Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

Rône Diniz Quintas

Estudo das Cônicas - Várias Abordagens

Orientador:Michael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
Maio/2018

Rône Diniz Quintas

Estudo das cônicas - Várias abordagens

Dissertação apresentada por **Rône Diniz Quintas** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
2018.

Q7 Quintas, Rone Diniz
Estudo das cônicas - várias abordagens / Rône Diniz Quintas. - Niterói, RJ: [s.n.], 2018.

140 f.

Orientador: Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Fluminense, 2018.

1. Ensino de Matemática. 2. Cônicas. 3. Ensino auxiliado por computador. I. Título

CDD: 510.7

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da monografia apresentada por Rone Diniz Quintas.

Aos vinte e cinco dias do mês de maio de dois mil e dezoito, reuniram-se na sala 308 do Bloco G, Campus do Gragoatá, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores Mitchael Alfonso Plaza Martelo da Universidade Federal Fluminense, Ruth Milena Cortés da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Dirce Uesu Pesco da Universidade Federal Fluminense e Omar Javier Solano Albornoz da Universidade Federal Fluminense, sob a presidência do primeiro, para prova pública de defesa da dissertação intitulada **"Estudo da cônicas – Várias abordagens",** apresentada pelo mestrando Rone Diniz Quintas. A defesa da dissertação atende às exigências contidas no Regulamento Específico do Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT - da Universidade Federal Fluminense. A dissertação foi elaborada sob a orientação do professor Mitchael Alfonso Plaza Martelo. O mestrando Rone Diniz Quintas fez a exposição de seu trabalho durante 50 minutos, iniciando às 10:00h e concluindo às 10:50h. A seguir, respondeu as questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora. Terminada a arguição, realizou-se a reunião da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido da aprovação do mestrando Rone Diniz Quintas considerando-se o trabalho apresentado e a forma com que se houve na apresentação na defesa do mesmo. Para constar, foi lavrada a presente ata que vai assinada pela Secretária Administrativa do Mestrado Profissional em Matemática, pelos membros da Banca Examinadora e pelo mestrando.

Niterói, 25 de maio de 2018.

Mitchael A. Plaza M.

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Ruth Milena Cortés

Profª. Ruth Milena Cortés

Dirce Uesu Pesco

Profª. Dirce Uesu Pesco

Prof. Omar Javier Solano Albornoz

Rone Diniz Quintas (mestrando)

Mariana Lattanzi

Mariana Lattanzi (secretária)

DEDICATÓRIAS

A Deus por iluminar o meu caminho durante esta jornada.

A toda minha família.

Ao meu orientador, professor Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo.

Aos meus ex-professores, professores, meus mestres.

Aos meus alunos do passado, do presente e do futuro.

Aos amigos, pelo incentivo e pelo apoio constante e incondicional.

A minha esposa, Odete, por suportar este período em que estive ausente.

Aos meus filhos, por me darem ânimo, mesmo sem saber, durante este período.

Aos meus pais, pela criação, ensinamentos e experiência de vida que tenho.

A todos aqueles que acreditaram e torceram por mim em mais esta jornada.

(...) O tempo antigo passou, e agora é um tempo novo.Logo a humanidade terá uma idéia clara de sua casa, do corpo celeste que ela habita. O que está nos livros antigos não lhe basta mais. pois onde a fé teve mil anos de assento, sentou-se agora a duvida. Todo mundo diz: é, está nos livros, mas agora nós queremos ver com os nossos olhos.
Bertold Brecht

AGRADECIMENTOS

A Deus! Sem pedir e pensar n'Ele, não teria força, capacidade e calma para aqui chegar.

Ao consórcio CECIERJ/CEDERJ por levar um ensino superior de qualidade para o interior do estado do Rio de Janeiro.

À todos ex-professores da educação infantil, do ensino fundamental, do ensino médio que tive o prazer de ser aluno, e forneceram com competência e carinho as primeiras ferramentas para iniciar esta grande caminhada.

Aos meus professores da graduação, ao meus professores do programa PROFMAT, pelo conhecimento transmitido, paciência em sanar minhas dúvidas, confiança e companheirismo.

Ao meu professor e orientador Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo pela humildade, orientação, ajuda, força e paciência.

A SBM por proporcionar um programa abrangente e de qualidade, e aos professores do curso que transmitiram e compartilharam seu conhecimento.

A todos meus colegas de curso, pelas horas “perdidas"e compartilhadas no iníco do curso, sempre dispostos a ajudar a resolver qualquer questão.

Aos amigos Moisés Hoory, Paola Camacho Calderon e Leonardo Macias Casallas pela contribuição na execução deste trabalho.

Às diretorias das instituições de ensino “Colégio Metta”, “Colégio Estadual Machado de Assis” e “Colégio Estadual Leopoldo Froes”, por abrirem suas portas para realização deste trabalho.

À Profª. Patricia Muniz Mariano do Colégio Metta e ao Prof. Felipe Renato Querente do Colégio Estadual Leopoldo Froes pela ajuda incondicional.

Se, por ventura, esqueci de alguém que tenha contribuído para este momento, peço desculpas. Contudo, sintam-se, todos, agradecidos.

RESUMO

As curvas cônicas ou simplesmente cônicas vem sendo estudadas por vários matemáticos, e mesmo observando a utilização prática no nosso cotidiano, e principalmente a importância destas na evolução tecnológica, nosso sistema de ensino não aborda com a devida importância o assunto, muitas vezes suprimindo sua aplicação a casos de geometria analítica. Vale ressaltar que este assunto é rico, principalmente do ponto de vista didático, e como sugestão indicamos a apresentação do conteúdo através de três abordagens respectivamente distribuídas nos três anos do ensino médio:

- *Geométrica* - Apresentando as cônicas através de suas características geométricas.
- *Algébricas* - Apresentando as cônicas através de suas representações algébricas, definindo-as através de uma equação do 2° grau.
- *Unificada + Espacial* - Apresentando as cônicas de uma forma unificada colocando como ponto central sua excentricidade, e exibindo sua representação através da intersecção de um cone duplo com um plano, permitindo ainda assim mostrar que todas as abordagens anteriores representam um mesmo assunto..

Palavras Chaves: Lugar Geométrico, Cônicas, Recursos Computacionais e GeoGebra.

ABSTRACT

Conical curves or simply conicals have been studied by several mathematicians and, besides their practical use in our daily routine, mainly important in evolving technology, our educational system does not approach the issue with the importance it deserves, suppressing their use limited to analytical geometry. It is worthy to detail that this is a rich, vast, field from didactical point of view, and we point out the suggestion to present its contents through three different ways of approach, distributed along the three years of high scholarship:

- *Geometric* - Introducing the conicals by means of their geometrical characteristics.
- *Algebraic* - Introducing the conicals by means of their algebraic representations, defining them through 2nd grade equations.
- *Unified + Spatial* - Introducing the conicals in a unified form, centering in their eccentricity and displaying their representation by the intersection of a double cone and a plane, allowing to clarify that all previous approaches refer to the same issue.

Keywords: Locus, Conicals, Computational Resources, Computer Resources and GeoGebra.

RESUMEN

Las Curvas Cónicas o simplemente Cónicas han sido estudiadas por varios matemáticos incluso observando la utilización practica en nuestro dia a dia y principalmente la importancia de las mismas en la evolución tecnológica, nuestro sistema educativo no aborda con la devida importancia este asunto, muchas veces relacionando y eliminando su aplicación a casos de geometria analítica. Vale resaltar que este asunto es importante, principalmente desde el punto de vista didáctico y como sugerencia recomendamos la presentación de contenido a traves de tres ramas respectivamente distribuidas en los tres años de educación medio:

- *Geometria* - Presentando las Cónicas a traves de sus características geométricas.
- *Algebraicas* - Presentando las Cónicas a traves de sus representaciones algebraicas, definiéndolas a traves de una ecuación de segundo grado.
- *Unificada + Espacial* - Presentando las Cónicas de una forma unificada ubicando como punto central su excentricidad y mostrando su representación a traves de la intersección de un cono doble con un plano, permitiendo así demostrar que todas las ramas anteriores representan un mismo asunto.

Palabras claves: Lugar Geométrico , Cónicas, Recursos Computacionales e GeoGebra.

Sumário

Introdução

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção." ***Paulo Freire***

Não apenas no campo da educação, mas especialmente nele, há um sentimento já bem aprofundado, quase unânime, de que urge a necessidade de se quebrar esse círculo vicioso do mau ensino. Aquele em que professor e aluno se colocam em postura diametralmente opostas, distanciando-se por ideias e ideais, por conteúdo e forma, por valores e práticas efetivas, minando e desagregando todo o sistema de ensino, que deveria ser uniforme e convergente.

Seguindo este raciocínio, o autor deste trabalho, por ser professor do Ensino Básico da Rede Pública e conhecer de perto as muitas inquietações dos alunos quanto à compreensão da praticidade física daquilo que lhe é ensinado, entende ser bastante pertinente mostrar como a matemática ensinada em sala de aula pode ser aplicada ou reconhecida no dia a dia de suas atividades rotineiras, criando um estímulo a mais em seu aprendizado.

Expressões como: "Professor, para que serve isso?" e "Onde utilizamos isso?" foram muitas vezes ouvidas nos anos de experiência em sala de aula e constituíram-se em fonte inspiradora do desenvolvimento dos elementos aqui apresentados, cujo objetivo é o de entregar aos professores de matemática e até aos de física diversas aplicações práticas dos muitos conceitos estudados em todas as fases do ensino, como ferramenta motivadora de suas aulas.

Este trabalho é apresentado em 6 capítulos:

O capítulo 1 traz uma introdução ao que tange as bases legais em relação à utilização de recursos computacionais na educação; Traz também a importância da utilização destes como ferramentas de apoio no ensino da matemática, assim permitindo uma aproximação do conteúdo matemático com o cotidiano do aluno.

No capítulo 2, realiza-se uma análise de alguns materiais e livros didáticos utilizados hoje em dia em relação seu conteúdo em relação ao ensino das cônicas bem como sua adequação aos PCNs.

No capítulo 3, é feito uma cronologia no desenvolvimento do estudo sobre cônicas no tempo, bem como exibe os principais matemáticos e suas contribuições no desenvolvimento deste estudo.

Podemos considerar o capítulo 4 como sendo uma introdução aos próximos três capítulos, que convergem nas diferentes formas de abordar o estudo sobre as cônicas e as interações entre estas diferentes abordagens, que serão o foco deste trabalho. Os conteúdos são apresentados da seguinte forma: No capítulo 5 Abordagem Geométrica, no capítulo 6 abordagem algébrica e no capítulo 7 várias definições (excentricidade e espacial), aqui é apresentado o estudo das cônicas de forma unificada, mostrando que todas elas podem ser representadas por equações do segundo grau e sua forma é definida pela mudança de seus coeficientes e, ainda assim, todas podem ser definidas como lugar geométrico definido pela intersecção do cone com um plano.

O capítulo 8 é um compilado da utilização do conhecimento sobre cônicas de uma forma prática no nosso cotidiano, fazendo uma conexão da teoria com a prática através de exemplos de sua utilização em diversas áreas.

O capítulo 9 é um compilado das atividades teóricas e práticas realizadas em sala de aula, mostrando o feedback do trabalho desenvolvido com os alunos bem como assimilação do conteúdo por parte deles.

Capítulo 1

Cônicas, recursos computacionais e os PCN's

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, ver [30]) não se resumem a um simples programa de estudo, mais uma proposta integrante de ensino, através de habilidades e destrezas necessárias ao processo de aprendizagem, ensinando atitudes e valores essenciais ao convívio social; ultrapassa, assim, a simples transmissão do saber acumulado por meio de matérias clássicas. Em relação aos conteúdos matemáticos podemos destacar:

"O objetivo é adotar a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática, para isso os PCNs propõem que a matemática seja apresentada aos alunos como um instrumental importante para a compreensão do mundo à sua volta, através de discussões, análises, argumentos e comprovações de questões matemáticas, considerando em especial as de utilização social. Deve levar em conta a necessidade de incorporar ao ensino da matemática as **tecnologias da informação**. Apontam que o aluno deverá aprender a usar da melhor forma os instrumentos tecnológicos disponíveis, tudo isto tendo em vista o grande desafio de despertar a capacidade de investigação por parte dos alunos, tornando prazerosa a atividade de resolução de problemas."(PCNs 1996, p.7)

Podemos destacar do exposto acima a utilização de tecnologias da informação como ferramenta de apoio ao ensino. Ainda neste viés, devemos perceber que os conteúdos apresentados devem fazer sentido para o aluno, ele deve perceber em suas aulas, a matemática estudada contextualizada ao seu dia a dia, os conteúdos de matemática devem ser trabalhados como uma extensão da vida do aluno; permitindo assim que o aluno compreenda a matemática de forma natural, sem preconceitos ou frustrações. Podemos destacar também a seguinte frase extraída de matemática Contexto e Aplicação, ver em [6].

"Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky

Os PCNs indicam um caminho para melhorar a qualidade do ensino lançando mão de recursos de tecnologias da comunicação, favorecendo ambientes de aprendizagem que proporcionem novas formas de pensar e aprender, permitindo uma aprendizagem significativa para o aluno. Além de favorecer os ambientes de aprendizagem, inserir novas tecnologias no cotidiano do aluno permite que ele esteja um passo a frente rumo a sua inserção no mercado de trabalho, uma vez que atividades deste tipo podem desenvolver nele tanto as habilidades do manuseio dos instrumentos tecnológicos quanto formas de raciocínio e processos (intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, etc).

"As tecnologias da informação e da comunicação são muito mais rápidas do que pensamos. Elas impuseram à sociedade um novo modo de produção às empresas, às instituições e às escolas. Não há como fugir disso. Precisamos preparar o corpo diretivo das escolas, os professores e os alunos a trabalhar com as TICs para seu próprio benefício como indivíduos, cidadãos e profissionais."
(DUTRA, 2007, apud UNESCO, 2008)

A atividade de uso do computador não pode ser vista como mera forma de transmitir a informação para o aluno (máquina de ensinar) mas conforme já exposto acima, como uma ferramenta de apoio para criar condições do aluno construir seu conhecimento (tornando o computador uma ferramenta de complementação, de aperfeiçoamento do ensino). O desafio hoje é estudar todas essas possibilidades do ensino tecnológico e desenvolver uma forma mais eficaz de empregar os computadores na educação.

"O objetivo da inclusão da informática como componente curricular da área de Linguagens, códigos e Tecnologias é permitir o acesso a todos os que desejam torná-la um elemento de sua cultura." (Parâmetros Curriculares Nacionais)
Paulo Freire

Podemos ver em [35] que "As Orientações Curriculares para o Ensino Médio -OCEM (BRASIL, 2006)" são apresentadas em três focos: a escolha dos conteúdos, a forma de desenvolvê-los e o projeto pedagógico e a organização curricular. A escolha de 33 conteúdos precisa considerar os diferentes propósitos para a formação matemática do ensino básico, pois é esperado:

que os alunos saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.(ver[28] p.69)

Nesse sentido, sugerem então que o estudo de geometria deve permitir desenvolver as capacidades dos estudantes em resolver problemas práticos do cotidiano e que no estudo dageometria analítica, a geometria e a álgebra devem estar interligadas ora para resolver problemas geométricos por meio de equações, ora para resolver equações por meio de propriedades geométricas. Para a Geometria Analítica, consideraram como essencial o estudo da reta e da circunferência e que suas equações sejam deduzidas com a significação de cada parâmetro e não apenas apresentadas aos alunos para que sejam memorizadas. No entanto, as cônicas são consideradas conteúdos complementares e que os professores devem analisar sua pertinência. Sugerem então o estudo das cônicas a partir da definição de lugar geométrico acompanhado de suas equações canônicas, tratando-as como solução de uma equação de segundo grau em duas variáveis e ainda que o ensino de geometria considere os sistemas de coordenadas polares e esféricas, além do cartesiano, e a construção de curvas e superfícies de modo a estimular um pensamento matemático generalizador.

Neste trabalho, além de permitir ao aluno entender os conceitos que permeiam os conhecimentos sobre secções cônicas, tentaremos leva-lo a desenvolver tais conhecimentos de forma natural e progressiva, com auxílio de recursos computacionais apropriados para o ensino da matemática. Utilizaremos principalmente uma classe de software denominado de software de geometria dinâmica. ver [3]:

"Um software de geometria dinâmica é um ambiente que permite simular construções geométricas no computador. Diferentemente do que ocorre com a régua e o compasso tradicionais, as construções feitas com este tipo de software são dinâmicas e interativas, o que faz do programa um excelente laboratório de aprendizagem da geometria. O aluno (ou professor) pode testar suas conjecturas através de exemplos e contraexemplos que ele pode facilmente gerar. Uma vez feita a cosntrução, pontos, retas e circunferências podem ser deslocados na tela mantendo-se as relações geometricas(pertinência, paralelismos, etc) previamente estabelecidas, permitindo assim que o aluno (ou professor), ao invés de gastar seu tempo com detalhes de contrução repetitivos, se concentre na associação existente entre os objetos"

Devemos buscar ferramentas próprias para este fim; procurando sempre relacionar os conteúdos apresentados ao cotidiano do aluno. Como escolha do software, optamos pelo Geogebra, por considerá-lo muito além de um software de geometria dinâmica, mas sim um software de matemática dinâmica; podemos sintetizar esta opção através do seguinte trecho, ver [17].

"Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS."

Segundo os PCNs, os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o aprendizado teórico com o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Os PCNs apontam como caminho para melhorar a qualidade de ensino a construção de ambientes de aprendizagem que proporcionem meios alternativos de pensar e aprender, tornando o aprendizado significativo para aluno.

Capítulo 2

Material didático nas escolas

"Dos diversos instrumentos do homem, o mais assombroso é, indubitavelmente, o livro. Os outros são extensões do seu corpo. O microscópio e o telescópio são extensões da vista; o telefone é o prolongamento da voz; seguem-se o arado e a espada, extensões do seu braço. Mas o livro é outra coisa: o livro é uma extensão da memória e da imaginação"

***Jorge Luís Borges*(24 Ago 1899 - 14 Jul 1986)**

Lembramos que, embora seja dada nesta seção uma importância para os livros (uma vez que a maioria das escolas por questões legais limitam o professor a utilizar somente o livro indicado), devemos entender que o livro não é o material didático, mas parte dele. Infelizmente, a maioria dos livros utilizados hoje em dia tanto pela rede pública de ensino, quanto pela rede privada, não atendem de maneira satisfatória os objetivos legais explorados nas seções anteriores.

Ao analisarmos os livros destinados ao ensino fundamental e médio, percebemos que existe uma discrepância nos conteúdos, em relação ao que indicam os PCNs, uma vez que não permitem ao aluno associar os conteúdos neles contidos com seu cotidiano, porque não há uma relação clara dos seus conteúdos em relação às outras disciplinas de sua grade curricular, não atendendo, desta forma, ao conceito de interdisciplinaridade sugerido pelos PCNs, ver [31] pg. 39. Podemos perceber também uma desconexão entre os livros e a utilização da tecnologia da informação para o auxílio do ensino na maioria dos livros analisados. Quando este o faz, utiliza a tecnologia apenas como mera extensão do conteúdo (coleção Conecte [15]), não permitindo ao aluno inferir, contruir conjecturas, ou vizualizar de forma tangível a construção do conhecimento pretendido pelo livro.

Em relação ao nosso objeto de pesquisa em questão, *"cônicas"*, o material destinado ao segundo segmento do ensino fundamental, apenas trata da circunferência, dando a esta uma abordagem geométrica. Em geral esta abordagem é dada no 6º ano, ainda assim sem fazer mensão que se trata de uma cônica ou o que seriam as cônicas. É colocado para o aluno, neste ponto, as propriedades das circunferência, abordagem sobre cordas, relações métricas, e as possíveis relações entre esta e um ponto, uma reta e outra circunferência. No 9º ano, o aluno começa a trabalhar com equações do 2º grau e resoluções destas equações. É apresentado para o aluno, de forma rudimentar, o gráfico da equação do segundo grau, ainda assim não se menciona em nenhum dos livros analisados a palavra cônica, e sequer se relaciona esta com a equação do segundo grau. O mesmo acontece no 1º ano do Ensino Médio, no qual, embora os alunos trabalhem com funções quadráticas, ainda assim o fazem sem relacionar o gráfico (curva) que representa esta função com as cônicas.

Todos os livros analisados só abordam o assunto cônicas em seu terceiro volume ou nos livros de volume único em suas partes finais, pressupondo que os conteúdos sobre cônicas devem ser trabalhados no 3º ano do ensino médio, utilizando neste momento a definição formal, através de um pouco da história da matemática. Pela metodologia neles encontrada, sempre partindo da definição da cônica como sendo a intersecção de um cone duplo com um plano, exibindo esta intersecção, apresentando então a definição formal da cônica nos moldes da matemática moderna (com simbolos e letras), e a partir daí com o auxílio de um desenho da cônica centrado na origem e suas definições formais em cada caso (Circunferência, Elipse, Parábola, e Hipérbole), chega-se a sua equação geral. Vale ressaltar, neste ponto, que alguns deles não exibem para o aluno as necessidades da época para o desenvolvimento do assunto e nem mesmo onde seriam aplicados na atualidade este conhecimento, quando apresentam o fazem de forma inadequada.

Procuramos selecionar livros que foram utilizados recentemente por diferentes instituições de ensino, que normalmente se enquadram na seguinte especificação: Escolas de pequeno ou grande porte, particulares ou públicas; visando desta forma representar o material didático utilizado na grande maioria das escolas. Vejamos a lista de livros a seguir com respectivos comentários sobre suas metodologias e conformidade com a legislação atual.

1. **Coleção Matemática Compreensão e Prática** ver [34]. Esta coleção é destinada ao segundo segmento do ensino fundamental, está dividida em 4 livros sendo o primeiro para o 6º ano e o último para o 9º ano, utilizada normalmente por instituições particulares, ela permite que o aluno tenha acesso a seu conteúdo de forma digital pelo portal da editora, prometendo oferecer na forma digital diversos recursos como animações, vídeos e atividades interativas interessantes para facilitar os estudos em casa e na escolas, mostrando atender os PCNs; estas atividades podem ser acessadas pelo portal da editora através de um cadastro prévio ou através de um CD que acompanha o livro. Vale ressaltar que estas atividades permitem ao aluno aumentar seu conhecimento sobre tecnologia da informação na utilização de microcomputadores; o livro é ilustrado e possui passagens sobre a história da matemática de forma satisfatória; sua linguagem é atualizada e de fácil entendimento para os alunos, os exemplos e exercícios são na sua grande maioria contextualizados ao nosso dia a dia. No tópico ***Lendo e Aprendendo***, ele traz textos interessantes com situações reais que enriquecem e explicam o conteúdo principal do capítulo; no tópico ***Trabalhando com a calculadora***, ele ensina a manusear e a trabalhar com a calculadora através de atividades simples relacionadas ao conteudo; no tópico ***Trabalhando em Equipe***, ele estimula o trabalho em equipe através de uma atividade integradora. Embora o livro não traga tópicos específicos sobre interdisciplinaridade, busca de forma natural exemplificar os conteúdos trabalhados com problemas do nosso cotidiano, fazendo assim o aluno perceber que a matemática está envolvida em todos os segmentos de nossas vidas.

2. **Matemática Teoria e Contexto** ver [5]. Esta Coleção é destinada ao segundo segmento do ensino fundamental da rede Pública do Estado do Rio de Janeiro e da cidade do Rio de Janeiro. Está dividida em 4 livros, sendo o primeiro para o 6º ano e o último para o 9º ano, distribuido gratuitamente aos alunos. Esta coleção foi

escolhida pois é utilizada pela maioria dos alunos do ensino fundamental no estado do Rio de Janeiro, bem como da rede municipal de ensino. O livro não atende de forma coerente os PCNs, por não permitir que o aluno tenha um contato maior com a tecnologia da informação e não atender ao conceito de interdisciplinaridade; a coleção não traz consigo informações satisfatórias sobre a história da matemática bem como também não traz os nomes dos matemáticos envolvidos nas descobertas dos assuntos tratados no livro; porém, por meio do tópico ***Ação***, o livro traz uma gama variada de atividades, jogos, experimentos, que permitem um melhor ambiente de aprendizagem; através do tópico ***Pensando em Casa*** e ***Pense e responda***, a coleção traz atividades um pouco mais relacionadas ao nosso cotidiano, levando o aluno a resolver problemas do nosso dia a dia através dos conteúdos trabalhados no capítulo estudado; com o tópico ***Você Sabia***, o livro vem complementando as informações dos textos didáticos a partir de informações de jornais e revistas, porém este tópico não é encontrado na maioria dos capítulos dos livros.

3. **Coleção Matemática Ensino Médio** ver [37]. Esta Coleção é destinada ao ensino Médio da rede Pública do Estado do Rio de Janeiro, está dividida em 3 volumes, ditribuída gratuitamente aos alunos, esta coleção foi escolhida pois é utilizada pela maioria dos alunos do ensino médio no estado do Rio de Janeiro. O livro atende de forma coerente aos PCNs de uma maneira geral e simples. Através dos tópicos chamados ***conexão***, ele mostra para o aluno que a matemática está em diversas áreas de conhecimento, tais como: arquitetura, medicina, artes, etc; com exemplos reais do nosso cotidiano, atendendo, desta forma, ao conceito de intedisciplinaridade, não apenas com outras disciplinas da grade curricular mas também com áreas do cotidiano do aluno. Nos tópicos ***Caluladora*** e ***Computador***, permite-se ao aluno conhecer uma calculadora científica, além de apresentar recursos para construir gráficos, fazer planilhas e simulações através de softwares gratuitos e destinados a este propósito, apresentando telas de todos os softwares sugeridos, com exemplos e passo a passo para se obter os resultados desejados, sugerindo e permitindo que o aluno infira suas próprias configurações de dados para, desta forma, inferir os resultados. Vale ressaltar que o livro possui passagem da História da Matemática, identificando os matemáticos e pessoas envolvidas nas descobertas dos assuntos trabalhados no livro.

4. **Matemática Paiva** ver [29]. Esta Coleção é destinada ao ensino médio da rede pública da cidade do Rio de Janeiro, está dividida em 3 volumes, ditribuída gratuitamente aos alunos; esta coleção foi escolhida pois é utilizada por muitos alunos do ensino médio na cidade do Rio de Janeiro. O livro atende de forma satisfatória o que é sugerido pelos PCNs, já que possui uma gama extensa de exemplos reais do nosso cotidiano, com muitas figuras ilustrativas para chamar a atenção do aluno em relação ao conteúdo; no tópico ***matemática sem fronteira***, ele traz textos interessantes com situações reais, onde se aplicam os conceitos estudados no capítulo; no tópico ***Além da Teoria***, ele estimula a reflexão sobre um problema contextualizado à questões de outras áreas de conhecimento, atendendo, desta forma, ao conceito de interdisciplinaridade, não apenas com outras disciplinas da grade curricular específica. O livro não propõe atividades a serem trabalhadas em sala de aula, além de não incentivar a utilização de recursos computacionais, sendo estes importantes na formação do aluno conforme já discutido em seções anteriores. Vale ressaltar que o livro possui passagem da história da matemática, identificando os matemáticos e

pessoas envolvidas nas descobertas dos assuntos trabalhados no livro.

5. **Coleção Conecte** ver [15]. Esta coleção é destinada ao ensino médio, está dividida em 3 volumes, utilizada normalmente por intituições particulares, devido ao seu alto valor de mercado, ela permite que o aluno tenha acesso ao seu conteúdo de forma digital pelo portal da editora, prometendo oferecer na forma digital diversos recursos, como filmes, animações, simuladores e links interessantes para facilitar os estudos em casa e na escola, mostrando atender os PCNs. Porém ao entrar na plataforma, o que se vê é uma mera extensão de conteúdo e exercícios extras, não há interatividade Vale ressaltar, é claro, que permite ao aluno aumentar seu conhecimento sobre tecnologia da informação na utilização de microcomputadores, mesmo que seja como um repositório a mais de conteúdo. O livro é ilustrado e possui algumas passagens sobre a história da matemática (embora, em bem poucas partes do livro); e sua linguagem é distante do cotidiano dos alunos, com poucos exemplos e exercícios contextualizados ao nosso dia a dia, não atendendo desta forma à sugestão dos PCNs. Entretanto o livro é bem ilustrado e colorido, e as curvas são apresentadas em cada tópico, representando suas respectivas cônicas, respeitando, é claro, as devidas escalas e proporções.

6. **Matemática Ciência e Aplicação** ver [16]. Esta coleção é destinada ao ensino médio da rede pública do Estado do Rio de Janeiro, está dividido em 3 volumes, ditribuído gratuitamente aos alunos; esta coleção foi escolhida pois é utilizada por muitos alunos do ensino médio no estado do Rio de Janeiro; embora ela não permita que o aluno tenha acesso ao seu conteúdo de forma digital pelo portal da editora, seu conteúdo é uma cópia da coleção "Conecte", ver [15], com a diferença de possuir uma quantidade de exercícios menores, porém não interferindo em nada na qualidade do material. Uma outra diferença que não podia deixar de ser mencionada é o custo destas coleções, embora ambas sejam escritas pelos mesmos autores e possuam conteúdo semelhante (*excluindo é claro o que ja foi mencionado sobre o conteudo digital e alguns exercícios a menos*), a diferença de valores é altamente significativa. A avaliação desta coleção pode ser resumida como uma cópia fiel da coleção conecte.

7. **Coleção Matemática Contexto & Aplicação** ver [6]. Esta coleção é destinada ao ensino médio e é dividida em 3 volumes, esta coleção foi escolhida pois foi utilizada como livro didático em um colégio federal conhecido como referência nacional situado na região metropolitana do Rio de Janeiro. A coleção não atende de forma satisfatória ao que é sugerido pelos PCNs, pois o livro propõe poucas atividades a serem trabalhadas em sala de aula, através de dinâmicas que sempre ajudam os alunos a compreenderem melhor a teoria, além de não incentivar a utilização de recursos computacionais, sendo estes importantes na formação do aluno conforme já discutido em seções anteriores, e também não apresentam os conceitos de interdisciplinaridade. Apesar do exposto acima a coleção é rica em detalhes sobre a história da matemática, tentando em uma boa parte das vezes envolver o aluno nas condições e motivos que levaram a descoberta dos assuntos estudados, bem como familiarizando o aluno com os personagens ímpares nestas descobertas. O livro é bem ilustrado e colorido, em cada tópico as curvas são apresentadas, e visualmente as curvas apresentadas representam suas respectivas cônicas, respeitando, é claro, as devidas escalas e proporções.

8. **Apostilas Plataforma Eleva** ver [1]. O material didático da Plataforma Eleva de

ensino, foi escolhida por ser indicada como material didático de grandes sistemas integrados de ensino. As apostilas são destinadas para o ensino fundamental e ensino médio em ambito nacional; ela permite que o aluno tenha acesso a seu conteúdo de forma digital pelo portal da plataforma. Ao entrar na plataforma o que se vê é uma cópia do material impresso apenas, não há interatividade. Vale ressaltar que o material incentiva o aluno a ter contato com novas tecnologias. O livro é bem ilustrado, principalmente na parte de exercícios, que são contextualizados ao nosso dia a dia; ele ainda apresenta muitos textos auxiliares que ajudam o aluno a entender o assunto principal, que utiliza uma linguagem um pouco complexa para a modalidade de ensino. Ele não apresenta atividades, como jogos, brincadeiras, ou trabalho em grupo para ajudar na aprendizagem dos conteúdos, além do fato de não incentivar o uso de tecnologia de informação como ferramenta de apoio ao ensino. Outro ponto negativo em relação ao que é proposto pelos PCNs, é que não se vê um trabalho de interdiciplinaridade em seus conteúdos. Logo, pelo exposto acima, podemos considerar que o material não atende de forma satisfatória o que é proposto nos PCNs.

Capítulo 3

Um pouco de História

Os historiadores atribuem ao matemático **Hipócrates de Quios** (470-410 A.C. aproximadamente) os primeiros estudos sobre cônicas quando este tentava solucionar o problema da duplicação do cubo. Como era de conhecimento dos gregos a solução da duplicação do quadrado utilizando uma meia proporcional, Hipócrates sugeriu a utilização de duas meias proporcionais, no caso espacial. Sendo mais específico:

Dado um quadrado de lado 1, devemos determinar utilizando régua e compasso o comprimento x do lado do quadrado, que tenha a área duplicada em relação ao primeiro quadrado.

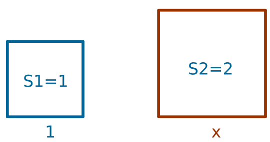


Figura 3.1: Meia Proporcional

Como a área do primeiro quadrado é um, a área do segundo quadrado deverá ser 2 logo:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \\ x &= \sqrt{2} \\ \frac{1}{x} &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Este problema se resume em: dados dois comprimentos a e b, encontrar a meia proporcional entre os segmentos dados, onde $a = 1$ é a área do primeiro quadrado e $b = 2$ é a área do segundo quadrado. Isto é, encontrar x tal que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

A solução de tal problema era conhecida naquela época pelos gregos. Esta linha de pensamento levou a Hipócrates a sugerir a inclusão de 2 meias proporcionais para resolver o mesmo problema no espaço, ficando o problema resumido a achar as duas meias proporcioais. Isto é, encontrar x e y tal que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Desta expressão Hipócrates destacou que:

$$\begin{aligned} x^2 &= ay \\ xy &= ab \\ x^3 &= axy \end{aligned}$$

De onde:

$$\begin{aligned} x^3 = axy &= a^2b \\ \frac{x^3}{a^3} &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Assim, se $a = 1$ é o volume do cubo menor e $b = 2$ é o volume do cubo maior, o valor da aresta deste cubo é justamente x. Concluindo que de fato, se fosse resolvido o problema das duas meias proporcionais, seria resolvido o problema da duplicação do cubo. Porém os matemáticos da época diziam que Hipócrates reduziu um problema dificil a outro problema tão difícil quanto, pois os gregos não conseguiam encontrar as duas meias proporcionais utilizando régua e compasso.

Após os trabalhos de Hipócrates, o matemático **Arquitas** (428-347 A.C aproximadamente) encontrou uma solução brilhante utilizando "secções cônicas" e "cilindros", porém, embora magnífica, esta não podia ser demonstrada somente através de régua e compasso.

Em seguida, o matemático **Menecmo** (380-320 A.C aproximadamente), discípulo de Eudóxio na Academia de Platão, utilizou os estudos de Hipócrates, onde ele transformou o problema em encontrar a intersecção de duas cônicas [1] descritas por Hipócrates: A parábola $x^2 = ay$ e a hipérbole $xy = ab$.

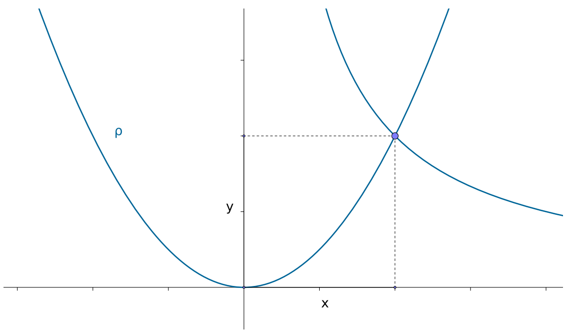


Figura 3.2: Solução de Menecmo

Ele foi o "primeiro" a mostrar que as ***elipses***, *as* ***parábolas*** *e as* ***hipérboles*** são obtidas como secções de um cone quando cortado por planos não paralelos a sua base.

[1]Devemos lembrar que nesta época os matemáticos não tinham simbolismo algébrico, ou visão de curvas expressadas analiticamente.

Quando o plano em questão é paralelo a sua base, teremos como resultado da intersecção *u*ma circunferência ou um **ponto** [8]; ver figura 3.3[2].

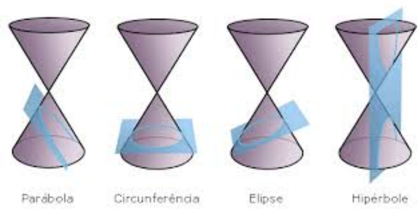


Figura 3.3: Cônicas

Porém em seus estudos, Pappus de Alexandria (290-350 A.C), atribuiu ao geômetra grego *Aristeu "O Ancião"* (370-300 A.C) o crédito de ter publicado o primeiro tratado sobre ***"Secções Cônicas"***, referindo-se aos 5 livros sobre secções cônicas de Aristeu. Deixando de lado quem foi o primeiro, o certo é que o trabalho destes sobre cônicas foram superados pelos três grandes representantes da *"Idade Áurea da Matemática Grega"*: Euclides de Alexandria (325-265 A.C.), Arquimedes de Saracusa (287-212 A.C.) e Apolônio de Perga (262-190 A.C.).

Antes de Apolônio, a elipse, a hipérbole e a parábola eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo do vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Foi Apolônio quem pela primeira vez mostrou que a partir de um único cone é possível obter as três espécies de secções cônicas, apenas variando a inclinação do plano de secção; também provou que o cone não precisa ser reto, finalmente substituiu o cone de uma só folha por um cone duplo, sendo assim, o primeiro a reconhecer a existência dos dois ramos da hipérbole (ver figura 3.3).

A partir da etimologia das palavaras **parábola**, do Grego PARABOLE, "comparação", pela noção de que uma coisa pode ser comparada a outra se for colocada ao lado desta, **elipse** que se originou a partir do grego "élleipsis", que pode ser traduzido como "falta" ou "defeito" e **hipérbole** do Grego HYPERBOLE, "exagero, extravagância", Apolônio definiu os nomes as curvas cônicas através de seus estudos sobre aplicação de área conforme definição abaixo:

Definição 3.0.1 *Classificamos as aplicações de área de três formas:*

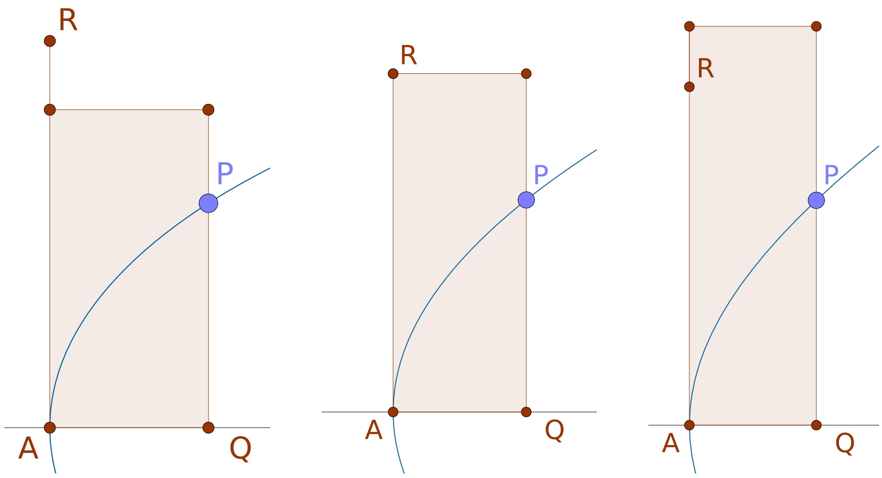
- *Aplicações parabólicas:*
  Dado uma figura qualquer de área S, um segmento AB e um ângulo α; construir sobre o segmento AB um paralelograma de área S e ângulo de base α.

- *Aplicações elípticas ou por falta:*
  Dado uma figura qualquer de área S, um segmento AB e um paralelogramo λ de ângulo de base α; construir sobre o segmento AB um paralelogramo de área S com ângulo de base α, de forma que o que falta para ser coberto no segmento AB, seja possível construir um paralelogramo semelhante ao paralelogramo dado com mesma altura do paralelogramo construído.

[2]Referência da figura em: https://www.google.com.br/search?biw=1600bih=794tbm=ischsa=1ei=k9kNW-bLL8GzwATsiKC4Dgq=sec%C3%A7%C3%B5es+c%C3%B4nicasoq=sec%C3%A7oes+cogs$_l$ = img.3.0.0i24k1.10939.17917.0.19885.24.17.7.0.0.0.216.1674.13j2j1.16.0....0...1c.1.64.img..1.20.1409...0j35i39k1j0i67k1 $UGqjwimgrc = IsVOuP7VBtGVeM$

- *Aplicações hiperbólicas ou por excesso:*
  Dado uma figura qualquer de área S, um segmento AB e um paralelogramo λ de ângulo de base α; construir sobre o segmento AB um paralelograma de área $S_\lambda < S$ com ângulo de base α, de forma que seja possível construir sobre o prolongamento do segmento AB um paralelogramo μ semelhante ao paralelogramo dado com mesma altura do paralelogramo construído de forma que $S_\lambda + S_\mu$ seja igual a S.

Como exemplo, Apolônio estabelece um parâmetro AR para as seções cônicas, o hoje chamado "latus rectum", perpendicular ao eixo AB da cônica, passando pelo vértice, e a ele aplica um retângulo de base AQ, sendo Q a projeção de um ponto P da cônica no eixo, e área $(PQ)^2$. Estabelecido o retângulo, Apolônio redefine a nomenclatura das seções cônicas conforme o retângulo excede, iguala ou fica aquém do parâmetro, respectivamente a hipérbole, a parábola e a elipse.



(a) elipse (b) Parábola (c) Hipérbole

Figura 3.4: Latus rectum

Apolônio conseguiu em seus estudos relacionar, de forma geométrica, duas grandezas de forma similar ao que fazemos hoje, relacionando as grandezas x e y no plano cartesiano, através de aplicação de área parabólica; as demonstrações podem ser vistas em [32]. Das obras de Apolônio que não se perderam, as mais importantes são as cônicas, que aperfeiçoaram e superaram os estudos anteriores sobre o assunto e introduziram as denominações elipse, parábola e hipérbole. Os estudos de Apolônio contribuíram não só para o desenvolvimento da geometria, mas também na astronomia e na física. Auxiliou de forma direta nos trabalhos de Copérnico, Kepler Halley, e Newton, ajudando-os a explicar fenômenos físicos como o das trajetórias dos planetas e trajetória dos projéteis.

A geometria grega, apesar do seu brilhantismo, não tinha operacionalidade. E isto só iria ser conseguido mediante a Álgebra, como princípio unificador. Somente no século XVII, a álgebra estaria razoavelmente aparelhada para uma fusão criativa com a geometria (geometria analítica). Os principais representantes da dita fusão são René Descartes (1596-1650), filósofo famoso pela sua frase: "penso logo existo", que estabeleceu relações entre curvas no plano e equações algébricas com duas incógnitas e Pierre de Fermat (1601-1665), que associou equações a curvas e superfícies. Embora as idéias de ambos fossem relacionadas à redução da geometria à álgebra, os escritos de Descartes mostram sua preocupação nas construções geométricas e as possibilidades de encontrar um correspondente geométrico para as operações algébricas. Já com relação à Fermat, o uso de coordenadas surge da aplicação da álgebra da renascença a problemas geométricos da antiguidade, mostrando, desta forma, que ambos percorreram caminhos diferentes para alcançarem suas conclusões. A partir destes trabalhos, houve um grande avanço na matemática que marcou o século XVII, por permitir que esta fosse usada não apenas como simples aplicação, mas que estivesse relacionada às necessidades econômicas e tecnológicas.

Ao serem definidos na geometria analítica como lugares geométricos (Conjunto de pontos que verificam uma certa propriedade), as secções cônicas ganharam uma expressão algébrica, ampliando ainda mais sua importância e aplicabilidade.

Os estudos sobre cônicas ficaram praticamente estagnados até o século XIV, quando **Girard Desargues** (1591-1661) em seu trabalho (1639) de "como um plano se encontra com um cone", ele unifica os estudos sobre cônicas de forma similar ao que foi feito por Apolônio, porém utilizando uma "ferramenta projetiva", isto é, imaginando a cônica como uma circunferência.

Blaise Pascal(1623 - 1662) escreveu em 1639 um pequeno livro sobre cônicas, *Ensaio Sobre as Cônicas*, onde introduz o Teorema de Pascal visto abaixo:

Teorema 3.0.1 *Teorema de Pascal:*[3]
Se um hexágono é inscrito em uma cônica, então os três pontos de intersecção do prolongamento do lados opostos são colineares.

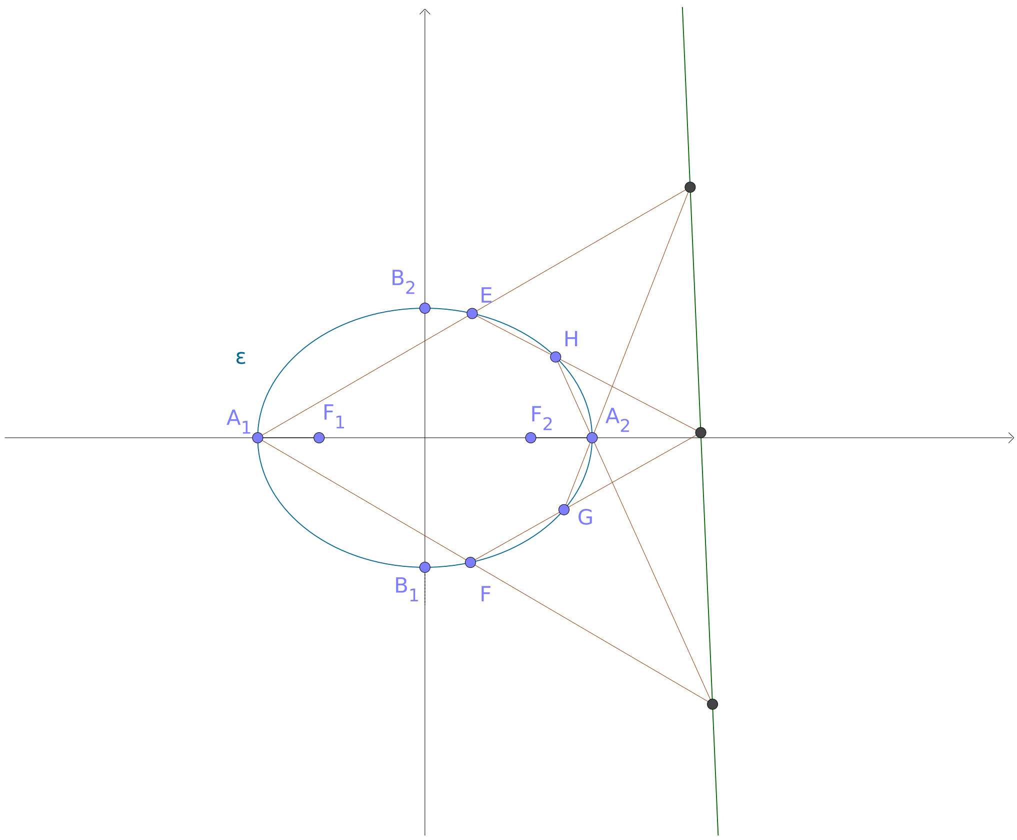


Figura 3.5: Teorema de Pascal

[3]Ressaltamos que para a validade do teorema, o hexágono não pode ter lados opostos paralelos

Philippe de La Hire (1640-1768) em 1673 foi extremamente inovador ao definir as cônicas no plano, por intermédio de seus focos, como será visto mais a frente. Exatamente como 90% dos professores trabalham hoje em dia, não apenas como a intersecção do cone com um plano. **Ruggero Giuseooe Boscovich** (1711-1787) publicou em 1754 um estudo unificado sobre as cônicas por intermédio de sua excentricidade. **Jean Victor Poncelet** (1788-1867), também apresentou trabalhos sobre cônicas mostrando com quantos pontos duas cônicas se encontram. **Germinal Pierre Dandelin** (1794-1847) fez sua contribuição ao mostrar que as definição de cônica por intermédio de seus focos é equivalente a definição dada pela intersecção de um plano que corta uma superfície cônica.

Aproveitamos para destacar que os PCNs apontam a inclusão de história da matemática, porém, o assunto é pouco abordado, às vezes sequer é tratado, em livros do ensino médio ou mesmo nos introdutórios do ensino superior. Não destacamos aqui a necessidade de contar toda a história com todos os detalhes e demonstrações. Porém, devemos elucidar aos alunos como os estudos das cônicas se desenvolveu e relacionar historicamente cada enfoque dado ao assunto.

Capítulo 4

Estudo das Cônicas

Como vimos anteriormente, os livros didáticos atuais não contribuem de forma plausível para o ensino das cônicas, deixando este conteúdo à margem do conhecimento dos alunos e não fornecendo subsídios para o professor trabalhar.

Nosso objetivo é oferecer um material de apoio que sirva como base para o professor trabalhar com o conteúdo de forma natural, desde o ensino fundamental ao final do ensino médio. Como proposta sugerimos, aqui, a introdução das cônicas de forma geométrica, através da utilização de régua e compasso (versão digital: geogebra), permitindo ao aluno já no primeiro ano do ensino médio reconhecer os lugares geométricos que representam as cônicas.

Sugerimos o início deste conteúdo no primeiro ano do ensino médio, pois acreditamos que neste ano, o aluno terá a maturidade matemática suficiente para compreender os conceitos trabalhados, bem como possuir um conjunto de ferramentas matemáticas auxiliares ao desenvolvimento e compreensão dos assuntos. A partir daí, o professor poderá trabalhar em cima destes conhecimentos em forma de problemas caracterizados ou não, que exigem do aluno um conhecimento sobre a construção geométrica das cônicas. Desta forma, o aluno terá mais desenvoltura para interpretar algebricamente as curvas cônicas.

Proporemos que no segundo ano do ensino médio o professor passe a trabalhar dando ênfase na parte algébrica das cônicas, relacionando expressões algébricas (simples) com seus respectivos lugares geométricos e aproveitando sempre o apoio do geogebra para visualização das curvas. O software, neste momento, será de grande utilidade, permitindo modificar os valores dos coeficientes, de forma a constatar as implicações destas mudanças nas curvas.

Apontamos que no terceiro ano do ensino médio sejam estudas as cônicas desde vários pontos de vista, para elucidar a relação entre estes e aproveitando sempre o apoio do geogebra para visualização das curvas.

Embora o professor tenha a possibilidade de trabalhar com o desenvolvimento das cônicas através de um enfoque geométrico, no ensino fundamental, sendo o nono ano mais precisamente (pois os alunos ja teriam maturidade matemática para trabalhar com os conteúdos), sugerimos que este conteúdo seja desenvolvido a partir do ensino médio, conforme cronograma apresentado acima, por permitir uma melhor divisão dos conteúdos; sugerimos ainda que estes tópicos sejam trabalhados no meado de cada ano, principalemte os assuntos que tratam o enfoque algébrico das cônicas, como a equação geral do 2º grau.

Vale ressaltar neste ponto que a linguagem utilizada nas definições e teoremas trabalhados no ensino fundamental e médio não necessáriamente precisa ser a mesma utilizada em cursos de graduação ou pós-graduação; conforme podemos ver no livro *"O Meu Professor* *de Matemática"* do professor E. Lima, ver [20]; as definições e os teoremas devem sempre ser formulados com as mesmas palavras, facilitando desta forma a memorização, sem grandes esforços; segundo o autor *"Decorar simplifica a vida e é, pelo menos, metade de compreender"*. Os alunos na sua grande maioria preferem definições expressas por palavras, que fazem sentido, que possuem significado para o aluno, assim faziam Euclides, Legendre entre outros. Esta metodologia não torna apenas os enunciados mais elegantes, mas também ajuda muito a retê-los na mente, segundo o autor *"ninguém pensa por meio de símbolos, mas com palavras e com as ideias que elas evocam ou representam"*. Logo devemos sempre que possível, dar preferência em utilizar as palavras ao invés de variáveis, símbolos e letras pretendidos pela matemática moderna. A seguir será apresentado o conteúdo sobre as cônicas separado por capítulos, em que, cada capítulo servirá de material de apoio ao ano que está sendo recomendado.

Capítulo 5

Um Enfoque Geométrico (1^o ano)

5.1 Circunferência

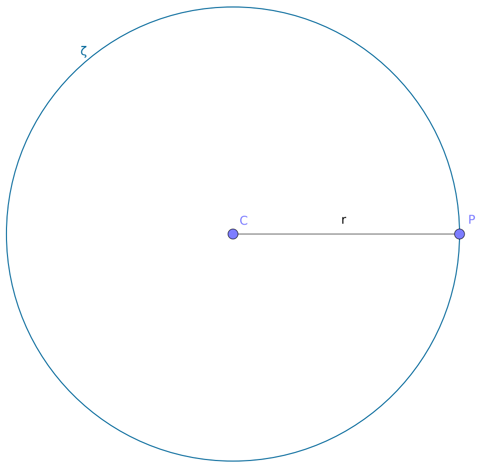


Figura 5.1: Circunferência de Centro C e raio r

Definição 5.1.1 *Uma **circunferência** ζ de **centro** C é o conjunto dos pontos P do plano π tais que $d(P, C) = r$ e $r > 0$.*

$$\zeta = \{P \in \pi | d(P, C) = r\}.$$

Embora a definição acima seja coerente, devemos sempre lembrar o que foi mencionado no início do capítulo sobre utilização de palavras nas nossas definições, quando estivermos trabalhando com conteúdos do ensino fundamental e médio. Logo, a definição poderia ser escrita sem perda de informação da seguinte forma:

Definição 5.1.2 *Circunferência é o lugar geométrico formado por todos os pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixado(Centro) no plano.*

O ponto fixado é chamado de centro da circunferência e a distância de qualquer ponto do circunferência ao centro é chamado de raio (r) da circunferência. Também chamamos de raio da circunferência a qualquer segmento que liga o centro a um ponto da circunferência.

Todo segmento de reta que une dois pontos distintos pertencentes a circunferência é chamado de corda; a qualquer corda da circunferência que passa pelo seu centro a classificamos como *diâmetro*.

Podemos ampliar de forma significativa as observações sobre circunferência com o auxílio do geogebra, com exemplos dinâmicos que possibilitam ao aluno gerar suas próprias construções, de forma rápida e, principalmente, com baixo esforço para alterar suas características. Temos como exemplo o modelo apresentado na figura 5.2 em que o aluno pode alterar o tamanho do raio da circunferência de forma dinâmica. Na seção 5.6.1, serão exibidas algumas atividades que auxiliam os alunos na compreensão destas caractéristicas, através de construções como a que consta na figura 5.2.

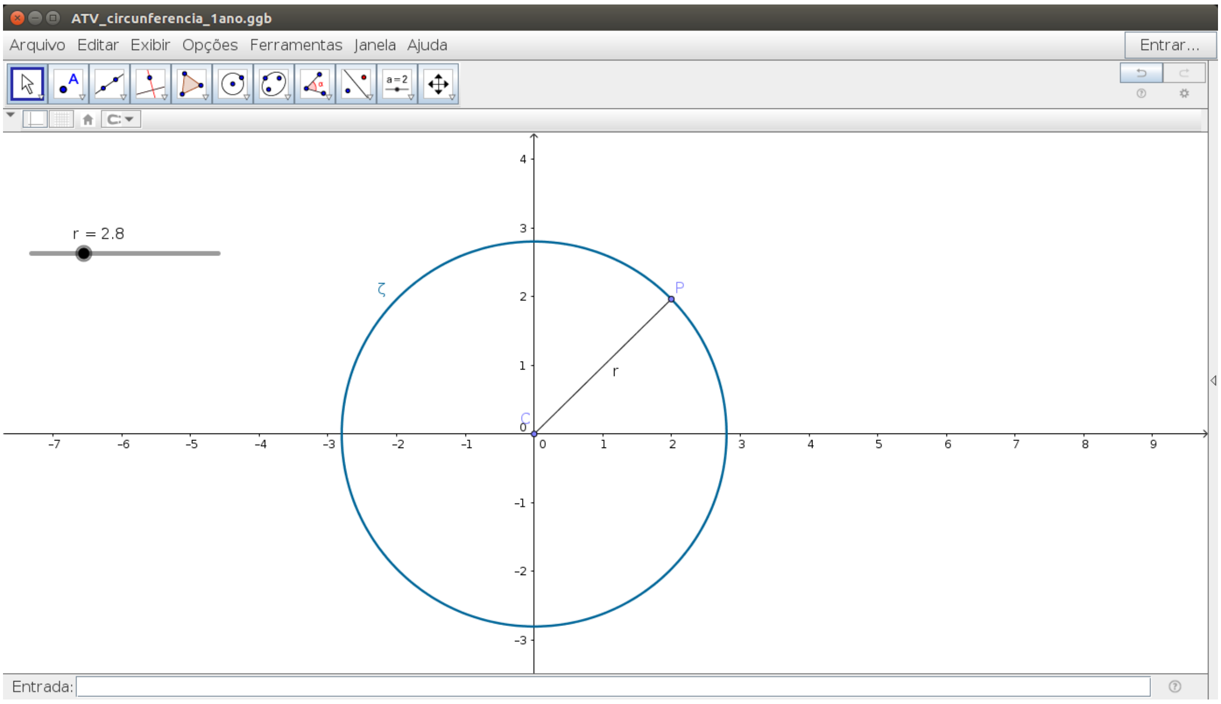


Figura 5.2: Modelo de atividades no geogebra

5.2 Elipse

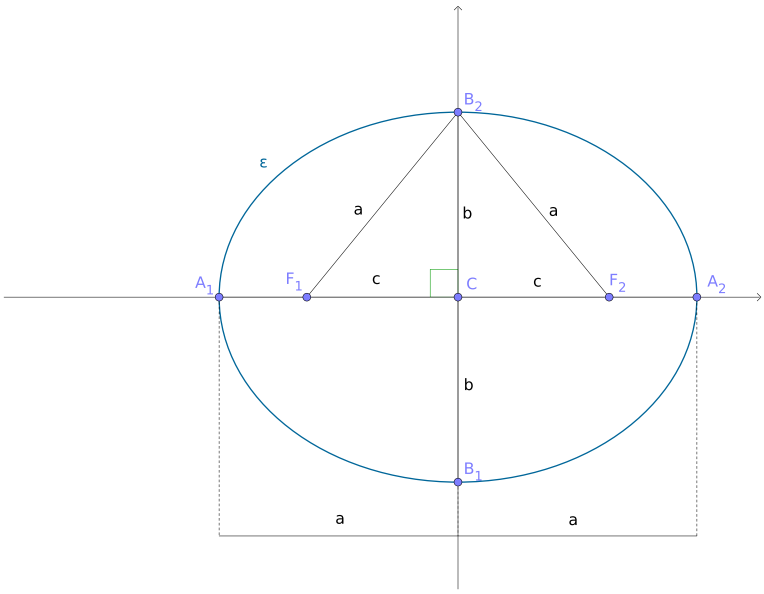


Figura 5.3: Elipse

Definição 5.2.1 *Uma* ***elipse*** ε *de* ***focos*** F_1 *e* F_2 *é conjunto dos pontos* P *do plano* π*, cuja soma das distâncias a* F_1 *e* F_2 *seja igual a uma constante* $2a > 0$*. Tal constante é maior que a distância entre os focos* $2c \geq 0$*. Ou seja, sendo* $d(F_1, F_2) = 2c$*, deve-se verificar que* $c < a$*.*

$$\varepsilon = \{P \in \pi | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \text{ e } d(F_1, F_2) = 2c, \text{ com } c < a\}$$

Equivalentemente, temos:

Definição 5.2.2 *Uma* ***elipse*** *é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano tais que, a soma de suas distâncias a dois pontos fixos seja constante e maior que a distância entre estes dois pontos; estes dois pontos fixos são chamados de focos da elipse.*

A seguir listamos os principais elementos que podemos encontrar na elipse (ver figura 5.3):

- F_1 e F_2 são os focos
- A_1, A_2, B_1 e B_2 são os vértices
- $|A_1A_2| = 2a$: eixo maior(distância entre os pontos A_1 e A_2).
- $|B_1B_2| = 2b$: eixo menor(distância entre os pontos B_1 e B_2).
- $|F_1F_2| = 2c$: distância focal(distância entre os pontos F_1 e F_2)
- C é o centro da elipse e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$
- a é a distância do semi-eixo maior
- b é a distância do semi-eixo menor

- c é a semidistância focal
- $\triangle CF_1B_1$ e $\triangle CF_2B_2$ são retângulos em C com hipotenusa de medida a

Relação Fundamental
Na figura 5.3, aplicando pitágoras ao triângulo CF_2B_2, retângulo em C, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Observações

1. De acordo com a teoria atômica de Bohr, num átomo, os elétrons descrevem órbitas elípticas em torno do núcleo.
2. Da mesma forma que a terra apresenta uma trajetória elíptica em torno do sol que é um dos focos, também a lua em torno da terra e os demais satélites em relação a seus respectivos planetas apresentam o mesmo tipo de comportamento.
3. O cometa Halley segue uma órbita elíptica, tendo o sol como um dos focos.
4. No caso em que $F_1 = F_2 = F$ a elipse pode ser considerada uma circunferência, pois

$$d(P,F) = \frac{1}{2}(d(P,F_1) + d(P,F_2)) = \frac{1}{2}2a = a$$

.

De forma análoga ao que fizemos com a circunferência, podemos ampliar de forma significativa as observações sobre elipse com o auxílio do geogebra, com exemplos dinâmicos que possibilitam ao aluno gerar suas próprias construções, de forma rápida e principalmente com baixo esforço para alterar suas características, temos como exemplo o modelo apresentado na figura 5.4, em que o aluno pode alterar o tamanho do semi-eixo maior ou da semidistância focal da elipse de forma dinâmica. Na seção 5.6.2, serão exibidas algumas atividades que auxiliam os alunos na compreensão destas caractéristicas, através de construções como se demonstra na figura 5.4.

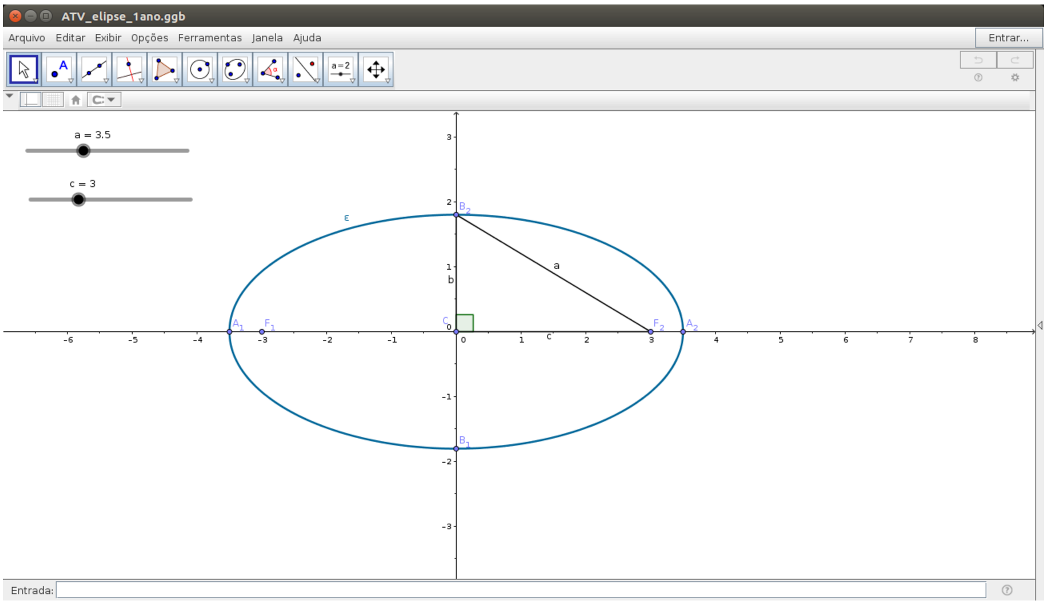


Figura 5.4: Modelo de atividades no geogebra

5.3 Parábola

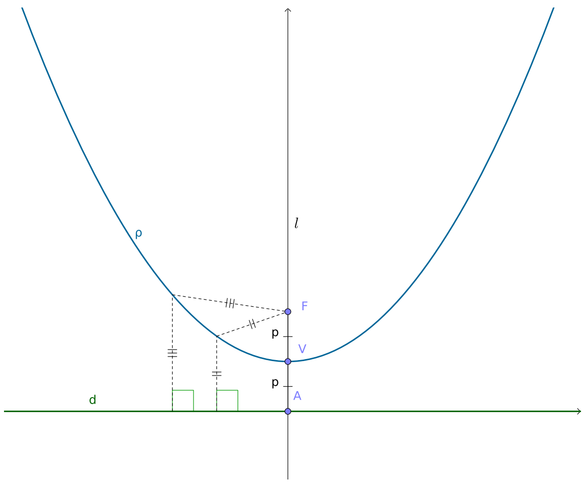


Figura 5.5: Parábola

Definição 5.3.1 *Seja d uma reta e F um ponto não pertencente a d no plano π. A **parábla** ρ de **foco** F e **diretriz** d é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d.*

$$\rho = \{P \in \pi | d(P, F) = d(P, d)\}.$$

Em outras palavras,

Definição 5.3.2 *Uma **parábola** é o lugar geométrico do plano formado pelos pontos equidistantes de uma reta e um ponto não pertencente a esta reta.*

A seguir listamos os principais elementos que podemos encontrar na parábola, ver figura 5.5:

- F é o foco.
- d é a reta diretriz da parábola.
- l é a reta focal da parábola e contém o foco F, e é perpendicular à reta diretriz.
- V é o vértice da parábola, tal que sendo o ponto A a intersecção da reta diretriz com a reta focal, V é ponto médio do segmento $\overline{AF}$.
- $2p = d(d, F)$ é o parâmetro da parábola ρ tal que $d(d, V) = d(V, F)$ ver [7] p.147.

A construção de uma parábola é difícil de ser obtida utilizando régua e compasso. Neste caso devemos construí-la de forma aproximada, obtendo alguns de seus pontos, encontrando sempre o seu vértice. Para que a construção à "mão livre" seja mais precisa, optaremos aqui por encontrar alguns pontos pertencentes a parábola.

De forma análoga ao que fizemos com a circunferência e com a elipse, podemos ampliar de forma significativa as observações sobre parábola com o auxílio do geogebra, com exemplos dinâmicos que possibilitam ao aluno gerar suas próprias construções, de forma rápida e principalmente com baixo esforço para alterar suas características, temos como exemplo o modelo apresentado na figura 5.6, em que o aluno pode alterar o tamanho do raio da circunferência de forma dinâmica. Na seção 5.6.3, serão exibidas algumas atividades que auxiliam os alunos na compreensão destas características. Estas atividades estão estruturadas para levar o aluno a perceber a construção da parábola atráves de exemplos rudimentares com o auxílo do próprio corpo, ou através de atividades que utilizam barbantes, esquadros e réguas, e, por fim, através de geogebra, permitindo ao aluno perceber a importância deste último em relação às outras técnicas utilizadas; através de construções como a exibida na figura 5.6.

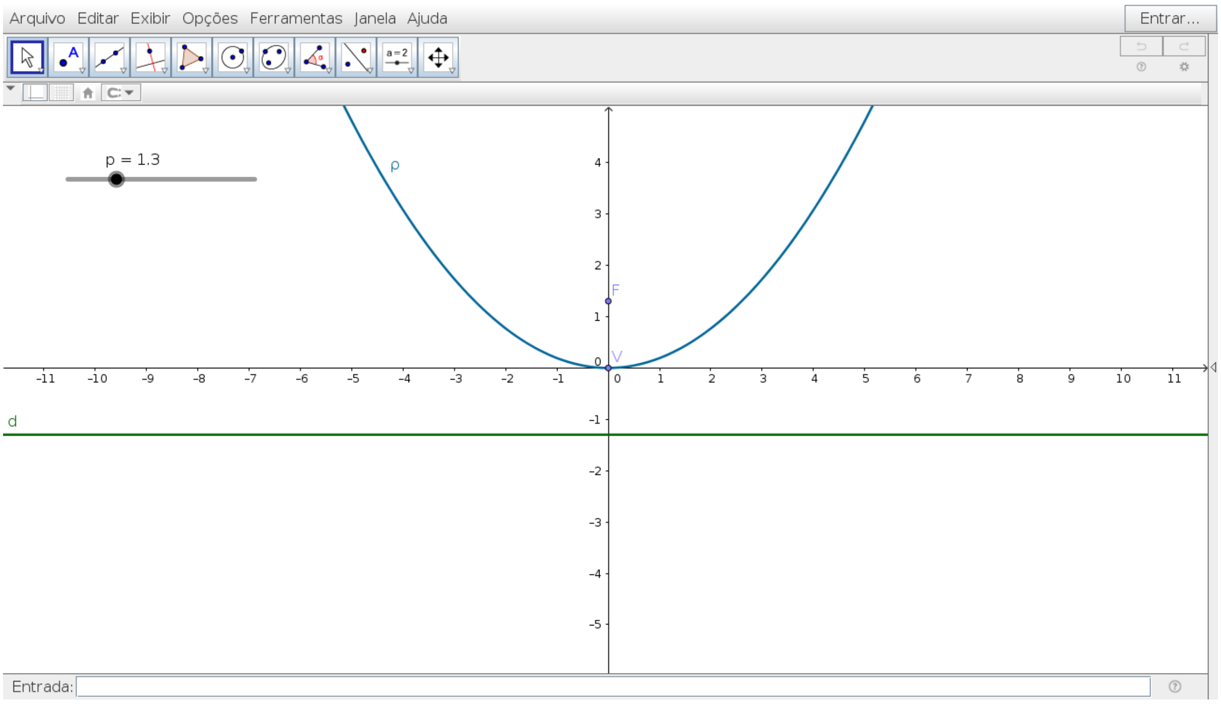


Figura 5.6: Modelo de atividades no geogebra

5.4 Hipérbole

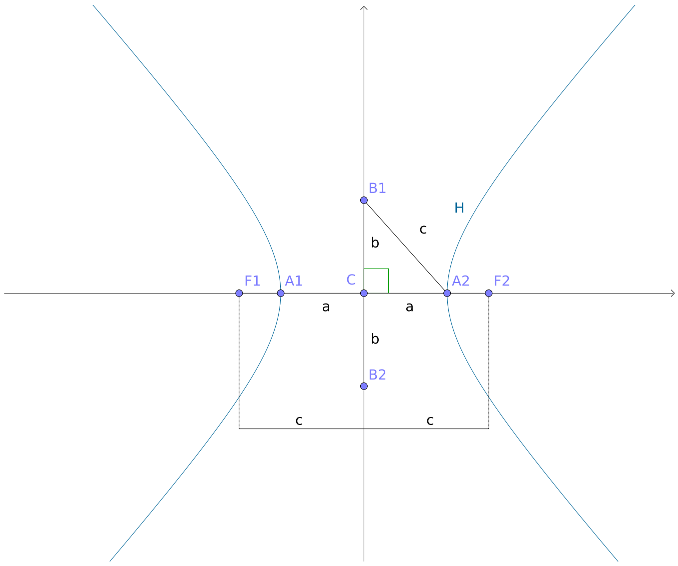


Figura 5.7: Hipérbole

Definição 5.4.1 *Uma **hipérbole** H de **focos** F_1 e F_2 é conjunto de todos os pontos P do plano π para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 seja igual a uma constante $2a > 0$, menor que a distância entre os focos $2c > 0$.*

$$H = \{P \in \pi || d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, 0 < a < c = \frac{1}{2} d(F_1, F_2).\}$$

Equivalentemente, temos:

Definição 5.4.2 *Uma **hipérbole** é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos da hipérbole, seja constante e menor que a distância entre os focos.*

A seguir listamos os principais elementos que podemos encontrar na hipérbole, ver figura 5.7:

- F_1 e F_2 são os focos.
- A_1 e A_2 são os vértices reais da hipérbole.
- B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole.
- $|A_1A_2| = 2a$: eixo focal ou eixo real(distância entre os pontos A_1 e A_2).
- $|B_1B_2| = 2b$: eixo não focal ou eixo imaginário.(distância entre os pontos B_1 e B_2).
- $|F_1F_2| = 2c$: distância focal(distância entre os pontos F_1 e F_2).
- C é o centro da hipérbole e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.
- a é a distância do semi-eixo real.

- b é a distância do semi-eixo imaginário.
- c é a semidistância focal.
- $\triangle CA_1B_1$ e $\triangle CA_2B_2$ são retângulos em C com hipotenusa de medida c

Relação Fundamental
Aplicando o Teorema de pitágoras ao triângulo retângulo CA_2B_1 , ver figura 5.7 temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ou } b^2 = c^2 - a^2$$

Observação 5.4.1 *Uma hipérbole é chamada **equilátera**, quando distância do semi-eixo real é igual a distância do semi-eixo imaginário, ou seja quando $a = b$.*

Com o auxílio do geogebra, podemos elaborar uma construção que permita ao aluno visualizar estas propriedades. Podemos também elaborar uma construção que permita ao aluno visualizar as características geométricas da hipérbole. Temos como exemplo o modelo apresentado na figura 5.8, em que o aluno pode alterar o tamanho do semi-eixo real e semidistância focal da hipérbole de forma dinâmica.

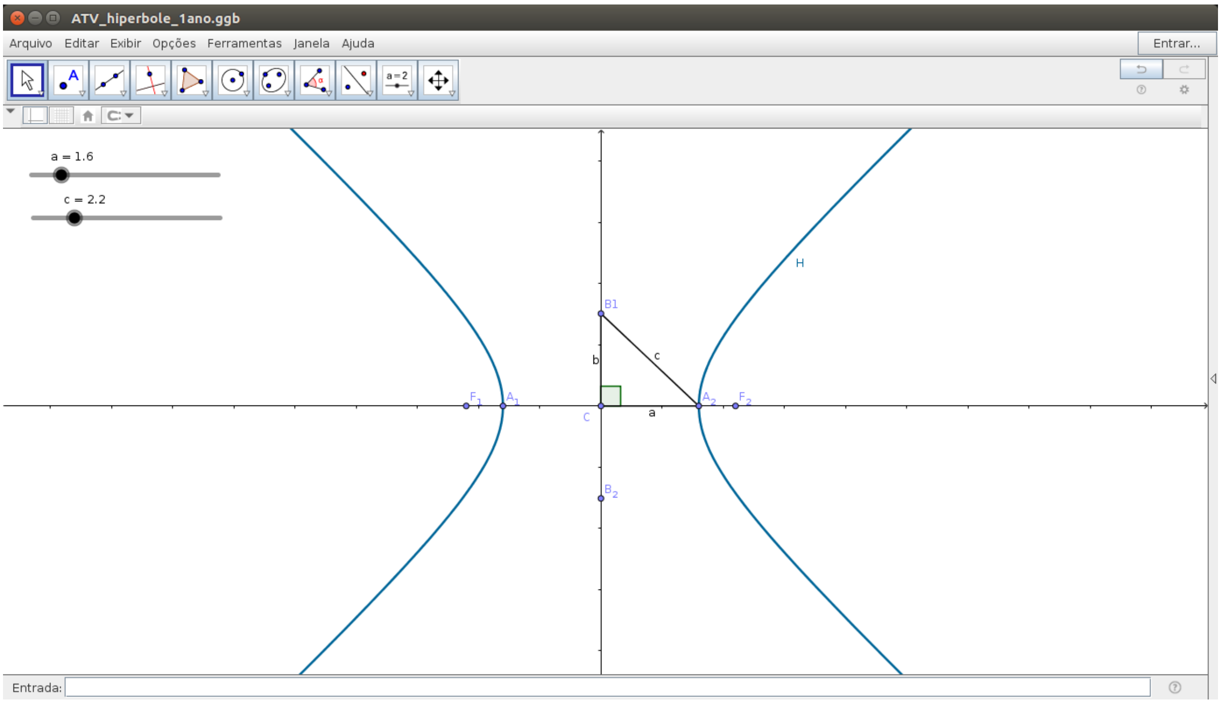


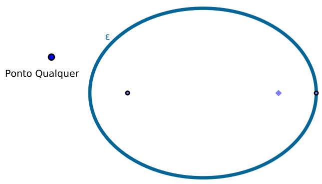
Figura 5.8: Modelo de atividades no geogebra

5.5 Translação, rotação e propriedades de reflexão das cônicas

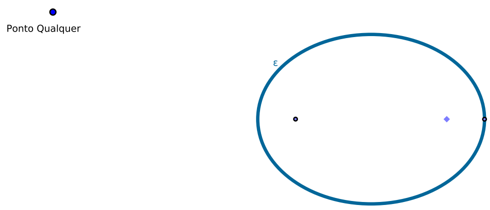
Nas próximas seções, iremos exibir para os alunos que uma cônica pode ser transladada, ou rotacionada ainda assim permancendo com suas características originais que a definem como cônica. Com o auxílio do geogebra, através de uma construção simples, é possivel modificar o posicionamento da cônica em questão com um esforço mínimo, permitindo ao aluno verificar de forma imediata que ainda se trata da mesma cônica, só que transladada ou rotacionada. Como neste momento ainda não estamos trabalhando com sistema de coordenadas, será bem mais expressiva a modificação visual de uma rotação devido ao fato de modificar a cônica em relação ao nosso sistema de referência natural; porém, do ponto de vista didático, é interessante exibir para os alunos que a nova construção está localizada em um posição diferente do plano de desenho. As ideias desenvolvidas aqui são similares para todas as cônicas e por conta disto iremos trabalhar com a elipse entendendo que seria análogo às outras cônicas.

5.5.1 Translação

Observe as figuras abaixo:



(a) Posição A

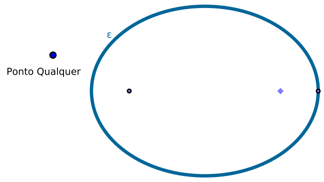


(b) Posição B

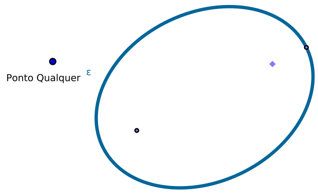
Podemos facilmente notar que, dado um ponto qualquer, como nas figuras acima, como referência, que as elipses, embora tenham seu eixo focal no mesmo sentido, estão centradas em posições diferentes no plano de desenho. Esta modificação fica mais clara com auxílo do geogebra pois pode-se com movimento do mouse posicionar a cônica em qualquer posição do plano com uma simples ação de segurar e arrastar a cônica até o local desejado.

5.5.2 Rotação

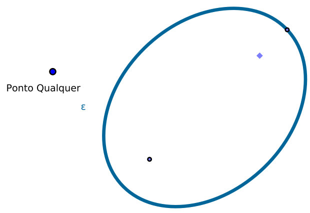
Observe as figuras abaixo:



(a) Posição A



(b) Posição B



(c) Posição C

Podemos facilmente notar que, dado um ponto qualquer como nas figuras acima como referência, embora a distância de seu centro ao ponto de referência não sofra alteração, observamos que o movimento de rotação é caracterizado pelo deslocamento que os pontos da elipse realiza em torno de seu próprio centro, modificando desta forma a inclinação da reta suporte de seu eixo focal. Esta modificação fica mais clara com auxílio do geogebra pois pode-se, com movimento do mouse, posicionar a cônica em qualquer posição do plano, com uma simples ação de segurar e arrastar a cônica até o local desejado, permitindo ainda contruir animação para que se tenha um efeito mais dinâmico.

5.6 Atividades do primeiro ano

Apresentaremos algumas atividades como material complementar para abordagem das cônicas na sala de aula. O principal interesse é levar o aluno, através de experimentações empíricas, a adquirir recursos que o permita entender a construção de uma cônica. Nas atividades podemos destacar três métodos para traçar a curvas, o primeiro que utiliza instrumentos com fios esticados criados por Kepler (1571-1630), o segundo usando régua e compasso na busca de alguns de pontos das curvas procuradas e o terceiro através do software de geometria dinâmica, sendo escolhido o geogebra pelos motivos mencionados anteriormente.

As atividades desta seção estão voltadas para que o aluno visualize as cônicas como objetos geométricos, mostrando ao aluno que cada atividade sugerida tem como resultado um lugar geométrico que pode ser desenhado com as ferramentas adequadas. Algumas das atividades são acompanhadas com suas respectivas demonstrações, outras ficaram a cargo do leitor exibir a solução desejada.

Praticamente todas as atividades podem ser adaptadas, com muita facilidade para utilização do geogebra, manusear ferramentas, e situações lúdicas para um melhor entendimento dos conteúdos apresentados. A ferramenta computacional em todas as atividades atua como apoio para uma fácil compreensão das características de cada contrução; e com um menor esforço possível, permite alterações e feedback em tempo quase instantâneo. Aconselhamos aqui sempre que possível deixar ocultos os eixos na janela de visualização e a janela de álgebra, para que o aluno tenha inicialmente uma experiência geométrica das cônicas, não as relacionando com equações ou sistemas coordenados.

5.6.1 Circunferencia

1. **Reconhecendo a circunferência.**

   (a) Solicitar que uma parte dos alunos fiquem de mãos dadas, requisitando que estes, estendam seus braços ao máximo possível, de meio a formar uma corrente fechada, de modo que automaticamente eles cosntituam uma roda.

   (b) Após conseguirem formar a roda, solicitar aos alunos que classifiquem a forma geométrica composta pelos alunos. Neste momento, o professor poderá esclarecer as diferenças entre círculo e circunferência, através de exemplos práticos, colocando alguns dos alunos dentro da circunferência, esclarecendo a diferença dos que pertencem a circunferência, pontos (P_s), daqueles que pertencem ao círculo.

   (c) Solicitar a um aluno da sala que se posicione a uma distância simétrica a todos os participantes da roda, auxiliando caso haja dúvidas; pode-se, ainda assim, solicitar a duas pessoas diferentes que façam o mesmo simultaneamente, constatando assim, através de conclusões orientadas pelo professor, que só existe um lugar que satisfaz tal pedido. Conclui-se assim, explicando sobre centro da circunferência O.

   Reflexão sobre a atividade

   - O que todos os pontos P_s por onde passa a circunferência tem em comum?
   - O que é uma circunferência?

   Elementos da circunferência nesta atividade

   - Ponto O: centro da circunferência.
   - segmento PO: raio da circunferência da circunferência.
   - segmento P_nP_m: corda da circunferência.

2. **Construção da circunferência usando um compasso, dado o centro e um de seus pontos.**

   (a) Tome o compasso com abertura de forma que a distância entre as pontas dos compassos coincidam com os pontos dados.

   (b) Com a Ponta seca do campasso sobre o ponto escolhido como centro gire o compasso deixando a ponta grafitada sempre em contato com o plano(folha), até completar uma volta.

   (c) O desenho formado será nossa circunferência de raio dado centrada no ponto escolhido.

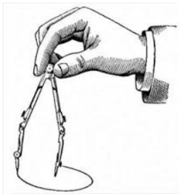


Figura 5.9: Construção da circunferência utilizando um compasso

3. **Construção da circunferência usando geogebra, dado o centro C e um de seus pontos P.**

   (a) Selecione a ferramenta círculo.

   (b) Na janela de visualização, já com os pontos exibidos, clicar com o mouse no ponto que será o centro da circunfência, e, em seguida, clicar no ponto que pertence à circunferência.

   (c) O desenho formado será nossa circunferência de raio dado centrada no ponto escolhido.

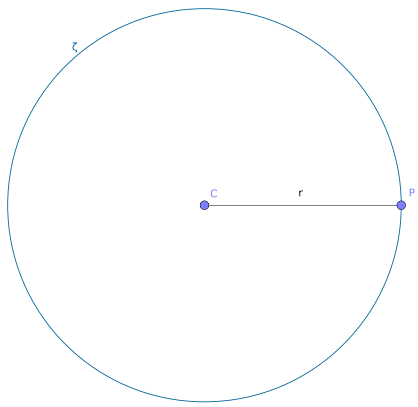


Figura 5.10: Construção da circunferência utilizando geogebra

Reflexão sobre a atividade

- Podemos, de forma imediata, modificar as características da nossa circunferência, tais como cor, espessura, tamanho, nomear, etc.
- Podemos transladar a circunferência sobre o plano com um simples arraste do mouse, alterar a posição do centro bem como do ponto que pertence à circunferência.

4. **Dada uma circunferência qualquer determinar seu centro.**
   Resolução:

   (a) Tome 3 pontos distintos pertencentes pertencentes à circunferência, sejam este pontos P_1, P_2 e P_3.

   (b) Construa as mediatrizes m_1 e m_2 dos segmentos P_1P_2 e P_2P_3 respectivamente.

   (c) Considere o ponto C a interseção de m_1 e m_2.

O ponto C é o centro da circunferência.

Reflexão sobre a atividade

- Temos que m_1 e m_2 são diâmetros da circunferência dada.
- Como todo o diâmetro passa pelo centro da circunferência, o ponto de interseção entre m_1 e m_2 é o ponto procurado.

5. **Construa uma Circunferência dados 3 pontos não colineares no plano.**
   Resolução:

   (a) Considere os 3 pontos sendo P_1, P_2 e P_3.

   (b) Construa as mediatrizes m_1 e m_2 dos segmentos P_1P_2 e P_2P_3 respectivamente.

   (c) Considere o ponto C a interseção de m_1 e m_2.

   A circunferência procurada possui centro em C e raio CP_1.

   Obs: 3 pontos não colineares determinam uma circunferência.

6. **Seja P_1P_2 uma corda de uma circunferência, e seja o segmento r com tamanho igual ao raio desta circunferência. Determine a circuferência.**
   Resolução:

   (a) Determine a reta m mediatriz do segmento P_1P_2.

   (b) Com centro em P_1 e raio r marque dois pontos C_1 e C_2 em m.

   As soluções procuradas são duas circunferências centradas em C_1 e C_2 respectivamente com raio r.

7. **Dado um ponto P_1 na circunferência ζ traçar a reta tangente que passa neste ponto.**
   Resolução:

   (a) Determine a reta m que contenha os pontos P_1 e C, onde C é o centro da circunferência dada.

   (b) Com centro em P_1 e raio $r = d(CP_1)$ marque o ponto P_2 em m tal que $P_2 \neq C$.

   (c) Com centro em P_2 e em C respectivamente determine duas circunferências com raio $s, s > r$.

   (d) Marque os dois pontos de interseção destas duas circunferências, sejam estes pontos A e B.

   A reta determinada pelos pontos A e B é a reta tangente a circunferência no ponto P_1.

8. **Dado um ponto P_1 fora da circunferência ζ traçar a reta tangente a ζ que passa neste ponto.**
   Resolução:

   (a) Determine o segmento CP_1.

   (b) Determine o ponto médio M do segmento CP_1.

(c) Centrado em M com raio MC determine uma circunferência ω.

(d) Determine os pontos de interseção entre ζ e ω sejam estes os pontos A e B.

As retas t_1 e t_2 definidas respectivamente pelos pontos: A P_1, e, B P_1 são as retas tangentes procuradas.

9. **Determinar as tangentes a uma circunferência ζ paralelas a uma reta m externa a ζ.**
   Resolução:

   (a) Traçar uma reta l perpendicular a m que passa pelo centro C de ζ.

   (b) Determinar os pontos P_1 e P_2 de intersecção entre ζ e l.

   (c) Traçar as retas m_1 e m_2 paralelas a m passando pelos pontos P_1 e P_2 respectivamente.

   As retas m_1 e m_2 sao as tangentes procuradas.

10. **Determinar a área de alcance do sinal de uma torre.**
    Considere a praça abaixo[1] como sendo o local onde será instalada a torre.

Figura 5.11: Praça Pública

- O sinal deverá atingir de forma circular a maior área possível da praça.
- Considere que a praça tenha 200m de lado.
- O sinal não deverá ultrapassar os limites da praça.

11. **Determinar a área de alcance do sinal de uma torre.**
    Considere a praça abaixo como sendo o local onde será instalada a torre.

Figura 5.12: Praça Pública

[1]Referência da figura em: https://www.google.com.br/search?biw=1600bih=805tbm=ischsa=1ei=aYMdW$_z oE4K$ $modelos + de + pra\%C3\%A7a + publicaoq = modelos + de + pra\%C3\%A7a + publicags_l =$ img.3...9873.14182.0.14305.15.13.2.0.0.0.175.1245.2j8.10.0....0...1c.1.64.img..3.0.0....0.$OHktQVhHQu8imgrc =$ $Jjm8683nr2D5VM : spf =$ 1528660857007

- O sinal deverá atingir de forma circular toda a área da praça.
- Considere que a praça tenha 200m de lado.
- O sinal deverá atingir a menor área possível, porém todas as pessoas dentro da praça deverão ser atendidas.

5.6.2 Elipse

A construção de uma elipse não é possível utilzando régua e compasso. Neste caso, devemos construí-la de forma aproximada através de concordância de arcos ou obtendo o maior número possível de seus pontos, encontrando sempre seus vértices, para que a construção a “mão livre"seja mais precisa. Optaremos aqui por encontrar a maior quantidade de pontos pertencentes à elipse.

1. **Reconhecendo a elipse.**
   (a) Posicione um aluno “Pedro” no centro da sala
   (b) Trace a reta r passando por O e paralela à parede maior da sala.
   (c) Posicione um aluno F_1 do lado direito de “Pedro” e outro F_2 do lado esquerdo de “Pedro”, sobre à reta r e distantes 3 metros de “Pedro” cada um.
   (d) Fornecer aos alunos uma corda de comprimento maior que a distância entre F_1 e F_2, solicitando que ambos segurem cada extreimidade da corda.
   (e) Solicitar que outro aluno estique a corda máximo possível, e se movimente permitindo que a corda deslize pela sua mão de forma que a corda esteja sempre esticada; conforme este aluno caminha outros alunos vão se posicionando por onde ele passar.
   (f) Destes alunos destacar como A_1 e A_2 dois alunos que coincidam sobre a reta r.
   (g) Após conseguirem fechar a figura, solicitar aos alunos que classifiquem a forma geométrica formada pelos alunos. Neste momento, o professor poderá esclarecer/reforçar que a distância da corda é invariante.
   (h) Caracterizar a figura formada como elipse, os lugares onde os dois primeiros alunos ficaram fixados como focos, o aluno O do centro como centro da elipse e os alunos A_1 e A_2 como os vértices da elipse.
   (i) Através de exemplos práticos, exibir os vértices da elipse e mostrar com ajuda de outros pedaços de corda as propriedades da elipse, classificando seus elementos, inclusive os vértices B_1 e B_2 não pertencentes à reta r.

   Reflexão sobre a atividade

   - O que tem em comum os pontos por onde passa a elipse ? O que é uma elipse?

   Elementos da elipse nesta atividade

   - Ponto “Pedro”: centro da elipse.
   - Pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 : Vértices da elipse

- Segmento A_1A_2 : eixo maior
- Segmento B_1B_2 : eixo menor
- Pontos F_1 e F_2 : Focos da elipse

2. **Construção da elipse usando um fio inextensível.**

   (a) Marque dois pontos distintos quaisquer em um plano.

   (b) Tome um fio inextensível de comprimento maior que a distância entre os dois pontos marcados e fixe cada uma de suas extremidades nesses pontos.

   (c) Com a Ponta do lápis, estenda o fio no plano mantendo-o sempre esticado ao máximo e então movimente o lápis de um lado para outro.

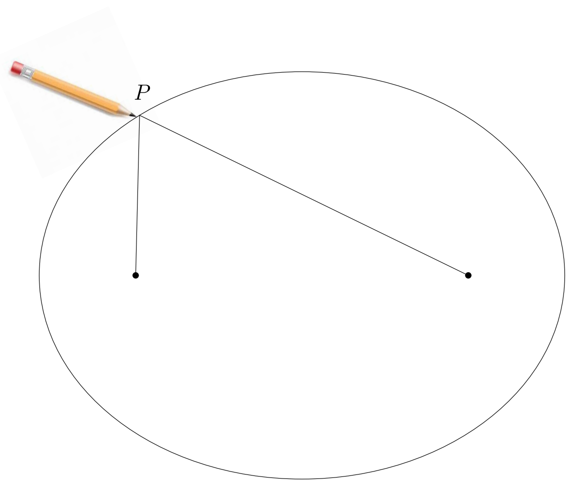


Figura 5.13: Construção da elipse utilizando um fio inextensível

Podemos destacar em sala as mesmas conclusões já apresentadas na atividade anterior.

3. **Determinação dos pontos de uma elipse utilisando régua e compasso.**
   Esta construção poderá ser trabalhada com o auxílio de um software de geometria dinâmica, em particular em todos exemplos utilizamos o geogebra.

   (a) Marque dois pontos F_1 e F_2 distintos no plano.

   (b) Trace uma semi-reta de origem em F_1 e que passe por F_2.

   (c) Marque um ponto A na semi reta F_1F_2 não pertencente ao segmento F_1F_2.

   (d) Com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência de centro F_1 e raio $d(F_1, A)$; Defina $d(F_1, A) = 2a$.

   (e) Escolha um ponto D qualquer sobre a circunferência e trace uma reta s passando pelos pontos F_1 e D.

(f) Trace o segmento F_2D.

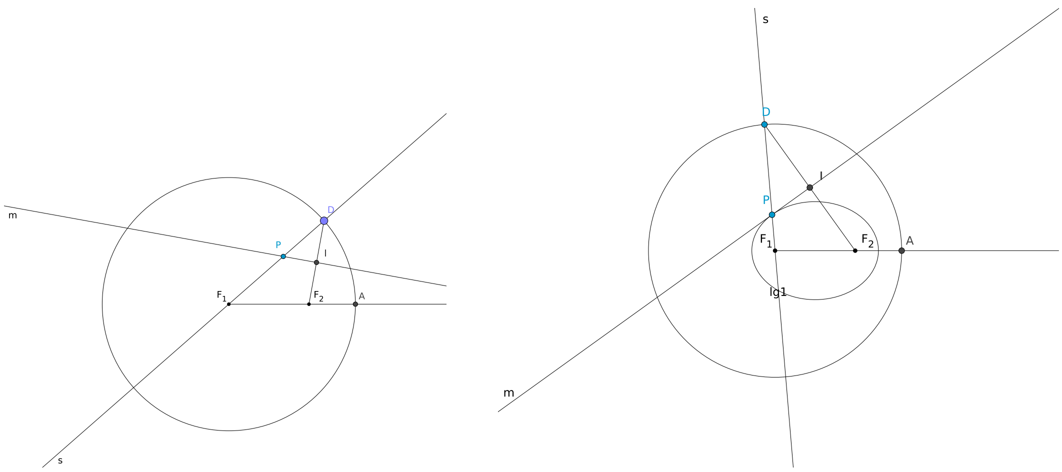
(g) Trace a mediatriz m do segmento F_2D.

(h) Considere P a interseção da mediatriz m com a reta s.

Reflexão sobre a atividade

- P é um ponto da elipse com focos F_1 e F_2.
- Como $P \in m$, P é equidistante de F_2 e D temos que $\overline{PF_2} \simeq \overline{PD}$.
- Logo $d(F_1D) = 2a$ e $d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a$ que nos garante que $P \in$ a elipse de focos F_1 e F_2.
- Para se obter todos os pontos P da elipse, basta repetir o procedimento escolhendo diferentes pontos D_s sobre a circunferência.

Assim, quando D percorrer toda a circunferência de maneira dinâmica, o lugar geométrico determinado pelos pontos P_s será uma elipse de focos F_1 e F_2, conforme ilustra a figura 5.14 abaixo:



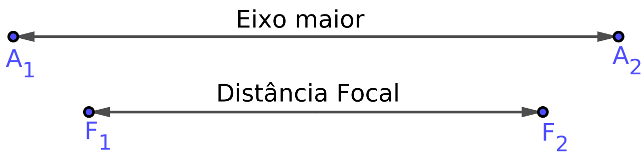
(a) Contrução por régua e compasso

(b) Lugar geométrico do pontos P_s

Figura 5.14: Construção da elipse

4. **Traçar uma elipse conhecendo-se o eixo maior e a distância focal.**
Para se construir uma elipse é necessário que determinemos seus focos. Neste caso, é valido lembrar as seguintes propriedades:

   - Os focos, além de pertencerem ao eixo maior, são equidistantes do centro.
   - Os eixos da elipse são perpendiculares e se encontram no ponto médio, assim um eixo está contido na mediatriz do outro eixo.
   - Pela definição de elipse os vértices do eixo menor estão a uma distância do foco que corresponde à metade do comprimento do eixo maior



Resolução:

(a) Tome A_1A_2 igual ao eixo maior.

(b) Trace a mediatriz de A_1A_2, identifique o ponto médio C.

(c) Marque $CF_1 = CF_2$ e que sejam metade da distância focal dada.

(d) Traçando circunferências com centros em F_1 e F_2 e raio igual a $d(A, C)$ obtem-se B_1 e B_2 na mediatriz de AB. O segmento B_1B_2 é o eixo menor da elipse.

(e) Tome um ponto qualquer E em CF_1 e com o centro em F_1 e raio $d(A, E)$ trace um arco.

(f) Com o centro em F_2 e raio BE, trace outro arco que corta o anterior nos pontos P_1 e P_2, que são dois pontos da elipse.

(g) Com o centro em F_2 e raio $d(A, E)$, trace um arco.

(h) Com o centro em F_1 e raio $d(B, E)$, trace outro arco que corta o anterior nos pontos P_3 e P_4, que são dois pontos da elipse.

Para um ponto marcado sobre o segmento CF_1, como o ponto E, obtemos quatro pontos que pertencem à elipse. Marque quantos pontos ache necessário para obter a construção aproximada.

5. **Dada uma elipse, determinar seu centro.**
Como sabemos, os pontos médios das cordas paralelas a uma direção dada definem um diâmetro e o ponto médio de cada diametro da elipse coincide com seu centro, ver [8], Proposição 7.18(Simetrias das elipses e hipérboles). Assim, para encontrarmos o centro da elipse dada, basta efetuarmos as seguintes contruções:
Resolução:

(a) Trace uma reta secante à elipse e trace uma outra reta paralela a esta que também seja secante à elipse.

(b) Ache os pontos médios das cordas obtidas pelas retas secantes. Trace a reta determinada pelos pontos médios.

(c) Ache o ponto médio C da corda obtida pela reta determinada pelos pontos médios das cordas paralelas.

O ponto C é o centro da elipse.

6. **Dada uma elipse, determinar os focos e os dois eixos.**
Um retângulo é inscritível em uma elipse se seus lados são paralelos aos eixos da mesma e seu centro coincide com o centro da elipse. Então, para resolvermos o problema basta efetuarmos as seguintes construções:
Resolução:

(a) Determine o centro C da elipse, conforme já mostrado no problema 5.

(b) Com o centro em C e raio qualquer trace uma circunferência que corte a elipse em 4 pontos consecutivos E, G, H e I.

(c) Trace o retângulo $EGHI$ onde $EG||HI$ e GH sendo uma das diagonais, e por C trace as paralelas a EG e GH, formando os diâmetros A_1A_2 e B_1B_2, onde $A_1A_2 > B_1B_2$.

(d) Com o centro em B_1 e raio $d(C, A_1)$ obtêm-se os pontos F_1 e F_2 sobre o eixo A_1A_2.

Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 serão os eixos e os pontos F_1 e F_2 serão os focos.

7. **Traçar uma tangente e uma normal a elipse no ponto P da elipse.** Resolução:

   (a) Encontre os focos F_1 e F_2 da elipse conforme atividade 6.

   (b) Determinar as retas suporte dos segmentos PF_1 e PF_2.

   (c) Determinar as bissetrizes dessas retas.

   A bissetriz interna ao triângulo F_1PF_2 será a normal e a bissetriz externa será a tangente.

8. **Construção de um alambrado elíptico.** Considere o campo de futebol conforme a figura abaixo[2]

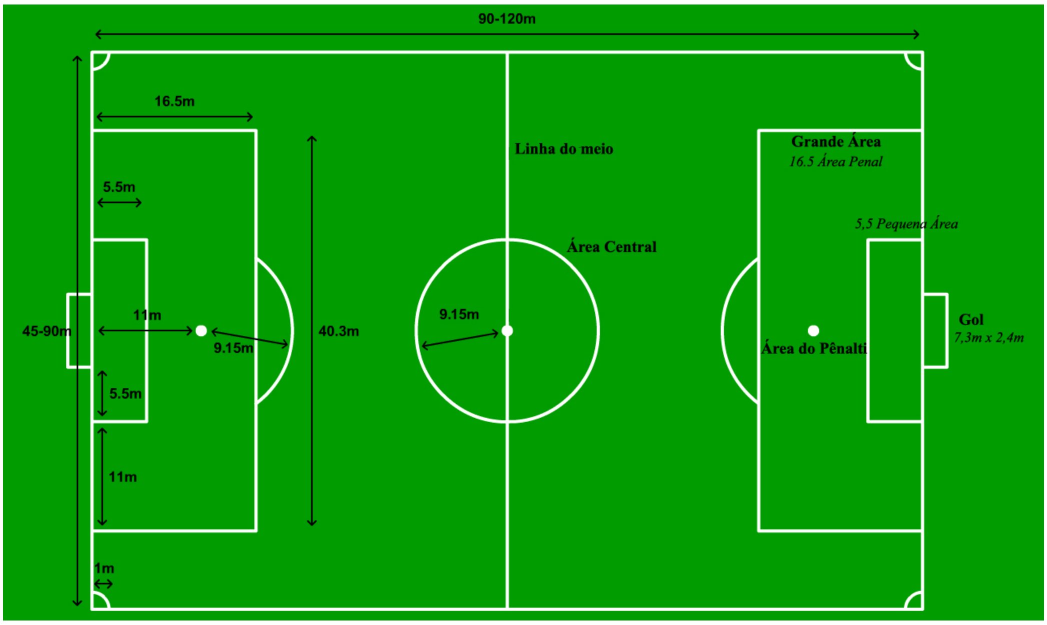


Figura 5.15: Campo de futebol

As áreas entre o alambrado e a demarcação do campo são utilizadas pelo pessoal técnico, como ponto de espera dos jogadores reservas, para aquecimento de jogadores, atendimento médico e posicionamento de equipamento de filmagens das emissoras de televisão.

- A menor distância entre o alambrado e a demarcação do campo deverá ser de 2 metros.
- O campo possui uma medida oficial[3] de 105x68 metros.
- Considere as marcas de pênalti sendo os focos desta elipse.

[2]Referência: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Campo_de_futebol_medidas.jpg
[3]As medidas oficiais de um campo variam entre 90-120m x 45-90m

9. **Construção de uma chocadeira, utilizando lâmpada e material reflexivo.** Nesta atividade desenvolva com seus alunos uma chocadeira de forma que a radiação emitida pela lâmpada seja recebida com aproveitamento máximo no ponto onde ficará o ovo.

   - Consideremos que deva existir uma distância mínima entre a lâmpada e o ovo, para evitar que este não receba uma radiação forte diretamente em um único lado. Para isto, consideraremos que a distância entre a lâmpada e o ponto onde ficaria o ovo é de 30cm.
   - A chocadeira deverá projetar a radiação emitida pela lâmpada o mais uniformemente possível.
   - A chocadeira deverá ter um tamanho máximo definido para que não haja perda de calor considerável(comprimento e largura da caixa), neste caso consideremos as dimensões da caixa da chocadeira como sendo 40cmx30cm.
   - A lâmpada e o ponto onde fica o ovo formam uma linha com mesmo sentido que o lado maior da caixa.
   - A parede refletora deve deixar a maior área livre possível no interior da chocadeira para circulaçao do calor.

   Um modelo feito pelo geogebra para representar as barreiras internas da chocadeira é dado na fig. abaixo:

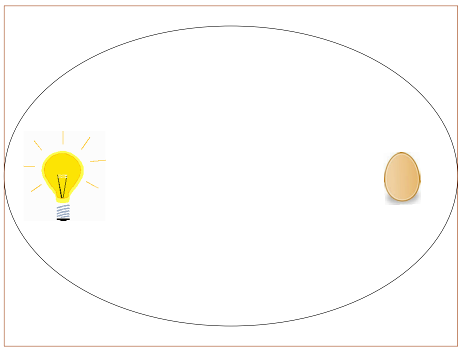


Figura 5.16: Chocadeira

   O professor pode em sala pedir para os alunos identificarem as propriedades que classifcam a figura como elíptica, assim como determinar os focos o eixo maior, eixo menor, etc.

5.6.3 Parábola

1. **Reconhecendo a parábola.**

   (a) Posicione um aluno V no centro da sala

   (b) Trace a reta r passando por V e paralela à parade maior da sala

(c) Posicione um aluno D do lado direito de V. E outro F do lado esquerdo de V; pertencentes à reta r, e distantes 1 metros de V.

(d) Trace uma reta d ortogonal a r passando por D.

(e) Recorte uma dupla de pedaços de barbante com tamanho maior que 1,5m.

(f) Coloque uma ponta do pedaço do barbante com o aluno F e construa um arco.

(g) Posicione uma das pontas do outro pedaço de barbande sobre a reta d, de forma que o barbante fique paralelo a reta r, e a outra ponta toque no arco contruido anteriormente.

(h) Marque os pontos, posicionando alunos sobre estes lugares.

(i) Repita os 3 últimos passos usando pares de pedaços de barbantes, com distância cada vez maiores como por exemplo 2m e 2,5m, 3m ....

(j) Trace uma curva que passe pelos pontos encontrados.

Reflexão sobre a atividade

- O que tem em comum os pontos por onde passa a parábola?
- O que é uma parábola?

Elementos da parábola nesta atividade

- Ponto V: Vértice da parábola
- Segmento FD: Parâmetro da parábola
- Ponto F: Foco da parábola.
- d é a reta diretriz da parábola
- r é a reta focal da parábola.

2. **Construção da parábola usando esquadro e um fio inextensível.**[4]

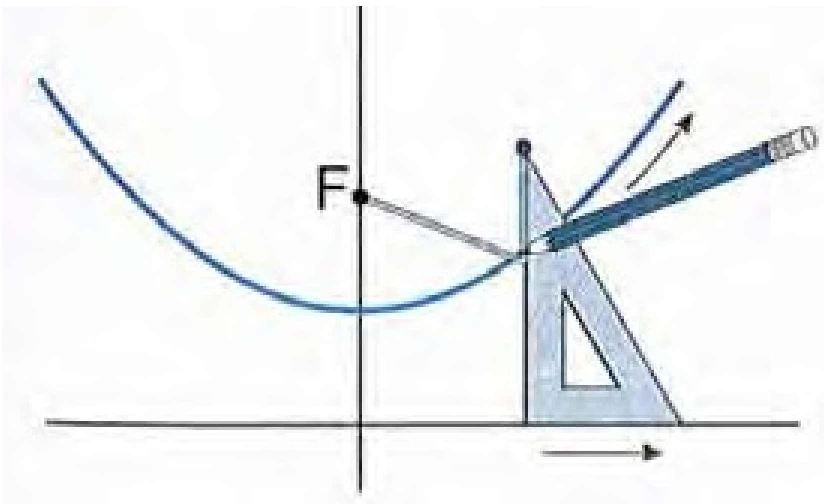


Figura 5.17: Construção da parábola utilizando um esquadro e um fio inextensível

[4]Referência da figura ver [18].

(a) Tome um esquadro na forma de um triângulo retângulo escaleno.

(b) Trace uma reta no plano.

(c) No mesmo plano marque um ponto F não pertencente a esta reta tal que a distância entre a reta e o ponto seja menor que a medida do cateto maior do esquadro.

(d) Tome um fio inextensível de forma que seu comprimento seja igual a medida do cateto maior do esquadro.

(e) Prenda uma das extremidades do fio no ponto marcado F e prenda a outra no esquadro conforme a figura 5.17.

(f) Apoie o cateto menor do esquadro sobre a reta traçada e use a ponta do lápis para manter o fio sempre esticado e em contato com o cateto maior conforme na figura 5.17.

(g) Movimente o esquadro deslizando o cateto menor sobre a reta traçada, de forma a manter o fio sempre esticado com a ponta do lápis.

(h) Os pontos da curva obtidos por esta construção pertencem a uma parábola pois, para cada ponto P sobre a curva a distância entre P e a reta traçada é igual à distância entre P e o ponto marcado.

(i) A reta traçada é a reta **diretriz** da parábola e o ponto fixado não pertencente a diretriz é o **foco**.

3. **Determinação dos pontos de uma parábola usando régua e compasso.**

(a) Trace uma reta d e marque um ponto F não pertencente a d.

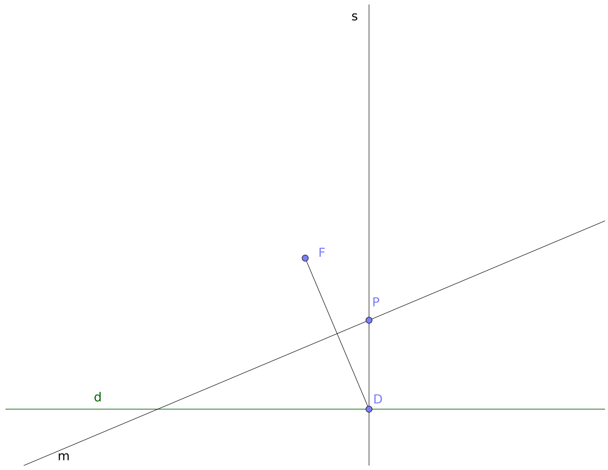
(b) Trace uma reta s perpendicular à reta d passando por um ponto D qualquer de d.

(c) Trace o segmento FD.

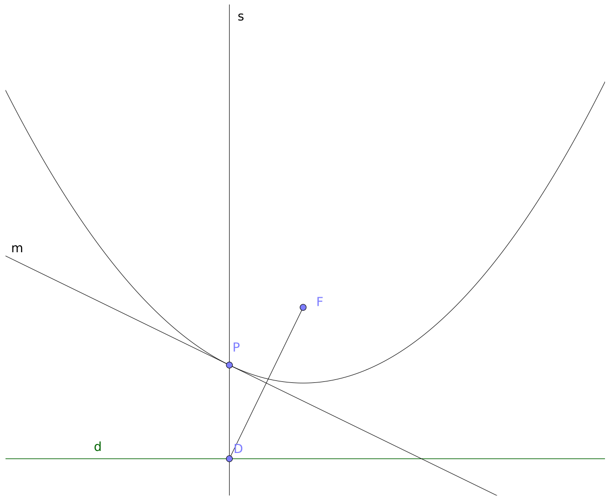
(d) Com o auxílio do compasso, desenhe a mediatriz m do segmento FD.

(e) Considere P a interseção das retas s e m.

P é um ponto da parábola de foco F e diretriz d. Para obter os demais pontos P_s da parábola basta repetir o procedimento escolhendo diferentes posições para ponto D sobre a reta diretriz d conforme ilustra a figura abaixo.



(a) Construção por régua e compasso



(b) Lugar geométrico do pontos P_s

Figura 5.18: Construção da parábola

4. **Traçar a parábola dada a diretriz e o foco.**
   Resolução:
   Seja d a reta diretriz e F o foco.

   (a) Por F trace o eixo focal perpendicular a d.

   (b) Sobre o eixo focal encontre o vértice da parábola V, sendo este o ponto médio entre d e F.

   (c) Para encontrar diversos pontos da parábola trace uma reta s paralela e não congruente ao eixo focal.

   (d) Indique por D o ponto de interseção entre s e d.

   (e) Em s marque os pontos $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_{...}\}$ no mesmo semi-plano de F tal que $d(d, V) < d(d, A_1) < d(d, A_2) < d(d, A_3) < d(d, A_{...})$.

   (f) Trace as retas $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{...}\}$ ortogonais a s pelos pontos $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_{...}\}$.

   (g) Com o raio $d(D, A_1)$ e centro em F construa um arco interceptando a reta a_1 nos pontos P_{1a} e P_{1b} que pertencem à parábola.

   (h) De forma análoga repetimos este processo para os pontos $\{A_2, A_3, A_4, A_5, A_{...}\}$ obteremos diversos pontos da parábola, bastando ligá-los.

5. **Traçar uma parábola através de dobradura de uma folha de papel manteiga.**

   Utilizar uma folha de papel-manteiga e prosseguir da seguinte forma:

   (a) Traçar uma reta diretriz d.
   (b) Marcar um ponto F fora dessa reta, que será o foco da parábola.
   (c) Tomar um ponto D da reta d.
   (d) Traçar a reta s perpendicular a reta diretriz passando pelo ponto D.
   (e) Dobrar a folha fazendo sobrepor o ponto D ao ponto F (foco).
   (f) Tracar uma reta m coincidindo com a dobra feita.
   (g) Marcar o ponto P de interseção de m com s pertencente à parábola.
   (h) Repetir o processo, tomando outros pontos sobre a reta d;
   (i) Ligar os pontos obtidos;

Figura 5.19: Dobradura de papel

   Reflexão sobre a atividade

   - Temos que para qualquer ponto D escolhido o triângulo DPF é isosceles em P.
   - Logo a distância de P a d é igual a distância de P a F.
   - Por definição o ponto P pertence à parábola de diretriz d e foco F.

6. **Traçar uma parábola através de dobradura de uma folha de papel manteiga com o auxílio do software geogebra.**

   (a) Construir uma reta horizontal d, diretriz da parábola.
   (b) Marcar o ponto F foco da parábola fora da reta d.
   (c) Marcar um ponto D sobre a reta d.

(d) Construir a mediatriz m do segmento DF.

(e) Construir a reta s perpendicular a d passando pelo ponto D.

(f) Marcar o ponto P de interseção de m com s.

(g) Selecionar a mediatriz m e habilitar seu rastro.

(h) Habilitar a animação sobre o ponto D.

Com esta atividade os alunos terão o mesmo efeito obtido na atividade 5, porém a rapidez com que a atividade é executada e a qualidade do efeito obtido com auxílio do geogebra são bem melhores conforme pode ser observado na figura abaixo.

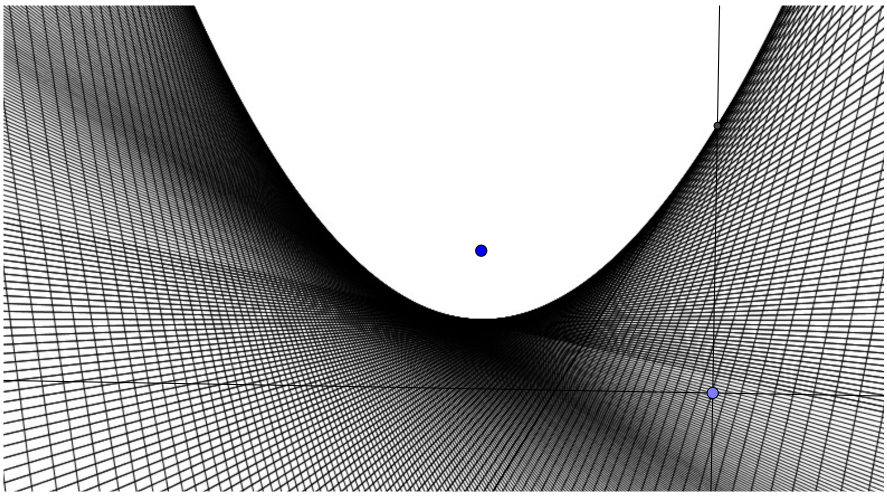


Figura 5.20: Simulação de dobradura de papel com o geogebra

7. **Traçar as retas tangente e normal à parábola num ponto P desta, conhecendo a diretriz e o foco.**

   Resolução:
   Seja P o ponto tomado na curva.

   (a) Una P a F e trace por P uma perpendicular à diretriz d interceptando-a em um ponto D.

   (b) A bissetriz interna do triângulo FPD relativa ao vértice P será a tangente pedida e a reta normal será a perpendicular à bissetriz em M.

8. **Determinar um portal Parabólico.**
   Pedro é um Estudante do ensino médio, e ficou intrigado com a curva parabólica; tão intrigado que quer construir a porta do seu quarto em forma de um portal parabólico conforme descrito abaixo.

   - Pedro possui 1,72m de altura e gostaria que quando passasse pela porta sua cabeça coincidisse com o foco do portal.
   - Pedro gostaria que houvesse um espaço aproximado de 30cm entre sua cabeça e o vértice portal.

   Ajude Pedro a Esboçar o croqui da porta (desenho).

9. **Construção de uma ponte Pênsil.**
Uma Ponte Pênsil ou suspensa (ver figura 5.21[5]), são pontes que permitem os maiores vãos, nelas o tabuleiro contínuo é sustentado por vários cabos metálicos atirantados ligados a dois cabos maiores, que por sua vez ligam-se às torres de sustentação.

Os cabos comprimem as torres de sustentação que transferem os esforços de compressão para as suas fundações.

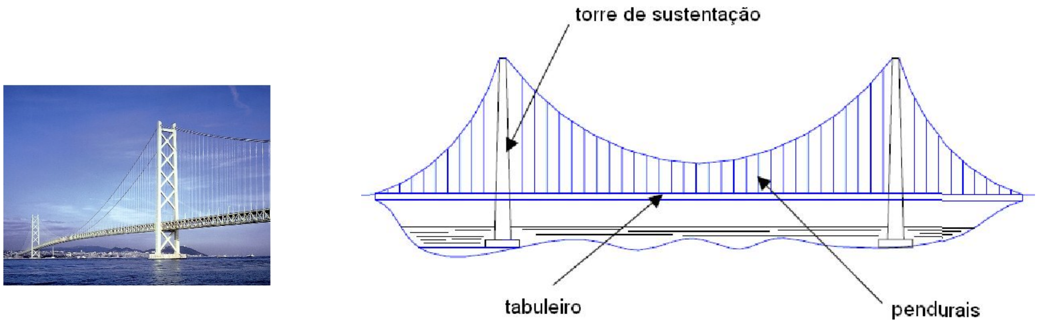


Figura 5.21: Esquema de pontes Pênseis

Nas Pontes Pênseis, os tirantes são espaçados uniformemente, então a carga da ponte é uniformemente distribuída nos cabos e estes formam uma parábola.

Apôlonio foi solicitado para ajudar a construir uma ponte Pênsil sobre um rio extenso; como ele é um estudante aplicado e obteve conhecimentos sobre as cônicas sugeriu que fosse feita uma ponte observando as seguintes condições:

- O rio em questão possui 50 metros de largura.
- As torres de sustentação deverão possuir 30m de altura e estar posicionadas a margem do rio.
- A altura livre entre o tabuleiro da ponte e o rio deverá ser de 5m.
- Considere que o tabuleiro da ponte contenha as retas diretrizes das parábolas formadas pelos cabos que ligam as torres de sustentação.

Ajude Apolônio a fazer um esboço do projeto da ponte (Desenho).

5.6.4 Hipérbole

1. **Reconhecendo a hipérbole.**

   (a) Posicione um aluno O no centro da sala

   (b) Trace a reta r passando por O e paralela à parade maior da sala

   (c) Posicione outros alunos F_1 do lado direito de O, e F_2 , do lado esquerdo de O, pertencentes à reta r e distantes 3 metros de O.

   (d) Posicione o aluno A_1 do lado direito de O e A_2 do lado esquerdo de O, pertencentes à reta r e distantes 2m do ponto O.

   (e) Recorte dois pedaços de barbante, um de 6m de comprimento e outro de 2m.

[5]Referência da figura ver [21]

(f) Coloque uma ponta do pedaço de barbante de tamanho 6m sobre F_1 e uma ponta do pedaço de tamanho 2m sobre F_2 . Trace circunferências e encontre os pontos onde a ponta de cada um dos barbantes se encontra. Marque os pontos, posicionando alunos sobre estes lugares. Eles estão na hipérbole.

(g) Repita os 2 últimos passos usando pares de pedaços de barbantes, todos com 4m de diferença do pedaço maior para o pedaço menor, por exemplo pedaços de tamanhos 8m e 4m, 10m e 6m, 12m e 8m.

(h) Trace uma curva que passe pelos pontos onde as pontas de barbante se encontram.

(i) Tente traçar uma curva simétrica à curva traçada no item anterior, repetindo os últimos 4 passos, porém colocando uma ponta do barbante de 6m sobre F_2 e uma ponta do pedaço de tamanho 2m sobre F_1 .

Reflexão sobre a atividade

- O que tem em comum os pontos por onde passa a hipérbole?
- O que é uma hipérbole?

Elementos da hipérbole nesta atividade

- Ponto O: centro da hipérbole.
- Segmento A_1A_2 : eixo real ou eixo transverso da hipérbole.
- Pontos A_1 e A_2 : vértices da hipérbole.
- Pontos F_1 e F_2 : focos da hipérbole.

2. **Construção da hipérbole usando uma haste e um fio inextensível.**[6]

(a) Marque dois pontos distintos num plano.

(b) Tome uma haste rígida de comprimento maior que a distância entre os pontos marcados.

(c) Tome um fio inextensível de forma que seu comprimento seja menor que o comprimento da haste. É necessário que a diferença entre esses comprimentos seja menor que a distância entre os pontos fixados.

(d) Prenda uma das extremidades do fio numa das extremidades da haste.

(e) Fixe a extremidade livre da haste em um dos pontos de forma que a mesma possa girar em torno desse ponto.

(f) Fixe a extremidade livre do fio no outro ponto marcado. Com o ponta do lápis aproxime o fio na lateral da haste conforme a figura 5.22.

(g) Mantendo o fio sempre junto a haste rotacione-a no plano no sentido horário até que o fio fique totalmente extendido.

(h) Rotacione a haste no plano no sentido anti-horário até que o fio fique novamente estendido.

(i) Execute novamente os ultimos 6 passos, só que agora fixando a extremidade da haste no outro ponto marcado.

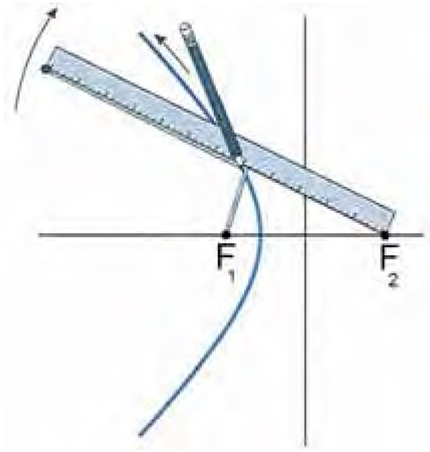


Figura 5.22: Construção da hipérbole com auxílio de haste e um fio inextensível

(j) Assim determina-se trechos de uma curva com dois ramos nos quais observa-se que todo ponto P desses ramos satisfazem a definição da hipérbole.

Podemos destacar em sala as mesmas conclusões já apresentadas na atividade anterior.

3. **Determinação dos pontos de uma hipérbole usando régua e compasso.**

(a) Marque dois pontos F_1 e F_2 distintos no plano.

(b) Trace uma semi-reta de origem em F_1 e que passe por F_2.

(c) Marque um ponto A na semi-reta F_1F_2 pertencente ao segmento F_1F_2.

(d) Com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência de centro F_1 e raio $d(F_1, A)$, defina $d(F_1, A) = 2a$.

(e) Escolha um ponto D qualquer sobre a circunferência e trace a reta s passando pelos pontos F_1 e D.

(f) Trace o segmento F_2D.

(g) Trace a mediatriz m do segmento F_2D.

(h) Considere P a interseção da mediatriz m com a reta s. Essa intersecção se dará no prolongamento a direita ou à esquerda do segmento F_1D dependendo da escolha de D.

(i) P é um ponto da hipérbole com focos F_1 e F_2 conforme a figura 5.23 abaixo.

Reflexão sobre a atividade

- $P \in m$, P é equidistante de F_2 e D.

[6] Referência da figura ver [18]

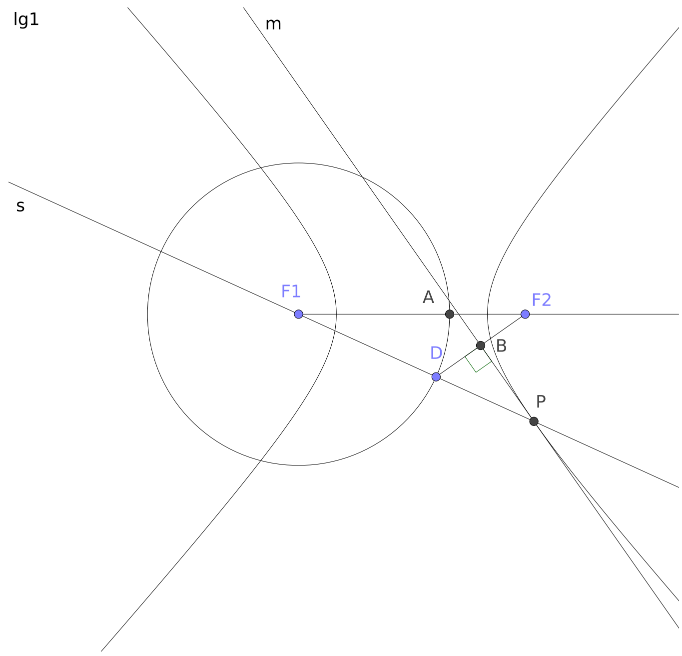


Figura 5.23: Construção da hipérbole

- Como $\overline{PF_2} \simeq \overline{PD}$ e $d(F_1D) = 2a$.

$$\begin{aligned}
d(F_1,P) - d(P,F_2) &= (d(PD) + d(DF_1)) - d(PF_2)\\
d(F_1,P) - d(P,F_2) &= (d(PD) + d(DF_1)) - d(PD)\\
d(F_1,P) - d(P,F_2) &= d(PD) + d(DF_1) - d(PD)\\
d(F_1,P) - d(P,F_2) &= d(DF_1)\\
d(F_1,P) - d(P,F_2) &= 2a
\end{aligned}$$

  que nos garante que $P \in$ a hipérbole de focos F_1 e F_2.

- Para se obter todos os pontos P da hipérbole basta repetir o procedimento escolhendo diferentes pontos D_s sobre a circunferência.

4. **Construir a hipérbole dadas as medidas do eixo real e a distância focal.**
   Resolução:
   Seja $A_1A_2 = 2a$ a medida do eixo real e $2c$ a distância focal:

   (a) Trace o ponto médio C do segmento A_1A_2 e marque sobre tal segmento os pontos F_1 e F_2 tais que $CF_1 = CF_2 = c$

   (b) Toma-se um ponto qualquer E Fora do segmento F_1F_2 e pertencente a reta determinada pelo focos F_1 e F_2.

   (c) Com o centro em F_1 e raio $d(A_1,E)$ trace um arco.

   (d) Com o centro em F_2 e raio $d(A_2,E)$, trace outro arco que corta o primeiro em M, ponto da hipérbole, pois:

   $$d(A_1,E) - d(A_2,E) = d(A_1,A_2) = 2a$$

   (e) Aprovoveitando-se o raio A_1E, faz-se centro em F_1 e F_2, e trace arcos para cima e para baixo de F_1F_2, o mesmo fazendo com o raio A_2E e centro em F_1 e F_2, obtendo-se assim quatro pontos da curva.

(f) Tomando-se outros pontos análagos ao ponto E, repeten-se as mesmas construções e pode-se obter vários pontos da hipérbole.

Unindo-se todos os pontos, obtêm-se a hipérbole.

5. **Traçar as retas tangente e normal à hiperbole no ponto P dados os focos.**

   Resolução:
   Seja P o ponto dado da curva, F_1 e F_2 os focos da hipérbole.

   (a) Una P a F_1 e F_2 e trace as bissetrizes interna e externa [7] do triâgulo F_1PF_2 no vértice P.

   A bissetriz interna é a reta tangente e a bissetriz externa é reta normal da hipérbole no ponto P.

6. **Construção de uma ponte.**

   Mário foi solicitado a dar ideias para construir uma ponte sobre o rio que corta a propriedade de sua família; como ele é um estudante aplicado e acabara de obter conhecimentos sobre as cônicas, sugeriu que fosse feita uma ponte observando as seguintes condições:

   - O rio que cruza a propriedade possui 50 metros de largura.
   - Existem duas ilhas bem no centro do rio localizadas a 50m de distância uma da outra.
   - A ponte passará entre as duas ilhas.
   - As laterais da ponte possuirão a forma de uma hipérbole onde os focos são as duas ilhas.
   - Na parte mais estreita a largura da ponte será de 10m.

   Ajude Mário a fazer um esboço do projeto da ponte.

[7] O conceito de bissetriz é visto no ensino fundamental, como exemplo ver [5] 8° ano p.166

Capítulo 6

Um Enfoque Algébrico (2^{o} ano)

Nesta seção tentaremos exibir para os alunos que a mesma estrutura apresentada e trabalhada na seção anterior pode ser vista por um outro aspecto, partindo do geométrico para o algébrico, deixando sempre claro que se tratam de representações diferentes de um mesmo assunto. Nesta parte, o software será um potencializador no entendimento do aluno, permitindo a este interpretar de forma dinâmica as traduções entre a fronteira do que é geométrico para o que é algébrico.

6.1 Circunferência

A partir da definição de circunferência, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais. Sabemos que a circuferência é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto fixo, denominado centro da circunferência (ver Definição 5.1.1).

$$\zeta = \{P \in \pi | d(P, C) = r\}$$

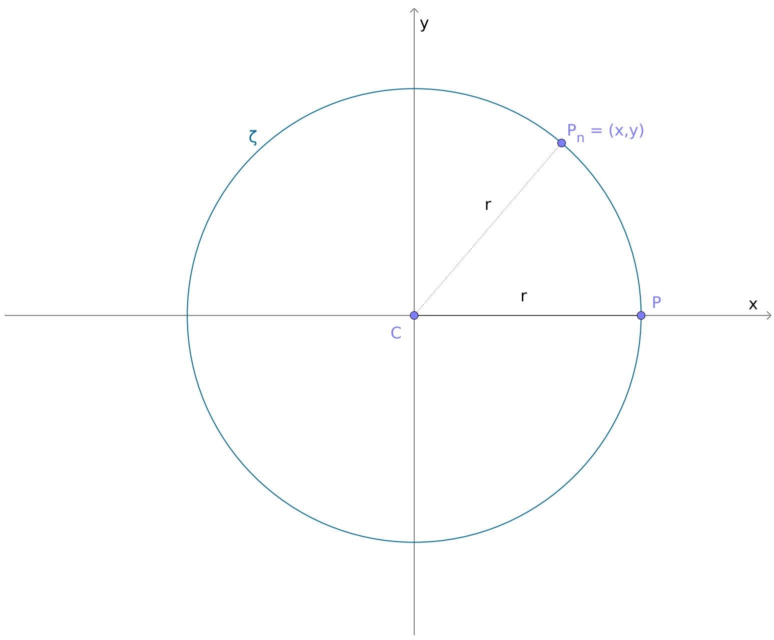


Figura 6.1: Circunferência de Centro C e raio r

Segundo a definição de distâncias (ver a equação 9.1), se o ponto C tem coordenadas cartesianas (x_0, y_0), e o ponto P tem coordenadas cartesianaos (x, y), então:

$$\begin{aligned} d_{cp} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &= r \\ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &= r \end{aligned}$$

Assim,

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \tag{6.1}$$

A equação acima é denominada equação reduzida da circunferência ou equação canônica da circunferência.

6.1.1 Equação Reduzida da circunferência com centro na origem

Quando a circunferência centrada na origem $(x_0, y_0) = (0, 0)$, temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= r^2 \\ (x-0)^2 + (y-0)^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

6.1.2 Equação geral da circunferência

A equação geral da circunferência é obtida a partir do desenvolvimento da equação reduzida 6.1:

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= r^2 \\ x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) &= 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Através da janela CAS do geogebra, podemos utilizar a equação 6.1 como modelo para verificar a equivalência das equações acima, utilizando as ferramentas fatorar e expandir. Já na janela de visualização, através da caixa de entrada, podemos digitar ou copiar da janela CAS as equações, para desta forma termos o desenho da equação, considerando os valores de x_0, y_0 e r como controles deslizantes onde poderemos de forma rápida alterar seus valores e ter de imediato o desenho modificado, permitindo assim que o aluno experimente e conjecture sobre as possíveis formas do desenho em função das características da equação. Neste ponto, é importante ratificar que são maneiras de trabalhar em cima de um mesmo objeto, visto unicamente através de desenhos no primeiro ano, agora visto como equações. O geogebra entra como elemento facilitador deste entendimento deixando claro que o desenho visualizado está relacionado com a equação digitada.

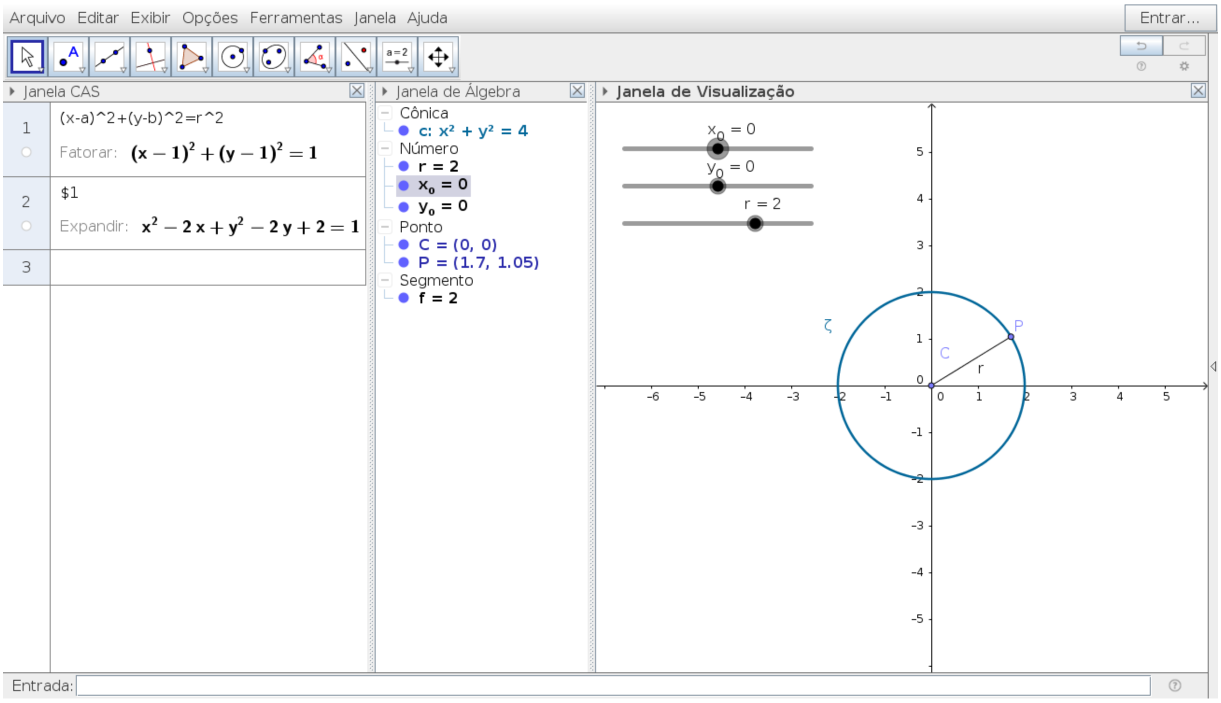


Figura 6.2: Modelo de atividades no geogebra

6.2 Elipse

A partir da definição de elipse, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais. Segundo a Definição 5.2.1, a elipse ε é o lugar geométrico dos pontos (P) do plano tais que satisfazem a equação abaixo:

$$\varepsilon = \{P \in \Pi | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, a > c = \frac{1}{2}d(F_1, F_2) > 0\}$$

6.2.1 Elipse ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Se imaginarmos a elipse centrada em um sistema ortogonal OXY onde os focos da elipse estão sobre o eixo OX e os elementos da elipse tem coordenadas definidas da seguinte forma:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0), \quad C = (0, 0), \quad A_1 = (-a, 0),$$
$$A_2 = (a, 0), \quad B_1 = (0, -b) \;\; e \;\; B_2 = (0, b)$$

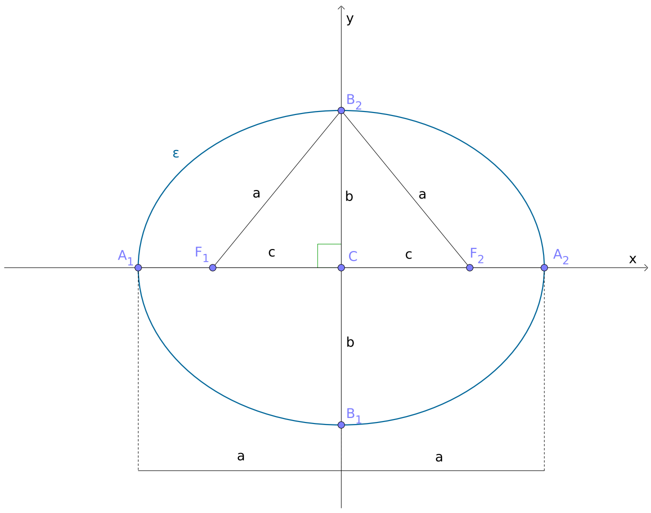


Figura 6.3: Elipse

Logo se $P=(x,y)\in\varepsilon$, temos que:

$$d(P(x,y),F_1(-c,0))+d(P(x,y),F_2(c,0)) \;=\; 2a$$

De onde,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a,\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
(x+c)^2+y^2 &= (2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2,\\
4xc &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
a^2-cx &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2},\\
(a^2-cx)^2 &= a^2((x-c)^2+y^2),\\
a^4-2a^2cx+c^2x^2 &= a^2(x^2-2xc+c^2+y^2),\\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2\\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

Da Relação fundamental da elipse $(a^2=b^2+c^2)$ temos que,

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo toda expressão por a^2b^2 temos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6.4}$$

6.2.2 Elipse transladada ε com centro C diferente da origem e reta focal paralela com o eixo OX

Vamos supor que o eixo focal é dado por $y = y_0$, que é paralelo ao eixo OX, logo os elementos da elipse tem suas coordenadas definidas da seguinte forma:

$$F_1 = (x_0 - c, y_0), \;\; F_2 = (x_0 + c, y_0), \;\; C = (x_0, y_0), \;\; A_1 = (x_0 - a, y_0),$$

$$A_2 = (x_0 + a, y_0), \;\; B_1 = (x_0, y_0 - b) \;\; e \;\; B_2 = (x_0, y_0 + b)$$

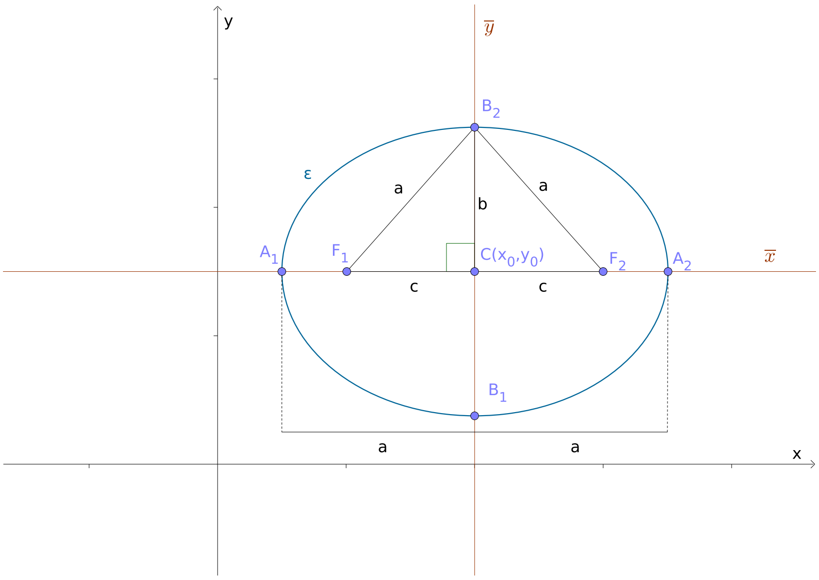


Figura 6.4: Elipse

Logo, se $P = (x, y) \in \varepsilon$, temos que:

$$d(P(x,y), F_1(x_0 - c, y_0)) + d(P(x,y), F_2(x_0 + c, y_0)) = 2a$$

Se tomarmos o sistema coordenado $\overline{OXY}$, centrado no ponto (x_0, y_0), temos que nossa elipse (continua a ser elipse) neste sistema tem eixo focal $\overline{OX}$ e é centrada na origem $\overline{0} = (x_0, y_0)$, logo, pelo que vimos anteriormente, a equação da elipse é

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

Lembrando a relação existente entre os sistemas coordenados: $\overline{x} = x - x_0$ e $\overline{y} = y - y_0$, temos que a equação da elipse é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{6.5}$$

De forma análoga à circunferência, podemos com o auxílio do geogebra explorar a transição entre o geométrico e algébrico e vice e versa, além de permitir uma fácil modificação nas características dos objetos, ainda assim possibilitando ao aluno perceber imediatamente os resultados das alterações.

6.2.3 Elipse ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Se imaginarmos a elipse centrada em um sistema ortogonal OXY, em que os focos da elipse estão sobre o eixo OY e os elementos da elipse tem suas coordenadas definidas da seguinte forma:

$$F_1 = (0, -c), \;\; F_2 = (0, c), \;\; C = (0, 0), \;\; A_1 = (0, -a),$$
$$A_2 = (0, a), \;\; B_1 = (-b, 0) \;\; e \;\; B_2 = (b, 0)$$

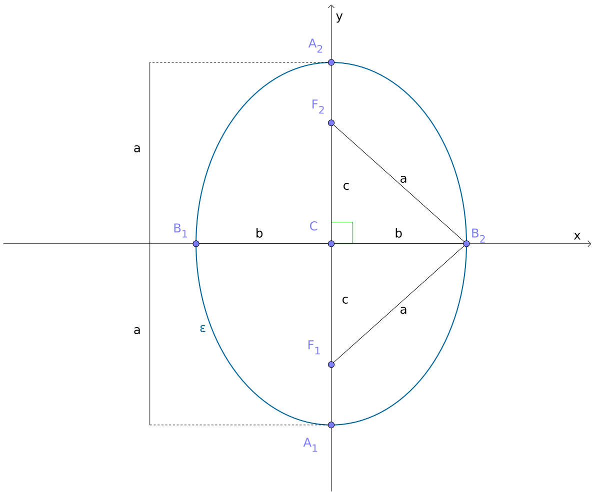


Figura 6.5: Elipse

Logo se $P = (x, y) \in \varepsilon$, temos que:

$$d(P(x,y), F_1(0,-c)) + d(P(x,y), F_2(0,c)) \;=\; 2a$$

De onde,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} &= 2a, \\
\sqrt{x^2+(y+c)^2} &= 2a - \sqrt{x^2+(y-c)^2}, \\
x^2+(y+c)^2 &= (2a - \sqrt{x^2+(y-c)^2})^2, \\
4yc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}, \\
a^2 - cy &= a\sqrt{(y-c)^2+x^2}, \\
(a^2-cy)^2 &= a^2((y-c)^2+x^2), \\
a^4 - 2a^2cy + c^2y^2 &= a^2(y^2-2yc+c^2+x^2), \\
a^4 - 2a^2cy + c^2y^2 &= a^2y^2 - a^2 2yc + a^2c^2 + a^2x^2, \\
a^4 - 2a^2cy + a^2 2yc - a^2c^2 &= a^2y^2 - c^2y^2 + a^2x^2, \\
a^4 - a^2c^2 &= (a^2-c^2)y^2 + a^2x^2, \\
a^2(a^2-c^2) &= (a^2-c^2)y^2 + a^2x^2
\end{aligned}$$

Da Relação fundamental ($a^2 = b^2 + c^2$) da elipse, temos que:

$$a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2$$

Dividindo toda expressão por a^2b^2 temos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{6.6}$$

6.2.4 Elipse transladada ε com centro C diferente da origem e reta focal paralela com o eixo OY

Vamos supor que o eixo focal é dado por $x = x_0$, que é paralelo ao eixo OY, logo os elementos da elipse tem suas coordenadas definidas da seguinte forma:

$$F_1 = (x_0, y_0 - c), \;\; F_2 = (x_0, y_0 + c), \;\; C = (x_0, y_0), \;\; A_1 = (x_0, y_0 - a),$$

$$A_2 = (x_0, y_0 + a), \;\; B_1 = (x_0 - b, y_0) \;\; e \;\; B_2 = (x_0 + b, y_0)$$

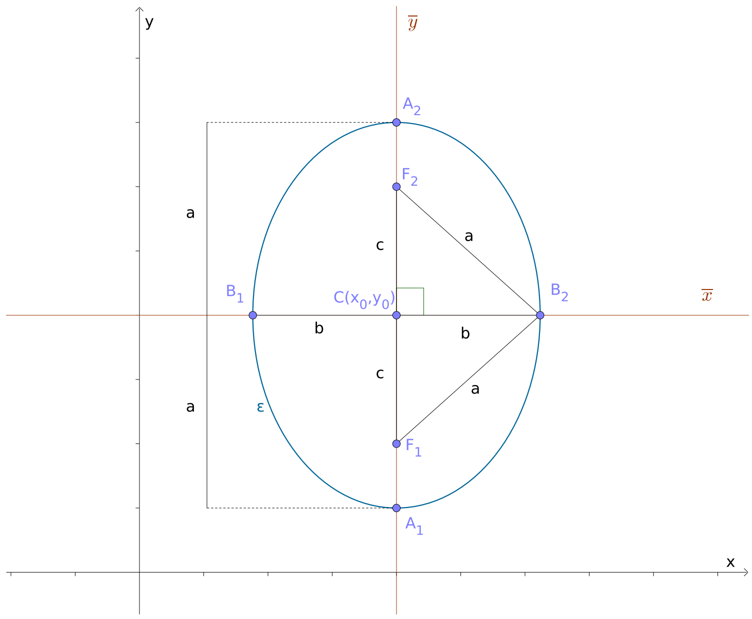


Figura 6.6: Elipse

Logo se $P = (x, y) \in \varepsilon$, temos que:

$$d(P(x,y), F_1(x_0, y_0 - c)) + d(P(x,y), F_2(x_0, y_0 + c)) = 2a$$

Se tomarmos o sistema coordenado $\overline{OXY}$, centrado no ponto (x_0, y_0) temos que nossa elipse (continua a ser elipse) neste sistema tem eixo focal $\overline{OY}$ e é centrada na origem $\overline{0} = (x_0, y_0)$, logo pelo que vimos anteriormente a equação da elipse é

$$\frac{\overline{x}^2}{b^2} + \frac{\overline{y}^2}{a^2} = 1$$

Lembrando a relação existente entre os sistemas coordenados: $\overline{x} = x - x_0$ e $\overline{y} = y - y_0$, temos que a equação da elipse é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \tag{6.7}$$

Podemos utilizar aqui uma construção idêntica à trabalhada sobre circunferência através da janela CAS e da entrada de texto da janela de visualização do geogebra.

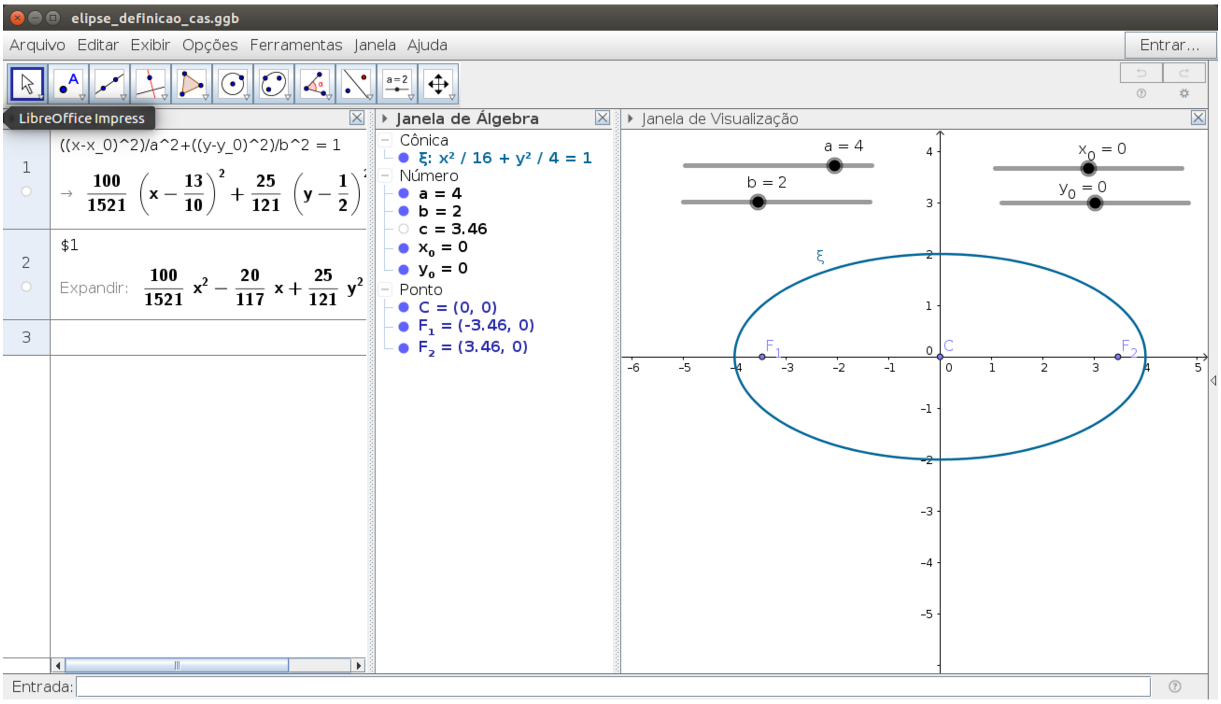


Figura 6.7: Modelo de atividades no geogebra

6.3 Parábola

A partir da definição de parábola, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais. Segundo a definição 5.3.1, a parábola ρ é o lugar geométrico dos pontos (P) do plano tais que satisfazem a equação abaixo:

$$\rho = \{P \in \pi | d(P, F) = d(P, d)\}$$

6.3.1 Parábola ρ com vértice na origem e reta diretriz d paralela ao eixo OX e concavidade [1] para cima

Se imaginarmos a parábola com seu vértice centrado em um sistema ortogonal OXY, em que os focos da parábola estão sobre o eixo OY e sua reta diretriz d seja paralela ao eixo OX, os elementos da parábola tem as seguintes coordenadas:

$$F = (0, p) \quad V = (0, 0) \ e \ \ d : y = -p.$$

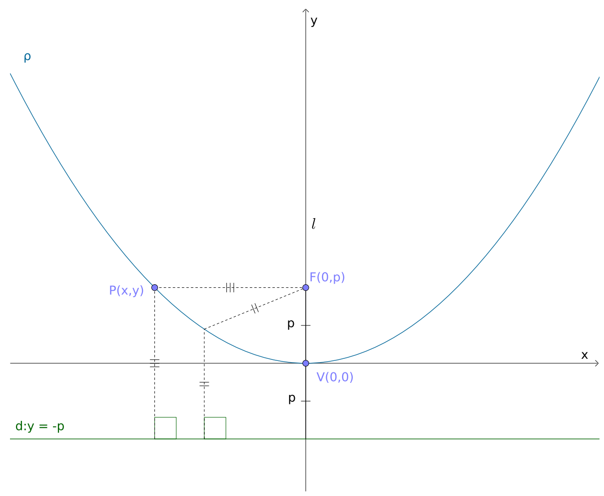


Figura 6.8: Parábola

Logo, se $P = (x, y) \in \rho$ (ver a equação 9.2), temos que:

$$d(P(x, y), F(0, p)) = d(P(x, y), d)$$

De onde,

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2 + (y - p)^2} & = & |y + p| \\ (\sqrt{x^2 + (y - p)^2})^2 & = & (|y + p|)^2 \\ x^2 + (y - p)^2 & = & y^2 + 2py + p^2 \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 & = & y^2 + 2py + p^2, \\ x^2 & = & y^2 + 2py + p^2 - y^2 + 2py - p^2 \\ x^2 & = & 2py + 2py \end{array}$$

$$x^2 = 4py \tag{6.8}$$

[1]A convavidade é a qualidade ou propriedade do que é côncavo, este conceito é trabalhado no ensino fundamental como podemos ver em [22]

6.3.2 Parábola ρ com vértice na origem e reta diretriz d paralela ao eixo OX e concavidade para baixo

Com ajuda do geogebra, vemos que a parábola, neste caso, pode ser obtida por uma reflexão da figura 6.8 entorno do eixo x.

$$F = (0, -p) \;\; V = (0,0) \; e \;\; d : y = p.$$

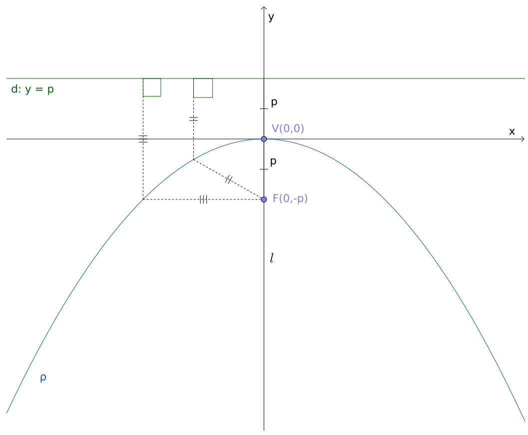


Figura 6.9: Parábola

Logo, se $(x, y) \in \rho$, então $(x, -y) \in \overline{\rho}$, onde $\overline{\rho}$ é uma parábola como a estudada anteriormente, dai

$$x^2 = 4p(-y)$$

Logo, a equação da parábola neste caso é

$$x^2 = -4py$$

6.3.3 Parábola transladada ρ com vértice $V(x_0, y_0)$ e reta diretriz d paralela ao eixo OX e concavidade para cima

Se tomarmos o sistema coordenado $\overline{OXY}$, centrado no ponto $V = (x_0, y_0)$, temos que nossa parábola (continua a ser parábola) neste sistema tem reta diretriz paralela ao eixo $\overline{OX}$ e tem vértice na origem $\overline{0} = (x_0, y_0)$. Se a parábola tem **concavidade para cima**, pelo que vimos anteriormente, os elementos da parábola têm coordenadas:

$$F = (x_0, y_0 + p) \;\; V = (x_0, y_0) \; e \;\; d : y = y_0 - p.$$

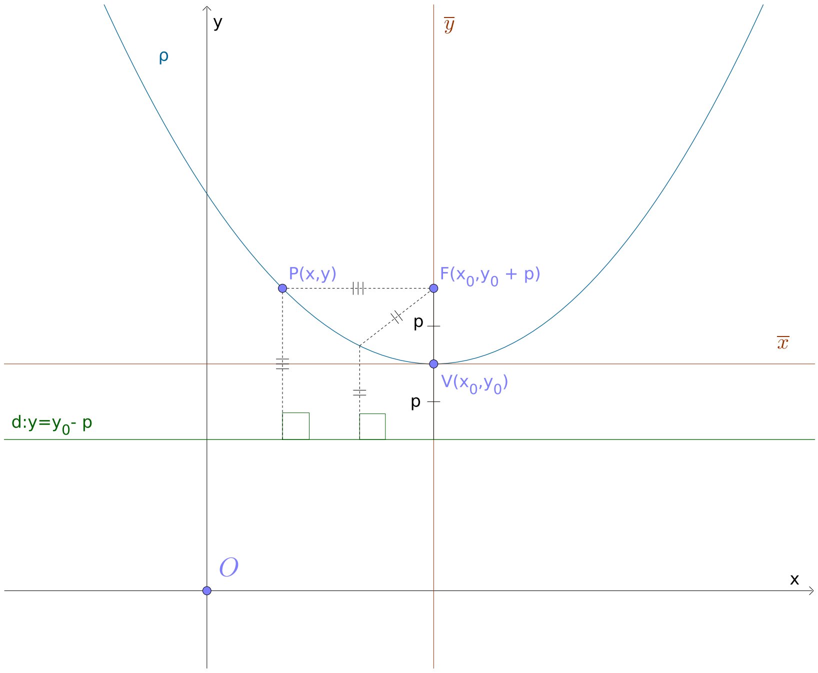


Figura 6.10: Parábola

$$\overline{x}^2 = 4p\overline{y}$$

Lembrando a relação existente entre os sistemas coordenados: $\overline{x} = x - x_0$ e $\overline{y} = y - y_0$, temos que a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \tag{6.9}$$

Se a parábola tem **concavidade para baixo**, pelo que vimos anteriormente os elementos da parábola têm as coordenadas:

$$F = (x_0, y_0 - p) \quad V = (x_0, y_0) \ e \ \ d : y = y_0 + p.$$

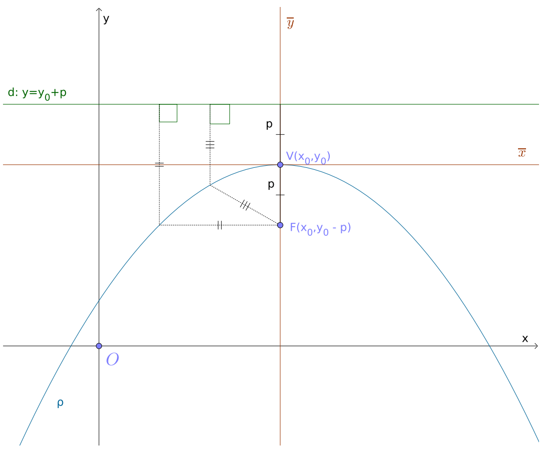


Figura 6.11: Parábola

$$\overline{x}^2 = -4p\overline{y}$$

De onde, a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0) \tag{6.10}$$

6.3.4 Parábola ρ com vértice na origem e reta diretriz d paralela ao eixo OY e concavidade para direita

Se imaginarmos a parábola com seu vértice centrado em um sistema ortogonal OXY, onde os focos da parábola está sobre o eixo OX e sua reta diretriz d seja paralela ao eixo OY, os elementos da parábola têm coordenadas:

$$F = (p, 0), \quad V = (0, 0), \ \ e \ \ d : x = -p$$

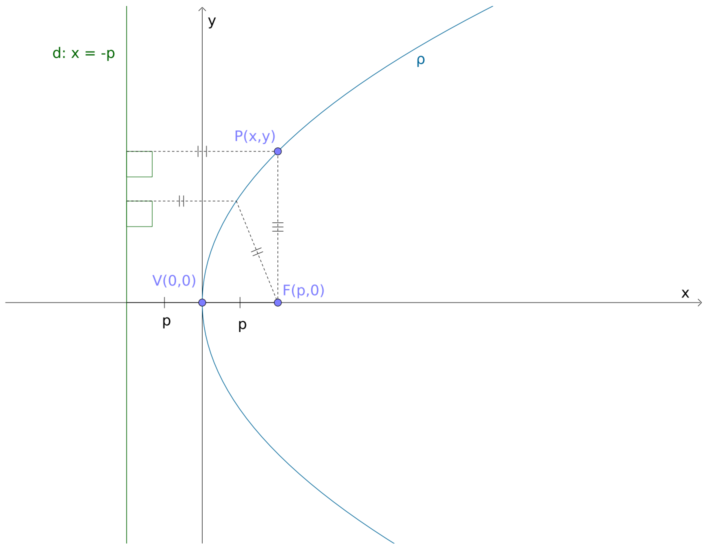


Figura 6.12: Parábola

Logo, se $P = (x, y) \in \rho$ (ver a equação 9.2), temos que:

$$d(P(x, y), F(p, 0)) = d(P(x, y), d)$$

De onde,

$$\begin{aligned}
\sqrt{y^2 + (x-p)^2} &= |x + p|, \\
(\sqrt{y^2 + (x-p)^2})^2 &= (|x + p|)^2 \\
y^2 + (x-p)^2 &= x^2 + 2px + p^2 \\
y^2 + x^2 - 2px + p^2 &= x^2 + 2px + p^2, \\
y^2 &= x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 \\
y^2 &= 2pc + 2px \\
y^2 &= 4px
\end{aligned}$$

6.3.5 Parábola ρ com vértice na origem e reta diretriz d paralela ao eixo OY e concavidade para esquerda

Com ajuda do geogebra, vemos que a parábola, neste caso, pode ser obtida por uma reflexão entorno do eixo Y.

$$F = (-p, 0) \;\; V = (0, 0) \; e \;\; d : x = p.$$

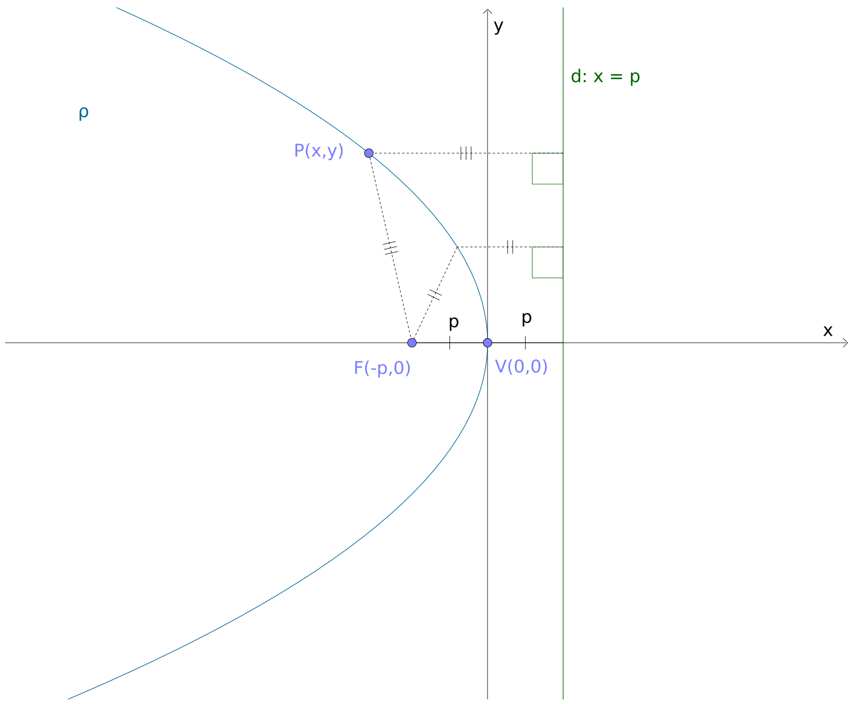


Figura 6.13: Parábola

Se $(x, y) \in \rho$, implica que $(-x, y) \in \overline{\rho}$, onde $\overline{\rho}$ é uma parábola como a estudada anteriormente, então

$$y^2 = 4p(-x)$$

Logo, a equação da parábola neste caso é

$$y^2 = -4px$$

6.3.6 Parábola transladada ρ com vértice $V(x_0, y_0)$ e reta diretriz d paralela ao eixo OY e concavidade para direita

Se tomarmos o sistema coordenado $\overline{OXY}$, centrado no ponto $V = (x_0, y_0)$, temos que nossa parábola (continua a ser parábola) neste sistema tem reta diretriz paralela ao eixo $\overline{OX}$ e tem vértice na origem $\overline{0} = (x_0, y_0)$. Se a parábola tem **concavidade para direita**, pelo que vimos anteriormente os elementos da parábola têm coordenadas:

$$F = (x_0 + p, y_0) \;\; V = (x_0, y_0) \; e \;\; d : x = x_0 - p.$$

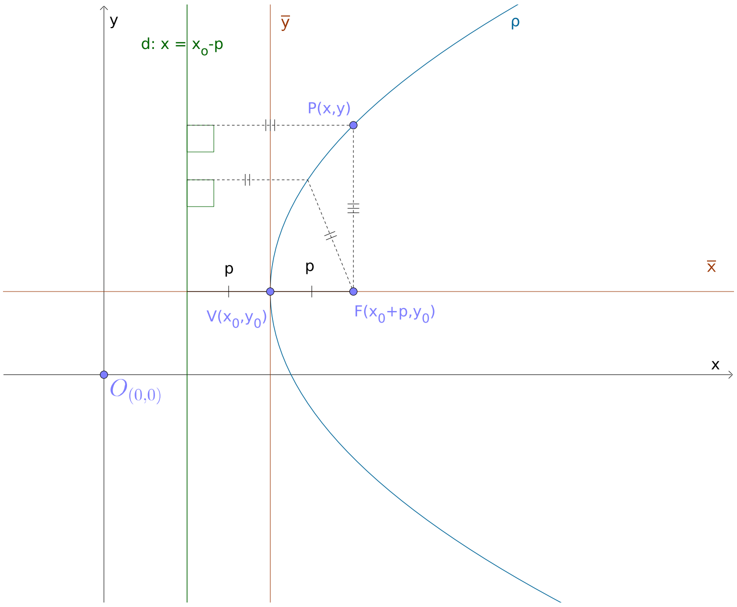


Figura 6.14: Elipse

$$\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$$

Lembrando a relação existente entre os sistemas coordenados: $\overline{x} = x - x_0$ e $\overline{y} = y - y_0$, temos que a equação da parábola é:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \tag{6.11}$$

Se a parábola tem **concavidade para esquerda**, pelo que vimos anteriormente os elementos da parábola têm coordenadas:

$$F = (x_0 - p, y_0) \;\; V = (x_0, y_0) \; e \;\; d : x = x_0 + p.$$

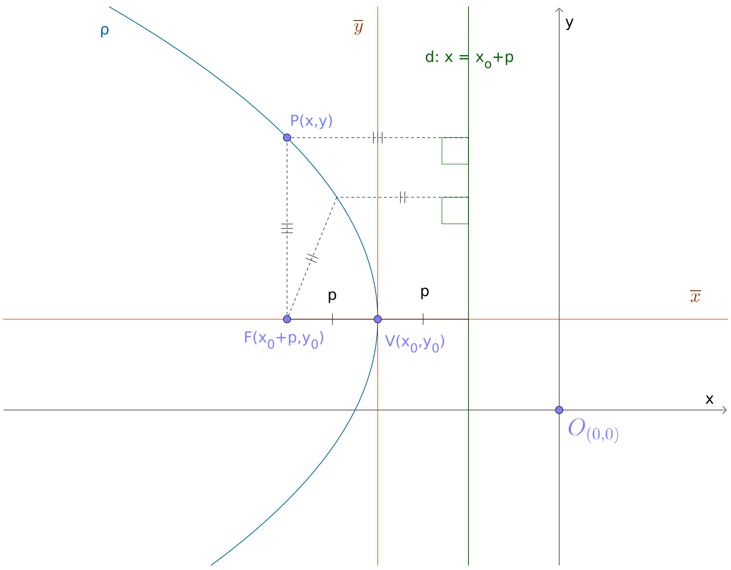


Figura 6.15: Parábola

$$\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$$

De onde, a equação da parábola é:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0) \tag{6.12}$$

Podemos utilizar aqui uma construção idêntica à trabalhada sobre circunferência através da janela CAS e da entrada de texto do janela de visualização do geogebra.

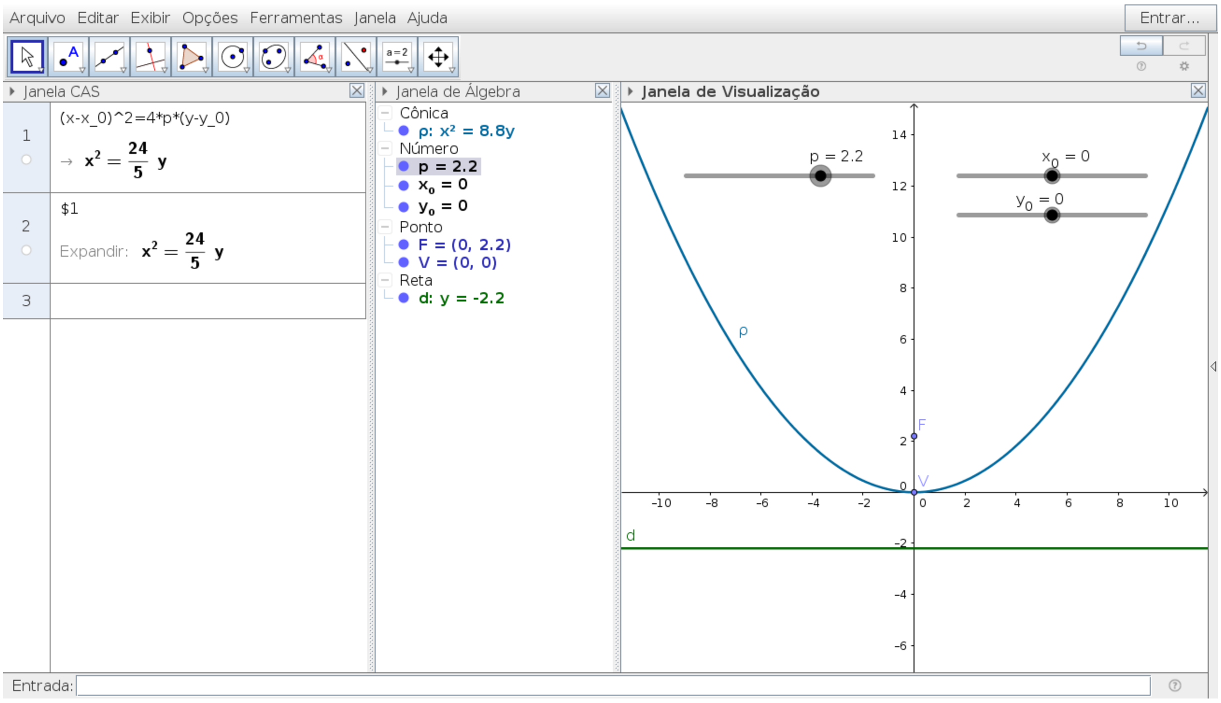


Figura 6.16: Modelo de atividades no geogebra

6.4 Hipérbole

A partir da definição de hipérbole, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para alguns casos especiais.

Segundo a Definição 5.4.1, a hipérbole H é o lugar geométrico dos pontos (P) do plano π que satisfazem a equação abaixo.

$$H = \{P \in \pi || d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, 0 < a < c = \frac{1}{2} d(F_1, F_2).\}$$

6.4.1 Hipérbole H com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Se imaginarmos a hipérbole centrada em um sistema ortogonal OXY, onde os focos estão sobre o eixo OX, seus elementos tem as seguintes coordenadas:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0), \quad C = (0, 0), \quad A_1 = (-a, 0),$$

$$A_2 = (a, 0), \quad B_1 = (0, -b) \ \ e \ \ B_2 = (0, b)$$

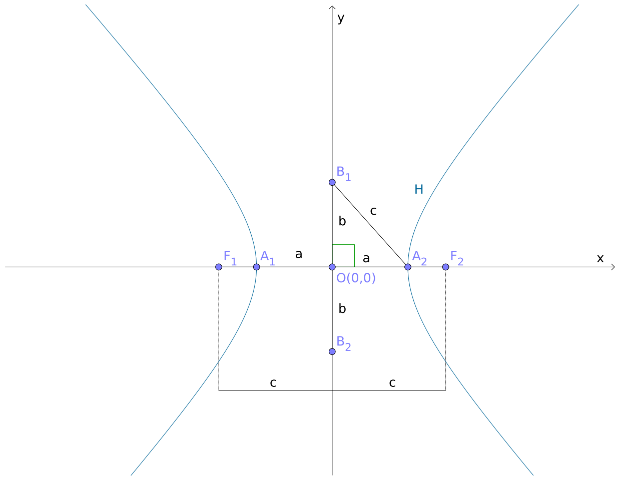


Figura 6.17: Hipérbole

Logo se $P = (x, y) \in H$, temos que:

$$|d(P(x,y), F_1(-c,0)) - d(P(x,y), F_2(c,0))| = 2a$$

De onde,

$$\begin{aligned}
|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| &= 2a, \\
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a, \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \\
(x+c)^2 + y^2 &= (\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a)^2
\end{aligned}$$

Temos:

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo por 4 e elevando novamente os membros ao quadrado:

$$\begin{aligned}
xc - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2 \cdot (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2, \\
x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
(c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2y^2 &= a^2 \cdot (c^2 - a^2)
\end{aligned}$$

Como $c^2 = b^2 + a^2$ (relação fundamental), temos que

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo toda expressão por a^2b^2 temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.13}$$

Observação 6.4.1 ***Assíntotas*** *são as retas $y = m \cdot x$, que contêm as diagonais do retângulo de lados $2a$ e $2b$, onde o coeficiente angular m destas retas é $m = \pm\frac{b}{a}$.*

Podemos utilizar aqui uma construção idêntica à trabalhada sobre circunferência através da janela CAS e da entrada de texto da janela de visualização do geogebra.

6.4.2 Hipérbole transladada H com centro $\overline{O}(x_0, y_0)$ diferente da origem e reta focal paralela com o eixo OX

Se tomarmos o sistema coordenado $\overline{OXY}$, centrado no ponto (x_0, y_0), temos que nossa hipérbole (continua a ser hipérbole), possui reta focal coincidente com o eixo $\overline{OX}$ e está centrada na origem $\overline{0} = (x_0, y_0)$. Pelo que vimos anteriormente, sua equação no sistema coordenado $\overline{OXY}$ é:

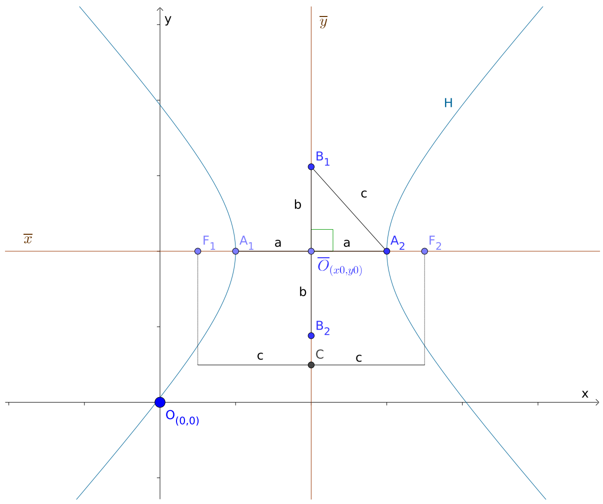


Figura 6.18: Hipérbole

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

Lembrando a relação existente entre os sistemas coordenados: $\overline{x} = x - x_0$ e $\overline{y} = y - y_0$, temos que a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{6.14}$$

6.4.3 Hiperbole H com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso os elementos da hipérbole são:

$$F_1 = (0, -c), \quad F_2 = (0, c), \quad C = (0, 0), \quad A_1 = (0, -a),$$
$$A_2 = (0, a), \quad B_1 = (-b, 0) \;\; e \;\; B_2 = (b, 0)$$

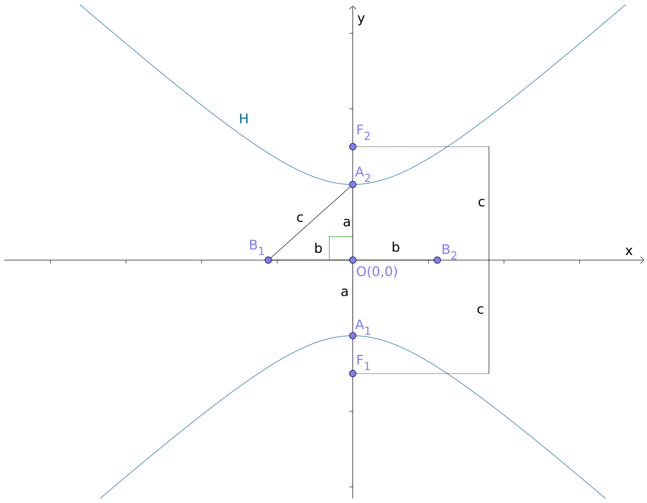


Figura 6.19: Hipérbole

Logo,

$$
\begin{aligned}
|\sqrt{(y+c)^2+(x-0)^2}-\sqrt{(y-c)^2+(x-0)^2}| &= 2a,\\
\sqrt{(y+c)^2+(x-0)^2}-\sqrt{(y-c)^2+(x-0)^2} &= \pm 2a\\
\sqrt{(y+c)^2+x^2}-\sqrt{(y-c)^2+x^2} &= \pm 2a,\\
\sqrt{(y+c)^2+x^2} &= \sqrt{(y-c)^2+x^2}\pm 2a\\
(y+c)^2+x^2 &= (\sqrt{(y-c)^2+x^2}\pm 2a)^2
\end{aligned}
$$

De onde,

$$4yc-4a^2=\pm 4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}$$

Dividindo por 4 e elevando ao quadrado:

$$
\begin{aligned}
yc-a^2 &= \pm a\sqrt{(y-c)^2+x^2}\\
y^2c^2-2a^2cy+a^4 &= a^2\cdot(y^2-2cy+c^2+x^2)\\
y^2c^2-2a^2cy+a^4 &= a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2+a^2x^2,\\
y^2c^2-a^2y^2-a^2x^2 &= a^2c^2-a^4\\
(c^2-a^2)\cdot y^2-a^2x^2 &= a^2\cdot(c^2-a^2)
\end{aligned}
$$

Como $c^2=b^2+a^2$ (relação fundamental), temos que:

$$b^2y^2-a^2x^2=a^2b^2$$

Dividindo toda expressão por a^2b^2 temos:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (6.15)$$

6.4.4 Hipérbole transladada H com centro $\overline{O}(x_0, y_0)$ diferente da origem e reta focal paralela com o eixo OY

Neste caso, tomamos o sistema coordenado $\overline{OXY}$ centrado no ponto (x_0, y_0), logo nossa hipérbole possui reta focal coincidente com o eixo $\overline{OY}$ e está centrada na origem

$\overline{0} = (x_0, y_0)$. Pelo que vimos anteriormente, sua equação no sistema coordenado $\overline{OXY}$ é:

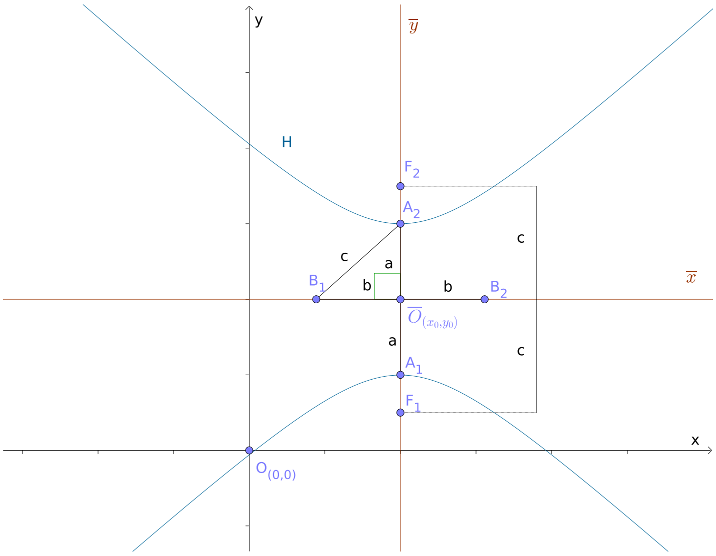


Figura 6.20: Hipérbole

$$b^2\overline{y}^2 - a^2\overline{x}^2 = a^2b^2$$

De onde,

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1 \tag{6.16}$$

Podemos utilizar aqui uma construção idêntica à trabalhada sobre circunferência através da janela CAS e da entrada de texto do janela de visualização do geogebra.

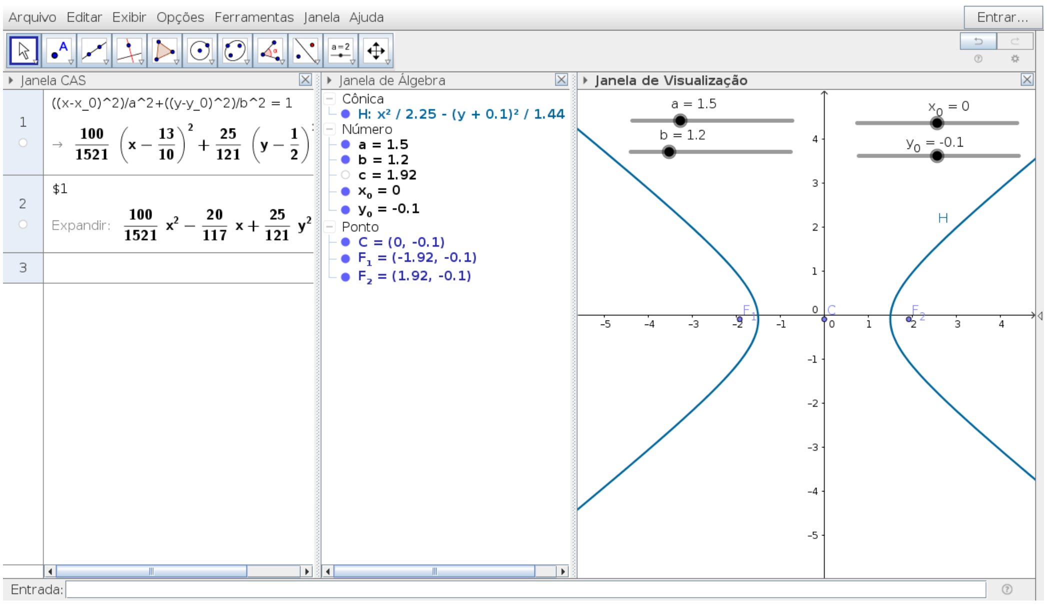


Figura 6.21: Modelo de atividades no geogebra

Podemos destacar que as cônicas estudadas em 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 podem ser representadas por uma equação do segundo grau da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{6.17}$$

onde um dos coeficientes a, b ou c é não nulo [2], e, segundo os valores de a, b e c, temos uma circunferência, elipse, parábola ou uma hipérbole; essas cônicas são obtidas a partir da equação 6.17 acima completando quadrados. Para mais detalhes ver [8] p.106

Definição 6.4.1 *Uma **Cônica degenerada** é uma equação do segundo grau a duas variáveis em que o conjunto de soluções reais é vazio ou não é uma circunferência, nem uma elipse, nem uma hipérbole e nem uma parábola* ver [8] p.107.

6.5 Atividades do segundo ano

Gostaríamos de ressaltar neste ponto, que o software de geometria dinâmica não serve como ferramenta de demonstração e sim como ferramenta de apoio; ainda assim devemos sempre que necessário exibir para o aluno o desenvolvimento algébrico da questão.

Vale ressaltar que o uso do software geogebra é para conferir as contas e nos permite de forma rápida estabelecer a equivalência com a visão geométrica abordada no ano anterior.

6.5.1 Circunferência

1. **Vamos determinar a equação da circunferência de centro na origem e raio $r = 3$.**
   Resolução:
   Neste caso em particular, como o centro da circunferência coincide com a origem, a equação é da forma $x^2 + y^2 = r^2$. Sabendo que $r = 3$, podemos escrever:

   $$x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

   Utilizando o geogebra

   (a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Círculo dados Centro Raio**".
   (b) Clique na origem dos eixos coordenados $(0, 0)$, em seguida será exibido uma caixa de diálogo para entrada do valor do raio, que neste caso seria 3.
   (c) A construção da circunferência requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de algebra.

   A principal vantagem de utilizar o geogebra é a facilidade de alterar as características da circuferência e de obter a nova equação na janela de álgebra na mesma hora.

[2] Alguns autores preferem escrever a frase "Onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$"

2. **Sendo $C(2,3)$ o centro da circunferência de raio $r = 4$, vamos determinar as equações reduzidas e geral da cicunferência.**
Resolução:
Observamos que a sequência para solução desta atividade é a mesma utilizada na atividade 1. Sendo $C(2,3) = C(a,b)$ e $r = 4$. A equação reduzida é dada por:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2,\\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 4^2,\\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 16\end{aligned}$$

A equação geral é dada por:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2 - r^2 &= 0,\\ x^2 + y^2 - 2\cdot x\cdot 2 - 2\cdot y\cdot 3 + 2^2 + 3^2 - 4^2 &= 0,\\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 + 9 - 16 &= 0,\\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 &= 0\end{aligned}$$

Utilizando o geogebra

(a) Com o geogebra exibindo a janela de álgebra e a janela de visualização, selecionar a ferramenta "**Círculo dados Centro e Raio**".
(b) Cliclar com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto $(2,3)$. Em seguida será exibido uma caixa de diálogo, onde se pode colocar o valor do raio, que neste caso seria 4.
(c) A construção da circunferência requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.
(d) Para alterar a visualização da equação reduzida pela equação geral, basta clicar com o botão direito do mouse sob a circunferência e selecionar a opção requerida; que sua equação aparece de imediato na janela de álgebra.

3. **Sendo $C(2,3)$ o centro da circunferência e $P = (1,1)$ um ponto pertencente à circunferência, vamos determinar as equações reduzidas e geral da circunferência.**
Resolução:
Sendo $C(2,3) = C(a,b)$ e $P = (1,1)$. Temos que distância $d(C,P) = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2\\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= (\sqrt{2})^2\\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 2\end{aligned}$$

A equação geral é dada por:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2-2xa-2yb+a^2+b^2-r^2 &= 0,\\
x^2+y^2-2\cdot x\cdot 2-2\cdot y\cdot 3+2^2+3^2-(\sqrt{2})^2 &= 0,\\
x^2+y^2-4x-6y+4+9-2 &= 0,\\
x^2+y^2-4x-6y-11 &= 0
\end{aligned}
$$

Utilizando o geogebra

(a) Selecionar a ferramenta "**Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**".
(b) Clicar com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto $(2,3)$, em seguida sobre o ponto$(1,1)$.
(c) A construção da circunferência requerida se dara de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de algebra.

4. **Determine o centro C e o raio r da circunferência ζ definida pela equação geral: $x^2+y^2-2x-2y-7=0$.**
Solução
Sendo a equação geral da circunferência definida em 6.3 por:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

Temos que $2ax=2x \Rightarrow a=1$ e $2by=2y \Rightarrow b=1$ logo C tem coordenada $(1,1)$. Além disso $a^2+b^2-r^2=-7$, assim:

$$
\begin{aligned}
(1+1-r^2) &= -7,\\
(2-r^2) &= -7,\\
-r^2 &= -7-2\\
-r^2 &= -9,\\
r^2 &= 9
\end{aligned}
$$

Então $r=\pm 3$, como r é a distância do centro C um ponto qualquer P da circunferência ζ, e a distância entre dois pontos é sempre positiva, concluimos que $r=3$. Com o auxílio do geogebra, digitando na caixa de entrada a equação da circunferência automaticamente vai ser exibida sua construção e na janela de algebra sera exibida sua equação. Desta forma, o aluno poderá de forma rápida verificar se sua resposta esta correta.

Neste ponto, o professor poderá utilizar algumas atividades do ano anterior com a finalidade de fixar ideias e ver a equivalência dos pontos de vista.

5. **Determinar a área de alcance do sinal de uma torre.**

- O sinal deverá atingir de forma circular a maior área possível da praça.
- Considere que a praça tenha 200m de lado.
- O sinal não deverá ultrapassar os limites da praça.
- Considere o centro da praça coincidente com o sistema de eixos coordenados.

Considere a praça abaixo como sendo o local onde será instalada a torre.

Figura 6.22: Praça Pública

6. **Determinar a equação da circunferência que representa o alcance do sinal de uma torre.**

   - O sinal deverá atingir de forma circular toda a área da praça.
   - Considere que a praça tenha 200m de lado.
   - O sinal deverá atingir a menor área possível, porém todas as pessoas dentro da praça deverão ser atendidas.
   - Considere o centro da praça coincidente com o sistema de eixos coordenados.

   Considere a praça abaixo como sendo o local onde será instalada a torre.

Figura 6.23: Praça Pública

6.5.2 Elipse

1. **Determinação da equação da elipse, centrada na origem, com distância focal** 2 **e que passa pelo ponto** $(0, 1)$ **e eixo focal paralelo ao eixo** OX**.**
   Resolução:
   Neste caso em particular, como o centro da elipse coincide com a origem, a equação é na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e que $a^2 = b^2 + c^2$. Pelo enunciado temos que $c = 1$, $b = 1$ e $a = \sqrt{2}$; logo podemos escrever:

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

   Utilizando o geogebra

   (a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Elipse**", selecione dois focos, e depois, um ponto da elipse.
   (b) Pelas propriedades vistas em 5.2 clique nos pontos $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ e $B_1(0, 1)$.
   (c) A construção da elipse requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

2. **Determinar a equação da elipse centrada na origem, sabendo que a distância do eixo maior é** 6 **e os focos coincidem com os pontos** $(-2, 0)$ **e** $(2, 0)$**.**

   Resolução:
   Neste caso em particular, como o centro da elipse coincide com a origem, a equação é na forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e que $a^2 = b^2 + c^2$. Pelo enunciado temos que $c = 2$, $a = 3$ e $b = \sqrt{5}$; logo podemos escrever:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1$$

   Utilizando o geogebra

   (a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Elipse**", selecione dois focos, e depois, um ponto da elipse.

   (b) Pelas propriedades vistas em 5.2 clique nos pontos $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ e $A_1(3, 0)$.

   (c) A construção da elipse requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

3. **Dada a elipse "**$9x^2 + 5y^2 - 36x - 40y = -71$**" determinar seus focos e centro da elipse.**
   Resolução:
   completando quadrados temos:

$$\begin{aligned}
9x^2 + 5y^2 - 36x - 40y &= -71, \\
9(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 - 8y + 16) &= -71 + 36 + 80 \\
9(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 - 8y + 16) &= 45 \\
9(x - 2)^2 + 5(y - 4)^2 &= 45, \\
\frac{9(x - 2)^2}{45} + \frac{5(y - 4)^2}{45} &= 1 \\
\frac{(x - 2)^2}{5} + \frac{(y - 4)^2}{9} &= 1 \\
\frac{(x - 2)^2}{\sqrt{5}^2} + \frac{(y - 4)^2}{3^2} &= 1
\end{aligned}$$

   Neste caso particular, a equação pode ser escrita na forma $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$, onde $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, $F_2 = (x_0, y_0 + c)$, $C = (x_0, y_0)$ e $a^2 = b^2 + c^2$. como $c = 2$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, temos $F_1 = (2, 2)$, $F_2 = (2, 6)$, $C = (2, 4)$;
   Utilizando o geogebra:

   (a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, no campo de entrada, digitar a equação da cônica pedida "$9x^2 + 5y^2 - 36x - 40y = -71$".

   (b) A construção da elipse requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra, mostrando de forma clara os valores x_0, y_0, a, b;

4. **Determine a equação da elipse, centrada na origem, com distância eixo maior** 4 **distância do eixo menor** 3**, com eixo focal paralelo ao eixo** OY**.**
Resolução:
Neste caso em particular, como o centro da elipse coincide com a origem, a equação é na forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ e que $a^2 = b^2 + c^2$. Pelo enunciado temos que $a = 2$, $b = \frac{3}{2}$ e $c = \frac{\sqrt{7}}{2}$; logo podemos escrever:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{2}^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Utilizando o geogebra

(a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Elipse**", selecione dois focos, e depois, um ponto da elipse.
(b) Pelas propriedades vistas em 5.2 clique nos pontos $F_1(0, \frac{\sqrt{7}}{2})$, $F_2(0, -\frac{\sqrt{7}}{2})$ e $B_1(0, 2)$.
(c) A construção da elipse requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

5. **Dada a elipse de equação** $36x^2 + 64y^2 - 216x - 256y = -436$**. Determinar os focos e as distâncias dos seus eixos.**
Resolução:
Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned}
36x^2 + 64y^2 - 216x - 256y &= -436, \\
9x^2 + 16y^2 - 54x - 64y &= -109 \\
9(x^2 - 6x) + 16(y^2 - 4y) &= -109, \\
9(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 4y + 4) &= -109 + 81 + 64 \\
9(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 4y + 4) &= 36 \\
\frac{9(x^2 - 6x + 9)}{36} + \frac{16(y^2 - 4y + 4)}{36} &= 1 \\
\frac{9(x^2 - 6x + 9)}{36} + \frac{16(y^2 - 4y + 4)}{36} &= 1 \\
\frac{(x-3)^2}{\frac{36}{9}} + \frac{(y-2)}{\frac{36}{16}} &= 1 \\
\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)}{(\frac{9}{4})} &= 1 \\
\frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y-2)}{(\frac{3}{2})^2} &= 1
\end{aligned}$$

Neste caso particular, a equação pode ser escrita na forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, onde $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, $F_2 = (x_0 + c, y_0)$, $C = (x_0, y_0)$ e $a^2 = b^2 + c^2$, como $c = \sqrt{7}2$, $a =$

2, $b = \frac{3}{2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, temos $F_1 = (3 - \sqrt{7}2, 2)$, $F_2 = (3 + \sqrt{7}2, 2)$, $C = (3, 2)$;
Utilizando o geogebra:

(a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, no campo de entrada, digitar a equação da cônica pedida "$36x^2+64y^2-216x-256y = -436$".

(b) A construção da elipse requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de algebra, mostrando de forma clara os valores x_0, y_0, a, b;

Novamente sugerimos utilizar as atividades do ano anterior para fixar as ideias.

6.5.3 Parábola

1. **Determinação da equação da parábola, centrada na origem, com parâmetro[3] 2 e concavidade voltada para cima.**
Resolução:
Neste caso em particular, como o vértice da parábola coincide com a origem e a equação é na forma $x^2 = 4py$ e que $F = (0, p)$ $V = (0, 0)$ e $d : y = -p$. Pelo enunciado, temos que $F = (0, 1)$ $V = (0, 0)$ e $d : y = -1$; logo, podemos escrever:

$$x^2 = 4y$$

Utilizando o geogebra:

(a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Parábola**".

(b) Clique nos pontos $F(0, 1)$, e na reta diretriz $D : y = -1$.

(c) A construção da parábola requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

2. **Determine a equação da parábola cuja diretriz é a reta $d : y = 2$ e seu foco é o ponto $(0, -2)$.**
Resolução:
Neste caso em particular, a concavidade da parábola é para baixo, o vértice da parábola coincide com origem e a equação é na forma $x^2 = -4py$. Ainda $F = (0, -p)$ $V = (0, 0)$ e $d : y = p$. Pelo enunciado temos que $F = (0, -2)$ $V = (0, 0)$ e $d : y = 2$; logo podemos escrever:

$$x^2 = -4py$$
$$x^2 = -8y$$

Utilizando o geogebra:

[3] $2p = d(d, F)$ é o parâmetro da parábola ρ tal que $d(d, V) = d(V, F)$ ver [7] p.147

(a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Parábola**".

(b) Clique nos pontos $F(0,-2)$, e na reta diretriz $D: y = 2$.

(c) A construção da parábola requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

3. **Determinar o foco e a reta diretriz da parábola** $c: y = x^2 - 6x + 8$**.**
Resolução:
Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 8, \\ y + 1 &= x^2 - 6x + 9 \\ y + 1 &= (x-3)^2 \end{aligned}$$

Logo, a equação é na forma $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ e $F = (x_0, y_0 + p)$ $V = (x_0, y_0)$ *e* $d: y = y_0 - p$. Pela equação acima, temos $F = (3, -\frac{3}{4})$ $V = (3, -1)$ *e* $d: y = -\frac{5}{4}$
Utilizando o geogebra:

(a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, digite na caixa de entrar a equação $y = x^2 - 6x + 8$.

(b) A construção da parábola requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

4. **Determinar a equação de um portal Parabólico.**
Pedro é um estudante do ensino médio e ficou intrigado com a curva parabólica; tão intrigado que quer construir a porta do seu quarto em forma de um portal parabólico conforme descrito abaixo.

- Pedro possui 1,72m de altura e gostaria que quando passasse pela porta sua cabeça coincidisse com o foco do portal.
- Pedro gostaria que houvesse um espaço aproximado de 30cm entre sua cabeça e o vértice portal.
- Considere o sistema de eixos coordenados de forma que o eixo OY seja coincidente com o eixo de simetria do portal, que o eixo OX estaja contido no plano.

Considerando este sistema coordenado exiba a equação da parábola que contenha este portal. Ajude Pedro a definir a equação que modele este portal.

Resolução:
Neste caso em particular, a concavidade da parábola é para baixo, e o vértice não está centrado na origem, logo a equação é na forma $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$ e que $F = (x_0, y_0 - p)$, $V = (x_0, y_0)$ e $d: y = y_0 + p$. Pelo enunciado temos que $F = (0, 1.72)$, $V = (0, 2.02)$, $ed: y = 2.02 + 0.30 = 2.32$; logo podemos escrever:

$$(x - 0)^2 = -4 \cdot 0.30(y - 2.02)$$

$$x^2 = -1.2(y - 2.02)$$

Utilizando o geogebra:

(a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Parábola**".

(b) Clique nos pontos $F(0, 1.72)$, e na reta diretriz $D : y = 2.32$.

(c) A construção da parábola requerida se dará de imediato na janela de visualização e a sua equação na janela de álgebra.

5. **Determinar a equação de uma ponte Pênsil.**

Esta atividade foi elaborada na atividade 9 do ano anterior no qual podemos verificar as propriedades geométricas da parábola na construção de uma ponte. Aqui vamos refazer nossa atividade dando enfase à parte algébrica. Neste momento, vamos traduzir para o algébrico, com o auxílio do geogebra, as construções feitas anteriormente. Relembrando o que foi sugerido na atividade do primeiro ano:

- O rio em questão possui 50 metros de largura.
- As torres de sustentação deverão possuir 30m de altura e estar posicionadas à margem do rio.
- A altura livre entre o tabuleiro da ponte e o rio deverá ser de 5m.
- Considere que o tabuleiro da ponte contenha as retas diretrizes das parábolas formadas pelos cabos que ligam as torres de sustentação.

Além do que foi pedido anteriormente ajude Apolônio a determinar as equações que modelem o tabuleiro como se fosse a reta diretriz e os cabos que ligam as duas torres como uma parábola.

Resolução:

Neste caso em particular, a concavidade da parábola é para cima, o vértice da parábola não coincide com origem e a equação é na forma $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$ e que $F = (x_0, y_0 + p)$, $V = (x_0, y_0)$ e $d : y = y_0 - p$. Pelas propriedades vistas em 5.3 e pelo enunciado temos que $F = (0, 30)$, $V = (0, 17.5)$ e$d : y = 17.5 - 12.5 = 5$; logo podemos escrever:

$$(x - 0)^2 = 4 \cdot 12.5(y - 17.5)$$
$$x^2 = 50(y - 17.5)$$

Utilizando o geogebra:

(a) com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Parábola**".

(b) Clique nos pontos $F(0, 30)$ e na reta diretriz $D : y = 5$.

(c) A construção da parábola requerida se dará de imediato na janela de visualização e a sua equação na janela de álgebra.

6.5.4 Hipérbole

1. **Determinação da equação da hipérbole, centrada na origem, com distância focal** 10**, eixo focal** 8 **e paralelo ao eixo** OX**.**
   Resolução:
   Neste caso em particular, como o centro da hipérbole coincide com a origem, a equação é na forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{2}b^2 = 1$ e que $c^2 = a^2 + b^2$. Pelo enunciado temos que $c = 5$, $b = 3$ e $a = 4$; logo podemos escrever:

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

   Utilizando o geogebra:

   (a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, selecionar a ferramenta "**Hipérbole**", selecione dois focos, e depois, um ponto da hipérbole .

   (b) Pelas propriedades vistas em 5.4, clique nos pontos $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ e $A_1(4, 0)$.

   (c) A construção da hipérbole requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra.

2. **Determine a distância focal da hipérbole de equação** $25x^2 - 9y^2 = 225$**.**
   Resolução:
   Reescrevendo na forma reduzida temos:

$$\begin{aligned} 25x^2 - 9y^2 &= 225, \\ \frac{25x^2}{225} - \frac{9y^2}{225} &= 1 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} &= 1 \\ \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{5^2} &= 1 \end{aligned}$$

   Pela equação reduzida ,temos: $a = 3$, $b = 5$ e $c = \sqrt{34}$; como a distância focal igual a $2c$ temos a distância focal igual a $2\sqrt{34}$.
   Utilizando o geogebra:

   (a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, digitar no caixa de entrada a equação $25x^2 - 9y^2 = 225$.

   (b) A construção da hipérbole requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra, permitindo de forma visual indentifcar os vértices reais e imaginários da hipérbole.

   (c) Com a ferramenta "Segmento" selecionada, clicar em um vértice real e em um vértice imaginário, como exemplo nos pontos $(a, 0) = (3, 0)$ e $(0, b) = (0, 5)$.

   (d) O segmento possui distância $c = \sqrt{34}$, logo podemos obter a distância focal $2c$.

3. **Construção de uma ponte.**
Utilizando os dados da atividade 6 do ano anterior, determine sua equação considerando a hipérbole centrada na origem com eixo focal paralelo ao eixo OX.

   - O rio que cruza a propriedade possui 50 metros de largura.
   - Existem duas ilhas bem no centro do rio localizadas a 50m de distância uma da outra.
   - A ponte passará entre as duas ilhas.
   - As laterais da ponte possuirão a forma de uma hipérbole, onde os focos são as duas ilhas.
   - Na parte mais estreita, a largura da ponte será de 10m.
   - Considere o centro da ponte coincidente com o centro do nosso sistema eixo coordenado.

   Resolução:
   Pelo enunciado do problema temos: $2c = 50 \Rightarrow c = 25$, $2a = 10 \rightarrow a = 5$, logo $b = 10\sqrt{6}$, logo podemos escrever:

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{(10\sqrt{6})^2} = 1$$

   De forma análoga às atividades anteriores, podemos utilizar o geogebra pra chegar à mesma conclusão.

4. **Seja a hipérbole de equação $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$, determine sua equação reduzida e seus focos**
Resolução:
Completando quadrados temos:

$$\begin{aligned}
5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 &= 0, \\
5(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y) &= 4, \\
5(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 2y + 1) &= 4 + 20 - 4 \\
5(x-2)^2 - 4(y+1)^2 &= 20, \\
\frac{5(x-2)^2}{20} - \frac{4(y+1)^2}{20} &= 1 \\
\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{5} &= 1 \\
\frac{(x-2)^2}{2^2} - \frac{(y+1)^2}{\sqrt{5}^2} &= 1
\end{aligned}$$

   Neste caso particular a equação pode ser escrita na forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, onde $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, $F_2 = (x_0 + c, y_0)$, $C = (x_0, y_0)$ e $c^2 = a^2 + b^2$. como $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $c = 3$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, temos $F_1 = (-1, -1)$, $F_2 = (5, -1)$, $C = (2, -1)$;
Utilizando o geogebra:

(a) Com o geogebra exibindo as janelas de álgebra e de visualização, no campo de entrada digitar a equação da cônica pedida "$5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$".

(b) A construção da hipérbole requerida se dará de imediato na janela de visualização, e a sua equação na janela de álgebra, mostrando os de forma clara os valores $x_0, \ y_0, \ a, \ b$;

Capítulo 7

Varias definições (3º ano)

Neste ano, sugerimos abordar o estudo das cônicas desde vários pontos de vista. Indicamos que sejam lembradas as definições geométricas e algébricas estuadas nos anos anteriores com a ajuda do geogebra, logo serão apresentadas novas definições das cônicas e as mesmas serão comparadas com o auxílio do geogebra. Primeiro apresentamos as cônicas por intermédio de sua excentricidade "e":

7.1 Definição das cônicas através de sua excentricidade

Definição 7.1.1 *Dados uma reta d e um ponto F não pertencente a reta. A elipse, a parábola e a hipérbole podem ser definidas como lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias ao ponto F e a reta d é uma constante real positiva que depende de cada curva. Esta constante será chamada de **excentricidade**,"e". A reta d será chamada de **diretriz** e o ponto F será chamado de **Foco**.*

Teorema 7.1.1 *Dada uma reta d, um ponto F fora de d e um escalar e, o conjunto formado por todos os pontos P do plano tais que:*

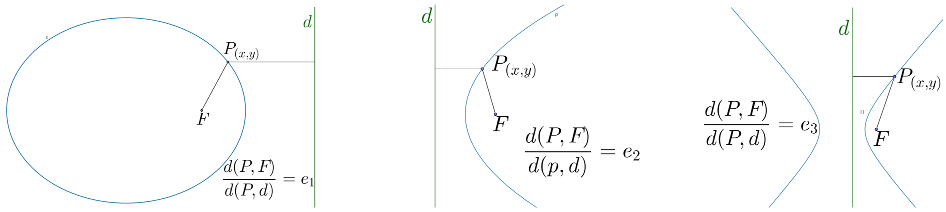
$$d(P, F) = e \cdot d(P, d)$$

Será uma:

1. *Elipse, quando $0 < e < 1$.*
2. *Parábola, quando $e = 1$*
3. *Hipérbole, quando $e > 1$.*

Observação 7.1.1 *A reta d é chamada **diretriz**, o ponto F é chamado de **Foco**, e o escalar e é chamado de **excentricidade*** Note que caso $e = 1$, coincide com a definição 5.3.1 ja estudada. Logo, podemos considerar o teorema como uma nova forma de definir as cônicas de maneira unificada.

Sejam d a reta diretriz, F o foco e P um ponto qualquer da curva. Então a interpretação geométrica da definição 7.1.1 pode ser dada pela figura 7.1, onde e_1, e_2 e e_3, são as excentricidades da elipse, parábola e hipérbole, respectivamente.



(a) $e < 1$ (b) $e = 1$ (c) $e > 1$

Figura 7.1: Propriedades das Cônicas

Agora vamos elucidar as equivalências entre as definições desde o ponto de vista algébrico, para isto vamos considerar o sistema de coordenadas cartesianas OXY, em que o eixo OY coincida com a reta diretriz d e o eixo OX seja a reta perpendicular a d passando pelo foco F. Considere F com coordenadas $(2p, 0)$ onde $p > 0$, Conforme a figura 7.2.

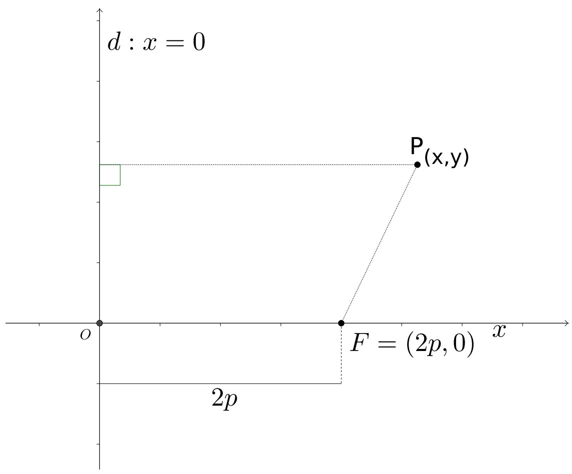


Figura 7.2: Definição foco-diretriz e plano cartesiano

Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer sobre qualquer uma das cônicas, pela definição 7.1.1 tem que:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,d)} = e \tag{7.1}$$

Onde e é a excentricidade da cônica; Temos que $d(P,F) = \sqrt{(x-2p)^2 + y^2}$ e $d(P,d) = |x|$. Rescrevendo a equação 7.1 e desenvolvendo em coordenadas cartesianas teremos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-2p)^2 + y^2} &= e|x| \\ (x-2p)^2 + y^2 &= e^2x^2 \end{aligned}$$

$$(1-e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p^2 = 0 \tag{7.2}$$

Que é a **equação geral de uma cônica** em função de sua excentricidade. Para determinar cada uma das três cônicas serão analisado os valores da excentricidade e nos seguintes casos. Observe que o caso $e = 1$, já foi estudado.

Caso $0 < e < 1$

Para $0 < e < 1$, então $1 - e^2 > 0$ dividindo a equação 7.2 por $1 - e^2$ teremos:

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{4p}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{-4p^2}{1-e^2} \\
x^2 - \frac{4p}{1-e^2}x + \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{4p^2}{1-e^2} \\
(x - \frac{2p}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{4p^2e^2}{(1-e^2)^2} \\
\frac{(x - \frac{2p}{1-e^2})^2}{(\frac{2pe}{1-e^2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{4p^2e^2}{1-e^2})} &= 1
\end{aligned}$$

Que é a equação da elipse centrada em $\left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$ com $a = \frac{2pe}{1-e^2}$ e $b = \frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}$.

Focos e diretrizes da elipse em função de "e".

Observe que nas coordenadas $\overline{XOY}$ com origem $O = \left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$ temos:

- Coordenadas do foco:

$$\begin{aligned}
F_1 &= (2p, 0), \\
\overline{F_1} &= (2p - \frac{2p}{1-e^2}, 0) \\
\overline{F_1} &= (-\frac{2pe^2}{1-e^2}, 0) \\
\overline{F_1} &= (-ae, 0)
\end{aligned}$$

- Equação da diretriz:

$$\begin{aligned}
d : x &= 0, \\
d : \overline{x} &= 0 - \frac{2p}{1-e^2}, \\
d : \overline{x} &= -(ae + 2p),
\end{aligned}$$

Como:

$$
\begin{aligned}
-(ae+2p) &= -\frac{2p}{1-e^2} \\
-(ae+2p)(1-e^2) &= -2p \\
2p-2pe^2+ae-ae^3 &= 2p, \\
-2pe^2+ae-ae^3 &= 0, \\
e^2(-2p+\frac{a}{e}-ae) &= 0, \\
-2p+\frac{a}{e}-ae &= 0, \\
\frac{a}{e} &= 2p+ae
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
d:\overline{x} &= -(2p+ae), \\
d:\overline{x} &= -\frac{a}{e}
\end{aligned}
$$

- A representação geométrica no sistema $\overline{XOY}$ com origem $O = \left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$ é como na figura abaixo:

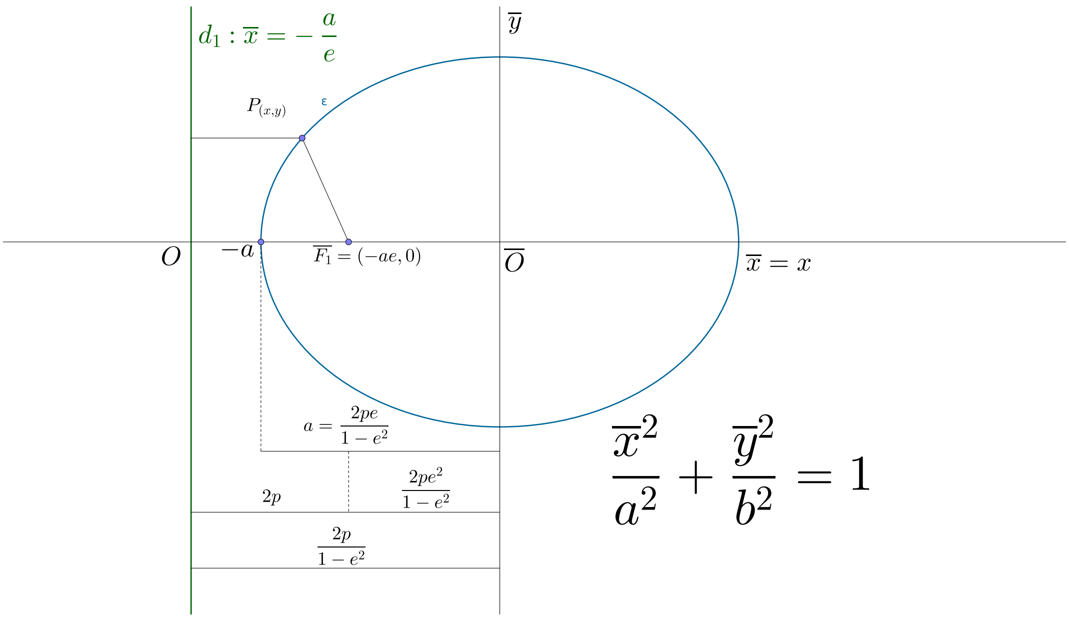


Figura 7.3: Sistem $\overline{OXY}$ e cônica com excentricidade $0 < e < 1$

No sistema $\overline{OXY}$ nota-se que F_1 e d_1 estão situadas a esquerda da origem $\overline{O}$ conforme mostra a figura 7.3. Considere agora os simétricos de F_1 e r_1 em relação ao eixo $\overline{OY}$ ou seja $F_2 = (ae, 0)$ e a reta $d_2 : \overline{x} = \frac{a}{e}$. Então F_2 e d_2 são respectivamente o outro foco e outra diretriz da elipse. Isto é, se $P = (\overline{x}, \overline{y})$ um ponto qualquer da elipse com excentricidade e dada anteriormente e se F_2 e d_2 são respectivamente o foco e a diretriz desta elipse, então, a definição:

$$\frac{d(P,F_2)}{d(P,d_2)} = e \Rightarrow d(P,F_2) = ed(P,d_2)$$

Em coordenadas cartesianas no sistema $\overline{OXY}$ temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\overline{x}-ae)^2+\overline{y}^2} &= e\left|\frac{a}{e}-\overline{x}\right| \\
(\overline{x}-ae)^2+\overline{y}^2 &= e^2\left(\frac{a}{e}-\overline{x}\right)^2 \\
(1-e^2)\overline{x}^2+\overline{y}^2 &= (1-e^2)a^2 \\
\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{(1-e^2)a^2} &= 1
\end{aligned}$$

Porém $(1-e^2)a^2 = (1-e^2)\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2 = b^2$, daí concluimos que:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

Assim a elipse é uma cônica que possui dois focos e duas diretrizes conforme ilustra a figura 7.4.

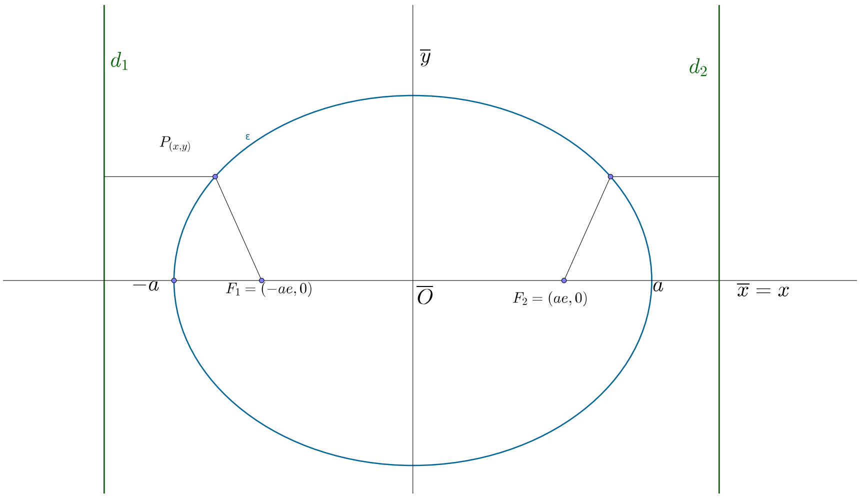


Figura 7.4: Focos e diretrizes da elipse

A relação entre a distância focal e a excentricidade da elipse

Seja $2c$ a distancia focal de uma elipse dada pelo comprimento do segmento F_1F_2. Considerando o sistema cartesiano anterior, onde $F_1 = (-ae, 0)$ e $F_2 = (ae, 0)$, então, $d(F_1, F_2) = 2ae$, segue que,

$$2c = 2ae \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

Ou seja, a excentricidade e pode ser expressa pela razão $\frac{c}{a}$. Note que esta razão mede o quanto os focos se afastam ou se aproximam do centro $\overline{O}$ da elipse, justificando a palavra excentricidade.

Caso $e > 1$

Para $e > 1$ então $e^2 - 1 > 0$. Dividindo a equação 7.2 a por $e^2 - 1$ e invertendo os sinais dos termos de ambos os lados teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{4p}{e^2-1}x - \frac{y^2}{e^2-1} &= \frac{4p^2}{e^2-1} \\ x^2 + \frac{4p}{e^2-1}x + \frac{4p^2}{(e^2-1)^2} - \frac{y^2}{e^2-1} &= \frac{4p^2}{e^2-1} + \frac{4p^2}{(e^2-1)^2} \\ \left(x + \frac{2p}{e^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} &= \frac{4p^2e^2}{(e^2-1)^2} \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro por $\frac{4p^2e^2}{(e^2-1)^2} = \left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2$ tem-se:

$$\frac{\left(x + \frac{2p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{4p^2e^2}{e^2-1}} = 1 \tag{7.3}$$

$$\frac{\left(x + \frac{2p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} = 1 \tag{7.4}$$

$$\tag{7.5}$$

Que é uma hipérbole de centro $\left(-\frac{2p}{e^2-1}, 0\right)$ e com $a = \frac{2pe}{e^2-1}$ e $b = \frac{2pe}{\sqrt{e^2-1}}$.
Focos e diretrizes da hipérbole em função de "e".

Definindo $F = F_1$ e $d = d_1$ em que $F = (2p, 0)$ e $d : x = 0$, após a translação para o sistema $\overline{OXY}$ tem-se:

- Coordenadas do foco: $F_1 = \left(2p + \frac{2p}{e^2-1}, 0\right) = \left(\frac{2pe^2}{e^2-1}, 0\right) = (ae, 0)$
- Equação da reta diretriz: $d_1 : \overline{x} = \frac{2p}{e^2-1} = \frac{a}{e} = x + \frac{2p}{e^2-1}$
- Representação geométrica no sistema $\overline{OXY}$, de origem $\overline{O} = \left(-\frac{2p}{e^2-1}, 0\right)$.

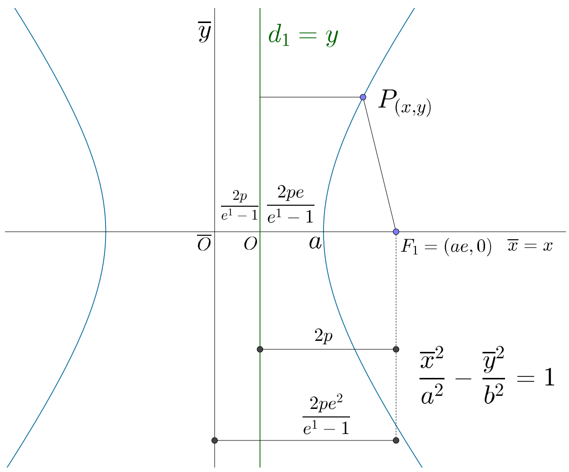


Figura 7.5: sistema $\overline{OXY}$ com cônica com excentricidade $e > 1$

No sistema $\overline{OXY}$, nota-se que F_1 e d_1 estão situados à direita da origem $\overline{O}$ conforme mostra a figura 7.5. Considere agora os simétricos de F_1 e d_1 em relação ao eixo $\overline{y}$ ou seja o ponto $F_2 = (-ae, 0)$ e $d_2 : \overline{x} = -\frac{a}{e}$ são respectivamente o outro foco e a outra diretriz da hipérbole. Seja $P = (\overline{x}, \overline{y})$ um ponto qualquer da hipérbole de excentricidade e no sistema $\overline{OXY}$ considerado anteriormente. Se F_2 e d_2 são respectivamente o foco e a diretriz dessa hipérbole então, a definição 7.1.1 é satisfeita, ou seja,

$$\frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = e \Rightarrow d(P, F_2) = ed(P, d_2)$$

Em coordenadas cartesianas no sistema $\overline{OXY}$ tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{(\overline{x} + ae)^2 + \overline{y}^2} & = & e\left|\overline{x} + \dfrac{a}{e}\right| \\
(\overline{x} + ae)^2 + \overline{y}^2 & = & e^2\left(\overline{x} + \dfrac{a}{e}\right)^2 \\
(1 - e^2)\overline{x}^2 + \overline{y}^2 & = & (1 - e^2)a^2 \\
(e^2 - 1)\overline{x}^2 - \overline{y}^2 & = & (e^2 - 1)a^2 \\
\dfrac{\overline{x}^2}{a^2} - \dfrac{\overline{y}^2}{(e^2 - 1)a^2} & &
\end{array}$$

Como $(e^2 - 1)a^2 = (e^2 - 1)\left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2 = b^2$, obtemos:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1$$

Logo a hipérbole é uma cônica que possui dois focos e duas diretrizes como ilustra a figura 7.6.

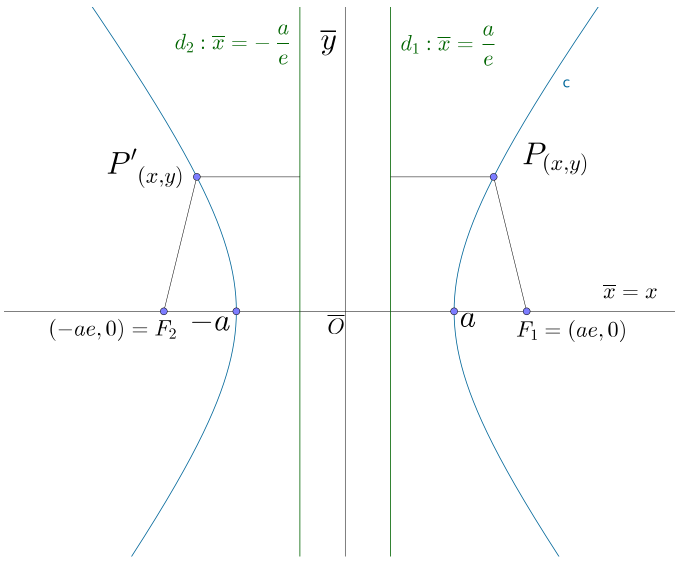


Figura 7.6: Focos e diretrizes da hipérbole

Relação entre a distância focal e a excentricidade da hipérbole

Seja $2c$ a distâcia focal de uma hipérbole dada pelo comprimento do segemnto F_1F_2. Considerando o sistema cartesiano anterior de $F_1 = (ae, 0)$ e $F_2 = (-ae, 0)$, então

$d(F_1, F2) = 2ae$. segue que:

$$2c = 2ae \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

ou seja, a excentricidade da hipérbole pode ser expressa pela razão $\frac{c}{a}$.

Família de curvas

Note que da definição 7.1.1, uma vez fixada uma reta e um ponto não pertencente a ela, determina-se uma única parábola que estará associada a excentricidade 1. Para a elipse e para a hipérbole, tem-se uma família de curvas, ou seja, para cada número real no intervalo $0 < e < 1$ determina-se uma elipse, e para $e > 1$ uma hipérbole, conforme ilustra a figura 7.7.

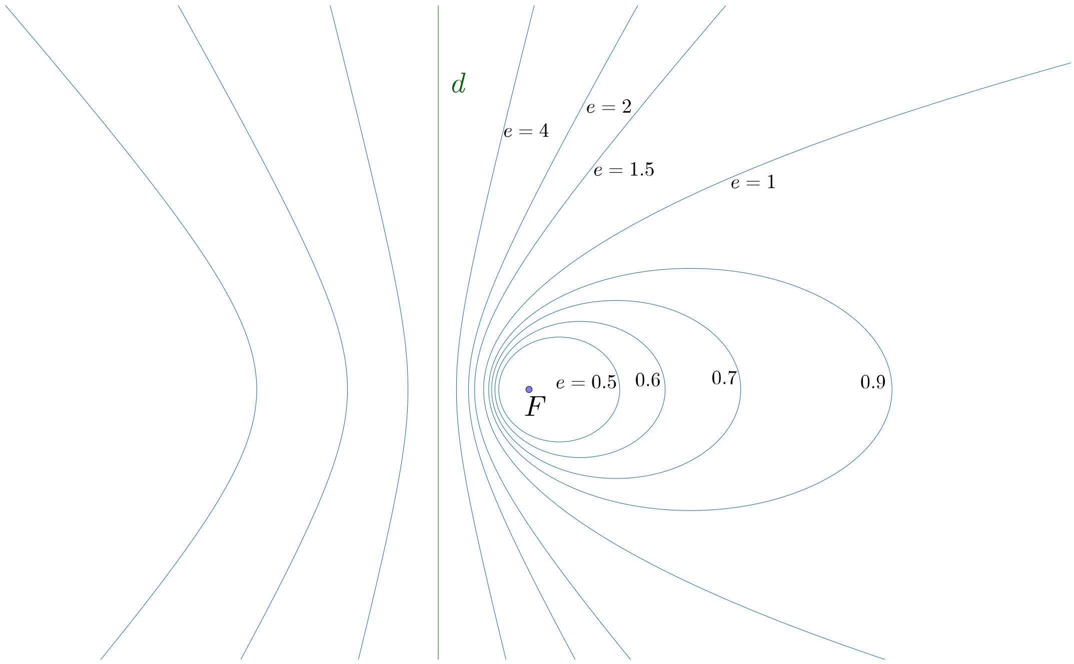


Figura 7.7: Família de Cônicas

Com o auxílio do geogebra, através da construção da figura 7.8, podemos de forma dinâmica alterar de forma rápida a excentricidade da cônica e termos de imediato o resultado visual bem como a equação da curva. O aluno poderá conferir que independente da reta diretriz "d" , o foco "f" e a excentricidade "e" tem-se uma cônica.

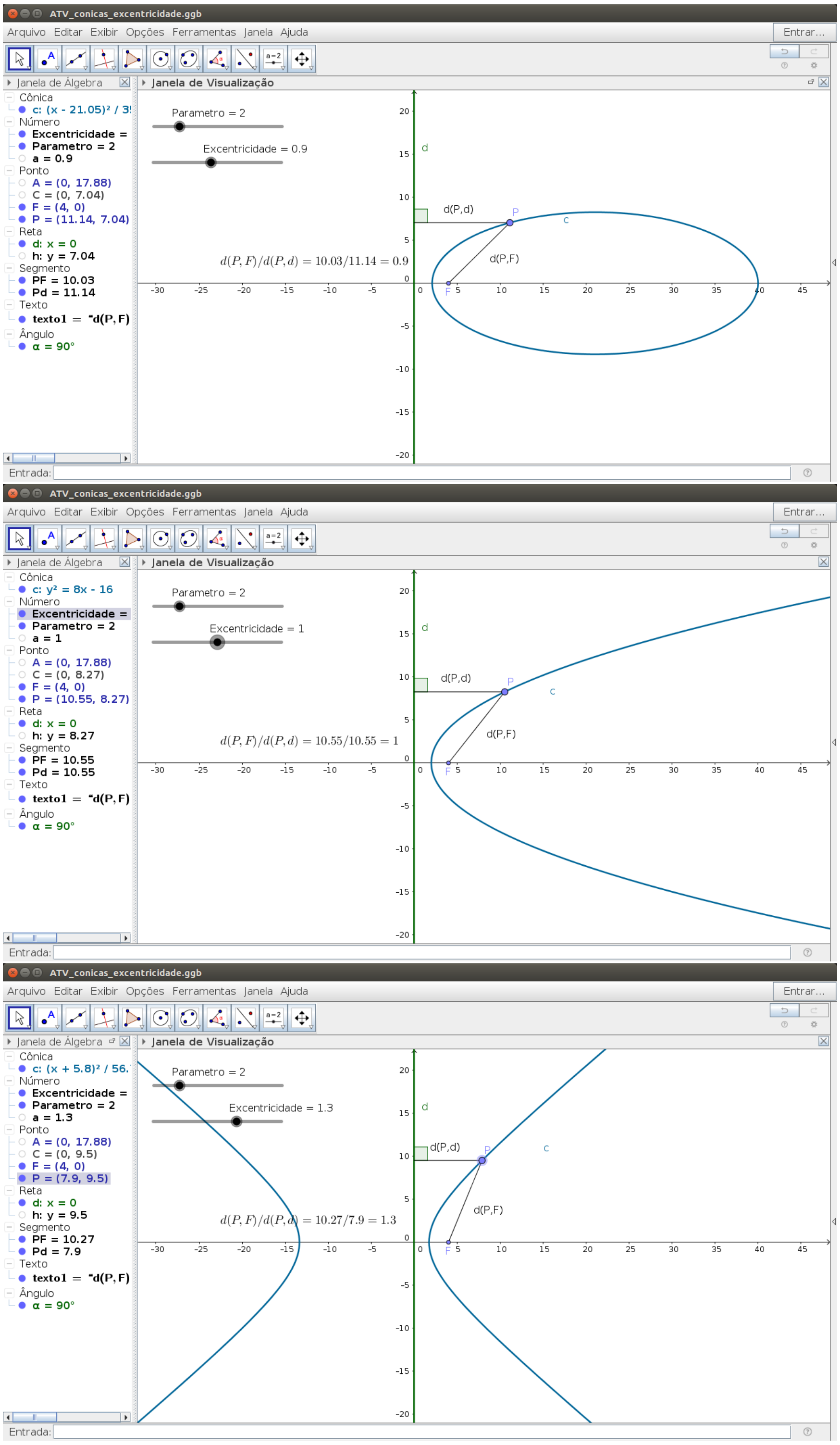


Figura 7.8: Atividade sobre Excentricidade

7.2 Definição das Cônicas através da Intersecção do plano com o cone duplo

A seguir apresentamos a definição das cônicas através da intersecção do plano com o cone duplo, o que faz alusão ao nome "cônicas".

Circunferência

A intersecção do plano π com o cone reto, quando o plano é paralelo a base do cone, é o lugar geométrico denominado **circunferência**.

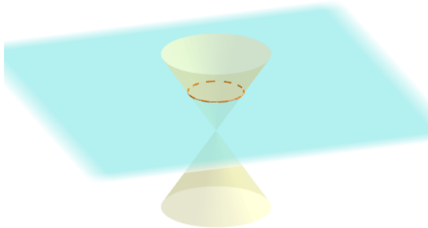


Figura 7.9: Circunferência

Elipse

A intersecção do plano π com o cone reto, onde os ângulos θ e α são respectivamente os ângulos do plano π com plano que contém a base do cone e da reta geratriz com plano que contém a base do cone, satisfazendo a seguinte propriedade $0 < \theta < \alpha$, é o lugar geométrico denominado **elipse**.

Figura 7.10: Elipse

7.2.1 Párabola

A intersecção do plano π com o cone reto, onde os ângulos θ e α são respectivamente os ângulos do plano π com plano que contém a base do cone e da reta geratriz com plano que contém a base do cone, satisfazendo a seguinte propriedade $0 < \theta = \alpha$, é o lugar geométrico denominado **parábola**.

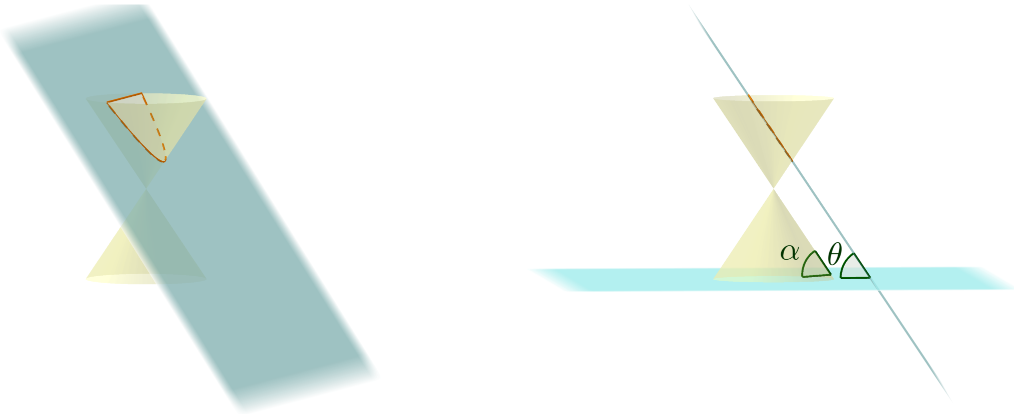


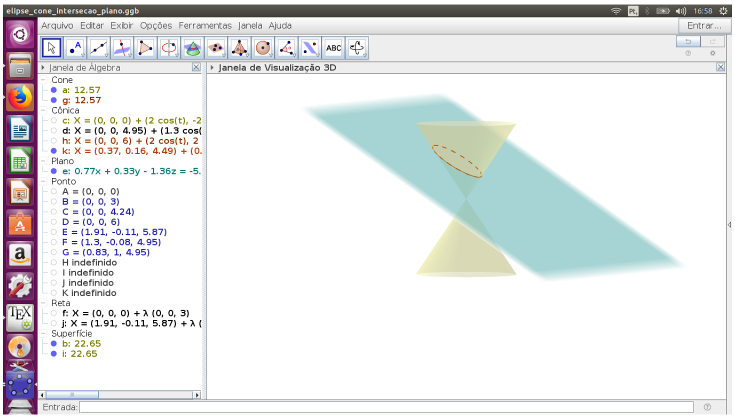
Figura 7.11: Parábola

7.2.2 Hipérbole

A intersecção do plano π com o cone reto, onde os ângulos θ e α são respectivamente os ângulos do plano π com plano que contém a base do cone e da reta geratriz com plano que contém a base do cone, satisfazendo a seguinte propriedade $90 \geq \theta > \alpha$, é o lugar geométrico denominado **hipérbole**.

Figura 7.12: Hipérbole

A definição abordada aqui complementa as definições apresentadas anteriormente, o estudo possui um ponto de vista geométrico, porém, em uma perspectiva "3D", onde é possível visualizar as cônicas estudadas como sendo a intersecção do plano com o cone. Esta abordagem permite ao aluno reconhecer a forma da cônica através de atividades simples com modelos reais, de cones feitos de isopor(ou outro material sólido de livre escolha) ou com um modelo digital desenvolido pelo aplicativo geogebra com a funcionalidade “3D” confome figuras abaixo:



(a) Modelo feito no geogebra

(b) Modelo de isopor

(c) Modelo de isopor

Figura 7.13: Intersecção do plano com o cone

7.3 Atividades do terceiro ano

Nestas atividades, daremos ênfase às cônicas através do seccionamento do cone por um plano, exibindo que as intersecções da superfície do cone com o plano geram as cônicas já estudadas. Além disso, vamos mostrar que podemos gerar todas as cônicas utilizando uma única equação em função da excentricidade. Como nesta seção estamos interessados em mostrar o relacionamento das cônicas através de uma definição unificada, teremos um único bloco de atividades exibindo todas as cônicas através de um mesmo ponto de vista.

7.3.1 Cônicas através de suas excentricidades

1. **Reconhecendo as formas da elipse em relação a sua excentricidade.** Nesta atividade, exibiremos uma construção do geogebra a fim de permitir ao aluno visualizar o lugar geométrico da elipse, relacionado à sua excentricidade.

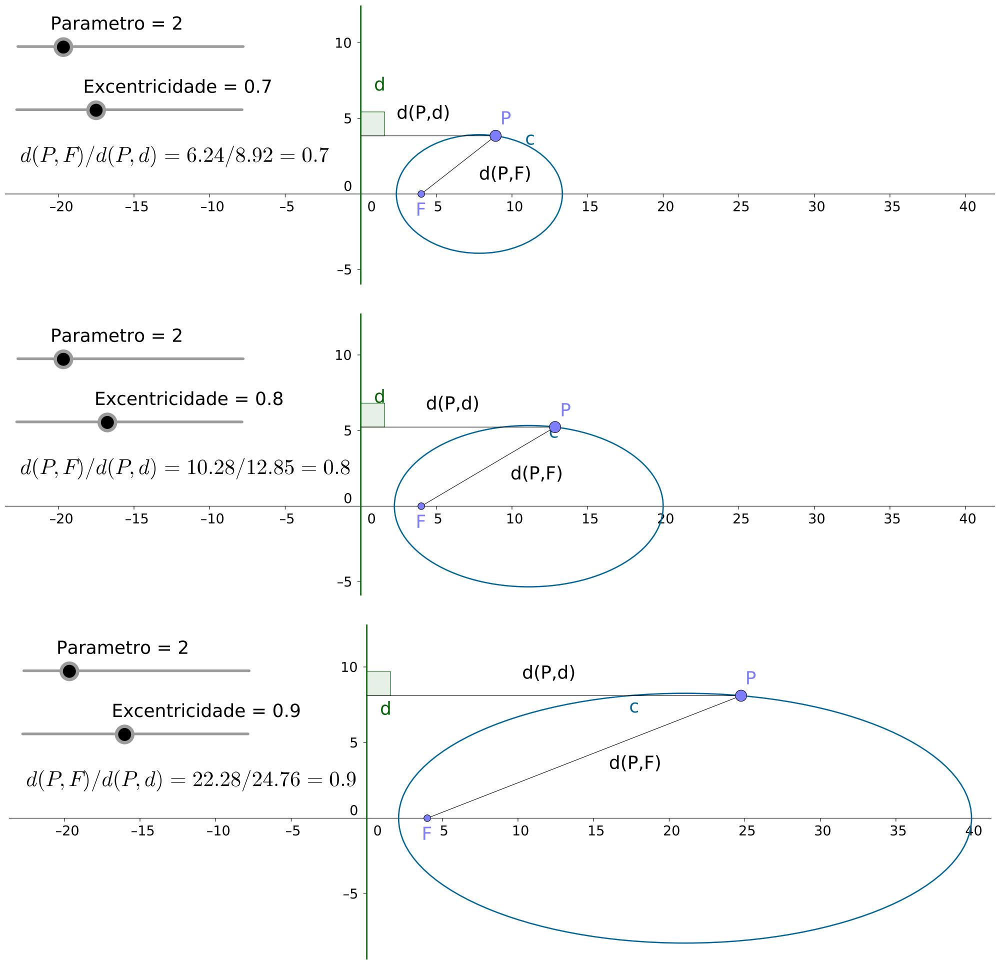


Figura 7.14: Elipses com excentricidades diferentes

Nesta atividade, os alunos podem constatar através de observações o comportamento geométrico relacionado à excentricidade.

2. **Reconhecendo as formas da parábola.**
Nesta atividade, exibiremos uma construção do geogebra a fim de permitir ao aluno vizualizar o lugar geométrico da parábola, relacionado à sua excentricidade.

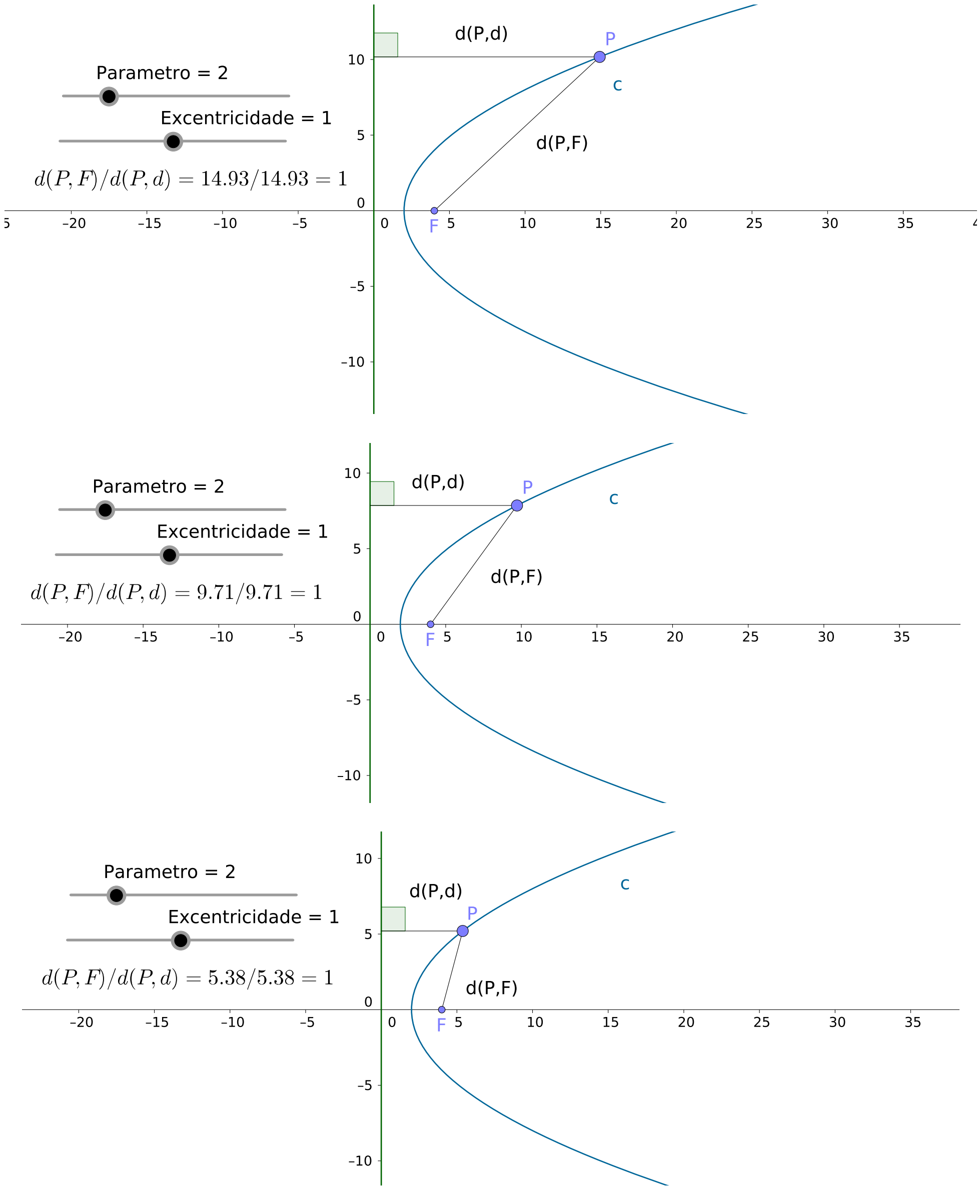


Figura 7.15: Parábola sempre com excentricidade 1

Nesta atividade, os alunos podem constatar através de observações o comportamento geométrico relacionado a excentricidade; além de poderem constatar que a razão $\frac{d(PF}{d(P,d)} = e = 1$ independente do ponto escolhido da parábola.

3. **Reconhecendo as formas da hipérbole em relação à sua excentricidade.**
Nesta atividade, exibiremos uma construção do geogebra a fim de permitir ao aluno vizualizar o lugar geométrico da hipérbole, relacionado à sua excentricidade.

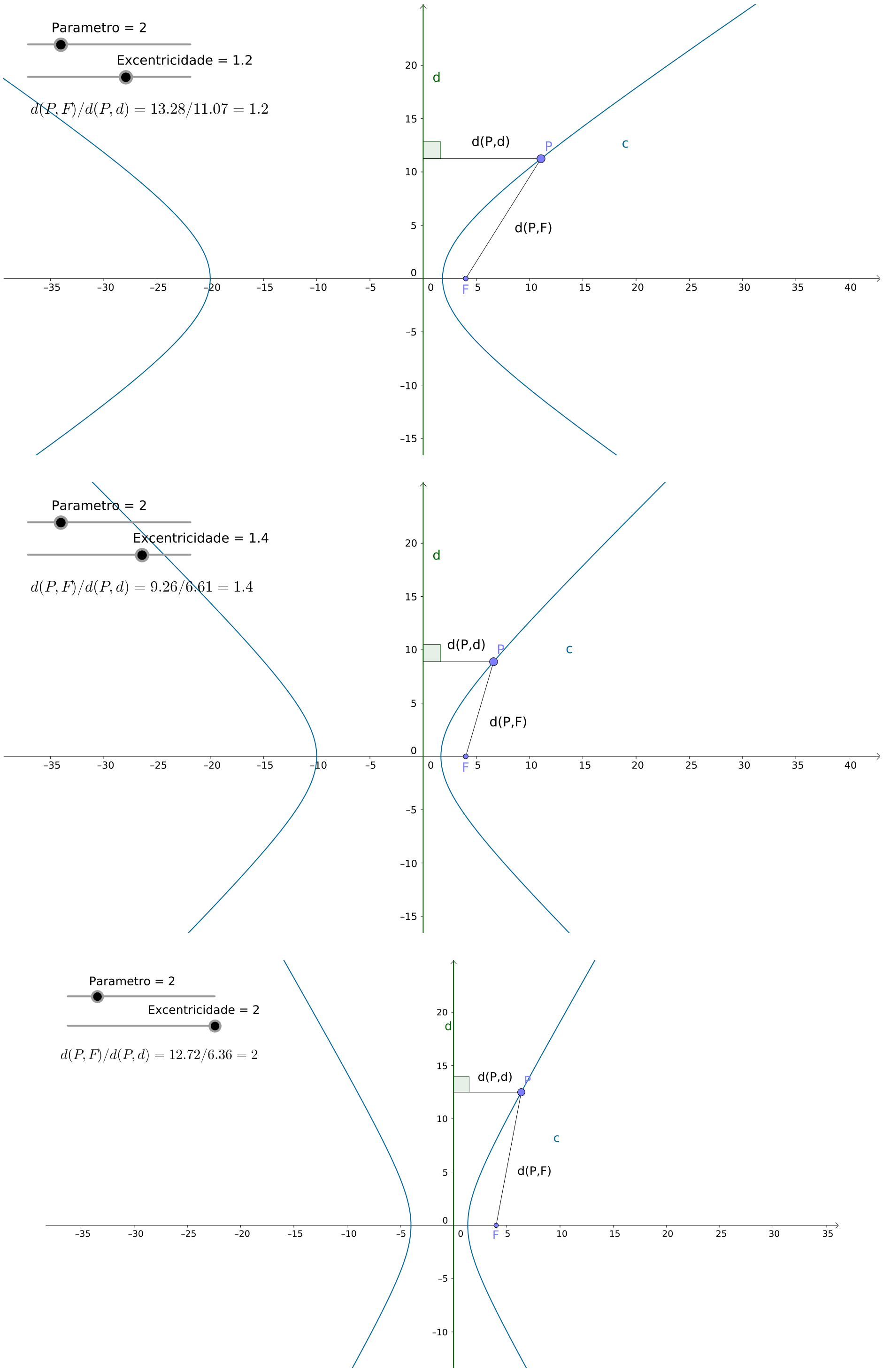


Figura 7.16: hipérboles com excentricidades diferentes

- O professor poderá selecionar atividades propostas nos anos anteriores com o objetivo de fixar os conteúdos e entender a equivalência entre as definições indicando que é o mesmo objeto de estudo.

7.3.2 Intersecção do plano com cone

1. **Vamos determinar o lugar geométrico da circunferência a partir do corte de um cone por um plano perpendicular a seu eixo.**
   Resolução:
   Nesta atividade utilizaremos cones cortados como os da figura 7.17, para demonstrar um exemplo da circunferência.

Figura 7.17: Modelo da intersecção de um plano com cone

Aqui temos um modelo construído com o geogebra, onde podemos construir variados modelos de circunferência.

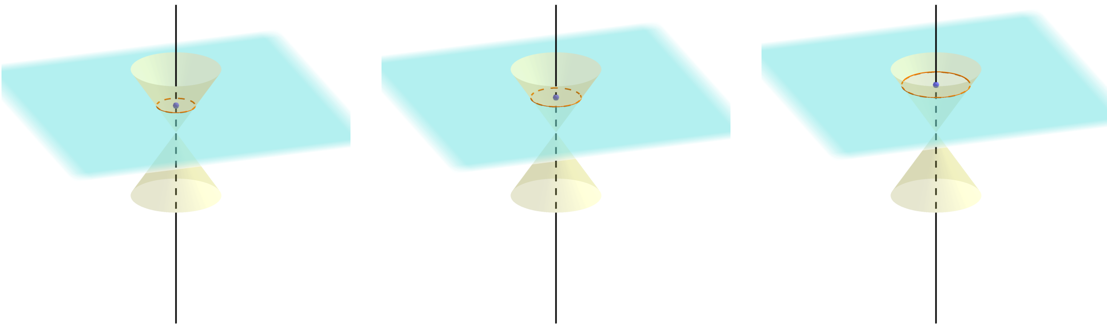


Figura 7.18: Modelo da intersecção de um plano com cone, no geogebra

2. **Determinação de uma elipse utilizando modelo de cone de isopor cortado por um plano.**
   Resolução:
   Nesta atividade, utilizaremos cones cortados como os da figura 7.19, para exemplificar um exemplo da elipse.

Figura 7.19: Modelo da intersecção de um plano com cone

Aqui temos um modelo construído com o geogebra, onde podemos construir variados modelos de elipse.

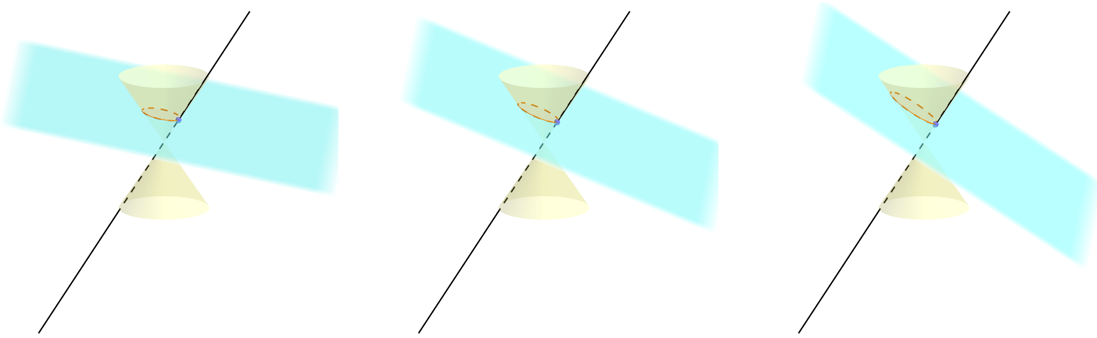


Figura 7.20: Modelo da intersecção de um plano com cone, no geogebra

3. **Determinação de uma parábola utilizando modelo de cone de isopor cortado por um plano.**
   Resolução:
   Nesta atividade utilizaremos cones cortados como os da figura 7.21 para exemplificar um exemplo da parábola.

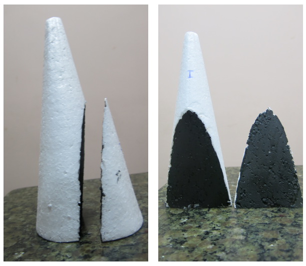


Figura 7.21: Modelo da intersecção de um plano com cone

Aqui temos um modelo construído com o geogebra, onde podemos construir variados modelos de parábola.

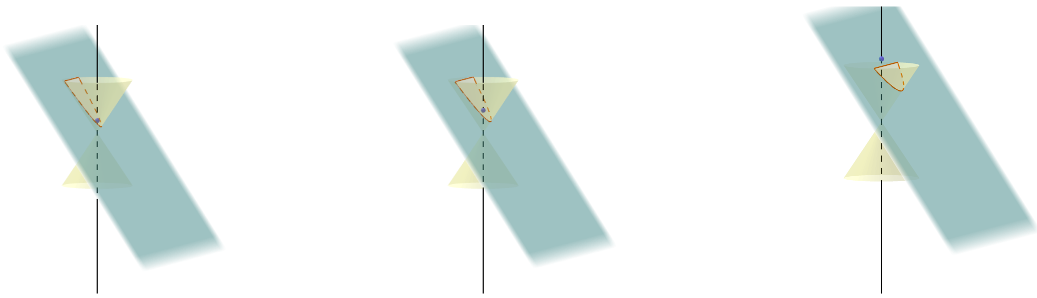


Figura 7.22: Modelo da intersecção de um plano com cone, no geogebra

4. **Determinação de uma hipérbole utilizando modelo de cone de isopor cortado por um plano.**

   Resolução:
   Nesta atividade, utilizaremos cones cortados como os da figura 7.23 para exemplificar um exemplo da hipérbole.

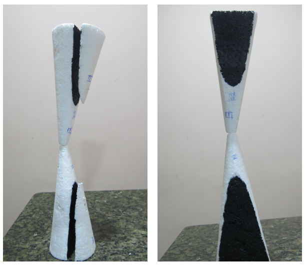


Figura 7.23: Modelo da intersecção de um plano com cone

Aqui temos um modelo construído com o geogebra, onde podemos construir variados modelos de hipérbole.

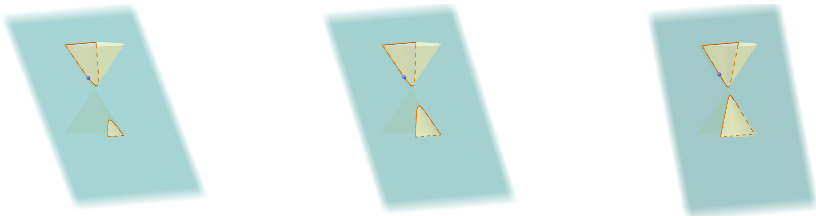


Figura 7.24: Modelo da intersecção de um plano com cone, no geogebra

Destacamos, neste ponto, mais uma vez a importância do software, dando uma ênfase "Janela de visualização 3D" e o conjunto de ferramentas 3D, na eleboração de modelos dinâmicos, simples na tentativa de auxiliar na compreensão do aluno, conforme exibido na figura 7.24.

Capítulo 8

Aplicações práticas de conhecimentos sobre cônicas

Breve introdução: As cônicas no nosso cotidiano

Se observarmos em nossa volta, perceberemos que as cônicas fazem parte do nosso cotidiano, a aplicação de seu conhecimento se faz presente desde áreas como medicina a áreas como telecomunicações. Nesta seção, exibiremos algumas aplicações práticas de uso cotidiano que utilizam conhecimento sobre cônicas.

Superfícies refletoras elípticas

Refletores Odontológico

Os dentistas usam refletores elípticos que tem como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando. Assim, o refletor usado neste caso tem uma lâmpada situada no foco mais próximo da superfície do espelho onde os raios luminosos são emitidos em direção ao outro foco situado no local onde o irá atuar o dentista.

Figura 8.1: Refletor Odontológico

Litotripor

Outra aplicação de uma superficie refletora elíptica acontece no tratamento de cálculo renal, através do procedimento chamado de litotripsia extracorpórea por ondas de choque. Neste procedimento, as ondas de choque criadas fora do corpo viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverisando-os. O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão, onde o ponto de emissão e o ponto de concentração estão situados na posição dos focos da elipse, veja figura 8.2.

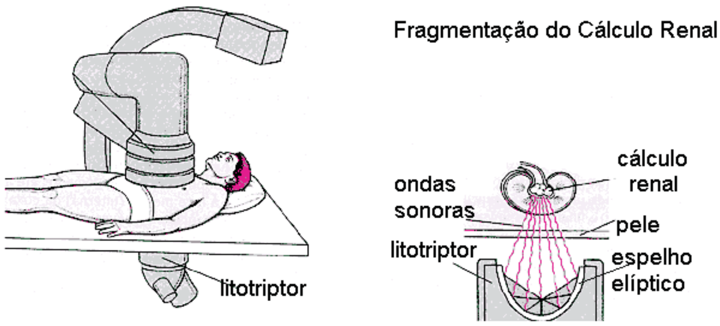
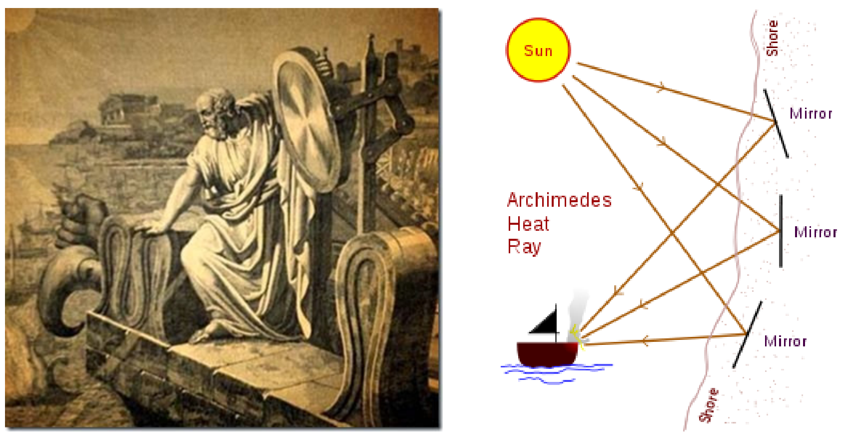


Figura 8.2: Litotripor e espelho elíptico

Superfícies refletoras parabólicas

Raio da morte

Embora o problema apresentado abaixo não seja de nossa atualidade, acredito ser de extrema importância, não só pela engenhosidade ao utilizar o conhecimento sobre cônicas em uma aplicação prática, mas também pela dúvida existente até hoje entre vários historiadores quanto a viabilidade técnica da época para a construção do "raio da morte". Luciano de Samósata, escritor do século II, escreveu que durante o cerco de Siracusa (214-212 a.c.), Arquimedes(287 a.c - 212 a.c) destruiu os navios inimigos com fogo. Os gregos instalaram na costa um conjunto de espelhos planos e direcionaram os raios do sol refletidos contra os barcos romanos. Estes espelhos estariam dispostos coletivamente como um refletor parabólico concentrando a luz solar em navios que se aproximavam, levando-os a pegar fogo.



(a) Arquimedes

(b) Posicionamento dos espelhos em forma de parábola

Figura 8.3: Raio da morte de Arquimedes

Várias outras invenções com o mesmo princípio ainda são utilizados no nosso cotidiano conforme se mostrará a seguir.

Isqueiro Solar

Utilizando o mesmo princípio do **raio da morte**, porém, com um único espelho parabólico, é possivel construir um pequeno incinerador solar. Pela proposição 9.0.2, observa-se que os raios de luz ao encontrarem um espelho parabólico convergirão para o foco deste espelho.

Figura 8.4: Esqueiro solar

Forno Solar

Pela proposição 9.0.2, observa-se que os raios de luz ao encontrarem um espelho parabólico convergirão para o foco deste espelho. Esta propriedade é aplicada nos coletores solares, onde a termperatura no ponto focal pode atingir $3.500°C$; neste ponto é colocado um dispositivo que irá utilizar a energia concentrada. Esta energia pode ser utilizada para gerar eletricidade, derretimento de aço, fazer combustível de hidrogênio, ou nanomateriais. O maior forno solar do mundo esta em Odeillo nos Pirinéus Orientais, na França, inaugurado em 1970, veja a figura 8.5.

Figura 8.5: Forno solar

Usina Solar

Há alguns anos o departamento de energia dos EUA, junto com um grupo de empresas, construiu uma estação de "Torre do poder solar" no deserto de Mojave, perto de Barstow, Califórnia, para demonstrar a viabilidade de aproveitamento deste tipo de energia. A estação é composta por uma matriz de espelhos que refletem o sol para uma torre no centro do campo. No topo desta torre, há um alvo grande usando sal fundido para absorver o calor e transferi-lo para uma caldeira de água no chão. A caldeira cria vapor que então movimenta turbinas e geradores, com uma planta de poder regular para produzir eletricidade. A planta pode produzir 10 megawatts usando quase 2000 espelhos, que se movimentam sob o controle do computador, rastreando o sol e refletindo sua luz para a torre.

Figura 8.6: Usina solar

Microfone Parabólico

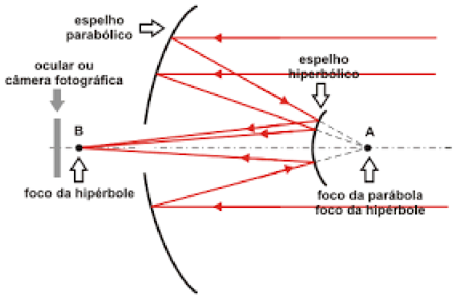
Um microfone parabólico ou microfone direcional é um dispositivo para escuta a distância, ele pode ser considerado um amplificador estéreo de alta sensibilidade pois diminui o nível de ruídos e oferece um facho de captação de sinal o que o torna seletivo em relação ao que se quer gravar, podendo ser usado para ouvir sons bens distantes. Ele é muito utilizado na captura de sons de animais, em seus habitat natural com interferência mínima do homem na hora de registrar os sons. Basicamente é o mesmo princípio da antena parabólica para captação de sinais de satélites. Estes sinais são de baixíssima intensidade e a antena funciona como um concetrador de sinais.

Superfícies refletoras hiperbólicas

Telescópio

O espelho hiperbólico é muito utilizado em telescópio, sendo este o espelho secundário, ou seja além do espelho parabólico principal. Sua importância esta em redirecionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente, colocando-se um espelho refletor hiperbólico (posicionado sobre um dos ramos da hipérbole) com o seu foco coincidindo com o foco do espelho principal. Seu objetivo é fazer com que a imagem, após ser refletida, seja formada na posição do foco do outro ramo da hipérbole. Essa construção foi proposta por Cassegrain em 1672; anteriormente o espelho secundário era uma espelho plano. Atualmente, a maioria dos telescópios utilizam esta configuração incluindo o telescópio Hale.

(a) Telescópio Hale



(b) Sistema Óptico Cassegrain

Figura 8.7: Espelho Hiperbólico

Mesa de bilhar hiperbólica

Uma outra forma interessante de observar as propriedades de reflexão das cônicas seria através de jogos de mesa de bilhar (podendo ser aplicado em qualquer uma das curvas). A mesa de bilhar hiperbólica possui um de seus lados no formato de uma folha da hiperbole com o posicionamento de seu respectivo foco, fora da mesa de bilhar. No segundo foco posiciona-se o buraco da mesa de bilhar. O jogo consiste em uma única tacada em direção ao lado da mesa de bilhar em formato da folha da hipérbole, e devendo a bola cair no buraco após recochetear uma única vez no lado com formato da folha da hipérbole.

Figura 8.8: Bilhar Hiperbólico

Capítulo 9

Atividades em sala de aula

Inicialmente estas atividades aconteceram no Colégio Estadual Machado de Assis, com turmas do segundo e terceiro anos do ensino médio regular, no segundo semestre de 2017. A proposta seria fazer uma revisão sobre geometria analítica, ensinar conceitos básicos do geogebra e por fim trabalhar o conteúdo cônicas.

O período para realizar as primeiras duas partes foi muito extenso, aproximadamente um mês, devido à dificuldade dos alunos nos conteúdos relacionadas à matemática básica, uma parcela considerável dos alunos não tinham conhecimentos mínimos, como: operações aritméticas, expressões literais simples, valor númerico de uma expressão, etc. No desenvolvimento sobre o geogebra a dinâmica foi similar, muitos deles tiveram dificuldades em utilizar o software, por não conhecer suas funcionalidades, ou por não conseguirem reconhecer os objetos gerados no software como sendo modelos criados no computador representando um objeto matemático. Muitos não conseguiam chegar à conclusão das construções sugeridas em sala de aula pois não tinham familiaridade com localização de pontos no plano cartesiano.

Não pude chegar a falar com esses alunos sobre o motivo principal do projeto que seria o estudo das cônicas, pois o horário alocado para o projeto teve que ser remanejado para que os alunos voltassem a ter aulas de matemática. Infelizmente, os alunos já estavam desde o início do ano sem professor de matemática e com a chegada de um professor substituto, foi solicitado pela coordenação que todo tempo livre dos alunos fosse dedicado às aulas de matemática a fim de concluir os conteúdos obrigatórios do ano letivo. Vale ressaltar, neste momento, que o resumo sobre geometria analítica e sobre as funcionalidades do geogebra de uma certa forma atrapalharam o desenvolver do projeto. O resumo sobre geometria analítica na realidade tirou o foco principal do trabalhao que, era estudar as cônicas e permitir que os alunos manipulassem o geogebra de forma mais livre, consumiu um tempo excessivo de sala de aula.

Em 2018 as atividades em sala foram realizadas com alunos do terceiro ano do ensino médio regular, de uma escola particular na cidade de Magé, situada na região metropolitana do Rio de Janeiro. As atividades foram focadas no assunto cônicas, e as atividades do geogebra foram construídas pelo professor permitindo aos alunos que estes apenas manipulassem as variáveis relaconadas a cada atividade. As atividades foram trabalhadas num total de 4 dias, distribuidos da seguinte forma:

1. Apresentação da proposta, aplicação da avaliação diagnóstica e enfoque geométrico.

2. Enfoque algébrico.

3. Outras definições(excentricidade e intersecção do plano com o cone).

4. Resolução de algumas atividades, reaplicação da prova diagnóstica e avalaliação do aluno em relação ao trabalho desenvolvido.

Inicialmente, a proposta foi apresentada para os alunos como metodologia de ensino que se dispõe a melhorar o desenvolvimento do assunto sobre ensino das cônicas no ensino médio. Após uma breve conversa com eles, ficou nítido que uma grande parte deles já havia escutado o nome cônicas de uma maneira formal em aulas passadas; os que não lembraram do nome cônicas, mostraram grande familiaridade com os termos **parábola, elipse** e **hipérbole** e de forma unânime, todos relacionaram a parábola a uma equação do segundo grau(e apenas ela).

A primeira atividade proposta foi aplicar uma avaliação diagnóstica para avaliar o nível de conhecimento da turma sobre o assunto. Embora os alunos tenham demostrado já terem estudado o conteúdo, o resultado da prova foi baixo; a média da turma ficando em 0% de aproveitamento. No mesmo dia da aplicação da prova, foi trabalhado com os alunos o enfoque geométrico das cônicas, e como reconhecer através do desenho se a figura representaria uma cônica. Foram realizadas algumas atividades como as apresentadas em 5.6, sempre deixando claro através das atividades a estrutura geométrica de cada cônica e anotando diferenças entre elas.

No segundo dia, foi apresentado aos alunos o enfoque algébrico relacionando o desenho da cônica com sua equação, permitindo assim que perceberem que as mudanças no desenho da cônica representavam mudanças na sua equação. As atividades foram fundamentais para constatação por parte dos alunos que: o desenho aprendido na aula anterior poderia ser representado por uma equação matemática, que a parte algébrica é um enfoque diferente de um mesmo objeto já estudado, como no exemplo de ativdade representado na figura 6.7.

No terceiro dia, trabalhamos a excentricidade das cônicas. Exibimos como a sua forma se modifica com a mudança de sua excentricidade, através de exemplos e atividades, como os exibidos na atividade representada na figura 7.8, e, neste momento, também foi mostrado que as mesmas curvas poderiam ser obtidas através da intersecção do cone com um plano. Como exemplo temos a atividade representada na figura 7.17, onde é possível visualizar a intersecção do cone com um plano gerando uma circunferência.

No quarto dia, foram trabalhadas algumas atividades para reforçar a assimilação do conteúdo; pediu-se para que os alunos refizessem a avaliação para comparar se houve alguma melhora.

No desenvolver das aulas, foi nítida a surpresa dos alunos com as diferentes formas de representar uma cônica, além do fato de eles entenderem que "uma equação do segundo grau não necessariamente é uma parábola", e, principalmente, que não se precisa utilizar forma de Bhaskara para resolver as equações. Embora os alunos já tivessem visto o conteúdo, na avaliação diagnóstica inicial tiveram dificuldades para responder às perguntas, porém, após as realizações das atividades, obtiveram notas razoáveis, conforme distribuição das notas apesentadas abaixo:

Notas	% de alunos
0 a 2.5	37.5%
2.5 a 5.0	0%
5.0 a 7.5	25%
7.5 a 10.0	37.5%

Outro fato importante a ser destacado é a surpresa que eles tiveram ao utilizar o geogebra como ferramenta de apoio, por meio do qual eles puderam vizualizar as transformações que ocorrem na representação geométrica quando se alterava tanto a equação, como a excentricidade da cônica.

Considerações finais

A proposta deste trabalho, evidentemente, não é de trazer a solução para os muitos problemas que a educação em nosso país atravessa, mas, apenas, o de apresentar aos educadores uma ferramenta motivadora que possa ser aplicada em suas aulas. Buscou-se, ao longo deste trabalho, repensar formas não convencionais de lidar com a situação de desinteresse por parte dos alunos de diversos conceitos ministrados em sala de aula. Foi nesse viés que a proposta se desenvolveu numa perspectiva de melhorias da abordagem dos diversos conceitos. Relacionando o assunto com diversas situações do dia a dia, com exemplos, com aplicações práticas, não apenas com um conteúdo abstrato e muitas vezes não tão bem aproveitado pelos alunos.

A opção de estruturar o trabalho na ordem apresentada é para permitir aos alunos desenvolverem de forma gradativa os conhecimentos, estimulando seu interesse e garantindo a continuidade do aprendizado, sem rupturas no processo de aprendizagem. Destacam-se as atividades propostas e suas respectivas soluções contempladas no apêndice desse trabalho, que podem ser perfeitamente utilizadas em sala de aula pelos professores como um caderno de atividades. Cabe ressaltar que estas atividades são apresentadas como sugestões. A ideia maior deste trabalho é provocar também a criatividade dos educadores tendo como ferramenta as peças apresentadas.

Também é objetivo desta dissertação, além de ser usada como suporte por professores de matemática em sua prática diária, estimular a participação dos alunos no processo de formação do próprio conhecimento, pois fazer parte das indagações e estar em constante procura é um dos fundamentos da vida.

Para finalizar, cumpre dizer que tudo que aqui está sendo apresentado tem o objetivo de se somar a outros recursos que possam convergir para dar uma resposta bem justificada às muitas dúvidas por vezes suscitadas em sala de aula, ampliando a visão e, portanto, o horizonte dos alunos em relação aos diversos aspectos práticos do ensino acadêmico.

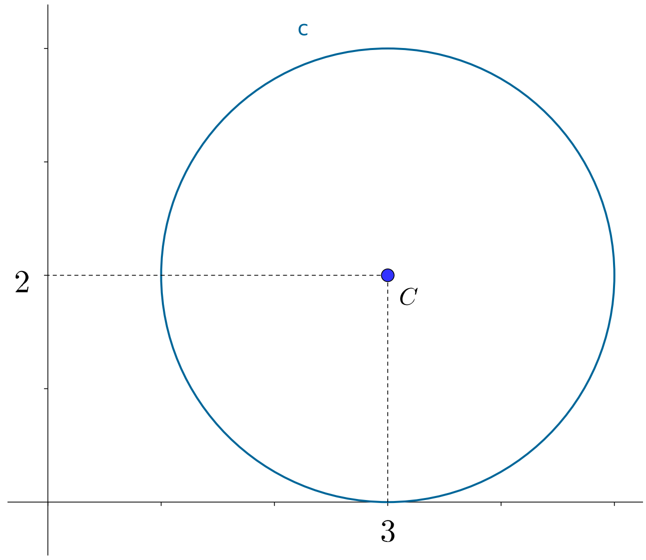
Apêndice

Avaliação diagnóstica

As avaliações sugeridas foram utilizadas pra avaliar o conhecimento prévio que os alunos tinham sobre o assunto, podendo ser aplicado a qualquer série, pois possui uma finalidade diagnóstica. Sugerimos reaplicar estes testes, quando os alunos já tiverem visto todo o conteúdo a fim de obter um feedback da assimilação dos mesmos sobre os assuntos apresentados, a seguir temos as seguintes como exemplo:

Prova sobre circunferência

1. Dada a figura abaixo, determine:



   (a) o centro?
   (b) Sua equação reduzida?
   (c) Sua equação estendida?

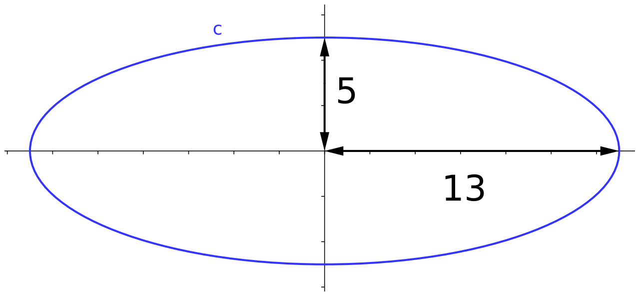
2. Determine a equação da circunferência que possui como diâmetro o segmento AB onde $A = (2, -2)$ e $B = (6, 2)$.

3. Qual é a equação reduzida da circunferência que tem raio 3, tangencia o eixo das abscissas no ponto $A(4, 0)$?

4. Qual o nome do lugar geométrico caracterizado pela intersecção de um plano π com o cone reto, quando o plano é paralelo à base do cone?

Prova sobre elipse

1. Dada a figura abaixo determine:



   (a) As coordenadas dos focos?

   (b) Sua excentricidade?

   (c) A equação da elipse?

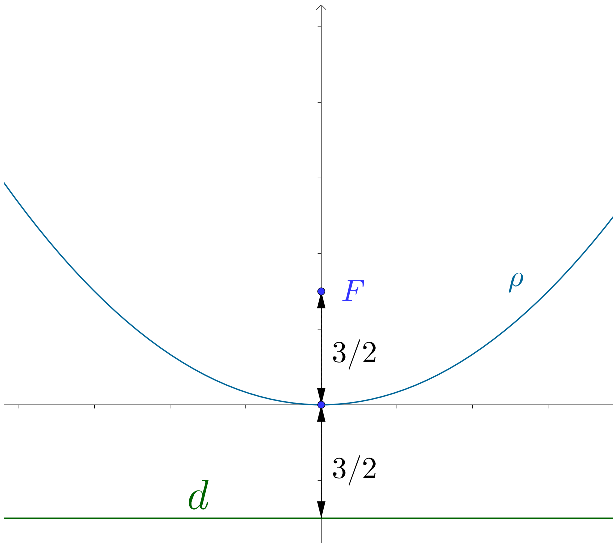
2. Calcule a distância focal e a excentricidade da elipse $\lambda : x^2 + 3y^2 = 6$. Esboce o lugar geométrico.

3. Qual a equação do conjunto de pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1(0, -1)$ e $F_2(0, 1)$ é 8? Esboce o lugar geométrico.

4. Qual o nome do lugar geométrico caracterizado pela intersecção de um plano π com o cone reto, onde os ângulos θ e α são respectivamente os ângulos do plano π com plano que contém a base do cone e da reta geratriz com plano que contém a base do cone, satisfazendo a seguinte propriedade $0 < \theta < \alpha$?

Prova sobre Parábola

1. Dada a figura abaixo determine:



   (a) A coordenada do foco?

   (b) Seu parâmetro?

   (c) A equação da parábola?

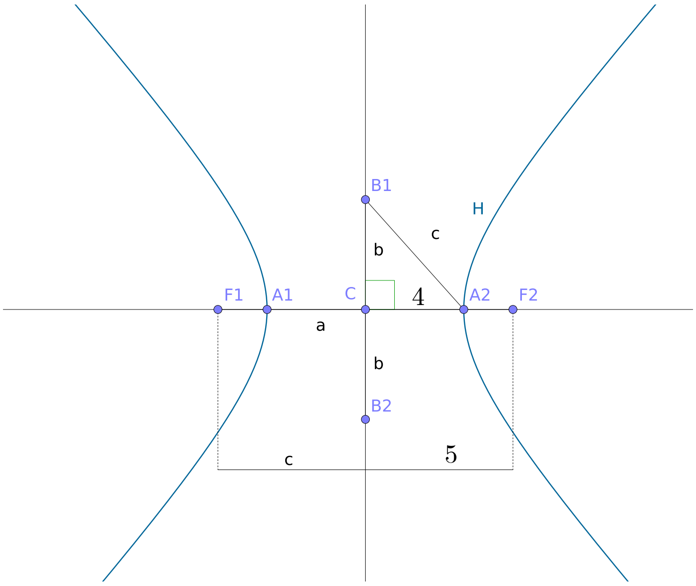
2. Qual é a equação da diretriz da parábola de equação $2x^2 - 7y = 0$? Esboce o lugar geométrico da parábola.

3. Qual a equação do conjunto de pontos $P(x, y)$ que são equidistantes do ponto $F(0, 5)$ e da reta $d : y = 2$? Esboce o lugar geométrico.

4. Qual o nome do lugar geométrico caracterizado pela intersecção de um plano π com o cone reto, onde os ângulos θ e α são respectivamente os ângulos do plano π com plano que contém a base do cone e da reta diretriz com plano que contém a base do cone, satisfazendo a seguinte propriedade $0 < \theta = \alpha$?

Prova sobre Hipérbole

1. Dada a figura abaixo determine:



   (a) As coordenadas dos focos?

   (b) Sua excentricidade?

   (c) A equação da hipérbole?

2. Qual é a excentricidade de equação $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$? Esboce o lugar geométrico da hipérbole.

3. Esboce o lugar geométrico das cônicas $\lambda : x^2 - y^2 = 1$ e $y^2 - x^2 = 1$. Estas equações são coincidentes?

4. Qual o nome do lugar geométrico caracterizado pela intersecção de um plano π com o cone reto, onde os ângulos θ e α são respectivamente os ângulos do plano π com plano que contém a base do cone e da reta diretriz com plano que contém a base do cone, satisfazendo a seguinte propriedade $90 \geq \theta > \alpha$?

Preliminares

Coordenadas no Plano

Um **Sistema (ortogonal positivo) de coordenadas cartesianas no plano**, consiste da escolha de um ponto O do plano denominado origem e duas retas ortogonais concorrentes em O, denominados eixos OX e OY, sob cada uma das quais há uma cópia da reta real $\mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- O zero de cada cópia de $\mathbb{R}$ considerada coincide com o ponto O.
- O plano que contém estes eixos é denominado *plano* OXY ou π.
- Escolhemos um dos semi-eixos do eixo OX para ser o semi-eixo positivo; e o semi-eixo positivo do eixo OY é obtido pela rotação de 90° do semi-eixo OX positivo, no sentido anti-horário, em torno da origem.

Por convenção o eixo OX é denominado **eixo horizontal** e o eixo OY, **eixo vertical**. A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os ponto do plano OXY e os pares ordenados de números reais do conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$$

Em relação ao sistema de coordenadas cartesianas OXY, cada ponto P do plano é caracterizado por uma dupla de números reais (x, y) denominados coordenadas do ponto P no sistema OXY. De fato, ao ponto $P \in OXY$ fazemos corresponder o par ordenado (x, y), onde x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX que passa por P e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passa por P conforme figura 9.3.

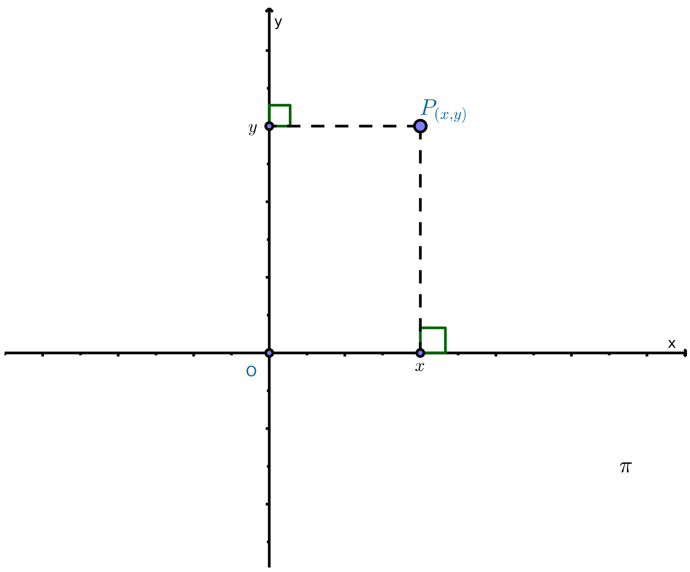


Figura 9.1: Coordenadas x e y do ponto P

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y), associado ao ponto P, são as **coordenadas cartesianas** do ponto P: x é a **abscissa** ou **primeira coordenada** de P e y é a **ordenada** ou **segunda coordenada** de P. Na figura 9.2 ilustramos alguns pontos do plano π com suas coordenadas em relação ao sistema OXY.

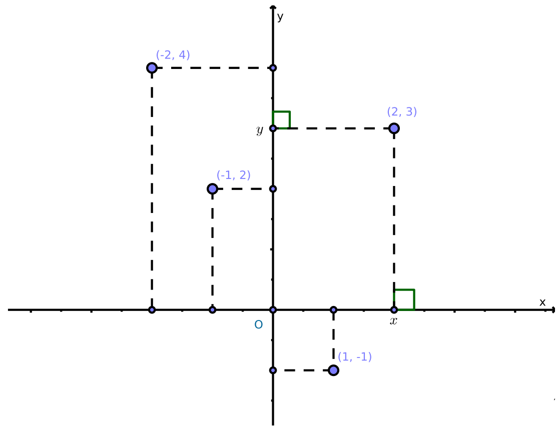


Figura 9.2: Pontos no plano

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas **quadrantes** e enumeradas como na figura 9.3. Observe que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas são:

- **1° Quadrante** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \ e \ y > 0\}$
- **2° Quadrante** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \ e \ y > 0\}$
- **3° Quadrante** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \ e \ y < 0\}$
- **4° Quadrante** $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \ e \ y < 0\}$

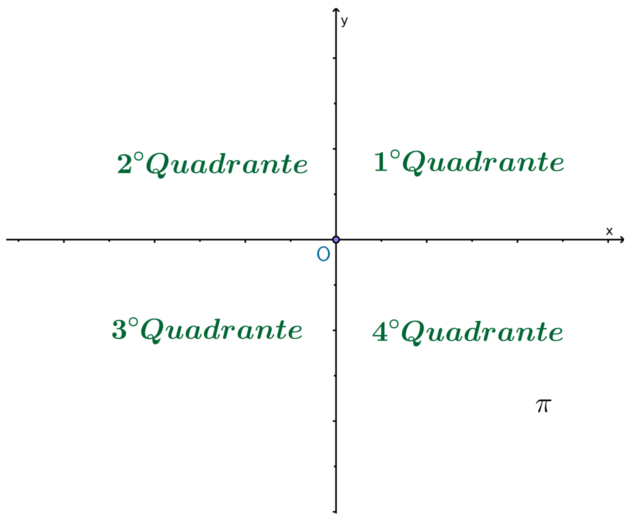


Figura 9.3: Quadrantes do sistema OXY

Distância

Distância entre dois Pontos

A distância entre dois pontos x e y de uma reta numérica é dada pelo módulo da diferença das coordenadas $|y - x|$. Podemos identificar retas horizontais e verticais com a reta numérica, de modo a definir a distância entre dois pontos (do plano) nestas retas. Por exemplo, se tomamos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $R = (x_1, y_2)$ numa reta vertical (ver Figura 9.4), temos que a distância entre P_1 e R (denotada por $d(P_1, R)$) é $|y_2 - y_1|$. De forma análoga, se tomamos $P_2 = (x_2, y_2)$ e $R = (x_1, y_2)$ numa reta horizontal temos que $d(P_2, R) = |x_2 - x_1|$.

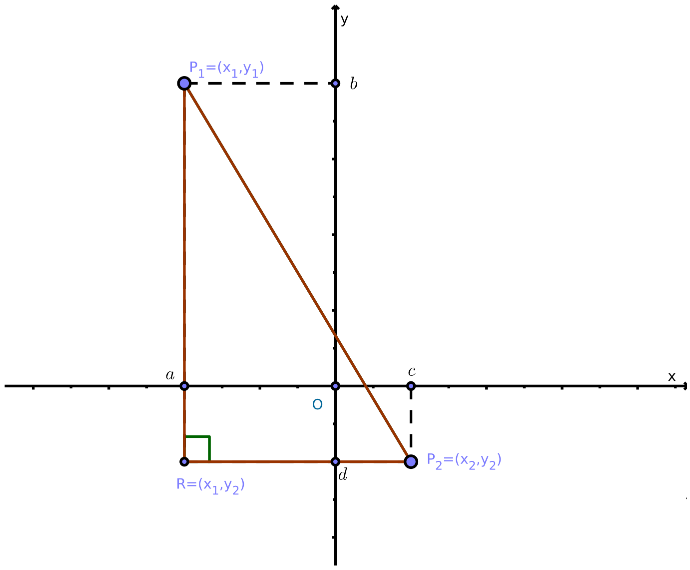


Figura 9.4: Distância entre Pontos no plano π

Com o auxílio das medidas acima e do teorema de pitágoras, podemos definir a distância entre dois pontos P_1 e P_2 de coordenadas cartesianas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) respectivamente, por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{9.1}$$

Já que tal distância representa a hipotenusa do triângulo retângulo P_1P_2R de catetos P_1R e P_2R (ver Figura 9.4), logo:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{d(P_1, R)^2 + d(P_2, R)^2} \\ d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

Distância entre um ponto e uma reta

Seja r uma reta e P um ponto do plano. A distância de P a r que denotaremos por $d(P, r)$ é assim definida: Tomamos a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r, esta reta intersecta r em um único ponto P_O. Logo, a distância de P a r é a distância de P a P_0.

$$d(P, r) = d(P, P_0)$$

Ou seja, definimos a distância de um ponto P a uma reta r, como a menor distância entre P e um ponto da reta r. De fato, se $P \in r$ então $d(P, r) = 0$, pois $P_0 = P$, que é a menor distância de P a qualquer outro ponto de r. Agora, se $Q \in r$, $Q \neq P_0$, então a distância de P a Q é maior que a distância de P a P_0, pois no triângulo PP_0Q o lado PQ é oposto ao ângulo reto, sendo, portanto, o maior dos lados deste triângulo.

Vejamos agora como obter uma fórmula para calcular a distância de um ponto $P = (x_1, y_1)$ a uma reta $r : ax + by + c = 0$. Lembramos que duas retas são perpendiculares se o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1. Logo, a reta s que passa por P e é perpendicular a r tem equações paramétricas:

$$s : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Como $P_0 = r \cap s$, o ponto P_0 é um ponto de s. Logo existe um número real t_0, tal que $P_O = (x_1 + at_0, y_1 + bt_0)$. Pela definição de distância entre um ponto e uma reta temos:

$$\begin{aligned}
d(P,r) &= d(P,P_0) \\
d(P,r) &= \sqrt{(x_1 + at_0 - x_1)^2 + (y_1 + bt_0 - y_1)^2} \\
d(P,r) &= \sqrt{(at_0)^2 + (bt_0)^2} \\
d(P,r) &= \sqrt{a^2t_0^2 + b^2t_0^2} \\
d(P,r) &= |t_0|\sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Resta encontrarmos o valor de t_0. Como $P_0 \in r$ as suas coordenadas satisfazem a equação r, isto é:

$$a(x_1 + at_0) + b(y_1 + bt_0) = c$$

Desenvolvendo esta igualdade encontraremos o valor de t_0:

$$\begin{aligned}
ax_1 + a^2t_0 + by + b^2t_0 &= c \\
t_0(a^2 + b^2) &= c - ax_1 - by_1 \\
t_0 &= \frac{c - ax_1 - by_1}{a^2 + b^2} \\
t_0 &= \frac{-(ax_1 + by_1 - c)}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Substituindo este valor de t_0 na equação 9.2 da distância de P a r, obtemos:

$$\begin{aligned}
d(P,r) &= |t_0|\sqrt{a^2 + b^2} \\
d(P,r) &= \left|\frac{-(ax_1 + by_1 - c)}{a^2 + b^2}\right|\sqrt{a^2 + b^2} \\
d(P,r) &= \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\
d(P,r) &= \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}
\end{aligned}$$

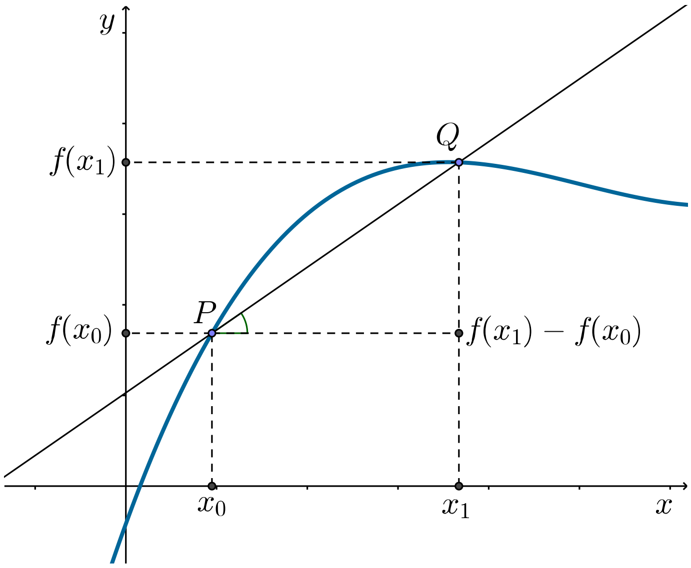
Destacamos o resultado obtido da seguinte maneira:

Proposição 9.0.1 *A distância do ponto $P = (x_1, y_1)$ á reta $r : ax + by - c = 0$ é:*

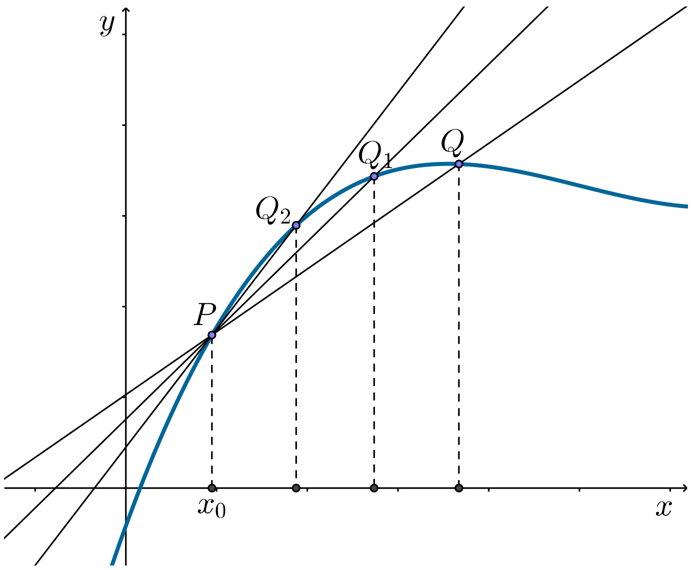
$$d(P,r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{9.2}$$

Tangência

O problema da tangente consiste em encontrar a equação da reta tangente passando em um certo ponto de uma curva que é gráfico de uma função $y = f(x)$. Seja $f(x)$ uma função e seja $x = x_0$ um ponto do seu domínio seja $x_1 = x_0 + h$.
Observe o gráfico de $f(x)$, onde traçamos uma reta secante que passa pelos pontos $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$.



Tomando h cada vez mais próximo de 0, obtemos pontos Q_i mais próximos de P, que definem retas secantes que cortam a curva nos pontos P e Q_i cada vez mais próximos um do outro. Fazendo h cada vez menor é possível obter uma reta que passa pelo ponto P a partir das secantes construídas obtendo a reta tangente.



Quando h se aproxima de 0, se o quociente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

que representa o coeficiente angular da reta secante que passa por $(x_0, f(x_0)$ e $(x_0 +$

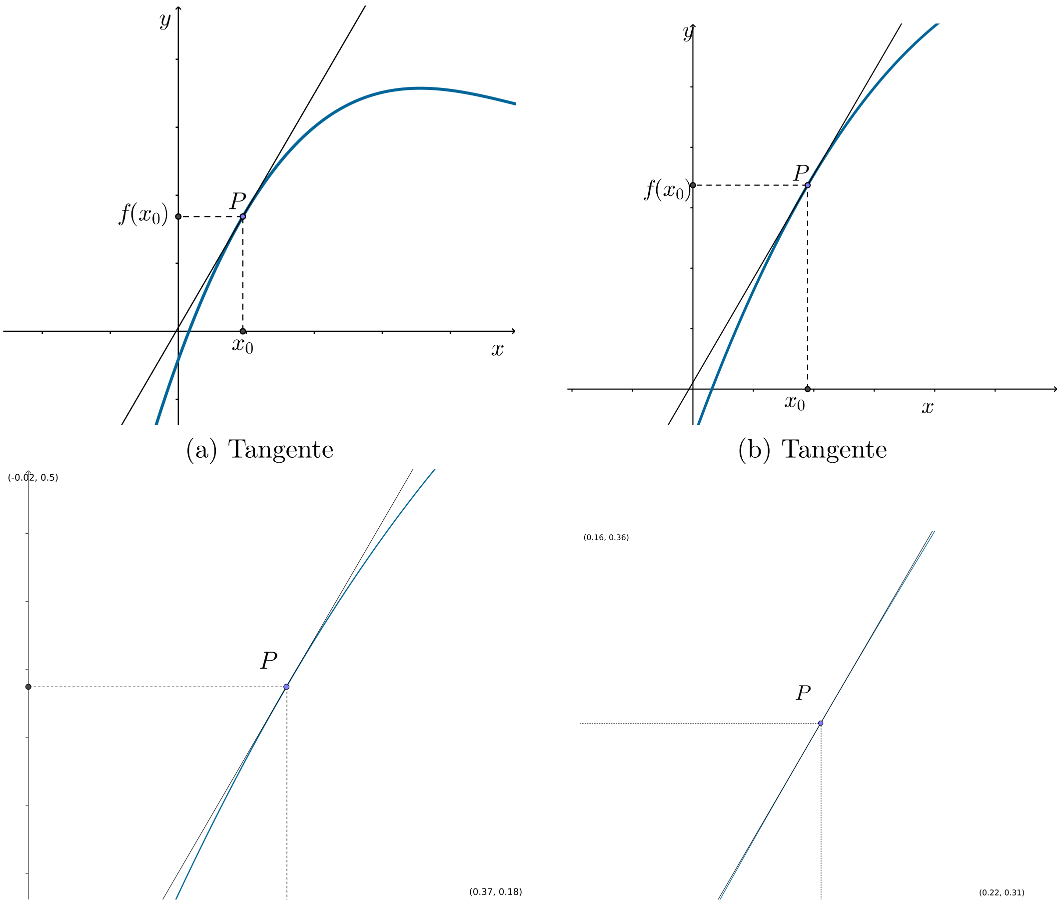
$h, f(x_0+h)$, se aproxima de um determinado valor, esse intuitivamente, deverá ser o coeficiente angular da reta tangente.

Definição 9.0.1 *Reta Tangente*
*A **reta tangente** a uma curva que é gráfico de $y = f(x)$, em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$, é a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

se o limite existir

Podemos, de forma intuitiva, perceber a reta tangente a uma curva $y = f(x)$ no ponto P como sendo a reta que mais se aproxima do comportamento de $f(x)$ neste ponto. Se olharmos através de uma lupa, perceberemos que, quanto mais dermos um zoom no ponto $P = (x_0, f(x_0))$, mais esta curva se assemelha a reta tangente conforme podemos ver na figura abaixo:



(a) Tangente (b) Tangente

(c) Tangente (d) Tangente

Translação dos eixos coordenados

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano e $\overline{OXY}$ o sistema cujo eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ sejam paralelos aos eixos OX e OY respectivamente. Designamos por $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\overline{OXY}$ e por (x, y) as coordenadas do ponto P no sitema de eixos OXY. Se $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$ são os vetores unitários na direção e sentido, respectivamente dos eixos OX e OY (e portanto dos eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$) segue:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{\overline{O}P} &= \overline{x}\overrightarrow{e_1} + \overline{y}\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{O\overline{O}} &= x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

Como:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\overline{O}} + \overrightarrow{\overline{O}P}$$

Obtemos que:

$$\begin{aligned} x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} &= (x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2}) + (\overline{x}\overrightarrow{e_1} + \overline{y}\overrightarrow{e_2}) \\ x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} &= (\overline{x} + x_0)\overrightarrow{e_1} + (\overline{y} + y_0)\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto P no sistema OXY e $\overline{OXY}$ são relacionadas pela expressão:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{x} = x - x_0 \\ \overline{y} = y - y_0 \end{array} \right.$$

Propriedades de reflexão das cônicas

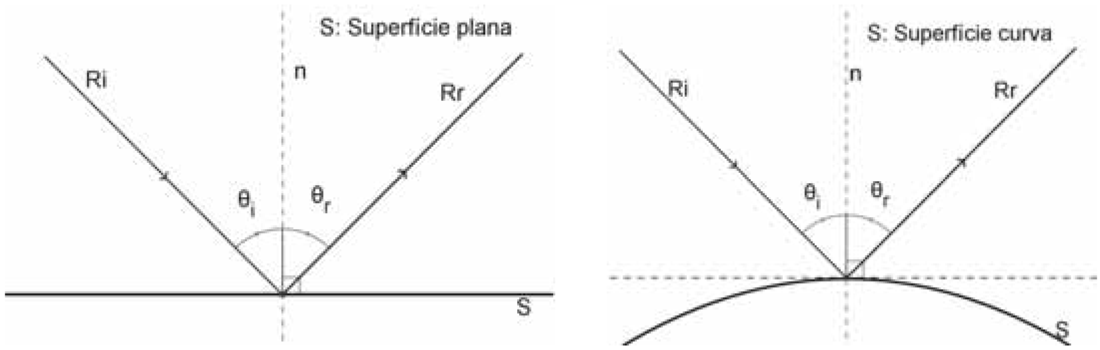
Pelas leis de reflexão da luz tem-se que:

1. O raio incidente R_i, a reta normal n, e o raio refletido Rr são coplanares.

2. O ângulo de incidência θ_i é igual ao ângulo de reflexão θ_r

A seguir enunciamos algumas propriedades da reflexão:

Proposição 9.0.2 *Se a fonte de luz estiver situada no foco de um espelho parabólico todos os seu raios refletidos serão paralelos ao eixo de simetria. Se os raios chegarem a superfície deste espelho paralelamente ao eixo de simetria serão refletidos no foco.*



(a) Superficie Plana (b) Superfície Curva

Figura 9.5: Leis da reflexão da luz

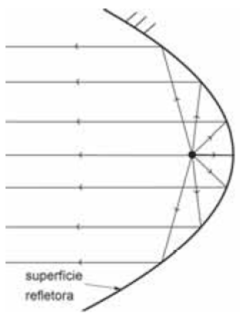


Figura 9.6: Superfície refletora parabólica

Proposição 9.0.3 *Se a fonte de luz estiver situada em um dos focos de um espelho elíptico, todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco.*

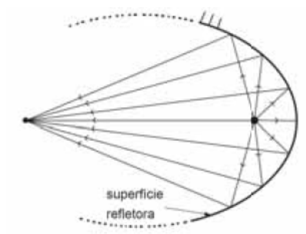


Figura 9.7: Superfície refletora elíptica

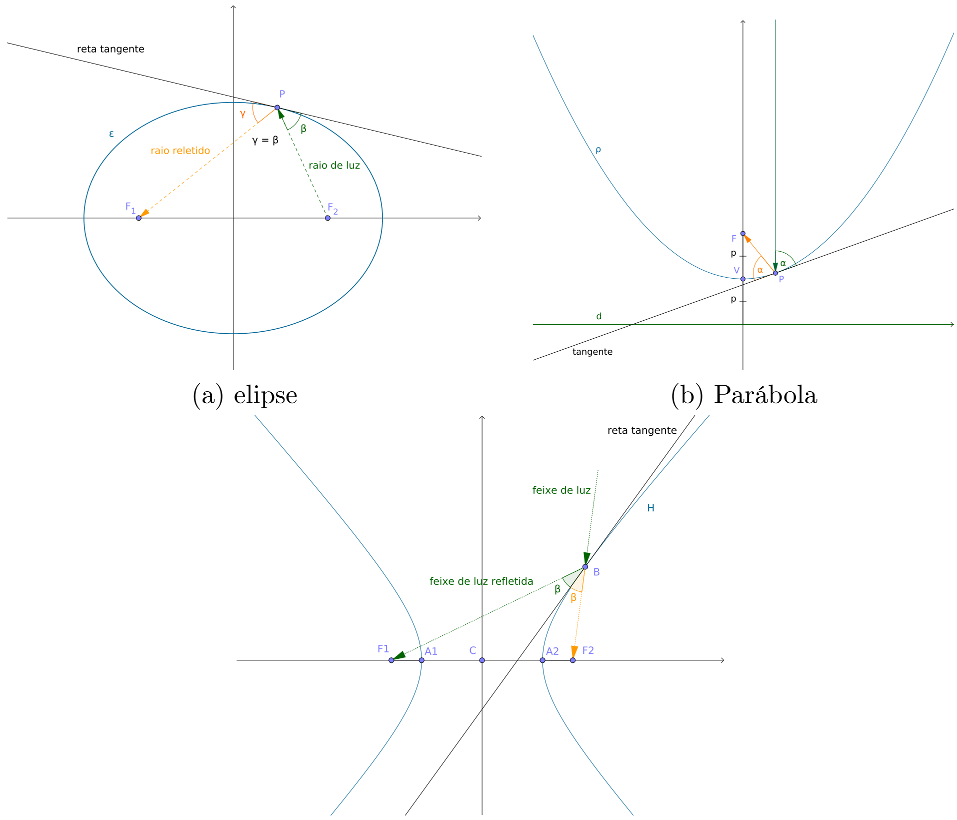
Pelas propriedades da reta tangente a uma cônica, já apresentada nas seções anteriores, temos os seguintes resultados:

1. A reta tangente à elipse num ponto P forma ângulos iguais com os segmentos que une P ao focos.

2. A reta tangente à parábola num ponto P forma ângulos iguais com a reta que passa por P, paralela ao eixo de simetria e com o segmento que liga P ao **foco**.

3. A reta tangente à hipérbole num ponto P forma ângulos iguais com os segmentos que unem P aos **focos**.

Observação 9.0.1 *Podemos observar em toda parábola que:*



(a) elipse (b) Parábola

(c) Hipérbole

Figura 9.8: Propriedades da reta tangente

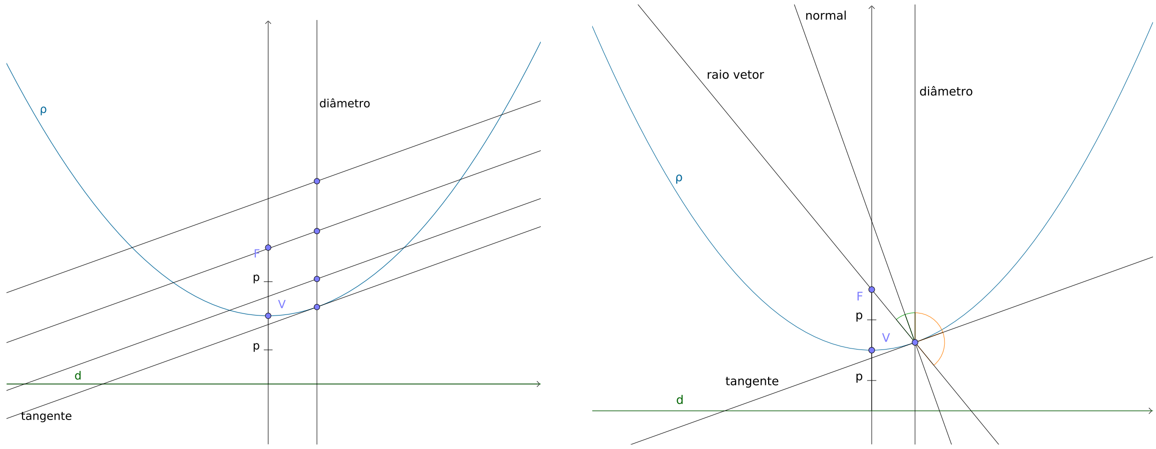
- *Os pontos médios de suas cordas paralelas a uma reta tangente dada determinam uma reta paralela ao eixo focal chamada de diâmetro da parábola, que intersecta a parábola no ponto de tangência P_t, ver figura 9.9a para mais detalhes ver [33], o segmento definido pelos pontos P_t e F é denominado raio vetor associada ao ponto P_t.*

- *Por consequência da proposição 9.0.2, as retas tangente e normal à parábola num ponto dado da curva são as bissetrizes das retas suporte do raio vetor e do diâmetro que passam por este ponto, ver figura 9.9b*

Uma análise da excentricidade da elipse e da hipérbole

Como já havíamos mencionado acima, **Ruggero Giuseooe Boscovich**(1711 - 1787)[1] publicou em 1754 um estudo unificado sobre as cônicas por intermédio de sua excentricidade. Buscamos aqui deixar como material extra, que as equações desenvolvidas no capítulo 6, satisfazem as mesmas propriedades em relação à excentricidade vistas no capítulo 7, permitindo assim ratificar que se trata de um mesmo assunto, embora haja a possibilidade de abordá-lo através de enfoques diferentes.

[1]ver Capítulo 3



(a) Cordas paralelas (b) Tangente e Normal

Figura 9.9: Propriedade das parábola

Estudo da elipse através de sua excentricidade

Como já foi definido, a equação da elipse 6.4, onde a elipse em questão possui seus focos sobre o eixo x, conforme figura abaixo:

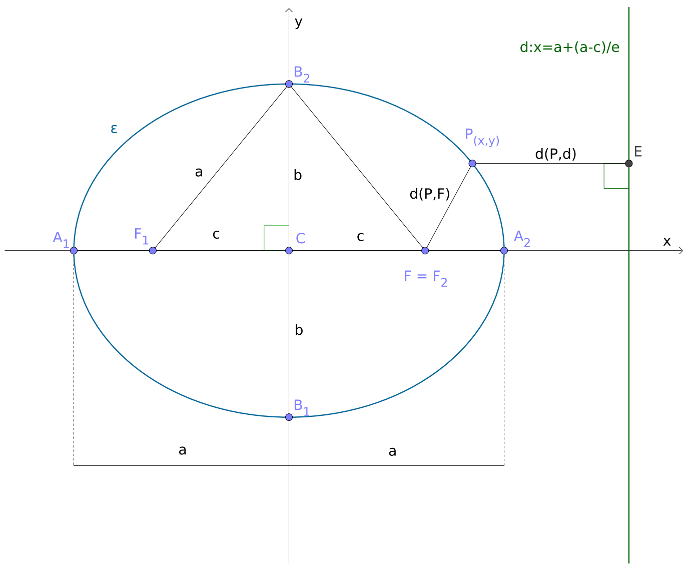


Figura 9.10: Elipse

Agora vamos considerar, como na fig 9.10, nossa reta diretriz $d : x = a + \frac{a-c}{e}$, onde e é a excentricidade da elipse.

Proposição 9.0.4 *Todo ponto $P \in \varepsilon$ satisfaz $d(P, F) = e \cdot d(P, d)$.*

Vejamos a validade do teorema 7.1.1 para alguns pontos específicos da elipse e depois demonstraremos ser válido para todos os pontos da elipse. Consideremos primeiro sendo

$P = A_2$, neste caso temos que $P = (a, 0)$

$$
\begin{aligned}
d(P,d) &= d(A_2,d) \\
d(P,d) &= a + \frac{a-c}{e} - a \\
d(P,d) &= a + \frac{a-c}{e} - a \\
d(P,d) &= \frac{a-c}{e}.
\end{aligned}
\tag{9.3}
$$

Como:

$$
d(P,F) = a - c. \tag{9.4}
$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
e \cdot d(P,d) &= e \cdot \frac{a-c}{e} \\
e \cdot d(P,d) &= a - c \\
e \cdot d(P,d) &= d(P,F)
\end{aligned}
\tag{9.5}
$$

Logo o teorema é valido para o ponto A_2. Vamos demostrar que o teorema é valido para todo ponto $P \in \varepsilon$. Seja $P_{(x,y)} \in \varepsilon$ considerando ainda $F = F_2$ e $d : x = a + \frac{a-c}{e}$, da equação 5.2.1 temos que:

$$
\begin{aligned}
d(P,F_1) + d(P,F_2) &= 2a \\
d(P,F_1) + d(P,F) &= 2a \\
d(P,F) &= 2a - d(P,F_1) \\
d(P,F) &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
d(P,F) &= 2a - \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}.
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

da equação 6.4020203 temos que:

$$
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9.7}
$$

Logo:

$$
y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}. \tag{9.8}
$$

Substituindo este valor na equação 9.6 teremos:

$$
d(P,F) = 2a - \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}}. \tag{9.9}
$$

Do teorema fundamental da elipse temos que:

$$b^2 \;=\; a^2 - c^2. \tag{9.10}$$

substituindo em 9.9 teremos:

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= 2a - \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - \frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= 2a - \sqrt{x^2 + 2xc + a^2 - \frac{a^2x^2 - c^2x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= 2a - \sqrt{x^2 + 2xc + a^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= 2a - \sqrt{a^2 + 2xc + \frac{c^2x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= 2a - \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} \\
d(P,F) &= 2a - |a + \frac{c}{a}x| \\
d(P,F) &= |2a - a - ex| \\
d(P,F) &= |a - ex|.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Podemos observar que $d(P,d)$ pode ser encontrada conforme desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned}
d(P,d) &= |x - (a + \frac{a-c}{e})| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a-c}{e}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a-c}{e}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a}{e} + \frac{c}{e}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a}{e} + \frac{c}{\frac{c}{a}}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a}{e} + a| \\
d(P,d) &= |x - \frac{a}{e}|.
\end{aligned} \tag{9.12}$$

Multiplicando $d(P,d)$ por e teremos:

$$\begin{aligned}
e \cdot d(P,d) &= e|x - \frac{a}{e}| \\
e \cdot d(P,d) &= |ex - a|
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Se $|ex| \geq a$ temos que:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= |a - ex| \\ d(P,F) &= -(a - ex) \\ d(P,F) &= ex - a \end{aligned} \tag{9.14}$$

Se $|ex| < a$ temos que:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= |a - ex| \\ d(P,F) &= a - ex \\ e \cdot d(P,d) &= |ex - a| \end{aligned} \tag{9.15}$$

Demonstrando assim que o teorema é valido para todo $P \in \varepsilon$.

Estudo da hipérbole através de sua excenticidade

Como já foi definido, a equação da hipérbole 6.13, onde a hipérbole em questão possui seus focos sobre o eixo x, conforme figura abaixo:

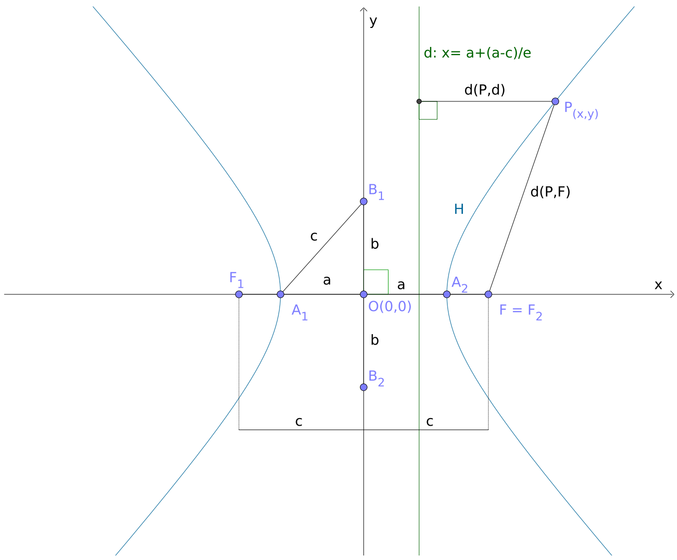


Figura 9.11: Hipérbole

Agora vamos considerar como na figura 9.11, nossa reta diretriz $d: x = a + \frac{a-c}{e}$, onde e é a excentricidade da hipérbole.

Queremos demonstrar que todo ponto $P \in H$ satisfaz $d(P,F) = e \cdot d(P,d)$. Vejamos a validade do teorema 7.1.1 para alguns pontos específicos da hipérbole e depois demonstraremos ser válido para todos os pontos da hipérbole. Consideremos primeiro sendo $P = A_2$, neste caso temos que $P = (a, 0)$

$$\begin{aligned} d(P,d) &= d(A_2,d) \\ d(P,d) &= |a + \frac{a-c}{e} - a| \\ d(P,d) &= |\frac{a-c}{e}|. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Como:

$$d(P,F) = |a-c|. \tag{9.17}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} e \cdot (P,d) &= e \cdot \frac{a-c}{e} \\ e \cdot (P,d) &= a-c \\ e \cdot (P,d) &= d(P,F). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Logo o teorema é válido para o ponto A_2. Vamos demonstrar que o teorema é válido para todo ponto $P \in H$. Seja $P_{(x,y)} \in H$ considerando ainda $F = F_2$ e $d : x = a + \frac{a-c}{e}$. Temos que:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P_{(x,y)}, F_{(a,0)} \\ d(P,F) &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ d(P,F) &= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \end{aligned} \tag{9.19}$$

Da equação 6.13 temos que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9.20}$$

Logo:

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 \tag{9.21}$$

Substituindo este valor na equação 9.19 teremos:

$$d(P,F) = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 - b^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}} \tag{9.22}$$

Do teorema fundameltal da hipérbole temos que:

$$c^2 = b^2 + a^2 \tag{9.23}$$

substituindo em 9.22 teremos:

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= \sqrt{x^2 - 2xc + a^2 + b^2 - b^2 + \frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= \sqrt{x^2 - 2xc + a^2 - x^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= \sqrt{a^2 - 2xc + \frac{c^2x^2}{a^2}} \\
d(P,F) &= \sqrt{a^2 - 2xc + e^2x^2} \\
d(P,F) &= \sqrt{(a-ex)^2} \\
d(P,F) &= |a - ex|.
\end{aligned} \tag{9.24}$$

Podemos observar que $d(P,d)$ pode ser encontrada conforme desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned}
d(P,d) &= |x - (a + \frac{a-c}{e})| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a-c}{e}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a-c}{e}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a}{e} + \frac{c}{e}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a}{e} + \frac{c}{\frac{c}{a}}| \\
d(P,d) &= |x - a - \frac{a}{e} + a| \\
d(P,d) &= |x - \frac{a}{e}|.
\end{aligned} \tag{9.25}$$

Multiplicando $d(P,d)$ por e teremos:

$$\begin{aligned}
e \cdot d(P,d) &= e|x - \frac{a}{e}| \\
e \cdot d(P,d) &= |ex - a|
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Se $|ex| \geq a$ temos que:

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= |a - ex| \\
d(P,F) &= -(a - ex) \\
d(P,F) &= ex - a \\
e \cdot d(P,d) &= |ex - a| \\
e \cdot d(P,d) &= ex - a
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Se $|ex| < a$ temos que:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= |a - ex| \\ d(P,F) &= a - ex \\ e \cdot d(P,d) &= |ex - a| \\ e \cdot d(P,d) &= -(ex - a) \\ e \cdot d(P,d) &= a - ex. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Concluindo, em ambos os casos, que:

$$e \cdot d(P,d) = d(P,F). \tag{9.29}$$

Demonstrando assim que o teorema é valido para todo $P \in H$.

Referências Bibliográficas

[1] *Apostilas da Plataforma de Ensino Eleva.* Rio de Janeiro: Edição Própria, 2016.

[2] BOYER, Carl Benjamin; *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

[3] Bortolossi, Humberto José *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática-2015*

[4] BRASIL; *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1998.

[5] Centurión, Marília Jacubovic, ose *Matemática Teoria e Contexto.* São Paulo: Sariva, 2012

[6] Dante, Luiz roberto; *Matemática Contexto Aplicação.* São Paulo: Ática, 2010.

[7] Delgado, Jorge *Geometria Analítica*

[8] Delgado Gomes, Jorge J. *Geometria Analitica vol.I.* Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2004.

[9] Ferrreira, Edson Luiz Cataldo; *Geometria Basica v.1, 3ª ed..* Rio de Janeiro: Fundaçao CECIERJ, 2007.

[10] FREIRE, Paulo; *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, 2011.

[11] FREIRE, Paulo; *Educação e Mudança.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1983.

[12] Fremont, Hebert; *Teaching Secondary Mathematics through Aplications* Boston, Massachusetts: Prindle, Weber Schimidit,1969.

[13] Giraldo, Victor Caetano, Paulo Mattos, Francisco *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[14] Gonçalves, Ricardo; *Aprendendo sobre elipse por meio de atividades práticas* II SEMINÁRIO DE ESCRITAS E LEITURAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (II SELEM)

[15] Iezzi, Gelson; *Matemática Ciência e Aplicação.* São Paulo: Saraiva, 2001.

[16] Iezzi, Gelson Dolce, Osvaldo Degenszajn,David Périgo, Roberto Almeida, Nilza de *Matemática Ciência e Aplicação.*

[17] Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. Disponível em 05/02/2016 no site *http://www.geogebra.im-uff.mat.br.*

[18] Juracélio Ferreira, Lopes; *Cônicas e Aplicações* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, 2011.

[19] LEHMANN, Charles H.; *Geometria Analítica.* Tradução RUI PINTO DA SILVA SIECZKOWSKI. São Paulo, SP:Ed. Globo, 1998.

[20] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Mateática e Outras Histórias.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[21] Machado, Mirtes *Parábolas - Curvas preciosas* Programa de Desenvolvimento Educacional Aperfeiçoamento/Especialização em Plano de Desenvolvimento Educacional pela Universidade Estadual de Londrina

[22] *Matemática Scipione 8ª série, 1996, 4ª edição* Editora Scipione

[23] Ms. Ivan Nogueira dos Santos; *Atividades exploratórias de geometria analítica plana utilizando o geogebra* Dissertação de Mestrado profissional em Educação Matemática

[24] M. souza Martis, Angela; *Fundamentos da Educação 2.* Rio de Janeiro: Fundaçao CECIERJ, 2009.

[25] Nenna Gonçalvez, Zózimo; *Geometria Analítica Plana, Tratamento Vetorial.* Livros Técnicos e Científicos, Editora SA, de 1978.

[26] NEVES, Lucia Maria Wanderley; *Educação e Política no Brasil de Hoje.* São Paulo: Cortez, 1994.

[27] NEVES, Lucia Maria Wanderley; *Geometrias não Euclidianas - Uma breve introdução às Geometrias Hiperbólicas.* Disponível em 19/02/2014 no site *http://www.im.ufrj.br/ risk/diversos/gne.html*

[28] Orientações curriculares para o ensino médio. Disponível em 01/07/2015 no site *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book*$_v$*olume*$_0$1$_i$*nternet.pdf*

[29] Paiva, Manoel *Matemática Paiva.* São Paulo: Moderna, 2009.

[30] Parâmetros Curriculares Nacionais-Bases Legais. Disponível em 01/07/2015 no site *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf.*

[31] Parâmetros Curriculares Nacionais-Temas Transversais. Disponível em *http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro081.pdf.* Visitado no dia 20/08/2015.

[32] Roque, Tatiana Carvalho, João Bosco Pitombeira de *Tópicos de História da Matematica* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[33] Santos, Sérgio; *USO DE CORDAS PARALELAS PARA A RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMAS DE TANGÊNCIA EM CURVAS CÔNICAS: APLICAÇÃO EM GEOMETRIA DESCRITIVA* Artigo educação gráfica, issn:2179-7374, ano 2012

[34] Silveira, Ênio. *Matemática Compreensão e Prática.* São Paulo: Moderna, 2013

[35] Siqueira, Carlos; *Um estudo didático das cônicas: Quadros registros e pontos de vistas* Mestrado em educação matemática

[36] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo; *Geometria Analítica*. São Paulo, SP: Pearson Makrom Books, 1987.

[37] Stocomo Smole, Katia Ignes Diniz, Maria *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: Sariva, 2013