

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL**

MAXWEL SOARES DE OLIVEIRA

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM
DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA PERSPECTIVA
DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

VITÓRIA-ES

2018

MAXWEL SOARES DE OLIVEIRA

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE
COMBINATÓRIA NA PERSPECTIVA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel

VITÓRIA - ES

2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

O48p Oliveira, Maxwell Soares de, 1995-
Uma proposta para o ensino-aprendizagem de análise combinatória na perspectiva de resolução de problemas / Maxwell Soares de Oliveira. – 2018.
59 f. : il.

Orientador: Júlia Schaetzle Wrobel.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Análise combinatória. 2. Solução de problemas. 3. Raciocínio. I. Wrobel, Julia Schaetzle. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Elaborado por Perla Rodrigues Lôbo – CRB-6 ES-527/O



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Uma Proposta para o Ensino – Aprendizagem de Análise Combinatória na Perspectiva de Resolução de Problemas"

Maxwel Soares de Oliveira

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 13/07/2018 por:

Prof.ª Dr.ª Julia Schaeztle Wrobel
Orientadora - UFES

Prof.ª Dr.ª Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Membro Interno - UFES

Prof.ª Dr.ª Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Membro Externo – IFES/Vitória

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido chegar até aqui para que enfim eu possa concluir mais uma etapa importante da minha vida.

Agradeço aos meus pais, Roberto e Sônia, pela ótima educação que me deram em casa desde pequeno e por, mesmo sem terem feito um curso superior, me incentivarem sempre a estudar me mostrando o quanto os estudos seriam importantes para o meu futuro. Hoje, mais do que nunca, tenho a absoluta certeza que eles tinham toda razão.

Agradeço a todo o corpo docente do Departamento de Matemática da UFES - Universidade Federal do Espírito Santo, e em especial à minha orientadora Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel que esteve presente em toda a minha trajetória acadêmica desde a graduação até o mestrado, sempre me dando suporte não só como professora, mas também como tutora do PET – Programa de Educação Tutorial, coordenadora do PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, e por fim orientadora nessa dissertação de mestrado.

Agradeço aos meus familiares, aos meus colegas de curso e a todos os meus amigos que com certeza também contribuíram para que eu conseguisse concluir mais essa etapa.

RESUMO

Sabendo da importância da análise combinatória como um dos conteúdos básicos de Matemática do ensino médio, propomos uma sequência didática pautada no ensino desse conteúdo na perspectiva de resolução de problemas. A partir do princípio aditivo e do princípio multiplicativo, juntamente com o uso do raciocínio lógico, aplicamos estratégias diferenciadas para a resolução dos mais variados tipos de problemas de contagem. Descrevemos toda a teoria básica da análise combinatória, sempre tomando como ponto de partida um problema motivador. Desta forma, buscamos tornar o estudo da análise combinatória muito mais interessante e atrativo.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Resolução de problemas. Raciocínio lógico. Princípio multiplicativo.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	9
3	PRINCÍPIO ADITIVO E PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO	13
4	PERMUTAÇÕES SIMPLES	22
5	PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES.....	28
6	COMBINAÇÕES SIMPLES.....	36
7	COMBINAÇÕES COMPLETAS.....	42
8	OUTROS PROBLEMAS ENVOLVENDO TÉCNICAS DE CONTAGEM.....	48
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
10	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	58

1 INTRODUÇÃO

Seja na vida pessoal ou na vida profissional, frequentemente nos deparamos com situações nas quais temos dificuldades para encontrar uma solução. Sermos criativos e termos um bom raciocínio lógico, às vezes, é essencial para que possamos conseguir montar estratégias para enfrentar e resolver esses tipos de situações.

Não é coincidência que a criatividade e o raciocínio lógico são indispensáveis também no estudo da Matemática. De acordo com Silver (1997, apud Vale; Pimentel, 2012, p.1) “a investigação tem mostrado que a resolução e a formulação de problemas em Matemática estão intimamente relacionados com a criatividade”. Assim, a capacidade de raciocínio adquirida na Matemática escolar muitas vezes ajuda no desenvolvimento de estratégias para resolvermos problemas do cotidiano. Porém, em tempos em que Matemática é sinônimo de decorar fórmulas, a criatividade para atacar problemas vem sendo cada vez mais rara de ser encontrada nas pessoas.

Despertar o interesse dos alunos no estudo da Matemática é um desafio enfrentado por muitos professores. Mas convenhamos que fazer com que os alunos apenas decorem e apliquem fórmulas é uma prática no mínimo desmotivadora, além de não estimular o alargamento do pensamento matemático dos estudantes. As aulas de Matemática devem fazer sentido para os alunos, problemas do cotidiano devem ser explorados em sala de aula e as experiências extraclasse trazidas pelos discentes devem ser valorizadas, sempre permitindo que o processo de ensino-aprendizagem ocorra de forma dialogada e o conhecimento seja construído a partir da resolução de problemas. Segundo Onuchic (1999, p. 207) “ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender Matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso”.

Um conteúdo de Matemática que esteve presente no currículo básico do ensino médio é a análise combinatória. O texto com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 94) destacava que “o termo *combinatória* está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos” e indicava diferentes temas que poderiam ser trabalhados na escola, como por exemplo, o clássico exemplo das Pontes de Königsberg: considere um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes. Partindo de uma das ilhas, é possível passar por todas as demais ilhas e voltar ao ponto de partida, cruzando-se no caminho cada uma das pontes uma única vez? Para resolvê-lo, é necessário recorrer às estruturas de Grafos.

A Base Nacional Comum Curricular abandona a palavra *combinatória*, restringindo o conteúdo, mas destaca que uma das habilidades que o aluno deve desenvolver no Ensino Médio é a de “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2017, p. 529). Ainda que as orientações tenham se tornado restritas, optamos por usar neste texto o termo mais geral, análise combinatória, ao invés de problemas de contagem.

Algo que motivou a realização deste trabalho foi uma entrevista que fizemos ainda na graduação, na disciplina de iniciação ao estágio, com alguns professores do ensino básico de escolas públicas e privadas, na qual algumas das perguntas a serem respondidas foram a respeito de qual conteúdo de matemática os professores achavam mais difícil de ensinar, e qual conteúdo os alunos tinham mais dificuldade em aprender. Apesar de ser um assunto cujos pré-requisitos são somente as quatro operações básicas: adição; subtração; multiplicação e divisão, a análise combinatória foi considerada por muitos dos professores entrevistados o conteúdo mais difícil de ser ensinado e, conseqüentemente, o conteúdo mais difícil de ser aprendido pelos alunos. Em meio a fórmulas de permutações, combinações e arranjos, os alunos se veem perdidos quando se deparam com problemas dessa natureza, e perguntas como: “é para usar a fórmula de combinação ou a de arranjo?” ou “é para usar a fórmula de permutação com repetição ou sem?” são frequentes em salas de aula.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência didática para o ensino de análise combinatória na perspectiva de resolução de problemas, priorizando o raciocínio matemático em detrimento da aplicação mecânica de fórmulas. Iniciaremos discutindo a respeito da importância da resolução de problemas no ensino da Matemática e, posteriormente, veremos como é possível desenvolver o estudo da análise combinatória a partir de problemas motivadores. Na perspectiva de alargar o pensamento matemático do aluno, destacaremos estratégias diferenciadas para resolução de problemas envolvendo as técnicas de contagem.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Frequentemente nas aulas de Matemática os professores são questionados pelos alunos sobre o porquê do estudo da Matemática e o para que serve tudo aquilo que eles aprendem. Os questionamentos dos alunos são válidos, visto que em algumas ocasiões os alunos são bombardeados com fórmulas e regras que devem ser memorizadas e que para eles não faz sentido nenhum. Decorar fórmulas para resolver exercícios é rotina em aulas de Matemática e,

quanto mais os alunos avançam nos conteúdos, menos a Matemática parece fazer sentido.

É comum nas escolas nos depararmos com aulas de Matemática nas quais os alunos estão acostumados a resolver centenas de exercícios mecânicos cujos procedimentos de resolução são sempre os mesmos. Certamente, exercícios de fixação têm a sua importância, mas estes mesmos alunos que conseguem resolver esses exercícios mecânicos em alguns segundos, têm uma enorme dificuldade quando são colocados frente a um problema. Vale ressaltar a diferença entre um exercício e um problema. Segundo Kantowski (1981, apud Abrantes, 1989, p.3) “um problema é uma situação que difere de um exercício pelo fato de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução.” Assim, por estarem acostumados apenas a memorizar algoritmos e aplicar fórmulas, os alunos se saem muito bem em resolver exercícios, mas pecam na resolução de problemas.

Problemas a serem resolvidos surgem naturalmente na vida de todas as pessoas. Quando trazemos para as aulas exemplos do cotidiano que são familiares aos alunos, percebemos claramente que a aula fica mais dinâmica e interativa, pois eles percebem que a Matemática pode sim ser utilizada como ferramenta para a resolução não só de problemas fictícios, mas também para aqueles que surgem no dia-a-dia.

Um dos conteúdos de Matemática do currículo básico do ensino médio em que a resolução de problemas é explorada é a análise combinatória. Livros didáticos de alguns autores, como Dante (2016) e Souza (2013), contemplam listas de exercícios e problemas para os alunos resolverem ao fim de cada capítulo. Assim, após serem explicadas, por exemplo, as ideias relacionadas a combinações simples, Souza (2013) propõe aos alunos as seguintes atividades:

- 1) (Souza, 2013, p. 230) Calcule $C_{15,10}$.
- 2) (Souza, 2013, p. 245) Uma lanchonete oferece aos seus clientes uma lista com 15 frutas que podem ser misturadas para o preparo de sucos. Se uma pessoa deseja um suco com 5 frutas, de quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse pedido?

Observamos nesses dois exemplos bem simples que eles possuem as mesmas estratégias de solução, uma vez que escolher 5 frutas em 15 para compor o suco é equivalente a escolher 10 frutas em 15 para não compor o mesmo, ou seja, calcular $C_{15,10}$. Porém, uma vez conhecida a fórmula de combinação simples, para muitos alunos o primeiro pode ser tratado como um exercício, pois basta aplicarem a fórmula que eles conhecem. Já na segunda questão alguns alunos podem ter mais dificuldades, tornando-a um problema, pois eles devem interpretá-la, entender o que ocorre na situação e depois montar uma estratégia para resolver, e é neste momento que começam a aparecer as dúvidas dos alunos e as perguntas do tipo “que

fórmula eu devo usar?”.

Como estagiário e até mesmo na posição de aluno do ensino médio, sempre observei que, infelizmente, em muitas aulas de matemática eram trabalhadas mais a resolução de exercícios como a primeira questão, do que a resolução de problemas que é o caso da segunda. A resolução de exercícios auxilia os alunos na fixação do conteúdo, porém pouco contribui no desenvolvimento de raciocínios, estratégias para resolução de problemas e alargamento do pensamento matemático.

Pensando dessa forma, entendemos que trabalhar a resolução de problemas em sala de aula é algo imprescindível no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Mas será que é possível “ensinar” um aluno a resolver problemas?

Polya (1995), defende uma heurística, ou seja, quatro fases que devem ser trabalhadas na resolução de um problema: compreensão; estabelecimento de um plano; execução do plano; retrospecto (ou *looking back*).

A fase de compreensão do problema é a mais importante. Um bom resolvidor de problemas é aquele que gasta o maior tempo da resolução nesta fase (SOUZA, 2007). Polya (1995) ressalta que é tolice responder uma pergunta que não tenha sido compreendida. Portanto, é necessário que se tenha muita atenção no processo de leitura e interpretação de um problema de matemática. Segundo Souza e Guimarães (2015, p. 2),

Ler um problema de matemática apresentado na forma de um texto provoca diferentes operações cognitivas, entre elas: compreender o que é solicitado, selecionar dados relevantes para a resolução e associar esses dados ao que já se conhece sobre o assunto, estabelecendo uma espécie de diálogo com o autor do texto, por forma a delinear uma estratégia para dar resposta ao que o problema solicita.

Esse processo de leitura e interpretação nem sempre é trivial para os discentes. De fato, muitas vezes quando se deparam com um problema, os alunos não conseguem entender de que se trata ou o interpretam de maneira errada, levando-os a uma resolução falha. Na fase de compreensão, o aluno deve ler minuciosamente o texto, concentrando a atenção em todo e qualquer detalhe para que fique bem claro o que está sendo dito. Autoquestionamentos ou questionamentos conduzidos pelo professor, tais como: Do que se trata? Quais são os dados? Qual o comando? Qual a condicionante? são estratégias que podem ser adotadas pelos alunos para a boa compreensão do problema.

A segunda fase é o estabelecimento de um plano. Construir uma boa estratégia a partir dos dados do problema é essencial para sua efetiva resolução. O professor tem o papel de

instigar os alunos com questionamentos que os induzam a produzirem por si só uma linha de raciocínio que os levarão à resolução do problema. Observo nas aulas que ao se acostumarem a montar esses tipos de linhas de raciocínio em situações distintas, com o tempo os alunos vão conseguindo sozinhos através de autoquestionamentos estabelecerem um plano para resolução de diferentes tipos de problemas. Algumas “regras gerais” podem ser importantes na hora de estabelecer uma estratégia para resolver um problema de Matemática (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p.15):

R1) Ler bem o enunciado do problema e utilizar todas as informações disponíveis.

R2) Fazer casos particulares ou casos mais simples de problemas similares, para adquirir familiaridade com o problema.

R3) Mudar a representação do problema, transformando-o em um problema equivalente.

R4) Usar a imaginação pesquisando caminhos alternativos. Extrapolar os limites!

A execução do plano estabelecido é a terceira fase a ser trabalhada na resolução de problemas. Para Polya (1995), depois de estabelecido um plano, colocá-lo em prática é muito mais fácil. A execução de um plano tem que ser feita passo a passo de maneira cautelosa e minuciosa. Um pequeno erro pode comprometer toda a resolução do problema. Portanto, o aluno deve se policiar na execução de cada passo do plano, para que erros ou pequenos equívocos não passem despercebidos.

Ao fim da execução do plano chegamos a última fase da resolução de um problema que é o retrospecto. Polya (1995) acredita que ao ser feito um retrospecto da resolução, desde a execução até a resposta final, o aluno pode aperfeiçoar ainda mais a sua capacidade de resolver problemas, visto que ao revisitar a resolução ele tem uma oportunidade natural de investigar possíveis relações entre aquele problema e outros que ele ainda não obteve uma solução. Uma outra razão do retrospecto é o fato de que, por mais minuciosa que tenha sido a execução do plano, pode haver pequenos erros, especialmente em soluções mais longas, e estes erros podem ser então reparados. Além disso, no retrospecto, o resolvidor pode buscar uma solução ainda mais elegante, ou mais simples do que aquela pensada inicialmente.

Usando a heurística de Polya (1995) e as regras gerais citadas por Oliveira e Fernández (2010), construiremos uma sequência didática para o ensino de análise combinatória para alunos do ensino médio na perspectiva de resolução de problemas.

3 PRINCÍPIO ADITIVO E PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Quantas estrelas há no céu? Quantas pessoas existem na terra? Quantas línguas diferentes são faladas no mundo? Perguntas como essas que começam com “quantas”, são muito comuns entre crianças do mundo todo, principalmente as menores. Isso nos mostra que a necessidade e a curiosidade do homem em quantificar as coisas é algo que surge naturalmente desde a infância. Não podemos negar o fato de que os números fazem parte da vida de todas as pessoas, e a necessidade de quantificarmos objetos, indivíduos e até mesmo possibilidades, faz com que a análise combinatória seja um importante conteúdo matemático estudado no ensino médio. Problemas que devemos resolver usando técnicas de contagem surgem com frequência em nosso cotidiano.

Alguns restaurantes, por exemplo, oferecem após o almoço uma sobremesa como cortesia para seus clientes. Suponhamos que um desses restaurantes ofereça 5 opções de doces e 7 opções de frutas como cortesia, podendo o cliente optar apenas por uma sobremesa, seja ela um doce ou uma fruta. De quantas formas o cliente pode fazer essa escolha? Como podemos escolher qualquer um dos 5 doces *ou* qualquer uma das 7 frutas, temos um total de $5 + 7 = 12$ opções de sobremesa.

Esse problema serve como exemplo para um importante princípio da análise combinatória: o princípio aditivo. Podemos enunciar o princípio aditivo da seguinte forma (MORGADO et al., 2006, p.18):

“Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos”.

O princípio aditivo pode ser generalizado para uma quantidade n de conjuntos:

Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ são n conjuntos disjuntos dois a dois que possuem, respectivamente, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ elementos, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ possui $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$ elementos.

Imaginemos agora que estamos no mesmo restaurante que oferece 5 opções de doces e 7 opções de frutas como cortesia para os clientes. Porém, agora o cliente deve escolher duas sobremesas devendo elas serem obrigatoriamente um doce e uma fruta. De quantas formas o cliente pode fazer essa escolha?

Uma pequena alteração no texto muda completamente a proposta do problema. Ao trocarmos a palavra *ou* pela palavra *e*, deixamos de ter que fazer uma única escolha entre todas as possíveis na união dos dois conjuntos, para agora termos que tomar duas decisões: a

primeira, a escolha do doce desejado e a segunda, a escolha da fruta. Uma estratégia que pode ser utilizada para a resolução é listarmos todas as possibilidades de escolha, isto é, listar em uma árvore de possibilidades todas as formas possíveis de combinar um doce com uma fruta. Assim, chamando os doces de D_1, D_2, \dots, D_5 e as frutas de F_1, F_2, \dots, F_7 , temos:

D_1 e F_1	D_2 e F_1	D_3 e F_1	D_4 e F_1	D_5 e F_1
D_1 e F_2	D_2 e F_2	D_3 e F_2	D_4 e F_2	D_5 e F_2
D_1 e F_3	D_2 e F_3	D_3 e F_3	D_4 e F_3	D_5 e F_3
D_1 e F_4	D_2 e F_4	D_3 e F_4	D_4 e F_4	D_5 e F_4
D_1 e F_5	D_2 e F_5	D_3 e F_5	D_4 e F_5	D_5 e F_5
D_1 e F_6	D_2 e F_6	D_3 e F_6	D_4 e F_6	D_5 e F_6
D_1 e F_7	D_2 e F_7	D_3 e F_7	D_4 e F_7	D_5 e F_7

Após listadas, é possível contar 35 formas de escolhermos as duas sobremesas, sendo um doce e uma fruta. Apesar de essa estratégia estar correta, ela é demorada e trabalhosa. Segundo Morgado et al. (2006) os problemas de análise combinatória consistem em contar certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. Em outras palavras, a ideia básica da análise combinatória é contar sem listar. A pergunta que surge naturalmente é: será que é possível determinar o número de formas diferentes de escolher as duas sobremesas sem a necessidade de listar todas as possibilidades?

Pensemos da seguinte forma: temos que tomar duas decisões: a primeira é qual doce iremos escolher e, escolhido o doce, devemos determinar qual fruta iremos combinar com aquele doce. Ora, há 5 possibilidades para a escolha do doce, e para cada uma dessas 5 possíveis escolhas há 7 frutas possíveis para formar o par de sobremesas. Ou seja: há 7 pares de sobremesas possíveis se for escolhido o primeiro doce, 7 pares se for escolhido o segundo doce, 7 pares se for escolhido o terceiro doce, 7 pares se for escolhido o quarto doce e 7 pares se for escolhido o quinto doce, num total de $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \times 7 = 35$ possibilidades de escolher o par de sobremesas.

O exemplo acima ilustra o mais importante princípio da análise combinatória: O princípio multiplicativo. Podemos enunciá-lo da seguinte forma (MORGADO et al., 2006, p.18):

“Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$ ”.

No caso apresentado, há 5 formas de escolher o doce, que é a primeira decisão.

Escolhido o doce, há 7 formas de escolhermos a fruta, que é a segunda decisão. Pelo princípio multiplicativo, há $5 \times 7 = 35$ formas de escolher um doce e uma fruta.

Podemos generalizar o princípio multiplicativo para mais decisões, isto é:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x_1 maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de x_2 maneiras, e após tomada a decisão d_2 , a decisão d_3 puder ser tomada de x_3 maneiras, e assim sucessivamente até que uma decisão d_n puder ser tomada de x_n maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ é $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n$.

Toda a análise combinatória é construída a partir desses dois princípios, ou seja, a partir deles podemos resolver outros problemas relacionados à contagem. Os princípios aditivo e multiplicativo são bem simples, porém devemos ficar atentos na resolução de problemas, pois montar estratégias de resolução e aplicar as ideias relacionadas aos princípios nem sempre será uma tarefa fácil. Veremos abaixo alguns exemplos em que as ideias relacionadas aos princípios aditivo e multiplicativo são úteis na resolução de problemas.

Exemplo 1: (MORGADO et al., 2006, p.20) *“Quantos números naturais de três algarismos distintos (na base 10) existem?”*

Utilizando a Heurística de Pólya (1995), o primeiro passo para resolver esse problema é compreendê-lo. Para isso devemos ficar atentos ao que de fato está sendo pedido e a possíveis palavras que não sejam do léxico dos alunos. Ora, apesar de podermos listar alguns exemplos de números que satisfazem as condições como: 123, 124, 125 e 126, não precisamos saber quais são os números naturais de três algarismos distintos e sim, quantos são eles. Evidentemente listar todas as possibilidades é uma estratégia, mas não a melhor, pois trata-se de um número grande de possibilidades a serem consideradas. Pensemos em como podemos usar os princípios estudados para resolver este problema. Autoquestionamentos são importantíssimos para a etapa de elaboração de estratégias para resolução de problemas de combinatória, e uma pergunta que podemos fazer é: o que eu preciso para obter um número de três algarismos distintos? E a resposta é bem natural: precisamos escolher três algarismos distintos. Portanto, devemos tomar três decisões: qual será o primeiro algarismo, qual será o segundo algarismo e qual será o terceiro algarismo. No sistema decimal temos 10 algarismos disponíveis. Assim, podemos nos questionar: de quantas formas eu posso escolher o primeiro algarismo? Apesar da primeira resposta que vem em nossa cabeça ser 10, essa resposta está errada. O primeiro algarismo a ser escolhido não pode ser o 0, visto que por exemplo o número 025 é o mesmo que 25 e não possui 3 algarismos. Portanto, nossa primeira decisão pode ser tomada de 9 formas diferentes. Escolhido o primeiro algarismo, de quantas formas

podemos escolher o segundo algarismo? A resposta também é 9, visto que precisamos de algarismos distintos. Portanto, se entre os 10 algarismos possíveis, um algarismo já foi escolhido para a primeira posição, este não pode ser repetido na segunda. Também devemos ressaltar que o zero, que não podia ser o primeiro algarismo, agora pode perfeitamente ser escolhido para ser o segundo. Por fim, escolhido os dois primeiros algarismos, o número de formas de escolher o terceiro e último é 8, pois não pode ser nenhum dos outros dois algarismos já escolhidos. Assim, pelo princípio multiplicativo, o total de números naturais de três algarismos distintos será:

$$9 \times 9 \times 8 = 648.$$

Observemos que, se mudássemos a ordem em que fossem escolhidos os três algarismos poderíamos ter dificuldades de encontrar uma solução. Isto é, se começássemos, por exemplo, escolhendo o último algarismo teríamos 10 possibilidades, pois o número poderia sem problemas terminar com zero. Assim, o algarismo do meio poderia ser escolhido de 9 formas visto que ele só não poderia ser igual ao último. Porém, ao escolhermos o primeiro algarismo entraríamos em um impasse: se o algarismo zero tivesse sido escolhido anteriormente em um dos dois últimos algarismos, teríamos 8 possibilidades para escolher o primeiro. Se o algarismo zero ainda não tivesse sido escolhido teríamos apenas 7 possibilidades para escolhê-lo (não poderíamos nem usar o zero e nem os dois algarismos escolhidos anteriormente). Esse é um problema que foi evitado quando iniciamos as análises de possibilidades pelo primeiro algarismo, que é o que possui mais restrições. Morgado et al. (2006, p.20) recomendam:

“Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar”.

Exemplo 2: (MORGADO et al., 2006, p.21) *“Quantos são os números naturais pares que se escrevem (na base 10) com três algarismos distintos?”*

Novamente para resolver esse problema temos que tomar três decisões: escolher qual vai ser cada um dos três algarismos. Porém, agora queremos formar números naturais pares, e a primeira pergunta é: o que eu preciso para formar um número natural par? A resposta é bem simples: para um número natural ser par ele deve terminar com um algarismo par (0,2,4,6 ou

8). Desta forma, o algarismo que possui mais restrições é o último, sendo assim ele deve ser o primeiro que deveremos escolher. Portanto, nossa primeira decisão será escolher o último algarismo, e como ele deve ser um algarismo par, teremos 5 possibilidades. Escolhido o último algarismo, qual a próxima decisão a ser tomada? Apesar de termos o hábito de querer tomar as decisões em sequência, por exemplo 1º algarismo, 2º algarismo, 3º algarismo, ou 3º algarismo, 2º algarismo, 1º algarismo, devemos ficar atentos ao fato de que a ordem em que devemos tomar as decisões deve ser em função daquelas que possuem mais restrições. No caso, o próximo algarismo que deveríamos escolher seria o primeiro, pois ele possui a restrição de não poder ser o algarismo zero. Sendo assim, de quantas formas podemos escolher o primeiro algarismo? A resposta é: depende! Se o último algarismo escolhido foi o zero, o primeiro pode ser escolhido de 9 formas diferentes, pois ele só não pode ser igual ao último algarismo. Agora se o último algarismo escolhido não foi o zero, o primeiro algarismo só pode ser escolhido de 8 formas diferentes, pois além de não poder ser igual ao último, ele ainda não pode ser zero.

Uma alternativa para resolver esse impasse é dividir o nosso problema em casos:

1º Caso: Calcularemos primeiro quantos números pares de três algarismos distintos existem que terminam com zero. Nesta hipótese o último algarismo deverá ser o zero, portanto há somente uma possibilidade para sua escolha. O primeiro algarismo pode ser qualquer um dos 9 algarismos restantes e o segundo algarismo pode ser escolhido de 8 formas diferentes pois não pode ser igual aos outros dois já escolhidos. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o total de números pares com três algarismos distintos que terminam com zero é:

$$1 \times 9 \times 8 = 72.$$

2º Caso: Calcularemos quantos números pares de três algarismos distintos existem que não terminam com zero. Agora o último algarismo pode ser escolhido de 4 formas diferentes (2, 4, 6 ou 8). Analisaremos na sequência a escolha do primeiro algarismo, que é o que possui agora a maior restrição (não pode ser zero). Portanto há 8 formas de escolher o primeiro algarismo, pois ele não pode ser igual ao último e nem pode ser zero. Por fim, há também 8 formas de se escolher o algarismo do meio, pois ele só não pode ser igual nem ao primeiro nem ao último. Logo, pelo princípio multiplicativo, o total de números pares com três algarismos distintos que não terminam com zero é:

$$4 \times 8 \times 8 = 256.$$

Portanto, como só há a possibilidade de ocorrer o primeiro caso *ou* o segundo caso, pelo princípio aditivo, o total de números pares com três algarismos distintos é:

$$72 + 256 = 328.$$

Uma outra alternativa para resolver esse problema é aproveitar a solução do primeiro exemplo. Essa é, inclusive, uma recomendação de Pólya (1995), usar estratégias de solução de um problema conhecido para resolver um novo problema. Já sabemos que existem 648 números naturais de três algarismos distintos. Podemos calcular o total de números naturais ímpares com três algarismos distintos e subtrair de 648 para encontrar o total de número pares com três algarismos distintos. De fato, para um número natural ser ímpar ele deve terminar com um algarismo ímpar (1,3,5,7 ou 9). Assim, existem 5 formas de escolhermos o último algarismo. Escolhido o último algarismo, existem 8 formas de escolhermos o primeiro, visto que ele não pode nem ser igual ao último e nem igual a zero. Por fim, existe 8 formas de escolhermos o algarismo do meio, visto que ele só não pode ser igual aos outros dois. Portanto, o total de números ímpares de três algarismos distintos é:

$$5 \times 8 \times 8 = 320.$$

Assim, o total de números pares de três algarismos distintos é:

$$648 - 320 = 328.$$

Exemplo 3: (MORGADO et al., 2006, p.21) *“Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato. De quantos modos os votos podem ser distribuídos?”*

O primeiro passo é identificar quantas e quais as decisões que devem ser tomadas. A primeira decisão é a do primeiro examinador que pode ser tomada de três formas diferentes, pois existem três candidatos. A segunda decisão é a do segundo examinador que também pode dar seu voto para qualquer um dos três candidatos. O terceiro examinador também tem três opções, assim como o quarto e o quinto examinador. Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número total de maneiras em que os votos podem ser distribuídos é:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243.$$

Exemplo 4: (FOMIN, 2012, p. 14) “*De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e outra preta em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não possam se atacar mutuamente?*”

Para colocarmos duas torres em um tabuleiro devemos tomar duas decisões: onde irá ser colocada a primeira e onde irá ser colocada a segunda. Sabemos que o tabuleiro de xadrez é formado por oito linhas horizontais e oito linhas verticais totalizando 64 casas. A primeira torre pode ser colocada em qualquer uma das 64 casas, portanto há 64 maneiras de se tomar a primeira decisão. Fixado o lugar da primeira torre devemos agora identificar em quantos lugares possíveis pode ser colocada a segunda. No jogo de xadrez, as torres atacam em quaisquer casas tanto na horizontal quanto na vertical. Portanto, ao ser colocada a primeira torre, a segunda não pode ser colocada em nenhuma das 15 casas em que a primeira pode atacar (as 7 casas restantes da linha horizontal onde está a primeira torre, as 7 casas restantes da linha vertical onde está a primeira e a própria casa em que a primeira foi instalada). Assim, a segunda torre pode ser colocada em qualquer uma das $64 - 15 = 49$ casas restantes. Pelo princípio multiplicativo o número de formas de se colocarem as duas torres no tabuleiro sem que elas se ataquem mutuamente será:

$$64 \times 49 = 3136.$$

Exemplo 5: (MORGADO et al., 2006, p.23) “*De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?*”

Lima et al. (2006) sugerem que, para resolver problemas de combinatória, devemos nos colocar no papel da pessoa que faz a ação solicitada. Sendo assim, suponhamos que nós temos que organizar essas três pessoas nessas cinco cadeiras. Para tal, devemos tomar três decisões. A primeira é escolhermos onde irá se sentar a primeira pessoa. Como há 5 cadeiras disponíveis, ela pode se sentar em qualquer uma delas. Acomodada a primeira pessoa, temos que tomar a segunda decisão que é onde irá se sentar a segunda pessoa. Ora, isso pode ser feito de 4 formas diferentes, pois uma cadeira já foi ocupada pela primeira pessoa. Por fim, existirão 3 lugares possíveis para se sentar a última pessoa visto que dois dos cinco lugares já foram ocupados. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de formas de acomodar essas 3 pessoas nas 5 cadeiras possíveis é:

$$5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Exemplo 6: (LIMA et al., 2006, p.110) “*As placas dos veículos são formadas por 3 letras (de um alfabeto de 26), seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?*”

Esse problema é um problema clássico da análise combinatória, pois retrata uma situação do nosso cotidiano. A pergunta do problema é equivalente a questionar quando será necessária uma mudança no formato das placas dos veículos, pois em algum momento o número de possibilidades de placas distintas irá se esgotar. Usando o princípio multiplicativo conseguimos de maneira rápida identificar o número total de placas possíveis de se obter usando esse formato. De fato, para montarmos uma placa devemos tomar 7 decisões: escolher as 3 letras e os 4 algarismos. A primeira letra pode ser escolhida de 26 formas visto que temos 26 letras no alfabeto. O mesmo ocorre para as escolhas da segunda e da terceira letra, pois podemos repetir letras numa mesma placa, assim existem 26 formas de se tomar a segunda decisão e 26 formas de se tomar a terceira. Já na escolha dos algarismos temos 10 possibilidades para cada um, portanto temos 10 possibilidades para a quarta decisão, 10 possibilidades para a quinta, 10 possibilidades para a sexta e por fim 10 possibilidades para a sétima. Pelo princípio multiplicativo, o número de placas possíveis que podem ser formadas é:

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175.760.000.$$

Exemplo 7: Uma lanchonete vende vitaminas que podem ser preparadas com um ou mais tipos de frutas diferentes. Se eles disponibilizam 6 opções de frutas, quantas vitaminas diferentes podem ser feitas?

Ao nos depararmos com um problema como esse, a primeira ideia que temos é dividir o problema em casos, pois além da escolha das frutas em si ainda existem várias possibilidades diferentes a respeito do número de frutas que será usado na vitamina, isto é, podem ser feitas vitaminas com uma única fruta, com duas frutas, com três frutas, quatro frutas, cinco frutas ou todas as seis frutas. Apesar da ideia natural ser primeiro escolher o número de frutas que será usado na vitamina, dividir esse problema em casos pode ser uma tarefa muito trabalhosa. Uma solução mais elegante pode ser construída da seguinte forma: coloquemos-nos no lugar da pessoa que irá preparar a vitamina. Ao invés de perguntarmos ao cliente quantos e quais os tipos de frutas que ele irá querer na batida, podemos oferecer a ele cada opção de fruta perguntando-lhe se ele irá ou não querer aquela fruta em sua vitamina. Assim, cada tipo diferente de vitamina vai se corresponder a uma sequência de 6 respostas,

podendo elas serem sim (S) ou não (N). Por exemplo, se ao oferecermos fruta por fruta ao cliente suas repostas forem:

S S S N N S

isso quer dizer que sua vitamina será composta por quatro frutas sendo elas: F_1 , F_2 , F_3 e F_6 .

Desta forma, o número de vitaminas diferentes possíveis é equivalente ao número de sequências possíveis de respostas do cliente. Como o cliente deverá responder sim ou não para 6 frutas, ele deverá tomar 6 decisões com 2 possibilidades de respostas para cada uma delas (sim ou não). Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de sequências possíveis de respostas será:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64.$$

Ao fazermos um retrospecto na solução percebemos que, apesar do número de sequências de respostas possíveis ser 64, esse valor não corresponde ao total de vitaminas factíveis. De fato, se o cliente responder não a todas as perguntas isso quer dizer que nenhuma vitamina será feita, pois ele teria negado todas as frutas. Assim, uma sequência de respostas não corresponderá a nenhum tipo de vitamina. Portanto, o total de vitaminas possíveis de serem feitas será

$$64 - 1 = 63.$$

O problema acima pode servir de pontapé inicial para demonstrarmos uma importante propriedade da teoria de conjuntos:

Exemplo 8: O número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n .

De fato, uma forma de montar um subconjunto de um conjunto é “perguntando” para cada elemento do conjunto se ele quer ou não participar do subconjunto. Assim, cada sequência distinta de respostas corresponderia a um subconjunto diferente. Como o conjunto original possui n elementos, cada sequência teria n “respostas” com cada resposta podendo ser sim ou não (duas possibilidades). Portanto, o número de sequências possíveis seria

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n.$$

Como cada sequência corresponde a um subconjunto diferente, o número total de subconjuntos é 2^n .

4 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Suponhamos que devemos ordenar 7 pessoas em uma fila. Quantas filas diferentes podemos formar? Colocando-se no lugar da pessoa que deve organizar a fila percebemos que o primeiro passo para formá-la é decidir quem será a pessoa que ficará no primeiro lugar. Escolhida a primeira pessoa da fila, a segunda decisão é sobre quem será a pessoa que ocupará a segunda posição, e assim sucessivamente. Teremos que tomar 7 decisões, cada uma referente a qual pessoa colocaremos em cada uma das posições da fila. Portanto, para a primeira posição temos 7 possibilidades de escolha, pois qualquer pessoa pode ser a primeira da fila. Escolhida a primeira pessoa, temos 6 possibilidades para escolher a pessoa que ocupará a segunda posição, visto que uma pessoa já ocupou a primeira. Para a terceira posição teremos 5 possibilidades, para a quarta 4, para a quinta 3, para a sexta 2, e por fim, para a última posição sobrarão apenas 1 possibilidade que será a última pessoa da fila. Pelo princípio multiplicativo, o total de formas de montarmos essa fila será:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040.$$

Cada uma das filas possíveis de serem montadas será chamada de *permutação simples* das 7 pessoas. Podemos generalizar esse problema para um número n qualquer de objetos, como escrevem Lima et al. (2006, p.115):

“De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?”

A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n - 1$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n - 2$ modos e etc. A escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo.

A resposta é $n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!$ (Lê-se “ n fatorial”).

Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos é $P_n = n!$ ”.

É importante ressaltar que permutações simples é nada mais que uma aplicação do princípio multiplicativo, e que $n!$ é uma forma de denotar a multiplicação de um número natural n por todos os seus antecessores naturais.

Veremos agora alguns exemplos em que podem ser trabalhadas as ideias relacionadas a permutações simples.

Exemplo 1: (LIMA et al., 2006, p. 115) *“Quantos são os anagramas da palavra “calor”? Quantos começam com consoantes?”*

Para resolver o problema primeiro devemos saber o que é um anagrama, que está relacionado à etapa de compreensão do problema defendida por Pólya (1995). Um anagrama é uma palavra que é construída a partir apenas da reorganização das letras de outra palavra. A primeira parte do problema pede a quantidade de anagramas da palavra “calor”. Assim, bastar calcularmos quantas formas possíveis há de reordenar as 5 letras dessa palavra. Ora, isso equivale a calcularmos o número de permutações de 5 elementos. Assim, o total de anagramas da palavra calor será

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

A segunda parte do problema pergunta quantos desses anagramas começam com consoantes. Essa restrição indica que a primeira decisão que temos que tomar é qual letra irá iniciar a palavra. Como há três consoantes na palavra calor, para montarmos esse anagrama podemos escolher qualquer uma dessas 3 (C, L ou R) para ser a primeira letra. Tomada a primeira decisão, teremos 4 letras disponíveis para a segunda posição, após escolhida a segunda letra teremos 3 opções para a terceira posição, depois 2 opções para a quarta posição e por fim uma única possibilidade para a última letra. Logo, o número de anagramas da palavra “calor” que começam por consoante será:

$$3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72.$$

Exemplo 2: (MORGADO et al., 2006, p.31) *“De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de Matemática, 3 de física e 2 de estatística, de modo que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?”*

Novamente, para resolvermos esse problema nos coloquemos no lugar da pessoa que irá organizar os livros. Ao todo temos 10 livros, porém não podemos organizá-los na prateleira de qualquer forma. Uma restrição importante é que os livros de mesmo assunto devem permanecer juntos. Ou seja, se por exemplo colocarmos na primeira posição um livro de Matemática, os outros 4 livros seguintes obrigatoriamente também devem ser de Matemática. Assim, para onde um livro de Matemática for, todos os outros devem acompanhá-lo. Podemos então considerar os cinco livros de Matemática como sendo um único objeto, uma espécie de coleção. O mesmo fazemos com os livros das outras disciplinas, isto é, consideramos os três livros de física como um só bloco e os dois de estatística como um outro bloco. Desta forma, o primeiro passo é escolher a ordem que vão ficar as disciplinas. Por exemplo, podemos primeiro colocar os livros de Matemática (M), depois os de física (F) e depois os de estatística (E), montando a seguinte sequência:

M F E.

Podemos também organizar começando com os livros de estatística, depois os de Matemática e finalizando com os de física:

E M F

Observem que cada ordenação diferente das letras E, M e F corresponde a uma forma diferente de organizar as disciplinas. Ora, o número de maneiras de embaralhar essas três letras entre si é $3! = 6$. Logo, o número de formas de ordenar os livros por disciplina é 6. Porém, o problema não está solucionado. Essas 6 formas encontradas correspondem ao número de maneiras de organizar a ordem das disciplinas, mas não podemos esquecer que, em cada ordenação das disciplinas, os livros de Matemática podem trocar de lugar entre si montando sequências diferentes de organizar os livros na prateleira, e o mesmo ocorre entre os livros de física entre si e os de estatística entre si. Portanto, para organizarmos os livros na prateleira devemos tomar quatro decisões. A primeira é a ordem em que colocaremos as disciplinas, que como vimos corresponde a $3! = 6$ possibilidades. A segunda decisão é a ordem em que organizaremos os livros de Matemática entre si. Ora, temos 5 livros de Matemática, logo o número de formas de trocá-los de lugar entre si será $5! = 120$ que nos leva a concluir que podemos organizar o bloco de livros de Matemática de 120 formas diferentes. A terceira decisão é como organizaremos a coleção de física que por sua vez possui 3 livros.

Esses três livros podem ser embaralhados entre si de $3! = 6$ modos. Por fim, a quarta decisão é como ordenaremos os dois livros de estatística entre si, que pode ser feito de $2! = 2$ formas diferentes. Concluimos então, pelo princípio multiplicativo que o número de possibilidades de organizarmos todos os livros na prateleira de modo que aqueles de mesma disciplina fiquem juntos é:

$$6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640.$$

Exemplo 3: (MORGADO et al., 2006, p.31) “*De quantos modos é possível sentar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas dessas 7 não fiquem juntas?*”

No exemplo anterior trabalhamos uma situação em que queríamos organizar uma série de objetos em que alguns deles deveriam permanecer sempre juntos. Já nesse problema a restrição é um pouco diferente, já que agora temos que organizar pessoas em uma fila e ao contrário do problema anterior, duas delas não podem ficar juntas. Podemos novamente seguir a recomendação de Pólya (1995) que indica usarmos estratégias de solução de um problema conhecido para resolver um novo problema. Nós já sabemos permutar objetos entre si sem nenhuma restrição, e no exemplo anterior vimos como permutar objetos entre si de modo que alguns deles fiquem juntos. Portanto, uma estratégia válida para resolver esse problema é contar todas as filas possíveis que podem ser montadas sem restrições e depois retirar desse total todas as configurações possíveis em que essas duas pessoas ficassem juntas, pois sobraria todas as possibilidades que elas ficassem separadas.

O total de maneiras de organizar 7 pessoas em fila sem nenhuma restrição é:

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040.$$

Agora contaremos em quantas dessas configurações essas duas pessoas ficassem juntas. Para tal, consideremos as duas pessoas como um único conjunto, isto é, para fazermos as permutações consideraremos um total de 6 objetos: 5 pessoas e essa dupla específica. O número de formas de ordenar esses 6 objetos é $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Porém, ao mudarmos as duas pessoas da dupla entre si teríamos uma configuração diferente para cada uma dessas 720 possibilidades, portanto o número de filas possíveis em que essas duas pessoas específicas ficassem juntas seria $2 \times 720 = 1440$.

Como há 5040 formas de colocarmos essas 7 pessoas em fila sem nenhuma restrição,

e desse total há 1440 configurações em que essas duas pessoas específicas ficariam juntas, então o número de filas possíveis em que essas duas pessoas ficariam separadas é:

$$5040 - 1440 = 3600.$$

Exemplo 4: (LIMA et al., 2006, p.118) “*De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?*”

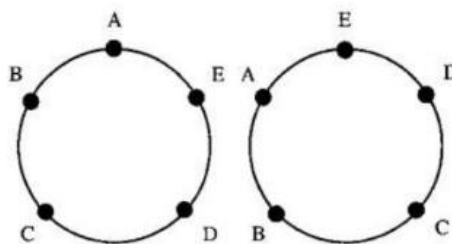
Apesar de parecer que estamos diante de um problema de permutações simples em que deveríamos calcular o número de formas de ordenar 5 crianças, a resposta não é simplesmente $5!$. Poderíamos pensar da seguinte forma: há 5 maneiras de escolhermos a primeira criança, depois há 4 formas de escolhermos a segunda criança, depois 3 formas de escolhermos a terceira, depois 2 formas de escolhermos a quarta e por fim uma única forma de escolhermos a última criança para colocarmos na roda. Logo, pelo princípio multiplicativo teríamos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras de formar essa roda. Porém, há um erro neste raciocínio. De fato, colocar 5 crianças em fila é diferente de colocar 5 crianças em roda. Por exemplo, se as crianças forem chamadas de A, B, C, D e E, a ordem

A B C D E

é uma configuração possível. Contudo, se a ordem escolhida for:

E A B C D

temos uma permutação diferente das crianças, mas que indica a mesma roda, pois a segunda sequência representaria simplesmente um giro da roda obtida no primeiro exemplo, como podemos ver na figura apresentada abaixo.



Isso ocorre pelo fato de que numa roda de ciranda o que importa é a posição relativa das

crianças entre si, ou seja, ao girarmos as crianças na roda não podemos considerar os giros como rodas diferentes. Assim, ao calcularmos o total de permutações de 5 crianças e encontrarmos o resultado $5! = 120$, cada uma das configurações diferentes das 5 crianças em roda estaria sendo contada 5 vezes nesse total, visto que podemos girar cada roda de cinco modos diferentes. No exemplo da roda ABCDE, as cinco permutações abaixo estariam representando a mesma roda:

A B C D E
 E A B C D
 D E A B C
 C D E A B
 B C D E A

Logo, como cada roda possível está sendo contada 5 vezes no total de permutações, para encontrarmos o número correto de maneiras possíveis de colocarmos as 5 crianças em roda, basta dividirmos o resultado encontrado por 5, ou seja:

$$\frac{120}{5} = 24.$$

Estes tipos de problemas em que devemos organizar um número n de objetos dispostos em forma circular são chamados de Permutações Circulares. De modo geral, Lima et al. (2006, p.119) destacam:

“O número de modos de colocar n objetos em círculo, de forma que as disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!. ”$$

De fato, para dispormos n objetos em círculo devemos tomar n decisões. A primeira seria escolher qual objeto que ficaria na primeira posição, decisão essa que pode ser tomada de n formas diferentes. O objeto da segunda posição pode ser escolhido de $(n - 1)$ formas, o da terceira de $(n - 2)$ formas e assim sucessivamente, até que para a última posição só haja uma

possibilidade de escolha. Pelo princípio multiplicativo, o total de formas de dispormos esses n objetos em círculo seria:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!.$$

Porém, é dito que as permutações obtidas simplesmente ao rotacionarmos os objetos de uma mesma configuração são consideradas iguais, logo cada permutação encontrada na contagem acima estaria sendo contada n vezes, que é o número de formas de rotacionarmos n objetos dispostos em formato circular. Logo, para encontrarmos o número correto de permutações circulares, basta dividirmos $n!$ por n , obtendo:

$$\frac{n!}{n} = (n - 1)!.$$

5 PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES

Suponhamos que queiramos saber quantos anagramas possui a palavra CASA. Sabemos que o número de anagramas da palavra CASA é equivalente ao número de formas possíveis de reordenar suas 4 letras, e que o número de formas possíveis de se ordenar 4 objetos é

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Então o número de anagramas da palavra CASA é 24? A resposta é não! Se listarmos todos os anagramas da palavra CASA, obteremos os seguintes resultados:

CASA	AASC	ASCA
CAAS	ACAS	SAAC
CSAA	ACSA	SACA
AACS	ASAC	SCAA

Ao elencar todas as possibilidades, vemos que o número correto de anagramas da

palavra CASA é 12. Mas por que o número de anagramas não foi igual ao número de permutações de 4 objetos? A resposta é bem simples: a palavra CASA possui letras repetidas. Destacaremos uma das letras A para entendermos melhor. Portanto, consideremos a palavra CASA. Ao trocarmos as duas letras A de lugar entre si, obtemos a palavra CASA. Observem que apesar de trocarmos as letras de lugar montando uma permutação diferente entre elas, a palavra continuou a mesma, pois ao trocarmos uma letra A pela outra não faz diferença nenhuma no sentido da palavra. Isso ocorre em todas as 24 permutações possíveis, por exemplo, a palavra SACA continua sendo a mesma se permutarmos somente as duas letras A: SACA. Assim, cada um dos anagramas está sendo contado duas vezes, pois ao trocarmos as letras A de lugar entre si a palavra resultante é a mesma. Logo, o número correto de anagramas é metade do número de permutações possíveis das 4 letras, ou seja,

$$\frac{24}{2} = 12.$$

E se tivéssemos uma palavra com três letras repetidas? Por exemplo, quantos são os anagramas da palavra REPETIÇÕES? Se todas as letras fossem distintas o número de anagramas seria equivalente a $10!$, que é o número de maneiras de permutar 10 letras diferentes entre si. Porém, observemos que a letra E se repete três vezes na palavra, e isso faz com que $10!$ não seja a resposta correta para o problema. De fato, ao considerarmos um anagrama qualquer da palavra, cada vez que trocamos as letras E de lugar entre si, estaremos contando uma permutação diferente, mas que representa o mesmo anagrama. Assim, se listássemos todas as permutações possíveis das 10 letras entre si, cada uma das $10!$ palavras montadas apareceriam repetida na lista um número de vezes equivalente ao número de formas que podemos trocar as três letras E de lugar entre si. Ora, o número de formas de trocarmos as 3 letras E de lugar entre si é equivalente ao número de permutações de 3 objetos, ou seja $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Assim, se tivéssemos permutado as 10 letras da palavra como se fossem distintas, obtendo $10!$ como resposta, cada um desses anagramas da palavra REPETIÇÕES estaria sendo contado $3! = 6$ vezes. Portanto, $10!$ seria um número 6 vezes maior do que a quantidade correta de anagrama da palavra. Logo, para corrigirmos esse erro basta dividirmos $10!$ por $3!$:

$$\frac{10!}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604.800.$$

Concluimos que o número de anagramas da palavra REPETIÇÕES é 604.800.

Poderíamos também ter um problema em que há repetições em letras diferentes de uma palavra. Por exemplo, quantos anagramas possui a palavra BATATA? Como a palavra possui 6 letras, se todas fossem distintas o número de anagramas seria equivalente ao número de permutações de 6 objetos, ou seja, $6! = 720$. Porém, já vimos nos exemplos anteriores que o fato de termos letras repetidas faz com que estejamos contando anagramas a mais nessas 720 permutações. De fato, considerando um anagrama qualquer dessa palavra, sabemos que se fizermos qualquer permutação das 3 letras A desse anagrama entre si, teríamos $3! = 6$ permutações possíveis gerando o mesmo anagrama. Ou seja, cada anagrama apareceria repetido 6 vezes na listagem por conta das letras A que se repetem. Além disso, cada um desses 6 anagramas repetidos apareceriam novamente na listagem das permutações, pois ao permutarmos as duas letras T de lugar entre si em cada um deles, geraríamos novas permutações que representam o mesmo anagrama. Desta forma, observamos que cada anagrama estaria se repetindo $6 \times 2 = 12$ vezes (ou $3! \times 2!$). Portanto, para corrigirmos o que contamos a mais, basta dividirmos 720 (que seria o número de permutações se todas as letras fossem distintas) por 12 (que é o número de vezes que cada anagrama diferente é repetido). Assim, o total de anagramas da palavra BATATA será:

$$\frac{720}{12} = 60$$

ou

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{720}{6 \times 2} = \frac{720}{12} = 60$$

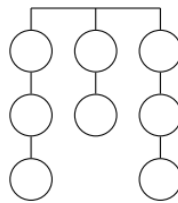
Lima et al. (2006, p.116) generalizam essa ideia de permutações de objetos em que há possíveis repetições entre eles:

“De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, ... , é:

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots} \text{ ,”}$$

Veremos abaixo alguns problemas em que as ideias relacionadas a permutações com repetições são muito úteis para suas resoluções.

Exemplo 1: (PAPMEM, 2012) “*Em um torneio de tiro, oito alvos são dispostos em três colunas penduradas, como mostra a figura. Cada competidor deve atirar nos alvos da seguinte forma: ele escolhe primeiro uma das três colunas e atira no alvo mais baixo que ele ainda não acertou em tal coluna. Em quantas ordens diferentes os oito alvos podem ser acertados?*”



Uma estratégia para resolver esse problema é se colocar no lugar do competidor que irá efetuar os disparos. Observemos que ele deve efetuar 8 disparos, um em cada alvo. Uma pergunta que pode ser feita é: eu posso escolher qualquer um dos 8 alvos para efetuar o primeiro disparo? A resposta é não! Segundo as regras, o competidor deve primeiro escolher uma coluna e depois atirar no alvo mais baixo daquela coluna que ainda não foi atingido. Dessa forma, as escolhas não serão em quais alvos atirar e sim em quais colunas, pois ao escolhermos uma coluna o alvo a ser atingido já estará determinado. Como a primeira coluna tem três alvos, a segunda possui dois alvos e a terceira também possui três alvos, para atingir todos os alvos, obrigatoriamente a primeira coluna deve ser escolhida três vezes, a segunda duas vezes e a terceira três vezes. Assim, a única coisa que pode mudar é a ordem em que são feitas essas escolhas. Então, o problema se resume em: de quantas formas podemos ordenar as escolhas das colunas? Para facilitar o entendimento chamaremos de P a opção pela primeira coluna, S a opção pela segunda coluna e T a opção pela terceira coluna. Assim, uma sequência possível de tiros é, por exemplo:

P P P S S T T T.

A sequência acima indica que primeiro derrubaremos todos os alvos da primeira coluna, depois os dois alvos da segunda coluna e por fim os três alvos da terceira coluna. Uma outra sequência possível de tiros é:

P S T P S T P T.

Esta sequência inicia atingindo o primeiro alvo da primeira coluna, depois atiraremos no primeiro alvo da segunda coluna e em seguida atiraremos no primeiro alvo da terceira coluna. Repetiremos essa mesma sequência para derrubarmos os segundos alvos das três colunas e finalizaremos com o último alvo da primeira coluna e o último alvo da terceira coluna. Observemos que cada vez que permutamos as letras da sequência acima temos uma possibilidade de sequências de tiros diferente. Portanto, o número de ordens diferentes de atingirmos os 8 alvos é equivalente ao número de anagramas da palavra:

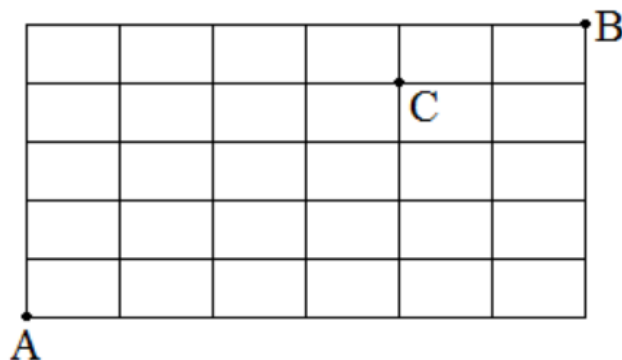
P P P S S T T T

Como há 8 letras, com três repetições da letra P, duas repetições da letra S e três repetições da letra T, o número de anagramas possíveis dessa palavra será:

$$\frac{8!}{3! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 6} = 8 \times 7 \times 5 \times 2 = 560.$$

Logo, o número de sequências possíveis para atingir os 8 alvos é 560.

Exemplo 2: (MORGADO et al., 2006, p.51) “A figura representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.



- a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?
- b) Quantos desses trajetos passam por C?

Começaremos resolvendo o item a. O primeiro passo para resolver o problema é compreendê-lo (Pólya, 1995). Para tal, devemos entender o que é um trajeto de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B. Sabemos pela geometria plana que o trajeto mínimo de um ponto ao outro é um segmento de reta, porém, evidentemente no problema temos que ir de

A até B seguindo as avenidas, ou seja, só podemos andar na vertical ou na horizontal. Assim, podendo andar somente na horizontal e na vertical, o que seria um trajeto de comprimento mínimo? Ora, se por exemplo andarmos um quarteirão na direção norte, em momento algum poderíamos voltar à direção sul, pois estaríamos fazendo um percurso desnecessário e por isso não teríamos um trajeto de comprimento mínimo. O mesmo ocorre quando andamos na direção Leste, em momento algum poderíamos voltar à direção oeste, pois novamente estaríamos andando mais do que necessário. Assim, para termos um trajeto de comprimento mínimo, obrigatoriamente só poderemos andar nas direções Norte e Leste. Logo, o problema se torna equivalente a: podendo andar somente nas direções Norte e Leste, quantos caminhos possíveis há de A para B? Uma das regras gerais citadas por Oliveira e Fernández (2010) que podemos usar na tentativa de montar uma estratégia para resolver um problema, é mudar sua representação, transformando-o em um problema equivalente. Em problemas de combinatória, é comum ilustrarmos algumas possibilidades para ver se enxergamos algum padrão e assim encontramos tal equivalência. Sendo assim, quando andarmos um quarteirão na direção norte indicaremos pela letra N e quando andarmos um quarteirão na direção leste indicaremos pela letra L. Logo, um trajeto de comprimento mínimo possível ligando o ponto A ao ponto B é:

N N N N N L L L L L L.

A sequência acima indica que andaremos todos os quarteirões na direção norte de uma só vez, e depois todos os quarteirões na direção leste. Uma outra sequência possível e de mesmo tamanho é:

L L L L L L N N N N N.

Já nesse exemplo, andaremos primeiro todos os quarteirões na direção leste e depois todos os quarteirões restantes na direção norte. Já é possível perceber que qualquer que seja o trajeto de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B, obrigatoriamente deveremos andar 5 quarteirões na direção norte e 6 quarteirões na direção leste. A única coisa que pode mudar de um trajeto para o outro é a ordem em que escolheremos andar esses 5 quarteirões na direção norte e esses 6 quarteirões na direção leste. Ora, o número de formas de escolher esses percursos é equivalente portanto ao número de anagramas da palavra:

N N N N N L L L L L L

Temos uma palavra com 11 letras em que a letra N se repete 5 vezes enquanto a letra L se repete 6 vezes. Logo, o número de anagramas possíveis dessa palavra é:

$$\frac{11!}{5! \times 6!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = \frac{55440}{120} = 462.$$

Assim, existem 462 trajetos possíveis de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B.

Responderemos agora o item b. Queremos saber quantos desses 462 trajetos de comprimento mínimo passam pelo ponto C. Ora, para irmos do ponto A até o ponto B passando pelo ponto C, devemos tomar duas decisões: a primeira é qual caminho escolheremos para ir de A até C, e a segunda é qual caminho escolheremos para ir de C até B. O número de trajetos de comprimento mínimo que ligam A até C pode ser calculado da mesma forma do item a. De fato, um caminho de comprimento mínimo possível de A até C é:

N N N N L L L L.

O total de caminhos de comprimento mínimo possíveis de A até C é equivalente ao número de anagramas da palavra acima, ou seja:

$$\frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4!} = \frac{1680}{24} = 70.$$

Analogamente, um trajeto de comprimento mínimo ligando C até B é:

N L L

e o número de trajetos de comprimento mínimo ligando C até B é igual ao número de anagramas da palavra N L L, assim:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

Portanto, a primeira decisão a ser tomada, que é a escolha de um trajeto ligando A até C, pode

ser feita de 70 formas diferentes. A segunda decisão, que é a escolha de um trajeto ligando C até B, pode ser tomada de 3 formas diferentes. Pelo princípio multiplicativo, o número de trajetos de comprimento mínimo que ligam A até B passando por C, será:

$$70 \times 3 = 210.$$

Exemplo 3: (PAPMEM, 2014) “*De quantas maneiras podemos formar uma fila com 7 homens e 5 mulheres, todos com alturas diferentes, de forma que os homens entre si e as mulheres entre si estejam em ordem crescente de altura?*”

Apesar deste problema ter muitas restrições e por isso parecer ter uma difícil solução, resolvê-lo é mais simples do que parece. Como fizemos em outras vezes, imaginemos que nós é que devemos organizar essa fila. Ao todo deveremos colocar 12 pessoas em fileira (7 homens e 5 mulheres). Observemos que as mulheres devem ser colocadas em ordem crescente de altura entre si e o mesmo vale para os homens. Assim sendo, não podemos colocar qualquer umas das 12 pessoas na primeira posição da fila, muito pelo contrário. Só há duas possibilidades: ou será o homem mais baixo ou será a mulher mais baixa. Se a primeira posição foi ocupada pelo homem mais baixo, a segunda posição só poderá ser ocupada pela mulher mais baixa ou pelo segundo homem mais baixo, e se a primeira posição tiver sido ocupada pela mulher mais baixa, a segunda posições só poderá ser ocupada pelo homem mais baixo ou pela segunda mulher mais baixa, isto é, a única decisão que deveremos tomar é se colocaremos uma mulher ou um homem na segunda posição. O mesmo ocorre para todas as outras posições da fila, pois de acordo com as pessoas que foram colocadas anteriormente, se a próxima escolha for uma mulher, essa mulher deverá ser a próxima mulher mais baixa e o mesmo ocorre se a próxima escolha for um homem. Ou seja, o problema se resume em decidir quais posições serão ocupadas por mulheres e quais posições serão ocupadas por homens. Decididas as 7 posições onde os homens devem ficar e as 5 posições onde as mulheres devem ficar, só irá existir uma única forma de colocar os homens e as mulheres nesses lugares, obedecendo a ordem de altura. Por exemplo, podemos colocar todos os 7 homens em sequência e depois as 5 mulheres:

H H H H H H H M M M M M.

O número de possibilidades de colocar todos os homens nas 7 primeiras posições e todas as mulheres nas 5 últimas posições é única, pois os homens devem estar na ordem crescente de

altura e as mulheres também. Outra possibilidade de distribuímos homens e mulheres nessa fila é:

H M H M H M H M H M H H .

Escolhida a sequência de posições de homens e mulheres, só há uma maneira de distribuí-los dessa forma, que é colocá-los em ordem crescente. Já podemos perceber que o número total de filas que podem ser formadas usando as condições do problema é equivalente ao número de anagramas da palavra acima, que é composta por 12 letras em que a letra H se repete 7 vezes e a letra M é repetida 5 vezes. Assim, o total de fileiras possíveis com 7 homens e 5 mulheres em que os homens entre si e as mulheres entre si devam ser colocados em ordem crescente de altura será:

$$\frac{12!}{7! \times 5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{95040}{120} = 792.$$

6 COMBINAÇÕES SIMPLES

Imaginemos que de uma turma de 40 alunos do ensino médio, três devem ser escolhidos para fazerem uma viagem juntos a Salvador. De quantas formas possíveis esses três alunos podem ser escolhidos?

Para responder essa pergunta, como de costume nos colocaremos no lugar da pessoa que deve escolher os três alunos. Ora, para escolhermos três alunos em um total de 40 devemos tomar três decisões: quem será o primeiro aluno escolhido, quem será o segundo e quem será o terceiro. Para escolhermos o primeiro, temos 40 possibilidades, pois podemos decidir por qualquer um dos alunos da sala. Escolhido o primeiro aluno, teremos 39 possibilidades para eleger o segundo, pois um dos 40 alunos já estaria selecionado para a viagem. Por fim, escolhidos os dois primeiros alunos nos restariam 38 possibilidades para designar o terceiro. Assim, pelo princípio multiplicativo, o número de formas de escolhermos esses três alunos para fazerem juntos a viagem à Salvador será:

$$40 \times 39 \times 38 = 59.280.$$

Apesar da solução parecer estar perfeitamente correta, ao fazermos um retrospecto

(PÓLYA, 1995) veremos que a resposta final está errada. De fato, ilustraremos uma possibilidade de escolha para entendermos o porquê do resultado encontrado não ser o correto. Para fazermos a escolha do primeiro aluno podemos escolher qualquer um dos 40 disponíveis. Suponhamos que escolheremos o aluno A. Feito isso, escolheremos o segundo aluno que chamaremos de B, e por fim escolheremos o aluno C para completar o trio que viajará para Salvador. Assim, nossa escolha dos três alunos foi:

A B C

Suponhamos agora que o primeiro aluno a ser escolhido seja o aluno B. Isso é possível pois ele é umas das 40 opções disponíveis para a primeira escolha. Tomada essa decisão, suponhamos que o segundo aluno escolhido para a viagem seja o aluno C, e por fim, o último aluno escolhido seja o aluno A. Assim, nossa escolha dos três alunos seria:

B C A

Observemos que a ordem em que fizemos essas duas escolhas foi diferente, porém escolhermos primeiro o aluno A, depois o aluno B e por fim o aluno C, é equivalente a escolhermos primeiro o aluno B, depois o aluno C e por fim o aluno A, visto que os três viajarão juntos para o mesmo lugar. Ou seja, o importante é definir quais alunos serão escolhidos e não a ordem em que eles serão escolhidos. Mas quando usamos o princípio multiplicativo e encontramos 59.280 formas de escolhermos os três alunos, o mesmo grupo de alunos A B C, por exemplo, estaria sendo contado várias vezes como se fossem grupos diferentes, pois apesar da ordem em que foi feita as escolhas ser diferente, elas representariam o mesmo grupo. Isso ocorreria não só com a escolha dos alunos A B C, como qualquer outra escolha de três alunos diferentes: um mesmo grupo de três alunos estaria sendo contado tantas vezes quanto o número de formas de reordenar essas três escolhas entre si. Ora, o número de formas de reordenar 3 objetos entre si é $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Ou seja, cada grupo diferente possível de alunos estaria sendo contado 6 vezes naquele total. Logo, se quisermos saber o número correto de formas possíveis de escolhermos 3 alunos em um total de 40 para fazerem uma viagem juntos a Salvador, basta dividirmos 59.280 por 6, assim, o total de formas distintas de escolhermos o grupo de 3 alunos, será:

$$\frac{59280}{6} = 9.880.$$

O problema acima serve como ponto de partida para entendermos um importante tipo de problema da análise combinatória: o problema das Combinações Simples.

De modo geral, consideremos um conjunto com n elementos dos quais devemos selecionar um grupo com p desses elementos, em que a ordem de escolha desses p elementos não importa. De quantas formas podemos selecionar esse grupo de p elementos?

Neste caso, devemos tomar p decisões que são equivalentes a escolher cada um dos p elementos. A primeira decisão pode ser tomada de n formas diferentes, escolhido o primeiro elemento, a escolha do segundo pode ser feita de $(n - 1)$ formas diferentes, a escolha do terceiro pode ser feita de $(n - 2)$ formas diferentes e assim sucessivamente, até que a escolha do último possa ser feita de $(n - p + 1)$ formas diferentes. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras possíveis para escolher esse grupo seria:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1)$$

Como a ordem em que esses p elementos são escolhidos não importa, cada grupo diferente estaria, na contagem acima, sendo repetido $p!$ vezes. Portanto, para corrigirmos essa contagem basta dividirmos esse resultado por $p!$, ou seja, o número de formas de escolhermos um grupo de p elementos em um total de n elementos dados será:

$$\frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1)}{p!}.$$

Para simplificarmos a notação, podemos multiplicar numerador e denominador da fração acima por $(n - p)!$, obtendo:

$$\frac{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) \times (n - p)!}{p! \times (n - p)!} = \frac{n!}{p! \times (n - p)!}.$$

Cada seleção de p objetos encontrada acima é chamada de uma combinação simples de p elementos do total de n objetos. Notação:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n - p)!}.$$

Desta forma fica deduzida a fórmula usada para calcularmos o número de combinações simples de n objetos tomados em grupos de p . Como o objetivo deste trabalho é evitar o uso de fórmulas no estudo da análise combinatória, resolveremos problemas envolvendo as ideias de combinações simples da mesma forma que resolvemos o problema introdutório deste capítulo.

Exemplo 1: (MORGADO et al., 2006, p.34) “*Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?*”

Um bom resolvidor de problemas de combinatória deve se colocar no lugar da pessoa que deve lidar com a situação posta no texto do problema. Assim, suponhamos que nós devemos montar uma salada de frutas com exatamente 4 frutas diferentes. A primeira pergunta é: quantas e quais são as decisões que devemos tomar? Ora, para montar nossa salada devemos tomar 4 decisões: qual será a primeira fruta, qual será a segunda fruta, qual será a terceira e qual será a última. Como temos 10 frutas diferentes disponíveis, a primeira fruta da salada poderá ser escolhida de 10 formas diferentes. Escolhida a primeira fruta, restarão 9 opções para a segunda, depois 8 opções para a terceira e por fim 7 opções para a última. Pelo princípio multiplicativo, o número de saladas diferentes que poderíamos obter seria:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$

Chegamos em um momento importante na resolução desses tipos de problemas. Há uma pergunta essencial que sempre devemos nos fazer para verificarmos se a solução encontrada é de fato a solução correta: A ordem em que foi feita as escolhas importa ou não para a configuração final dos elementos do grupo escolhido? Nesse problema, se escolhêssemos as frutas A, B, C e D nessa ordem, teríamos uma salada diferente da que faríamos se tivéssemos escolhido as frutas na ordem D, A, B e C? Evidentemente, a salada de frutas seria a mesma, independentemente da ordem escolhida para as quatro frutas. Logo, o total de 5040 possibilidades de saladas encontradas está errado, pois cada salada diferente que poderia ser montada com 4 frutas está sendo contada $4!$ vezes que é o número de formas possíveis em que podemos mudar a ordem de escolha daquelas 4 frutas. Ou seja, 5040 é $4! = 24$ vezes maior do

que o número correto de saladas diferentes que podemos montar com 4 frutas distintas escolhidas do total das 10 disponíveis. Portanto, a resposta correta seria:

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Exemplo 2: (MORGADO et al., 2006, p.36) “*Para a seleção brasileira foram convocados dois goleiros, 6 zagueiros, 7 meios de campo e 4 atacantes. De quantos modos é possível escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes?*”

Nos coloquemos no lugar do técnico da seleção. Nossa tarefa é escalar um time com 11 jogadores. Quais decisões devemos tomar para escalar esse time? Segundo o enunciado do problema algumas decisões já estão impostas: o time deverá jogar com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meios de campo e 2 atacantes. Portanto, devemos tomar 4 decisões: escolher 1 dentre os dois goleiros; 4 dentre os seis zagueiros; 4 dentre os 7 meios de campo; e 2 dentre os 4 atacantes. Dividiremos o problema em partes e calcularemos primeiro o número de formas possíveis que podemos tomar cada uma dessas quatro decisões.

A primeira decisão é a escolha do goleiro. Se temos 2 goleiros disponíveis e devemos escolher apenas um deles, o número de formas de escolher o goleiro é 2.

A segunda decisão refere-se a quais serão os quatro zagueiros que deveremos escolher dentre os 6 possíveis. Devemos fazer 4 escolhas. O primeiro zagueiro pode ser escolhido de 6 formas diferentes, o segundo de 5 formas, o terceiro de 4 formas e o último de 3 formas. Pelo princípio multiplicativo teríamos $6 \times 5 \times 4 \times 3$ maneiras diferentes de escolher esses quatro zagueiros. Porém, não podemos esquecer da pergunta essencial a ser feita: a ordem que serão escolhidos esses 4 zagueiros importa ou não para a montagem do grupo final? A resposta é não, pois o que importa é que todos os quatro estarão em campo, assim, deveremos dividir o resultado daquela multiplicação por $4! = 24$ que é o número de reordenações possíveis que podem ser feitas com um mesmo grupo de zagueiros escolhidos. Logo, o número de zagas possíveis que podem ser montadas é:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} = \frac{360}{24} = 15.$$

Agora deveremos calcular o número de formas possíveis de se escolher os 4 jogadores de meio campo dentre os 7 disponíveis. Analogamente, o número de formas de escolhermos 4

jogadores entre os 7 disponíveis será:

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = \frac{840}{24} = 35.$$

Por fim, devemos calcular o número de formas possíveis de escolher 2 de um total de 4 atacantes. Temos 4 possibilidades para a escolha do primeiro, 3 possibilidades para o segundo, e a ordem em que serão feitas essas escolhas não importa, assim o número de duplas de ataques possíveis será:

$$\frac{4 \times 3}{2!} = \frac{12}{2} = 6.$$

Como há 2 formas de se escolher o goleiro, 15 formas de escolher a zaga, 35 formas de se escolher o meio de campo e 6 formas de se escolher o ataque, pelo princípio multiplicativo, o número de times diferentes que podem ser colocados em campo será:

$$2 \times 15 \times 35 \times 6 = 6300.$$

Exemplo 3: Jogos de loteria são muito comuns no mundo todo. No Brasil, o mais famoso sem dúvida é a mega-sena. Tal modalidade consiste em sortear 6 números em um total de 60 dezenas possíveis (de 01 a 60). Se alguém fizer uma aposta em 6 números e esses valores coincidirem com as 6 dezenas sorteadas naquela semana, essa pessoa levará o prêmio. Muitas pessoas se perguntam: “quantas apostas deveriam ser feitas para se ter certeza que levaríamos o prêmio para casa?”.

A resposta é simples: devemos calcular quantos são os resultados possíveis em um sorteio da mega-sena. Para calcularmos o total de resultados possíveis em um sorteio da mega-sena, devemos calcular o número de formas possíveis de escolher 6 números em um total de 60. Ora, para o primeiro número sorteado há 60 possibilidades. Sorteado o primeiro número, há 59 possibilidades para o segundo, visto que a primeira dezena que saiu não poderá mais ser sorteada. Para a terceira dezena haverá 58 possibilidades, seguindo o mesmo raciocínio haverá 57 possibilidades para a quarta dezena, 56 possibilidades para a quinta e por fim 55 possibilidades para a última. Pelo princípio multiplicativo, o total de combinações possíveis a serem sorteadas seria $60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55$. Porém, sabemos que a

ordem que os números são sorteados não influencia no resultado final do sorteio, por exemplo, se a sequência dos números sorteados for (1, 5, 17, 26, 48, 36) ou se a sequência for (26, 48, 17, 5, 36, 1) o resultado final do sorteio será o mesmo. Logo, para corrigirmos a contagem basta dividirmos pelo número de vezes que uma mesma sequência de 6 valores pode ser reordenada entre si, ou seja, 6!. Portanto, o número de resultados possíveis de um jogo da mega-sena será:

$$\frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55}{6!} = \frac{36.045.979.200}{720} = 50.063.860.$$

7 COMBINAÇÕES COMPLETAS

Imaginem que devemos comprar 8 garrafas de refrigerante para uma festa. Ao chegarmos no supermercado nos deparamos com 4 sabores diferentes à venda. De quantas formas possíveis podemos escolher os 8 refrigerantes?

Uma ideia natural para resolver esse problema é tentar dividi-lo em casos. Por exemplo, primeiro calculamos quantas formas podemos comprar os 8 refrigerantes de um mesmo sabor. Depois calculamos quantas formas possíveis há de escolhermos 1 refrigerante de um sabor e todos os outros 7 de um mesmo sabor diferente do primeiro. Um outro caso poderia ser calcular quantas maneiras existem para se comprar 2 refrigerantes de um sabor e os outros 6 de um outro sabor diferente, e etc. Já podemos perceber que se formos por esse caminho o problema se abriria em muitas opções e sua solução seria longa e cansativa. Uma solução mais elegante para esse tipo de problema pode ser construída de outra forma.

Nos coloquemos no lugar da pessoa que está efetuando as compras. Se estivéssemos comprando efetivamente as 8 garrafas de refrigerantes seria comum que as separássemos por sabor. Por exemplo, se comprarmos 2 refrigerantes do primeiro sabor, 3 refrigerantes do segundo sabor, 1 refrigerante do terceiro sabor e 2 refrigerantes do quarto sabor, poderíamos ilustrar essa escolha da seguinte forma:

0 0 | 0 0 0 | 0 | 0 0

Uma outra possibilidade de escolha seria 1 refrigerante do primeiro sabor, 1 refrigerante do segundo sabor, 1 refrigerante do terceiro sabor e por fim 5 refrigerantes do quarto sabor. Essa escolha poderia ser ilustrada por

0|0|0|00000

Também poderíamos escolher por exemplo, todos os refrigerantes do terceiro sabor, e assim, seguindo a mesma ideia das separações ilustradas nos exemplos anteriores, essa escolha poderia ser representada por:

||00000000|

Observemos que cada forma diferente de organizar os 11 símbolos ilustrados (8 bolas e 3 traços) equivale a uma forma diferente de escolhermos os 8 refrigerantes. Por exemplo, a organização

0||00000|00

significa que teríamos escolhido 1 refrigerante do primeiro sabor, nenhum refrigerante do segundo sabor, 5 refrigerantes do terceiro sabor e 2 refrigerantes do quarto sabor.

Assim, determinar o número de maneiras de escolhermos 8 refrigerantes em um total de 4 sabores possíveis é equivalente a calcularmos o número de formas de reordenar 11 símbolos dos quais há 8 repetições de um deles e 3 repetições de outro. Logo, o número de formas possíveis de escolhermos 8 refrigerantes sortidos entre 4 sabores diferentes disponíveis é:

$$\frac{11!}{8! \times 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165.$$

Cada uma das possibilidades de escolhas encontradas acima será chamada de Combinação Completa de classe 8 de 4 objetos. A estratégia de representar os objetos por bolas, e a forma de separá-los em grupos por traços, é popularmente conhecida como “bola-traço”.

A resolução de problemas envolvendo as ideias de combinações completas, pode sempre se apoiar na estratégia de representar as combinações possíveis de serem feitas através do uso de símbolos que representem os objetos e traços que os separem em grupos, como fizemos no exemplo dos refrigerantes. Depois, resolver o problema se resume em calcular o número de permutações possíveis que podem ser feitas entre os objetos e os traços.

Exemplo 1: (PAPMEM, 2014) “*Há 10 pessoas para telefonar e apenas 3 cabines telefônicas. De quantas maneiras essas pessoas podem formar filas diante das cabines? (Admita a possibilidade de haver filas vazias)*”.

Como já mencionamos antes, uma estratégia interessante para resolver problemas de combinatória é listar algumas possibilidades que satisfazem as condições do problema para tentarmos observar algum padrão. No problema acima temos que distribuir 10 pessoas em filas em frente a 3 cabines telefônicas. Chamando de $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$ e P_{10} as 10 pessoas e considerando que os traços separam as filas, temos que uma configuração possível para essa distribuição pode ser:

$$P_1 P_2 | P_3 P_4 P_5 P_6 | P_7 P_8 P_9 P_{10}$$

Essa possibilidade significa que as 2 primeiras pessoas formarão uma fila para a primeira cabine, outras 4 pessoas formarão uma fila em frente a segunda cabine e as últimas 4 pessoas formariam uma fila diante da terceira cabine. O texto do problema diz que é permitido termos filas vazias. Assim, uma outra forma de organizar essas 3 filas poderia ser:

$$P_1 P_2 P_3 P_4 | | P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10}$$

Já na possibilidade acima temos o caso em que há 4 pessoas na fila da primeira cabine, a segunda cabine não possui fila e há 6 pessoas na fila da terceira cabine. Podemos perceber que este problema se assemelha ao problema dos refrigerantes que usamos para introduzir o capítulo. Ou seja, o número de formas de se organizar 10 pessoas em 3 filas diante de 3 cabines telefônicas seria equivalente ao número de permutações possíveis de 12 objetos (dez pessoas e dois traços que as separam em três grupos). Apesar deste problema ser muito semelhante ao anterior, há uma diferença muito importante que influencia na sua resolução. No caso, dos refrigerantes, a ordem em que as bebidas eram escolhidas não era importante, mas sim os sabores das bebidas. Agora, além da cabine em que a pessoa irá ficar ser importante, a ordem em que essas pessoas irão ficar na fila de cada cabine também importa, pois ao trocarmos pessoas de lugar na fila de uma mesma cabine as filas serão diferentes e portanto teríamos uma possibilidade diferente de configuração.

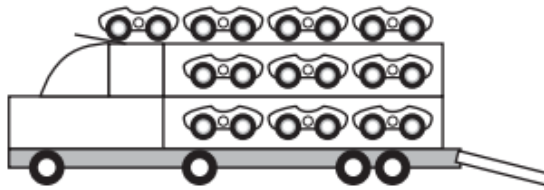
Na configuração abaixo, por exemplo, apesar das pessoas que estão em frente a cada cabine serem as mesmas do primeiro exemplo dado, a possibilidade listada é diferente, pois a posição das pessoas na fila foi alterada:

$$P_2 P_1 | P_5 P_6 P_3 P_4 | P_{10} P_9 P_7 P_8$$

Logo, o número de maneiras possíveis de se organizar 10 pessoas em 3 filas diante de 3 cabines telefônicas diferentes é equivalente ao número de permutações de 12 objetos em que há somente dois elementos que se repetem (os traços). Isto é:

$$\frac{12!}{2!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 239.500.800.$$

Exemplo 2: (ENEM, 2017) “Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo de brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?”

Enunciados longos e cheios de informação são marcas registradas em questões do ENEM. Portanto, ler o enunciado minuciosamente com total atenção é essencial para compreendermos os problemas propostos antes de começarmos enfim a planejarmos uma solução (PÓLYA, 1995).

O problema fala sobre uma empresa de brinquedos que produz caminhões-cegonha compostos por uma carreta e 10 carrinhos transportados por ela. É dito no problema que a carreta possui uma cor fixa, ou seja, não devemos nos preocupar com a cor que o caminhão será pintado. Portanto, para determinarmos o número de modelos distintos do brinquedo, devemos somente calcular o número de maneiras possíveis de colorir 10 carrinhos, cada um com uma única cor, usando as 4 cores disponíveis. Uma restrição importante trazida no

enunciado é que cada brinquedo deve conter pelo menos um carrinho de cada cor, ou seja, já estão decididas as cores de 4 dos 10 carrinhos a serem pintados. Logo, resta-nos decidir quantas possibilidades existem para pintarmos os 6 carrinhos restantes. A ordem dos carrinhos no caminhão não importa, portanto temos apenas que decidirmos quantos carrinhos iremos pintar de cada cor.

Como nos exemplos anteriores, ilustremos algumas possibilidades de escolha para as cores dos carrinhos. Considerando os carrinhos como bolas e os traços separando as cores, temos:

$$00 | 00 | 0 | 0$$

A configuração acima indica que iremos pintar 2 carrinhos com a primeira cor, 2 carrinhos com a segunda cor, 1 carrinho com a terceira cor e 1 carrinho com a quarta cor. Uma outra possibilidade seria

$$000000 |||$$

que indica que pintaríamos todos os 6 carrinhos restantes com a primeira cor. Mais uma possibilidade:

$$|| 000000 |$$

A permutação acima também sugere que pintaremos todos os outros 6 carrinhos de uma mesma cor, porém, essa possibilidade é diferente da anterior pois agora os 6 carrinhos seriam pintados com a terceira cor.

É possível perceber que o número de maneiras de escolhermos as cores dos 6 carrinhos restantes é equivalente ao número de permutações possíveis das 6 bolas e dos 3 traços ilustradas nos exemplos, ou seja, o número de permutações possíveis de 9 símbolos em que há 6 repetições de um deles e 3 repetições do outro. Logo, o número de modelos distintos do brinquedo que essa fábrica poderá produzir será:

$$\frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84.$$

Exemplo 3: (MORGADO et al., 2006, p.60) “De quantas maneiras é possível colocar 6

anéis diferentes em quatro dedos?”

Nos coloquemos no lugar da pessoa que deve separar os anéis. Para colocar 6 anéis em 4 dedos, devemos escolher quantos anéis colocaremos em cada dedo, ou seja, separar 6 objetos em 4 grupos. Pelos problemas anteriores, uma ideia seria ilustrarmos essa separação usando 6 bolas para representarmos os anéis e 3 traços para separá-los em 4 grupos. Assim, uma configuração possível seria:

$$O O \mid O O \mid O \mid O$$

Observemos que essa configuração é uma das configurações possíveis do exemplo anterior em que devíamos pintar 6 carrinhos usando 4 cores disponíveis. Assim, poderíamos entender que os dois problemas possuem as mesmas respostas e, portanto, o número de formas de colocarmos 6 anéis em 4 dedos seria equivalente ao número de maneiras de permutarmos os 9 objetos acima. Apesar dos dois problemas serem bem parecidos (separar 6 objetos em 4 grupos), considerá-los com a mesma resolução não está correto. Isso ocorre pelo fato de que no exemplo do caminhão-cegonha todos os carrinhos eram idênticos, e nesse problema dos anéis é dito que os mesmos são diferentes. Neste ponto devemos ficar atentos a uma importante consideração a ser feita quando resolvemos esse tipo de problema: é preciso saber se quando formos separar os objetos em grupos, a ordem dos objetos que ficarão em um mesmo grupo vai importar ou não. No exemplo dos anéis, se os permutarmos entre si em um mesmo dedo estaríamos formando configurações diferentes visto que os anéis são distintos. Assim, uma maneira mais adequada de ilustrarmos uma possível configuração seria darmos símbolos diferentes para representarmos os diferentes anéis. Ou seja, como temos 6 anéis diferentes, poderíamos chamá-los de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 . Usando os traços para separar cada um dos 4 dedos, uma forma possível de distribuição seria:

$$A_1 A_2 \mid A_3 A_4 \mid A_5 \mid A_6$$

Desta forma fica bem claro que ao permutarmos os anéis em um mesmo grupo (mesmo dedo), estaríamos contando possibilidades de fato diferentes. Logo, o número de maneiras possíveis de colocarmos 6 anéis diferentes em 4 dedos seria equivalente ao número de permutações de 9 símbolos em que há apenas três deles que se repetem (os traços). Ou seja:

$$\frac{9!}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 60.480.$$

8 OUTROS PROBLEMAS ENVOLVENDO TÉCNICAS DE CONTAGEM

Suponhamos que uma pessoa quer mudar seus hábitos sedentários e decide fazer aulas de musculação em uma academia. Ao conversar com um instrutor, ele a orientou a não pegar muito pesado no início e por isso começar malhando apenas 3 dias durante a primeira semana, sendo que essa pessoa não poderia de forma alguma malhar dois dias consecutivos. Sabendo que tal academia funciona de segunda a sábado, de quantas maneiras possíveis a pessoa poderia escolher os três dias que ela iria malhar?

Se não tivéssemos nenhuma restrição, o problema se resumiria em escolher 3 dias para a pessoa malhar em um total de 6. O problema é que nesses 3 dias não podem haver dias consecutivos. Neste caso, como temos poucas possibilidades podemos listar todas. Assim, dados os dias disponíveis {segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}, as formas de escolhermos os três dias da semana em que não haja dias consecutivos serão:

{segunda, quarta, sexta}

{segunda, quarta, sábado}

{segunda, quinta, sábado}

{terça, quinta, sábado}

Apesar de podermos listar todas as possibilidades, a ideia básica da análise combinatória é contar sem listar (MORGADO et al., 2006). Para isso, iremos mudar um pouco a representação dos exemplos acima. Sempre que escolhermos 3 dias da semana para malhar, automaticamente estamos escolhendo 3 dias da semana para não malhar. Representaremos com um sinal de + os dias da semana em que a pessoa irá malhar, e representaremos com um sinal de - os dias em que ela não malhará, respeitando a sequência dos dias da semana. Assim, as possibilidades ilustradas acima poderiam ser representadas por:

{segunda, quarta, sexta} \Rightarrow + - + - + -

{segunda, quarta, sábado} \Rightarrow + - + - - +

{segunda, quinta, sábado} \Rightarrow + - - + - +

{terça, quinta, sábado} \Rightarrow - + - + - +

Observemos dessa forma que o total de possibilidades de escolhermos os três dias da semana sem que haja dias consecutivos seria equivalente ao total de sequências possíveis de 3 sinais + e 3 sinais - de forma que não possam haver sinais + consecutivos. Isso quer dizer que podemos listar todos os sinais - e depois calcularmos o número de formas de colocar os sinais + entre eles. Nessas condições, colocados os sinais - teríamos 4 posições possíveis para colocarmos os sinais +:

_ - _ - _ - _

Agora de quantas formas podemos colocar 3 sinais + em um total de 4 espaços disponíveis? Estamos diante de um problema de combinações simples em que temos quatro posições das quais devemos escolher 3, ou seja, deveremos calcular C_4^3 . É importante ressaltar que não precisamos lembrar a fórmula de combinação. Ora, temos 4 possibilidades para colocarmos o primeiro sinal, 3 possibilidades para colocarmos o segundo e 2 possibilidades para colocarmos o terceiro. Como a ordem em que escolheremos essas três posições em que colocaremos os sinais não importa, se apenas aplicássemos o princípio multiplicativo estaríamos contando cada possibilidade diferente 6 vezes (já que podemos reordenar uma mesma escolha 3! vezes). Assim, o número de formas de organizarmos os 3 sinais + nos 4 espaços disponíveis será:

$$C_4^3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4.$$

Logo, o número de formas em que essa pessoa poderia escolher os três dias para malhar sem que houvesse dias consecutivos seria realmente 4.

Exemplo 1: (MORGADO et al., 2006, p. 82) “*Quantos são os anagramas de araraquara que não possuem duas letras a consecutivas?*”

Para resolvermos problemas de combinatória nunca devemos adiar dificuldades. Isto é, devemos sempre começar pelas restrições que podem gerar mais empecilhos. Neste problema, devemos começar pela restrição de que não podemos ter letras *a* consecutivas. Assim, a primeira decisão que devemos tomar é onde colocaremos as 5 letras *a* que aparecem na palavra. Araraquara possui 10 letras, portanto seus anagramas também deverão possuir 10 letras. Assim, para montarmos um anagrama da palavra devemos distribuir suas letras em 10

posições:

Como dito, nossa primeira decisão será escolher as posições das letras a . De quantas formas podemos distribuir as 5 letras a de modo que duas delas não sejam consecutivas? Ora, uma possibilidade seria:

a _ a _ _ a _ a _ a

Usaremos a mesma estratégia do problema da academia, pois agora calcularemos o número de formas de escolhermos 5 das 10 posições para colocarmos as letras a , de modo que duas dessas letras não sejam consecutivas. Assim, usaremos o sinal $+$ se a posição for conter uma das letras a , e usaremos o sinal $-$ se a posição não for ocupada por uma letra a . Assim, a possibilidade ilustrada acima seria representada por:

+ - + - - + - + - +

O número de formas possíveis de colocarmos as letras a é equivalente ao número de sequências de 5 sinais $+$ e 5 sinais $-$ que podemos construir em que não possam haver sinais $+$ consecutivos. Ora, colocados todos os 5 sinais $-$ haveriam 6 locais possíveis para colocarmos os sinais $+$:

⌋ - ⌋ - ⌋ - ⌋ - ⌋ - ⌋

Assim, para calcularmos o número de formas de escolhermos as posições das letras a basta calcularmos o número de formas de escolhermos 5 posições em um total de 6 disponíveis, ou seja,

$$C_6^5 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5!} = 6.$$

Tomada a decisão de escolhermos as posições das letras a , deveremos agora calcular o número de formas possíveis de permutarmos as outras 5 letras da palavra araraquara nas 5

posições que restarão. Ora, as 5 letras restantes da palavra possuem 3 repetições (3 letras r). Logo, o número de permutações possíveis das outras 5 letras entre si será:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20.$$

Como há 6 possibilidades de posicionarmos as letras a e 20 possibilidades para permutarmos as letras restantes entre si, pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas da palavra araraquara em que não figuram letras a consecutivas é:

$$6 \times 20 = 120$$

Voltemos agora ao problema da academia e imaginemos que a mesma funcione todos os dias da semana. Supondo que agora uma pessoa fará um treinamento durante o ano todo e que deve frequentar a academia três vezes por semana, de quantas formas essa pessoa pode escolher os três dias da semana que irá à academia sabendo que ela continua sem poder malhar em dias consecutivos?

Poderíamos pensar que o problema é equivalente ao anterior, e que a única mudança é que ao invés de escolhermos 3 dias em 6, deveríamos escolher 3 dias em um total de 7. Apesar de termos problemas semelhantes, uma importante observação deve ser feita. Agora a pessoa não irá malhar apenas uma semana e sim todas as semanas durante um ano, isso quer dizer que devemos escolher 3 dias dos possíveis: domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, e sábado, não podendo escolher dias consecutivos, e o que difere esse problema do anterior é que agora o último dia possível de ser escolhido que é sábado e o primeiro dia que é domingo serão considerados consecutivos. Assim, se considerarmos as possibilidades de escolhas dos 3 dias da semana como sequências de sinais + e sinais -, além de não podermos ter sinais + consecutivos, uma mesma sequência não poderá começar e terminar com sinal +, pois isso indicaria que a pessoa iria começar a semana malhando no domingo e finalizar malhando no sábado, o que não poderia ocorrer pois ela deveria começar a próxima semana malhando novamente no domingo que é um dia consecutivo ao sábado. Portanto, uma importante restrição que deve ser feita é que se o domingo for um dia escolhido para malhar, o sábado não pode ser escolhido. Assim, podemos dividir o problema em dois casos: primeiro calculamos o número de possibilidades de escolhermos 3 dias não consecutivos da semana em que o domingo seja um deles, e o segundo caso escolhermos 3 dias não consecutivos da

semana em que o domingo não seja um deles.

1º Caso: Sabendo que o domingo será o primeiro dia em que a pessoa irá malhar na semana, resta escolhermos os outros dois dias não consecutivos para ela malhar dentre os 4 possíveis: terça, quarta, quinta, e sexta, visto que segunda e sábado não poderiam ser escolhidos, pois domingo seria o consecutivo de sábado e segunda seria o consecutivo de domingo. Ora, para escolhermos 2 dias não consecutivos no total dos 4 possíveis, basta calcularmos o número de formas de colocarmos 2 sinais + e 2 sinais - em ordem de modo que os sinais + não sejam consecutivos. Por exemplo, a sequência + - + - indicaria que os outros dias da semana que ela malharia seriam terça e quinta. Para calcularmos o número de sequências possíveis de 2 sinais + e 2 sinais - em que não apareçam sinais + consecutivos basta colocarmos os 2 sinais - e calcularmos o número de possibilidade de colocarmos os sinais + entre eles:

- - - - -

Há 3 locais possíveis dos quais devemos escolher 2 para colocarmos os 2 sinais +, logo, sendo domingo o primeiro dia escolhido, o número de formas de escolhermos os outros dois dias da semana é

$$C_3^2 = \frac{3 \times 2}{2!} = 3.$$

2º Caso: No caso de domingo não poder ser um dos dias escolhidos, basta escolhermos 3 dias dos 6 restantes (segunda à sábado), em que não haja dias consecutivos. Mas esse caso é o mesmo do problema original do início do capítulo. Para calcularmos o número de formas de escolhermos 3 dias dentre os possíveis: segunda, terça, quarta, quinta, sexta, e sábado, sem que haja dias consecutivos, basta calcularmos o número de sequências possíveis de 3 sinais + e 3 sinais - em que não haja sinais + consecutivos. Por exemplo, a sequência + - + - + - indicaria que os dias escolhidos para malhar seriam segunda, quarta e sexta. Assim, o número de formas de organizarmos esses sinais seria equivalente ao número de maneiras que poderíamos colocar os 3 sinais + entre os possíveis espaços entre os sinais - abaixo:

- - - - -

Ou seja, o número de formas de escolhermos 3 lugares em um total de 4 disponíveis:

$$C_4^3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4.$$

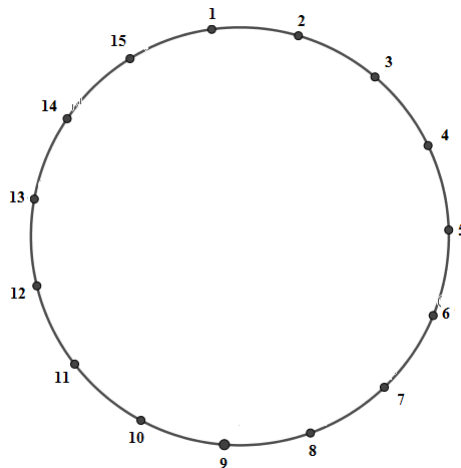
Concluimos pelo princípio aditivo que, se há 3 formas de escolhermos os três dias no primeiro caso e 4 formas de escolhermos os três dias no segundo caso, então o número de maneiras possíveis da pessoa escolher três dias fixos por semana para malhar sem que ela malhe em dias consecutivos será:

$$3 + 4 = 7.$$

Exemplo 2: (MORGADO et al., 2006, p. 82) “5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?”

Como já fizemos em exemplos anteriores, nos coloquemos ativamente no lugar da pessoa que deve arrumar as cadeiras na mesa. Imaginemos que nós é quem devemos organizar essas 5 pessoas ao redor dessa mesa. Para tal, deveríamos tomar duas decisões: a primeira é quais serão as 5 cadeiras escolhidas para serem ocupadas, e a segunda decisão é a de como organizaremos as 5 pessoas nessas 5 cadeiras.

Começemos pela primeira decisão: de quantas formas podemos escolher 5 cadeiras de um total de 15 disponíveis sendo que cadeiras adjacentes não podem ser escolhidas? Ora, o primeiro passo seria enumerarmos as cadeiras para que não nos percamos na contagem. Assim, como as cadeiras estão dispostas em torno de uma mesa circular, escolheremos uma delas para chamar de 1 e enumeraremos as outras, por exemplo, no sentido horário.



Assim, teremos que escolher 5 elementos do conjunto $\{1,2,3,4, \dots, 14, 15\}$. A primeira restrição é que não podemos escolher cadeiras adjacentes, ou seja, ao escolhermos 5 elementos do conjunto citado, não poderemos escolher números consecutivos. Além disso, como as cadeiras estão dispostas em formato circular, as cadeiras 1 e 15 serão adjacentes. Portanto, se a cadeira de número 1 for escolhida, a cadeira de número 15 não poderá ser ocupada. Entendidas as restrições, de quantas maneiras podemos escolher os 5 elementos do conjunto? Assim como nos problemas anteriores, podemos usar sequências de sinais + e - para representar cada escolha possível das 5 cadeiras. Se uma cadeira for escolhida iremos a representar por + e se não for escolhida por -. Como há um total de 15 cadeiras, em cada sequência possível irá aparecer 5 sinais + e 10 sinais -. Por exemplo, a sequência

+ - - + - + - - - + - - - + -

indicaria que as cadeiras escolhidas foram $\{1, 4, 6, 10, 14\}$.

Como não podemos escolher cadeiras adjacentes, nessas sequências não poderão haver sinais + consecutivos, e nenhuma sequência poderá começar e terminar com sinais +, pois estaria indicando que as cadeiras 1 e 15 estariam sendo escolhidas ao mesmo tempo. Para calcularmos o número de sequências possíveis de sinais + e -, dividiremos as nossas possibilidades de escolha em dois casos.

1º caso: a cadeira 1 ser uma das escolhidas. Neste caso devemos escolher outras 4 cadeiras não adjacentes das 12 disponíveis no conjunto $\{3, 4, 5, 6, \dots, 13,14\}$, visto que como a primeira cadeira foi uma das escolhidas, as cadeiras de número 2 e 15 não poderão ser ocupadas por serem as adjacentes da cadeira de número 1. Ora, o número de formas de escolhermos 4 números do conjunto $\{3, 4, 5, 6, \dots, 13,14\}$ de modo que não apareçam números consecutivos é equivalente ao número de maneiras de distribuímos uma sequência de 4 sinais + e 8 sinais - de modo que sinais + não possam ficar juntos. Para contarmos o número de sequências possíveis com essas restrições podemos listar os 8 sinais - e calcularmos o número de formas de colocar os 4 sinais + entre eles, ou seja, o número de maneiras de escolhermos 4 dos 9 espaços disponíveis abaixo:

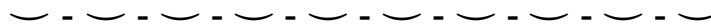
- - - - -

Logo, o número de formas de escolhermos 5 cadeiras das 15 disponíveis de modo que a

cadeira 1 seja uma das escolhidas e não haja cadeiras adjacentes na escolha, será:

$$C_9^4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4!} = \frac{3024}{24} = 126.$$

2º caso: a cadeira 1 não ser uma das escolhidas. Neste caso devemos escolher 5 cadeiras não adjacentes das 14 disponíveis no conjunto $\{2, 3, 4, \dots, 15\}$. Analogamente, devemos calcular o número de sequências possíveis contendo 5 sinais + e 9 sinais - em que sinais + não fiquem juntos em hipótese alguma. Ora, isso é equivalente a calcular o número de formas possíveis de distribuir 5 sinais + entre os 10 espaços disponíveis abaixo:



Portanto, o número de formas de escolhermos 5 cadeiras das 15 disponíveis de modo que a cadeira 1 não seja uma das escolhidas e não haja cadeiras adjacentes na escolha, será:

$$C_{10}^5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5!} = \frac{30240}{120} = 252.$$

Pelo princípio aditivo, o número de formas de escolhermos as 5 cadeiras respeitando as restrições impostas será:

$$126 + 252 = 378.$$

Portanto, a primeira decisão, que é a de escolher quais cadeiras serão ocupadas, pode ser tomada de 378 formas diferentes. Agora nossa segunda decisão é escolher como iremos distribuir essas 5 pessoas nos lugares determinados. Ora, existe 5 possibilidades para a primeira cadeira ser ocupada, pois qualquer uma das 5 pessoas pode se sentar nela. Acomodada a primeira pessoa, existe 4 possibilidades para a segunda cadeira ser ocupada, acomodada a segunda pessoa haverá 3 possibilidades da terceira cadeira ser ocupada, depois 2 possibilidades da quarta cadeira ser ocupada e por fim 1 possibilidade para última cadeira ser ocupada. Logo, escolhidas as cadeiras a serem usadas existem $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ formas de acomodar as 5 pessoas nelas. Assim, como há 378 maneiras de escolhermos as

cadeiras, e escolhidas as cadeiras há 120 formas de acomodarmos as pessoas, pelo princípio multiplicativo, o número de formas de colocarmos 5 pessoas em volta de uma mesa circular com 15 cadeiras de modo que cadeiras adjacentes não sejam ocupadas será:

$$378 \times 120 = 45.360.$$

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitas vezes os professores de Matemática começam suas aulas de análise combinatória explicando a teoria, expondo as fórmulas de permutações, permutações com repetições, combinações simples e outras mais, e só depois de tudo isso é que aplicam a teoria desenvolvida na resolução de problemas. Neste trabalho mostramos que é possível fazermos exatamente o contrário, isto é, apresentarmos um problema, que muitas vezes pode fazer parte do cotidiano do aluno, e a partir dele desenvolvermos a teoria.

Essa metodologia do ensino da análise combinatória a partir da resolução de problemas serve para que os alunos percebam que a Matemática faz sim parte do cotidiano de todos eles e isso acaba fazendo com que o interesse dos alunos na disciplina seja muito maior.

Vimos também que desenvolver estratégias para resolver um problema de combinatória é muito mais produtivo do que simplesmente decorar as fórmulas, até porque trabalhamos muitos exemplos onde cada um exigia estratégias e posturas diferentes para sua resolução.

Como vimos neste trabalho, os únicos pré-requisitos para resolvermos problemas de contagem são as quatro operações básicas, e mesmo assim nos deparamos com problemas que pareciam ter uma difícil solução. O curioso é que conseguimos resolver esses problemas que pareciam difíceis de maneira simples através de estratégias elegantes que aprendemos a construir.

Portanto, esperamos que através dessa sequência didática as aulas de análise combinatória sejam muito mais atraentes e produtivas para que, enfim, os alunos deixem de considerar este conteúdo como um dos mais difíceis de ser aprendido e consequentemente os professores deixem considerá-lo um dos mais difíceis de ser ensinado.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRANTES, P. **Um (bom) problema (não) é (só)...** . Disponível em <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf>, 1989.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, 2006. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 06 jun 2018.
- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. Ática, São Paulo, 2016.
- FOMIN, D. et al. **Círculos Matemáticos**. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do ensino médio volume 2**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- MORGADO, A. C. ; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- OLIVEIRA, K. I. M. ; FERNÁNDEZ, A.C. **Iniciação a Matemática: um curso com problemas e soluções**. SBM, Rio de Janeiro, 2010.
- ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. Editora UNESP, São Paulo, 1999. p. 199-218.
- POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.
- SOUZA, J. R. de. **Novo olhar Matemática**. FTD, São Paulo, 2013.
- SOUZA, M. A. V. F. de. **Solução de Problemas: relações entre habilidade Matemática, representação mental, desempenho e raciocínio dedutivo**. 204 f. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2007.
- SOUZA, M. A. V. F. de. ; GUIMARÃES, H. M. **A formulação de problemas verbais de matemática: Porquê e como**. Revista Quadrante, Lisboa , v. XXIV, nº 2, 2015.
- VALE, I., PIMENTEL, T. **Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática**. Disponível em

https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/31312880/Vale_Pimentel_%282012%29.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1528499698&Signature=LmKM4K62tzUXcSeR4z9ccfXr9iI%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DUm_novo-velho_desafio_da_resolucao_de_pr.pdf, 2012.

<https://impa.br/wp-content/uploads/2017/05/luciano_combinatoria.pdf> Acessado em 2 de Junho de 2018 às 12:44.

<https://impa.br/wp-content/uploads/2017/05/luciano_combinatoria2_ex.pdf> Acessado em 2 de Junho de 2018 às 12:46.

<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_5_prova_amarelo_12112017.pdf> Acessado em 2 de Junho de 2018 às 12:47.