta as preferências, a votação seria :

- - Fábio : 5 turmas;
- - Zaqueu : 7 Turmas;
- - Evilson : 5 Turmas.

A proposta de 5 turmas vence em primeiro turno e o segundo seria então entre ela e a proposta de 10 turmas, novamente levando em conta as preferências, a votação seria :

- - Fábio : 5 turmas;
- - Zaqueu : 10 Turmas;
- - Evilson : 10 Turmas.

Agora a vencedora é a proposta de 10 turmas. Continuando com nossa brincadeira, se o primeiro turno fosse entre as propostas de 7 e 10 turmas, teríamos :

- - Fábio : 7 turmas;
- - Zaqueu : 7 Turmas;
- - Evilson : 10 Turmas.

A proposta de 7 turmas vence em primeiro turno e o segundo seria então entre ela e a proposta de 5 turmas, mais uma vez e novamente levando em conta as preferências, a votação seria :

- - Fábio : 5 turmas;
- - Zaqueu : 7 Turmas;
- - Evilson : 5 Turmas.

E parece bricadeira, mas a proposta vencedora seria a de 5 turmas. E entramos em um processo cíclico infinito. Assim, apesar das preferências individuais serem transitivas, as decisões coletivas não o são. Esta situação foi percebida no século XVIII, pelo Marquês de Condorcet, sendo chamada, mais do que óbvio não?, de *Paradoxo de Condorcet*. Sendo também denominada, em casos semelhantes, de *maioria cíclica*, onde a ordem da votação (numa disputa dois a dois) pode alterar o resultado.

A determinação da proposta vencedora será uma consequência da forma adotada para a disputa, que indicará qual a primeira disputa entre as três alternativas possíveis. Em cada caso, a votação é resolvida por dois votos a um. Daí se constata a importância da pessoa encarregada de agendar a ordem das votações.

Este fenômeno permite o chamado voto útil ou voto estratégico. Assim, se o eleitor nº 2 prefere o candidato "C" a "A", e a ordem da votação começa com a disputa BxC, o eleitor, sabendo de antemão, que nesta ordem, o candidato "A"ganha, muda seu voto para "C"(apesar de preferir "B"), a fim de que, no final da disputa ganhe "C"(evitando a vitória de "A").

O Brasil e a maioria das ditas democracias mundiais utilizam, em contextos locais, nacionais e supranacionais, por regra geral, a votação por maioria sobre mais de duas alternativas, portanto a relevância do paradoxo é evidente. Entre as inúmers situações que esclarece, temos as denominadas batalhas procedimentais, por vezes acaloradas, sobre a ordem das votações. Muito distante de meras futilidades, como poderia parecer, são na verdade essenciais na determinação do resultado final segundo a direção desejada, atribuindo as votações, em si, um papel secundário e até ilusório de ação democrática quando na realidade podem ocultar verdadeiros golpes.

Aqui é importante observar, para a ocorrência do paradoxo de Condorcet, não pode haver uma alternativa a qual ninguém considere como a pior. Em outras palavras, se a prosposta A vence a proposta B por maioria, ao menos a metade mais um dos votantes prefere A a B. Se B vence C por maioria, ao menos a metade mais um dos votantes prefere B a C. Portanto, ao menos um dos votantes prefere A a B e B a C, e C é considerada a pior alternativa por ao menos um eleitor. De forma simetrica, vale semelhantemente para A e B. Para que a votação por maioria possa ser circular, é, portanto, necessário que cada alternativa seja considerada a pior por alguém. Constatamos, desta forma, uma incompatibilidade entre liberdade individual, onde cada um possui, ou se preferir pode optar, por determinada ordem de preferências, e comportamento coletivo dos nossos representantes. Explicando, a inadequação da votação por maioria nos momentos de instabilidade política, pois neste contexto, há alternativas que ninguém considera as piores[37].

Figura 2.41: Cada um tem o rato que merece

Há a possibilidade superar o paradoxo de Condorcet através da negociação entre as partes envolvidas. Na situação das turmas. Se Fábio deseja mais fortemente que os outros que a proposta de 5 turmas seja aprovada, pode negociar a prioridade das preferências, digamos, de Zaqueu, pedindo para ele colocar a proposta de 5 turmas na sua segunda prioridade, e não mais na terceira. Em troca, Fábio promete abrir mão de sua segunda prioridade em outra votação que interesse mais a Zaqueu, por exemplo, a escolha da quantidade de monitores de uma disciplina.

Figura 2.42: Negociação

[37] Qualquer semelhança com a nossa situação politica atual *não é mera coincidência*

A título de informação destacamos que em 1951 Kenneth Arrow (1921 -), um jovem economista se questionou sobre a possibilidade da obtenção de um sistema de votação que permitisse estender a transitividade das preferências individuais àquelas coletivas (sociais). Até então, a suposição geral era que a ordem coletiva (social) existisse, sendo divergente somente a crença que essa fosse, respectivamente, independente ou deduzível das ordens individuais. Arrow precisamente, demonstrou que nenhum sistema de votação que satisfaça as seguintes condições preserva a transitividade das preferências :

1. Liberdade de escolha : toda ordem transitiva de preferências individuais é aceitável;

2. Dependência do voto : o resultado da votação entre duas alternativas é determinado univocamente pelos votos a elas conferido;

3. Monotonicidade : se uma alternativa vence uma votação, continua a vencer em toda votação na qual obtenha mais votos;

4. Rejeição da ditadura : não existe ninguém cujas preferências individuais ditem o resultado de cada votação, independentemente das preferências dos demais votantes.

Por este trabalho o comitê de Estocolmo, em 1972, conferiu a Arrow o prêmio Nobel de economia (paradoxal e ironicamente, com uma votação).

Destacamos que as dificuldades apresentadas, não desmerecem ou desacreditam a teoria, ao contrário são temas de estudo e pesquisa para o aprimoramento da mesma. Existindo, ainda, muito espaço para novos avanços e descobertas, o leitor habilita-se a ingressar neste campo?

Capítulo 3

Soluções de jogos de duas pessoas

A teoria dos jogos, conforme enfatizado anteriormente, tem profunda ligação com o comportamento humano. Então, a busca por soluções de um jogo, uma situação de interação estatégica, pode ser visto por determinar a melhor forma dos jogadores comportarem-se tendo em vista suas prefêrencias(as quais são completas e transitivas) em relação aos ganhos possíveis com o jogo. Dito de outra forma, *"o objetivo da teoria dos jogos consiste na elaboração de recomendações sobre a forma razoável das ações de cada um dos contrincantes no curso de uma situação de conflito*(Ventsel, E.S. Elementos de la teoria de juegos. Editorial MIR, 1977). Portanto, ao determinarmos as ações de cada um dos jogadores por certo conseguimos precisar o provável resultado do jogo. Devemos ressaltar que o resultado de um jogo, não possui sempre uma expressão quantitativa econômica, pode significar a redução no tempo de perseguição de um inimigo ou simplesmente a escolha de ir à Rua do turista, ma para todas as situações, em virtude da nossa já conhecida utilidade sempre pode ser expresso com um número definido. Assim, devemos sempre estar buscando soluções para os jogos. Isso significa que vamos tentar descobrir qual estratégia ou estratégias que os jogadores devem usar e, se mais de uma for necessária, como as prioridades devem ser atribuídas. As situações de conflito, ou as interações estratégicas, ou simplesmente os jogos podem ser de dois ou mais participantes, sendo que estes jogo podem formar ou não alianças temporárias e/ou permanentes, dependendo dos interesses de cada um e da situação especifica representada no jogo.

Antes de tratarmos especificamente das possíveis soluções de um jogo, pensemos nas seguintes situações:

1. Saímos com a famíĺia e fomos a um restaurante pedimos a comida e perguntamos ao garçom quanto tempo leva para ficar pronta, ele nos fornecer um valor baseado na experiência e nos informa o tempo "médio"em que a comida deve demorar a ficar pronta.

2. Estamos, há alguns minutos, em um ponto de ônibus e perguntamos a pessoa ao lado, quanto tempo leva até que o próximo ônibus, que desejamos, venha, prontamente baseada na sua experiência ela nos fornece uma valor "médio".

Em ambas as situações os valores informados não constituem uma certeza, mas uma estimativa feita pelas pessoas com base na sua experiência passada. Sendo denominado de valor esperado. Consistindo em um tipo de média, com um elemento a mais a presença da incerteza, representada através da probabilidade do evento. Afinal, o ônibus pode algumas vezes atrasar 10 minutos, outras adiantar 5 minutos. O pratro no restaurante, por ter acabado o gás ou por haver uma quantidade grande de pedidos ou por equivoco do chefe de cozinha pode demorar 30 minutos a mais que o padrão, ou por estar vazio o restaurante e tudo estar pré-pronto, sair quase que imediatamente.[1] Podendo estes eventos acontecerem com uma frequência (probabilidade) definida ou não. Em outras palavras, em cada 10 pedidos daquele prato 2 tendem a atrasar 30 minutos, ou seja, com probabilidade de 20%.

Vejamos um exemplo para clarear as idéias:

[1] Observe, que este valor pode simplesmente não ser possível de existir. Por exemplo em um dado de 6 faces, numeradas de 1 a 6, qual é o valor esperado? A resposta é 3,5.

Exemplo 10 - Jogo de dados: *Considere um jogo de dados, no qual o participante deve ingressar ao menos com R\$ 20,00. Um dado de 6 faces, numeradas de 1 a 6, é jogado uma vez, e seus ganhos dependem do número que apareceu. Se for um 6, o apostador passa a ter R\$ 40,00; se for um 5 passa a possuir R\$ 30,00 e se for qualquer outro número o apostador perde R\$ 10,00(mantendo os 10). Qual será o valor esperado deste jogo?.*

Se a face visível for de 1 a 4, o apostador nada ganha e ainda perde R\$ 10,00. Se for 5 tem um ganho de R\$ 10,00 e sendo 6 um ganho de R 20,00. Os ganhos e perdas do apostador são representados na figura a seguir:

Figura 3.1: Ganhos e Perdas Jogo de Dados

A possibilidade de sair o número 1 é de uma em seis possíveis, que representamos por: $\frac{1}{6} = 0,167 = \frac{16,7}{100} = 16,7\%$. De forma idêntica para os demais números, assim temos os seis possíveis resultados:

1. Visível a face contendo o número 1, com probabilidade de 16,7%, e perder R\$ 10,00;
2. Visível a face contendo o número 2, com probabilidade de 16,7%, e perder R\$ 10,00;
3. Visível a face contendo o número 3, com probabilidade de 16,7%, e perder R\$ 10,00;
4. Visível a face contendo o número 4, com probabilidade de 16,7%, e perder R\$ 10,00;
5. Visível a face contendo o número 5, com probabilidade de 16,7%, e ganhar R\$ 10,00;
6. Visível a face contendo o número 6, com probabilidade de 16,7%, e ganhar R\$ 20,00;

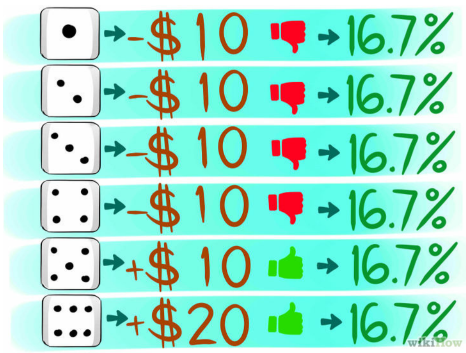

Figura 3.2: probabilidade de Ganhos e Perdas

Naturalmente, o valor esperado será dependente destas probabilidades. Para o número 1 temos: $-10 \cdot 16,7\% = -10 \cdot 0.167 = -1,67$; Para o número 2 temos: $-10 \cdot 16,7\% = -10 \cdot 0.167 = -1,67$; Para o número 3 temos: $-10 \cdot 16,7\% = -10 \cdot 0.167 = -1,67$; Para o número 4 temos: -$-10 \cdot 16,7\% = -10 \cdot 0.167 = -1,67$; Para o número 5 temos: $10 \cdot 16,7\% = 10 \cdot 0.167 = 1,67$; Para o número 6 temos: $20 \cdot 16,7\% = 20 \cdot 0.167 = 3,34$;

Figura 3.3: Valores Provavéis

Figura 3.4: Valor Esperado

Logo, o valor esperado é: (-1,67)+(-1,67)+(-1,67)+(-1,67)+(1,67)+(3.34) = -1, 67.

Uma outra forma de obtermos este resultado, é pensando da seguinte forma: A probabilidade de sair visível qualquer face é a mesma para todas as faces(16,7%). Então, não existe nenhum resultado mais provavel que outro, enfim todos os resukltados são "iguais", assim o valor esperado é equivalente a média dos resultados possíveis:

$$\frac{(-10)+(-10)+(-10)+(-10)+(10)+(20)}{6} = \frac{-10}{6} = -1,67$$

Portanto, neste jogo de dados, o apostador deve estar preparado para perder em média R$ 1,67 por jogo. O resultado obtido, por certo não é possível em si; pois afinal ao jogar somente pde-se ganhar 10 ou 20 reais ou perder 10 reais. Entretanto, o valor esperado, nste contexto, é uma representação do que ocorre após um certo prazo. Por exemplo, se jogado este jogo várias vezes, em média, perde-se 1,67 reais. Quanto maior for a quantifade de vezes que reprete-se este jogo, maior a precisão do valor esperado comparado com o resultado médio real. Por exemplo, pode-se jogar 7 vezes e perder todas e teria uma perda média de 10 reais, mas se jogado 500 vezes ou mais, os ganhos médios começam a comportar-se exatamente como previsto pelo valor esperado.Sendo comprovado tanto experimentalmente, quanto por decorrência da chamada *"lei dos grandes números"*.

Este jogo reflete a idéia sobre a qual a jogatina opera: *Em média a casa vai lucrar e o apostador vai perder*. Todavia, a sedução de um possível grande (às vezes enorme, tal ao da Mega-Sena acumulada) ganho atrai os jogadores.

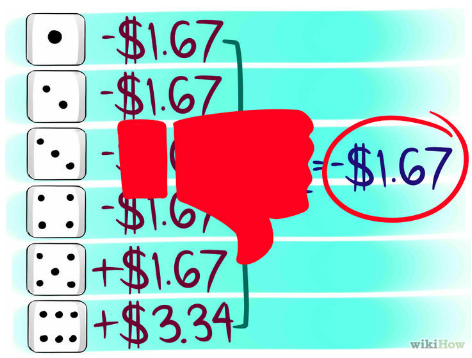

Figura 3.5: Em média o apostador perde

Mas, deve-se estar questionando qual a relação com a "nossa"teoria dos jogos. Seja a forma estratégica a seguir:

A forma normal, também denominada de matriz ou tabela ou forma estratégica, acima é indexada com todas as estratégias(curso de ação completo dentro das regras do jogo) de cada jogador, no

	B_1	B_2
A_1	(0,0)	(0,0)
A_2	(0,0)	(0,0)

caso A e B, podem escolher livremente. A lista é exaustiva (abrange todas as possibilidades), então qualquer sequência acessível de ações, inspiradas, tolas, criativas ou estúpidas, que um jogador pode fazer é representada por uma das estratégias. Que significa que apenas um número será exibido em cada "quadriculado"da matriz? É certo que o uso de uma estratégia específica de A e de B não é nenhuma garantia de que o pagamento será único? Por exemplo, o jogo pode ser tal que as estratégias dos jogadores só irão determinar se o pagamento vai para A ou B, e a magnitude do pagamento é determinada pela natureza (o acaso), através do girar de uma roleta para descobrir quanto será pago. Então o que significa quando o número 0 aparece? Ou 6, ou — 2, ou qualquer outra coisa? Bem, pode ser um valor muito sólido, ou seja, o único resultado possível quando o par correspondente de estratégias é usado. Mas se o jogo é tal que, com as estratégias escolhidas para cada jogador, as recompensas podem ser qualquer um dos vários números, então "o pagamento", listado na forma normal, é um *valor médio*, cujos elementos dependem de oportunidade (probabilidade de sua ocorrência), ou seja, um *valor esperado*.

Suponha que um par de estratégias realmente leva a três resultados possíveis; em um A ganha 8, outro ganha 24 e no último perde 8. Não vai fazer sentido colocar na "caixa"correspondente de nossa forma normal do jogo um número 8 ($\{8+24-8\}/3=8$), que é a média simples dos três números 8, 24, e — 8 , porque a probabilidade de ocorrência dos mesmos pode não ser a mesma. Por exemplo, o mecanismo de determinação das probabilidades pode ser o lançamento de uma moeda; + 8 (ganho para A) pode corresponder a cara, — 8 (perda para A) a coroa e 24 (ganho para A) podem corresponder à posição de moeda cair "em pé". Considerando que é praticamente improvável de ocorrer da moeda cair em pé(probabilidade 0), simplesmente ignoramos este caso e assumimos que os outros são igualmente prováveis; Nesse caso, a média adequada seria o resultado da adição de 8 e -8 e sua divisão por 2 da seguinte forma: $\{8+(-8)\}/2=0$. Este seria o valor a ser usado. Mas se a moeda usada é suficentemente grossa para ser possível cair em pé, sendo de tal maneira igualmente provável, cara, coroa e em pé. Então é razoável usar o 8, correspondente a média dos três valores igualmente provavéis, como o valor do pagamento. Em geral, a técnica adequada é multiplicação do número por sua probabilidade de ocorrência (conforme visto anteriormente). Portanto, se as probabilidades favorecendo a 8, 24, e — 8 forem 12,5%, 37,5% e 50%, então a média adequada (valor esperado) seria: $8\cdot 12,5\%+24\cdot 37,5\%+(-8)\cdot 50\%=8\cdot 0,125+24\cdot 0,375+(-8)\cdot 0,5=1+9-4=6$[2]

O valor encontrado, já afirmado anteriormente,é chamado por matemáticos, de valor esperado. É evidente que se trata de um uso de linguagem que exige cuidados especiais na interpretação. Não esperamos que o valor (neste caso 6) apareça quando A e B usam este par específico de estratégias — de fato, o retorno '6' é na verdade impossível de ocorrência —, mas esperamos que o efeito médio tenda para 6. A importancia do valor esperado pode ser apreciada através do seguinte pensamento de desta forma: que se A e B jogarem este jogo diversas vezes, repetindo este par de estratégias, 6 é o pagamento "justo"a ser feito antes de cada jogo. Se qualquer outro montante é pago, por ambos os jogadores, o jogo vai ser injusto para um jogador, que irá então quebrar mais vezes do que devia.

Então nosso uso de valores esperados (ou seja, dos valores médios a longo prazo), envolve a suposição tácita de que o jogador é capaz e está disposto a resistir a caprichos temporários do acaso. Como ficamos se esta suposição viola os fatos? Não é provável que o jogo teórico será útil, podendo a teoria afirmar que a dificuldade é nossa, não dela; que estamos em apuros porque fomos descuidados com o valor dos pagamentos, ou seja, o valor real para o jogador. As unidades usadas no cálculo do pagamento podem ter sido dólares ou vidas; em qualquer caso, uma unidade convencional que nos enganou. Para corrigir isso, deve-se elaborar uma escala de valor que melhor reflete a utilidade dos vários resultados possíveis para o jogador.

[2]Visto que as probabilidades estão na proporção 12,5:37,5:50; que corresponde a 1:3:4. Outra forma de ver o mesmo valor é através da seguinte média ponderada: $\frac{1\cdot 8+3\cdot 24+4\cdot(-8)}{1+3+4}=\frac{8+72-32}{8}=\frac{48}{8}=6$)

Se o fizermos, no entanto, é improvável que os pagamentos para A e B continuarão a ser iguais em magnitude e de sinal contrário — a característica de identificação de um jogo de soma zero. Então podemos concluir isto: se os jogadores preferem um pagamento a outro de igual valor médio, a balança precisa ser corrigida; e uma vez que eles são corrigidos, é improvável que o jogo seja constituído por troca de ativos. Em outras palavras, ele provavelmente se tornará de soma não-zero; O valor 'esperado' de um pagamento nem sempre pode fornecer uma base razoável para decisão e ação; e este fato obrigou-nos, por sua vez, a perceber que ainda não temos sistemas realmente muito bons para comparar a conveniência ou a inconveniência de certos resultados. Mas apesar das desvantagens, a teoria tem algumas coisas interessantes e úteis a dizer. Assumiremos doravante que os jogadores possuem património suficiente para serem capazes de suportar as flutuações de amostragem, para que os valores esperados possam razoavelmente servir como seus guias.

Como dantes, iniciemos, pelo mais simples, que seja, com os jogos de duas pessoas e sem possibilidade de acordos ou alianças entre os jogadores, quer dizer os interesses das partes são totalmente antagônicos, onde o sucesso de um depende do fracasso do outro, enfim os jogos de soma-zero. Os jogos de soma-zero e de informação perfeita vistos no capítulo 2, são estritamente determinados e não serão mais abordados, lidaremos apenas com os jogos de informação imperfeita.Estes foram tratados de forma detalhada na obra fundamental *Theory of Games and Behavior* e são os precursores de todo o desenvolvimento posterior da teoria dos jogos.

3.1 Jogos de soma zero

A teoria dos jogos ao estudar as situações de interação estratégica tem atuação em diversas áreas, os jogos de soma zero estão presentes no nosso cotidiano em diferentes formas: as disputas eleitorais, a concorrência entre empresas de telefonia móvel, etc. Entretanto, talvez, a melhor representação dos mesmos, em nosso mundo "real"são as situações de guerra, semelhante às ocorridas na segunda guerra mundial. Em particular a denominada batalha do mar de Bismarck.

A batalha do mar de Bismarck ocorreu em fevereiro de 1943, durante a segunda guerra mundial, no sudoeste da ásia, entre a marinha japonesa e a força aérea norte-americana. O general Kenney era o comandante da força aérea americana na aréa do sudoeste do pacifico e o Almirante Imamura comandante da marinha japonesa. O almirante Imamura recebera a ordem de enviar reforços aos soldados lutando na Papua-Nova Guiné. Os japoneses deveriam escolher entre duas rotas possíveis: A rota norte através do mar de Bismarck ou a rota Sul através do mar de Solomon, sendo que por qualquer uma delas a viagem dura o total de três dias.

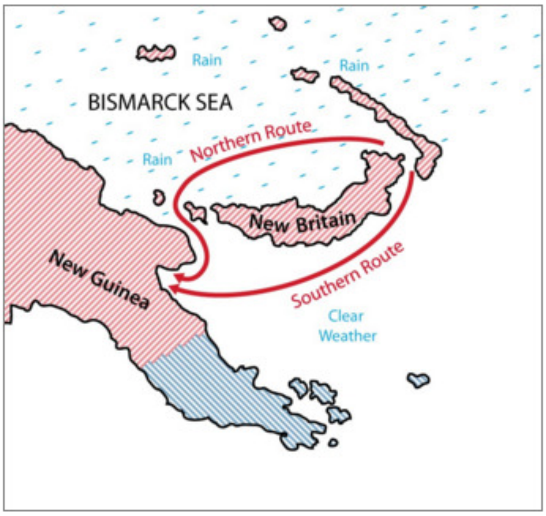

Figura 3.6: Rotas Possivéis. Aréa azul sobre controle americano e vermelha japonês

O general Kenney conhecia todas as rotas disponivéis ao seu inimigo. Mas não dispunha de aviões suficentes para cobrir as duas rotas simultâneamente, o que era de conhecimento do Almirante Imamura.

Assim, se Kenney antecipasse corretamente o deslocamento japonês teria mais dias de bombardeio sobre a frota inimiga. Tendo recebido a ordem do comandante supremo das forças aliadas , General MacArthur, de causar o máximo de destruição ao comboio japonês. Os pagamentos("payoffs") neste jogo são o número de dias de bombardeio. Os japones desejam evitar ao máximo a detecção dos seus navios pela força aérea americana e os norte-americanos almejam o máximo de dias de exposição do comboio para o bombardeio. Assim, temos um jogo estritamente competitivo. Uma vez que o número de dias era o mesmo para ambos os jogadores, japoneses e americanos possuem o mesmo pagamento exceto que para os americanos utilizamos sinal positivo e para os japoneses sinal negativo. Consequentemente, estavam em um jogo de duas pessoas de soma zero.

Logo, cada comandante possui duas escolhas, na terminologia da teoria dos jogos o espaço de estratégias de cada um é composto de dois elementos, ou seja, o espaço de estratégia Americano é: $E_{Ame} = \{Rota\ Norte, Rota\ Sul\}$ e o japonês é: $E_{Jap} = \{Rota\ Norte, Rota\ Sul\}$, resultando em quatro possivéis situações(batalhas). Um detalhe importante é que os comandantes não sabem qual foi a decisão tomada pelo comandante adversário, então é como se ambos decidissem simultâneamente, ou seja, é um jogo simultâneo. A rota norte norte possui a caraterística de possuir tempo ruim (chuvoso) e se os japoneses forem pela mesma resulta em dois dias de bombardeio, devido a baixa visibilidade em decorrência do tempo chuvoso o primeiro dia é perdido na localização do comboio, conforme figura:

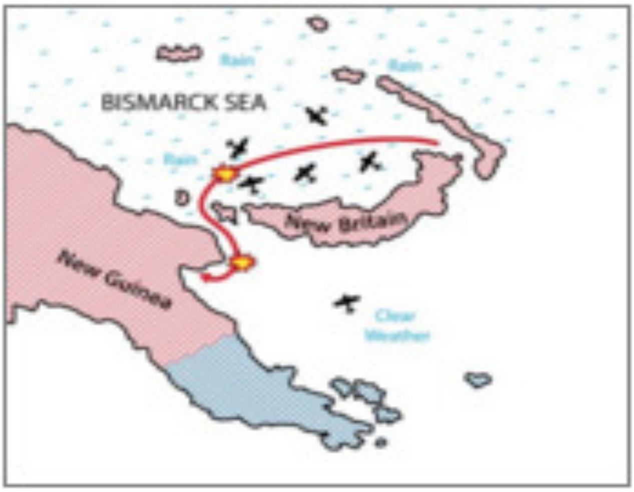

Figura 3.7: Japoneses e Americanos escolhem rota norte

Mas se os japoneses escolherem a rota sul, então os americanos perderiam o primeiro dia de busca e após reorganizarem suas forças, somente poderiam bombardear os japoeses do segundo dia em diante, resultando novamente em dois dias de bombardeio, conforme figura:

Figura 3.8: Americanos rota norte e Japoneses sul

A terceira situação ocorre se os americanos escolhem a rota sul e os japoneses a rota norte. Neste caso, os americanos perdem o primerio dia em virtude da escolha errada e após reorganizarem-se no segundo dia saem à caça dos japoneses e perdem o segundo dia, devido ao clima lembram-se, nesta caçada e somente podem bombardeá-los no terceiro dia, resultando em apenas um dia de bombardeio, conforme figura:

Figura 3.9: Americanos rota sul e Japoneses rota norte

Por fim, se amercianos e japoneses escolhem a rota sul. São três dias de bombardeio, conforme figura:

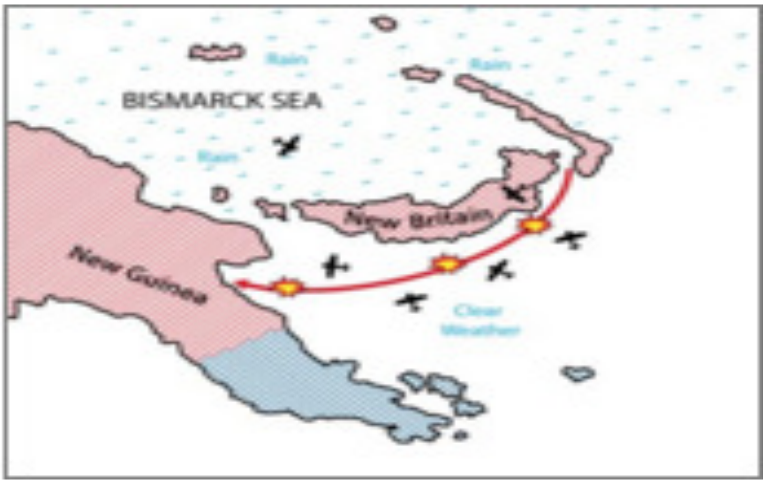

Figura 3.10: Americanos e Japoneses rota sul

A batalha de Bismarck, então foi modelada por um jogo simultâneo de duas pessoas de soma zero, e sendo simultâneo é necesariamente de informação imperfeita e ainda que a explanação anterior e as figuras ajudem a compreender a difícil situação na qual os comandantes se encontravam, por ser um jogo simultâneo sabemos que existe uma forma de representação que sintetiza adequadamente todos os elementos essenciais,que seja a já bem conhecida forma normal do jogo. A forma normal (estratégica)[3], onde o ganho (pagamento) é o número de dias de bombardeio do comboio japonês, correspondente deste jogo é:

[3]Sendo um jogo de soma zero o ganho de um jogador é exatamente a perda do outro. Logo o ganho americano de + 2, significando que bombardeia os navios japoneses por dois dias, é associado a uma perda janponesa de -2. Desta forma, em jogos de soma zero basta representar o ganho de um dos jogadores, pois o do outro está implicitamente determinado

		Estratégias Japonesas	
		Rota Norte	Rota Sul
Estratégias	Rota Norte	2 dias	2 dias
Americanas	Rota Sul	1 dia	3 dias

Ressaltemos, que a forma normal é apenas a mais convenienete para jogos simultâneos, mas é completamente possível utilizar a forma extensiva. Para exemplificar segue a forma extensiva deste jogo:

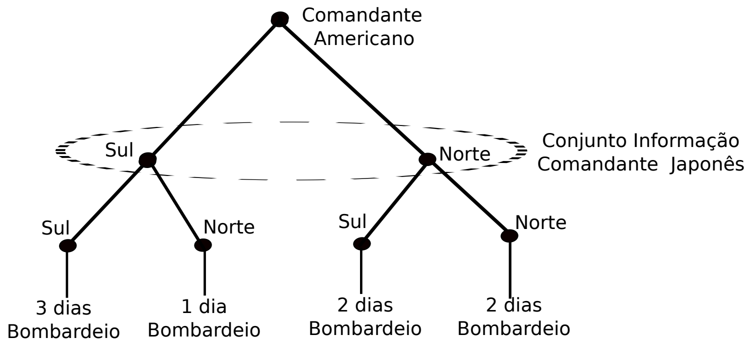

Figura 3.11: Forma Extensiva do Jogo Batalha de Bismarck

E agora, sendo você o comandante das forças japonesas qual rota escolheria? De forma semelhante, sendo o comandante das forças americanas iria optar por qual rota? Mas, o principal é o que a teoria dos jogos tem a sugerir para os comandantes?

Outra batalha ocorrida na segunda guerra mundial, foi em agosto de 1944, logo após a invasão aliada da Europa. Os Aliados tinham acabado de sair de sua cabeça de ponte através de uma passagem estreita à beira-mar em Avranches. Este avanço deixou exposto o flanco oeste do Nono exército alemão. O comandante alemão, General von Kluge, tinha dois cursos de ação: um, atacar o exército aliado que estava oeste de sua posição, para assim penetrar em direção ao mar protegendo seu flanco oeste; ou retirar-se para o leste, para assumir uma posição mais defensável perto do Rio Seine. A figura a seguir retrata a situação:

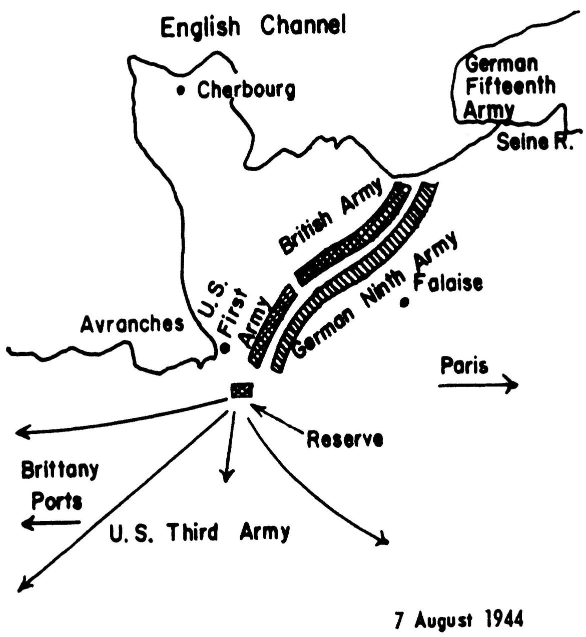

Figura 3.12: Batalha de Avranches

O general Omar Bradley, comandante das forças aliadas em Cherbourg, que consistiam no primeiro e terceiro exército, tinha recebido a missão de destruir as forças inimigas em campo. O Terceiro Exército, sob comando do general Patton, tinha começado sua varredura, deslizando através da passagem em Avranches. O Primeiro Exército estava contendo o Nona exército alemão por meio de um ataque frontal. A chave para a decisão de Bradley era o que fazer com sua reserva de quatro divisões, ao sul da passagem e ainda não comprometidos com a ação. O general Omar considerou três possibilidades: a primeira, direcionar a sua reserva de volta para defender a passagem; a segunda, enviar a reserva para o leste para assediar ou, eventualmente, cortar a retirada do Nono Exército alemão; ou por fim, deixar a reserva na posição por um dia, movendo-o para a abertura, se necessário ou para o leste. Esta terceira escolha pode ser adequadamente considerada como um curso de ação ou estratégia, mesmo que tenha duas alternativas. Atentemos que apesar das possíveis escolhas dos comandantes, o resultado da batalha na passagem vai depender das ações de milhares de soldados, e das características do terreno, clima, logística, tecnologia e comunicações. Bradley e von Kluge podem ter sido influenciados por esses fatores na formação e fornecimento de seus exércitos, mas eles não podem controlar esses fatores, após as tropas se envolverem.

Posto que o comandante alemão tem duas estratégias, seu espaço de estratégias é:

$E_{Ale} = \{Ataque,\ Retirada\}$

E o norte-americano possuindo três estratégias tem por espaço de estratégias:

$E_{Ame} = \{Reforar\ a\ passagem, Avanar\ as\ reservas,\ Aguardar\ 24horas\}$.

Originando seis possíveis situações. Na primeira os americanos reforçam a passagem e os alemães atacam, sendo o resultado provável os americanos repelirem o ataque, conforme figura:

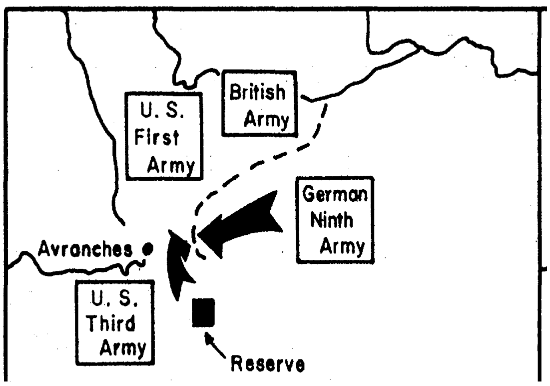

Figura 3.13: Americanos reforcam e Alemães atacam a passagem

A próxima situação é ainda os americanos reforçarem a passagem e agora os alemães partem em retirada, ocasionando uma separação das tropas mas pequena pressão na retirada das tropas alemães, retratada na figura:

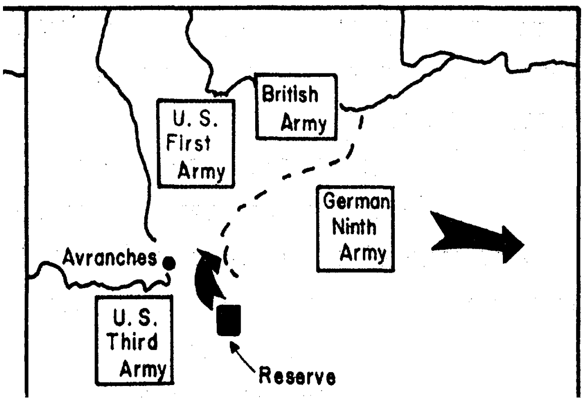

Figura 3.14: Americanos reforcam e Alemães batem em retirada

Na terceira situação, os americanos avançam suas reservas para o leste e os alemães atacarem a passagem, sendo muito provável que as tropas alemães agrupem-se e isolem as forças de reserva norte-americanas que avançam para o leste. Das situações até agora analisadas inegavelmente está é a que possui menor preferência para os americanos e por certo a de maior preferência para os alemães. Os interesses envolvidos não possibilitam qualquer possibilidade de cooperação entre as partes, onde os ganhos de um são necessariamente obtidos com as perdas do outro jogador. Enfim, ressaltando a percepção que estamos em um jogo *estritamente competitivo*, ou seja, um jogo *soma zero*.

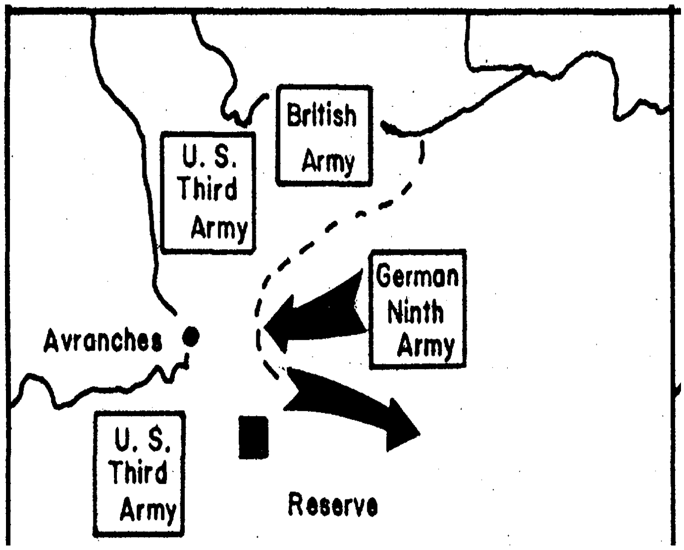

Figura 3.15: Americanos enviam reservas ao leste e Alemães atacam a passagem

Na situação seguinte, os americanos ainda enviam as forças reservas ao leste, mas agora os alemês batem em retirada e os norte-americanos estariam em uma posição e com forças disposta de forma ideal para tornar a retirada alemã catástrofica com provável aniquilação das forças alemãs.

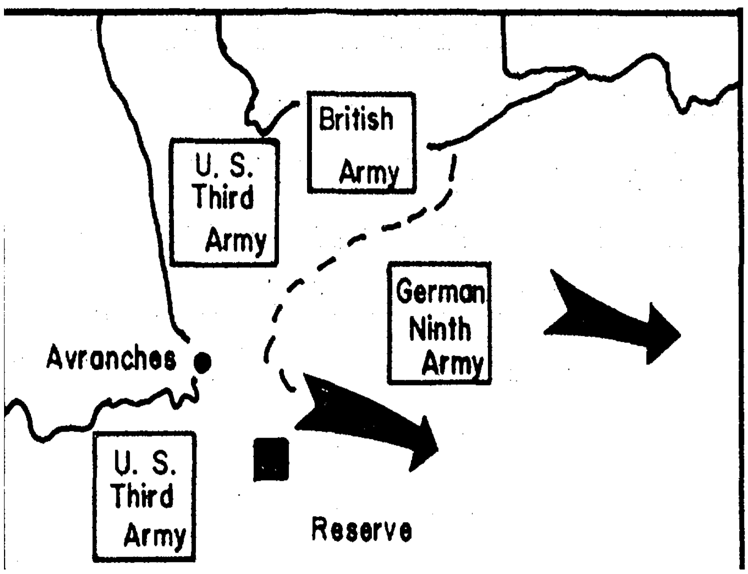

Figura 3.16: Americanos enviam reservas ao leste e Alemães batem em retirada

Na quinta batalha possível, os americanos mantém as suas forças reservas aguardando por 24 horas e os alemães atacam a passagem, neste contexto a separação das forças alemães persistirá sendo extremamente provável que os alemães sejam cercados e consequentemente tenham suas forças dizimidas. Por certo, que esta situação e anterior são totalmente desfavoráveis ao exército alemão e naturalmente as de maior preferência do exército americano

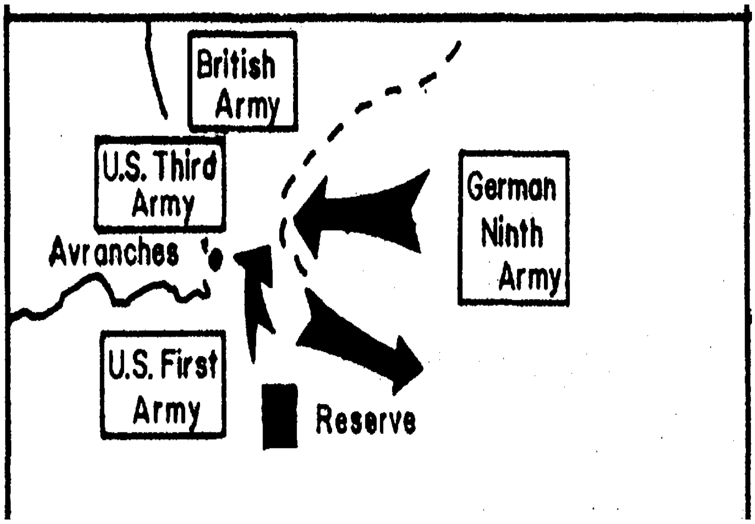

Figura 3.17: Americanos mantém posição por 24 horas e Alemães atacam passagem

Por fim, os americanos ainda mantém as suas tropas no aguardo por 24 horas e os alemães batem retirada com uma moderada pressão sobre a sua retirada.

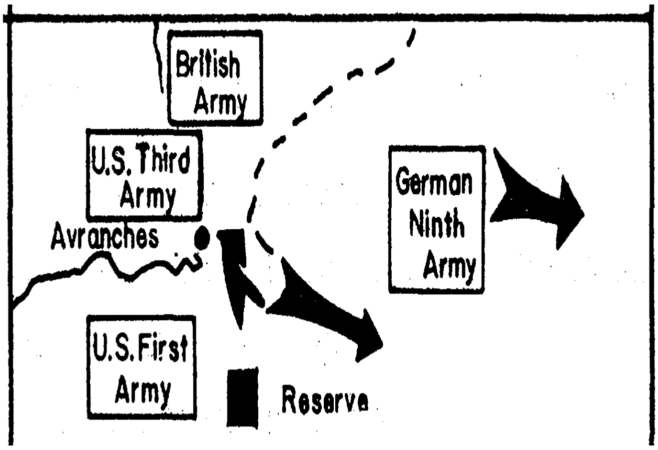

Figura 3.18: Americanos mantém posição por 24 horas e Alemães batem em retirada

A forma normal (estratégica), onde o ganhos são descritos na intersecção das estratégias de uma perspectiva norte-americana, correspondente deste jogo é:

		Estratégia Alemã	
		Ataque	Retirada
Estratégia	Reforçar passagem	Passagem segura	Pequena pressão na retirada alemã
	Avançar reservas	Perda da passagem	Fortíssima pressão na retirada alemã
Americana	Reforços aguardam	Passagem segura e alemães cercados	moderada pressão sobre a retirada alemã

Entretanto, o aspecto descritivo da situação pode induzir a interpretações equivocadas das preferências do exército americano. Logo, para evitar eventuais equivocos(e mais uma vez utilizarmos o ferramental da teoria), vamos atribuir uma ordem de preferência do exército americano a cada uma dos seis resultados possíveis. A ordem de preferências é:

1. Passagem segura e alemães cercados;

2. Fortíssima pressão na retirada alemã;

3. Moderada Presssão na retirada alemã;

4. Pequena pressão na retirada alemã;
5. Passagem segura;
6. Perda da passagem.

Agora vamos atribuir um valor que identifique esta ordem de preferências, enfim vamos determinar a utilidade de cada uma delas:

1. Passagem segura e alemães cercados(10);
2. Fortíssima pressão na retirada alemã(8);
3. Moderada Presssão na retirada alemã(7);
4. Pequena pressão na retirada alemã(6) ;
5. Passagem segura(5);
6. Perda da passagem(0).

Resultando na forma normal:

		Estratégia Alemã	
		Ataque	Retirada
Estratégia	Reforçar passagem	5	6
	Avançar reservas	0	8
Americana	Reforços aguardam	10	7

E agora, surge mais uma vez o problema de qual seria a sua escolha caso se encontrasse na posição dos comandantes americano e alemão? E, o que nos orienta a fazer, ou melhor, qual estratégia a teoria dos jogos sugere a ser adotada por cada comandante?[4].

A existência de jogos de soma zero não envolvendo situações de guerra entre Estados não é usual, mas com pequenas adpatações podemos retratar situações competitivas do mundo "real"por jogos de soma zero. Seja o exemplo a seguir:

Exemplo 11 - Luta Pelo Mercado: *Duas empresas, denominemos por empresas A e B, lutam por um mercado fijo, e o gerente de cada uma delas é instruído para que se preocupe apenas com a porcetagem deste mercado. cada gerente pode manter a tecnologia atual com a qual faz o seu rpoduto, ou trocar a mesma por uma alternativa. Se resolve trocar pode escolher entre as teconlogias T1 ou T2. Cada tecnologia implica diferentes características do produto final. Com as atuais tecnologias a empresa A mantém metade do mercado, entretanto se B mudar para T1 a empresa A passa a deter 40% do mercado e B 60%, e se B adotar T2 a empresa A fica com 45% do mercado e B com 55%. A fica com 20% do mercado e B 80% , se A ao optar por trocar por T1 e B manter atual tecnologia. Todavia, A com T1 e B com T1 a divisão do mercado fica 30 e 70% respectivamente, mas A com T1 e B com T2 temos novamente uma divisão igual do mercado. Mas A com T2 e B mantendo a tecnologia a partição do mercado é 70 e 30%, mas A com T2 e B com T1 a repartição é 35 e 65%, por fim ambos com T2 propicia 10% para A e 90% do mercado para B.*

Qual atitude deve cada gerente escolher, nos termos da teoria qual estratégia cada um deve adotar?

Novamente observemos que cada gerente toma sua decisão sem o conhecimento da decisão do outro gerente, assim mais uma vez temos um jogo simultâneo, cuja melhor representação é a forma normal. Sendo o ganho de cada gerente representado através do percentual que detém do mercado temos a forma normal a seguir:

[4] Os dados e figuras das duas situações, Bismarck e Avranches, foram obtidos do artigo *Military Decision and Game Theory* de O.G. Harywwod Junior, publicado em 1954 no Journal of Operations Research Society of America, Vol. 2

		Gerente B		
		Manter	T1	T2
Gerente A	Manter	(50,50)	(40,60)	(45,55)
	T1	(20,80)	(30,70)	(50,50)
	T2	(70,30)	(35,65)	(10,90)

Constamos, de forma simples através da forma normal, que não trata-se de um jogo de soma zero. Todavia, se pensarmos que cada aumento do mercado obtido por uma empresa advém da perda da correspondente parcela da empresa adversária podemos converter a situação em um jogo de soma zero. Em utras palavras, se a empresa A possui 50% do mercado signiofica que a empresa B perdeu esta parcela do mercado para a empresa A, ou seja se A possui +50% do mercado significa que B perdeu 50% do mercado, ou seja, tem *"um ganho de -50%"*. Com este raciocínio obtemos a nova forma normal, correspondente a um jogo soma-zero.:

		Gerente B		
		Manter	T1	T2
Gerente A	Manter	(50,-50)	(40,-40)	(45,-45)
	T1	(20,-20)	(30,-30)	(50,-50)
	T2	(70,-70)	(35,-35)	(10,-10)

Que de maneira mais sintética ainda fica:

		Gerente B		
		1 - Manter	2 - T1	3 - T2
Gerente A	1 - Manter	50	40	45
	2 - T1	20	30	50
	3 - T2	70	35	10

Agora, somos o gerente da empresa A e sou consciente que cada parcela do mercado que obtenho vem da correspondente perda da empresa A, bem como cada perda minha é decorrente de um ganho de B. Nada mais natural que deseje maximizar meus ganhos, sabendo que B ao mesmo tempo fará de tudo possível para minimizar suas perdas. Dito de outra forma, a decisão do gerente A está subordinada ao que o mesmo pensa que o outro gerente fará, assim possuindo um pensamento pessimista prepara-se para a pior situação que possa vir a ocorrer, admitindo que tudo que não pode controlar irá ocorrer da pior maneira para ele. O espaço de estratégias de A é $Manter, T1, T2$ e o de B é: $Manter, T1, T2$. Assim, se o gerente A decidir *Manter* a tecnologia o mesmo supõe que B irá por sua vez fazer a escolha que lhe resulte o menor ganho possível, ou seja, que B escolherá *T1* por sua tecnologia, assim A detém apenas 40%(e B 60%). De maneira análoga se A adotar T1, fará a suposição que B mantenha a tecnologia, posto que A fica com 20% e por fim se A escolher T2, irá confiar que B adotará T2, ficando com somente 10% do mercado. Porquanto, das alternativas apresentadas o que fazer? È inquestionável que, agindo de forma racional[5], e partindo do pressuposto que seu adversário (o gerente B) é ao menos tão racional (e razoável) como ele e faz todo o possível para evitar nossos objetivos, será melhor adotar *Manter* a tecnologia atual, afinal assim garante 40% do mercado no **mínimo**.

Por outro lado, o gerente B, possui o conhecimento que suas perdas implicam em ganhos da empresa concorrente e por certo deseja que tais perdas sejam pequenas, de preferência iguais a zero (ou próximas). Então, também com uma visão pessimista e imaginando que seu concorrente também irá fazer as escolhas que resultem pior para ele (gerente B), analisa a situação e pensa que se optar por *Manter* a atual tecnologia o gerente A irá trocar a atual tecnologia por T2, perdendo B 70% do mercado (e ficando apenas com 30%). O gerente B, continuando com sua análise, pensa que se optar

[5]Ou seja de acordo com suas preferências, que no presente caso são representadas pelo percentual do mercado. Quanto maior o percentual, maior a preferência

por trocar por *T1* o gerente A irá por seu turno *Manter* a atual tecnologia, resultando em uma perda de 40% do mercado para B. Finalmente, B conclui que ao escolher T2 o gerente A irá realizar a troca da atual tecnologia por T1, resultando em uma perda de 50% do mercado. O gerente B, também sendo racional, almeja minimizar suas perdas e através da análise ulterior ira escolher trocar a atual tecnologia por *T1*, posto que assim suas perdas serão de 40% no **máximo**.

Então, o gerente A irá escolher *Manter* a atual tecnologia e o gerente B trocar a vigente tecnologia por *T1*, por conseguinte o ganho de A será de 40% do mercado e as perdas de B também de 40% do mercado. Na terminologia da teoria, A escolhe a estratégia *Manter* e B a estratégia *T1*, sendo o valor(resultado) do jogo *40%*.

Estas estratégias possuem uma característica peculiar. Suponhamos que o gerente B não adote a mesma e opte por T2, mas o gerente A continue com *Manter* a tecnologia,isso pode ser de alguma forma vantajoso para ele? Por certo que não, afinal nesta situação B perde 45%, situação pior que a anterior. Mas, o gerente B é teimoso é resolve agora *Manter* a tecnologia, enquanto A continua com *Manter*, o que irá ocorrer? O gerente B irá perder 50% do mercado, o que não é melhor que a escolha original. Portanto, o gerente B não possui qualquer interesse em alterar sua estratégia enquanto A mantiver sua estratégia de *Manter* a atual tecnologia. Mas, se A acreditar que possa fazer algo melhor e resolve então trocar a tecnologia pr *T1* enquanto B mantém a sua escolha inicial, o que ocorre? Neste caso A ganha apenas 30% do mercado, resultado inferior. A é persistente (e teimosinho), decidindo agora trocar por *T2*, nesta eventual escolha seu ganho seria de 35% também menor que o ganho original. Logo, A também não possui qualquer interesse em alterar sua estratégia enquanto B mantiver-se fiel a sua escolha original (trocar por T1). A estratégia *Manter* para A e a estratégia *T1* para B possuem uma singular "estabilidade", se uma das partes mantiver-se fiel a ela, para a outra parte não será de forma alguma vantajoso alterar sua escolha. Portanto, nenhum dos jogadores tem vantagem ao alterar unilateralmente sua estratégia. Caso o jogador A saiba de antemão que o jogador B usará sua estratégia *T1*, esta informação em nada alterará a escolha de A, de forma semelhante para B saber que A adotará a estratégia *Manter* não o fará mudar sua escolha. Tais estratégias são denominadas de *Estratégias de Equilíbrio* e o resultado (ganho, lucro, etc) do jogo correspondde a este par de estratégias é o *ponto de equilíbrio* [6]. Podem existir mais de um ponto de equilíbrio, mas, se houver, todos proporcionarão o mesmo ganho. Quando jogos de dois jogadores e de soma zero apresenta um ou mais pontos de equilíbrio, é natural considerar que o ganho comum que um ou mais pontos proporcionam seja o resultado final do jogo.

A estratégia *Manter* adotada por A corresponde aquela que lhe garante o menor ganho possível, enquanto que a estratégia adotada por B, *T2*, é aquela que garante que sua perda máxima. Esta técnica é denominada de minimax, consistindo em uma atitude de segurança (prudência) com relação à incertezas das decisões do adversário. Afinal, seguindo a mesma o jogador A *não deve se contentar com nada mesnos que 40%* e o jogador B por sua vez *terá certeza que não perdera mais que 40% do mercado*. Portanto, mesmo com a incerteza das escolhas do seu adversário, cada jogador possui certezas a cerca de seus ganhos e perdas. Sendo utilizada de forma geral nos jogos de duas pessoas e de soma zero, pois a mesma fornece as *estratégias ótimas* para cada jogador. Mas o que seria uma estratégia ótima? Para a teoria dos jogos é aquela que sendo o jogo repetido reiteradamente garante ao jogador o ganho máximo médio possível (o que é o mesmo que a perda mínima média possível). Na maioria das situações práticas ao decidir por uma estratégia razoável tem-se de atentar não apenas a um, mas a vários parâmetros na elaboração dos criteŕios de escolha, que por sua vez refletem nossas preferências materializadas na função de utilidade. Deste modo, a estratégia que seja ótima para um critério não seja ótima para os demais. Não obstante, sendo conscios das restrições e portanto sem ater-se cegamente as recomendações, pode-se apesar de tudo empregar o ferramental matemático da teoria para a elaboração de senão uma estratégia *ótima*, ao menos de uma estratégia *preferível*.

Valor Inferior e Superior do Jogo, Ponto de Sela

O princípio da prudência que norteia o método minmax, dita que cada jogador acreditando que o seu adversário é racional irá agir sempre de tal forma que suas escolhas(estratégias) sempre provoquem o

[6] Também conhecido na literatura por ponto de sela

maior prejuízo a seu contricante. Para apresentar melhor o método, vamos repetir a forma normal do exemplo 11, onde representaremos cada estratégia de A, por A_i e de B por B_j com o indíce i variando de 1 a n e j variando de 1 a m,sendo que n e m representam a quantidades de estratégias disponivéis para A e B,respectivamente. Nesta nova representação acrescentamos uma coluna, na qual indicaremos o menor valor de cada linha, que seja, o menor ganho que o jogador A pode obter para cada estratégia possível, então:

		Gerente B			
		B_1	B_2	B_3	Minímo Linha
Gerente A	A_1	50	40	45	**40**
	A_2	20	30	50	20
	A_3	70	35	10	10

Assim, ao escolher determinada estratégia o jogador A avalia a atitude do adversário que proporcionará (a ele A) menor ganho, ou seja, justamente o valor corresponde na coluna "Miníno linha". Então ao escolher qualquer estratégia, tendo em conta o resultado das ações racionais do adversário , o jogador A não deve esperar obter valores maiores que os contidos na coluna "Minímo linha". Se não pode A esperar obter valores maiores que os da coluna "Minímo linha", então ele com certeza almeja obter o maior deles, ou seja, o máximo destes valores mínimos, o max-min, que é 40%, correspondendo ao jogador A adotar a estratégia A_1. Observe, que se A adotar realmente esta postura, independente do que B faça (independe da escolha da estratégia de B), o jogador A pode garantir que obterá um ganho que não será em qualquer caso inferior a 40%. Ou seja, este será o valor *mínimo* de ganho de A.[7]

Renomeando a coluna "Miníno linha" por α_i, assim o elemento da linha 1, o menor valor da linha 1, será $\alpha_1 = 40$ e assim por diante para os demais elementos. Temos:

		Gerente B				
		B_1	B_2	B_3	α_i	
Gerente A	A_1	50	40	45	40	α_1
	A_2	20	30	50	20	α_2
	A_3	70	35	10	10	α_3

Agora o maior valor do conjunto $\{40, 20, 10\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, ou seja, o máximo dos minímos, o mesmo que o máximo dos α_i , o qual designaremos simplesmente por α é o *valor inferior do jogo*, cujo resultado numérico é: $\alpha = max(\alpha_i) = 40$.

Realizando um raciocionio semelhante para o jogador B, que seja, aplicando o princípio da prudência também fará suas escolhas de tal forma que suas perdas sejam mínimas. Agora, acrescentaremos uma linha na qual indicaremos o maior valor de cada coluna, em outras palavras, a maior perda que o jogador B pode sofrer para cada estratégia possível, então:

		Gerente B		
		B_1	B_2	B_3
Gerente A	A_1	50	40	45
	A_2	20	30	50
	A_3	70	35	10
	Máximo coluna	70	**40**	50

B, que é racional, sabe que A é racional, aplicando o princípio da prudência, ao escolher determinada estratégia, também, avalia a atitude do adversário que proporcionará (a ele B) maior perda, ou seja, justamente o valor corresponde na linha "Máximo coluna". Então ao escolher qualquer estratégia, tendo em conta o resultado das ações racionais do adversário , o jogador B não deve esperar perder valores

[7]obviamente o mínimo que B pode perder

maiores que os contidos na linha "Máximo coluna". Se B , tem por um dos seus objetivos perder o mínimo possível e suas maiores perdas não podem ser superiores aos valores da linha "Máximo coluna", então ele na pior das hipoteses almeja obter o menor, ou seja, o minímo destes valores máximos, o min-max, que é 40%, correspondendo ao jogador B adotar a estratégia B_2. Observe, que se B adotar realmente esta postura, independente do que A faça (independe da escolha da estratégia de A), o jogador B pode garantir que sua perda não será em qualquer caso superior a 40%. Ou seja, este será o valor *máximo* de perda de B[8].

Renomeando a linha "Máximo coluna" por β_j, assim o elemento da coluna 1, o maior valor da coluna 1, será $\beta_1 = 70$ e assim por diante para os demais elementos. Temos:

		Gerente B		
		B_1	B_2	B_3
Gerente A	A_1	50	40	45
	A_2	20	30	50
	A_3	70	35	10
	β_j	70	40	50
		β_1	β_2	β_3

Sem maiores surpresas, o menor valor do conjunto $\{70, 40, 50\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, ou seja, o mínimo dos máximos, o mesmo que o mínimo dos β_j , o qual designaremos simplesmente por β é o *valor superior do jogo*, cujo resultado numérico é: $\beta = min(\beta_j) = 40$.

O princípio que dita que os jogadores empreguem as estratégias min-max e max-min em teoria dos jogos e suas aplicações é chamado de *princípio do mín-máx*. As estratégias max-min e min-max dos jogadores denominam-se simplesmente de *estratégias mín-máx*. Os jogadores ao utilizarem o princípio do mín-máx garantem que o resultado de um jogo, designado por r estará sempre contido entre os valores inferior e superior do jogo, quer dizer: $\alpha \leq r \leq \beta$.

No intuíto de praticarmos, lembremos do exemplo 2 modificado com a forma normal a seguir:

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Quais são os valores superior e inferior deste jogo? Aplicando a metodologia desenvolvida temos:

	B_1	B_2	α_i
A_1	1	-1	***-1***
A_2	-1	1	***-1***
β_j	***1***	***1***	

Posto que as magnitudes α_i e β_j são constantes e iguais, respectivamente, a -1 e 1, os valores inferior e superior do jogo também são iguais a -1 e 1. Obviamente, que qualquer estatégia do jogador A é sua estrateégia máx-min e da mesma maneira qualquer estratégia do jogador B é sua estratégia mín-máx. E a conclusão é muito simples: qualquer estratégia do jogador A lhe garante que não perderá mais de 1 e o mesmo para o jogador B. Desta forma, o valor deste jogo é zero. Intuitivamente, determinamos o resultado do jogo, mas adiante apresentaremos um forma para a determinação do mesmo.

Tomemos a forma normal um pouco mais complexa a seguir, para determinarmos os valores superior e inferior:

Através da sistemática desenvolvida temos:

[8] Consequemtemente o máximo que o jogador A pode ganhar

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-4	4
A_2	-4	9	-6
A_3	5	-7	6

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	-4	4	***-4***
A_2	-4	9	-6	***-6***
A_3	5	-7	6	***-7***
β_j	***5***	***9***	***6***	

O valor inferior do jogo, sendo o máximo dos mínimos, que seja, o máximo dos $\alpha_i =$ máximo do conjunto $\{-4, -6, -7\} = -4 = \alpha$. Enquanto o valor superior é o mínimo dos máximos, que corresponde ao mínimo dos $\beta_j =$ mínimo do conjunto $\{5, 9, 6\} = 5 = \beta$. Estes valores significam que se os jogadores aplicam o princípio do min-max, o jogador A com *certeza* não obterá ganhos inferiores a -4(ou seja suas perdas não serão superiores a -4) e o jogador B com *certeza* não terá perdas superiores a 5. Assim a estratégias máx-min é A_1 e a mín-máx é B_2. E o resultado do jogo, se ambos empregarem tais estratégias será: $r = -4$, onde observa-se que $-4 \leq r \leq 5$, ou seja, $\alpha \leq r \leq \beta$.

Vejamos mais uma situação para explorarmos outra propriedade das estratégias mín-máx e max-mín:

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1,8	0,8	0,4	*0,4*
A_2	0,6	1,2	1,6	***0,6***
A_3	1,0	1,4	0,4	*0,4*
β_j	*1,8*	***1,4***	*1,6*	

O valor inferior deste jogo é $\alpha = 0,6$ e o superior é $\beta = 1,4$. Logo, a estratégia más prudente (mín-máx) para o jogador A é A_2 e para o jogador B sua estratégia mais prudente (máx-mín) é B_2. Desta maneira se ambos os jogadores empregarem suas estratégias máis prudentes a solução deste jogo, ou seja, o resultado do mesmo será o valor originado da intersecção das estratégias A_2 e B_2, que é 1,2. O resultado é maior que o valor inferior e menor que o valor superior. Entretanto suponhamos, que o jogador B obtenha a informação (viva a espionagem) que o jogador A irá adotar sua estratégia mín-máx. O jogador B, poderá "castigar"o jogador A adotando uma estratégia diversa da sua máx-mín, no caso específico adotaria a estratégia B_1 que produziria um resultado de 0,6; ou seja, o jogador A obteria um ganho inferior. Mas A por sua vez sabendo que B empregará a estratégia B_1, utilizaria A_1 gerando um resultado de 1,8; valor maior que o da estratégia mín-max,e assim poderíamos proseguir. Portanto, concluímos que as estratégias mín-máx e máx-min não são estavéis, quer dizer, que as escolhas podem ser alteradas(e consequemtemente o resultado do jogo) com os dados que são obtídos sobre a estratégia do adversário.

Ora, acabamos de mostrar que as estratégias mín-máx e máx-mín não são estavéis, mas no exemplo 11 demonstramos exatamente o inverso, qual o motivo desta aparente contradição? Na realidade, observermos que o valor inferior e superior do jogo do exemplo 11 é respectivamente, $\alpha = 40\%$ e $\beta = 40\%$. Temos que os valores inferior e superior são iguais e desta maneira quando tal ocorre existem estratégias e ponto de equilíbrio, sendo todavia o termo mais usual *ponto de sela*(que corresponde justamente ao resultado r do jogo). Jogos dotados de ponto de sela possuem solução, onde entendemos por solução o par de estratégias ótimas correspondentes ao máx-min e mín-max e o resultado do jogo é justamente o ponto de sela (equílibrio). Atentemos que a solução é uma sugestão de ação, desenvolvida pela teoria. Nas situações reais os jogadores possuem livre arbítrio e podem não acatá-las, seja por desconhecimento, teimosia, cometimento de equivocos, mas estes fatores não relevantes ao nosso estudo. Para os mais curiosos a expressão ponto de sela advém da representação gráfica de funções:

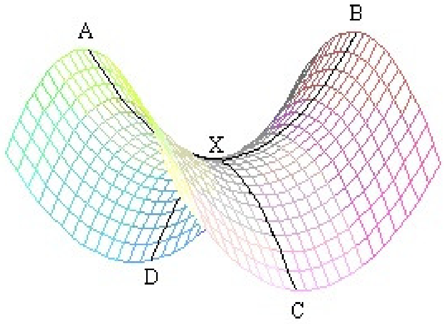

Figura 3.19: Ponto de Sela

O ponto X é o máximo na direção DC e simultâneamente é o mínimo na direção AB, exatamente como os nossos máx-min e mín-max no ponto de equilíbrio, e a figura assemelha-se em muito a sela utilizada na montaria de animais.

Generalizando, para a situação em que o primeiro jogador, por simplicidade, identificado por A, possui n e o segundo jogador, B, possui m estratégias, com m e n ≥ 1, então o espaço de estratégias deles é: $E_A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$; $E_B = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$;

Assim as estratégias de A serão identificadas pelo indíce i e B por j, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Logo, o resultado da intersecção da estratégia A_i com a estratégia B_J identifica-se por: a_{ij}. Desta forma, temos a forma normal do jogo a seguir:

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	....
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

O jogador A, agindo de forma prudente, para definir sua estratégia ótima analisa cada uma de suas estratégias sempre com a perspectiva que B responderá com uma estratéga que resulte a ele (A) o menor ganho possível, assim adicionamos à direita da forma uma coluna α_i, contendo o menor valor dos a_{ij} para a linha i identificado por α_i, ou seja, $\alpha_i = min_i(a_{ij})$.

	B_1	B_2	...	B_m	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	α_n

O jogador A, racional e consciente da racionalidade de B, para cada estratégia A_i espera obter no mínimo α_i e atuando no sentido de maximizar seus ganhos naturalmente tentará obter o valor máximo de α_i, o qual identificamos simplesmente por: α. Assim, α é o máximo dos valores mínimos dos ganhos possíveis de A, ou seja, $\alpha = min_i(\alpha_i)$, mas $\alpha_i = min_i(a_{ij})$, logo $\alpha = max_i[min_i(a_{ij})]$.

O valor α é o *valor inferior do jogo*, também o ganho máx-min, ou apenas máx-min. Correspondendo a um valor de uma determinada linha da forma normal e consequentemente associada a uma estratégia A_i, a qual é chamada de estratégia máx-min. Acreditamos estar bem claro que se o jogador

A ativer-se a sua estratégia máx-min, não importa o que o jogador B faça, o ganho mínimo de A será α. Sendo por este motivo α denominado de *valor inferior do jogo*

O jogo é de soma zero, então os ganhos de um jogador advém das perdas do outro, e o jogador B também racional e consciente da racionalidade de A fará tudo ao seu alcance para minimizar os ganhos de seu adversário (pois estára maximizando os seus ganhos) e também agindo de forma prudente ao escolher sua estratégia ótima analisa cada uma de suas estratégias sempre com a perspectiva que A responderá com uma estratéga que resulte a ele (B) o maior perda possível. Portanto, adicionamos abaixo da forma normal uma linha β_j, contendo o maior valor dos a_{ij} para a coluna j identificado por β_j, ou seja, $\beta_j = mx_j(a_{ij})$.

	B_1	B_2	...	B_m	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	α_n
β_j	β_1	β_2	...	β_m	

O jogador B, agindo cautelosamente espera perder no máximo para cada estratégia B_j o valor β_j e atuando no sentido de minimizar suas perdas naturalmente tentará obter o valor mínimo de β_j, que identificamos por: β. Portanto, β é o mínimo dos valores máximos das perdas possíveis de B, quer dizer, $\beta = min_j(\beta_j)$, mas $\beta_j = max_j(a_{ij})$, logo $\beta = min_j[max_j(a_{ij})]$.

O valor β_j é o *valor superior do jogo*, também o ganho mín-máx, ou apenas mín-máx. Correspondendo a um valor de uma determinada coluna da forma normal, o qual refere-se a uma determinada estratégia B_j, chamada de estratégia mín-máx. Novamente pensamos ser óbvio que o jogador B restringindo-se ao uso da estratégia mín-máx, não importa o que o jogador A faça, terá máxima (e portanto o ganho máximo de A) β. Justificando α denominar-se *valor superior do jogo.*

Os jogos onde $\alpha = \beta$ são estavéis no sentido em que *não é vantajoso para um jogador abandonar sua estratégia máx-mín(ou mín-máx) de forma unilateral.* As estratégias máx-mín e mín-máx são então consideradas ótimas para cada jogador, constituindo-se na solução do jogo.Este par de estratégias é semelhante a uma situação de equilibrio dos pratos de uma balança, os jogadores ao alterar sua estratégia jamais conseguem deslocar o prato de forma que seja favorável. O valor obtido da intersecção destas estratégias é o resultado do jogo (que identificaremos por r, conhecido por ponto sela (ou equílibrio). Um jogo pode posui mais de um ponto de ela, mas isto ocorrer todos eles resultarão no mesmo valor.

Assim, todo jogo, de soma zero de dois jogadores, com ponto de sela possui solução que determina o par de estratégias ótimas das partes envolvidas com as seguintes propriedades:

1. Se as partes seguem suas estratégias ótimas o ganho médio será igual ao valor puro[9] do jogo r, que é simultâneamente o valor inferior e o superior;

2. Se os dos jogadores mantém-se fiel a sua estratégia ótima, em hipótese alguma é vantajoso ao outro jogador utilizar qualquer outra estratégia que não seja á ótima.

Pratiquemos com um questão extraída de Fiani:

Exercício 4 - Disputa Mercado *Considere duas empresas que estão disputando parcelas de mercado. A primeira é a empresa Alfa que tem a possibilidade de lançar 4 tipos diferentes de produtos, que chamaremos de A, B, C e D. A seguda empresa Beta, também pode lançar 4 tipos diferentes de produtos: X,Y, Z e W. Cada empresa só pode lançar um produto de cada vez. A forma estratégica (nomal) a seguir nos informa as parcelas de mercado ganhas pela Empresa Alfa para cada combinação de lançamento de produtos:*

[9]A expressão refere-se ao fato de não estarmos utilizando estratégias mistas, apenas adotando estratégias puras

	Beta(%)			
Alfa(%)	X	Y	Z	W
A	10	20	15	30
B	40	30	50	55
C	35	25	20	40
D	25	15	35	60

Pede-se se há algum ponto de sela nessa matriz de recompensas(pagamentos/ganhos)e, portanto, se há alguma solução pelo método mínimax-máxmín.

Solução:

> *Inicialmente atentemos que cada parcela ganha pela empresa Alfa implica em uma perda exatamente igual da empresa Beta. Assim, a empresa Alfa ao lançar o produto A e Beta lançar o produto X, Alfa obtém 10% do mercado e a empresa Beta perde os mesmos 10%, ou seja, ganha -10%. Logo, estamos em um jogo de soma zero. Aplicando a sistemática mínmáx e máxmín temos a seguinte forma normal ampliada:*

	Beta(%)				
Alfa(%)	X	Y	Z	W	α_i
A	10	20	15	30	10
B	40	30	50	55	***30***
C	35	25	20	40	20
D	25	15	35	60	15
β_j	40	***30***	50	60	

> *Então o valor inferior = o valor superior = 30,e portanto existe um ponto de sela e a estratégias máxmín é A, enquanto a mínmáx é Y. Portanto as estratégias ótimas, e solução do jogo , são A e Y e o resultado (valor) do jogo é 30%. Quer dizer a empresa Alfa agindo de forma prudente deve lançar o produto A, pois assim com certeza obterá no mínimo 30% do mercado. Por sua vez a empresa Beta deve lançar o produto Y, afinal desta forma garante que suas perdas serão no máximo 30%(quer dizer que seus ganhos serão no mínimo 70%). E ambos adotando tais estratégias o resultado do jogo será 30% de ganho para Alfa e 30% de perda para Beta(ganho de 70%)*

Mas, lamentavelmente, conforme vimos em nossos exemplos, existem jogos que não possuem ponto de sela. Nestes caso, o que a teoria dos jogos tem a dizer?

Estratégias Mistas e teorema Minímáx

Sejam as seguintes situações descritas na literatura:

> Se eu pudesse ter agido sem o conhecimento do professor Moriarty, tudo teria saído bem. Mas ele foi demasiado sagaz; viu todos os passos que dei para capturá-lo em minha armadilha. Lutou sempre, e eu sempre o interceptei. A tal ponto que, meu amigo, se se escrevesse a história deste duelo silencioso, ela ocuparia o lugar da mais brilhante série de golpes e contragolpes da crônica do detetivismo. Nunca me elevei a tal altura, e nunca fui tão duramente cercado por um adversário. Ele golpeia fundo, mas eu, por minha vez, também já o golpeei baixo. Dei, esta manhã, os derradeiros passos, e são necessários apenas mais três dias para concluir o assunto. Estava sentado em minha cadeira a pensar em tudo

isso, quando a porta se abriu e o professor Moriarty apareceu diante de mim. Meus nervos agüentam razoavelmente qualquer prova, Watson, mas não posso deixar de confessar que senti um sobressalto quando vi, no limiar de minha porta, o homem que tanto me ocupara o pensamento. Sua aparência era-me inteiramente familiar: muito alto e magro, a fronte alongada numa curva branca e os olhos profundamente enterrados no rosto. Tem o rosto raspado, é pálido, de aparência ascética, e conserva, nas feições, qualquer coisa de professor. Os ombros descaíram com as horas de estudo, e a cara projeta-se para a frente e oscila devagar, de um lado para o outro, num curioso jeito de réptil. Olhou para mim com grande curiosidade nos olhos contraídos.

— O senhor tem um desenvolvimento frontal menor do que eu imaginava — disse ele por fim. — É um hábito perigoso dedilhar armas de fogo carregadas, no bolso do roupão.

A verdade é que, à sua entrada, reconheci num instante o extremo perigo pessoal a que estava exposto. A única fuga concebível consistia em manter-me calado. Num relâmpago, retirei o revólver da gaveta e meti-o no bolso, apontado, por trás da roupa, para ele. Â sua observação, tirei a arma e coloquei-a em cima da mesa com o gatilho levantado. Ele ainda sorriu e pestanejou, mas havia algo em seus olhos que me deixava satisfeito por tê-lo ali.

— O senhor evidentemente não me conhece — disse ele.

— Pelo contrário — respondi —, receio que seja até evidente que o conheço. Sente-se, por favor. Posso dispensar-lhe cinco minutos, se o senhor tem alguma coisa a dizer.

— Tudo o que tenho a dizer com certeza já lhe atravessou a mente.

— Então possivelmente minha resposta também atravessou a sua — ripostei.

— Mantém-se portanto inabalável — insistiu.

— Inteiramente. "(*O problema final*, publicado em *As Aventuras de Sherlock Holmes*, Volume III, editado pelo Círculo do Livro e com tradução de Hamílcar de Garcia)

....

Conheci um garotinho de oito anos cujo êxito como adivinhador, no jogo de "par ou ímpar", despertava a admiração de todos. Este jogo é simples e se joga com bolinhas de vidro. Um dos participantes fecha na mão algumas bolinhas e pergunta ao outro se o número é par ou ímpar. Se o companheiro acerta, ganha uma bolinha; se erra, perde uma. O menino a que me refiro ganhou todas as bolinhas de vidro da escola. Naturalmente, tinha um sistema de adivinhação que consistia na simples observação e no cálculo da astúcia de seus oponentes. Suponhamos, por exemplo, que seu adversário fosse um bobalhão que, fechando a mão, lhe perguntasse: "Par ou ímpar?"Nosso garoto responderia "ímpar", e perderia; mas, na segunda vez, ganharia, pois diria com os seus botões: "Este bobalhão tirou par na primeira vez, e sua astúcia é apenas suficiente para que apresente um número ímpar na segunda vez. Direi, pois, ímpar". Diz ímpar e ganha. Ora, com um simplório um pouco menos tolo que o primeiro, ele teria raciocinado assim: "Este sujeito viu que, na primeira vez, eu disse ímpar e, na segunda, proporá a si mesmo, levado por um impulso a variar de ímpar para par, como fez o primeiro simplório; mas, pensando melhor, acha que essa variação é demasiado simples, e, finalmente, resolve-se a favor do par, como antes. Eu, por conseguinte, direi par". E diz par, e ganha. Pois bem. Esse sistema de raciocínio de nosso colegial, que seus companheiros chamavam sorte, o que era, em última análise?

— Simplesmente — respondi — uma identificação do intelecto do nosso raciocinador com o do seu oponente.(*A Carta Furtada*, publicado em *Ficção Completa, Poesia & Ensaios*, Volume Único, Rio de Janeiro, editora Nova Aguiar, 1986, com tradução de Oscar Mendes)

Prezado leitor qual seria sua atitude caso fosse necessário enfrentar Sherlock ou Moriarty em qualquer tipo de situação estratégica (jogo) estritamente competitiva(soma zero)? Dois gênios capazes de antever todos os seus pensamentos e antecipar todas as suas ações racionais. E enfrentar o garotinho no "par ou impar", com a sua capacidade de penetrar em nossa mente e também descobrir nosso raciocínio seria a nossa ruína econômica (afinal perderiamos todas as nossas queridas bolinhas de vidro,gude para mim). O que fazer? Sentar e chorar ? Afinal, parece que nada podemos fazer ou pensar que possa evitar a nossa derrota certa. Não fazendo diferença se informamos ao nosso adversário qual será nossa estratégia empregada, pois o mesmo já possuía a capacidade de antecipar a mesma. Todavia, não devemos nos desesperar e após nos acalmarmos, percebemos que a real problemática é a nossa incapacidade de surprender o adversário, posto que ele pode antecipar as nossas decisões(escolhas/estratégias), no momento em que as concebemos. Enfim a nossa previsibilidade é que concede ao adversário vantagem. Mas, se nem mesmo nós soubessemos o que iríamos fazer, ainda assim estariamos em vantagem?

Seja, mais uma vez, o exemplo 2 modificado, que é na realidade uma versão do jogo "par ou impar"apresentado por Poe, de forma normal:

	B_1	B_2
A_1	(1,-1)	(-1,1)
A_2	(-1,1)	(1,-1)

Representamos os ganhos de cada jogador neste caso apenas para ajudar no entendimento, pois afinal sabemos que o ganho de A é o mesmo de B com sinal contrário. Podendo a forma normal ser simplificada indicando apenas os ganhos de A.

Estamos neste jogo enfrentando o "garotinho", representado por B, e de forma racional, agindo de acordo os nossos interesses desejamos tornar as nossas perdas as menores possíveis. A nossa situação já é "perdedora', pois o "garotinho" sabe as nossas escolhas, entretanto será que podemos conseguir algo melhor que a derrota *certa*? Existe a posibilidade den um "mal menor"? Neste jogo somente podemos escolher par, A_1, ou impar, A_2, não possuímos outras escolhas, uma delas deve ser feita e nós ao "sabermos"nossa escolha causamos a nossa própria ruína, pois "passamos"esta informação ao adversário. Todavia, tomemos a seguinte atitude: determinaremos qual estratégia adotar - A_1 ou A_2 - através do lançamento de uma moeda, sendo a face visível cara adotaremos A_1 e a face visível coroa adota-se A_2. A probabilidade de sair cara é de 1 caso em duas possibilidades, quer dizer $1/2 = 0{,}5 = 5/100 = 50\%$. de forma idêntica para coroa. Logo, a probabilidade de utilizar A_1 é 50% , idêntico valor para A_2.

Antes o resultado do jogo era nossa derrota certa e nosso ganho seria -1 e do adversário +1. Agora, a situação mudou? Sim, pois independente da capacidade de determinar nossa estratégia, ou mesmo se informarmos antecipadamente nossa técnica de escolha, o outro jogador não possui mais a **certeza de qual será a nossa estratégia**. Possuindo no máximo o conhecimento sobre a probabilidade de uso de cada uma delas, 50% A_1 e 50% A_2. E com a metodologia adotada qual será o resultado provável do jogo?

Em virtude da enorme simetria do jogo é fácil perceber que na metade dos casos ganharemos e na outra metade dos casos perderemos, resultando que noso ganho médio será nulo. Portanto, passamos de um ganho negativo, -1, para um ganho neutro. Não é o melhor ganho possível, mas inegavelmente dos "males é o menor". Portanto, a sistemática aleatória foi benefica. Na teoria dos jogos a atribuição de probabilidades, com a perspectiva de reduzir nossas perdas, ao uso de uma estratégia denomina-se de **estrátégia mista**, para contrapor a certeza da escolha de uma estratégia que denominamos de *estratégia pura*. A vantagem da troca da *certeza* da escolha de uma estratégia por uma possibilidade (probabilidade) de uso da mesma é abrangente, no capítulo 2 apresentamos algumas situações de uso,*aleatoriedade da seleção para cair em malha fina, adaptabilidade das espécies, etc*, e consiste em elemento fundamental na teoria dos jogos.

Representamos uma estratégia mista indicando as estratégias puras com suas respectivas probabilidades. As estratégias puras de A são: A_1 e A_2, e adotando probabilidades iguais de 50% temos que a estratégia mista de A , identificada por S_A será:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 50\% & 50\% \end{pmatrix}$$

Com as probabilidades de A_1 e A_2 , 30 e 70%, respectivamente, temos:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 30\% & 70\% \end{pmatrix}$$

Sejam p_1 e p_2, as probabilidades genericas de A_1 e A_2, temos:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

A probabilidade de qualquer evento ocorrer encontra-se entre 0 e 1. A *certeza* da sua não ocorrência é 0, enquanto a *certeza* da sua ocorrência é 1. Portanto, nomeando a probabilidade de um evento ocorrer por p, temos que $0 \leq p \leq 1$. Para um evento qualquer somente existem duas possibilidades: ocorrer ou não ocorrer, ou seja, a probabilidade evento ocorrer ou probabilidade evento não ocorrer é uma certeza. Logo, a probabilidade evento ocorrer + probabilidade evento não ocorrer é igual a 1, implicando que p + probabilidade evento não ocorrer = 1, assim: probabilidade evento não ocorrer = 1-p.

No jogo "par ou impar"ou do exemplo modificado, existem apenas duas possibilidades de escolha para cada jogador: par(A_1) ou impar(A_2). Sendo p a probabilide do jogador A escolher A_1, qual será a probailidade de escolher A_2? Por certo que a probabilidade de escolher A_2 (impar) é idêntica a probabilidade de não escolher A_1 (par), que sabemos ser 1 - p. Desta maneira, a probabilidade de escolher A_2 é 1 - p. Esta conclusão é valida para todo jogo com apenas duas estratégias puras disponivéis para o jogador A[10], ou seja, se a probabilidade de A_1 for p , 1 - p corresponde a A_2 com estratégia mista:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Natural questionar-se qual será a representação para um espaço de estratégias com mais de dois elementos. Responderemos com ajuda da seguinte forma normal :

		B				
		B_1	B_2	B_3	$Probabilidade(\%)\ A_i$	
A	A_1	50	40	45	35	p_1
	A_2	20	30	50	30	p_2
	A_3	70	35	10	20	p_3
	A_3	70	35	10	10	p_4

Acrescentamos a coluna com possivéis valores para as probabilidades de uso de cada estratégia pura de A para melhor compreensão. Com certeza o jogador A deve usar A_1 ou A_2 ou A_3 ou A_4, ou em termos matemáticos, a soma desta probabilidades deve ser 1, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, naturalmente para um espaço de estratégias de A com n elementos, $E_A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, ..., A_n\}$, temos: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + ... + p_n = 1$. E estratégia mista, respectiva:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 35 & 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & ... & A_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & ... & p_n \end{pmatrix}$$

Analogamente, para o jogador B com m elementos no espaçõ de estratégias, $E_B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, ..., B_m\}$, e respectivas probabilidades q_j, com $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + ... + q_m = 1$, a estratégia mista de B é:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & ... & B_m \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & ... & q_m \end{pmatrix}$$

[10]Espaço de estratégias com apenas dois elementos

Uma estratégia pura, creio que o leitor atento percebeu, é um caso particular de estratégia mista, onde todas as probabilidades são nulas exceto uma, por exemplo a estratégia pura A_1, do exemplo anterior, pode ser representada por:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E de forma geral:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & ... & A_i & ... & A_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Retornando ao exemplo 2 modificado, a hipótese p = 0, significa que o jogador A, com *certeza* não escolheu A_1 e sendo a probabilidade de escolher A_2 = 1 - p = 1 - 0 = 1, A escolheu com *certeza* A_2. Então, A estaria utilizando sua estratégia pura A_2. Assim, se B adotar B_1 seu ganho será de 1 e -1 para B_2.

Quando p = 1, o inverso ocorre, ou seja, A, com *certeza* escolheu sua estratégia pura A_1. E B adotando B_1 ganha - 1 e 1 para B_2.

Mas o que ocorre se p for um valor entre 0 e 1? Em outros termos, quais os possíveis resultados do jogo se A adotar uma estratégia mista? Agora quando maior o valor de p maiores as chances de A escolher A_1 e maiores os **ganhos esperados** de B por escolher B_2, o qual é inferior ao valor quando $p = 1$, pois neste extremo existe a certeza de A escolher A_1, e para p < 1, há alguma probabilidade, não importando quão pequena seja, de A escolher A_2, não podendo B *esperar* obter um ganho de 1.

Ilustremos, seja p = 0.95 = 95%, quer dizer há 95% de chance de A escolher A_1, todavia existe também 5% de A escolher A_2. O **valor esperado** de ganho de B ao escolher a estratégia B_2, seria:

$$GE_{B_2} = (0,95 \cdot 1) + (0,05 \cdot -1) = 0,9$$ [11]

Enquanto o **valor esperado** de ganho de B para B_1, seria:

$$GE_{B_1} = (0,95 \cdot -1) + (0,05 \cdot 1) = -0,9$$

Estes valores fracionários significam o que? Afinal, aos jogadores não é facultado erder ou ganhar pedaços frações de real (ou de bola de gude). A interpretação usual é sendo o jogo realizado reiteradas vezes, com as condições dadas, que seja A utilizando a estratégia mista $A_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 95\% & 5\% \end{pmatrix}$, o jogador B ao utilizar a estratégia B_1 perderia em **média** 0,9 R$ e com B_2 ganharia em **média** 0,9 R$

Vejamos mais exemplos:

Exemplo 12 - Os Daiquiris: *Considere o seguinte episódio, elaborado a partir dos arquivos de um bom bar. Alex e Olaf estão matando o tempo entre voos.*

"Conheço um bom jogo", diz Alex. "Apontamos um dedo ou dois dedos para o outro. Se ambos mostrarmos a mesma quantidade dedos, você me compra a quantidade mostrada de Daiquiri, quer dizer um dedo um Daiquir, dois dedos dois daiquiris. Caso mostremos quantidades diferentes de dedos lhe faço o pagamento de um centavo. Este jogo vai ajudar a passar o tempo."

Olaf parece bastante indiferente. "Isso soa como um jogo muito maçante - pelo menos em seus estágios iniciais."Seus olhos vidrados no teto por um momento; então retorna à conversa com: "Agora, se você tivesse o cuidado de me pagar 42 centavos antes de cada jogo, como compensação parcial para todas as bebidas de 55 centavos que vou ter que comprar para tí, então eu ficaria feliz em passar o tempo com você. "

"Quarenta e um centavos", diz Alex.

---

[11] Prezado leitor lembra-se do início do cápitulo? Evidente que sim, inclusive poderia ter feito da equivalente forma: $GE_{B_2} = \dfrac{(95 \cdot 1) + (5 \cdot -1)}{95 + 5} = \dfrac{(90}{100} = 0,9$.

"Tudo bem", suspira Olaf. "Você realmente deve pagar 42 centavos, pelo menos uma vez em cada 30 jogos, mas acho que isso não vai durar muito tempo."

O espaço de estratégias puras de Olaf e Alex, composto da quantidade de dedos exibida, são: $E_{Olaf} = E_{Alex} = \{1, 2\}$. Irá exibir um dedo com probabilidade de 69% e dois dedos com 31%. Cada Daiquiri custa 55 centavos, assim os possíveis ganhos de Alex são: 55 ou 110 centavos, respectivamente para a coincidência de um ou dois dedos. Por outro lado, o ganho de Olaf limta-se a 10 centavos, representando também as probabilidades de uso de estratégias de Alex temos a seguinte forma normal:

		Olaf		
		1	2	Probabilidade(%) Alex
Alex	1	(55, -55)	(- 10, 10)	69%
	2	(-10, 10)	(110, -110)	31%

Figura 3.20: Jogo dos Daiquiris

Percebe-se que o jogo não pssui um ponto de sela em estatégias puras. Logo, o ganho esperado de Olaf se escolher exibir um dedo é:

$$GE_1Olaf = (0,69 * \{-55\}) + (0,31 * 10) = -34,85$$

E para dois dedos é:

$$GE_2Olaf = (0,69 * 10) + (0,31 * \{-110\}) = -27,2$$

Portanto este jogo em média é favorável a Olaf, pois na pior das hipoteses perde em média 34,85 centavos; todavia, recebe por "indenização"42 centavos.

Figura 3.21: Moedas no Rio

Exemplo 13 - Moedas no Rio: *Steve, um americano, em férias comsua família no Rio de Janeiro, é abordado por um estranho que sugere que eles jogem com moedas. Steve diz que é demasiado quente para um exercício tão grande. O estranho diz: "Bem, então, vamos ficar aqui e falar as palavras 'cara' ou 'coroa' e para ser interessante, vou dar-lhe US$ 30 quando eu falo 'coroa' e você 'cara', e recebo US$ 50 quando é o contrário. E - apenas para a brincadeira tornar-se justa - você dá US$ 50 quando falar coroa juntos, por fim se dissermos cara juntos pago US$ 10"*

Advertido pelo ambiente (eles estão em um pacote no Brasil,pior ainda no Rio de janeiro, para curtir a praia e as Olim*píadas*,), Steve suspeita que deveria chamar a polícia para o homem ser preso, ao invés de jogar com ele. Mas, Steve é um nato conhecedor da teoria dos jogos e a questão desperta seu interesse, percebendo que o espaço de estratégias de ambos é identico, $E_{Steve} = E_{Estranho} = \{cara, Coroa\}$., em seguida que no jogo não há ponto de sela em estratégias puras, formula mentalmente que o estranho falará cara 4 vezes em 7 partidas($\approx 57,14\%$) e coroa nas outras 3 das 7 ($\approx 43\%$) de probabilidade, visualizando a forma normal:

		Steve		
		Cara	Coroa	Probabilidade(%) Estranho
Estranho	Cara	(-10, 10)	(50, -50)	≈57,14%
	Coroa	(30, -30)	(-50, 50)	≈42,86%

Calculando o ganho esperado ao falar cara:

$$GE_{Cara}Steve = (0,57 * 10) + (0,43 * \{-30\}) \approx -7,2$$

E para coroa:

$$GE_{Coroa}Steve = (0,57 * \} - 50\}) + (0,43 * 50) \approx -7,2$$

Steve está certo em desconfiar do estanho, pois independe de sua escolha sempre perderá em média US$ 7,2.

Importante, observar que para a estratégia mista $S_{Estranho} = \begin{pmatrix} Cara & Coroa \\ 57,14\% & 42,86\% \end{pmatrix}$ não importa a estratégia adotada por Steve o jogo terá sempre o mesmo resultado. Será apenas coincidência? Continuemos com nossos exemplos[12].

Exemplo 14 - Campanha: *Dois políticos A e B, estão em campanha concorrendo a uma vaga de senador. É necessário fazer o planejamento para os dois dias finais da campanha. Os dois políticos pretendem gastar estes dois dias finais em duas cidades: Aracaju e Itabaiana. Cada político pode gastar um dia em cada cidade ou então gastar dois dias em Aracaju ou dois dias em Itabaiana*

Resumindo, as estratégias ficam:

A_1 = político A gastar um dia em Aracaju e um dia Itabaiana;
A_2 = político A gastar dois dias em Aracaju;
A_3 = político A gastar dois dias m Itabaiana;
B_1 = político B gastar um dia em Aracaju e um dia Itabaiana;
B_2 = político B gastar dois dias em Aracaju;
B_3 = político B gastar dois dias em Itabaiana.

A matriz de ganho (payoff em inglês ou pagamento), a nossa forma normal, abaixo resume o número (em milhares) de votos ganhos (valores positivos) ou perdidos (valores negativos) para o político A.

O politico A, disposto a fazer de tudo para eleger-se, contrata um especialista em teoria dos jogos, que, após analisar a tabela anterior, concluiu que o jogo não possui ponto de sela em estratégias pura, sugere que a adoção da estratégia mista: $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 7/11(\approx 63,6\%) & 4/11(\approx 36,4\%) & 0 \end{pmatrix}$.

Então, a forma normal estendida, com a representação dos ganhos de B é:

Portanto, o ganho esperado de B com B_1 é:

[12]Os exemplos 12 e 13 , com adpatações, e imagens foram extraídos de *Williams, J.D., The Compleat Strategyst, New York, MacGraw-Hill, 1966*

	B_1	B_2	B_3	Mín. linha	
A_1	0	- 2	2	**-2**	$\leftarrow$ Máxmín
A_2	5	4	-3	-3	
A_3	2	3	-4	-4	
Máx. Coluna	5	4	**2**		
			$\uparrow$ Mínmáx		

	B_1	B_2	B_3	Probabilidades
A_1	0,0	- 2, 2	2, -2	63,6%
A_2	5,-5	4,-4	-3, 3	36,4%
A_3	2, -2	3, -3	-4, 4	0

$$GE_{B_1} = (\frac{7}{11} * 0) + (\frac{4}{11} * -5) + (0 * -2) = -\frac{20}{11}$$

E para B_2 é:

$$GE_{B_2} = (\frac{7}{11} * 2) + (\frac{4}{11} * -4) + (0 * -3) = \frac{14}{11} - \frac{16}{11} = -\frac{2}{11}$$

Finalmente para B_3 é:

$$GE_{B_3} = (\frac{7}{11} * -2) + (\frac{4}{11} * 3) + (0 * 4) = -\frac{14}{11} + \frac{12}{11} = -\frac{2}{11}$$

E o *máximo* que B pode fazer é *minimizar* suas perdas, limitando-as em $-\frac{20}{11}$, ou seja, no mínimo A tem garantido um ganho de $\frac{20}{11}$.

Por sua vez, o candidato B é informado que A contratou o especialista e temeroso com o resulatdo da eleição também contrata outro teórico dos jogos, que lhe informa que sua sitauçaõ não é boa é o melhor a ser feito é adotar a seguinte estratégia mista:$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0 & 5/11(\approx 45,5\%) & 6/11(\approx 54,5\%) \end{pmatrix}$. Pois analisando a forma a seguir:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0,0	- 2, 2	2, -2
A_2	5,-5	4,-4	-3, 3 %
A_3	2, -2	3, -3	-4, 4
Probabilidades	0	45,5%	54,5%

E os ganhos de A:

$$GE_{A_1} = (0 * 0) + (\frac{5}{11} * -2) + (\frac{6}{11} * 2) = -\frac{10}{11} + \frac{12}{11} = \frac{2}{11}$$

$$GE_{A_2} = (0 * 5) + (\frac{5}{11} * 4) + (\frac{6}{11} * -3) = \frac{20}{11} - \frac{18}{11} = \frac{2}{11}$$

$$GE_{A_3} = (0 * 2) + (\frac{5}{11} * 3) + (\frac{6}{11} * -4) = \frac{15}{11} - \frac{20}{11} = -\frac{6}{11}$$

E, consequentemente, o retorno *máximo* possível ao candidato A é $\frac{2}{11}$.

Que legal, temos que o mínimo e o máximo que o candidato A pode obter com o par de estratégias sugeridas é igual, ou seja, de forma idêntica ao caso de estratégias puras temos um par de estratgias de equílibrio que produzem o resultado (ponto de equílibrio) do jogo igual a $\frac{2}{11}$. Já não é crível que estejam ocorrendo apenas coincidencias.

Mas, vamos em frente.

Exemplo 15 - Apostar ou não apostar, eis a questão: *Dois jogadores. Cada um deposita 100 reais sobre la mesa. O jogador I escolhe uma carta que apenas ele observa. A carta pode ser alta (A) o baixaa (B) com igual probabilidad. Uma vez vista a carta, o jogador I tem duas opçoes, passar(P) ou apostar (Ap). Se passar, II recolhe o dinheiro da mesa. Se decide apostar, o jogador II tem duas opções: ver (V) a carta ou abandonar (Ab). Caso abandene, I é quem recolhe o dinheiro da mesa. Se vê a carta, cada jugador debe depositar outros 100 reais a mesa. Se a carta é alta, I leva o pote, entretanto, se a carta é baixa II gana a partida e leva tudo*

Determinemos a forma estratégica do jogo, em unidades reais os ganhos correspondentes.

As estrategias puras para o jogador I são:

I_1: Passar com carta baixa e alta;

I_2: Passar se a carta é baixa, apostar caso contrário;

I_3: Apostar se a carta é baíxa, passar caso contrário;

I_4: Apostar com carta baixa e alta;

As estrategias puras para o jogador II são:

II_1: Passar;

II_2: Ver;

Façamos um par de cálculos para demonstrar a cosntrução da matriz. Suponhamos que I escolh sua estratégia A_2 e II sua estratégia "Ver". Há duas possibilidades da naturaleza com igual probabilidade. Se a carta é baixa, com as estrategias indicadas o jogo termina quando I passa e perde com pagamentos (-100,100); Se a carta é alta, I aposta e II a ve, por conseguinte o jogo termina em (200,-200). Como que ambos estados tem igual probabilidade, a utilidade esperada (ganho médio) para I é 1/2(-100)+1/2(200) = 50; Dado que neste jogo os ganhos de um são as perdas do outro, ganho esperado de II é -50.

Desta forma construímos a matriz, forma normal, com os ganhos esperados de cada jogador:

	II_1	II_2
I_1	(-100, 100)	(-100, 100)
I_2	(0, 0)	(50, -50)
I_3	(0, 0)	(-150, 150)
I_4	(-100, 100)	(0, 0)

O jogador I, famoso por sua erudição, conhecedor da teoria dos jogos, sabe que encontra-se em jogo de soma zero e perscrutando rapidamente a matriz anterior percebe que não há um ponto de sela. Concluindo, que a solução encontra-se no universo das estratégias mistas. Experimentado teórico dos jogos, coisa que nem de longe somos, conclui que suas melhores opções estão em adotar a seguinte estratégia mista:$S_I = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. Afinal, desta maneira impõe que os ganhos de II possíveis são:

$GE_{II_1} = (0 * 100) + (\frac{2}{3} * 0) + (0 * 0) + (\frac{1}{3} * 100) = \frac{100}{3}$

$GE_{II_2} = (0 * 100) + (\frac{2}{3} * -50) + (0 * 150) + (\frac{1}{3} * 0) = -\frac{100}{3}$

E, obviamente, no *máximo* o jogador I pode ganhar $\frac{100}{3}$.

Pensaram que II era tolo, mas não o é, sabendo da erudição de I procurou um teórico dos jogos para ajudá-lo[13]. O expert, orientou a II que adotasse a seguinte estratégia mista: $S_{II} = \begin{pmatrix} II_1 & II_2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, dizendo que agindo desta maneira os ganhos de I seriam:

$GE_{I_1} = (\frac{1}{3} * -100) + (\frac{2}{3} * -100) = -\frac{200}{3}$

$GE_{I_2} = (\frac{1}{3} * 0) + (\frac{2}{3} * 50) = \frac{100}{3}$

$GE_{I_3} = (\frac{1}{3} * 0) + (\frac{2}{3} * -150) = -\frac{300}{3}$

[13]Seria incrível se realmente as pessoas procurassem, e pagassem, os especialistas em situações de conflitos

$GE_{I_4} = (\frac{1}{3} * 100) + (\frac{2}{3} * 0) = \frac{100}{3}$

O máximo destes ganhos é $\frac{100}{3}$ e voilá, novamente, para o par de estratégias mistas indicadas, um ponto de equilíbrio para o jogo. Definitivamente, o leitor inteligente que é, percebeu que não é acaso ou coincidência, que exista um par de estratégias mistas, que forma identica às estratégias puras, determine um ponto de equilíbrio.

Não podemos continuar iludindo nosso leitor tratanto de jogos específicos, intencionalmente direcioando-o a uma interpretação. Em cada um dos jogos, dos exemplos 13 a 15, recomendamos certas estratégias a serem adotadas por ao menos um dos jogadores e indicavamos o resulatdo esperado ao serem seguidas as indicações. É conspicuo que os exemplos eram casos especiais com o intuíto de direcionar à formulação de um importante e fundamental teorema da teoria dos jogos: o teorema minimax de von Neumann, demonstrado em 1928. O teorema miminax afirma que é possível atribuir a todo jogo finito, de duas pessoas, soma zero um valor r, correspondente a quantia média que o jogador I pode esperar ganhar do jogador II, se ambos atuarem sensatamente (de forma racional). Em termos simples:

> *Para qualquer jogo soma zero, de dois jogadores(I e II), existe uma estratégia mista, dita* ótima, *para cada jogador tal que o resultado esperado do jogo para os dois é o mesmo valor r quando os jogadores usam esta estratégia; r é o melhor resultado que cada um pode esperar de uma jogada. Isto, é apenas estratégias mistas são as estratégias ótimas para os dois jogadores*

Os argumentos não-matemáticos[14], motivadores a adoção das estratégias ótimas do teorema, apresentados por von Neumann foram:

1. Há uma estratégia que o jogador I poded adotar e que lhe assegurará a vantagem referida; contra essa estratégia, nada que o jogador II possa fazer impedirá o jogador I de ganho médio igual a r. Consedquentemente, *o jogador I não se contentatará com nada menos que* r;

2. Há uma estratégia que o jogador II pode adotar e que lhe assegurará não perder mais que a quantia que a quantia média de r; em outras palavras, *o jogador I pode ser impedido de ganhar mais do que* r;

3. Por hipótese, trata-se de um jogo soma zero; o que I ganha deverá ser as perds de II. Em virtude do jogador II desejar reduzir ao mínimo suas perdas, *II está motivado a fazer com que o ganho médio de I limite-se a* r.

No capitulo 4, apresenta-se uma demonstração construtiva que serve inclusive de metodologia de obtenção do valor r e das estratégias mistas dos jogadores. No momento, apenas utilizaremos o mesmo sem maiores detalhes sobre a sua obtenção, o leitor tenha paciência e confiança nestes que vos escreve.

Representaremos estratégias mistas ótimas por: $S^*{}_A$ e $S^*{}_B$, por certo que na situação mais geral nem todas as estratégias do espaço de cada jogador necessitam participar da estratégia mista[15]. As estratégias que entram na estratégia mista ótima de cada jogador são suas estratégias "utéis".

No exemplo 15 as estratégias mistas ótimas são: $S^*{}_{II} = \begin{pmatrix} II_1 & II_2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ e $S^*{}_I = \begin{pmatrix} I_2 & I_4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, com todas estratégias puras disponivéis a II são "utéis"e somente I_2 e I_4 são utéis para I.

O teorema minimax propicia à solução do jogo, caracterizada no par de estratégias mistas ótimas, uma propriedade notável: *Se um dos jogadores(A e B) atém-se a sua estratégia mista ótima* $S^*{}_A(S^*{}_B)$ *o ganho não se altera e continua igual ao valor do jogo r, independentimente do que faça o outro jogador, a menos que ele saia dos limites de suas estratégias "utéis".* Podendo empregar qualquer de suas estratégias "utéis"na forma pura ou com qualquer variação nas probabilidades, que não conseguirá alterar o resultado do jogo.

Ilustremos retornando ao exemplo 12, que para tornar a situação mais geral, indicaremos a probabilidade do estranho falar cara por p = 4/7 e coroa, sendo a não ocorrência de cara, já sabemos ser, 1

[14] Os aspectos matemáticos são tratados na demonstração formal no capítulo 4

[15] Probabilidade zero, indica efetivamente o não uso de tal estratégia

- p = 1 - 4/7 = 3/7. Enquanto a probabilidade de Steve falar cara ou coroa são, respectivamente, q e 1 - q.

Então, na maneira mais ampla, as estratégias mistas de Steve e Estranho são: $S_{Steve} = \begin{pmatrix} Cara & Coroa \\ q & 1-q \end{pmatrix}$, $S_{Estranho} = \begin{pmatrix} Cara & Coroa \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. Resultando na forma normal, estendida:

		Steve		
		Cara	Coroa	Probabilidade Estranho
Estranho	Cara	(-10, 10)	(50, -50)	p(4/7)
	Coroa	(30, -30)	(-50, 50)	1-p(3/7)
Probabilidade Steve		q	1 - q	

Com estas estratégias mistas, o ganho esperado de Steve ao optar por cara é *probabilidade de Steve falar cara × probabilidade de Estranho falar cara × ganho (cara, cara) + probabilidade de Steve falar cara * probabilidade de Estranho falar coroa * ganho (cara, coroa)*, ou seja:

$GE(Steve)_{Cara} = q * p * (-10) + q * (1-p) * 30 = -10pq + 30q - 30pq = -40pq + 30q$

Analogamente, o ganho esperado de Steve com coroa é *probabilidade de Steve falar coroa * probabilidade de Estranho falar cara * ganho (coroa, cara) + probabilidade de Steve falar coroa * probabilidade de Estranho falar coroa * ganho (coroa, coroa)*:

$GE(Steve)_{Coroa} = (1-q) * p * 50 + (1-q) * (1-p) * (-50) = 50p - 50pq - 50 + 50p + 50q - 50pq = -50 - 100pq + 50q + 100p$

Steve indubitavemente deve escolher ou cara ou coroa, destarte, o ganho esperado total é o ganho resultante da soma do ganho destas duas possibilidades, ou melhor:

$GE(Steve) = GE(Steve)_{Cara} + GE(Steve)_{Cara}$;

$GE(Steve) = -40pq + 30q + -50 - 100pq + 50q + 100p = -140pq + 80q + 100p - 50$;

$GE(Steve) = q(-140p + 80) + 100p - 50 = p(-140p + 80) + 50(2p - 1)$ (i);

Após, esta pequena brincadeira algébrica, não esqueça este é ainda é um trabalho matemático, vamos às interpretações. A expressão (i) divide-se em duas parcelas: $q(-140p + 80)$ e $50(2p - 1)$ e o ganho esperado de Steve depende da sua estratégia mista, portanto da escolha de q, e da estratégia mista do Estranho, escolha de p. Entretanto, é conhecimento nosso da estratégio mista ótima do Estranho,que o valor de p = 4/7 assim, substituindo apenas primeira parcela de (i), tem-se:

$q(-140p + 80) = (-140 * \frac{4}{7} + 80) = -\frac{560}{7} + 80 = \frac{-560+560}{7} = 0$;

Portanto, para a hipotese que o Estranho utilize sempre sua estratégia mista ótima o ganho esperado de Steve não dependerá da escolha de suas estratégias mistas, pois seu ganho limita-se a:

$GE(Steve) = 50(2p^{*}$[16] $- 1)$ (ii);

Que é totalmente independe da escolha de qual estratégias mista Steve faça, sendo uma função apenas da estratégia mista ótima do estranho, como queríamos demonstrar.

Convidamos, a fim de exsercitar seus "musculos mentais", a repetir o procedimento para os exemplos 14 e 15 e comprovar a veracidaded da propriedade.

Podemos generalizar o procedimento para jogos 2 x 2[17], cuja a forma normal geral é:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

[16] p^* indicando que o Estranho está adotando sua estratégia ótima

[17] Os espaços de estratégias de cada jogador é composto de dois elementos

Suponhamos que não haja ponto de sela, em consequencia o valor inferior é diferente do valor superior do jogo: $\alpha \neq \beta$. Requer-se encontrar a estratégia mista ótima do jogador A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

S_A^* possui a propriedade que não importa quais sejam as ações do adversário (sem sair dos limites das estratégis "utéis") o ganho de A será igual ao valor r do jogo. Valendo, inclusive, para o caso de B utilizar apenas estratégias puras. Em um jogo 2 x 2, as duas estratégias mdo adversário são "utéis", pois se não o fossem o jogo teria solução apenas com estratégias puras, ou seja, com ponto de sela, por hipotese não ocorre.

Portanto, o jogador A adotando sua estratégia mista ótima S_A^* , quando o jogador B utiliza apenas suas estratégias puras gera o mesmo valor médio r do jogo. Portanto, temos as equações:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 & + & a_{21}p_2 = r \\ a_{21}p_1 & + & a_{22}p_2 = r \end{cases} \tag{3.1}$$

Logo: $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2$, lembrando que $p_1 + p_2 = 1$, temos:

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) \ ;$$

$$a_{11}p_1 + a_{21} - a_{21}p_1 = a_{12}p_1 + a_{22} - a_{22}p_1$$

$$a_{11}p_1 - a_{21}p_1 + a_{22}p_1 - a_{12}p_1 = a_{22} - a_{21}$$

$$p_1(a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}) = a_{22} - a_{21}$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \tag{3.2}$$

E, sendo $p_2 = 1 - p_1$, temos:

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \tag{3.3}$$

O valor r do jogo obtemos substituindo p_1 e p_2 em qualquer uma das equações 1.

Vamos treinar com o exemplo 13, cuja forma normal, já conhecida, é:

		Steve		
		Cara	Coroa	Probabilidade Estranho
Estranho	Cara	(-10, 10)	(50, -50)	$p_1 = p$
	Coroa	(30, -30)	(-50, 50)	$p_2 = 1 - p$
Probabilidade Steve		$q_1 = q$	$q_2 = 1 - q$	

Substituindo os valores na equação 2, temos:

$p_1 = \dfrac{-50 - 30}{-10 - 30 + (-50) - 50} = \dfrac{-80}{-140} = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$

e, $p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{4}{7} = \frac{7-4}{7} = \frac{3}{7}$

Com valor r do jogo dado através das equações 1:

$r = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = -10 * \frac{4}{7} + 30 * + \frac{3}{7} = \frac{-40+50}{7} \approx 7,2$

Portanto, exatamente os valores conhecidos anteriormente. Corroborando as conclusões anteriores. Procedendo com o mesmo raciocinio para B, que seja, determinando sua estratégia ótima:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix},$$

temos as equações:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 & + & a_{12}q_2 = r \\ a_{21}q_1 & + & a_{22}q_2 = r \end{cases} \tag{3.4}$$

Logo: $a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2$, com $q_1 + q_2 = 1$, temos:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \tag{3.5}$$

$$q_2 = 1 - \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} \tag{3.6}$$

Que para o exemplo 13 são: $q_1 = \frac{5}{7}$ e $q_2 = \frac{2}{7}$. Confira, prezado leitor.

Para os jogos 2 x 2 é possível obter uma representação gráfica, que possibilita a obtenção da solução do jogo. Com o intuito de demosntrar tal fato retornemos ao exemplo 2 modificado, com forma normal:

	B_1	B_2	α_i
A_1	1	-1	***-1***
A_2	-1	1	***-1***
β_j	***1***	***1***	

Primeiramente, calculemos as estratégias ótimas de cada jogador e o valor r do jogo
Sunstituindo os valores nas equação obtidas:

$p_1 = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} = \dfrac{1-(-1)}{1-(-1)+1-(-1)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$q_1 = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} = \dfrac{1}{2}$

$q_2 = 1 - q_1 = \dfrac{1}{2}$

$r = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = 1 * \dfrac{1}{2} + (-1) * \dfrac{1}{2} = 0$

Portanto, as estratégias ótimas de cada jogador e o valor do jogo são, respectivamente:

$S_B^* = S_A^* = \begin{pmatrix} Cara & Coroa \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $r = 0$. Exatamente, como afirmamos anteriormente.

Representemos, o exemplo 2 modificado, na forma normal indicando a probabilidade do jogador A escolher cara por p, então para coroa tem-se 1 - p, e por conseguinte para B, teremos q e 1 - q, assim:

		B		
		Cara	Coroa	Probabilidade A_i
A	Cara	1	-1	p
	Coroa	-1	1	1 - p
Probabilidade B_i		q	1 - q	

O ganho esperado de B ao adotar a estratégia pura cara é: *probabilidade de A escolher cara * ganho (cara, cara) + probabilidade de A escolher coroa * ganho (coroa, cara)*:

$GEB_{Cara} = astp * -1 + (1-p) * 1 = 1 - 2p$

O ganho esperado de B ao adotar a estratégia pura coroa é: *probabilidade de A escolher cara * ganho (cara, coroa) + probabilidade de A escolher coroa * ganho (coroa, coroa)*

$GEB_{Coroa} = astp * 1 + (1 - p) * -1 = 2p - 1$

O valor máximo possível para $GEB_{Cara} = 1 - 2p$ é 1, uma substituição direta verifica que ocorre quando p = 0, ou seja, A escolhe com *certeza* coroa. Por sua vez o valor mínimo - 1 para p = 1, A escolhe com certeza cara. Para p = 1/2 , $GEB_{Cara} = 1 - 2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Do nosso conhecimento básico de geometria analítica, a reta $1 - 2p$ possui inclinação negativa, quer dizer, "é de baixo para cima". Portanto, traçando um eixo vertical que represente o valor do ganho esperado GEB_{Cara} e o eixo horizontal os valores de p, os quais variam entre 0 e 1. O gráfico inicia no ponto mais alto do eixo vertical, 1 , encerrando no ponto mais baixo, -1, logo deslocando-se da esquerda para direita:

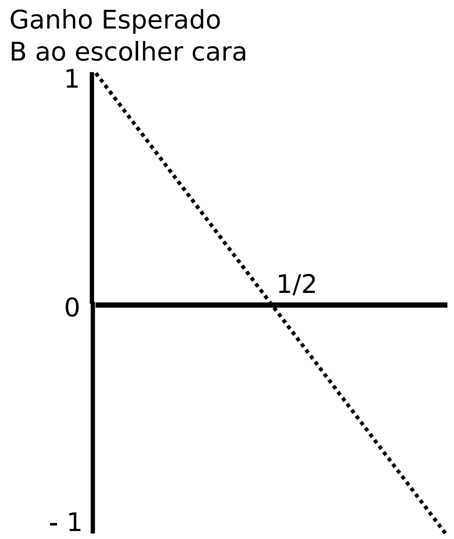

Figura 3.22: Gráfico Ganho Esperado Cara Jogador B

Analogamente, máximo possível de $GEB_{Coroa} = 2p - 1$ é 1, para p = 1, A escolhe com *certeza* cara e o mínimo zero para p=0, A escolhe com *certeza* coroa. Para p = 1/2 , $GEB_{Coroa} = 2 * \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Reiterando vosso conhecimento leitor , a reta $2p - 1$ possui inclinação positiva, quer dizer, "é de cima para baixo"e o deslocamento é para a esquerda, sendo o gráfico resultante:

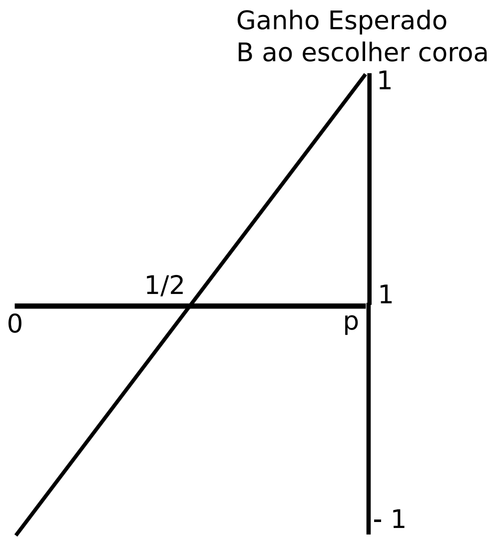

Figura 3.23: Gráfico Ganho Esperado Coroa Jogador B

Agregando os dois gráficos, produz:

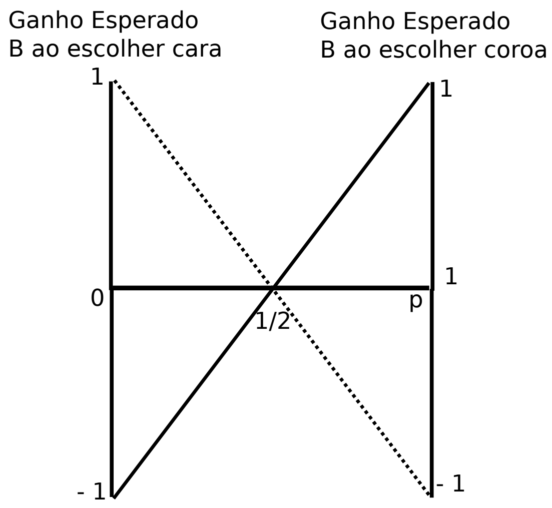

Figura 3.24: Gráfico Ganho Esperado Jogador B

O gráfico da figura 24, fornece uma primeira aproximação às melhores respostas de B aos diveros valores de p, ou seja , para as estratégias mistas possivéis de A. Se p $< 1/2$, B escolher cara é mais vantajoso, pois a reta pontilhada $GEB_{Cara} = 1 - 2p$ está acima da reta continua $GEB_{Coroa} = 2p - 1$, ou seja, os valores dos ganhos com cara são superiores ao de coroa.

Na situação inversa, que seja, p$>1/2$, B escolher coroa gera resultados melhores que cara, afinal a reta $GEB_{Coroa} = 2p - 1$ está acima da reta $GEB_{Cara} = 1 - 2p$.

Por fim, contudo, muitíssimo importante, p $= 1/2$, torna indiferente a B escolher cara ou coroa, ambas resultam no mesmo ganho esperado. Em outras palavras, o valor p $= 1/2$, torna a escolha de B, seja de estratégias puras mistas irrelevante, pois o valor do jogo será sempre o mesmo. Outra forma de afirmar, é que para p $= 1/2$ qualquer valor de q é uma boa resposta.

Conclusão, para valores de p *menores* que 1/2, B deve escolher cara, posto que maximizará seu ganho esperado, em virtude da maior probabilidade de A adotar a estratégia coroa. Emquanto, para valores de p *maiores* que 1/2 , B deve escolher coroa, dada a maior probabilidade de A escolher cara. Sintetizando, para p $< 1/2$, B deve fazer q $= 1$ e para p $> 1/2$ é fazer q $= 0$. Possibilitando a descrição das melhores respostas de B aos vários valores de p, ou seja, às estratégias mistas de A, como uma relação entre p e q, cujos valores estão entre 0 e 1, graficamente, como segue:

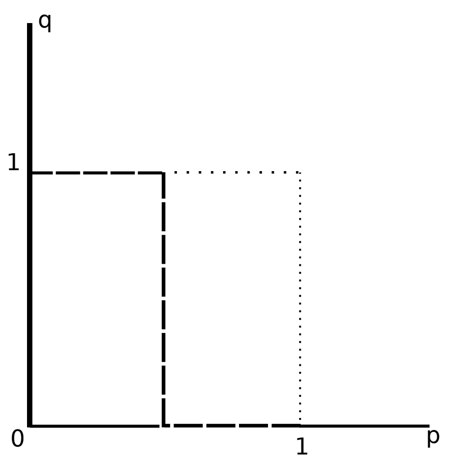

Figura 3.25: Melhores Respostas Jogador B

No gráfico é fácil perceber quando p $< 1/2$ a melhor resposta de B e q $= 1$ e p $> 1/2$ tornar q $=$ 0. Finalmente, p $= 1/2$ não importa se B escolhe cara ou coroa, pois sua função de melhor resposta é vertical, fornecendo a informação que qualquer valor de q é igualmente uma boa resposta à escolha p $= 1/2$ que A fez, em outras palavras, *não há existe nenhuma estratégia pura ou mista que B possa* *adotar que possa surpreender A*, sendo equivalente a afirmar que *A neutralizou qualquer vantagem com a variação da escolha de cara ou coroa, ou seja, com o emprego de estratégias mistas por parte de B.*

Duplicando o raciocíno para A, temos:

$GEA_{Cara} = astq * 1 + (1 - q) * -1 = 2q - 1$

$GEA_{Coroa} = astq * -1 + (1 - q) * 1 = 1 - 2q$

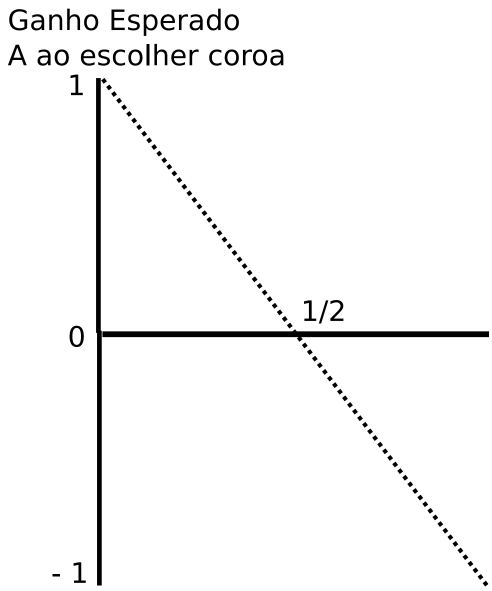

Figura 3.26: Gráfico Ganho Esperado Coroa Jogador A

Constantamos que as equações de GEA_{Cara} são simétricas e opostas às de GEB. Portanto, o máximo de $GEA_{Cara} = 2q - 1$ é 1, quando B escolhe com *certeza*, q = 1, cara. O mínimo -1 , se B escolhe com certeza coroa, q = 0. Para p = 1/2 , $GEACara = \frac{1}{2}$. E , a reta $2q - 1$ possui inclinação positiva, iniciando no ponto mais baixo do eixo vertical, - 1 , encerrando no ponto mais alto, -1. O inverso ocorrendo para GEA_{Cara}. Analisando os gráficos destas funções, verifcamos que ocorre exatamente o oposto do que antes. Para valores de q *menores* que 1/2, A deve escolher coroa, para valores de q *maiores* que 1/2 , A deve escolher cara, ou seja, para q $<$ 1/2, p = 0 e q $>$ 1/2 p = 1.

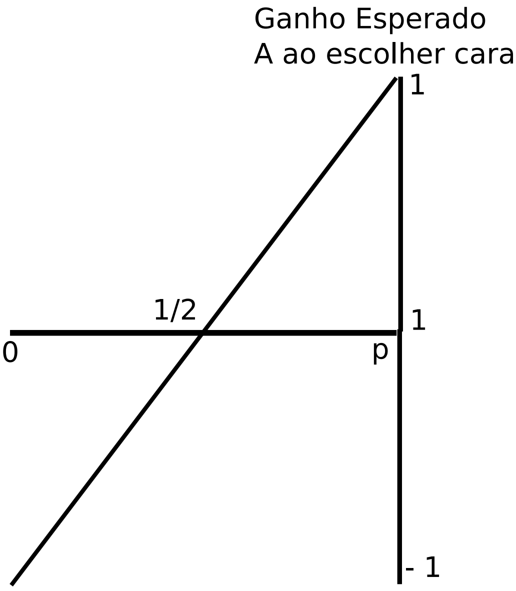

Figura 3.27: Gráfico Ganho Esperado Cara Jogador A

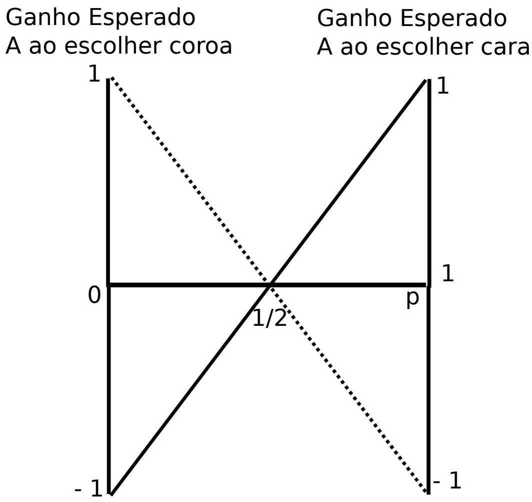

Figura 3.28: Gráfico Ganho Esperado Jogador A

Sem maiores surpresas, quando q < 1/2 a melhor resposta de A e p = 0 , q > 1/2 p = 1 e q = 1/2 é indiferente se A escolhe cara ou coroa, nesta situação, *B neutralizou qualquer vantagem com a variação da escolha de cara ou coroa, ou seja, com o emprego de estratégias mistas por parte de B.* Portanto, o gráfico de melhor resposta de A é:

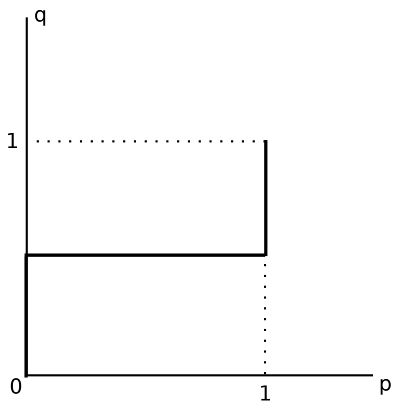

Figura 3.29: Gráfico MelhoresRespostas A

De posse dos gráficos de melhor resposta para ambos jogadores é possível determinar a estratégia de equilíbrio, através do ponto em que se cruzam.

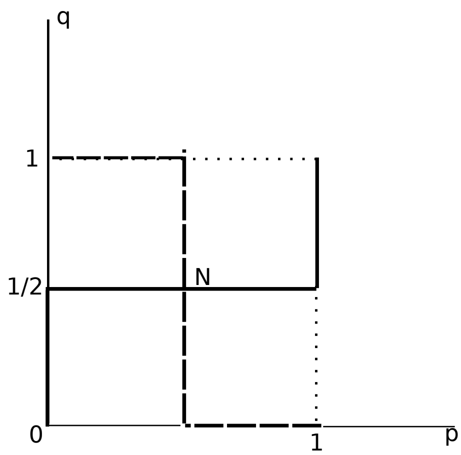

Figura 3.30: Equilíbrio em Estratégias Mistas

O ponto de equilíbrio, facilmente determinado, ponto de encontro das funções, é N, com p = q = 1/2.

Em trabalhos mais avançados , nas referências bibliográficas constam vários, demonstra-se que em qualquer jogo finito onde o espaço de estratégias do primeiro jogador tem n e do segundo m elementos, jogo n x m, existe uma solução na qual o número de estratégias 'utéis"de nenhuma das partes é superior ao menor dos números m e n. Decorre, em particular, que um jogo 2 x m sempre existe uma solução na qual uma ou outra parte não tem mais que duas estratégias "utéis", nestes casos podemos aplicar as técnicas até agora desenvolvidas.

Todavia, para o caso geral de jogos n x m, finitos, o que a teoria recomenda?

Antes de responder a questão, vejamos as seguintes os jogos representados nas formas estratégicas a seguir:

	1		
	B_1	B_2	Probabilidade A_i
A_1	8	1	p_1
A_2	-4	6	p_2

	2		
	B_1	B_2	Probabilidade A_i
A_1	13	6	p_1
A_2	1	11	p_2

Determinemos os valores de p_1 , p_2 e r, para a matriz 1 :

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} = \frac{6 - (-4)}{8 - (-4) + 6 - 1} = \frac{10}{17};$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{10}{17} = \frac{7}{17};$$

$$r = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = 8 * \frac{10}{17} + (-4) * \frac{7}{17} = \frac{52}{17}$$

Em seguida, p_1 , p_2 e r, para a matriz 2 :

$$p_1 = \frac{11 - 1}{13 - 1 + 11 - 6} = \frac{10}{17};$$

$$p_2 = 1 - \frac{10}{17} = \frac{7}{17};$$

$$r = 13 * \frac{10}{17} + 1 * \frac{7}{17} = \frac{137}{17} = 5 + \frac{52}{17}$$

A matriz 2 foi obtida da matriz por intermédio da adição da constante 5 a todos os elementos da matriz 1 em consequência de tal operação não se alterou as estratégias ótimas, mas apenas o valor do jogo aumentando-o em 5, idêntico valor acréscido ao elementos. Esta é uma propriedade geral, sendo aplicada à todas representações em forma estratégica e decorre da forma que as funções de utilidade, que são os elementos constantes das respectivas linhas e colunas, foi construída. No capítulo 4 é demonstrado este fato.

Retornemos aos jogos n x m. O problema consiste na busca da solução do jogo, onde o espaço de estrategias dos jogadores são: $E_A = \{A_1, A-2, ..., A_n\}$ e $E_B = \{B_1, B-2, ..., B_m\}$, com matriz de ganhos(forma estratégica)

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	....
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}

Há que determinar a solução do jogo, ou seja, as estratégias mistas ótimas dos jogadores A e B:

$$S^*{}_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & ... & A_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & ... & p_n \end{pmatrix}; \; S^*{}_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & ... & B_n \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & ... & q_m \end{pmatrix}$$

Onde $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + ... + p_n = 1$; $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + ... + q_m = 1$, eventualmente alguns p_i e q_j são nulos.

A estratégia mista ótima de A deve assegurar no mínimo um ganho r independente da estratégia de B, e exatamente r quando B emprega sua estratégia mista ótima. Analogamente, $S^*{}_B$ deverá assegurar uma perda inferior a r com qualquer ação de A e r quando A adotar $S^*{}_B$.

O valor do jogo, textitr é desconhecido. Por hipotese, adotaremos $r>0$, que não restringe a nossa análise, pois para que isso ocorra basta que todos os a_{ij} não sejam negativos. Nos caso em que não ocorra, pode-se sempre ser feito com adição de uma constante positiva C sufientemente grande; então o valor do jogo aumentará de C mas a solução não sofrerá alteração,as estratégias mistas $S^*{}_A$ e $S^*{}_B$ não mudam.

Vamos supor que A já determinou sua estratégia mista ótima $S^*{}_A$, então o ganho médio dele com a estratégia B_j será: $GM_j = p_1a_{ij} + p_2a_{2j} + p_3a_{3j} + p_4a_{4j} + ... + p_na_{nj}$. $S^*{}_A$ assegurando que o ganho não será inferior a r, faz com que cada GM_j seja maior ou igual a r, assim obtemos as seguintes condições:

$$\begin{cases} p_1a_{11} + p_2a_{21} + p_3a_{31} + \cdots + p_na_{n1} \geq r \\ p_1a_{12} + p_2a_{22} + p_3a_{32} + \cdots + p_na_{n2} \geq r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1a_{1m} + p_2a_{2m} + p_3a_{3m} + \cdots + p_na_{nm} \geq r \end{cases} \tag{3.7}$$

Dividindo as desigualdades 3.7 por r e definindo: $\epsilon_1 = \dfrac{p_1}{r}$; $\epsilon_2 = \dfrac{p_2}{r}$; ...; $\epsilon_n = \dfrac{p_n}{r} \geq 0$. De $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + ... + p_n = 1$, os ϵ_i satistazem: $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + ... + \epsilon_n = \dfrac{1}{r}$. Esta última soma sendo mínima, implica que r é maximo.

As desigualdades 3.7 tornam-se :

$$\begin{cases} \epsilon_1a_{11} + \epsilon_2a_{21} + \epsilon_3a_{31} + \cdots + \epsilon_na_{n1} \geq 1 \\ \epsilon_1a_{12} + \epsilon_2a_{22} + \epsilon_3a_{32} + \cdots + \epsilon_na_{n2} \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \epsilon_1a_{1m} + \epsilon_2a_{2m} + \epsilon_3a_{3m} + \cdots + \epsilon_na_{nm} \geq 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Transformamos o problema em determinar os $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, ...\epsilon_n$ que satisfazem as equações 3.8 cuja soma é miníma.

A resolução de tais problemas é comum na vida cotidiana, tendo a muito despertado o interesse da matemática que desenvolveu um ferramental especifíco para este tipo de problemas, denominadado de forma ampla de *Programação Linear* ou Problemas de Otimização.

O problema padrão na progração linear é da forma:

$$\begin{cases} \epsilon_1a_{11} + \epsilon_2a_{21} + \epsilon_3a_{31} + \cdots + \epsilon_na_{n1} = v_1 \\ \epsilon_1a_{12} + \epsilon_2a_{22} + \epsilon_3a_{32} + \cdots + \epsilon_na_{n2} = v_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \epsilon_1a_{1m} + \epsilon_2a_{2m} + \epsilon_3a_{3m} + \cdots + \epsilon_na_{nm} = v_n \end{cases} \tag{3.9}$$

Onde o objetivo é determinar os valores não negativos dos $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, ...\epsilon_n$, que cumprem as condicióes das equações 7 e ao mesmo tempo tornam miníma a função soma: $\tau = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 + c_4\epsilon_4 + ... + c_n\epsilon_n$

As condições 6, são convertidas nas condições 7 incluindo-se novas variavéis, não negativas, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ... + y_n$, fictícias.

$$\begin{cases} \epsilon_1a_{11} + \epsilon_2a_{21} + \epsilon_3a_{31} + \cdots + \epsilon_na_{n1} - y_1 = 1 \\ \epsilon_1a_{12} + \epsilon_2a_{22} + \epsilon_3a_{32} + \cdots + \epsilon_na_{n2} - y_2 = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \epsilon_1a_{1m} + \epsilon_2a_{2m} + \epsilon_3a_{3m} + \cdots + \epsilon_na_{nm} - y_n = 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

A função a minimizar é: $\tau = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \cdots + \epsilon_n$[18]

[18] $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$

A metodologia desenvolvida, oriunda das idéias da programação linear, através de uma sucessão relativamente pequena de cálculos permite determinar os valores ϵ_i que satisfaçam as condições impostas. A prática propicia maior compreensão, assim, vamos ao exemplo:

Exemplo 16 - Composição de Equipes: *No clube, de futebol, Arranca Toco, existem possíveis composições de seu time AT_1, AT_2 e AT_3. Seu principal rival, o clube Quebra Canela, também três variações para sua equipe QC_1, QC_2 e QC_3. Ao realizar a solicitação para a participação no campeonato regional de futebol, o popularmente conhecido "AI QUE DOR", ambos os clubes não conhecem qual será a equipe que seu rical escolherá. A probabilidade do Arranca Toco vencer com diferentes combinações de composição de sua equipe é mais ou menos conhecida por ambos em virtude dos inúmeros confrontos anteriores destes dois clubes. Deve-se encontrar a frequência (distribuição de probabilidade) com a qual cada clube deve apresentar suas equipes para conseguir, em média, o número máximo de vitórias contra o rival.*

A forma normal,[19] consistindo na tabela da probabilidade de vitória de Arranca Toco para cada combinação de equipes de ambos, é a seguinte:

	QC_1	QC_2	QC_3
AT_1	0,8	0,2	0,4
AT_2	0,4	0,5	0,6
AT_3	0,1	0,7	0,3

Determinemos os valores inferior e superior do jogo

	QC_1	QC_2	QC_3	α_i
AT_1	0,8	0,2	0,4	0,2
AT_2	0,4	0,5	0,6	**0,4**
AT_3	0,1	0,7	0,3	0,1
β_j	0,8	0,7	**0,6**	

O valor superior $\beta = 0,6$ é diferente do inferior $\alpha = 0,4$. Não existe ponto de sela em estatégias puras, procuraremos a solução no âmbito das estratégias mistas. Por comodidade, para evitar cálculo com decimais, convertemos a forma normal multiplicando todos os seus elementos por 10, assim:

	QC_1	QC_2	QC_3
AT_1	8	2	4
AT_2	4	5	6
AT_3	1	7	3

As condições 3.10 originam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + \epsilon_3 - y_1 = 1 \\ 2\epsilon_1 + 5\epsilon_2 + 7\epsilon_3 - y_2 = 1 \\ 4\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_3 - y_3 = 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

E a condição de minímo produz: $\tau = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \min$

Inicialmente devemos verificar se as três estratégias disponivéis são "utéis", ou seja, farão parte da solução ótima.

O primeiro passo é verificar se as três variavéis $y_1,\ y_3,\ e\ y_3$ são iguais a zero. Para comprovar, resolvemos as equações acima com relação a $\epsilon_1, \epsilon_2\ e\ \epsilon_3$, obtendo o sistema:

[19] a utilidade é representada por meio do valor da probabilidade de vitória de Arranca Toco, quanto maior para ele, menor para Quebra Canela, assim temos um jogo soma-zero

$$\begin{cases} \frac{10}{136} + \frac{27}{136}y_1 + \frac{6}{136}y_2 - \frac{23}{136}y_3 = \epsilon_1 \\ \frac{12}{136} - \frac{22}{136}y_1 - \frac{20}{136}y_2 + \frac{54}{136}y_3 = \epsilon_2 \\ \frac{8}{136} + \frac{8}{136}y_1 + \frac{32}{136}y_2 - \frac{32}{136}y_3 = \epsilon_3 \end{cases} \tag{3.12}$$

Somando as três equações acima, obtemos: $\tau = \frac{30}{136} + \frac{13}{136}y_1 + \frac{18}{136}y_2 - \frac{51}{136}y_3 \Longrightarrow 136\tau = 30 + 13y_1 + 18y_2 - 51y_3$. Esta expressão mostra que aumento das variavéis y_1 *e* y_2 ,em relação ao suposto valor zero, produzem apenas aumento do valor de τ. Portanto, a suosição que sao nulas é plausível, visto que queremos minimizar τ. Por sua vez y_3 é quem pode reduzir o valor de τ. Entretanto, devemos realizar o aumento de y_3 com extrema cautela para que os valores de ϵ_1, ϵ_2, *e* ϵ_3 que dependem de y_3 não se tornem negativos. Então, para tratar deste aumento com segurança, nas equações 3.12 façamos y_1 *e* y_2 iguais a zero e aumentemos o valor de y_3 até que algum dos ϵ seja zero.

$$\begin{cases} \frac{10}{136} + \frac{27}{136}.0 + \frac{6}{136}.0 - \frac{23}{136}y_3 = \epsilon_1 \\ \frac{12}{136} - \frac{22}{136}.0 - \frac{20}{136}.0 + \frac{54}{136}y_3 = \epsilon_2 \\ \frac{8}{136} + \frac{8}{136}.0 + \frac{32}{136}.0 - \frac{32}{136}y_3 = \epsilon_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{136} - \frac{23}{136}y_3 = \epsilon_1 \\ \frac{12}{136} + \frac{54}{136}y_3 = \epsilon_2 \\ \frac{8}{136} - \frac{32}{136}y_3 = \epsilon_3 \end{cases}$$

Na segunda igualdade de 3.12, o aumento de y_3 somente aumentará o valor de ϵ_2, então descartemos a segunda equação acima,mas no tocante a ϵ_1 *e* ϵ_3 este aumento é restrito até quando as mesmas são maiores que zero.

Então, com $\epsilon_1 = 0$, temos: $\frac{10}{136} - \frac{23}{136}y_3 = \epsilon_1 = 0 \Longrightarrow 10 - 23y_3 = 0 \Longrightarrow y_3 = \frac{10}{23}$;

Para $\epsilon_3 = 0$, temos: $\frac{8}{136} - \frac{32}{136}y_3 = \epsilon_3 = 0 \Longrightarrow 8 - 32y_3 = 0 \Longrightarrow y_3 = \frac{8}{33} = \frac{1}{4}$.

Portanto, sendo $\frac{1}{4} < \frac{10}{23}$, ou seja, ocorre "primeiro" $\frac{1}{4}$, ϵ_3 torna-se zero antes de ϵ_1. Assim, o valor máximo permitido para y_3 é $\frac{1}{4}$, e adotando este valor fazemos com que $\epsilon_3 = 0$.

Neste momento, as variavéis y_1, y_2, ϵ_3 são iguais a zero e $y_3 = \frac{1}{4}$. Todavia, qual a garantia de que o nosso objetivo de minimizar τ foi atingido?. Comprovamos, expresando as outras variavéis $\epsilon_1, \epsilon_2, y_3$ por meio das variavéis que supomos serem nulas. Assim, resolvendo as equações 3.11 com relação a $\epsilon_1, \epsilon_2, y_3$ obtemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{32} + \frac{5}{32}y_1 - \frac{4}{32}y_2 + \frac{23}{32}\epsilon_3 = \epsilon_1 \\ \frac{6}{32} - \frac{2}{32}y_1 + \frac{8}{32}y_2 - \frac{54}{32}\epsilon_3 = \epsilon_2 \\ \frac{8}{32} + \frac{8}{32}y_1 + y_2 - \frac{136}{32}\epsilon_3 = y_3 \end{cases} \tag{3.13}$$

Somando a primeira e segunda equação acima:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{7}{32} + \frac{3}{32}y_1 + \frac{4}{32}y_2 - \frac{31}{32}\epsilon_3 \Longrightarrow \epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{32}{32}\epsilon_3 = \frac{7}{32} + \frac{3}{32}y_1 + \frac{4}{32}y_2 - \frac{31}{32}\epsilon_3 + \frac{32}{32}\epsilon_3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tau = \frac{7}{32} + \frac{3}{32}y_1 + \frac{4}{32}y_2 - \frac{1}{32}\epsilon_3 \Longrightarrow 32\tau = 7 + 3y_1 + 4y_2 + \epsilon_3$$

Portanto, qualquer aumento de $y_1,\ y_2\ ou\ \epsilon_3$, sobre o suposto valor nulo da cada uma das variavéis, somente aumenta o valor de τ. Consequentemente, encontramos a solução do jogo, a qual é determinada com os valores $y_1 = y_2 = \epsilon_3 = 0$. Substituindo estes valores em3.13, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{32} + \frac{5}{32}.0 - \frac{4}{32}.0 - \frac{23}{32}.0 = \epsilon_1 \\ \\ \frac{6}{32} - \frac{2}{32}.0 + \frac{8}{32}.0 - \frac{54}{32}.0 = \epsilon_2 \\ \\ \frac{8}{32} + \frac{8}{32}.0 + 0 - \frac{136}{32}.0 = y_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{32} = \epsilon_1 \\ \\ \frac{6}{32} = \epsilon_2 \\ \\ \frac{8}{32} = y_3 \end{cases}$$

Nos fornecendo o valor do jogo, r, através de $32\tau = 7 + 3y_1 + 4y_2 + \epsilon_3 = 7 \Longrightarrow r = \tau = \frac{7}{32}$ A estratégia ótima de Arranca Toco é $AT^* = \begin{pmatrix} AT_1 & AT_2 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$. Significando que as estratégias(equipes) AT_1 e AT_2 devem ser utilizadas com frequência de de 1 uma vez em cada 7 e de seis vezes em cada 7, respectivamente. E nunca deve jogar a estratégia (equipe) AT_3.

Não podiamos encerrar esta seção de jogos soma zero sem apresentar as "soluções"das batalhas que iniciam o capitulo.

Relembrando a forma estratégica da batalha do mar de Bismarck é:

		Estratégias Japonesas	
		Rota Norte	Rota Sul
Estratégias	Rota Norte	2 dias	2 dias
Americanas	Rota Sul	1 dia	3 dias

Determinemos os valores inferior e superior do jogo.

		Estratégias Japonesas		
		Rota Norte	Rota Sul	α_i
Estratégias	Rota Norte	2 dias	2 dias	**2**
Americanas	Rota Sul	1 dia	3 dias	1
	β_j	**2**	3	

Então, o valor inferior, $\alpha = 2$,e o valor superior, $\beta = 2$, são iguais, logo o jogo possui um ponto de equilibrio (sela) e a estratégia ótimas para cada jogador é escolher a rota norte, ou seja, a teoria dos jogos, considerando que os jogadores(comandantes de cada exército) são racionais e o norte-americano desejando maximizar seus ganhos(maior número possível de dias de bombardeio) e o comandante japonês, por sua vez, ansioso por minizar suas perdas, representadas através do menor número possível de bombardeio, devem tendo em conta os objetivos do comandante adversário, escolher a estratégia que lhes dá maior retorno, que seja ambos escolherem a rorta norte, com valor do jogo igual a 2, significando 2 dias de bombardeio.

Acreditamos, que a resposta já havia sido determinada por você leitor de forma intuitiva. Afinal, salta aos olhos que para os japoneses a rota sul é extremamente desvantajosa, natural escolher a rota norte. Os americanos sabendo que os japoneses sabem que a rota sul não lhes é vantajosa, concluem que os japoneses vão adotar a rota norte e também a dotam a rota norte. No confronto, realmente japoneses e americanos escolheram a rota norte, com a destruição de praticamente toda a frota japonesa. Não interprete que os comandantes utilizaram o raciocínio exposto ou a teoria dos jogos para efetuar suas decisões, outras técnicas e fatores levaram a escolha de cada um, mas o fato da teoria dos jogos "ter acertado"em sua "previsão"apenas mostra o poder que a mesma possui, justificando o fato de ser a teoria adotada, praticamente de forma unânime, no estudo da microecnonomia. Entretanto, devemos ressaltar, mais uma vez, que o espectro de atuação da teoria dos jogos, transcende a economia, atinge diversos ramos do conhecimento, como a biologia, politica, etc. Na matemática, é estudada tanto no sentido aplicado, o que este trabalho apenas apresenta um esboço, quanto na sua natureza pura sem a necessidade de associação direta com eventos "naturais".

Finalmente a batalha de Avranches de forma normal:

		Estratégia Alemã	
		Ataque	Retirada
Estratégia	Reforçar passagem	5	6
	Avançar reservas	0	8
Americana	Reforços aguardam	10	7

Mais uma vez, determinemos os valores inferior e superior do jogo

		Estratégia Alemã		
		Ataque	Retirada	α_i
Estratégia	Reforçar passagem	5	6	5
	Avançar reservas	0	8	0
Americana	Reforços aguardam	10	7	**7**
	β_j	10	**8**	

Então, o valor inferior, $\alpha = 7$,e o valor superior, $\beta = 8$, não são iguais, segue que o jogo não possui um ponto de equilibrio em estratégias puras e deveríamos buscar a solução no universo das estratégias mistas. O que sugerimos ao leitor fazer, neste ponto, com o intuito de desenvolver a habilidade no manuseio das técnicas até o momento desenvolvidas. Entretanto, antes de determinarmos estratégias mistas, vamos trilhar um outro caminho que nos será útil mais adiante. Montemos uma matriz de pagamentos, onde descartamos momentaneamente a estratégia *Avançar reservas*, a seguir:

		Estratégia Alemã	
		Ataque	Retirada
Estratégia	Reforçar passagem	5	6
Americana	Reforços aguardam	10	7

Observe que a utilidade da estratégia *Reforços aguardam* é sempre superior a utilidade da estratégia *Reforçar passagem*, independente de qual estratégia os alemães adotem. Posto isso, qual seria a justificativa, de um jogador racional, para adotar a estratégia *Reforçar passagem* em detrimento de *Reforços aguardam*? A resposta é não há nada que justifique, assim a estratégia *Reforçar passagem* é dominada pela estratégia *Reforços aguardam*, sendo tal excluída da forma normal do jogo, que torna-se:

		Estratégia Alemã	
		Ataque	Retirada
Estratégia	Avançar reservas	0	8
Americana	Reforços aguardam	10	7

uma matriz 2 x 2, cujas estratégias mistas do comandante americano podem ser determinadas através das equações 3.2 e 3.3, assim:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} = \frac{7 - 10}{0 - 10 + 7 - 8} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{11}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$$

com valor do jogo r, dado por:

$$r = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = 0 * \frac{3}{11} + 10 * \frac{8}{11} = \frac{80}{11} \approx 7,2$$

enquanto as estrategias mistas do comandante alemão são obtidas de 3.5 e 3.6, então:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} + a_{22} - a_{12}} = \frac{7 - 8}{0 - 10 + 7 - 8} = \frac{1}{11};$$

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

Uma perspectiva para a interpretação destes resultados é a seguinte: O comandante alemão deveria sua estratégia de retirada um número maior de vezes que o ataque, e o norte-americano por seu turno na maioria dos combates deveria posicionar seus reforços aguardando. Em termos mais objetivos o comandante alemão deveria ter recuado enquanto o americano postar seus reforços no aguardo.

Na batalha real, o comandante alemão preparou suas tropas para a retirada, mas Hitler ordenou o ataque e os americanos realmente deixaram seus reforços aguardando em consequência o exército alemão foi massacrado e o comandante alemão cometeu suícidio.

Tratamos dos jogos de soma zero, ou seja estritamente competitivos, onde a função de utilidade é positiva apenas se para as mesmas condições a do seu adversário for negativa e vice-versa. Todavia, tais situações não são comuns no cotidiano das pessoas, empresas ou nações, afinal uma loja de artigos esprtivos, exemplificando apenas, vender mil reais não implica necessariamente que sua rival no mercado terá um rejuízo dos mesmos mil reais. Para os jogos que não são de soma zero necessário se faz um novo enfoque.

3.2 Jogos de soma não nula

Jogos de soma-zero são fantásticos no sentido em que possuem uma solução universalmente aceita, seja em estratégias puras ou mistas, no entanto oa jogos da "vida real"não são caracterizados por um aspecto totalmente competitivo, por regra, os interesses dos jogadores podem ser contraŕios em algumas perspectivas e complementares em outras. Em um jogo inteiramente competitivo os interesses de ambos os jogadores são comuns(se não os mesmos), como exemplifica Davis, imagine um piloto de uma aeronave comercial de transporte de pessoas e o operador da torre de controle do aeroporto de destino, com certeza, estão em um jogo cooperativo, no qual o interesse comum é pousar o avião com segurança, de igual maneira um casal de dançarinos disputando o "Dançando com as Estrelas"tamém estão em um jogo cooperativo, no qual o bjetivo comum é composto: dançar bem e consequentemente conquistar a classificação a fase seguinte. Problemas desta natureza são fáceis de resolver, consiste em simplesmente coordenar os esforços conjuntos, por exemplo com o treino para os dançarinos(e também para o piloto e o operador, afinal existem simuladores para tal fim). Todavia, os jogos em sua maior abrangência na vida diária situam-se entre os dois extremos: estritamente *competitvos ou cooperativos*, ou seja, possuem elementos competitivos e elementos cooperativos. Exemplos são vários: Um feirante e o consumidor negociando, ambos desejam que a venda seja efetuada, mas divergem quanto ao preço. A situações que *aparentemente* os envolvidos não possuem interesses em comum, mas efetivamente tais interesses existem. A coréia do Norte e do Sul são duas nações que vivem "em guerra"em torno de 50 anos, portanto, a primeira vista não há um interesse comum, todavia, as mesmas honram, ainda que com alguns percalços, um cessar fogo, visando o interesse comum de evitar o uso de armamentos de destruição em massa. Perceptível a maior complexidade e o interesse que os jogos de soma não nula despertam em relação aos jogos de soma-zero. Entrementes, sob qualquer conjectura, não devemos nos esquecer que os jogos são modelos com suas limitações e constituem-se no máximo em uma proximação da realidade, um ideal que n unca é alcançado, pois se o fosse não mais seria um modelo.

Para tratar das situações de interação estratégica que não são estritamente competitivas, ou seja, que não são jogos soma-zero, iniciemos com uma situação que em um primeiro momento aparenta que em nada relaciona-se com a teoria dos jogos: um sequestro.

Recentemente a sogra do conhecido diretor da fórmula 1, Bernie Ecclestone, a senhora Aparecida Palmeira. Não estamos realmente representando a situação ocorrida, apenas a usamos como modelo de um jogo, no qual tentaremos sugerir a melhor estratégia para os jogadores envolvidos, por dizer a solução do jogo. Para isso, precisamos saber como resolver um jogo desta natureza. Vamos analisar a situação no momento em que o sequestrado irá decidir se efetuará ou não o sequestro. Caso, decida não efetuar o sequestro ele tem um ganho, representando apenas as suas preferências, de 3 independente se planejava matar ou libertar a vitíma e a família que tenha um ente querido sequestrado, que nesta hipótes não o foi, tem ganho de 5. Mas, se efetua o sequestro , existem duas possibilidades soltar ou matar a vítima. A família pagando o resgate solicitado, produz para o sequestrador um ganho de 4, caso mate a vitima e 5 ao soltar. Por sua vez a família ao pagar o resgate e com o retorno do familiar tem um ganho de 3, mas , óbvio se a vitíma for assassinada, o ganho da família é nulo (0). Na última situação a família não paga o resgate, mais uma vez o sequestrador deve decidir se liberta ou mata a vítima. Em libertando-a tem um ganho de 1 e matando-a de 2. Os parentes que resolveram não efetuar o pagamento, por certo, com a morte da vitíma tem ganho 1 e com a soltura 4. Representamos, estas preferências, através da, nossa já intima, forma estratégica, onde o primeiro número em uma célula é recompensa do jogador linha (pagamento do sequestrador) e o segundo número é a recompensa do jogador da coluna (pagamento da família Vivica). Lembre-se que os números são indicativos para o resultado mais preferido, quanto menor o número menos preferido, não indicando valores monetários.

		Estratégias Família	
		Pagar	Não Pagar
Estratégia	Não Rapto e Morte	(3,5)	(3,5)
	Não Rapto e Soltura	(3,5)	(3,5)
Sequestrador	Rapto e Morte	(4,0)	(2,1)
	Rapto e Soltura	(5,3)	(2,3)

Haverá um rapto? Se assim for, será pago resgate? A vitíma sobreviverá? A solução deste jogo passa por fornecer respostas a essas perguntas, através da escolha de um ou mais pares entre as oito combinações possíveis de estratégias. Precisamos eliminar os perfis de estratégia que sejam irracionais e implausíveis e, idealmente, identificar um único convincente. As soluções em si, neste momento não são o mais relevante, o mais significativo é nossa previsão do comportamento. Para determinar uma solução, é necessário assumir algo sobre como um jogador escolhe entre suas várias estratégias. Claro, o que torna esta tarefa desafiadora (e resultados em um livro longo!) é o fato de que como um jogador seleciona uma estratégia pode muito bem depender como acha que os outros jogadores estão selecionando. Este é um empreendimento complexo não rapidamente dispensado, e o melhor é começarmos no início e pelo simples.

Para a resolução deste jogo e demais jogos de soma não nula a teoria dos jogos adota três suposições básicas[20]:

- Suposição 1: Assumimos que tudo com o que um jogador se preocupa é resumido nos seus pagamentos(payoffs);

  No caso do sequestro significa que o sequestrador apenas está preocupados em maximizar seu retorno econômico, o qual foi representado através de uma função de utilidade. Portanto, a maximização do retorno econômico é refletida na maximização da utilidade. No entanto, a teoria dos jogos não diz que os jogadores preocupam-se só com os ganhos(payoffs) pessoais, ou seja, não significa que eles sejam totalmente egoístas. Por exemplo, um jogador que é altruísta pode se preocupar com os benefícios próprios e de outros. Neste caso, a função de utilidade deve

[20] No desenvolver da teoria algumas dessas suposições são descartadas, originando ramificações ainda mais interessantes. Com sua obra *Repeated games with incomplete infomation*, onde não é feita a suposição que os jogadores conhecem a estrutura do jogo, Aumann ganhou o prêmio Nobel de Economia em 2005

refletir tal preferência. Uma vez que as utilidades(os payoffs/ganhos) sejam definidas, constituem uma descrição completa da "felicidade" do jogador com cada resultado possível do jogo.

- Suposição 2: Assumimos que todo jogador conhece a estrutura do jogo

  Esclarecendo, estamos admitindo que cada jogador conhece seu própria lista de estratégias possíveis, bem como, conhece as estratégias e recompensas dos outros jogadores. E sabe também com precisão o pagamento (payoff) esperado para cada resultado do jogo, então tais informações são de *conhecimento comum.*

  Em teoria dos jogos algo é de *conhecimento comum* quando todos conhecem o dado e todos sabem que todos conhecem e todos os jogadores sabem que todos sabem que todos conhecem e assim por diante, infinitamente.

  Quando em um jogo, que representa uma stuação de interdependência estratégia, precisamos decidir levando em conta que estamos avaliando o que o adversário está avaliando o que nós estamos avaliando$\cdots$ E assim sucessivamente, repetindo-se tantas vezes quanto for o processo de interação. Impor que tende ao infinito é simplesmente para cobrir qualquer processo de interação, não importando o quanto perdure.

- Suposição 3: Assumimos que os jogadores são racionais. Essa suposição envolve duas ideias:

  A primeira é que cada jogador quer maximizar seu próprio retorno. Como o payoff é definido como tudo com o qual cada indivíduo se preocupa, esta hipótese parece razoável. Um jogador é racional quando age em seu próprio interesse, mais vez reforçamos que estes interesses estão representados na utilidade. Especificamente, dado as crenças do jogador no tocante a como os outros jogadores irão se comportar, o jogador escolhe uma estratégia para maximizar seu retorno. Reiteramos, que é necessário perceber que a racionalidade nada afirma sobre o que são crenças razoáveis em relação ao que outros vão fazer, racionalidade indica apenas que um jogador escolhe a estratégia que maximiza o seu pagamento, dadas suas crenças sobre as estratégias dos outros jogadores. É razoável supor que as pessoas agem apenas em seus próprios interesses? Fazer esta suposição quer dizer que as pessoas são egoístas? Embora a racionalidade signifique perseguir seus próprios interesses, coloca poucas restrições ao que abrange esses interesses. Pode abarcar Ebenezer Scrooge também antes da véspera de Natal — Quando ele só quer dinheiro — ou depois daquela noite memorável — quando ele preocupa-se com seus companheiros seres humanos. Racionalidade, não é preconceituosa, aceita a todos, é uma verdadeira igreja que acolhe a todas as pessoas, do egoísmo ao altruísmo. Ser racional significa apenas perseguir seus interesses, no entanto eles são definidos.

  A segunda ideia é que cada jogador realmente consegue selecionar a melhor estratégia.

  Em situações simples, ou em jogos com jogadores experientes, isso também parece razoável. Em situações complexas, ao menos nos jogos disputados por jogadores inexperientes, é certamente menos razoável. É interessante considerar jogadores que cometem erros e aprendem com isso (lamentavelmente, nã há tempo hábil para tratarmos deste tema no presente trabalho)

Naturalmente, a melhor maneira de entender os jogos de soma não nula é analisar um deles, assim, vamos a mais um exemplo:

Exemplo 17 - Prova ou Apresentação: *Você é um estudante que deixa as coisas para a última hora, qualquer semelhança com a realidade não é mera coincidência. No dia seguinte, você tem uma avaliação e uma apresentação para fazer. Todavia, cai na real , percebendo que , por deixar tudo para a última hora, você só vai conseguir fazer um dos dois, ou seja, precisa escolher entre prova ou apresentação.*

A situação é crítica, pois se estudar para o exame, sua nota será 9, caso contrário será 8. A apresentação deve ser preparada com um parceiro, que igualzinho a você deixou tudo pra o último instante e assim está na mesma situação, logo:

– Se você e seu parceiro se preparam, você obterá 10;

– Se apenas um de vocês se prepara, você obterá 9;

– Se nenhum de vocês se prepara, você obterá 7.

Você não pode contactar o seu parceiro de apresentação, parece incrível, mas não possui o número do "zap" dele , então você não sabe o que ele vai escolher. As notas são simétricas para o seu parceiro. Desta forma, se ambos estudam para a apresentação, ambos terão nota 10 na apresentação e 8 no exame, dando uma média de 9; Se ambos estudam para o exame, ambos terão nota 9 no exame e 7 na apresentação, dando uma média de 8; Se um estuda para o exame e outro para a apresentação, temos:

– O que estudou para a apresentação terá nota 9 na apresentação, e 8 no exame, dando uma média de 8.5;

– O que estudou para o exame terá nota 9 na apresentação (porque o seu parceiro se esforçou), e 9 no exame, dando uma média de 9.

As informações são sintetizadas na forma estratégica, a seguir:

		Parceiro	
		Apresentação	Avaliação
Você	Apresentação	(9, 9)	(8.5, 9)
	Avaliação	(9, 8.5)	(8, 8)

Seguindo os passos das soluções de jogos soma-zero, abordemos este problema encarando o jogo do ponto de vista de um dos jogadores, digamos o jogador linha, que seja, você. Logo, a da sua perspectiva, os ganhos concernentes ao seu parceiro não lhe interessam diretamente, então a matriz de ganhos torna-se:

		Parceiro	
		Apresentação	Avaliação
Você	Apresentação	9	8.5
	Avaliação	9	8

É mais fácil decidir o que fazer se analisarmos separadamente cada estratégia possível escolhida pelo parceiro:

• Se o parceiro se prepara para a apresentação, você obtém:

– 9 se você se preparar para a apresentação,

– 9 se estudar para avaliação.

• Se o seu parceiro se prepara para a avaliação, você obtém:

– 8.5 se você se preparar para a apresentação;

– 8 se você estudar para a avaliação.

Assim, não importa o que seu parceiro vai fazer, o melhor para você é estudar para apresentação. Agora, se a opção apresentação lhe dá um resultado sempre melhor do que outra, sendo racional, qual razão justicaria escolher a outra?

Analisemos, por sua vez, a situação na ótica do seu parceiro. Então:

		Parceiro	
		Apresentação	Avaliação
Você	Apresentação	9	9
	Avaliação	8.5	8

Portanto, para cada estratégia sua, temos:

• Se você se prepara para a apresentação, ele obtém:

– 9 se estudar para a apresentação,

– 8.5 se estudar para avaliação.

- Se você se prepara para a avaliação, ele obtém:

– 8.5 se estudar para a apresentação;

– 8 se estudar para a avaliação.

Novamente, é irrelevante o que você faça, o melhor para seu parceiro é estudar para apresentação. Então a estratégia apresentação, tanto para você é *sempre melhor* que avaliação. No linguajar da teoria dos jogos a estratégia { Apresentação} *domina* a estratégia { Avaliação}, equivalente a estratégia { Avaliação} é *dominada* pela estratégia { Apresentação}. E, Assim, podemos dizer que ambos possuem uma *estratégia dominante.*

Uma implicação particular de racionalidade, em conjunto com as demais suposições, é: um jogador não usará uma estratégia s' quando há outra estratégia s" que sempre produz um pagamento estritamente maior , independentemente de quais estratégias são utilizadas pelos outros jogadores. Assim, a estratégia s' nunca é a coisa certa a fazer. Ampliando, supomos que cada jogador acredita que outros jogadores evitam estratégias estúpidas, que cada jogador acredita que cada jogador acredita outros jogadores evitam tais estratégias e assim por diante. Em outras palavras, é de conhecimento comum entre os jogadores que um jogador não usará uma estratégia particular s', quando não há outra estratégia s" que é sempre estritamente melhor.

Eliminação Interativa de Estratégias Dominadas

Definicão 3.1. *Estratégia Estritamente Dominante. Uma estratégia s" estritamente dominante se o pagamento dela é estritamente maior do que o pagamento de outra estratégia s' para quaisquer estratégias escolhidas pelos outros jogadores.*

Definicão 3.2. *Estratégia Dominante. Uma estratégia é a estratégia dominante se estritamente domina todas as outras estratégias.*

Desta forma, no exemplo 17, ambos irão escolher a estratégia apresentação, consequentemente com resultado do jogo (9,9) que é inclusive o melhor resultado possível para ambos.

Formulemos, então mais duas regras gerais:

DOMINÂNCIA: *Se possui uma estratégia dominante, utilize-a*;

SUBMISSÃO: *Se possui uma estratégia dominada, jamais a utilize, ou seja, descarte-a*;

O conceito de dominância estrita pode levar a soluções interessantes, tomemos o seguinte exemplo extraido de Harrington:

Exemplo 18 - "white vôo": *O aluguel ou venda de casas e apartamentos em um bairro de brancos para Afro-americanos foi uma questão racial polêmica nos anos 1960. O termo "white vôo"refere-se ao êxodo de famílias brancas após a chegada de algumas famílias negras, tornando o bairro de todo branco a todo preto. Poderia o vôo branco ocorrer mesmo se ambos negros e brancos tivesem a preferência por ter uma vizinhança racialmente integrada?.*

Suponha que uma família negra está disposta a pagar o aluguel pelo aluguel de uma casa um valor mais alto do que uma família branca para viver no que é atualmente um bairro de brancos. Uma vontade de pagar aluguel mais alto poderia refletir em menos opções para os negros, quando se trata de casas atraentes e boas escolas. Para um cenário em que existem oito casas idênticas em um determinado bairro, a tabela a seguir relciona o aluguel mensal de uma família negra e uma branca família hipoteticamente dispostas a pagar certos valores, dependendo de quantas famílias pretas estão na vizinhança. Observe que ambos, os negros e os brancos estão dispostos a pagar o aluguel mais alto para um bairro (um pouco) racialmente integrado.

Na coluna intitulada "Renda Total"é a soma das rendas mensais coletadas pelos proprietários das oito casas. Por exemplo, se existem três famílias negras, em seguida, cada família negra paga R\$120/ mês e cada uma das cinco famílias brancas paga R\$100/ mês, o total coletado do aluguel mensal é R\$860. Note-se que o aluguel dos proprietários está maximizado em R\$890, quando apenas duas das casas são alugadas para famílias negras.

Aluguel do Mercado Imobiliário				
N^o fam. negras	N^o fam brancas	Aluguel fam. negra	Aluguel fam branca	Renda Total
0	8	-	100	800
1	7	110	105	845
2	6	115	110	890
3	5	120	100	860
4	4	110	90	800
5	3	100	75	725
6	2	90	75	690
7	1	85	70	665
8	0	80	0	640

A interação estratégia, que seja, o jogo de interesses não é entre famílias negras e brancas, mas entre os proprietários possuidores das oito casas. Suponha que cada casa é propriedade de uma pessoa diferente, e o pagamento de um senhorio é igual a renda recolhida. Então, ao decidir a quem alugar sua propriedade, os senhorios selecionaram estratégias que resultam em uma vizinhança racialmente integrada? Ou serão sua decisões que causam o bairro tranforma-se de todo branco para todo preto?

Utilizando o conceito de dominância estrita vejamos o que vai acontecer. Considere a decisão enfrentada por um proprietário individual e suponha que os outros sete proprietários atualmente estão alugando para apenas famílias brancas. Então o primeiro proprietário vai ganhar R$10 a mais em um mês (R$110 contra R$100) alugando para uma família negra. Daí, ele vai preferir alugar para uma família negra, quando as outras sete casas são alugadas para famílias brancas. Agora suponha que em vez disso que, das outras sete casas, seis são alugados para famílias brancas e para uma família negra. Em seguida, se o proprietário em questão aluga para uma família negra, ele ganhará R$115 (uma vez que existem agora duas famílias negras no bairro, a que alugou sua casa e a já existente), uma quantidade de dinheiro que excede o que ele pode ganhar alugando para uma família branca, que é de apenas R$105 (quando há apenas uma família negra). É, assim, vantagem para o senhorio alugar para uma família negra quando seis das outras sete casas são alugadas para famílias brancas. Continuando dessa maneira, você pode mostrar que, independentemente do que os outros sete proprietários estão fazendo (em termos de raça, de seus inquilinos), um proprietário individual ganha mais dinheiro alugando para uma família negra. Em outras palavras, alugar para uma família negra domina estritamente alugar para uma família branca. O benefício pecuniário aplica-se a cada um dos senhorios, então se cada um usa sua estratégia dominante e, em seguida, cada um irá alugar para uma família negra. Como resultado, o bairro muda de ser todo branco para ser todo preto. Observe, no entanto, que se todas as casas são alugadas para famílias negras, em seguida, os proprietários acabam com uma renda inferior total de R$640, em comparação com os R$800 que eles têm quando eles estavam todos alugando para famílias brancas. Infelizmente, em seguida, os senhorios são mais pobres e integração racial não é alcançada.

Vemos na situação do vôo branco, uma distinção importante entre a racionalidade indivídual e a racionalidade coletiva: é individualmente racional para cada proprietário alugar para uma família negra (porque é sua estratégia dominante), convertendo o bairro em todo de negros; no entanto, é coletivamente racional — no sentido de que a renda total seria maximizada — se parte das famílias fosem brancas. Assim, o que pode ser no melhor interesse do indivíduo não precisa ser o melhor interesse do grupo. Voltaremos a este tema ao tratar do dilema do prisioneiro e suas aplicações.

Definicão 3.3. *Dominância Fraca*

Uma estratégia s', de um determinanado jogador, domina fracamente uma estratégia s" se:

(1) o pagamento decorrente do uso de s' é igual ao pagamento obtido com a escolha de s" para alguma estratégia escolhida pelos outros jogadores;

(2) existem algumas estratégias para os outros jogadores por meio dais quais o pagamento s' é estritamente maior do que s"

Semelhante às estratégias estritamente dominadas, temos que em virtude da maioria das pessoas serem prudentes e na falta de confiança absoluta quanto ao que os outros jogadores vão fazer, parece prudente evitar estratégias fracamente dominadas. Vai agir sem arrependimentos, evitando estratégias fracamente dominadas o jogador que for racional. E se houver uma estratégia fracamente dominante — o que significa que ela fracamente, domina todas as outras estratégias — usará essa estratégia. Portanto, um jogador racional nunca usa uma estratégia fracamente dominada e sempre usa uma estratégia fracamente dominante.

Prossigamos com a seguinte forma normal:

	B_1	B_2
A_1	(3,2)	(4,3)
A_2	(1,0)	(5,2)

Alguns dos jogadores possui uma estratégia dominante? É possível determinar o resultado do jogo?

Vejamos, seguindo os passos anteriores, vamos olhar apenas do ponto de vista do jogador B, assim:

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	0	2

Para cada estratégia de A, temos:

• Se A_1, B obtém:

– 2 com B_1 e 3 com B_2 .

• Se A_2 :

– 0 com B_1 e 2 com B_2.

Destaca-se que a estratégia B_2 é sempre melhor do que B_1. Portanto, a estratégia B_2 é estritamente dominante sobre a estratégia B_1. Por outro lado, é fácil observar que não há uma estratégia dominante para o jogador A. Entretanto a racionalidade dos jogadores é de conhecimento comum, então o jogador A sabe que o jogador B sendo racional irá adotar sua estratégia dominante, desta forma não há sentido em A considerar as possibilidades da estratégia B_1, posto que esta não será utilizada por B. Então, o jogador A pode eliminar da forma estratégia os pagamentos decorrentes de B_1, então temos;

	B_2
A_1	3
A_2	2

E, agora, a estratégia A_1 é dominante sobre A_2. Consequentemente, B racional adotará B_2 e o jogador A, consciente da racionalidade de B, escolherá A_1, sendo o resultado do jogo 3.

Considere mais a forma normal abaixo:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	(3,0)	(1,1)	(5,4)	(0,2)
A_2	(1,1)	(3,2)	(6,0)	(2,-1)
A_3	(0,2)	(4,4)	(7,2)	(3,0)

Do ponto de vista de B, temos:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	1	4	2
A_2	1	2	0	-1
A_3	2	4	2	0

Onde, é óbvio, que a estratégia B_3 é estritamente dominante sobre a estratégia B_4, afinal:

$$4 > 2;\ 0 > -1;\ 2 > 0.$$

Semelhante ocorre com a estratégia B_2 que é estritamente dominante sobre a estratégia B_1, pois

$$1 > 0;\ 2 > 1;\ 4 > 2.$$

O jogador A por sua vez originalmente não dispõe de nenhuma estratégia que seja dominante sobre alguma outra (confira o leitor). Mas, A, novamente de posse do conhecimento comum que B é racional, sabe que B jamais irá adotar as estratégias dominadas B_4 e B_1, podendo então elimina-las da forma normal, logo:

	B_2	B_3
A_1	1	5
A_2	3	6
A_3	4	7

Tornando a estratégia A_3 estritamente dominante sobre as estratégias, A_1 e A_2, afinal $4 > 3$; $4 > 1$ e $7 > 6$; $7 > 5$.

Agora, B, fazendo uso da racionalidade de A, sabe que adotará sua estratégia dominante, e consequentemente não possui motivos para analisar seus ganhos com as demais estratégias, assim produzindo a forma estratégica:

	B_2	B_3
A_3	4	2

Na qual, a estratégia B_3 é estritamente dominada por B_2, assim , chegamos a uma situação em que, de forma racional, há só uma estratégia para cada jogador e, portanto, determinamos a solução do jogo que consiste em A adotar B_3, B e B_2 com respectivo valor do jogo igual a 4.

O método que desenvolvemos de progressivamente eliminarmos da forma estratégica de cada jogador as estratégias dominadas, é referenciado na literatura por *Eliminação Interaviva de Estratégias Estritamente Dominadas*, e quando este processo encerra com apenas uma estratégia disponível para cada jogador o jogo é **Solucionável por Dominância**. Caracteristica fundamental na eliminação interativa é que *estratégias, de um jogador, que a princípio não eram estritamente dominadas com o desenvolver da eliminação das estratégias dos outros jogadores podem tornar-se dominadas.* A solução por dominância, tem suporte nas suposições feitas sobre as escolhas dos jogadores, principalmente na que cada jogador sabe que os outros jogadores são racionais e cada jogador sabe que os outros sabem que ele sabe que os outros jogadores são racionais e assim por diante, ou seja, reafirma-se que a racionalidade dos jogadores é de conhecimento comum. Por conseguinte, com as nossas suposições e a técnica de eliminação interativa nos foi possível determinar a solução do jogo, ou seja, realizar uma predição do comportamento dos jogadores e do resultado provável do jogo.

Apliquemos o nosso método a uma situação mais próxima da realidade comercial.

Suponhamos[21] que duas lojas de confecção rivais, digamos QueroRoupa e TroqueLogo, rivais na de venda de roupa através da internet. Todos os anos cada uma produz no outono um catálogo de inverno e disponibiliza-o em sua páina web. As duas devem respeitar os preços que figuram no catálogo durante toda a temporada de inverno. Consome muito mais tempo preparar o catálogo que sua diponibilização, assim considera-se, que as duas empresas tem que decidir seus preços simultáneamente e sem saber que preços decidirá a outra. Sabem que os catálogos são destinados ao mesmo grupo de clientes potenciais, os quais são compradores inteligentes e querem comprar com o melhor preço (a dizer o mais baixo). Os dois catálogos normalmente contem artígos quase idênticos, por exemplo, uma camisa polo. Cada camisa tem custo total para cada empresa de 20 reais. As empresas estimam que se cobram cada uma 80 reais por esta camisa, cada uma delas venderá 1.200 camisas, obtendo cada uma lucro de 80 - 20 = 60 reais por camisa vendida, com lucro total de 60 x 1.200 = 72.000 reais. Ademais, resulta que

[21] Situação extraída de Nabeluf e Dixit, e caso deseje tornar ainda mais próximo ao seu cotidiano chame as empresas de Riachuelo e C&A

este preço é o melhor que atende aos interesses conjuntos, ou seja, se as empresas pudessem por-se de acordo e cobrar um preço comum, formando um cartel, 80 reais é o preço que maximizaria seus benefícios conjuntos.

Por outro lado, as empresas estimam que se uma delas baixa seu preço em 1 real e a outra não, a que reduziu ganhará clientes sendo que alguns serão procedentes da outra empresa e outros serão novos clientes, por exemplo, pessoas que decidem comprar uma camisa que não comprariam com o preço maior ou pessoas que antes compravam em uma barraca da Sulanca no centro e passam a comprar na comodidade da sua residência. Portanto, as duas empresas tem a tentação de cobrar um preço menor que da outra para atrair mais clientes.

Permitamos, que tenham um conjunto de opçoes de preços em um intervalo que vai de real em real de 42 até 38 reias. Assim, se uma delas baixa 1 real seu preço e a outra não altera o seu, a que reduz consegue 100 novos clientes, dos quais 80 procedem da outra empresa e 20 que são clientes que enquadram-se nas hipteses anteriormente descritas. Se ambas reduzem em 1 real seu preço, conservam os clientes que já possuem, e ademais cada uma consegue 20 novos clientes. Portanto, quando as duas cobram 42 reais em lugar de 80, houve uma redução 38 reais no preço, logo, ganhou 20 X 38 = 760 novos clientes que somados aos 1.200 existem produz 1960 clientes cada um pagando 42 reais e com um custo de 20 reais, temos um lucro para cada empresa de (42-20) x 1.960 = 43.120 reais. Realizando os mesmos cálculos com as outras combinações de preços teremos a matriz de pagamentos, (forma estratégica) a seguir:

		Preços TroqueLogo				
		42	41	40	39	38
Preços Quero Roupa	42	(43.120 43.120)	(41.360, 43.260)	(39.600, 43.200)	(37.840, 42.940)	(36.080, 42.480)
	41	(43.260, 41.360)	(41.580, 41.580)	(39.900, 41.600)	(38.220, 41.420)	(36.540, 41.040)
	40	(42.200, 39.600)	(41.600, 39.900)	(40.000, 40.000)	(38.400, 39.900)	(36.800, 39.600)
	39	(42.940, 37.840)	(41.420, 38.220)	(39.900, 38.400)	(38.380, 38.380)	(36.860, 38.160)
	38	(42.480, 36.080)	(41.040, 36.540)	(39.600, 39.600)	(38.160, 36.860)	(36.700, 36.700)

Para TroqueLogo as estratégias de preço 42, 39 e 38 são dominadas são dominadas pelas estratégias de preços 40 e 41. Então, a nossa tabela reduz-se a:

		Preços TroqueLogo	
		41	40
Preços Quero Roupa	42	(41.360, 43.260)	(39.600, 43.200)
	41	(41.580, 41.580)	(39.900, 41.600)
	40	(41.600, 39.900)	(40.000, 40.000)
	39	(41.420, 38.220)	(39.900, 38.400)
	38	(41.040, 36.540)	(39.600, 39.600)

Tornando-se, para QueroRoupa, a estratégia de preço 40 estritamente dominante sobre todas as demais estratégias. Portanto, nossa matriz final é:

		Preços TroqueLogo
		40
Preços QueroRoupa	40	(40.000, 40.000)

Com solução do jogo dada pelo par de estratégias de preço (40, 40) com valor do jogo de R$ 40.000,00. Um aspecto interessante, é que o ganho do jogo não é o maior resultado possível para ambos, R$ 43.120,00; correspondem a se as duas empresas pudessem chegar a um acordo e, formando um cartel, adotassem o maior preço, que seja R$42,00. Esta questão será discutida ao tratarmos do dilema dos prisioneiros.

Entrementes, ainda que a solução por eliminação interativa seja simples, na realidade apela a nossa intuição e bom senso, possui uma limitação evidente, nem todos os jogadores possuem estratégias dominantes , podendo inclusive nenhum desles possuir uma estratégia dominante.

Considere o jogo descrito anteriormente, no qual realizamos uma pequena modificação nos pagamentos resultando na seguinte forma estratégica:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	(3,2)	(1,1)	(5,4)	(0,2)
A_2	(1,1)	(3,2)	(6,0)	(2,1)
A_3	(0,2)	(4,4)	(7,2)	(3,0)

Não há mais dominância de B_2 sobre B_1, tampouco de B_3 sobre B_4.. Não sendo, então, factível a eliminação de estratégias dominadas, afinal, não há estratégias dominadas a serem eliminadas.

Não havendo solução em estratégias dominantes, temos de ampliar o nosso leque de métodos de solução com algo mais geral. Necessitamos do conceito de *equilíbrio de Nash*.

Definicão 3.4. *Equilíbrio de Nash*
Uma combinação de estratégias é um equilibrio de Nash se , e somente se, quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores, sendo verificado para todos os jogadores.

Tomemos um exemplo para determinarmos um equiĺibrio de Nash e obtermos uma melhor compreensão de suas caracteristicas.

Consideremos que uma determinada empresa, identificada por VouTentar, deve decidir se irá ingressar no mercado Aracajuano de venda de calçados, o qual é dominado pela empresa PéCalçado. A questão é que VouTentar deve tomar sua decisão sem o conhecimento se a PéCalçado decidiu investir ou não, fator relevante para uma eventual guerra de preços. Pois, a Pécalçado pode reduzir preços, ainda que com redução do seu lucro, para tornar inviável o ingresso da Voutentar. A Voutentar deve decidir se irá ingressar no mercado, se afirmativo será de forma agressiva com promoções e marketink agressivo ou mais suave. Este jogo é representado na forma estratégia seguinte, com as recompensas representando, as preferências de cada jogador para cada par de estratégias.

	VouTentar		
PéCalçado	Não Ingressa	Ingressa não agressivo	Ingressa agressivo
Investe	(4,3)	(3,2)	(2,1)
Não Investe	(3,2)	(4,3)	(1,4)

Uma rápida análise é constatamos que este jogo não possui estratégias dominantes para nenhum jogador, logo não é possível aplicar a eliminação iterativa. Vamos, então determinar o equilíbrio de Nash.

Observe que se PéCalçado *Não Investe* a melhor resposta para VouTentar é *Ingressa não agressivo*. Entretanto, *Não Investe* não é a melhor resposta a *Ingressa não agressivo*, a melhor resposta é *Investe*. Semelhante, para VouTentar escolhe *Ingressa agressivo* a melhor resposta de PéCalçado é *Investe*, entretanto, *Ingressa agressivo* não é a melhor resposta a *Não Investe*, mas sim *Ingressa não agressivo*. Então, stes pares de estratégias não constituem equilíbrio de Nash.

Na realidade, neste jogo, existe apenas um par de estratégias que constitui um equilíbrio de Nash, a saber *Investe* e *Não Ingressa*, pois a melhor resposta de VouTentar a escolha de *Investe*, por PéCalçado, é *Não Ingressa*, que lhe garante um pagamento de 3 e, vice-versa, a melhor resposta de *Não Ingressa* é *Não Investe*, com pagamento de 4 para PéCalcado. Portanto a solução do jogo seria PéCalçado investir e VouTentar não ingressar no mercado.

A obtenção do equilíbrio de Nash para jogos com uma matz de pagamento maior pde tornar-se algo extremamente demorado e passível de erros. Em virtude, que a idéia central do equílibrio de Nash é que cada jogador, de forma racional e objetivando maximizar seu ganho, consciente dos objetivos dos adversários, escolhe a melhor resposta ao que os demais jogadores estão fazendo, sendo tal válida para todos os jogadores, então visando simplificar a obtenção de tal equilibrio desenvolveu-se a técnica[22] de *identificar o equilibrio de Nash para apenas uma estratégia especifica do outro jogador* e de forma

[22]Fianni é quem melhor a descreve

iterativa repetir o processo para as demais estratégias do adversário até determinarr uma combinação de estratégias que *uma* seja a melhor resposta á *outra* e reciprocamente a *outra* seja a melhor resposta a primeira. Treinemos com o jogo entre PéCalçado e VouTentar.

	VouTentar		
PéCalçado	Não Ingressa	Ingressa não agressivo	Ingressa agressivo
Investe	l(4,3)	(3,2)	l(2,1))
Não Investe	(3,2)	l(4,3)	(1,4)

A melhor resposta de PéCalçado a Não ingressa é Investe, indicado com a letra l em itálico, por sua vez a melhor resposta de PéCalçado a Ingressa não agressivo é Não Investe e a para Ingressa Agressivo é Não Investe.

Agora para o jogador coluna, ou seja, VouTentar vejamos suas melhores respostas para cada estratégia de Pécalçado:

	VouTentar		
PéCalçado	Não Ingressa	Ingressa não agressivo	Ingressa agressivo
Investe	l(4,3)c	(3,2)	l(2,1)
Não Investe	(3,2)	l(4,3)	(1,4)c

A melhor resposta de VouTentar a Investe é Não Ingressa, indicado com a letra c em itálico e a melhor resposta a Não Investe é Ingressa Agressivo.

Agora, a combinação de estratégias que possui simultaneamente l e c é um equilíbrio de Nash. Portanto, (Investe, Não Ingressa) são um equilíbrio de Nash.

Pratiquemos com o jogo descrito anteriormente de forma estratégica:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	(3,0)	(1,1)	(5,4)	(0,2)
A_2	(1,1)	(3,2)	(6,0)	(2,-1)
A_3	(0,2)	(4,4)	(7,2)	(3,0)

Indiquemos as melhores respostas de A para cada estratégia de B e ao lado as melhores respostas de B para as estratégias de A

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	l(3,0)	(1,1)	(5,4)	(0,2)
A_2	(1,1)	(3,2)	(6,0)	(2,-1)
A_3	(0,2)	l(4,4)	l(7,2)	l(3,0)

Tabela 3.1: Melhores respostas A

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	l(3,0)	(1,1)	(5,4)c	(0,2)
A_2	(1,1)	(3,2)c	(6,0)	(2,-1)
A_3	(0,2)	l(4,4)c	l(7,2)	l(3,0)

Tabela 3.2: Melhores respstas B

E o equilibrio de Nash será o par (A_3, B_2), exatamente o mesmo obtido através da eliminação interativa. É um resultado geral, se um jogo apresenta um equilíbrio (solução) em estratégias dominantes, esse equilíbrio é, obrigatoriamente, um equilíbrio de Nash estrito.

De volta ao início com o caso do sequestro, podemos, agora, responder qual a atitude prevista pela teoria dos jogos. Seja a matriz de pagamentos:

		Estratégias Família	
		Pagar	Não Pagar
Estratégia	Não Rapto e Morte	(3,5)	(3,5)
	Não Rapto e Soltura	(3,5)	(3,5)
Sequestrador	Rapto e Morte	(4,0)	(2,1)
	Rapto e Soltura	(5,3)	(2,3)

A estratégia Rapto e Soltura e dominante (estrita e fracamente) sobre as demais estratégias, e Pagar é a melhor resposta para Rapto e Soltura, logo a solução do jogo será: (Rapto e Soltura, Pagar)
.

Dilema dos Prisioneiros

Retornemos à competição entre as empresas de vendas de roupas via internet.

QueroRoupa e TroqueLogo, estão agora limitadas a decidir simplesmente se reduzem seu preço original de 80 para 70. A estimativa de ganho de clientes ainda é a mesma, que seja, se uma delas reduz seu precio a 70 reais, enquanto a outra cobra 80, a que reduziu atrai a 1.000 clientes e a outra perde 800. Portanto, a que baixa vende 2.200 camisas, e as vendas da outra caem a 400; os lucros são, rescpectivamente, iguais a (70 – 20) x 2.200 = 110.000 reais para a empresa que baixa e (80 - 20) = 400 = 24.000 para a outra. Se ambas baixam o preço a 70 reais ao mesmo tempo, os clientes existentes seguem comprando as camisas a mesma empresa, porém cada uma consquista 20 novos clientes para 1 real reduzido. Portanto, cada uma consegue 10 x 20 = 200 vendas a mais, que somadas as 1.200 anteriores , produzem uma venda de 1.400 camisas e os lucros são no importe de (70 - 20) x 1.400 = 70.000 reais. Representaremos o jogo através de sua forma estratégica:

		TroqueLogo	
		80	70
QueroRoupa	80	(72.000, 72.000)	(24.000, 110.000)
	70	(110.000, 24.000)	(70.000, 70.000)

Antes de qualquer sugestão acerca da solução do jogo percebamos que os resultados melhores para QueroRoupa não implica sempre em um resultado pior para TroqueLogo, assim um possível raciocínio para o administrador de QueroRoupa, que é uma pessoa racional e utiliza estratégias dominantes, é que sendo a estratégia 70 reais dominante devo adotá-la independente do que TroqueLogo escolha. A reciprica é verdadeira para o gerente de TroqueLogo, que deverá utilizar sua estratégia dominante 70 e desta forma ambos ganham 70.000. O detalhe importante é que ambos obtiveram um valor inferior ao máximo possível para os dois, 110.000, que ocorre se concordassem em manter seus preços estavéis em 80 reais; situação em muito semelhante ao exemplo do vôo branco quando os proprietários deveriam chegar a um acordo sobre a heteregeniedade de raças, mais uma vez a racionalidade individual não produziu o melhor ganho coletivo, pois quando ambos os jogadores adotam suas estrategias dominantes, os dois conseguem resultados piores que se chegasem a um acordo, constituindo-se em um dos fatores que justifica por que tornou-se tão notório e importante o problema conhecido por *Dilema dos Prisioneiros*, o qual este jogo é uma versão.

No jogo das empresas a posibilidade de conversas entre elas existem, todavia se ambas firmassem um acordo, para a formação de um cartel, em que elas ditam o preço a convêniencia de ambas, somente o consumidor seria prejudicado. Portanto, não é surpresa que na maioria dos paises do mundo a existência de legislações especificas para evitar a formação de cartéis.

Exemplo 19 - Dilema dos Prisioneiros: *Dois criminosos foram presos detidos, encontravam-se com diversas evidências circunstanciais, mas nada que pudesse condená-los a penas mais graves.*

A polícia então isola cada suspeito em uma sala e faz a cada um dos suspeitos a seguinte proposta: se ele confessar o roubo e seu parceiro não confessar;ele será liberado em razão de sua cooperação, enquanto seu parceiro (que não confessou) irá curtir uma temporada de cinco anos na penitenciária. Caso contrário, ele não confessar, ms seu parceiro o fizer, sera ele a apreciar os confortos da peninteciŕia por cinco anos, enquanto seu parceiro sai livre. Caso ambos confessem, a cooperação perde sentido e os dois cumprem dois anos de detenção. Por fim, embora a polícia oculte, os criminosos sabem que nenhum confessar a pena para ambos é de um ano, por vadiagem e desacato.

As recompensas negativa de cada criminoso, jogador, consiste no tempo em que irá cumprir pena, logo, a forma estratégia associada é:

		Criminoso B	
		Confessar	Não Confessar
Criminoso A	Confessar	(-2, -2)	(0 -5)
	Não Confessar	(-5, 0)	(-1, -1)

Através do conceito de equilíbrio de Nash determinamos que as estratégias de equilibrio são: (Confessar, Confessar) resultando em uma pena de 2 anos para ambos. Mas, esta não é a melhor situação para ambos, que seria os dois cumprirem apenas um ano se os dois não confessarem.

Devemos destacar, que tanto no dilema do prisioneiro clássico, quanto das empresas de roupas, o problema consiste na incapacidade, seja por impossibilidade fisíca ou jurídica, de ambos se comunicarem para firmarem acordos garantidos.

E conforme Fianni é justamente a capacidade de estabelecer e garantir acordos que distingue jogos cooperativos de não-cooperativos, ou nas palavras dele:

> Um jogo é dito *não-coopetativo* quando os jogadores não podem estabelecer compromissos garantidos. Caso contrário, se os jogadores podem estabelecer compromissos, e essses compromisos possuem garantias efetivas, diz-se que o jogo é *cooperativo*

No dilema dos presos e na competição entre QueroRoupa e VouTentar, os jogadores tem poderosos incentivos para realização de um acordo, afinal agindo de forma racional, almejam maximizar seus ganhos. Além do que, uma razão muito simples para procurar a cooperação é evitar que o outro jogador não coopere.

Figura 3.31: Recompensa

Uma forma de conseguir a cooperação é dar uma motivação, através de uma recompensa positiva pela sua efetivação, e outra recompensa negativa dissuadindo de não cooperar mediante um castigo. Entrementes, o enfoque das recompensas é obstaculizado por diversos problemas e por varias razões. As recompensas podem ser internas: um dos jogadores paga ao outro. As vezes podem ser externas; um terceiro que também se beneficiaría da cooperação dos dois jogadores paga para que ela ocorra. Em qualquer dos casos, não se pode dar a recompensa a um jogador antes de que decida, já que, do contrario, simplemente embolsaría a recompensa e depois, bem depois é totalmente incerto. Por outra parte, a promessa de recompensa pode não ser crível: uma vez que o jugador tenha decidido cooperar, a promessa pode não ser concretizada.

Campanhas eleitorais, guerras de preços entre empresas rivais de diversos ramos, a exploração excessiva de recuros, são apenas algumas das inúmeras situações que são modeladas com a utilização do dilema dos presioneiros e seu estudo é das mais ricas vertentes da teoria dos jogos. Resssaltamos que a contribuição fundamental da Teoria dos Jogos é que esta fornece uma metodologia para formulação e análise dos problemas apresentados em uma modelagem relativamente simples com conclusões poderosas.

Encerramos esta seção com o conhecido jogo do sorveteiro, ou jogo da localização, com uma explicação para a aglomeração das atividades comerciais em torno de uma região, por intermédio do equilíbrio de Nash.

Jogo do Sorveteiro ou Jogo da Localização

Grandes gurus da administração como Ram Charam dizem que o melhor lugar para se aprender a fazer negócios é na feira. Concordo, mas acrescentaria que também se pode aprender com o camelô, o pipoqueiro e com todo mundo que lida diretamente com o freguês comprando e vendendo. Estes profissionais podem nos mostrar na prática como as teorias do mundo dos negócios funcionam de verdade. Observando o comportamento de um sorveteiro na praia, pode-se chegar a conclusões interessantes sobre estratégia de localização com base na Teoria dos Jogos. Mais do que isso, é possível concluir novos aspectos sobre nossa própria localização: por que é vantajoso morar e trabalhar em uma cidade grande como São Paulo?

Imagine uma praia relativamente pequena, com uns 300 metros, onde seus freqüentadores encontram-se espalhados igualmente na areia. Neste cenário, imagine-se um sorveteiro (B) que chega à praia onde já se encontra um concorrente (A) vendendo o mesmo produto com o mesmo preço que o seu, por suposição ambos possuem o mesmo custo. Destarte, o único fator que influenciará os banhistas, além do desejo de tomar sorvete é clato, é a distância a ser percorrida até o carrinho. Como o outro sorveteiro está sozinho, ele está bem no meio da praia. Onde você irá estacionar o seu carrinho de sorvetes e onde você acha que seu concorrente o fará?

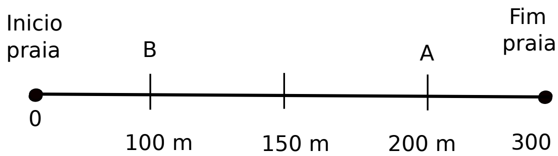

Figura 3.32: Localização com Cooperação

A primeira vista, parece que o mais óbvio é cada um ficar a uma distância de 100 metros do fim da praia e deles mesmos. Esta seria uma estratégia de mútua cooperação, onde cada um dos vendedores teria um terço da praia praticamente exclusiva e um terço dividido eqüitativamente. Eles estariam posicionados da melhor forma para que qualquer banhista possa chegar até eles andando o mínimo possível. Mas se você já teve a oportunidade de presenciar uma situação parecida com esta na realidade, provavelmente você notou os dois sorveteiros juntos no meio da praia. Será que eles fazem isso para poder ficar conversando? Ou será que esta é realmente a melhor alternativa?

Na verdade, eles ficam juntos no meio da praia porque este é o único Equilíbrio de Nash possível no sistema. Em Teoria dos Jogos, o Equilíbrio de Nash é atingido quando cada jogador faz o melhor possível em função do que seus concorrentes fazem.

Vamos supor que não há nenhuma restrição na distância que os banhistas estão dispostos a caminhar para chegar até o sorveteiro e por estarem vendendo o mesmo produto com preços iguais prefiram comprar seu sorvete no carrinho mais próximo. Por fim, admitimos que os banhistas não estão concentrados em setores da praia[23], ou seja, estão distribuídos uniformemente e cada banhista compra apenas um sorvete. Desta forma, quanto maior o pedaço de praia que cada sorveteiro consiga atender maiores suas vendas e portanto seus lucros.

Voltando a imaginar-se sorveteiro: se o seu concorrente ficasse a 100 metros do fim direito da praia, o melhor que você poderia fazer seria se posicionar logo à sua esquerda. Desta forma, você abrangeria dois terços da praia contra um terço para ele.

Logo, considerando a hipótese que os banhistas estão espalhados uniformente na extensão da praia, com sua nova posição está atendendo a um número maior de banhistas que A. Esta nova localização seria a sua deserção vantajosa da cooperação, frente a manutenção da cooperação dele. Ambos são racionais e buscam maximizar seus ganhos, logo, o

[23]Esta realmente não é uma suposição muito realista, afinal é natural existirem lugares na praia que concentram em maior número os banhistas, ainda assim a análise com adpatções é equivalente

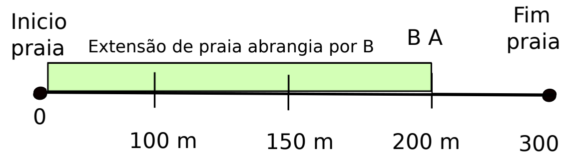

Figura 3.33: Localização sem Cooperação

sorveteiro A sabe que a situação representada na figura 3.2 não é a melhor resposta caso B se coloque ao seu lado. Portanto, as posições não são um equilíbrio de Nash. Assim no momento seguinte, porém, seu concorrente (A) se moveria mais para o centro, logo à sua esquerda. Dali a pouco, seria você que iria para a esquerda dele e, momentos depois, ambos estariam juntos no meio da praia. Em uma sucessão de deserções de parte a parte, você e seu concorrente iriam ficar bem no centro da praia, dividindo a clientela meio a meio. Atente-se que essa divisão em oartes iguais da praia é um equilíbrio de Nash, pois cada sorveteiro adotou a melhor resposta à localização do outro e não existe nenhhuma motivação, ou seja, incentivo para que qualquer um dos dois altere sua localização (estratégia), afinal nada ganharia com esta possível alteração.

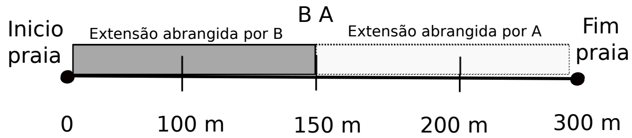

Figura 3.34: Localização com Equilibrio de Nash

Repare que é muito comum encontrar postos de gasolina, floriculturas e bancos localizados um em frente ao outro. Isto acontece pelo mesmo motivo: Equilíbrio de Nash.

A questão da localização do carrinho de sorvete também pode ser entendida como uma estratégia de localização profissional. Recentemente[24], a revista Você S.A. publicou uma pesquisa sobre as melhores cidades para fazer carreira onde São Paulo foi apontada como a primeira colocada. Coincidentemente, São Paulo também é a cidade mais próxima da maior parte do mercado nacional em termos de concentração de PIB. Pode-se dizer que São Paulo é exatamente o "meio da praia", o lugar onde é mais vantajoso você estar se quiser atingir o maior número de pessoas possível e aumentar sua exposição pessoal.

Mas São Paulo é a cidade onde se encontra a maior concorrência profissional do Brasil. Mesmo assim, é considerada a melhor cidade para fazer carreira, o que é uma aparente contradição. Por que não fazer carreira em uma pequena cidade do interior, para onde quase ninguém vai? Simplesmente porque isto representaria ir para o "canto da praia". Você conquistaria uma clientela local, sem dúvida, mas quem fica no centro divide a quase totalidade do mercado.

Como o ambiente de negócios brasileiro é bem mais complexo que uma praia, este raciocínio tem que ser entendido levando-se em conta inúmeras outras particularidades, desde o ramo de atividade em que se trabalha até questões de qualidade de vida que cada cidade oferece. Mas o "jogo do sorveteiro" é, sem dúvida, um exercício interessante para refletir sobre posicionamento profissional.(Raul Marinho, *Quanto mais melhor*, com adaptações. Disponível em < https://raulmarinhog.wordpress.com/tag/dilema-do-sorveteiro/>. Acessado em 02 de agosto de 2016)

[24] 2008

Capítulo 4

Aparato Matemático (Ufa!, enfim, a Matemática)

4.1 Utilidade

Seja X um conjunto de alternativas possíveis, mutuamente excludentes, entre as que deve escolher um agente (que pode ser um individuo, uma familia, uma empresa, uma equipe desportiva...). Em X supomos definida uma relação binária $\succeq$ chamada relacão de preferência, de maneira que para x, y $\in$ X, x$\succeq$y quer dizer que a alternativa x é preferida ou indiferente a alternativa y. De maneira que a partir de $\succeq$ se definem outras duas relacões, da seguinte forma:

1. A relacão de preferência estricta, $\succ$:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y, \text{ mas não y}\succeq\text{x}$$

2. A relacão de indiferença, $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succeq y, \text{ e também y}\succeq\text{x}$$

que se lê "x é indiferente a y"

Uma relação $\succeq$ é racional, nos termos da seguinte definição:

Definicão 4.1. *A relação de preferência $\succeq$é racional, se verifica as duas propriedades a seguir:*

- *Completutide: $\forall x, y \in X$, tem-se $x \succeq y$ ou $y \succeq x$(ou ambas);]*
- *Transitividade: $\forall x, y, z \in X, sex \succeq y$ e $y \succeq z, entox \succeq z$.*

A propriedade de completitude significa que, dadas duas alternativas quaisquer x e y, são comparavéis entre sí, no sentido que é preferida x, é preferida y ou são indiferentes. A menudo pode ser conveniente (para simplificar expressões e argumentações) assinalar a cada alternativa em X um número, de manera que números máis altos indiquemn alternativas mais desejadas. Neste caso a função U que assinala números a alternativas (*função de utilidade do agente sobre X*) pode ser qualquer que «respeite» as preferências do agente. Se diz que tal função é compativel com ditas preferências, ou que é uma representação destas.

Definicão 4.2. *Uma função U: $X \to \mathbb{R}$ é uma função de utilidada que representa a relação preferência $\succeq$, se para todo x, y $\in$ X, $x \succeq y \Longleftrightarrow$ U(x) $\geq$ U(y).*

Neste caso, é dito também, que U mede as utilidades (atribuídas ás alternativas de X) em uma escala ordinal. Vejamos uma proposição que determina as condições necesarias para que uma relação de preferência possa ser representada por uma função de utilidade.

Proposição 4.1. *Uma condição necessária para que uma relação de preferência,* $\succeq$ *, possa ser representada por uma função de utilidade é* $\succeq$ *racional.*

Demonstração. Vamos mostrar esta proposição que se existe uma função de utilidade que representa as preferências $\succeq$, então $\succeq$ deve atender as condições de completitude e transitividade. Assim:

Completitude: Seja a função de utilidade U compatível com a relação $\succeq$ para cada x, y $\in$ X, tem-se que U(x) e U(y) $\in$ R. Portanto, se tem que U(x) $\geq$ U(y)(o que implica que x $\succeq$ y), ou bem U(y) $\geq$ U(x)(o que implica que y $\succeq$ x), pelo que a relação de preferência cumpre a propiedade de completitude;

Transitividade: Sejam x, y, e z $\in$ X. Suponhamos que x $\succeq$ y e y $\succeq$ z. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{x} \succeq \mathrm{y} &\iff \mathrm{U(x)} \geq \mathrm{U(y)} \\ \mathrm{y} \succeq \mathrm{z} &\iff \mathrm{U(y)} \geq \mathrm{U(z)} \end{aligned}$$

Em virtude do conjunto dos números reais verificar a propriedade transitiva temos: U(x) $\geq$ U(z), implicando x $\succeq$ z. □

Teorema 4.1 (Existência e Unicidade da Utilidade Ordinal.)**.** *Seja X finito. Se as preferências de um agente sobre X são racionais (completas e transitivas), existe uma funçaão U de X em R compatível com tais preferências, tal que* $U(x) \geq U(y) \iff x \succeq y$*. Ademais, se V é uma função de utilidade compatível com* $\succeq$*, se tem que* $V = f(U)$*, sendo f uma função estritamente crescente.*

Demonstração. Será realizada em duas etapas. Em primeiro lugar suporemos que nunca há indiferença entre dois elementos distintos de X. Posteriormente extenderemos o raciocíno ao caso geral.

1. O conjunto X está formado por n elementos. Suponhamos que entre dois elementos distintos quaisquer de X sempre há preferência estrita por um deles. Ordenamos os elementos de X da seguinte forma:

   $$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \text{ de maneira que: } x_n \succ x_{n-1} \succ \cdots \succ x_2 \succ x_1$$

   Definimos a função de utilidade $U(x_i) = i$, para $i = 1, 2, cdots, n$. Tratando-se de uma função de utilidade que compatível com a relação de preferência, pois:

   $$x_i \succ x_j \iff U(x_i) > U(x_j)$$

   Suponhamos agora que V é qualquer função de utilidade compativel com a relação de preferência. Logo, atende:

   $$\forall x_i \neq x_j, x_i \succ x_j \iff V(x_i) > V(x_j)$$

   Porém, $x_i \succ x_j$ se, somente se, $i > j$. Portanto:

   $$V(x_i) > V(x_j) \iff i > j$$

   Para cada x $\in$ X podemos expresar $V(x) = f[U(x)]$, onde $f : \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{R}$, sendo $f(i) = V(xi)$. f é estritamente crescente, já que:

   $$i > j \Longrightarrow f(i) = V(x_i) > V(x_j) = f(X_j) \forall i, j \in \{1, 2, cdots, n\}, i \neq j$$

2. Extendamos o raciocinio ao caso geral. Entre os n elementos de X, tomemos um representante de cada classe de elementos indiferentes entre sí. Sejam $x_i, x_2, \ldots, x_k inX$, tal que $x_k \succ x_{k-1} \succ \cdots \succ x_2 \succ x_1$, de maneira que para ca x $\in$ X, existe x_i com i $\in$ $\{1, 2, \ldots, k\}$, verificando que x $\sim$ x_i. Definimos $U(x) = U(x_i) = i$. U é função de utilidade compatível com a relação de preferência $\succeq$. Afinal, $\forall x, y \in X$, seja x $\succeq$ y, então x $\sim$ x_i y $\sim$ x_j, com $x_i \succeq x_j$, pelo que

$$U(x) = i > j = U(y)$$

Por outra parte, seja V qualquer outra função de utilidade compatível com $\succeq y$. Deve valer, para V

$$V(x) = V(x_i) \geqslant V(x_j) = V(y)$$

Se x $\sim$ y, então $V(x) = V(x_i) = V(x_j) = V(y)$

Se x $\succ$ y, então $V(x) = V(x_i) > V(x_j) = V(y)$

para x $\in$ X, seja x $\sim x_i$, podemos fazer $V(x) = V(x_i) = f[U(x_i)] = f(i)$.

f é uma função *f:* $\to \{1, 2, \cdots, k\}$ estritamente crescente, posto que

$$i > j \Longrightarrow x_i \succ x_j \Longrightarrow V(x_i) > V(x_j) \Longrightarrow f(i) > f(j)$$

□

Proposição 4.2. *Seja* $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\not\vDash} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. *A relação de preferência lexicográfica*[1] *em X não é representável por nenhuma função de utilidade.*

Demonstração. Demonstramos a proposição por redução ao absurdo. Suponhamos que existe $U : X \to \mathbb{R}$, função de utilidade compatível a relação de preferência lexicográfica.

Para cada $x_1 \geq 0$, temos $(x_1, 2) > (x_1, 1) \Longrightarrow U(x_1, 2) > U(x_1, 1)$. Como $U(x_1, 2) e U(x_1, 1)$ são números reais, existe um número racional $r(x_1)$ tal que

$$U(x_1, 2) > r(x_1) > U(x_1, 1)$$

Seja x'_1 com $x_1 > x'_1$. Verifica-se que $r((x_1) > r(x'_1)$, pois

$$r(x_1) > U(x_1, 1) > U(x'_1, 2) > r(x'_1)$$

Portanto temos definida uma função

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{Q} \; r : x \to r(x)$$

$\mathbb{Q}$ é conjunto dos números racionais. Tal função é injetiva, $x_i \neq x'_1 \Longrightarrow r(x_i) \neq r(x'_1)$, produzindo uma contradição, já que o conjunto dos números reais, domínio da função, é um conjunto infinito não numerável, enquanto o conjunto dos racionais, contradomínio da função r, é finito numerável, o que é matematicamente impossível para uma função injetiva. □

Ressalta-se que tem significado apenas as proposições acerca de uma função de utilidade U cuja verdade ou falsidade não se altera ao substituir U por uma transformação estritamente crescente de U. Alguns exemplos:

— A produz maior (ou menor, ou igual) utilidade que B » tem sentido;

— B produz 7 veces mais utilidade que A » não tem sentido;

— A diferença de utilidade entre B e C é o sextuplo da que há entre A e C » não tem sentido.

Para diversas aplicações é suficiente dispor de uma informação ordinal das utilidades de um agente, mas, no geral esta informação é insuficiente. É preciso, portanto, definir um tipo de escala de utilidade.

[1] O nome derivada da maneira que o dicionário é organizado, tem maior prioridade para determinar a ordem de preferência a primeira letra de uma palavra

Utilidades de Von Neumann-Morgernstern

Suponhamos que um agente deve eleger uma entre varias alternativas, sendo conhecidas de maneira objetiva as probabilidades associadas as alternativas. Nestas condições, em teoría da decisão afirma-se que estamos em um contexto de seleção em ambiente de risco.

Seja $X = \{x_1, X-2, \cdots, x_n\}$ um conjunto de alternativas em um ambiente de risco. Suponhamos, portanto, que o conjunto é finito.

Definicão 4.3. *Uma lotería simples em X é uma distribução de probabilidade em X. L é uma lotería simples em X, se*

$$L = \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{\ltimes} : p \geq 0, \text{ para cada } i = 1, 2, \cdots, n \text{ e } y = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Um exemplo simples seria uma aposta no lançamento de um dado, ao apostar 6 reais no número 6 , o cassino, bingo, casa de apostas, o que seja, oferece a seguinte lotería: «premio de 20 reais se sai o 6 (probabilidade 1/6), prêmio nulo para os demais resultados (probabilidade 5/6). Expresso de outra manera, neste caso

$$X = \{216, 0\} \text{ e L} = \{1/6, 5/6\}.$$

Definicão 4.4. *Se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é um conjunto de valores numéricos, denomina-se valor esperado da lotería $L = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ o valor númerico $E(L) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.*

Em uma lotería simples, os resultados possíveis são certos (os elementos do conjunto X). De maneira mais geral de lotería, chamada lotería composta, os resultados são loterías simples, tal como se define a continuação.

Definicão 4.5. *Se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Dadas m loterías simples sobre X, $L_j = (p_1^j, p_2^j, \cdots, p_n^j)$, com uma distribuição de probabilidades $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m)$, com $\delta_j \geq 0$, para $j = 1, 2, \cdots, m$ e $\sum_{j=1}^{m} \delta_i = 1$. A loteria composta $(L_1, L_2, \cdots, L_m; \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m)$ consiste em obter a loteria simples L_j com probabilidade δ_j, para $j = 1, 2, \cdots, m$*

Dada a loteria composta $(L_1, L_2, \cdots, L_m; \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m)$, pode-se calcular a loteria simples sobre X, $L = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ que produz a mesma distribuição sobre os resultados de X, da seguinte forma

$$p_i = \delta_1 p_1^j + \delta_1 p_+^j \cdots + \delta_1 p_n^j, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

Admitindo que o agente se fixa exclusivamente na distribução de probabilidades sobre os resultados que constituem o conjunto X, de maneira que duas loterías compostas distintas que dão lugar a uma mesma lotería simples sobre X são equivalentes.

Podemos denotar L :

$$L = \delta_1 L_1 + \delta_1 L_1 + \cdots + \delta_m L_m$$

Supõe-se que o agente decisor de acordo a relação de preferencia $\succeq$, com as propriedades de completitude e transitividade. Portanto, supomos que a relação $\succeq$ é racional. A continuação definem-se outras propriedades a considerar na preferencia $\succeq$, sobre L_X.

Definicão 4.6. *A relação de preferência $\succeq$ definida em L_X é dita continua se $\forall L^*, L^{**} \in L_X$, os conjuntos $\{\delta \in [0, 1] : L^*, L^{**}; \delta, 1-\delta \succeq L^{**}\}$ e $\{\delta \in [0, 1] : L^{**} \succeq (L^*, L^{**}; \delta, 1-\delta)$ são fechados.*

A propiedade de continuidade significa que pequenas alterações nas probabilidades não produzem cambios na ordem entre duas loterías.

Definicão 4.7. *A relação de preferência $\succeq$ definida em L_X verifica o axioma de independencia se $\forall L^*, L^{**} \in L_X, \forall \delta \in [0, 1]$, tem-se que*

$$L^* \succeq L^{**} \Leftrightarrow (L^*, L^{**}; \delta, 1-\delta) \succeq (L^*, L^{**}; 1-\delta, \delta)$$

Definicão 4.8. *Diz que a função de utilidade $U : L_X \to \mathbb{R} \to$ é uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern(VN-M) se existen n números $u_1, u_2, \cdots, u_n$ associados, respectivamente, a $x-1, x_2, \cdots, x_n$, tais que para cada loteria $L = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\} \in L_X$ verifica-se que*

$$U(L) = u_1p_1 + u_2p_2 + \cdots + u_np_n$$

A proposição, a seguir, fornece uma condição necessária e suficiente para que uma função com dominio em L_X e contra-dominio em $\mathbb{R}$ seja uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern. Indo além, comprova que as utilidades esperadas de Von Neunmann-Morgenstern são funções lineares das probabilidades.

Proposição 4.3. *uma função de utilidade $U : L_X \to \mathbb{R}$ é uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern(VN-M) $\Leftrightarrow \forall L_1, L_2, \cdots, L_m \in L_X, \forall \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m \in [0,1]$, com $\sum\limits_{i=1}^{m} \delta_i = 1\}$, verifica-se que $U = (\sum\limits_{j=1}^{m} \delta_j L_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_j U(L_j)$*

Demonstração. Provemos cada uma das propriedades.

$\Longrightarrow)$

$$L_1 = \{p_1^1, p_2^1, \cdots, p_n^1\}, L_2 = \{p_1^2, p_2^2, \cdots, p_n^2\}, \cdots, L_m = \{p_1^m, p_2^m, \cdots, p_n^m\} \in L_X \;;$$
$$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m \in [0,1] \text{ com } \sum_{j=1}^{m} \delta_j = 1$$

Consideremos a loteria composta $(L_1, L_2, \cdots, L_m; \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m)$ que é equivalente a loteria simples $L = (p_1, p_2, \cdots, p_n; \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$, onde para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ temos $p_i = \delta_1 p_i^1 + \delta_2 p_i^2 + \cdots + \delta_m p_i^m$. Portanto

$$L = \sum_{j=1}^{m} \delta_j L_j$$

$\Longleftarrow)$

Seja $L = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \in L_X$. Podemos fazer

$$L = (p_1, 0, \cdots, 0) + (0, p_2, \cdots, 0) + \cdots + (0, 0, \cdots, p_n) = p_1L^1 + p_2L^2 + \cdots + p_nL^n$$

Portanto

$$U(L) = U(\sum_{i=1}^{n} p_iL^i) = \sum_{i=1}^{n} p_iU(L^i) = \sum_{i=1}^{n} p_iu_i$$

Donde $u_i = U(L^i)$, consequentemente U é uma função de utilidade esperada de Von-Neumann e Morgernstern.

□

A partir da proposição anterior, vemos que para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ é $u_i = U(L^i)$, L^i é a lotería que assinala probabilidade um a alternativa x_i e probabilidade zero as demais alternativas, é dizer, a lotería L_i é a opção consistente em obter x_i com segurança. Pode-se definir, então, a seguinte função

$$u : X \to \mathbb{R}$$
$$x_i \longrightarrow u(x_i)$$

De maneira que $u(x_i) = u_i = U(L^i)$.

Portanto, se U é uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, tem-se uma função u que pode ser interpretada como a função que associa a cada alternativa do conjunto inicial X sua utilidade verificando-se que:

$\forall L = \{p_1, p_2, \cdots, p_n) \in L_X\}$ é $U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$

A seguir demonstramos que as funções de utilidade esperada de Von Neunmann-Morgenstern possuem cardinalidade, ou seja, uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, correspondente a unm relação de preferência, é única, salvo uma transformação afín positiva

Proposição 4.4. *Seja $U : L_X \to \mathbb{R}$ uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern correspondente a $\succeq$ sobre L_X.*

$V : L_X \to \mathbb{R}$ é outra função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern correspondente a $\succeq$ sobre $L_X \Leftrightarrow$ Existem a, b $\in \mathbb{R}$, com a> 0, tais que $V(L) = aU(L) + b$, para cada $L \in L_X$.

Demonstração. $\Longrightarrow$)

Sejam U e V funções de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern definidas em L_X correspondentes a $\succeq$.

Vejamos que, então, existem a, b $\in \mathbb{R}$, com a > 0, tais que $V(L) = aU(L) + b$, para cada $L \in L_X$.

Por ser U função linear, é continua. O conjunto L_X é fechado e limitado. Portanto, do teorema de Weierstrass, existem $max\ U(L),\ e\ min\ U(L), L \in L_X$, correspondentes a $\overline{L}, \underline{L} \in L_X$, tais que $\overline{L} \succeq L \succeq \underline{L}, \forall L \in L_X$;

Se $L \sim \overline{L}$, então qualquer função de utilidade é constante, e consequentemente $V(L) = k, U(L) = k^{'} \forall L \in L_X$, atendendo a implicação para $a = 1, b = k - .k^{'}$.

Supongamos que $\overline{L} \succ L$. Seja $L \in L_X$. Vemos que podemos encontrar $\alpha_L \in [0,1]$, tal que $L \sim \alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}$. Em verdade, terá que ser $U(L) = \alpha_L U(\overline{L}) + (1 - \alpha_L)U(\underline{L})$, obtendo-se que

$$\alpha_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$$

Mas V deve cumprir a condição

$$V(L) = V(\alpha_L \overline{L} + (1 - \alpha_L)\underline{L}) = \alpha_L V(\overline{L} + (1 - \alpha_L)V(\underline{L} = \alpha_l [V(\overline{L} - V(\underline{L}] + V(\underline{L}$$

Substituindo o valor de α_L encontrado anteriormente,

$$V(L) = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}[V(\overline{L} - V(\underline{L})] + V(\underline{L})$$

Após um pouco de algebrismo, resulta

$$V(L) = \frac{V(\underline{L}) - V(L)}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}U(L) - \frac{U(\underline{L})[V(\underline{L}) - V(L)]}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})} + V(\underline{L})$$

Atendendo as condições com:

$$a = \frac{V(\underline{L}) - V(L)}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})} \text{ e } b = -\frac{U(\underline{L})[V(\underline{L}) - V(L)]}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})} + V(\underline{L})$$

$\Longleftarrow$)

Suponhamos agora que existem a, b $\in \mathbb{R}$, com a, b > 0, tais que $V(L) = aU(L) + b$, para cada $L \in L_X$, sendo U uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, correspondente a $\succeq$. Vejamos que V é outra função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Sejam $L_1, L_2, \cdots, L_m$ e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in [0,1]$, com $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$, temos que

$$V(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j) = aU(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j L_j) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b = a[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j U(L_j)] + b = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j [U(L_j) + b]$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j V(L_j)$$

Encerrando-se com a utilização da Proposição 1.3. Ademais, sendo U representação de $\succeq$ cumpre $L \succeq L^{'} \Leftrightarrow U(L) \geq U(L^{'} \Leftrightarrow aU(L) + b \geq aU(L^{'}) + b \Leftrightarrow V(L) \geq V(L^{'}$

□

Enunciemos o teorema de existência da utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern.

Teorema 4.2. *Se $\succeq$ satisfaz as proposições 3 e 4, então $\succeq$ admite uma representação em utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern. Quer dizer, $\exists (u_1, u_2, \cdots, u_N) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $L > L^{'} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u_n \geq \sum_{i=1}^{n} p_i^{'} u_n$*

Demonstração. Será construída em quatro etapas(seguindo Mas-Colell, Whiston e Green):

1. Se $L \succeq L^{'}$, então $L \succeq \alpha L + (1-\alpha)L^{'} \succeq L^{'}$, afinal

   $L \succeq L^{'} \to \alpha L + (1-\alpha)L \succeq \alpha L + (1-\alpha)L^{'} \to L \succeq \alpha L + (1-\alpha)L^{'}$ e também $L \succeq L^{'} \to \alpha L + (1-\alpha)L^{'} \succeq \alpha L^{'} + (1-\alpha)L^{'} \to \alpha L^{'} + (1-\alpha)L^{'} \succeq L^{'}$

   Daí, deriva-se, por transitividade, que $L \succeq \alpha L + (1-\alpha)L^{'} \succeq L^{'}$.

2. Sejam $\alpha, \beta \in [0,1]$. Então $\beta\overline{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\underline{L} + (1-\alpha)\underline{L} \Leftrightarrow \beta < \alpha$.

   Do passo anterior, sabemos que $\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$, consequentemente(aplicando independência), temos

   $\gamma\overline{L} + (1-\gamma)(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}) \succ \gamma(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}) + (1-\gamma)(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L})$;

   $\gamma\overline{L} + (1-\gamma)(\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}) \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L})$;

   $[\gamma + (1-\gamma)\alpha]\overline{L} + (1-\gamma)(1-\alpha)\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L})$;

   $\gamma\overline{L} + (1-\gamma)(\alpha\overline{L} + [1-(\gamma + (1-\gamma)\alpha)]\overline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L})$

   Logo, definindo-se $\beta = (\gamma + (1-\gamma)\alpha)$, onde $\beta > \alpha$, temos

   $\beta\overline{L} + (1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L}$

3. $\forall L \in L_X$, existe um único α_L tal que $\alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_l)\underline{L} \sim L$.

   Graças ao axioma de continuidade, sabemos que existe e que é único. definamos os conjuntos $\{\alpha \in [0,1] : \alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_l)\underline{L} \sim L\}$ e $\{L \sim \alpha \in [0,1] : \alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_l)\underline{L}\}$. Dado o axioma de continuidade, estes dois conjuntos são fechados. Dado que $\alpha \in [0,1]$, donde este é um conjunto conexo, deve existir um *alpha* que pertença aos dois conjuntos. Ou seja, $\exists \alpha, \alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_l)\underline{L} \sim L$. Em decorrência da continuidade implica que tal α é único.

4. Mostrar que $\exists\ U(\cdot)$ que é uma representação de $\succeq$.

   Definamos a função $U : L_X \to \mathbb{R}$ que associa $U(L) = \alpha_L, \forall L \in L_X$. A função $U(L)$ representa a relação de preferência $\succeq$. Provemos.

   Dado que $\exists\ \alpha_L, \alpha_{L'}$, tais que $L \sim \alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_l)\underline{L}$ e $L^{'} \sim \alpha_L\overline{L} + (1-\alpha_l)\underline{L}$, teremos que

   $L \sim U(L)\overline{L} + (1-U(L))\underline{L}$;

   $L^{'} \sim U(L)\overline{L} + (1-U(L))\underline{L}$;

   Por outra parte, por construção

   $\alpha L + (1-\alpha)L^{'} \sim \alpha L + (1-\alpha)L^{'}$

   $\alpha L + (1-\alpha)L^{'} \sim \alpha[U(L)\overline{L} + (1-U(L))\underline{L}] + (1-\alpha)[U(L^{'})\overline{L} + (1-U(L^{'})\underline{L}$

   $\alpha L + (1-\alpha)L^{'} \sim [\alpha U(L)\overline{L} + (1-\alpha)U(L^{'})]\underline{L} + [\alpha(1-U(L) + (1-\alpha)(1-U(L^{'})]\underline{L}$

   $\alpha L + (1-\alpha)L^{'} \sim [\alpha U(L)\overline{L} + (1-\alpha)U(L^{'})]\underline{L} + [1-(\alpha U(L) + (1-\alpha)U(L^{'})]\underline{L}$

   Logo, $U(\alpha L + (1-\alpha)L^{'}) = \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L^{'}$, implicando que cumpre-se a linearidade em loterias compostas, logo é uma utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern.

□

4.2 Elementos Básicos dos Jogos

A terminología dos elementos básicos dos jogos, ainda que tenha sido apresentada em capítulos anteriores , será relembrada para melhor compreensão das definições e teoremas vindouros.

Jogadores: São os participantes do jogo, que tomam decisões, na ótica da teoria dos jogos, com o fim de maximizar sua utilidade. No mínímo dois, sem restrições ao número máximo.

Ações de cada jogador: São as decisões que pode tomar cada jogador em cada momento que lhe toque jogar(decidir). O conjunto de ações de um jugador em cada momento do jogo pode ser finito ou infinito.

Resultados do juego: São os distintos modos que um jogo pode ser concluído. Cada resultado leva consigo uma ou mais consequências para cada jogador.

Ganhos ou Pagamentos do Jogo: Cada jogador recebe um pagamento ao término do jogo, que depende de qual tenha sido o resultado.O significado de cada ganho é a utilidade que cada jogador atribui a cada resultado especifico, ou seja, a valoração que para o jugador tem as consequências de alcançaar um determinado resultado do jogo.

Estratégias. Perfil de estratégias: Uma estrategia de um jugador é um plano completo de ações com as quais podería dispor-se a participar do jogo. Um perfil de estrategias é um conjunto de estratégis, um por cada jogador.

Mais especificamente, um jogo tem os seguintes elementos básicos: existe um conjunto finito de jogadores, representado por $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$. Cada jogador $h_i \in H$ possui um conjunto finito $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{im_i}\}$ de opções, denominadas estratégias puras do jogador h_i com $(m_i \geq 2)$. Um vetor $\mathbf{e} = (e_{1j_1}, e_{2j_2}, \cdots, e_{nj_n})$, onde e_{ij_i} é uma estratégia pura para o jogador $h_i \in H$, é denominado um perfil ou combinação de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam, portanto, o produto cartesiano

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,$$

denominado espaço de estratégia pura do jogo. Para cada jogador $h_i \in H$, existe uma função utilidade

$$\begin{aligned} u_i : S &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{e} &\longmapsto u_i(\mathbf{e}) \end{aligned}$$

que associa o ganho $u_i(\mathbf{e})$ do jogador h_i a cada perfil de estratégia pura $\mathbf{e} \in$ E.

Existem situações em há incerteza acerca das escolhas possivéis, os chamados movimentos de azar, que existe uma distribuição de probabilidades sobre as escolhas possíveis e, para cada combinação de estrategias puras dos jugadores, a função de pagamento que recebe o jogador i, que é a função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern associada com os resultados (possivelmente aleatórios) obtida a partir das estrategias dos jogadores. Portanto, neste caso trata-se de pagamentos esperados (ou utilidades esperadas).

Uma estratégia mista p_i para o jogador $h_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto E_i de estratégias puras do jogador. Para o jogador $h_1 \in G$, temos que a probabilidade de seleção da sua primeira estratégia(e_{11}) é p_{11}, de selecionar sua segunda estratégia p_{12}, sua n-ésima probabilidade é p_{1n}, sendo portanto sua estratégia mista corresponde: $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n})$. Então uma estratégia mista é representada: $p_{\mathbf{i}} = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{im_i})$, onde p_{im_i} representa a probabilidade do jogador i escolher sua m-ésima estratégia pura. Uma estratégia mista p_i é um elemento do conjunto

$$\Delta_{m_i} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{>\sqsupset} | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_{m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1$$

Importante, e será utilizado mais adiante, observar que Δ_{m_i} é um conjunto compacto e fechado.

Definicão 4.9. Forma Estratégica(Normal) do Jogo

A representação em forma normal de um jogo com n jogadores especifica os espaços de estrategías dos jogadores $E_1, E_2, \cdots, E_n$ *e suas funções de ganho(utilidade)* $u_1, u_2, \cdots, u_n$. *Denota-se este jogo por* $G = \{E_1, E_2, \cdots, E_n : u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

Portanto, um jogo em forma estratégica(ou normal) é especificado através do conjunto de jogadores, o conjunto de estratégias para cada jogador e os ganhos(ou utilidades) que recebem os jogadores para cada combinação de estratégias.

Para jogos com dois jogadores, com número finito de estratégias puras para cada jogador a representação estratégica do jogo pode-se ser representada por sua matriz de pagamentos, onde nas colunas estão os elementos associados ao jogador 2 e nas linhas do jogador 1, da seguinte forma:

Sejam:

$E_1 = \{e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1m}\}$ o conjunto de m estratégias puras do jogador 1;
$E_2 = \{e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2n}\}$ o conjunto de n estratégias puras do jogador 2;

		Jogador 2			
		e_{21}	e_{22}	$\cdots$	e_{2n}
Jogador 1	e_{11}	$u_1(e_{11}, e_{21}), u_2(e_{11}, e_{21})$	$u_1(e_{11}, e_{22}), u_2(e_{11}, e_{22})$	$\cdots$	$u_1(e_{11}, e_{2n}), u_2(e_{11}, e_{2n})$
	e_{12}	$u_1(e_{12}, e_{21}), u_2(e_{12}, e_{21})$	$u_1(e_{12}, e_{22}), u_2(e_{12}, e_{22})$	$\cdots$	$u_1(e_{12}, e_{2n}), u_2(e_{12}, e_{2n})$
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	e_{1m}	$u_1(e_{1m}, e_{21}), u_2(e_{1m}, e_{21})$	$u_1(e_{1m}, e_{22}), u_2(e_{1m}, e_{22})$	$\cdots$	$u_1(e_{1m}, e_{2n}), u_2(e_{1m}, e_{2n})$

Onde por comodidade de representação as estratégias do jogador 1 e 2 serão indicadas da seguinte forma:

$$e_{11} = A_1, e_{12} = A_2, \cdots, e_{1m} = A_m \text{ ;}$$
$$e_{21} = B_1, e_{12} = B_2, \cdots, e_{2n} = B_n$$

Com suas respectivas funções de utilidade

$u_1(e_{11}, e_{21}) = a_{11},\ u_1(e_{11}, e_{22}) = a_{12},\ \cdots, u_1(e_{1m}, e_{2n}) = a_{mn};$

$u_2(e_{11}, e_{21}) = b_{11}, u_2(e_{11}, e_{22}) = b_{12},\ \cdots, u_2(e_{1m}, e_{2n}) = b_{mn}$

Resultando na forma estratégica(mais amistosa)

		Jogador 2			
		B_1	B_2	$\cdots$	B_n
Jogador 1	A_1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	$\cdots$	(a_{1m}, b_{1m})
	A_2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	$\cdots$	(a_{2n}, b_{2n})
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	A_m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	$\cdots$	(a_{mn}, b_{mn})

Sendo $A_{m\times n} = (aij, b_{ij})_{m\times n}$ mais compacta e simples.

4.3 Jogos Soma Zero

Os jogos de duas pessoas, onde $a_{ij} = -b_{ij}$, com $i = 0, 1, 2, \cdots, m$ e $j = 0, 1, 2, \cdots, n$ são denominados de soma zero, pois $a_{ij} + b_{ij} = 0 \ \forall i, j$. Portanto, os interesses são completamente opostos, significando que os ganhos[2] obtidos por um jogador implicam nas mesmas perdas para o outro jogador. Nestes, na forma estratégica é suficiente a indicação apenas de uma das utilidades, pois a outra está implictamente determinada, sendo por tradição utillizada do jogador A(ou jogador das linhas). Ficando a forma estratégica, associada:

		Jogador 2			
		B_1	B_2	$\cdots$	B_n
Jogador 1	A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
	A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

Ou $A_{m \times n} = (aij)_{m \times n}$ e de forma mais simples ainda $A = (aij)$

Princípio Minimax e Ponto de Sela

O menor valor , para cada estratégia i, da função utilidade(ganho) do jogador A é $\min\limits_{j \leq n} a_{ij}$. é o deles é $\max\limits_{i \leq m} \min\limits_{j \leq n} a_{ij}$. Portanto, correspondendo ao minimo que o jogador pode obter. Por outro lado, o maior valor, para cada estratégia i, da função utilidade(ganho) do jogador A é: $\max\limits_{j \leq n} a_{ij}$, sendo o menor deles $\min\limits_{i \leq m} \max\limits_{j \leq n} \ a_{ij}$. Em geral estas duas quantidades são diferentes, mas satisfazem:

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} a_{ij} \leq \min_{i \leq m} \max_{j \leq n} \ a_{ij}$$

Provemos esta desigualdade.
Seja i qualquer, entre 1 e m, então

$$\min_{j \leq n} a_{ij} \leq a_{ij}, \forall 0 \leq j \leq n$$

Seja j qualquer, entre 1 e n, então

$$\max_{j \leq n} a_{ij} \geq a_{ij}, \forall 0 \leq i \leq m$$

Portanto, temos

$$\min_{j \leq n} a_{ij} \leq a_{ij} \leq \max_{j \leq n} a_{ij} \text{ ou}$$
$$\min_{j \leq n} a_{ij} \leq \max_{j \leq n} a_{ij}$$

Uma vez que o lado direito da desigualdade é independente de i, assim obtemos, tomando o máximo de ambos lados

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} \ a_{ij} \leq \max_{j \leq n} a_{ij}$$

[2]representados através da utilidade atribuída po cada jogador a cada par de estratégia possível

Agora o lado esquerdo da desigualdade precedente é independente de j, logo, determinando o minímo de ambos os lados

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} \; a_{ij} \leq \min_{j \leq n} \max_{j \leq n} \; a_{ij} \tag{4.1}$$

Se acontece da desigualdade 4.1 tornar-se uma igualdade, temos:

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} \; a_{ij} = \min_{j \leq n} \max_{j \leq n} \; a_{ij} = v \tag{4.2}$$

e o jogador A possui uma estratégia que lhe garante que seu ganho seja ao menos este valor e B, por sua vez, dispõe de uma estratégia que lhe assegura que sua pior perda será no máximo este valor. Neste caso, então há estratégias, i^* e j^*, para os dois jogadores , tal que

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \; ;\forall \; i, j \tag{4.3}$$

E

$$a_{i^*j^*} = v$$

Portanto, A não tem melhor escolha para i^*; similarmente B não possuí mmelhor escolha para j^*. As estratégias i^* e j^*, são denominadas de estratégias ótimas de A e B, respectivamente. As estratégias ótimas possuem as seguintes propriedades:

(i) Se A escolher i^*, então não há estratégia que B possa escolher que torne o ganho de A, menor que v;

(ii) Se B escolher j^*, então não há estratégia que A possa escolher que torne o seu ganh(A) maior que v;

(iii) Se B anunciar que irá escolher j^*, A não consegue comesta informação aumentar seu ganho. Identicamente, se A notificar que adotará i^* B não pode incrementar seu ganho;

Se a condição 4.2 ocorre, então diz-se que a Matriz $A = (a_{ij})$ possui um ponto de sela , indicado através das estratégias i^* , j^* e seu valor é $a_{i^*j^*} = v$, nomeado valor do jogo.

É fácil visualizar que as condições 4.2 e 4.3 são equivalentes, desta forma 4.2 é satisfeita se, e somente se, existe um par de estratégias i^* , j^* satisfazendo 4.3. De 4.3 temos também que:

$$\max_{i \leq m} a_{ij^*} = \min_{j \leq n} a_{i^*j} = v$$

Sendo uma condição necessária e suficiente para um jogo possuir ponto de sela basta que exista um elemento da matriz de pagamentos que seja simultanêamente mínimo de suas linhas e máximo das suas colunas. O par de estratégias i^* , j^* é também identififcado por solução do jogo, tendo um valor $v = a_{i^*j^*}$.

Teorema Minimax

Para todos os jogos de duas pessoas soma zero vale a desigualdade

$$\max_{i \leq m} \min_{j \leq n} a_{ij} \leq \min_{i \leq m} \max_{j \leq n} \; a_{ij}$$

E quando torna-se uma igualdade temos um ponto de sela, com valor do jogo v. Todavia, quando os jogos não dispôe de ponto de sela?

Para tratar desta questão, relembremos a noção de estratégia mista. Uma estratégia associa a cada estratégia pura do jogador uma probabilidade de seleção da mesma, portanto temos uma distribuição de probabilidades sobre o espaço de estratégias de cada jogador. Seja x_i a probabilidade de selecionar a estratégia i do jogador A, podemos representar a distribuição de probabilidades X , por uma matriz coluna, conforme:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} x_m \end{bmatrix}$$

,

$$x_i \geq 0; i = 1, 2, 3, \cdots, m \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Analogamente, para o jogador B, sendo y_j a probabilidade de selecionar a estratégia j temos a distribuição de probabilidades Y :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} y_n \end{bmatrix}$$

,

$$y_j \geq 0; j = 1, 2, 3, \cdots, n \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Precisamos, agora, determinar o pagamento esperado com o uso destas distribuições de probabilidade. Suponha que A adote a estratégia pura i e B escolha a estratégia mista Y; o pagamento esperado para A será identificado por h_i cujo valor é:

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$$

Que corresponde ao i-ésimo elemento da matriz coluna

$$H = AY = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{m-1} \\ h_m \end{bmatrix}$$

Por outro lado, se B utilizar a estratégia j e A a estratégia mista X, o pagamento esperado, k_j, de B é:

$$k_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

Sendo, justamente, o j-ésimo elemento da matriz linha K, onde X^T é a transposta da matriz X, logo:

$$K = X^T A = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}$$

Se A e B utilizarem suas, respectivas, estratégias mistas X e Y, então o pagamento esperado para A é:

$$PE_A = X^T AY = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = KY = X^T H$$

.

Suponha que A faça sua escoha de estratégia mista com uma distribuição de probabilidade X. Então, ele pode esperar receber ao menos:

$$\underset{Y}{min}\ X^T AY.$$

Que consiste no minímo tomado sobre todas as possivéis estratégias mistas disponivéis para B. Agora, uma vez que A tem de realizar uma escolha para X, ele irá fazer de sorte que seu munímo seja o maior possível. Então A, pode selecionar uma estratégia, chamemos X^*, que lhe garantirá uma expectativa de ganho de no minímo

$$\underset{X}{max}\,\underset{Y}{min}\ \ X^T AY.$$

independente do que B faça. Aplicando raciocínio análogo para B, para cada estratégia mista, Y< escolhida o máximo que ele irá pagar é:

$$\underset{X}{max}\ X^T AY.$$

correspondendo ao máximo tomado sobre todas as estratégias mistas disponivéis para A. Obviamente, B deseja escolher uma estratégia mista, Y^*, que lhe garanta pagar o menor destes valores, ou seja

$$\underset{Y}{min}\,\underset{X}{max}\ \ X^T AY.$$

o qual não depende das escolhas de A. Que, semelhante para o caso de estratégias puras, produz a seguinte desigualdade

$$\underset{X}{max}\,\underset{Y}{min}\ \ X^T AY \leq \underset{Y}{min}\,\underset{X}{max}\ \ X^T AY \tag{4.4}$$

O *Teorema Minimax*, elaborado pr Von Neumann, afirma que estas duas quantidades possuem **sempre** um valor comum, v, ou seja

$$\underset{X}{max}\,\underset{Y}{min}\ \ X^T AY = \underset{Y}{min}\,\underset{X}{max}\ \ X^T AY = v \tag{4.5}$$

Teorema 4.3 (Teorema Minimax Von Neumann). *Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representado pela matriz de pagamentos(payoffs) A do jogador linha, sempre existe um perfil de estratégia mista* $(X^*, Y^*) \in E_1 \times E_2$ *satisfazendo*

$$\underset{X}{max}\,\underset{Y}{min}\ \ X^T AY = X^{*T} AY^* = \underset{Y}{min}\,\underset{X}{max}\ \ X^T AY = v$$

Prova do Teorema Minimax

Vamos demonstrar que para uma dada matriz de pagamentos(payoffs) $A = (a_{ij})$, temos

$$\underset{X}{max}\ \underset{Y}{min} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = \underset{Y}{min}\ \underset{X}{max} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \tag{4.6}$$

Iniciemos obtendo uma relação entre o máximo sobre estratégias mistas e o mínimo sobre estratégias puras. Suponha $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ números arbitrários, e seja $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ a estratégia mista das m estratégias puras. Então,

$$\varphi_i \leq \underset{i}{max}\ \varphi_i = varphi_k$$

Onde o **max** é tomado sobre todas as estratégias as m estratégias. Multiplicando por x_i e somando, tem-se

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i x_i \leq \underset{i}{max}\ \varphi_i = \varphi_k$$

Logo,

$$\underset{X}{max} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i x_i \leq \underset{i}{max}\ \varphi_i = \varphi_k$$

Usando a estratégia i, em particular que atribui probabilidade 1 a K-ésima estratégia, temos
$\underset{X}{max} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i x_i \geq \varphi_1.0 + \varphi_2.0 + \varphi_3.0 + \cdots + \varphi_k.1 + \cdots + \varphi_m.0 = \varphi_k$
Consequentemente

$$\underset{X}{max} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i x_i = \underset{i}{max}\ \varphi_i$$

Racionando de maneira idntica, temos:

$$\underset{Y}{min} \sum_{j=1}^{n} \varphi_i y_j = \underset{j}{min}\ \varphi_j$$

Definindo l(X) e v(Y), como segue:

$$l(X) = \underset{Y}{min} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_iy_j = \underset{j}{min}\ a_{ij}x_i;$$
$$v(Y) = \underset{X}{max} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_iy_j = \underset{I}{max}\ a_{ij}y_j$$

Desta forma, da definição de máximo e minímo, temos, para todo j e i, respectivamente, as seguintes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq l(X);$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geq v(Y)$$

Em seguida multiplicando a primeira desigualdade por j e somando sobre j, enquanto na segunda multiplicamos por i, e somando sobre i, obtém-se

$$l(X) \leq u(Y)$$

Assim, em termos destas variavéis , temos o *teorema equivalente*

$$\max_X l(X) = \min_Y u(Y)$$

Agora, vamos a existência de um par de estratégias mistas, X^*, Y^* , com a propriedade de

$$l(X^*) = u(Y^*)$$

Uma vez que

$$l(X^*) \leq \max_X l(X) \leq u(Y^*)$$

segue que

$$l(X^*) = \max_X$$

Semelhantemente,

$$v(Y^*) = \min_Y$$

Resultando que o *teorema minimax* é essencialmente equivalente ao seguinte problema: *Encontrar os vetor X^*, Y^*, com m e n e componentes x_i, y_j , respectivamente, satisfzendo as sete condições a seguir:*

I. $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m;$

II. $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1;$

III. $l(X^*) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i, \qquad j = 1, 2, \cdots, n;$

IV. $y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \qquad j = 1, 2, \cdots, n;$

V. $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1;$

VI. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq v(Y^*;$

VII. $xl(X^*) = v(Y^*;$

A prova consistirá na construção de X^* e Y^* satisfazendo as sete propriedadesb relacionadas.

Primeiramente vamos definir a matriz aumentada O, a partir da matriz de pagamentos $A = (a_{ij})$ do jogo, com m + 1 linhas e n + m + 1 colunas:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -1 & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 01 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A linha incial será identificada por i =0. As colunas serão rotuladas da esquerda para direita, $P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n \quad P_{n+1} \quad P_{n+2} \quad \cdots \quad P_{n+m}$ onde $P_{n+1} = U_1, P_2 = U_2, \cdots, P_{n+m} = U_n$, os veotres U_i possuem o elemento na posição i com valor 1 e os demais 0.

Vamos pressupor que organizamos as linhas de tal forma que

$$a_{m1} = \max_i a_{i1} \tag{4.7}$$

e que vamos escolher as m + 1 colunas de O, de tal forma que formemos a matriz quadrada B. B será chamada de $BASE$ se satisfer as seguintes condições:

B_1. P_0 é a coluna inicial de B;

B_2. B é invertível, ou seja, possui inversa B^{-1};

B_3. Cada linha de B^{-1}, podendo-se excetuar a primeira com rótulo $i = 0$, tem por primeiro elemento um valor positivo(não nulo).

Um exemplo de uma *base* é a matriz:

$$B^0 = (P_0, P_1, U_1, \cdots, U_{m-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & 1 \\ -1 & a_{m1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

E sendo B invertível, sua inversa será :

$$(B^0)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{m1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ b_2 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ b_3 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^0 \\ R_0^1 \\ . \\ . \\ . \\ R_0^n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

onde $b_i = a_{m1} - a_{i1}$. E, conforme indicado, podemos representar a matriz inversa $(B^0)^{-1}$ através de uma matriz coluna(ou vetores linhas). De 4.7 segue $b_i \geq 0$; portanto toda linha de $(B^0)^{-1}$, com a possível exceção para $i = 0$, tem seu primeiro componente não nulo positivo.

Expressemos a condição B_0 como uma comparação de vetores com o vetor nulo. Dados dois vetores diferentes, vamos determinar quem é o maior dos dois. Para tanto é necessário definir uma elação de ordem entre vetores. Primeiro, definamos a igualdade. Dois vetores $C = c_i, D = d_i$ são iguais se, somente se, $a_i - b_i$, $\forall i$. Desta forma C é igual a D($C = D$) se, somente se, o vetor $C - D$ é o vetor nulo(todos os elementos são nulos). Agora, supondo qu dois vetores C e D não são iguais, então o vetor $C - D$ contèm ao menos um elemento não nulo. Se o primeiro elemento não nulo de $C - D$ é positivo dizemos que C é maior que D e escrevemos $C > D$. Se o primeiro elemento não nulo de $C - D$ é negativo dizemos que D é maior que C e escrevemos $C < D$.

Se as linhas da inversa da matriz B são denotadas por $R_0, R_0, \cdots, R_m$ então a condição B_3 determina a seguinte comparação

$$R_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \cdots, m. \tag{4.10}$$

Do nosso método de comparação segue que o vetor minímo de uma série de vetores é aquele cujo primeiro elemento é o menor, se todos possuirem o mesmovalo faz-se uma comparação com o segundo elemento e assim sucessivamente.

Até o momento temos a *base* $B = (P_0, P_{j1}, P_{j2}, \cdots, P_{jm})$, com inversa

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} R_0^0 \\ R_0^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_0^n \end{bmatrix} = (C_0, C_1, \cdots, C_n)$$

onde os $R's$ são agora vetores e $C's$ são colunas. então, do fato que $B^{-1}B = I$, onde I é a matriz unitária(também chamada identidade), segue que:

$$R_i P_{j_i} = 0, \quad \forall i \neq k \ ,$$
$$R_i P_{j_i} = 1, \quad \forall i = k = 0, 1, 2, \cdots, m; \qquad com\ j_0 = 0.$$

Em particular,

$$R_0 P_{j_i} = 0, \qquad j_i = j_1, j_2, \cdots, j_m \tag{4.11}$$

Agora, admitindo que formamos os n + m produtos escalares

$$R_0 P_j = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n+m$$

De 4.11 segue que ao menos m destes produtos devem ser zero. Permanecendo no máximo n produtos que não são maiores que zero. Se remanescerem n produtos escalares que sao ao menos maiores que zero, então B é chamada de *base ótima*.

Seja B uma *base ótima*, os componentes da linha e colunas 0 da sua inversa, B^{-1}, são indicados por:

$$R_0 = (l, -x_1, -x_2, \cdots, -x_m), \tag{4.12}$$

$$C_0 = (u, y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_m}) \tag{4.13}$$

Mostremos agora que uma estratégia mista ótima(X^*) para A é obtida de R_0, ou seja:

$$X^* = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

E a estratégia mista ótima para B é obtida de C_0, da seguinte maneira:

$$y_j = y_{j_i}, \forall j_i \leq n$$
$$= 0 \ \text{ demais j.}$$

Provemos que $X*$ e $Y*$ são estratégias mistas ótimas do jogo original mostrando que atendem condições I - VII.

Suponha que temos uma base ótima, formemos os produtos $R_0 P_j$ para diferentes valores de j.

Se $j = 0$, temos:

$$1 = R_0 P_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i \ ,$$

satisfazendo a condição II.

Se $1 \leq j \leq n$, temos

$$0 \geq R_0 P_j = l - \sum_{i=1}^{m} x_i \ ,$$

que satisfaz a condição III.

Se $n + 1 \leq j \leq n + m$, temos

$$0 \geq R_0 P_j = R_0 U_i = -x_i \ , \ \text{ para } 1 \leq i \leq m$$

então a condição I é atendida.

Agora, uma vez que B é uma base, temos: $R_i > 0$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, m$.

Em particular o primeiro elemento de cada R_i é não negativo. Mas de 4.11 o primeiro elemento de cada R_i é y_j, e assim a condição IV é satisfeita. Uma vez que $B_{-1}B = I$, temos especialmente que

$$BC_0 = U_0$$

Da matriz de equações, temos $m+1$ equações lineares em $m+1$ variavéis $(u, y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_m}$. A primeira desta equações é:

$$\sum_{j_i \leq n} y_{j_i} = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \ ,$$

uma vez que o primeiro componente de cada P_j é 1 para $1 \leq j_i \leq n$ e 0 caso contrário. E, consequentemente, temos a condição atendida. As m equações restantes podem ser escritas:

$$-u + \sum_{j_k \leq n} a_{ij} y_{j_k} + \sum_{j_k > n} \delta_{jk} y_{j_k}$$

para $i = 1, 2, \cdots, m$. Onde $\delta_{jk} \geq 0$. Segue que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v$$

e a condição VI é cumprida. Finalmente VII também o é, uma vez que v e l são ambas definidas pelo mesmo elemento de B^{-1}.

O problema de encontrar estratégias ótimas foi reduzido ao problema de construir uma base ótima. Natural, que daqui para diante, desenvolvamos um procedimento iterativo de obtenção desta base. O procedimento inicia com alguma base, por exemplo B^0 como definido em 4.8. Se B^0 não é uma base ótima, então partindo dela construímos uma nova base B^1, que difere de B^0 somente por uma coluna. Se R_0^1 é a linha 0 de $(B)^-1$, inversa de B, então R_0^1 terá se guinte propriedade

$$R_0^0 > R_0^1. \tag{4.14}$$

Se B^1 não é ótima, então faremos a proxima iteração do algoritmo, conforme feito para B^1, e assim sucessivamente.

Este processo gera uma sequência de bases. De 4.14 segue-se as bases não podem ser repetidas. Além do mais, o número de bases não pode exceder o número de maneiras de escolher m colunas das $n+m$ colunas da matriz aumentada O. Entretanto, terminamos o processo quando encontramos uma base ótima. Mas a pergunta que surge: *é sempre possível obter uma base ótima?*. A resposta é sim e vamos comprovar.

Suponha que a base B^0 não é ótima, então existe algum P_j em O tal que $R_0 P_j > 0$. Costruímos B^1 trocando uma coluna de B^0 pela coluna P_s, a qual é determinada através de

$$R_0^0 P_s = \underset{j}{max} R_0^0 P_j > 0, \ j = 2, 3, \cdots, n+m. \tag{4.15}$$

Em caso da escolha de P_s não ser única, então adota-se a de menor indíce.

Calculemos agora o vetor coluna $Z = (z_0, z_1, \cdots, z_m)$, satisfazendo a equação $B^0 Z = P_s$. Então, tem-se que

$$z_i = R_i^0 P_s, \quad i = o, 1, 2 \cdots, m \tag{4.16}$$

Especificamente, temos

$$z_0 = R_0^0 P_s > 0.$$

Além do que, $z_i > 0$ para algum outro $i \neq 0$. Assumamos que isto não ocorre , ou seja, $z_i \leq 0 (i \neq 0)$, então da relação

$$P_s = B^0 Z = z_0 P^0 + \sum_{i=1}^{m} z_i P_{j_i}$$

segue que

$$P_0 = \frac{1}{z_0} P^0 - \sum_{i=1}^{m} \tfrac{z_i}{z_0} P_{j_i}$$

Portanto, a coluna P_0 pode ser escrita com uma combinação linear de *m+1* colunas de O. Entrementes, da definição de O está claro que P_0 não pode ser escrita como uma combinação linear de outras colunas, e assim temos uma contradição. Logo, $z_i > 0$.

Vamos, neste momento, escolher qual coluna P_j de B^0 será trocada, de forma que

$$\min_i \frac{R_i^0}{z_i} = \frac{R_r^0}{z_r},\ para\ z_i, z_r > 0,\ i \neq 0 \tag{4.17}$$

seguindo que

$$R_i^0 - \frac{z_i}{z_r} R_r^0 > 0,\ para\ z_i > 0 \tag{4.18}$$

Precisamos mostrar que B^1 é uma base e o faremos obtendo a inversa de B^1, $[B^1]^{-1}$, da inversa de B^0, $(B^0)^{-1}$.

Identifiquemos as linhas de B^1 por $R_i^1,\ i = 1, 2, 3, \cdots, m$, as quais são geradas de R_i^0 e z^i através da espressão

$$R_i^1 = R_i^0 - \frac{z_i}{z_r} R_r^0,\ para\ i \neq r$$

$$R_i^1 - \frac{1}{z_r} R_r^0 \tag{4.19}$$

Usando $[B^1]^{-1}$ conforme definido em 4.19, vamos verificar que $[B^1]^{-1} B^1 = I$. Primeiro se $i \neq r$ e $j_i \neq s$,

$$R_k^1 P_{j_i} = R_k^0 P_{j_i} - \frac{z_k}{z_r} R_r^0 P_{j_i} = 0,\ para\ i \neq k$$

$$R_k^1 P_{j_k} = R_k^0 P_{j_k} - \frac{z_k}{z_r} R_r^0 P_{j_k} = 1 - 0 = 1\ para\ i = k$$

Segundo, se $i \neq r$ e $j_i = s$,

$$R_i^1 P_s = R_s^0 P_s - \frac{z_i}{z_r} R_r^0 P_s = z_i - \frac{z_i}{z_r} z_r = 0$$

Terceiro, $i = r$ e $j_i \neq s$,

$$R_r^1 P_{j_i} = \frac{1}{z_r} R_r^0 P_{j_i} = 0$$

Finalmente, $i = r$ e $j_i = s$,

$$R_r^1 P_s = \frac{R_r^0}{z_r} P_s = 1$$

Consequentemente 4.19 produz a inversa da matriz B^1. Em ordem, para completar a prova que B^1 é uma base, precisamos mostrar que $R_i^0 > 0$ para $i = 1, 2, \cdots, m$. Para $i = r$, temos que $R_r^0 > 0$ e $z_r > 0$. Então

$$R_r^1 = \frac{1}{z_r} R_r^0 > 0$$

Se $i \neq r$ e se $z_i \leq 0$, então

$$R_i^1 = R_i^0 - \frac{z_i}{z_r} R_r^0 > 0$$

Se $i \neq r$ e se $z_i > 0$, então de 4.18

$$R_i^1 = R_i^0 - \frac{z_i}{z_r} R_r^0 > 0$$

Consequentemente B^1 é uma base.

Finalmente, precisamos mostrar que nenhuma base pode ser repetida neste processo. Para tanto é suficiente que 4.14 seja satisfeita, ou que $R_0^1 < R_0^0$. isto segue do fato que R_r^0 é uma linha de uma matriz invertível entãi deve possuir ao menos um elemento não nulo., o primeiro dos quais deve ser positivo. Uma vez que $z_0 > 0$ e $z_r > 0$, nós temos que

$$R_0^1 = R_0^0 - \frac{z_0}{z_r} R_r^0 < R_0^0$$

Note que P_j é uma coluna removida de B^0, então temos

$$R_0^1 = R_0^0 P_j - \frac{z_0}{z_r} R_r^0 P_j = 0 - \frac{z_0}{z_r} < 0.$$

Temos, também

$$R_0^1 P_j = 0, \ para \ (j = j_1, J-2, \cdots j_m).$$

Desta forma ao menos $m+1$ colunas das $m+n$ colunas agora tem a propriedade $R_0^1 P_j < 0$. Estas comparam-se com ao menos m com esta propriedade do estágio anterior. Ulteriormente, na próxima iteração este P_j não pode retornar para a base uma vez que um candidato s para a base deve satisfazer $R_0 P_s > 0$. Completando nossa verificação e demonstração.

Façamos um exemplo para exercitar a obtenção da solução de um jogo através do teorema.

Exemplo 20 - Um Jogo de Adivinhação: *Sejam dois jogadores, A e B, estão em u jogo de advinhação. A, sem o conhecimento de B, escolhe o número 1, 2 ou 3. B então procede a advinhação anunciando seu palpite sobre a escilha de A. Cada vez que B anuncia seu palpite, A responde "Alto", "Baixo"ou "Certo", conforme seja o caso. O jogo continua até que B tenha identificado o número escolhido por B.*

O ganho(não em um aspecto monetário, mas sim de utilidade na perspectiva da teoria dos jogos) de A é o número de palpites feitos por B para identificar o número. Uma estratégia para o jogador A é escolha de um dos números 1, 2 ou 3. Uma estratégia para B pode ser representada por uma tripla(P,S,T), onde P representa o número de palpites da primeira rodada, H é o número de palpites na segunda rodada se A disse "alto"e T o número de palpites na segunda rodada se foi "Baixo". Está claro que o jogo pode terminar em duas rodadas. Desta forma as cinco estratégias possíveis para B são:

(1;0,2), (1;0,3), (2;1,3), (3;1,0), (3;2,0)

onde 0 significa "não aplicável". Temos, então a seguinte forma normal:

A matriz aumentada O associada com este jogo é:

Primeira iteração: A base inicial B^0 consiste em (P_0, P_1, P_6, P_7), ou seja,

$$B^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

A inversa de B^0, ou $(B^0)^{-1}$, calculada a partir de 4.9 é

		Estratégias B				
		(1;0,2)	(1;0,3)	(2;1,3)	(3;1,0)	(3;2,0)
Estratégias	1	1	1	2	2	3
A	2	2	3	1	3	2
	3	3	2	2	1	1

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	1	2	2	3	1	0	0
-1	2	3	1	3	2	0	1	0
-1	3	2	2	1	1	0	0	1

$$(B^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^0 \\ R_1^0 \\ R_2^0 \\ R_3^0 \end{pmatrix}$$

usando esta inversa determinamos os $R_0^0 P_j$, para todo $j \neq 0$. Logo:

$$\max_{j\neq 0} R_0^0 P_j = R_0^0 P_4 = 2$$

Consequentemente, a coluna P_4 é incluída na próxima base, mas antes vamos calcular o vetor $Z = (z_i) = R_i^0 P_4$, substituindo temos:

$$(z_0) = R_1^0 P_4 = 2;\ (z_1) = R_2^0 P_4 = 1;\ (z_2) = R_3^0 P_4 = 3\ e\ (z_3) = R_4^0 P_4 = 3$$

E,

$$\min_{z_i>0, i\neq 0} \frac{R_i^0}{z_i} = \frac{R_3^0}{3}$$

então P_7 é retirada da base.

Segunda iteração: A próxima base, B^1, é (P_0, P_1, P_6, P_4), a sua inversa fornece os seguintes conjuntos:

$$R_i^1 = R_i^0 - \frac{z_i}{z_3} R_3^0; \quad \forall i \neq 3;$$
$$R_3^1 = \frac{1}{z_3} R_3^0$$

Temos, agora:

$$(B^1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^1 \\ R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 \end{pmatrix}$$

Calculando os $R_0^1 P_j$, com a nova inversa, determinamos para todo $j \neq 0$:

$$\max_{j\neq 0} R_0^1 P_j = R_0^1 P_3 = 1$$

Portanto, na nova base constará P_3. Determinemos quem será excluído. O novo vetor Z, calculado de forma idêntica ao anterior, fornce os seguintes componentes:

$$(z_0) = 1;\ (z_1) = 1;\ (z_2) = 2\ e\ (z_3) = 0$$

Com estes valores encontamos

$$\underset{z_i>0, i\neq 0}{min} \frac{R_i^1}{z_i} = \frac{R_2^1}{2}$$

então P_6 é retirada da base B^1.

Terceira iteração: B^2, é (P_0, P_1, P_3, P_4), com inversa

$$(B^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{-3}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & 0 \\ \frac{2}{6} & 0 & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^2 \\ R_1^2 \\ R_2^2 \\ R_3^2 \end{pmatrix}$$

Usando a inversa, computamos que:

$$\underset{j\neq 0}{max}\, R_0^2 P_j = R_0^2 P_2 = \frac{1}{6}$$

$$(z_0) = \frac{1}{6};\ (z_1) = \frac{5}{6};\ (z_2) = -\frac{3}{6}\ e\ (z_3) = \frac{4}{6}$$

$$\underset{z_i>0, i\neq 0}{min} \frac{R_i^2}{z_i} = \frac{R_1^2}{\frac{5}{6}}$$

Quarta iteração: B^3, é (P_0, P_2, P_3, P_4), com inversa

$$(B^3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{24}{30} & -\frac{12}{30} & \frac{-6}{30} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{18}{30} & \frac{6}{30} & -\frac{12}{30} & \frac{6}{30} \\ \frac{6}{30} & \frac{12}{30} & \frac{6}{30} & -\frac{18}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0^3 \\ R_1^3 \\ R_2^3 \\ R_3^3 \end{pmatrix}$$

Onde encontamos que:

$$R_0^3 P_j <),\ \forall j \neq 0$$

Portanto a solução do jogo foi, finalmente, otida. As base ótimas de estratégias são: $X^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e $Y^* = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$ originadas da primeira linha e coluna de $(B^3)^{-1}$, respectivamente. O valor do jogo é $\frac{9}{5}$(confira!).

4.4 Soluções de um jogo de soma não nula

Uma solução de um jogo é uma orientação sobre as escolhas de cada jogador visando a prescrição ou previsão sobre o resultado do jogo. Entre os vários conceitos de solução os mais comuns são: dominância e equílibrio de Nash.

Dominância

Definicão 4.10. *Em um jogo em forma normal $G = \{E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1\}$, sejam $e^{'}, e^{''}$ possíveis estratégias do jogador i (por exemplo, $e^{'}, e^{''}$, são elementos de E_i). A estratégia $e^{'}$; está* ***estritamente dominada*** *pela estrategia $e^{''}$; se para cada combinação possível das estratégias dos restantes jogadores o pagamento de i por utilizar $e^{'}$ é estritamente menor que o pagamento de i por utilizar $e^{''}$:*

$$u_i(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i^{'}, e_{i+1}, \cdots, e_n) < u_i(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i^{''}, e_{i+1}, \cdots, e_n) \tag{4.21}$$

para cada $(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i^{'}, e_{i+1}, \cdots, e_n)$ que pode ser construida a partir dos espaços de estratégias dos outros jogadores $E_1, E_1, \cdots, E_{i-1}, E_{i+1}, \cdots, E_n$.

Dominância estrita iterada nada mais é do um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas.

Os jogadores racionais não utilizão estratégias estritamente dominadas, posto que sobre nenhuma conjectura que um jogador possa formar sobre as estrategias que os demás jogadores escolham sería ótimo utilizar tais estratégias.

Pratiquemos para esclarecer o método. Considere o jogo determinado pela matriz de pagamentos abaixo.

	e_{21}	e_{22}	e_{23}	e_{24}
e_{11}	(8,5)	(5,9)	(4,7)	(3,7)
e_{12}	(3,3)	(6,5)	(4,4)	(4,4)
e_{13}	(10,3)	(5,5)	(4,4)	(8,4)
e_{14}	(12,8)	(4,6)	(3,5)	(7,11)

Neste jogo, para o jogador 2 , a estratégia e_{21} é estritamente dominada pela estratégia e_{24} , assim, a primeira coluna da matriz pode ser eliminada.

	e_{22}	e_{23}	e_{24}
e_{11}	(5,9)	(4,7)	(3,7)
e_{12}	(6,5)	(4,4)	(4,4)
e_{13}	(5,5)	(4,4)	(8,4)
e_{14}	(4,6)	(3,5)	(7,11)

Agora, nesta matriz reduzida, para o jogador 1 , as estratégias e_{11} e e_{14} são estritamente dominadas pelas estratégias e_{11} e e_{11} , respectivamente. Portanto, as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas. Além disso, a estratégia e_{23} do jogador 2 é estritamente dominada pelas estratégia e_{22} . Assim, a coluna 2 também pode ser eliminada. Obtemos então uma matriz reduzida e_{11}.

	e_{22}	e_{24}
e_{12}	(6,5)	(4,4)
e_{13}	(5,5)	(8,4)

Por fim, a estratégia e_{24} do jogador 2 é estritamente dominada pela estratégia e_{22} e, na matriz $2x1$ resultante, a estratégia e_{13} do jogador 1 é estritamente dominada pela estratégia e_{12} . Vemos então que o resultado do jogo é (6, 5), isto é, o jogador 1 escolhe a estratégia e_{12} e o jogador 2 escolhe a estratégia e_{22} .

No exemplo acima, a técnica de dominância estrita iterada forneceu um único perfil de estratégia como solução do jogo, no caso, o perfil (e_{12}, e_{22})

Contudo, pode acontecer da técnica fornecer vários perfis ou, até mesmo,fornecer todo o espaço de estratégia, onde não existem estratégias estritamente dominadas. A eliminação iterativa de estrategias estritamente dominadas é um proceso que conduz frequentemente a uma previsão imprecisa sobre o desenvolvimento do jogo. Seja a forma normal a seguir

	e_{22}	e_{23}	e_{24}
e_{11}	(3,7)	(7,3)	(8,6)
e_{12}	(7,3)	(3,7)	(8,6)
e_{13}	(6,8)	(6,8)	(9,9)

Neste jogo não há estratégias estritamente dominadas para serem eliminadas.

Equlibrio de Nash ou solução estratégica

Uma maneira de fundamentar a definição do equilibrio de Nash é o argumento de que se a teoría dos jogos oferece uma solução única a um determinado problema, esta solução deve ser, um equilibrio de Nash no seguinte sentido: Suponhamos que a teoria dos jogosfaça uma predição sobre as estratégias eleitas pelos jogadores. Para que esta predição seja correta é necessário que cada jogador esteja disposto a escolher a estratégia oredita pela teoria. Por isso, a estrategia predita de cada jugador, deve ser a melhor resposta de cada jugador as estrategias preditas dos outros jogadores. Tal previção pode denominar-se *estrategicamente estável*, posto que nenhum jogador vai querer desviar-se da estratégia prevista para ele. Chamaremos tal previsão de Equilibrio de Nash.

Definicão 4.11. *Em um jogo, com n jogadores $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, em forma normal:*

$$G = E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1,$$

as estratégias $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ formam um equilíbrio de Nash se, para cada jogador i, e_i^* é a melhor resposta do jogador i(ou ao menos uma delas) às estratégias dos outros $n-1$ jogadores, $(e_1^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_{i+1}^*, e_n^*)$:

$$u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i^*, e_{i+1}^* e_n^*) > u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_{i+1}^* e_n^*)$$

para cada possível estratégia e_i em E_i; ou seja, e_i é uma solução de

$$\underset{s_i \in E_i}{max} u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i^*, e_{i+1}^* e_n^*)$$

Relacionando esta definição com sua fundamentação anterior, suponhamos que a teoria dos jogos oferece as estratégias $(e_1^{'}, e_2^{'}, \cdots, e_n^{'})$ como a solução a jogo em forma normal $G = E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1$. Dizer que $(e_1^{'}, e_2^{'}, \cdots, e_n^{'})$ não constituem um equilíbrio de Nash de G é equivalente a dizer que existe algum jogador i tal que $e_i^{'}$ não é a melhor resposta a $(e_1^{'}, e_2^{'}, \cdots, e_{i-1}^{'}, e_{i+1}^{'} e_n^{'})$. isto é, existe alguma estratégia $e_i^{''}$ tal que

$$u_i(e_1^{'}, e_2^{'}, \cdots, e_{i-1}^{'}, e_i^{'}, e_{i+1}^{'} e_n^{'}) < u_i(e_1^{''}, e_2^{''}, \cdots, e_{i-1}^{''}, e_i^{''}, e_{i+1}^{''} e_n^{''})$$

Assim, se a teoria oferece as estratégias $(e_1^{'}, e_2^{'}, \cdots, e_n^{'})$ por solução, todavia estas estratégias não constituem um equilíbrio de Nash, ao menos um jogador terá um incentivo para desviar-se da previsão da teoria, com o que a teoria ficará desmentida em virtude do desenvolvimento do jogo. Felizmente, isto não ocorre, posto que demonstra-se que no caso geral em estratégias mistas sempre existe um equilíbrio Nash.

O exemplo mais citado na literatura para exemplificar o equilibrio de Nash é o dilema do prisioneiro. A situação é a seguinte: dois ladrões, Zé e Tonho, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicar entre si, o delegado de plantão faz seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 3 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 8 anos de prisão. Neste contexto, temos:

O espaço de estratégias de Zé e Tonho são íguais, ou seja, $E_Z = E_{Tonho} = \{confessar, negar\}$. As utilidades são representadas de forma negativa pelo tempo em que podem ficar presos. Desta forma, temos a seguinte forma normal

		Tonho	
		confessar	negar
Zé	confessar	(-3, -3)	(0,-8)
	negar	(-8,0)	(-1,-1)

O perfil de estratégia (confessar, confessar) é um equilibrio de Nash. De fato: se um prisioneiro confessar e o outro não, quem não confesou fica prse na cadeia 8 anos, ao invés de 3 anos, se tivesse confessado. Além desse perfil, não existem outros equilibriis de Nash.

Outra situação clássica é a questão da escolha entre casais, conhecida por batalha dos sexos. Uma descrição é a seguinte: Um homem e sua mulher desejam sair para passear. O homem prefere assistir a um jogo de futebol enquanto sua mulher prefere ir ao teatro. Se eles forem juntos ao futebol, o homem tem maior satisfação que a mulher. Por outro, se forem juntos ao teatro, então a mulher tem satisfação maior que o homem. Finalmente, se eles saírem sozinhos, então ambos ficam igualmente insatisfeitos. Esta situação também pode ser modelada como um jogo estratégico. Temos, que novamente os espaços de estratégias são iguas , ou seja, $E_{Homem} = E_{Mulher} = \{futebol, teatro\}$. As utilidades são representadas de atribuindo satisfação máxima valor 100, assim satisfação média será 50 e insatisfação 0, com a seguinte forma normal

		Mulher	
		futebol	teatro
Homem	futebol	(100,50)	(0,0)
	teatro	(0,0)	(50,100)

Agora, na batalha dos sexos, há mais de um perfil de estratégia qe proporciona equilibrio, pois os perfis de estratégia (futebol,futebol) refere-se ao homem e (cinema, cinema) à mulher , sendo a melhor resposta possível aos interesses de cada um deles.

As proposições a seguir relacionam a eliminação iterativa com equilíbrio de Nash.

Proposição 4.5. *Em um jogo, com n jogadores $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, em forma normal $G = \{E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1\}$, as estratégias $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ formam um equilíbrio de Nash, então sobrevivem a eliminação iterativa das estratégias estritamente dominadas.*

Demonstração. Suonhamos que as estratégias $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ formam um equilíbrio de Nash em forma normal $G = \{E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1\}$, porém suponhamos também que(talvez depois que algumas estratégias distintas de $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ tenham sido elimiandas) e_i^* é a primeira das estratégias em $(e^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ a ser eliminada por ser estritamente dominada. Logo, deve existir uma estratégia $e_i^{''}$ que não foi eliminada de E_i que domina estritamente e_i^*, portanto, com adaptação de 4.21, temos

$$u_i(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i^*, e_{i+1}, \cdots, e_n) < u_i(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i^{''}, e_{i+1} e_n) \tag{4.22}$$

para cada $(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1} e_n)$ que pode ser construida a partir das estratégias que não tenham sido ainda eliminadas dos espaços de estratrégias dos outros jogadores. Em virtude de e_i^* ser a primeira das estratégias de equilíbrio a ser eliminada, as estratégias dos outros jogadores não foram ainda eliminadas, sendo uma das consequencias de 4.22

$$u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i^*, e_{i+1}^*, \cdots, e_n^*) < u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i^{''}, e_{i+1}^*, \cdots e_n^*) \tag{4.23}$$

Porém 4.23 é contradita por 4.11: e_i^* deve ser uma melhor resposta a $(e_1^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_{i+1}^*, \cdots, e_n^*)$, em consequencia não pode existir uma estratégia $e_i^{''}$ que domine estritamente a e_i^*. Esta contradição encerra a demonstração. $\square$

Proposição 4.6. *Em um jogo, com n jogadores* $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, *em forma normal* $G = \{E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1\}$, *se a eliminação iterativa das estratégias estritamente dominadas elimina todas as estratégias menos as* $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ *estas últimas formam um equilíbrio de Nash do jogo.*

Demonstração. precisamos demonstrar que se a eliminação interativa de estratégias estritamente eliminadas elimina todas as estratégias exceto $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$, estas formam um equilibŕio de Nash. Da proposição anterior quaisquer outros equilibrios de Nash haveriam sobrevivido também, resulta que este equilibrio deve ser único. Suporemos que H é finito.

Suponhamos que a eliminação interativa de estratégias estritamente dominadas elimina todas as estratégias estritamente dominadas elimina toas as estratégias exceto $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$, enretanto estas estratégias não formam um equilibrio de Nash. Implicando que deve existir um jogador i e alguma estratégia factível e_i em E_i tal que 4.11 não seja satisfeita, entretanto e_i deve ter sido estritamente dominada por alguma outra estratégia $e_i^{'}$ em algum ponto do processo. A expressões matemáticas destas observações são: existe e_i em E_i tal que

$$u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i^*, e_{i+1}^*, \cdots, e_n^*) < u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i, e_{i+1}^*, \cdots e_n^*) \tag{4.24}$$

existindo $e_i^{'}$ no conjunto de estratégias do jogador i que em algum ponto do processo tem-se que

$$u_i(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \cdots, e_n) < u_i(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i^{'}, e_{i+1}, \cdots e_n) \tag{4.25}$$

para cada estratégia $(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \cdots, e_n)$ que pode ser construída a partir das estratégias que permanecem nos espaços de estratégias dos outros jogadores nesse ponto do processo. Posto que as estratégias dos outros jogadores $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_{i+1}^*, \cdots, e_n^*)$ nunca são eliminadas, uma das implicações de 4.25 é

$$u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i, e_{i+1}^*, \cdots, e_n^*) < u_i(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_{i-1}^*, e_i^{'}, e_{i+1}^*, \cdots e_n^*) \tag{4.26}$$

Se $e_i^{'} = e_i^*$, querendo dizer que se $e_i^{'}$ é a estratégia que domina estritamente e_i, então 4.26 contradiz a 4.24 e neste caso a demonstração está completa. Se $e_i^{'} \neq e_i^*$ alguma outra estratégia $e_i^{''}$ deve posteriormente dominar estritamente $e_i^{'}$, visto que $e_i^{'}$ não "sobrevive"ao processo. Em decorrência, as desigualdades análogas a 4.25 e 4.26 cumprem-se para $e_i^{'}$ e $e_i^{''}$, as quais substituem a e_i e $e_i^{'}$, respectivamente. Novamente, se $e_i^{''} = e_i^*$ a demosntração está completa; se não pode-se construir outras desigualdades semelhantes. Visto que e_i^* é a única estratégia de e_i^* que sobrevive ao processo, a repetição deste argumento(em um jogo finito) encerra a demonstração. $\square$

O leitor atento observou que usualmente discutimos perfis de estratégia onde apenas a estratégia de um único jogador $h_i \in H$ sofre variações, enquanto que as estratégias de seus oponentes permanecem fixas. Então, por comodidade de notação, denotemos e_{-i} por

$$e_{-1} = (e_{1j_1}, \cdots, e_{(i-1)j_{i-1}}, e_{(1+1)j_{i+1}}, \cdots, e_{nj_n}) \in E_{-1} = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$$

As noçoes de dominância e de equilibrio de Nash são "generalizadas"com a utilização do conceito de estratégias mistas, visto que uma estratégia pura nada mais é que um caso particular de estratégia mista, em que todas exceto uma probabilidade é nula. De forma idêntica feito com estratégias puras, usraemos a p_{-1} para representar as estratégias mistas de todos os jogadores, com excedção do jogador h_i. Cada perfil de estratégia mista p determina um pagamento esperado, afinal é uma probabilidade não uma certeza, consistindo em uma média dos pagamentos ponderada pelas distribuições de probabilidades $(p_1, p_1, \cdots, p_n)$, ou seja, o pagamento esperado é uma formulação do bem conhecido valor esperado(também denominado de eseprança matemática), logo sendo

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n) = \underbrace{(p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1m1}}_{p_1}; \underbrace{(p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2m_2}}_{p_2}; \cdots; \underbrace{(p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nm_n})}_{p_n}$$

o ganho esperado do jogador, com o uso do perfil de estratégias mistas p é:

$$u_i(p) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} (\prod_{k=1}^{n} p_{kj_k} u_i(e_{1j_1}, e_{2j_2}, \cdots, e_{nj_n})$$

Assim as definições de dominância e equilibrio tornam-se

Definicão 4.12. *Em um jogo em forma normal $G = \{E_1, \cdots, E_n; u_1, \cdots, u_1\}$, sejam $p^{'} = (p_1^{'}, p_2^{'}, \cdots, p_n^{'})$ e $p^{'} = (p_1^{''}, p_2^{''}, \cdots, p_n^{''})$ possíveis possivéis perfis de estratégias. O perfil $p^{'}$; está* ***estritamente dominado*** *pelo perfil $p^{''}$; se o pagamento de i por utilizar $p^{'}$ é estritamente menor que o pagamento de i por utilizar $p^{''}$:*

$$u_i(p^{'}, e_{-i}) < u_i(p^{''}, e_{-i})) \tag{4.27}$$

Definicão 4.13. *Em um jogo, com n jogadores $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, um perfil de probabilidades $p^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_n^*)$ formam um equilíbrio de Nash se a estratégia mista de cada jogador é a melhor resposta a estratégia mista do outro jogador, ou seja,*

$$u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p, p_{-i}^*)$$

Portanto, nenhum jogador tem interesse em não utilizar sua estrátegia de equilibrio, afinal não obtém ganhos em abandonar a mesma.

4.5 Teorema do equilibrio de Nash

O teorema minimax de von Neumann, pilar fundamental de toda teoria dos jogos, trata apenas de jogos de duas pessoas e de soma zero. Apesar de sua enorme importância é muito restrito. Nash com seus trabalhos na década de 1950 ampliou as idéias do teorema minimax generalizando que para todo jogo definido por matrizes de pagamentos(payoffs em inglês) este possui um equilibrio em estratégias mistas. Posteriormente, este equilibrio em homenagem ao seu descobridor, é conhecido por *Equilibrio de Nash.* Transcreveremos a demonstração desenvolvida por Nash, na qual faz uso do teorema do ponto fixo de Brouwer.

Teorema 4.4 (Do Ponto Fixo de Brouwer). *Se Δ é um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita e $F : \Delta \to \Delta$ é uma função contínua, então F possui um ponto fixo em Δ, isto é, existe $p^* \in \Delta$ tal que*

$$F(p^* = p^*$$

Apresentemos, utilizando as noçoes anteriormente desenvolvidas, alguns teoremas auxiliares.

Teorema 4.5. *Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m$, são definidas as funções:*

$$\begin{aligned} z_{ij} &: \Delta \to \mathbb{R} \\ &p \longmapsto z_{ij}(p) = u_i(e_{ij}, p_{-i}) - u_i(p_i, p_{-i}) \end{aligned}$$

Temos que p^* é um equilibrio de Nash se, e somente se,

$$z_{ij}(p^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$

Demonstração. $\Rightarrow$) Se $p^* = (p_i^*, p_{-i}^*)$ é um equilibrio de Nash, então $u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m$. Conseqüentemente,

$$z_{ij}(p^* = u_i(e_{ij}, p_{-i}^*) - u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$.

$\Leftarrow$) Se

$$z_{ij}(p^* = u_i(e_{ij}, p^*_{-i}) - u_i(p^*_i, p^*_{-i}) \leq 0$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m$, então

$$u_i(e_{ij}, p^*_{-i}) = u_i(w_j, p^*_{-i}) \leq u_i(p^*_i, p^*_{-i})$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m$, onde w_j é o vetor em $\mathbb{R}^{m_i}$ que tem 1 na j-esima coordenada e zeros ns demais. Para concluir, mostremos que para todo

$$p_i = (p_{i1}, \cdots, p_{im_i})$$

temos

$$u_i(p_i, p^*_{-i}) \leq u_i(p^*_i, p^*_{-i})$$

Sendo, $x \longmapsto u_i(x, p^*_i)$ um funcional linear, implica que

$$u_i(p_i, p^*_{-i}) = u_i(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} w_k, p^*_{-i}) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} u_i(w_k, p^*_{-i}) \leq \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} u_i(p^*_i, p^*_{-i}) = u_i(p^*_i, p^*_{-i}). \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = u_i(p^*_i, p^*_{-i})$$

□

Teorema 4.6. *Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m$, são definidas as funções:*

$$\begin{aligned} t_{ij} &: \Delta \to \mathbb{R} \\ &p \longmapsto g_{ij}(p) = \max\{0, z_{ij}(p)\} \end{aligned}$$

Temos que p^* é um equilibrio de Nash se, e somente se,

$$t_{ij}(p^*) = leq0$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m$

Demonstração. Decorre diretamente do teorema anterior. □

Teorema 4.7. *Sendo $\Delta = \Delta_{m_1} \times \cdots \Delta_{m_n}$, em seguida criemos a aplicação*

$$\begin{aligned} F &: \Delta \to \Delta \\ p &= (p_1, \cdots, p_n) \longmapsto F(p) = (y_1(p), \cdots, y_n(p)) \end{aligned}$$

onde $y_i(p) = (y_{i1}(p), \cdots, y_{im_i}(p))$, $p = (p_1, \cdots, p_n)$

$$y_{ij}(p) = \frac{p_{ij} + t_{ij}(p)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p)}$$

Temos que p^* é um equilibrio de Nash se, e somente se,

$$F(p^* = p^*)$$

ou seja, se, e somente se, p^* é um ponto fixo de Brouwer.

Demonstração. Notemos que $y_{ij} \geq 0$, por definição, enquanto

$$\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}(p) = \sum_{k=1}^{m_i} \left(\frac{p_{ij} + t_{ij}(p)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p)} \right) = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} p_{ij} + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ij}(p)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p)} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ij}(p)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p)} = 1$$

Portanto, cada $y_i \in \Delta_{m_i}$. Assim, $F(\Delta) \subseteq \Delta$

$\Rightarrow$) Se p^* é um equilibrio de Nash, então $t_{ij}(p) = 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$. Assim, $y_{ij}(p^*) = p^*_{ij}$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$, ou seja, $y_i(p^*) = p^*_{ij}$, para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ ou ainda, $F(p^*) = p^*$.

$\Leftarrow$) suponha que $p^* = p^*_1, p^*_2, \cdots, p^*_n$ seja um ponto fixo de F, então satisfaz

$$p^*_{ij} = \frac{p^*_{ij} + t_{ij}(p^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p^*)}$$

para cada $j = 1, 2, \cdots, m_i$. Segue, que

$$p^*_{ij} \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p^*) = t_{ij}(p^*) \tag{4.28}$$

para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$. Observe que $\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p^*) = 0$, para cada $k = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$. Considere por absurdo que não seja verdade e $\alpha > 0$, então de 4.28

$$t_{ij}(p^*) > 0 \Leftrightarrow p^*_{ij} > 0$$

Sem perda de generalidade, suponha que $p^*_{i1} > 0, p^*_{i2} > 0, \cdots, p^*_{il} > 0$ e $p^*_{i(1+1)} = p^*_{i(1+2)} = \cdots = p^*_{im_i} = 0$. Note que

$$p^*_i = \sum_{k=1}^{m_i} p^*_{ik} w_k \ ,$$

onde w_i, é o vetor, definido anteriormente, em $\mathbb{R}^{m_i}$ que tem 1 na i-ésima coordenada e zeros ns demais, na realidade é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{m_i}$. Dado que $t_i k(p* > 0$ para todo $k = 1, \cdots, l$, temos que

$$u_i(w_i, p^*_{-i}) > u_i(p^*_i, p^*_{-i}) \ ,$$

para todo $k = 1, \cdots, l$. Portanto,

$$u_i(p^*_i, p^*_{-i}) = u_i \left(\sum_{k=1}^{m_i} p^*_{ik} w_k, p^*_{-i} \right) = \sum_{k=1}^{m_i} p^*_{ik} u_i(w_k, p^*_{-i}) = \sum_{k=1}^{l} p^*_{ik} u_i(w_k, p^*_{-i}) > \sum_{k=1}^{l} p^*_{ik} u_i(p^*_i, p^*_{-i}) =$$
$$u_i(p^*_i, p^*_{-i}) \sum_{k=1}^{l} p^*_{ik} = u_i(p^*_i, p^*_{-i}).$$

Completamente absurdo, logo $\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p^*) = 0$ e $t_{ij}(p^*) = p^*_{ij} \sum_{k=1}^{m_i} t_{ik}(p^*) = 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ e $j = 1, 2, \cdots, m_i$ e, assim, p^* é um equilibrio de Nash em estratégias mistas. □

Teorema 4.8 (Do Equilibrio de Nash)**.** *Todo jogo definido por matrizes de pagamento possui um equilibrio de Nash*

Demonstração. A aplicação $F : \Delta \to \Delta$ definida no teorema anterior é continua e Δ é um conunto compacto e convexo. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, F possui um ponto fixo p^*. Pelo teorema anterior, p^* é um equilibrio de Nash. □

Capítulo 5

Considerações Finais

Iniciamos o trabalho com um pequeno restrospecto histórico do surgimento e desenvolvimento da teoria dos jogos, com a dupla finalidade de informar a diversidade de atuação bem como despertar a curiosidade para maiores detalhes dos seus elementos, tecnicas e prescrições. Para em seguida destacar que o conflito de interesses faz parte da própria natureza humana sendo o jogo um modelo de representação e estudo dos diversos e variados tipos de conflito. São apresentados seus elementos básicos, do modelo de jogo, que a teoria desenvolveu, associados a situações progressivamente mais próximas de eventos do cotidiano. Formula-se duas regras: *Pensar retroativamente* e *Coloque-se no lugar do adversário*, quase que intuitivamente, para determinar a melhor estratégia, pensando de forma racional, nos termos em que a teoria, na sua visão econômica, define, visando maximizar os ganhos ou ao menos minímizar as perdas. Caminhamos, atingindo o ponto no qual a teoria propõe soluções aos jogos soma-zero, situações de conflitos irremediavéis, onde os ganhos decorrem das perdas do outro, tal como uma guerra, utilizando até este momento apenas conteúdo acessível, ao aluno do ensino médio, inclusive a demonstração do teorema fundamental da teoria dos jogos, **Teorema Minimax**, ainda que extensa e um pouco cansativa, é realizada sem envolver qualquer elemento de nível superior, no máximo ocorrendo algumas necessárias definições no próprio corpo da demonstração.

Aqui, expressamos nosso entender que compete ao professor fomentar a curiosidade do aluno em torno da matemática na qualidade de ciência pura, com seus conceitos e objetos que não necessitam de uma relaçao direta pálpavel e perceptível com o dito mundo real. Sendo, a matemática sificiente em si. Todavia, a facilidade de acesso a informação disponivel, a globalização que tornou a concorrência, em todos os seus aspectos, econômico, social, politico, ainda mais acirrada, fazem com que a pergunta clássica: "para que isso serve?", seja cada vez mais corriqueira, mesmo que não seja formulada verbalmente. Portanto, a teoria dos jogos, com sua natureza intrinsecamente relacionada aos eventos do cotidiano é fundamental tanto para responder a questão anterior, quanto para motivar alunos ao desenvolvimento de aspectos puramente matemáticos. Afinal, seja um executivo, consultor, gerente ou consumidor no mundo atual você precisa analisar o ambiente a sua volta para tomar boas decisões e ter bons resultados. Para tanto, precisa pensar estrategicamente.

O pensar estratégico é a matiz predominante na teoria dos jogos. Todos, rotineiramente deparam-se com situações complexas e problemas difíceis e o trabalho é lidar com essas situações da melhor forma possível, usando as informações que dispõe. Em um mundo ideal, tem-se acesso a todas as informações necessárias para enfrentar estes desafios, porém na pratica tem-se apenas uma quantidade limitada que, além de limitada, exige saber o que fazer com estas informações. Demonstrando neste aspecto sua versatilidade a teoria dos jogos, fornecendo por meio do seu ferramental matemático, a priori simples, métodos de utilizar as informações disponíveis de forma racional.

Portanto, cremos que, após análise de alguns exemplos de jogos soma-zero, de dois jogadores, constata-se que, por regra, a teoria prescreve uma estratégia(ação a ser desenvolvida) que na pior das hipoteses reduz as perdas, de cada jogador, ao minímo. Tudo baseado em uma teoria, Teoria dos Jogos, que foi, em alguns tópicos, estudada neste trabalho. Teoria que foi e continua sendo desenvolvida por grandes nomes, detentora de cinco prêmios Nobel, feito que nenhuma outra área especifica do conhecimento atingiu, pois auxilia não somente em matemática, economia, biologia, mas enfim em tudo que envolve tomada de decisão. Assim, este trabalho pode ser usado tanto por alguém que queira começar a conhecer tópicos da Teoria dos Jogos, bem como aqueles que desejam dar um pontapé inicial para posteriormente aprofundar. Então é um trabalho tanto para alunos como para colegas professores do ensino médio.

Apêndice A

Teorema de Zermelo

No artigo *Zermelo and the Early History of Game Theory* apresentado por Ulrich e Walker, consta uma tradução para a lingua inglesa do célebre artigo de Zermelo, *Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die des Schachspiels*, de 1913, no qual demonstra que o xadrez é um jogo estritamente determinado. A seguir, realizamos uma tradução, nossa, da versão em inglês deste importante artigo de Zermelo.

SOBRE UMA APLICAÇÃO DA TEORÍA DOS CONJUNTOS À TEORÍA DO XADREZ - Ernst Zermelo

As considerações seguintes são independentes das regras concretas do jogo de xadrez e valen em princípio para qualquer jogo intelectual não de azar semelhante, em que nele se enfrentam dois jogadores. Pórem, objetivando maior concretude, preferimos exemplificar aqui com o xadrez, sendo este o jogo mais conhecido deste tipo. Não se trata de expor aqui um método para práctica do jogo senão de responder a esta pergunta:

Pode determinar-se de manera matemáticamente objetiva o valor que uma posição possível no jogo tem para um dos jogadores e pode determinar-se, ou ao menos definir-se, qual é o melhor movimento possível para ele sem recorrer a construções com matiz psicológico e subjetivo como a de 'jogador perfeito'?

Que isto é possível ao menos em alguns casos revelam os problemas de xadrez, é dizer, exempos de posições, nais quais cabe demonstrar que o jogador que move pode forçar o mate em um número predeterminado de movimentos. Creio que valhe a pena investigar se uma tal valoração da posição é teóricamente concebivel e tem sentido também naqueles casos em que a análise da situação é um obstáculo, insolúvel na prática, dado o elevado número das possíveis continuações do jogo. Creio que esta averiguação é necessária para assentar o fundamento da teoría dos finais de jogo e das aberturas, tal como se encontra exposta nos livros de ensino de xadrez. O método utilizado nas línhas que seguem para a solução desse problema foi tomado da teoría dos conjuntos e do cálculo lógico, e revela a utilidade dessas disciplinas matemáticas também em casos que involacram somente totalidades finitas.

Como o número de casas(quadrados) e de peças é finito, é também finito o conjunto P das posições possíveis $p_0, p_1, p_2, p3, \cdots, pt$, além do mais duas posições ainda que por todos os demais aspectos sejam iguais devem distinguir-se também atendendo a qual é o jogador que toca mover, a se um dos bandos já tenha rocado, a se há algum peão coroado, etc. Seja então q uma dessas posições; partindo de q há um conjunto Q de finais possíveis, ou seja, um conjunto de sequências $Q = (q, q_1, q_2, \cdots)$ de posições que, partindo de q, sucedem umas as outras de acordo com as regras do jogo, de tal maneira que qualquer posição q_λ dentre essas sucede a posição $q_{\lambda-1}$ através de um movimento permitido das brancas ou das negras. Cada um desses finais de jogo termina em uma posição de mate ou de afogado[1], ou, ao menos teóricamente, continua indefinidamente e neste caso o resultado

[1]Afogado ou rei afogado é a situção, posição, um jogador não tem outras peças além do rei e o mesmo não está

da partida tería que considerar-se indeterminado ou sería empate. O conjunto Q de todos esses possíveis finais de jogo que partem de q é um subconjunto, finito ou infinito, porém bem definido, do conjunto P^a que contem todas as sequências enumeravéis de elementos p do conjunto P.

alguns desses finais de jogo podem conduzir a vitória das brancas em não mais de r movimentos (entendendo por 'movimento' a passagem de uma posição $q_{\lambda-1}$ a uma posição q_λ, por assim dizer uma meia jogada, não uma jogada completa), ainda que no geral isto dependerá de como joguem as negras. Porém, como deve ser uma posição q para que as brancas possam forçar o mate en não mais de r movimentos, com independência de como joguem as negras? Afirmo que a condição suficiente e necessária para isso é a existência de um subconjunto não vazio $S_r(q)$ do conjunto Q tal que:

1. Todos os elementos q do conjunto $S_r(q)$ terminam com a vitória das brancas em não mais de r movimentos, de tal maneira que cada sequência contem no máximo r termos, o que implica que $S_r(q)$ é sempre finito.

2. Se $q = (q, q_1, q_2, \cdots)$ é um elemento qualquer de $S_r(q)$ e se q_λ é um termo qualquer de Q, que corresponde a um movimento para trás das negras e que será um termo par ou impar de Q segundo quem jogue em q, e se, finalmente, $q_\lambda^{'}$ é uma variante possível, porque as negras desde $q_{\lambda-1}$ podiam jogar tanto q_λ como $q_\lambda^{'}$, então $S_r(q)$ contém ao menos um elemento da forma $q_\lambda^{'} = (q, q_1, \cdots\cdots, q_{\lambda-1}^{'}, q_\lambda^{'}, \cdots)$, que tem en comum com q os primeiros λ termos. De fato, nesse e somente nesse caso, podem as brancas começar com un elemento qualquer q de $S_r(q)$ e, se as negras jogam $q_\lambda^{'}$ em vez de q_λ, contestar com um correspondente $q_{\lambda+1}^{'}$ que assegure sua vitória em não mais de r movimentos.

Certamente, pode haver mais de um conjunto $S_r(q)$ porém a união de qualquer par deles cumprirá as condições 1 e 2, também o fará a união $U(S_r(q))$ de todos eles, que está bem definida por r e q, que será diferente de Ø, ou seja, terá ao menos um elemento, desde que realmente exista um $S_r(q)$. Em consequência, que $U(S_r(q)) \neq 0$ é a condição necessária e suficiente para que as brancas possam assegurar-se a vitória a partir de q em não mais de r movimentos. Se $r < r^{'}$, então $U(S_r(q))$ é subconjunto de $U(S_{r^{'}}(q))$, posto que todo conjunto $S_r(q)$ satisfaz as condições impostas aos conjuntos $U(S_{r^{'}}(q))$, de modo que deve estar incluido em $U(S_{r^{'}}(q))$; e se m é o menor número para o qual $U(S_m(q)) \neq 0$, logo $S^* = U(S_m(q))$ é a intersecção de todos os $U(S_m(q))$ e contém todas aquelas continuações do jogo a partir de q que permitem às brancas ganhar em um número mínimo de movimentos. Para esses valores mínimos $m = m_q$ há um valor máximo $\tau \leq t$, que depende de q onde t+1 é o número de todas as posições possíveis, de modo que a condição necessária e suficiente para que exista algum $S_r(q)$ não vazio e as brancas possam assegurar-se a vitória a partir de q é que $U(S_\tau(q)) \neq 0$. Se desde uma posição q é possível forçar a vitória, então, como vamos mostrar, é possível fazê-lo em não mais de t movimentos. Realmente, todo final $q = (q, q_1, q_2, \cdots, q_n)$ com $n > t$ contem una posição $q_a = q_b$ repetida e as brancas poderiam ter jogado a primeira vez que essa posição se deu tal como o fazem na segunda e assim ter ganhado em menos de n movimentos; portanto, $m \leq t$.

Se, por outro lado, $S(q) = 0$, então as brancas podem como muito, se jogam bem, conseguir empate, porém também podiam estar em una posição perdedora e somente podiam tentar retardar o mate todo o possível. Se as brancas tem a posibilidade de aguentar até o j-ésimo movimento, resulta ter de haver um subconjunto $Z_j(q)$ de Q tal que

1. Em nenhum dos finais contidos em $Z_j(q)$ perdem as brancas antes do j-ésimo movimento.

2. Se q é um elemento qualquer de $Z_j(q)$ e em q a posição q_λ pode ser refeita(alcançada) pela posição $q_\lambda^{'}$ como consequência de um movimento permitido das negras, então $Z_j(q)$ contem ao menos um elemento da forma

em xeque(ameaçado de captura), mas não pode mover-se, pois todas as casa que pode dirigir-se encontram-se "vigiadas"por peças adversárias. Sendo o resultado jogo empate. Nota pessoal

$q'_\lambda = (q, q_1, q_2 \cdots, q'_{\lambda-1}, q'_\lambda, \cdots)$

que tem em comum com q os primeiros $\lambda - 1$ elementos e depois continúa com q'_λ. Também os conjuntos $Z_j(q)$ são todos subconjuntos de sua união $U(Z_j(q))$, que está unívocamente determinada por j y q, e que tem a mesma propiedade que Z_j, E para cada $j < j'$, é $U(Z_j(q))$ subconjunto de $U(Z_{j'}(q))$. Para os números j para os quais $U(Z_j(q))$ é diferente de Ø vale que ou bem carecem de máximo ou bem $j \leq J \leq \tau \leq t$, dado que o contrario, pode assegurar-se a vitória, deve poder fazê-lo em não mais de τ movimentos. Assim, as brancas podem assegurar-se empate se, e somente se, $U(Z_{\tau+1}(q)) \leq$. Se não podem garantir empate, então podem, mediante $Z^*(q) = U(Z_J(q))$, retardar a derrota ao menos durante $J \leq \tau$ movimentos. Como todos os conjuntos $S_r(q)$ satisfazem as condições impostas aos conjuntos $Z_j(q)$, o conjunto $U(S_r(q))$ é subconjunto de $U(Z_j(q))$ e $S(q)$ é subconjunto de $Z(q)$. O resultado de nossas considerações é, portanto, o seguinte:

A cada posição possível do jogo correspondem dois conjuntos bem definidos $S(q)$ e $Z(q)$, subconjuntos do conjunto Q de todos os finais de jogo que começam com q, desses dois, o primero é subconjunto do segundo. Se $S(q)$ é distinto de Ø, então as brancas podem forçar sua vitória com independencia de como joguem as negras e podem fazê-lo em não mais de m movimentos por meio de um subconjunto $S^*(q)$ de $S(q)$ porém não podem fazer com segurança em menos movimentos. Se $S(q) =$, porém $Z(q) \neq$, logo, as brancas podem ao menos empatar mediante os finais de jogo contidos em $Z(q)$. Quando $Z(q)$ é vazio, as brancas, se ao contrario jogam bem, podem somente retardar a derrota até o J-ésimo movimento mediante um conjunto bem definido $Z^*(q)$ de continuações do jogo. Em qualquer caso, apenas as partidas contidas em $S^*(q)$ ou $Z^*(q)$ podem considerar-se 'correctas' desde o ponto de vista das brancas; mediante qualquer outra continuação, as brancas, se estão em posição ganhadora, desejariam escapar ou retardariam a vitória, se o contrario joga bem; e se não estão em posição ganhadora, fariam o possível ou acelerariam sua derrota. Para as negras valem observações inteiramente análogas e as partidas que deveríam contar como partidas jogadas corretamente até o final a partir de q são aquelas que satisfazem simultâneamente as condições de cada bando, e estas formam um subconjunto bem definido $W(q)$ de Q.

Os números t e τ são independentes da posição e ficam determinados somente pelas regras do jogo. A cada posição do jogo corresponde um número $m = m_q$ ou um número $J = J_q$, nenhum maior que τ, segundo os quais seja que as brancas podem forçar sua vitória em m movimentos, porém não em menos, o que podem fazer as negras em J porém não em menos movimentos. A teoría específica deste jogo devería calcular esses números ou ao menos delimitar seus valores entre uns mínimos e uns máximos, o que até agora não se conseguiu mais que nos 'problemas de mate en n jogadas' ou nos finais de partida propiamente ditos. A questão se a posição inicial p_0 é já uma posição ganhadora para algum dos bandos é por agora um problema aberto. Se lhe dessem uma solução rigorosa, então certamente o xadrez perdería sua condição de jogo.

Apêndice B

Solução Exercícios

Objetivando que o leitor desenvolva a habilidade de usar a indução retroativa propomos alguns exercícios. Neste apêndice apresentamos as nossas propostas de soluções. O leitor é convidado a tentar desenvolver as suas soluções antes de conferir as elaboradas a seguir.

Exercício 1 - Vinte e um Palitos *Dadas duas pessoas, temos vinte e um palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um, dois ou três fósforos. O ganhador é aquele que retirar o último palito. Existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Se afirmativo, qual seria esta?*

Solução: Iniciemos identificando os jogadores por A e B. Sem perda de generalidade, vamos supor que somos A, assim para sermos o vencedor temos que retirar o último palito. Existem três possibilidades para esta última jogada, retirar:

- 1 fósforo;
- 2 fósforos;
- 3 fósforos;

Então, óbvio, para obtermos a vitória em nossa última jogada devem existir 1 ou 2 ou 3 fósforos. Então, na jogada anterior(penúltima), do jogador B, devem permanecer 4 palitos, pois se retirar:

- 1 fósforo, ficam 3 ;
- 2 fósforos, ficam 2;
- 3 fósforos; fica 1

E ganhamos em qualquer uma das três situações. Continuando, seja então a situação que compete a B jogar e restam 4 fósforos, ou seja, nós(jogador A) na jogada anterior executamos uma das retiradas abaixo:

- 1 fósforo, então haviam 5 ;
- 2 fósforos, então haviam 6;
- 3 fósforos; então haviam 7.

Analogamente, concluímos que na jogada anterior, para obtermos a vitória, B deve "possuir"[1] 8 palitos de fósforos, pois se assim o for as opções de retirada de B são:

- 1 fósforo, então ficam 7 e nós, na jogada seguinte, retiramos 3(4-1=3) permanecendo 4 ;

[1]Na realidade nenhum jogador possui qualquer quantidade de palitos, possuir aqui refere-se a quantidade de palitos que permanecem sobre a mesa dos 21 palitos de fósforos iniciais

- 2 fósforos, então haviam 6 e nós, na jogada seguinte, retiramos 2(4-2=2) permanecendo 4 ;
- 3 fósforos; então haviam 5 e nós, na jogada seguinte, retiramos 1(4-3=1) permanecendo 4 .

e não importa qual seja a jogada de B, podemos em nossa vez sempre deixar 4 palitos na mesa e conforme vimos esta situação nos garante a vitória.

Vamos mais um passo atrás. Agora, temos a situação que compete a B jogar e restam 8 fósforos, ou seja, na jogada anterior procedemos a uma das retiradas a seguir:

- 1 fósforo, então haviam 9 ;
- 2 fósforos, então haviam 10;
- 3 fósforos; então haviam 11.

E, com a experiência adquirida nas duas situações anteriores, deduzimos que na jogada anterior, para obtermos a vitória, B deve "possuir"12 palitos de fósforos, pois se assim o for , agora as possibilidades de jogada para de B são retirar:

- 1 fósforo, então ficam 11 e nós, na jogada seguinte, retiramos 3(4-1=3) permanecendo 8 ;
- 2 fósforos, então haviam 10 e nós, na jogada seguinte, retiramos 2(4-2=2) permanecendo 8 ;
- 3 fósforos; então haviam 9 e nós, na jogada seguinte, retiramos 1(4-3=1) permanecendo 8 .

e novamente não importa qual a escolha de B, garantímos a vitória ao deixar 8 palitos na mesa.

Paciência, que a regressão está encerrando. Claro que o leitor inteligente percebeu que a próxima análise é a situação com 12 palitos e B deve decidir a quantidade de fósforos retirada. Sem maiores surpresas, para esta situação ocorrer é necessario que na jogada anterior tenhamos retirado:

- 1 fósforo, então haviam 13; ou
- 2 fósforos, então haviam 14; ou
- 3 fósforos; então haviam 15.

Neste momento, é extremamente perceptível, que para obtermos a vitória, B deve "possuir"16 palitos de fósforos na situação anterior a nosso jogada, afinal isto ocorrendo as já bem conhecidas opções de retirada de B são:

- 1 fósforo, então ficam 15 e na jogada seguinte, retiramos 3 permanecendo 12 ;
- 2 fósforos, então haviam 10 e na jogada seguinte, retiramos 2 permanecendo 12 ;
- 3 fósforos; então haviam 9 e na jogada seguinte, retiramos 1 permanecendo 12 .

e o já esperado ocorre, é indiferente qual seja a estratégia adotada por B, garantímos a vitória ao deixar 12 palitos na mesa.

Finalmente, o último passo atrás, em outras palavras, na mesa encontram-se 16 palitos e B joga. Que para ser atingida devemos imediatamente anterior devemos ter subtraído da mesa:

- 1 fósforo, então haviam 17; ou
- 2 fósforos, então haviam 18; ou
- 3 fósforos; então haviam 19.

É quase palpável o fato que a vitória de A é certa, se B "estiver"com 20 palitos de fósforos na situação anterior a nosso jogada, afinal com as seguintes retiradas de B:

- 1 fósforo, então ficam 19 e na jogada seguinte, retiramos 3(4-1 = 3) permanecendo 16 ;

- 2 fósforos, então haviam 16 e na jogada seguinte, retiramos 2(4-2 = 2) permanecendo 16 ;
- 3 fósforos; então haviam 17 e na jogada seguinte, retiramos 1(4-3 = 1) permanecendo 16 .

reiterando o fato que para qualquer estratégia de B vencemos, posto que com a escolha apropriada reduzimos a 16 a quantidade de palitos sobre a mesa o que nos assegura o ganho.

Então, para obtermos a vitória necessitamos que na mesa permaneçam 20 palitos e que seja a vez de B jogar.

O que pode ser feito a partir da posição inicial com 21 palitos desde que sejamos o primeiro a retirar os palitos, pois assim basta retirarmos 1 fósforo e a condição será atendida. Atente, o leitor, que em nossas analises, a vitória é asseguarada quando retiramos uma quantidade que adicionada a quantidade retirada anteriormente por B o resultado seja 4. Em outros termos, se B retirar 1 palito retiramos 3(3+1 = 4), se B retirar 2 palitos também retiramos 2(4-2 = 2) palitos e por fim se B retirar 3 palitos retiramos 1(3+1 = 4) palito.

Logo, podemos concluir que para obter a vitória o jogador que inicia, digamos A, deve retirar 3 palitos e a seguir garantir que a quantidade de palitos que permanece na mesa quando for a oportunidade do adversário retirar seja um múltiplo de 4.

Portanto, existe uma estratégia vencedora para quem inicia, digamos A, que consiste em dois passos:

1^0 - Na jogador inicial retira 3 palitos;

2^0 - Seja q_B a quantidade de palitos retirada por B, então A em toda jogada, posterior à inicial, deve retirar 4 - q_B palitos.

Exercício 2 - Vinte Palitos *Dadas duas pessoas, temos vinte palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um, dois ou três fósforos. O ganhador é aquele que retirar o último palito. Existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Se afirmativo, qual seria esta?*

A análise é em muito semelhante à anterior. A diferença crucial é que o jogo inicia com 20 palitos e não há nenhuma forma do jogador que começa retirar uma quantidade de palitos de tal sorte que a quantidade remanescente seja um múltiplo de 4. Então, para A(jogador que inicia) não existe estratégia vencedora. Todavia, B agora pode independente de qual tenha sido a quantidade de palitos retirada por A em sua primeira jogada fazer com que a quantidade de palitos subsequente a sua(B) primeira jogada seja 16 e todas as demais quantidades na mesa após suas jogadas sejam sempre um múltiplo de 4 e do exercício anterior sabemos que desta forma sua vitória é certa. Bastando seguir o passo 2 do exercício anterior, ou seja, existe uma estratégia vencedora para o jogador que não inicia o jogo, digamos B, que consiste em simplesmente:

- Seja q_A a quantidade de palitos retirada por A, então B em toda jogada deve retirar 4 - q_A palitos.

Exercício 3 - Vinte e um Palitos Modificado *Dadas duas pessoas, temos vinte e um palitos de fósforos sobre uma mesa e cada jogador em sua vez pega um, dois ou três fósforos. O perdedor é aquele que eventualmente se vê obrigado a retirar o último palito. Existe uma estratégia vencedora para algum dos jogadores? Se afirmativo, qual seria esta?*[2]

A diferença entre este exercício e o primeiro é sutil, apenas o fato que agora quem retira o último palito é o perdedor, mas altera de forma significativa a análise.

Vejamos, então na última situação possivel, identicada por S, a situação anterior a S vamos indentificar por S^{-1}, anterior a S^{-1} por S^{-2}, prosseguindo regressivamente chegando à posição inicial, com 21 palitos, denotada por S^{In}. Então se em S, temos 1 palito, indica-se $S = 1$, se em S^{-1} houver dois palitos, então $S^{-1} = 2$ e assim por diante. Logo, para $S = 1$ o jogador que for obrigado a jogar perderá. Mas, para atingir a situação S anteriormente ocorreu uma das três situações:

a) $S^{-1} = 2$; Haviam dois palitos e um dos jogadores removeu um palito;

b) $S^{-1} = 3$; Haviam três palitos e um dos jogadores removeu dois palitos;

c) $S^{-1} = 4$; Haviam quatro palitos e um dos jogadores removeu três palitos;

[2]Aos mais ansiosos(ou curiosos) as nossas propostas de soluções encontram-se no apêndice B.

Portanto, o jogador que encontrar-se na sua vez de jogar em qualquer uma das possíveis situações S^{-1} terá vitória garantida, afinal pode sempre deixar o último palito para o adversário retirar. Então, é óbvio, que o jogador que estiver na situação anterior com 5 palitos estará perdido, ou seja, $S^{-2} = 5$.

Esclareçamos. Suponha que o jogador B está em $S^{-2} = 5$, que seja, sobre a mesa encontram-se 5 palitos e cabe ao mesmo decidir que quantidade de palitos retirar. Suas alternativas são:

i) remove um palito, ficando apenas 4 palitos, passando-se a posição subsequente, a bem dizer,$S^{-1} = 4$;

   E agora, o jogador A obtém a vitória retirando 3 palitos deixando o último, $S = 1$, para B remover.

ii) remove dois palitos, ficando 3 palitos, agora $S^{-1} = 3$;

   A chega a vitória retirando 2 palitos deixando mais uma vez o último,$S = 1$, para B remover.

iii) remove três palitos, ficando apenas 2 palitos, com $S^{-1} = 2$; E jogador A mais uma vez ganha, desta vez adotando a estratégia de retirar 1 palitos e novamente na mesa tem-se apenas o último para B remover.

Consequentemente, o jogador que estiver em $S^{-2} = 5$ estará em situação perdedora. Neste ponto, com a experiência e o conhecimento do exercício 1, é fácil ao leitor convencer-se que o jogador que encontrar-se em $S^{-3} = 9$ estará em situação perdedora.

Posso perceber sua incredulidade, vejamos então:

Para manter o padrão, vamos mais uma vez supor que B está em $S^{-3} = 9$, quer dizer, ainda há 9 palitos na mesa e B escolherá a quantidade de palitos a remover. Suas estratégias são:

*) remove um palito, ficando apenas 8 palitos. A obtém a vitória retirando 3 palitos, ou seja , coloca B na posição $S^{-2} = 5$, para B remover;

**) remove dois palitos, ficando 7 palitos. A ganha removendo 2 palitos, pois, assim ,$S^{-2} = 5$;

***) remove três palitos, permanecendo 6 palitos, com posição ganhadora para A após retirar um palito, afinal $S^{-2} = 5$.

Extendendo o raciocínio é notório que o jogador que encontar-se nas posição anteriores $S^{-4} = 13$, $S^{-4} = 17$, $S^{-5} = 21$, ou seja, a posição inicial $S^{In} = 21$; estará em uma posição perdedora.

Por conseguinte, quem iniciar o jogo estará perdido, bastando o segundo jogador seguir a mesma estratégia do exercicio 2:

- Seja q_A a quantidade de palitos retirada por A, jogador que realiza a primeira retirada de palitos, então B em toda jogada deve retirar 4 - q_A palitos.

Bibliografia

[1] AUMANN, R.J; MASCHLER, M., **Repeated Games with Incomplete Information**. Cambridge: MIT press, 1995.

[2] BASAR, T.; OLSDER, G.J., **Dynamic Noncooperative Game Theory**,2^a ed. New York: Academic Press, 1999.

[3] BERLEKAMP, E.R.; CONWAY, J.H.; GUY, R.K., **Winning Plays** for your mathematical plays, v. 1, 2^a ed. Wellesley: A K Peters, Ltda, 2001.

[4] BINMORE, K., **Playing for Real** A text on Game Theory. New York: Oxford University Press, 2007.

[5] CERDA, E.T. ; PÉREZ, J.N. ; JIMENO, J.L., **Teoria de Juegos**. Madrid: Pearson Education, 2004.

[6] CONWAY, J.H., **On Numbers on Games**. New York: Academic Press, 1976.

[7] DAVIS, M. D., **Teoria dos Jogos** - uma introdução não técnica. Editora Cultrix, 1973.

[8] DIMAND, M.A. ; DIMAND, R.W., **The History of Game Theory, volume I** From the beginnings to 1945. New York: Routledge, 1996.

[9] DIXIT, A. K. ; NALEBUFF, B., **The Art of Strategy** A game Theorist's Guide to Sucess in Bussines and Life, 2008. Traduzido por M^a Esther Rabasco e Luis Toharia em *El arte de la estrategia*. Antoni Boschi Editor, 2010.

[10] DRESHER, M., **Games of Strategy** Theory and Aplications. New Jersey: Prentice-Hall, 1961.

[11] DUTTA, P.K., **Strategies and Games**: Theory and Practice. Cambridge: MIT press, 1999.

[12] EITHER, S.N., **The Doctrine of Chances** Probalistics Aspects of Gambling. Salt Lake City: Springer, 2010.

[13] ELIAS, E.C., **Teoria de Juegos y Estrategia**, 1^a ed. El Salvador: UFG editores, 2014.

[14] FIANI, R., **Teoria dos jogos**. Com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais, 3^a ed. Sao Paulo: Editora Campus, 2011.

[15] GIBBONS, R., **A Primer in Game Theory**. New York: Prentice-Hall, 1992.

[16] GINTIS, H., **Game Theory Evolving**: A problem-Centerd introdution to Modeling Strategic Interation, 2^a. New York: Princeton University Press, 2009.

[17] HARRINGTON JUNIOR, J.E., **Games, Strategies and Decision Making**. New York: Worth Publisher, 2009.

[18] HARSANYI, J.C., **Rational Behavior and Bargaining Equlibrium im Games and Social Situations**. New York: Cambrideg University Press, 1977.

[19] HAYWOOD JUNIOR, O.G., **Military Decision and Game Theory**. New York: Journal of Operations Research Society of America, Vol. 2, 1954

[20] KUNH, H.W., **Lectures on the Theory of Games** in Annals Of mathematic Studies, n^o 37. New Jersey: Princeton University Press, 2003.

[21] LEWONTIN, R.C., **Evolution and The Theory Of Games** in Greene M.; Mendelsohn, E.(Org.) *Topics in Philosophy Of Biology*, pag.286-311. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1976.

[22] MAS-COLELL, A. ; WINSTON, M. ; GREEN, J.R., **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

[23] MCKINSEY, J.C.C., **Introdution to the Theory of Games**. Santa Monica: RAND Corporation, 1952.

[24] MORRIS, P., **Introdution to Game Theory**. New York: Springer, 1994.

[25] MYERSON, R.B., **Game Theory** Analysis of Conflict. Cambridge: Harvard Universityu Press, 1997.

[26] NASH, J.F., **The Bargain Problem**. *Econometrica, XVIII*, pag. 155-162, 1950.

[27] NASH, J.F., **Two-Person Cooperative Games**. *Econometrica, XVIII*, pag. 126-140, 1953.

[28] NOBREGA, C. ; KALKO, A., **Tudo está em jogo**. SuperInteressante, edição 175, Abril, 2002. Disponível em: <www.http://super.abril.com.br/ciencia/tudo-esta-em-jogo>. Acessado em 08 de janeiro de 2016.

[29] OSBORNE, M.J., **An introdution to Game Theory**. Toronto: Oxford University Press, 2000.

[30] OWEN, G., **Game Theory**, 3^a ed. London: Academic Press, 1995.

[31] RAUL, M., **Quanto mais melhor**. Ensaios de minha lavra, Evolução & comportamento, 15 outubro, 2008. Disponível em < https://raulmarinhog.wordpress.com/tag/dilema-do-sorveteiro/>. Acessado em 02 de agosto de 2016

[32] RUIZ, J.F., **Teoria de Juegos**: sua aplicación em Economia, 2^a ed. Mexico, D.F.:El Colégio de Mexico, Centro de Estudos Econômicos, 2010.

[33] SANCHEZ_CUENCA, I., **Teoria dos jogos**. in Cuadernos Metológicos , 2^a ed. Madrid: Centro de Investigaciones Sociológicas, 2009.

[34] SCHWALBE, U. ; WALKER, P., **Zermelo and the Early History of Game Theory**. New Zeland, 1999. Disponível em: <www.math.harvard.edu/ elkies/FS23j.03/zermelo.pdf>. Acessado em 05 de abril de 2016.

[35] SMITH, J.M., **Evolution and Theory of Games**. New York: Cambridge University press, 1982.

[36] STRAFFIN, P.D., **Game Theory and Strategy**. Washington: The Matematical Association of America, 1993.

[37] TODHUNTER, I., **A History of the Mathematicaln Theory of Probability** From the time of Pascal to that Laplace. Cambridge: Macmillan, 1865.

[38] VÉNTSEL, E.S., **Elementos de la Teoria de los Juegos**. Traduzido do russo por Bernardo Del Rio Salceda. Moscou: Editorial Mir, 1977.

[39] VIGNATTI, A., **Redes Sociais e Econômicas**. Disponível em: <http://www.inf.ufpr.br/vignatti/courses/ci305/06a.pdf>. Acessado em 13 de agosto de 2016.

[40] VINCENTE, T.L; BROWN, J.S., **Evolutionary Game Theory, Natural Selection and Darwinian Dynamics**. New York: Cambridge University Press, 2005.

[41] VON NEUMANN, J. ; MORGENSTERN, O., **Theory of Games and Economic Behavior**, 3^a ed. Cambridge: Princeton University Press, 1953.

[42] WALKER, P., **A Chronology of Game Theory** . Disponível em: <http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm>. Acessado em 30 de novembro de 2015.

[43] WILLIAMS, J. D., **The Compleat Strategyst**. New York:The Macgraw-Hill Book Company, 1954.

[44] WIKIHOW, **Como calcular um valor esperado**. Disponível em: <www.http://pt.wikihow.com/Calcular-um-Valor-Esperado>. Acessado em 30 de março de 2016.

[45] XAVIER, O.M., **A Origem da Teoria dos Jogos de Equilibrio em Nash**. 57fls. Dissertação(Mestrado em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul,Porto Alegre, 2013.

[46] ZERMELO, E., **Uber eine Anwendung der Mengenlehre aud die Theorie des Schachspiels**. Cambridge: Cambrige University Press, 1913.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Santos, Cleverton Souza
S237i	Introdução à teoria dos jogos: para o ensino médio / Cleverton Souza Santos ; orientador Kalasas Vasconcelos de Araújo. – Itabaiana, 2016.
	177 f. : il.
	Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.
	1. Matemática. 2. Teoria dos jogos. 3. Otimização matemática. I. Araújo, Kalasas Vasconcelos de, orient. II. Título.
	CDU: 519.83

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Uma Introdução à Teoria dos Jogos para o Ensino Médio
por

Cleverton Souza Santos

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Kalasas Vasconcelos De Araujo - UFS
Orientador

Prof. Evilson Da Silva Vieira - UFS
Primeiro Examinador

Prof. Hassan Sherafat - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Agosto de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com