UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DO TEOREMA DE PITÁGORAS AO ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT: Um resgate histórico e uma proposta de aplicação no Ensino Básico

OLAVO GUSTAVE WAGNER GONÇALVES DIAS

JOINVILLE, SC
2018

OLAVO GUSTAVE WAGNER GONÇALVES DIAS

DO TEOREMA DE PITÁGORAS AO ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT:
Um resgate histórico e uma proposta de aplicação no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

JOINVILLE, SC
2018

Dias, olavo
DO TEOREMA DE PITÁGORAS AO ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT: Um resgate histórico e uma proposta de aplicação no Ensino Básico / olavo Dias. - Joinville , 2018.
101 p.

Orientadora: Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2018.

1. Fermat. 2. Pitágoras. 3. Wiles. I. Bar de Figueiredo, Dra. Elisandra . II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação. III. Título.

Do teorema de Pitágoras ao Último Teorema de Fermat: Um Resgate Histórico e uma Proposta de Aplicação no Ensino Básico

por

Olavo Gustave Wagner Gonçalves Dias

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de concentração em "Ensino de Matemática"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

EBFigueiredo

Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Prof. Dr. Fábio Antonio Dorini
UTFPR/Curitiba

Ligia Liani Barz

Profa. Dra. Ligia Liani Barz
CCT/UDESC

Joinville, SC, 31 de julho de 2018.

Dedico essa dissertação a minha avó Benedita (*in memorian*) carinhosamente chamada de Vó Bita, que encheu de amor a nossa família.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela vida.

À minha esposa Mariana Fernandes Dias, que sempre esteve ao meu lado com muito amor, apoio e carinho em todos os momentos dessa dissertação.

À minha filha Cecília, que me faz ter forças para sempre lutar pelos meus sonhos.

À minha mãe Eva, que sempre me incentivou aos estudos.

Ao meu irmão Claud, que me inspirou desde criança, a gostar de matemática.

Aos professores do PROFMAT-UDESC, em especial ao professor Dr. Fernando Sasse, coordenador do curso.

À minha orientadora professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo, pela enorme ajuda, paciência e dedicação.

Aos queridos e valentes colegas da turma, que abdicaram de seus sábados para esse mestrado.

“Você ganhou Simon”, disse ele quase num sussurro, olhando-o com indisfarçável respeito. “Nem mesmo eu posso aprender matemática suficiente, em tão curto espaço de tempo, para resolver um problema tão difícil. Quanto mais eu mergulho na coisa, pior ela fica. Fatoração não-única, ideais – Bah! Você sabe que”, confidenciou o Diabo, “nem mesmo os matemáticos dos outros planetas, todos eles muito mais adiantados do que o seu, conseguiram resolvê-lo? Existe um cara em Saturno, ele parece um cogumelo sobre pernas de pau, que resolve equações diferenciais parciais de cabeça, e até mesmo ele desistiu”. (Simon Singh)

RESUMO

Esta dissertação apresenta um pouco da história e algumas demonstrações do Último Teorema de Fermat – um dos teoremas mais intrigantes da matemática. Apesar de simples de ser enunciado, passaram-se 358 anos entre sua proposição e sua demonstração. Inicialmente é abordada a história de Pitágoras, o grande precursor desse teorema, segue-se com Pierre de Fermat e outros importantes nomes da matemática, até chegar-se a Andrew Wiles – o matemático que conseguiu provar o teorema. São apresentadas as demonstrações para os casos n=4 e n=3, nessa ordem, seguindo exatamente a cronologia histórica. Para finalizar, como forma de visualização dos conceitos abordados nessa dissertação no contexto da Educação Básica, são apresentadas algumas atividades aplicadas com alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio abordando o teorema de Pitágoras e o Último Teorema de Fermat.

Palavras-chave: Fermat. Último Teorema de Fermat. Pitágoras. Andrew Wiles.

ABSTRACT

This dissertation presents a brief history and some demonstrations of Fermat's Last Theorem – one of mathematics' most intriguing theorems. Despite its simple enunciation, 358 years passed from its proposition to its demonstration. Initially, the history of Pythagoras – the great precursor of this theorem – is presented, followed by Pierre de Fermat and other great names of the mathematics, all the way to Andrew Wiles – the mathematician who successfully proved the theorem. The demonstrations for n=4 e n=3 are presented, in that order, precisely following the historical chronology. In conclusion, in order to better visualize the concepts addressed in this dissertation in the context of basic education, some activities applied to elementary and high school students, involving the Pythagorean Theorem and Fermat's last theorem, are presented.

Keywords: Fermat. Fermat's Last Theorem. Pythagoras. Andrew Wiles.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Números triangulares 28
Figura 2 - Números quadrangulares 28
Figura 3 - Triângulo retângulo 29
Figura 4 - Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras 30
Figura 5 - Demonstração clássica - relação dos ângulos 30
Figura 6 - Demonstração por semelhança do Teorema de Pitágoras 31
Figura 7 - Demonstração do presidente 32
Figura 8 - Quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ 33
Figura 9 - Segmentos perpendiculares no Quadrado $\boldsymbol{ABCD}$ 34
Figura 10 - Quadriláteros congruentes 35
Figura 11 - Quadrados sobre os lados do triângulo retângulo 35
Figura 12 - Quadriláteros congruentes sobre o maior cateto 36
Figura 13 - Segmentos paralelos aos catetos 36
Figura 14 - Quadriláteros congruentes sobre a hipotenusa 37
Figura 15 - Sobreposição de quadriláteros no quadrado 38
Figura 16 - Demonstração de Leonardo da Vinci 39
Figura 17 - Capa do livro 46
Figura 18 - Anotação do UTF 47
Figura 19 - Resolução da Atividade 1a) dupla D2 70
Figura 20 - Resolução da atividade 1b) pela dupla D3 71
Figura 21 - Resolução da Atividade 1c) pela dupla D1 71
Figura 22 - Resolução da Atividade 1c) pela dupla D1 72
Figura 23 - Resolução da Atividade 1d) pela dupla D2 73
Figura 24 - Resolução da Atividade 2a) pela dupla D3 74
Figura 25 - Quadrado de lado $\boldsymbol{a+b}$ 75
Figura 26 - Divisão do quadrado de lado $\boldsymbol{a+b}$ construindo um quadrado interior de lado $\boldsymbol{c}$ 75
Figura 27 - Divisão do quadrado de lado $\boldsymbol{a+b}$ construindo um quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ e outro de lado $\boldsymbol{b}$ 76
Figura 28 - Peças para demonstração de Perigal do teorema de Pitágoras 77
Figura 29 - Roteiro para a demonstração clássica do teorema de Pitágoras 79
Figura 30 - Passo 2 da atividade 3ii) por D2 80
Figura 31 - Passo 3 da atividade 3ii) por D2 81
Figura 32 - Passo 3 da atividade 3ii) por D3 82
Figura 33 - Peças para a demonstração de Perigal 83
Figura 34 - Montagem das peças para demonstração de Perigal de D2 84
Figura 35 - Relatório de atividade de Perigal 85
Figura 36 - Manipulações do material da impressora 3D de D1 85
Figura 37 - Manipulações do material da impressora 3D de D2 86
Figura 38 - Manipulações do material da impressora 3D de D3 86
Figura 39 - Demonstração do Teorema de Pitágoras da dupla D_3 87
Figura 40 - Cubos 88
Figura 41 - Montagem de cubos da dupla D2 89
Figura 42 - Montagem de cubos da dupla D_1 90
Figura 43 - Relatório de atividades dos cubos da dupla D3 91
Figura 44 - Respostas questionário da dupla D2 93
Figura 45 - Prova que $\sqrt[n]{\boldsymbol{2}}$ é irracional da dupla D1 95

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 1 - Ternos Pitagóricos 41
Tabela 1 - Decomposição da terna pitagórica 73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
UECE	Universidade do Estado do Ceará
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
UTF	Último Teorema de Fermat

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **23**
2 A HISTÓRIA DE PITÁGORAS **26**
2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES 29
2.1.1 A demonstração clássica **30**
2.1.2 A demonstração por semelhança de triângulos **31**
2.1.3 Demonstração do presidente James Abram Garfield **32**
2.1.4 A demonstração de Perigal **33**
2.1.5 Demonstração de Leonardo da Vinci **38**
2.2 TERNOS PITAGÓRICOS 39
2.3 O TRÁGICO FIM DE PITÁGORAS 41
3 PIERRE DE FERMAT E O SEU ÚLTIMO TEOREMA **43**
4 DEMONSTRAÇÕES DO UTF PARA OS CASOS $n = 3$ E $n = 4$ **52**
4.1 CASO $n = 4$ 52
4.2 CASO $n = 3$ 58
5 ANDREW WILES **62**
6 UMA PROPOSTA PARA ABORDAR O UTF NO ENSINO BÁSICO **68**
6.1 ATIVIDADE 1: JOGO DOS QUADRADOS 69
6.1.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 1 .... **69**
6.2 ATIVIDADE 2: TERNAS PITAGÓRICAS 73
6.2.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 2 .... **74**
6.3 ATIVIDADE 3: PROVAR O TEOREMA DE PITÁGORAS 75
6.3.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 3 .... **78**
6.4 ATIVIDADE 4: JOGO DOS CUBOS 87
6.4.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 4 .... **88**
6.5 ATIVIDADE 5: DESAFIO 94
6.5.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 5 .... **94**
6.6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO 96
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS **97**
REFERÊNCIAS **99**
ANEXOS **100**
ANEXO A - Declaração da instituição participante. Carta de Anuência. 100
ANEXO B - Modelo do Termo de Consentimento 101

1 INTRODUÇÃO

O tema escolhido para a dissertação é o Último Teorema de Fermat: não existe uma solução não nula de três números inteiros satisfazendo a equação $a^n = b^n + c^n$ para $n \geq 3$. A razão para a escolha de tal tema deve-se a importância histórica e a apresentação para alunos do Ensino Médio e Fundamental de um dos teoremas mais intrigantes da matemática. Como professor de Ensino Médio sempre fiz desafios aos alunos. Inicialmente questionava sobre a existência de três números inteiros não nulos a, b, c tais que $a^2 = b^2 + c^2$. A maioria dos alunos associava ao teorema de Pitágoras e a primeira resposta era a terna 3,4 e 5. Em seguida vinha a pergunta: Você consegue encontrar 3 números inteiros não nulos a, b, c tais que $a^3 = b^3 + c^3$? E se fosse $a^4 = b^4 + c^4$? Após inúmeras tentativas, os alunos inconformados desistiam. Esperavam que o professor contasse quais eram esses misteriosos números. E esse era o momento que eu explicava, de forma simples, sem muita linguagem matemática específica o Último Teorema de Fermat. No papel de professor tenho a convicção de que isso fez despertar o gosto pela matemática em vários alunos.

Objetivo geral desse trabalho é como abordar o Último Teorema de Fermat no Ensino Fundamental e Médio. Para alcançar esse objetivo, traçam-se os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar o teorema de Pitágoras como o precursor do Último Teorema de Fermat (UTF);
- Explorar algumas demonstrações do teorema de Pitágoras;
- Contar a história que circunda a demonstração do UTF, desde a sua proposição por Pierre de Fermat, o criador do teorema, até Andrew Wiles, o matemático que o provou;
- Apresentar as demonstrações do UTF para n = 3 e n = 4;
- Elaborar, aplicar e analisar atividades explorando o teorema de Pitágoras e o UTF em turmas de Ensino Fundamental e Médio.

Para o embasamento teórico é usado como apoio os textos:

1. O Último Teorema de Fermat de Simon Singh (SINGH, 2012) é o grande inspirador para a parte da história, principalmente nos capítulos 2, 3 e 5. A ideia desse livro é apresentar a história de Fermat e seu famoso teorema. O livro descreve de forma emocionante e com uma linguagem clara e simples, como esse teorema encantou todo o mundo matemático no decorrer da história.

2. Cálculo com Geometria Analítica (SIMMONS, 1987). Esse livro contém notas biográficas importantes para o resgate histórico.
3. História da Matemática (BOYER, 1996) e Introdução à História da Matemática (EVES, 2004). Esses livros foram usados para o resgate histórico.
4. O Último Teorema de Fermat para $n = 3$ de Bruno Salvador da Silva (SILVA, 2014). Essa dissertação destaca a demonstração do teorema para o caso $n = 3$ e aborda também a vida e a saga de Wiles na demonstração para o caso geral.
5. Equações Diofantinas: Sequência Didática e o Método da Descida Infinita de Fermat de Antoniel Abreu dos Anjos (ANJOS, 2015). Essa dissertação aborda o interessante método da Descida Infinita de Fermat. Esse método é usado para se fazer a demonstração de uma parte do Último Teorema de Fermat.
6. Fatoração Única em Corpos Ciclotômicos e o Último Teorema de Fermat de Francielle Kuerten Boeing (BOEING, 2013). Esse trabalho de conclusão de curso de graduação aborda algumas demonstrações para o Último Teorema de Fermat.
7. Meu Professor de Matemática (LIMA, 2012). Esse livro faz algumas demonstrações do teorema de Pitágoras e também é usado para o resgate histórico.

Esta dissertação está organizada do seguinte modo: no capítulo dois é apresentado o teorema de Pitágoras, o precursor do Último Teorema de Fermat. Por tratar-se de um assunto com grande aplicabilidade no Ensino Fundamental e Médio, foram feitas algumas demonstrações do teorema de Pitágoras. Entre essas, destaca-se a demonstração clássica que relaciona áreas de figuras planas e congruência de triângulos, que pode ser facilmente trabalhada por professores nas escolas. E também a demonstração mais sofisticada feita por Henry Perigal (1801-1898), que trabalha bastante com congruência de triângulos e quadriláteros. Também é mostrado o estudo das ternas Pitagóricas.

O capítulo três traz a história de Pierre de Fermat o criador do grande teorema, mas que não deixou por escrito nenhuma demonstração. Segundo Singh (2012), Fermat depois da primeira nota da margem, esboçando sua teoria, colocou um comentário que iria assombrar o mundo matemático: “Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para essa demonstração, mas essa margem é muito estreita para contê-la” (SINGH, 2012, p. 80). Além disso, também é falado de outros matemáticos que tentaram e/ou contribuíram para a demonstração do Último Teorema de Fermat. Do notável matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) um dos maiores matemáticos do século XVIII que contribuiu destacadamente para os casos $n = 3$ e $n = 4$, até chegar em Andrew Wiles (1953-), o matemático que em 1995 enfim provou o teorema de Fermat.

No quarto capítulo são apresentados os casos $n = 3$ e $n = 4$ da demonstração do Último Teorema de Fermat. O elemento chave para tal demonstração é o método da descida infinita, uma poderosa prova por contradição. Nesse capítulo para entender esse método é exemplificado que $\sqrt{2}$ é irracional.

O quinto capítulo traz a história de Andrew Wiles, o matemático que, em 1995, enfim provou o teorema de Fermat. O objetivo aqui não é mostrar sua demonstração e sim, relatar sua saga em busca de tal façanha.

No sexto capítulo é apresentada uma sequência de atividades, que foram elaboradas e/ou adaptadas de outros trabalhos, que abordam o Teorema de Pitágoras e o Último Teorema de Fermat. Essa sequência foi aplicada com um grupo de alunos de Ensino Fundamental e Médio de um colégio de Rio do Sul (SC) e os dados da aplicação foram analisados de forma qualitativa com descrição bem detalhada.

Por fim, no último capítulo são feitas as considerações finais sobre esse trabalho, apresentando resultados obtidos e conclusões.

2 A HISTÓRIA DE PITÁGORAS

Atualmente quando se fala em Pitágoras, logo nos deparamos com o famoso e mágico Teorema de Pitágoras, tão repetido em inúmeros exercícios de Ensino Fundamental e Médio. Mas quem foi esse homem? Muitos o conhecem como matemático, mas para seus contemporâneos ele era uma figura cercada de outros predicados: filósofo, profeta religioso, um santo, astrônomo e um agitador político. Muitas biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, mas se perderam, por isso sua história é cercada de lendas e mistérios.

Segundo Eves (2004), Pitágoras nasceu em Samos, uma ilha na costa oeste da Ásia Menor por volta de 572 a.C. Era uma cidade rica do ponto de vista mercantil, porém intelectualmente pobre devido a um rígido sistema político. Provavelmente por isso já na juventude, Pitágoras viajou para o Egito e Babilônia. Durante essas peregrinações ele aprendeu muitas técnicas matemáticas com esses povos. Os egípcios e babilônios tinham métodos sofisticados de cálculos que lhes permitiam montar sistemas de contabilidades avançados e construção de prédios. Para esses dois povos a matemática era usada simplesmente para resolver problemas práticos. No Egito isso era muito comum, por exemplo, na demarcação de campos, durante as enchentes anuais do rio Nilo. Além do conhecimento matemático, Pitágoras também estudou astronomia e absorveu muitas ideias religiosas. Depois de vinte anos, ele voltou para Samos. Todavia ao retornar ao seu lar, encontrou a ilha dominada pelo tirano Polícrates (574 a.C. – 522 a.C.). Insatisfeito partiu para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá com o apoio financeiro de Milo, o homem mais rico de Crotona, que além de atleta olímpico era um apreciador de matemática e filosofia, fundou a famosa Escola Pitagórica, uma Irmandade semi-secreta em que se estudava matemática, filosofia e ciências naturais. Era uma escola rígida e conservadora. Os seus membros eram proibidos de revelar qualquer descoberta matemática para o mundo externo. Adeptos da doutrina da metempsicose, em que se pregava que ao morrer a alma migrava para um ser vivo, os pitagóricos eram vegetarianos.

> [...] Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras filosofia (ou amor a sabedoria) e matemática (ou o que é aprendido) supõe –se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para estabelecer suas atividades intelectuais [...] (BOYER, 1996, p.39).

De acordo com Boyer (1996) o lema principal da escola Pitagórica era “tudo é número”. Com essa filosofia, os números deixaram de ser vistos apenas como algo prático para contar e calcular. Passaram a ser adorados como verdadeiros deuses. Pitágoras estudou as suas relações, propriedades e padrões que eles formavam. Isso foi uma inovação para a matemática, que passava agora a ser vista também como algo abstrato. A irmandade deu à matemática o status de “ciência” que explicava o universo.

Segundo Simmons (1987), Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) em sua obra metafísica (livro 1, capítulo 5, 330 a.C.) escreveu: “Os pitagóricos, que foram os primeiros a se interessarem por Matemática, não apenas a desenvolveram, mas também, saturados dela, imaginaram que os princípios da Matemática eram os princípios de todas as coisas” (SIMMONS, 1987, p. 674).

Ainda conforme Simmons (1987), os números eram a fascinação dos pitagóricos, tendo como objeto de estudo os números inteiros e as frações (que para eles eram proporções entre números inteiros). Alguns números tinham destaque nessa Irmandade. O dez, por exemplo, era santo, pois 10=1+2+3+4, em que 1 é o ponto gerador de todos os números, 2 é a linha, 3 a superfície e 4 o sólido e com isso 10 era tudo, o número do Universo. Segundo Eves (2004), Pitágoras foi o precursor do estudo da teoria dos números e misticismo envolvendo os números e o filósofo Jâmblico (250-328) atribuiu a Pitágoras a descoberta dos números amigos[1]. Por exemplo 220 e 284 são amigáveis. De fato:

Soma dos divisores próprios de 220: 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284.

Soma dos divisores próprios de 284: 1+2+4+71+142=220.

> [...] Esse par de números alcançou uma aura e rezava a superstição posterior que dois talismãs com esses números selariam uma amizade perfeita entre os que os usassem. Os dois números vieram a ter um papel importante na magia, na feitiçaria, na astrologia e na determinação de horóscopos [...] (EVES, 2004, p. 99).

Segundo Singh (2012), os números perfeitos[2] também tiveram uma enorme idolatria pelos pitagóricos. O primeiro número perfeito é o 6. Santo Agostinho (354-430) afirmou que “Seis é um número perfeito em si mesmo, e não porque Deus criou o mundo em seis dias, pelo contrário, Deus criou o mundo em seis dias porque esse número é perfeito” (AGOSTINHO, 420 d. C. apud SIMMONS, 1987, p. 675). O próximo número perfeito é 28, pois 28=1+2+4+7+14. Um fato interessante desse número é que 28 dias é aproximadamente o tempo que a lua gasta para orbitar a Terra. Os dois próximos perfeitos são os números 496 e 8.128. À

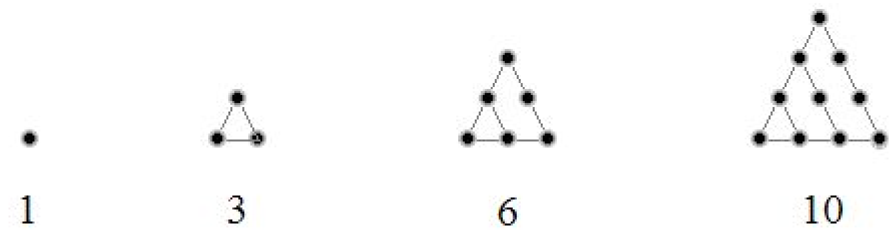
[1] Dois números são amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro.

[2] Um número n é chamado perfeito se para todo inteiro $n > 1$, for igual a soma dos seus divisores próprios (Divisores próprios são todos os divisores de n, exceto ele mesmo).

medida que os números inteiros vão crescendo, a missão de achar esses perfeitos vai se tornando extremamente difícil. Segundo Domingues (1991), o quinto perfeito é o número 33.550.336 e só foi encontrado no século XVI por Hudalrichus Regius (1598-1679). O sexto é 8.589.869.056 e foi encontrado por Pietro Cataldi (1548-1626). Ainda de acordo com Domingues (1991) os gregos só conheciam os quatro primeiros números perfeitos. Porém, em Elementos (Proposição 36, livro IX) Euclides já provara que se $2^k - 1$ é primo, então $n = 2^{k-1}.(2^k - 1)$ é perfeito. Esse teorema traz como consequência apenas que n é par. Uma questão ainda em aberto: Existe algum número perfeito que é ímpar? E outro item polêmico: O conjunto dos números perfeitos é finito ou infinito? Segundo Santos (2015), são conhecidos 37 números perfeitos e não se sabe se a lista é finita.

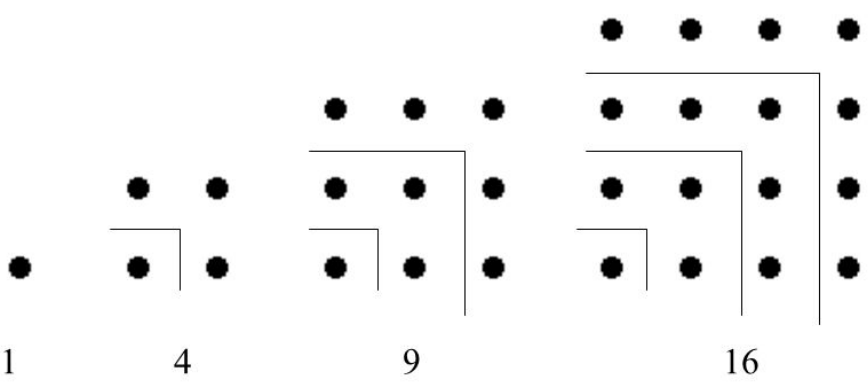
Outra classe de números que os pitagóricos veneravam eram os números figurativos ou figurados, que são formados pela combinação de pontos em modelos geométricos regulares. Na Figura 1 temos como exemplo os números triangulares e na Figura 2 os números quadrangulares. Em especial o número triangular dez era chamado *tetractys* e era, juntamente com o pentagrama, o símbolo da irmandade.

Figura 1 - Números triangulares



Fonte: Produção do autor, 2017.

Figura 2 - Números quadrangulares



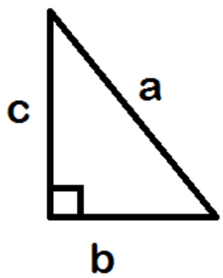
Fonte: Produção do autor, 2017.

Pitágoras também é destacado por estudar relações de números com harmonia na música.

> Conta-se que Pitágoras observou que quando os comprimentos de cordas vibrantes podem ser expressos como razão de números inteiros simples, como dois para três (para a quinta) ou três para quatro (para a quarta), os tons serão harmoniosos. Em outras palavras, se uma corda produz uma nota dó quando tocada, então uma semelhante com o dobro do comprimento produzirá o dó uma oitava abaixo; e os tons entre essas notas são emitidos por cordas cujos comprimentos são dados por razões intermediárias (BOYER, 1996, p. 38).

Apesar de todos esses feitos (reais ou mitos) o que mais se destaca é o teorema que leva seu nome. Segundo Boyer (1996), os babilônios e egípcios já usavam o teorema de Pitágoras. Todavia, não sabiam que ele era verdadeiro para todos os triângulos retângulos, apenas para alguns poucos que eles aplicavam no dia a dia. Ainda de acordo com Boyer (1996), deve-se a Pitágoras o autor da prova que esse teorema é válido para todos os triângulos retângulos. De grande aplicação para a humanidade, o teorema de Pitágoras é um teorema simples de ser aplicado e enunciado: o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Figura 3 - Triângulo retângulo



Fonte: Produção do autor, 2017.

Na Figura 3 tem-se que b e c são medidas dos catetos e a é a medida da hipotenusa. Assim, simbolicamente:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

A seguir é apresentado algumas demonstrações para esse teorema.

2.1. Teorema de Pitágoras: algumas demonstrações

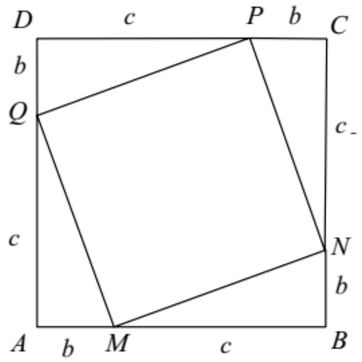
Esta seção traz algumas demonstrações do teorema de Pitágoras.

2.1.1 A demonstração clássica

Essa demonstração é bastante simples, relacionando áreas de figuras planas e congruência de triângulos, podendo ser aplicada facilmente nas escolas.

Seja $ABCD$ um quadrado de lados $b + c$ e sejam M, N, P e Q pontos sobre os lados desse quadrado, tais que $AM = BN = CP = DQ = b$ e $MB = NC = PD = QA = c$, como ilustra a Figura 4.

Figura 4 - Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras

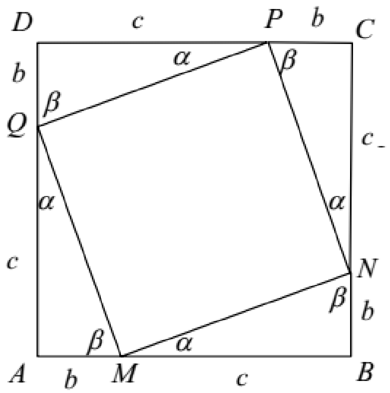


Fonte: Produção do autor, 2017.

Temos que os triângulos QAM, MBN, NCP e PDQ são congruentes, pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Logo, $QM = MN = NP = PQ = a$.

Considere α e β os ângulos indicados na Figura 5. Como $ABCD$ é um quadrado segue, pela soma dos ângulos internos de um triângulo, que $\alpha + \beta = 90^o$.

Figura 5 - Demonstração clássica - relação dos ângulos



Fonte: Produção do autor, 2017.

Com isso temos que cada ângulo interno do quadrilátero $MNPQ$ é 90º. Portanto, $MNPQ$ é um quadrado de lado a. Como a área de $ABCD$ é igual a soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado $MNPQ$, segue que:

$$A_{ABCD} = 4.\frac{bc}{2} + a^2$$

$$(b+c)^2 = 2bc + a^2$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

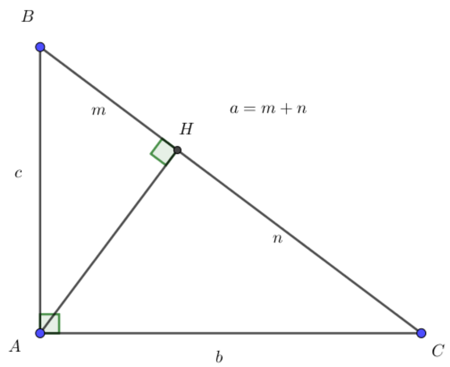
Concluindo a fórmula clássica do Teorema de Pitágoras.

2.1.2 A demonstração por semelhança de triângulos

Essa demonstração é baseada na semelhança entre dois triângulos. A partir da proporcionalidade entre os lados provaremos o Teorema de Pitágoras.

Seja ABC um triângulo retângulo em A de catetos b e c e hipotenusa a. Considere AH a medida da altura relativa a hipotenusa e m e n, respectivamente, as projeções dos catetos b e c sobre a hipotenusa, como na Figura 6.

Figura 6 - Demonstração por semelhança do Teorema de Pitágoras



Fonte: Produção do autor, 2017.

Temos, pelo caso AA (ângulo-ângulo), a semelhança dos triângulos: ABC e HBA e ABC e HAC. Logo:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BH} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Leftrightarrow c^2 = a.m. \qquad (1.1)$$

e

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Leftrightarrow b^2 = a.n. \qquad (1.2)$$

Assim, segue das equações (1.1) e (1.2):

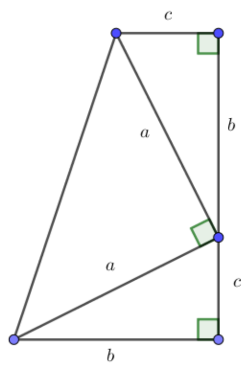
$$b^2 + c^2 = am + an$$
$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$
$$b^2 + c^2 = a.a.$$

Portanto, $b^2 + c^2 = a^2$. Novamente obtendo a relação atribuída a Pitágoras.

2.1.3 Demonstração do presidente James Abram Garfield

James Abrahan Garfield (1831-1881) foi o vigésimo presidente dos Estados Unidos e era um grande estudioso da matemática. Usando um trapézio, ele fez uma interessante demonstração do Teorema de Pitágoras. Considere o trapézio da Figura 7 de bases b e c e altura $b + c$. Observe que ele é composto por três triângulos retângulos, sendo dois de catetos b e c e hipotenusa a.

Figura 7 - Demonstração do presidente



Fonte: Produção do autor, 2017.

Temos que a área desse trapézio é dada por:

$$\frac{(b + c)(b + c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}. \qquad (1.3)$$

Porém, analisando a Figura 7 vemos que essa área pode ser dividida em 3 triângulos retângulos cuja a soma das áreas é dada por:

$$\frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}. \tag{1.4}$$

Assim, igualando as equações (1.3) e (1.4), obtemos que:

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}$$

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Portanto, $a^2 = b^2 + c^2$, como afirma o clássico resultado.

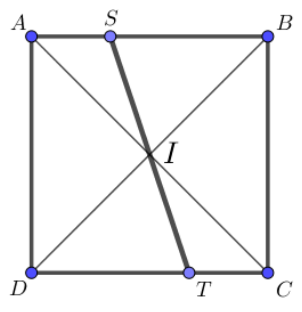
2.1.4 A demonstração de Perigal

Henry Perigal, um livreiro em Londres, publicou em 1873 a demonstração de que a soma dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual a área do quadrado construído sobre a sua hipotenusa. Para tal demonstração inicialmente vamos provar algumas proposições.

Proposição 1: Considere o quadrado $ABCD$ na Figura 8. Qualquer segmento ST que liga dois lados opostos do quadrado e passa pelo ponto médio I obedece a relação $SI = TI$.

Demonstração:

Figura 8 - Quadrado $ABCD$



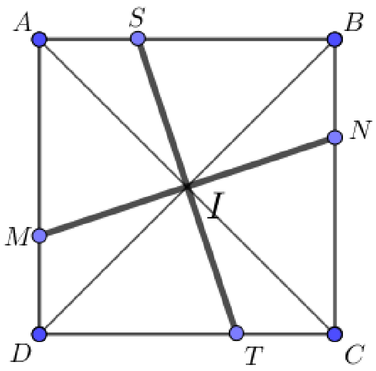
Fonte: Produção do autor, 2017.

Considere os triângulos AIS e CIT. Temos que os ângulos AIS e CIT são iguais, pois são opostos pelo vértice, os ângulos SAI e TCI são iguais, pois são alternos internos e como I

é ponto médio, temos $AI = CI$. Assim, pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo) os triângulos AIM e CIN são congruentes. Logo $SI = TI$.

Proposição 2: Considere no quadrado ABCD o segmento MN perpendicular a ST como na Figura 9. Sendo I o ponto médio das diagonais, tem-se que $MI = SI$.

Figura 9 - Segmentos perpendiculares no Quadrado $ABCD$



Fonte: Produção do autor, 2017.

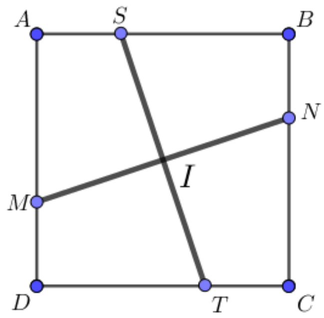
Demonstração:

Temos a congruência dos ângulos MDI e SAI, pois ambos medem 45º. Além disso, também são congruentes AIS e DIM. Para provarmos essa congruência, consideremos o seguinte raciocínio: considere duas retas perpendiculares. Se girarmos uma reta com um ângulo α , para manter essa perpendicularidade, a outra reta também deve girar o mesmo ângulo α. Como MN é perpendicular a ST , se girarmos o segmento ST até a diagonal AC com um ângulo $\alpha = AIS$, para manter a perpendicularidade devemos girar o segmento MN também com o mesmo ângulo $\alpha = DIM$. Logo AIS e DIM são congruentes. Como I é ponto médio, temos $AI = DI$. Logo pelo caso *ALA* os triângulos DIM e AIS são congruentes. Logo $MI = SI$.

Proposição 3: Seja o quadrado $ABCD$ e I o seu centro. Considere $S \in AB, N \in BC, T \in CD$ e $M \in AD$. Se $ST \cap MN = \{I\}$ e ST e MN são perpendiculares (Figura 10), então o quadrado $ABCD$ fica dividido em quatro quadriláteros congruentes.

Demonstração: Pela Proposição 1 sabemos que $SI = TI$ e $MI = NI$. Pela congruência dos triângulos AIS e CIT na demonstração da Proposição 1 temos que $AS = TC$. Usando o mesmo raciocínio temos que $DM = BN$. Consequentemente $BS = CN = DT = AM$. Pela Proposição 2 temos que $MI = SI$. Logo temos todos os quadriláteros congruentes.

Figura 10 - Quadriláteros congruentes

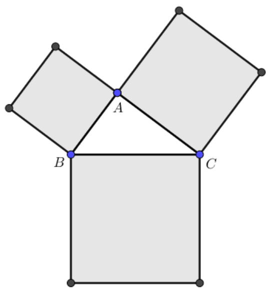


Fonte: Produção do autor, 2017.

Agora faremos a demonstração de Perigal para o Teorema de Pitágoras. Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em A. Para essa demonstração seguiremos a sequência de passos:

1) Sobre os lados do triângulo constroem-se três quadrados como na Figura 11.

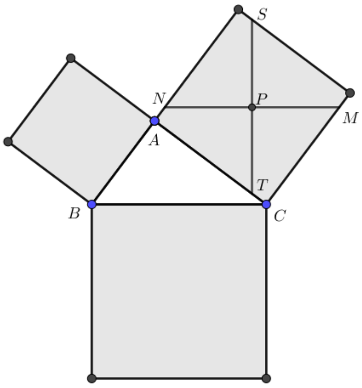
Figura 11 - Quadrados sobre os lados do triângulo retângulo



Fonte: Produção do autor, 2017.

2) No quadrado do cateto de maior medida traça-se MN paralela a hipotenusa e passando pelo centro P desse quadrado em seguida, traça-se ST perpendicular a MN passando por P como na Figura 12.

Figura 12 - Quadriláteros congruentes sobre o maior cateto

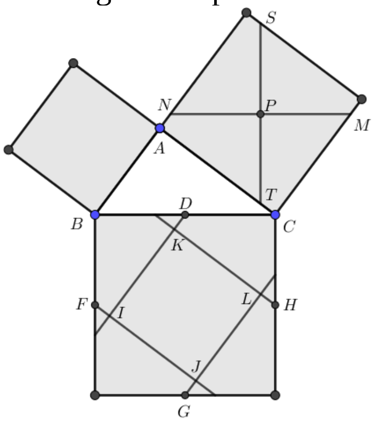


Fonte: Produção do autor, 2017.

Pela Proposição 3 obtêm-se quatro quadriláteros congruentes.

3) A partir de cada ponto médio do quadrado construído sobre a hipotenusa traçam-se paralelas aos lados dos catetos do triângulo, como ilustra a Figura 13.

Figura 13 - Segmentos paralelos aos catetos



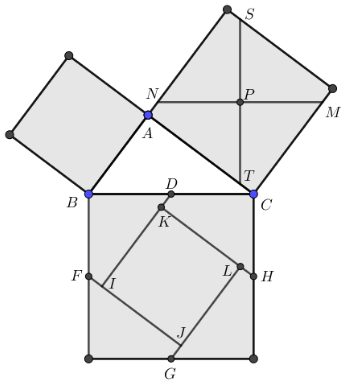
Fonte: Produção do autor, 2017.

Analisando a Figura 13 temos que $NMCB$ é um paralelogramo, pois NM é paralelo a BC e NB é paralelo a MC.

Como o P é ponto médio de NM, D é o ponto médio de BC e os lados NM e BC são lados opostos do paralelogramo, logo tem a mesma medida, segue que $PM = DB$. Como F e D são pontos médios dos lados do quadrado, temos $BF = DB$. Além disso, como $PM = PT$, pois o ponto P é ponto médio de ST e NM, temos que $PT = BF$.

Considerando a fragmentação exposta na Figura 14, vamos provar que o quadrado sobre a hipotenusa pode ser dividido de tal forma a obtermos quadriláteros congruentes aos do quadrado construído sobre o maior cateto.

Figura 14 - Quadriláteros congruentes sobre a hipotenusa

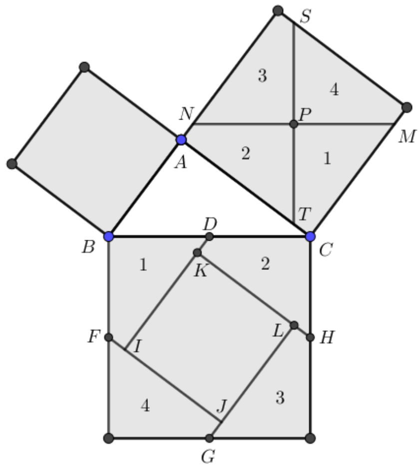


Fonte: Produção do autor, 2017.

Vamos provar que $BDIF$ e $PMCT$ são quadriláteros congruentes. No quadrilátero $BDIF$ traçamos o segmento FD construindo assim o triângulo retângulo isósceles FBD. No quadrilátero $PMCT$ traçamos o segmento TM construindo também o triângulo retângulo isósceles MPT. Como $BF = DB = PM = PT$ temos $FD = TM$, pois ambas são hipotenusas de triângulos retângulos de catetos com mesmas medidas. Como BN é paralelo a DI e BI é paralelo a DN, temos que $BIDN$ é paralelogramo. Logo $DI = BN = MC$. Como os triângulos retângulos DFI e MTC tem ordenadamente congruentes a hipotenusa e um cateto, então eles são congruentes. Portanto, temos que $FI = TC$. Com isso concluímos que $BDIF$ e $PMCT$ são quadriláteros congruentes.

Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado aos quadriláteros $CHKD$, $XGLH$ e $ZFJG$, provando que são todos congruentes aos quadriláteros construídos sobre o quadrado do cateto AC. Assim, temos que todos os quadriláteros descritos se encaixam, como na Figura 15.

Figura 15 - Sobreposição de quadriláteros no quadrado



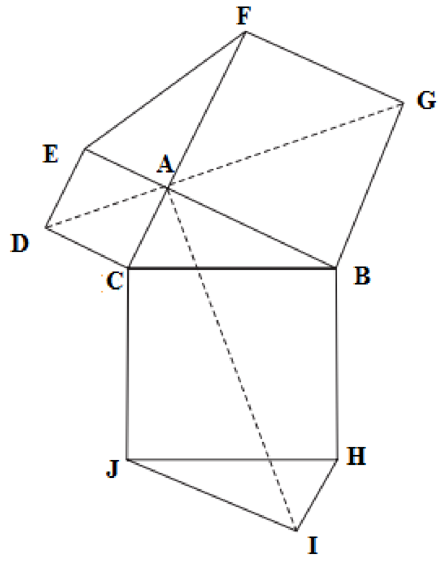
Fonte: Produção do autor, 2017.

Considere agora o quadrilátero $KLJI$. Como os ângulos HLG, FJG, DKH, FID são retos, temos que os ângulos de $KLJI$ também são retos. Temos, ainda que, $BN = MC$ e, pela congruência dos quadriláteros $BDIF$ e $PMCT$, obtemos $MC = DI$, logo $BN = MC = DI$. Além disso, como os quadriláteros $CDKH$ e $PNAT$ também são congruentes, temos que $DK = NA$. Assim, como $AB = BN - NA$ e $KI = DI - DK$, segue que $AB = KI$. Analogamente, podemos usar o mesmo raciocínio para provar que $IJ = AB$, portanto $IJ = KI = AB$. Como o quadrilátero $KLJI$ tem todos os ângulos retos os lados opostos KI e JL , IJ e LK tem medidas iguais. Com isso, provamos que $KI = IJ = LJ = LK = AB$. Logo o quadrilátero $KLJI$ é um quadrado de lado AB, portanto congruente ao quadrado construído sobre o cateto AB. Com isso temos que os quatro quadriláteros do quadrado sobre o maior cateto mais o quadrado do menor cateto se encaixam perfeitamente sobre o quadrado construído sobre a hipotenusa. Portanto, provamos que a soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa, ou seja, $b^2 + c^2 = a^2$, concluindo a demonstração feita por Perigal para o Teorema de Pitágoras.

2.1.5 Demonstração de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci (1452-1519) foi um artista renascentista italiano e um dos grandes gênios da humanidade. Destacava-se em diversos ramos do conhecimento, entre eles a matemática. A seguir é apresentado uma demonstração do Teorema de Pitágoras feita por ele que se baseia na Figura 16.

Figura 16 - Demonstração de Leonardo da Vinci



Fonte: Produção do autor, 2017.

Considere os quadrados $ACDE, AFGB \; e \; CBHJ$ de lados respectivamente b, c e a, e o triângulo JHI com lados $JI = c$ e $HI = b$. Temos que os ângulos EAF e CAB são opostos pelo vértice, portanto iguais. Como $EA = CA$ e $BA = FA$, temos que os triângulos EAF e CAB, pelo caso LAL, são congruentes. Logo $EF = CB$. Disso temos que os quadriláteros $DEFG$, $GBCD$, $ACJI$ e $ABHI$ são congruentes. Logo os hexágonos $DEFGBC$ e $ABHIJC$ tem áreas iguais. Como a área dos triângulos EAF, CAB e JHI são iguais, temos que a área do quadrado $CBHJ$ é a soma das áreas dos quadrados $ACDE$ e $AFGB$. Ou seja, temos que a área do quadrado sobre a hipotenusa de lado a é igual a soma da área do quadrado sobre o cateto de lado b mais a área do quadrado sobre o cateto de lado c, novamente chegando na relação de Pitágoras.

Depois de termos visto algumas das demonstrações, no viés geométrico, do teorema de Pitágoras, o veremos, a seguir de um ponto de vista da aritmética. Nesse caso as medidas são números inteiros e obedecem a uma relação algébrica.

2.2 Ternos Pitagóricos

Como os gregos trabalhavam com números inteiros, faz sentido pensar que os triângulos retângulos eram formados apenas por medidas inteiras. Com isso o problema de achar as medidas b e c dos catetos e a medida a da hipotenusa consistia em aritmeticamente encontrar três números assim chamados de terno ou trio pitagórico, tais que $a^2 = b^2 + c^2$.

Um terno pitagórico é primitivo se $mdc(b, c, a) = 1$. Por exemplo: $(3, 4, 5)$ é talvez o mais famoso trio que exista, visto que é o único em que os termos são números naturais consecutivos. Observe que o trio (6,8,10) é pitagórico, mas não é primitivo pois $mdc(6, 8, 10) = 2$. No entanto, observe que $(6, 8, 10) = (3.2, 4.2, 5.2)$. Assim como o trio $(9{,}12{,}15) = (3.3{,}4.3{,}5.3)$. Logo, podemos ter que todo terno da forma $(3n, 4n, 5n)$ também é pitagórico pois

$$(5n)^2 = (3n)^2 + (4n)^2$$
$$25n^2 = 9n^2 + 16n^2$$
$$25n^2 = 25n^2.$$

Com isso o nosso objetivo é encontrar um método para calcular os ternos pitagóricos primitivos, pois eles são a matéria prima para quaisquer outros ternos. Inicialmente destacamos que dado (b, c, a) um terno pitagórico primitivo, então b, c e a não podem ser todos pares, pois o $mdc(b, c, a)$ nesse caso será diferente de 1. Além disso, b e c não podem ser ambos ímpares, pois nesse caso teríamos $b = 2m + 1$ e $c = 2n + 1$. Donde,

$$b^2 + c^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2 = 4t + 2.$$

Logo, a não pode ser ímpar, pois caso fosse a^2 também seria, o que é impossível pois $a^2 = 4t + 2$.

Se a for par é da forma $2k$, logo $4k^2 = a^2 = b^2 + c^2 = 4t + 2$. O que é um absurdo, pois teríamos $2k^2 = 2t + 1$, ou seja um número par igual a um número ímpar. Portanto, b e c não podem ser ambos simultaneamente ímpares.

Destacamos também que se $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ são números tais que $mdc(b, c) = 1$ e $b.c = a^2$, então b e c são quadrados perfeitos. De fato, todo fator primo p de b é fator primo de a^2, mas não é de c, pois são coprimos. Em a^2 todo fator primo tem expoente par. Logo, o expoente de p em b é par. Com isso b é um quadrado perfeito. Analogamente esse raciocínio vale para c.

Teorema 1: Considere o terno pitagórico (b, c, a) primitivo em que b é par. Então existem $u, v \in N^*$, primos entre si, um par e outro ímpar, $u > v$, tais que:

$$b = 2uv,\ c = u^2 - v^2 \text{ e } a = u^2 + v^2.$$

Demonstração:

Seja (b, c, a) um terno pitagórico e primitivo, com b par. Se c fosse par, então a também seria par, pois $a^2 = b^2 + c^2$ seria par. No entanto, isso seria um absurdo pois $mdc(b, c, a) = 1$, logo c e a são números ímpares.

Como $a^2 = b^2 + c^2$ temos que $b^2 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c)$ sendo $a - c$ e $a + c$ números pares.

Fazendo $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a-c}{2} . \frac{a+c}{2}$, e como mdc $(\frac{a-c}{2}, \frac{a+c}{2}) = 1$, visto que todo divisor de $\frac{a-c}{2}$ e $\frac{a+c}{2}$ é divisor de sua soma e diferença, definimos $\frac{a-c}{2} = v^2$ e $\frac{a+c}{2} = u^2$, com $u > v$.

Com isso temos, $a + c = 2u^2$ e $a - c = 2v^2$. Donde, $a = u^2 + v^2$ e $c = u^2 - v^2$. Porém, $b^2 = a^2 - c^2 = (u^2 - v^2)^2 - (u^2 + v^2)^2 = 4v^2 . u^2$. Portanto, $b = 2uv$.

Logo, todo terno pitagórico (b, c, a) primitivo pode ser formado de maneira que $b = 2uv$, $c = u^2 - v^2$ e $a = u^2 + v^2$.

No Quadro 1 temos alguns exemplos de ternos pitagóricos primitivos.

Quadro 1 - Ternos Pitagóricos

u	v	$b = 2uv$	$c = u^2 - v^2$	$a = u^2 + v^2$
2	1	4	3	5
3	2	8	15	17
4	1	24	7	25
5	2	20	21	29

Fonte: Produção do autor, 2017.

Os ternos pitagóricos se tornam raros à medida que u e v aumentam. Segundo Singh (2012), os pitagóricos inventaram um método de encontra-los e com isso, também demostraram que há uma infinidade deles.

2.3 O trágico fim de Pitágoras

Segundo Singh (2012) Pitágoras morreu com muitos dos seus alunos em um incêndio na cidade de Crotona. Um dos culpados foi Cilon, aluno rejeitado pela escola, ficou furioso com a reprovação, e durante uma rebelião alimentou a paranoia nas pessoas dizendo que perderiam suas terras para a escola pitagórica. Os populares com ódio incendiaram a escola.

Os discípulos que sobreviveram partiram para outras regiões da Magna Grécia construindo novas escolas, propagando o conhecimento, mostrando não somente o teorema de Pitágoras, mas também as contribuições na parte da geometria e aritmética como por exemplo, os ternos pitagóricos.

Apesar desse trágico fim de Pitágoras, suas contribuições foram imensas para o avanço da Matemática. A busca pela verdade através da demonstração, nas palavras de Singh (2012), revigorou o espírito da matemática.

De acordo com o Guinness World Records (1999), o matemático grego Eleftherios Argyropoulos (1967-) é o recordista que descobriu 520 provas diferentes, no período de 1986 até 1997, para o teorema de Pitágoras.

3 PIERRE DE FERMAT E O SEU ÚLTIMO TEOREMA

Simon Pierre de Fermat nasceu em 20 de agosto de 1601, na cidade de Beaumont-de-Lomagne. Filho de um rico mercador de peles, teve uma educação privilegiada no monastério franciscano de Grandselve. Frequentou a Universidade de Toulouse e se formou em direito na Universidade de Orléans. Em 1631 se tornou conselheiro do parlamento de Toulouse onde, segundo Singh (2012), era um servidor público eficiente que teve uma ascensão rápida em sua carreira tornando-se um membro da elite.

Fermat, além de enfrentar grandes problemas de saúde, sendo que em 1652 ficou seriamente doente, também tinha que sobreviver aos riscos da política francesa do século XVII, marcada por uma época de intrigas e tramas. Conforme Singh (2012), como Fermat nunca teve ambições políticas, adotou uma estratégia de cumprir seu trabalho de forma eficiente e discreta evitando intrigas. Ele reservava a maior parte de seu tempo à matemática, na qual era um estudioso amador. Segundo Boyer (1996), Fermat se propôs a reconstruir o livro Lugares Planos de Apolônio, baseado em alusões contidas na Coleção matemática de Papus (-350).

Fermat tinha o hábito de escrever cartas a grandes matemáticos, entre eles o padre Marin Mersenne (1588-1648) que, segundo Singh (2012), desempenhou um grande papel na matemática do século XVII, entre eles, lutar contra um hábito forte entre os matemáticos, que era o sigilo dos seus trabalhos. Mersenne tentava constantemente encorajar os matemáticos a trocarem suas ideais e seus resultados. Entre esses matemáticos é claro, Fermat, que sempre recusava, alegando que a publicação e o reconhecimento público não significavam nada.

Fermat se comunicava com outros matemáticos escrevendo seus teoremas, no entanto não fornecia suas demonstrações, desafiando-os a darem as devidas provas. Devido a esse sigilo, de não revelar suas próprias provas, Fermat gerava grandes frustrações e revolta entre matemáticos. O matemático e filósofo René Descartes (1596-1650) chamou Fermat de "fanfarrão" e o inglês John Wallis (1616-1703) o chamava de maldito francês que tinha um enorme prazer em não divulgar suas provas. Esse hábito tinha motivações práticas, Fermat alegava que não queria perder tempo desenvolvendo rigorosamente seus métodos, podendo prosseguir para outras descobertas. Também não teria que sofrer com críticas invejosas. Fermat era um gênio que dispensava a fama, não queria seu nome envolvido em picuinhas de seus críticos. (SINGH, 2012).

Outro grande matemático que Fermat discutiu seu trabalho foi Blaise Pascal (1623-1662). Essa parceria rendeu a fundação de uma das mais belas áreas da matemática: a teoria da probabilidade. Segundo Eves (2004, p. 393) em 1654 o Chevalier de Méré (1607-1684), um hábil e inteligente jogador, propôs a Pascal o problema dos pontos: "Determine a divisão das opostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo". Pascal, interessou-se pelo problema e apresentou o desafio para Fermat que embora gostasse do isolamento sentiu-se atraído. Segundo Singh (2012), Fermat e Pascal descobriram as bases da probabilidade, as primeiras provas matemáticas que descrevessem as leis do acaso, determinando as regras fundamentais dos jogos de azar.

Fermat também contribuiu com a fundação de outro importantíssimo ramo da matemática: o cálculo infinitesimal. De acordo com Eves (2004), as primeiras manifestações claras do método diferencial se encontram nas ideais de Fermat em questões de máximos, de mínimos e métodos para determinar a tangente por um ponto de uma curva em que é fornecida a equação cartesiana. Segundo Singh (2012), Newton (1642-1727) um dos inventores do cálculo escreveu que desenvolveu suas teorias baseado no método das tangentes de Fermat.

Embora a geometria analítica seja, para muitos, invenção de Descartes, Fermat também foi um dos fundadores desse ramo da matemática que faz conexões com a geometria e álgebra. Conforme Boyer (1996), no trabalho Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos, só publicado após a sua morte, Fermat lança as bases para a geometria analítica.

Entretanto, a maior contribuição de Fermat à matemática foi o estudo da teoria dos números, uma das partes mais puras e antigas da matemática. Seu talento para os números era incrível. Segundo Singh (2012), um dos livros que Fermat se inspirou foi o trabalho Aritmética de Diofante (c. 201 – 284), um conjunto de treze volumes que descrevia a teoria dos números através de uma série de problemas e soluções detalhadas. Desses apenas seis sobreviveram ao tumulto da idade das trevas e numa tradução feita por Claude Gaspard Bachet (1581-1638), um linguista fascinado por clássicos matemáticos em 1621, Aritmética tornou-se seu companheiro inseparável, e em suas páginas, junto com as traduções de Bachet, Fermat deu suas contribuições com descobertas, anotações e enunciados de teoremas. Uma das descobertas foi que os números 17296 e 18416 eram números amigos. Fermat provou também que o número 26 é o único número preso entre um quadrado e um cubo, ou seja, 25 e 27.

A seguir é apresentado alguns exemplos que, segundo Eves (2004), ilustram o caráter das investigações matemáticas de Fermat:

1) Pequeno teorema de Fermat: se p é primo e a é primo com p, então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p. De acordo com Eves (2004) esse teorema foi enunciado por Fermat em 1640, mas que teve a primeira demonstração publicada pelo matemático Euler em 1736.

2) Todo primo ímpar pode ser dado pela diferença de dois quadrados de uma só maneira.

3) Um primo da forma $4k + 1$ pode ser representado como a soma de dois quadrados. Segundo Eves (2004) Fermat foi o primeiro a enunciar esse teorema e Euler o demonstrou em 1754.

4) Um número primo da forma $4k + 1$ é apenas uma vez a hipotenusa de um triângulo retângulo, seu quadrado é duas vezes, seu cubo é três e assim por diante.

5) Todo inteiro não negativo pode ser representado como no máximo soma de quatro quadrados. De acordo com Eves (2004) esse teorema foi provado pelo matemático Lagrange (1736-1813) em 1770.

6) A área de um triângulo retângulo de lados inteiros não pode ser um quadrado perfeito inteiro. Esse teorema também foi provado pelo matemático Lagrange.

7) Há uma única solução inteira de $a^2 + 2 = b^3$ e apenas duas de $a^2 + 4 = b^3$. A solução da primeira equação é $a = 5$ e $b = 3$. Já a solução da segunda equação é $a = 2$ e $b = 2$, $a = 11$ e $b = 5$.

8) Não existem inteiros positivos a, b, c tais que $a^4 + b^4 = c^2$.

Entretanto, entre todas as suas contribuições, a mais importante aconteceu por volta de 1637, que ficou conhecido mundialmente como o Último Teorema de Fermat: não existem inteiros positivos a, b, c , com $n > 2$, tais que $b^n + c^n = a^n$. Na margem de Aritmética, ao lado do problema 8, Fermat escreveu:

> É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes (SINGH, 2012, p. 80).

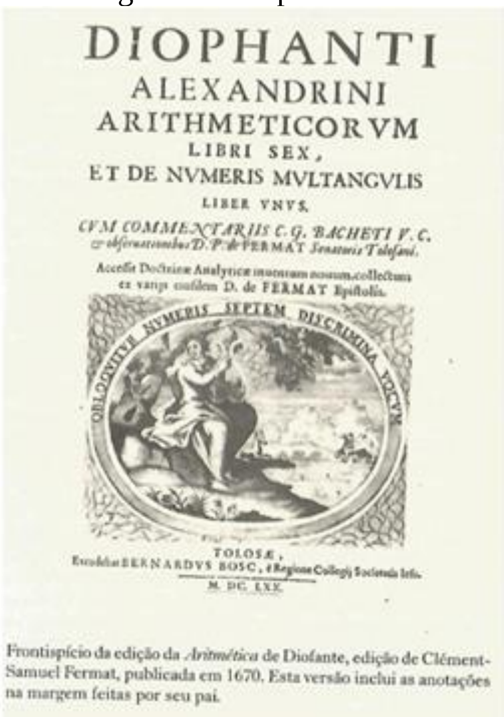
Com seu tradicional hábito de não dar demonstrações Fermat escreveu logo em seguida: “Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição mas esta margem é muito estreita para contê-la” (SINGH, 2012, p. 80). A grande questão é se realmente Fermat provou esse teorema. E se provou de forma correta para qualquer valor de $n > 2$. A fama de Fermat em relação a não dar demonstrações deixou muitos matemáticos na dúvida.

Segundo Boyer (1996), Fermat dizia ter uma demonstração para cada um de seus teoremas. No entanto onde estavam? Muitos dos trabalhos de Fermat eram rabiscos mal escritos e desorganizados. O gênio realmente não estava interessado em divulgar seus brilhantes trabalhos. De acordo com Eves (2004), graças ao seu filho mais velho Clément-samuel (c. 1606-1666) esses materiais foram reorganizados e publicados em 1670 cinco anos após a morte de Fermat. Era uma edição intitulada Aritmética de Diofante contento observações de Fermat.

Nessa edição ao lado do original grego e da tradução de Bachet para o latim, estavam quarenta e oito observações feitas por Fermat. Segundo Singh (2012) essas anotações variavam entre simples passatempos matemáticos a observações fundamentais para a teoria dos números.

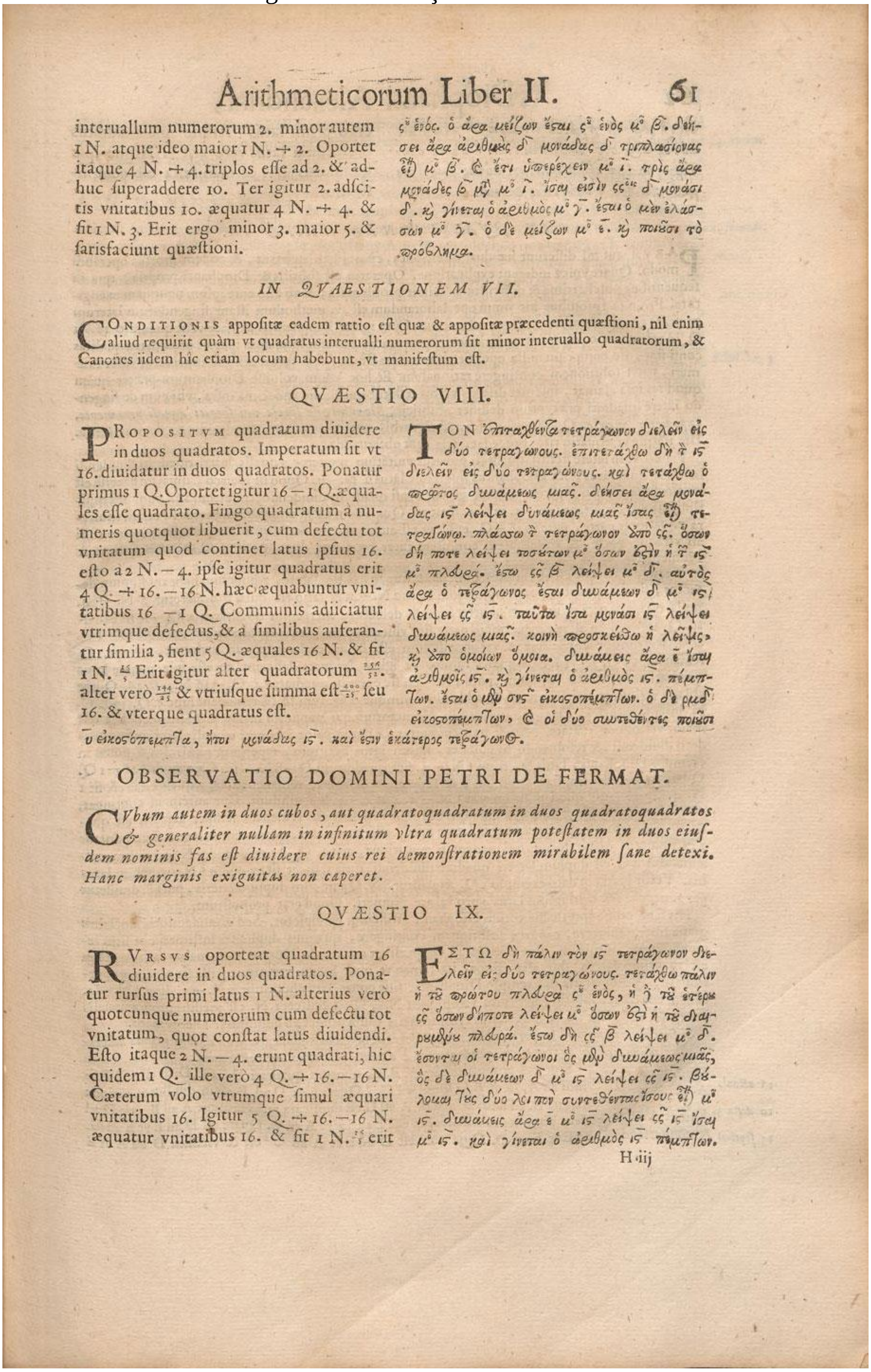
Na Figura 17 temos a capa desse livro e em seguida na Figura 18, a anotação "*Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratosquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet*" que se tornou conhecida como o Último Teorema de Fermat (UTF).

Figura 17 - Capa do livro



Fonte: Singh, 2012, p. 82.

Figura 18 - Anotação do UTF



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adscitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

ς° ἑνός. ὁ ἄρα μείζων ἔσται ς° ἑνὸς μ° β. δεήσει ἄρα ἀριθμοὺς δ μονάδας δ τριπλασίονας εἶναι μ° β. καὶ ἔτι ὑπερέχειν μ° ι. τρὶς ἄρα μονάδες β μετὰ μ° ι. ἴσαι εἰσὶν ςς° δ μονάσι δ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς μ° γ. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων μ° γ. ὁ δὲ μείζων μ° ε. καὶ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα.

IN QVAESTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem rattio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto a 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις λεῖψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λεῖψει τοσούτων μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ις μ° πλευρά. ἔστω ςς β λεῖψει μ° δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μ° ις λεῖψει ςς ις. ταῦτα ἴσα μονάσι ις λεῖψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις. πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνς εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ς° ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ςς ὅσων δήποτε λεῖψει μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ςς β λεῖψει μ° δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ μ° ις λεῖψει ςς ις. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μ° ις. δυνάμεις ἄρα ε μ° ις λεῖψει ςς ις ἴσαι μ° ις. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις πέμπτων.

H iij

Fonte: Wikimedia Commons, 2018.

Depois que esse livro cheio de anotações, que Fermat chamava de teoremas, foi lançado, muitos matemáticos começaram o desafio de prová-los. Na matemática provar um teorema é fundamental, a prova é a busca da confirmação do resultado estabelecido. Uma vez provado, um teorema serve para construir soluções para diversos problemas, obter novos teoremas e até a criação de outras áreas da matemática. Segundo Singh (2012), com o passar dos séculos, as observações feitas por Fermat foram sendo provadas, uma por uma, exceto uma: não existem inteiros positivos $a, b, c,$ com $n > 2$, tais que $b^n + c^n = a^n$. Por isso esse é conhecido como o Último Teorema de Fermat. Por muitos séculos esse último teorema ficou conhecido como a última conjectura de Fermat. Uma conjectura é um termo usado para descrever um teorema que ainda não foi provado.

A fama desse enigma logo se espalhou, e muitos matemáticos tentaram em vão tal demonstração. O mais intrigante era o fato de Fermat dizer que tinha tal prova, mas que matemática ele usou? Por que muitos dos mais brilhantes matemáticos com talentos incríveis não conseguiram? O sucesso do Último Teorema de Fermat, além de contribuições para a teoria dos números é especial pelo mistério de sua resolução. Além disso, o que o torna ainda mais atraente é o contraste de ser extremamente simples de enunciá-lo e tremendamente difícil de prová-lo. O Último Teorema de Fermat retrata muito disso. A seguir é citado alguns matemáticos que tentaram demonstrar e suas principais contribuições.

O primeiro foi o notável matemático suíço Leonhard Euler, um dos maiores matemáticos do século XVIII. Segundo Boyer (1996), Euler nasceu em Basileia e desde muito jovem apresentava um talento para a matemática. Aos 26 anos já era o principal matemático da academia de S. Petersburgo. Tinha grandes habilidades, entre elas a fama de fazer enormes cálculos de cabeça, e dono de uma reputação de resolver qualquer problema que lhe fosse apresentado. De acordo com Eves (2004), não existe um ramo da matemática em que seu nome não apareça. Muitas das notações que usamos hoje devemos a Euler, por exemplo, algumas citadas por Eves: $f(x)$ para funções; e para a base dos logaritmos naturais; Σ para somatórios; i para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

Embora no século XVIII as potências europeias estivessem mais interessadas em ver a matemática sob o ponto de vista de aplicações em resolver problemas práticos, Euler também se dedicava a matemática pura. Segundo Singh (2012), ao se deparar com o Último Teorema de Fermat, o genial Euler deve ter pensado que a resolução seria simples. Ele imaginou se não poderia provar que uma das equações não tinha solução e então extrapolar o resultado para todas as outras restantes. Estudando as anotações de Fermat em Aritmética, Euler descobriu uma pista escondida para a demonstração do último teorema no caso específico de $n = 4$.

Embora não tivesse sido demonstrado por Fermat, essas pistas claramente ilustram uma prova por contradição chamada método da descida infinita. Nesse método para Fermat provar que não existem soluções para a equação $b^4 + c^4 = a^4$, ele inicialmente supôs que existisse uma solução hipotética $b = B_1$, $c = C_1$ e $a = A_1$. Fermat ao analisar a terna (B_1, C_1, A_1) poderia demonstrar que se existisse essa solução, então existiria uma solução menor (B_2, C_2, A_2), e em seguida mostrar a existência de uma solução ainda menor (B_3, C_3, A_3) e assim por diante numa verdadeira escadaria descendente de soluções cada vez menores. Mas como b, c e a deveriam ser inteiros essa escadaria infinita seria impossível, pois deve existir uma menor solução inteira possível. Logo, a hipótese inicial era falsa. Com isso Fermat provou que para $n = 4$, a equação não pode ter nenhuma solução. Usando esse argumento Euler tentou construir uma demonstração para todos os casos, começando no caso $n = 3$. Segundo Singh (2012), no dia 4 de agosto de 1753, Euler divulgou que tinha adaptado o método da descida infinita de Fermat e provado o caso $n = 3$. Para isso Euler utilizou um conceito pouco conhecido na época que era de números imaginários. Euler mostrou que incorporando o número imaginário em sua prova, ele poderia tapar os buracos na demonstração e forçar o método da descida infinita a funcionar para o caso $n = 3$. Embora isso fosse algo incrível, essa ajuda dos números imaginários não serviu para a demonstração de outros casos. Todas as tentativas de Euler geraram fracasso.

A demonstração para $n = 3$ trouxe grandes recompensas. Isso se deve ao fato que a demonstração para $n = 3$ também serve para $n = 6, 9, 12, 15, ...$.Por exemplo, se a equação $b^6 + c^6 = a^6$ tem solução, ao reescrevermos como$(b^2)^3 + (c^2)^6 = (a^2)^3$ e considerando $b^2 = B$, $c^2 = C$ e $a^2 = A$, temos que a equação $B^3 + C^3 = A^3$ tem solução, com isso gerando uma contradição. Assim qualquer demonstração que funcione com a potência de 3 vai funcionar para um número elevado a 6 ou qualquer outro múltiplo de 3. Isso também é válido para o caso $n = 4$ que Fermat tinha demonstrado. A prova para $n = 4$ também serve para $n = 8, 12, 16, 20, ...$ e qualquer outro múltiplo de 4. Com essas duas classes de números provadas, o desafio era provar o teorema para o caso de n ser um número primo diferente de 2 e de 3. Com isso todos os outros casos seriam múltiplos dos casos primos e seriam provados implicitamente. Apesar dessa ideia tornar mais simples a demonstração, tinha um pequeno e crucial problema: a infinidade de números primos. Isso de uma forma geral pôs fim as esperanças de uma prova precoce para o Último Teorema de Fermat.

Outra personagem interessante na história da demonstração do Último Teorema de Fermat foi Sophie Germain (1776-1831), uma matemática francesa que viveu em uma época na qual as mulheres não eram incentivadas a estudar matemática e, segundo Singh (2012), para ela poder estudar na École Polytechnique, escola proibida para mulheres, ela assumiu a identidade falsa de um ex-aluno, Monsieur Antoine-August Le Blanc. Sophie recebia os trabalhos destinados a Le Blanc e entregava de forma extraordinariamente genial as respostas dos problemas. Essa farsa, no entanto, foi descoberta por Lagrange, um dos mais notórios matemáticos do século XIX que se tornou seu mentor. A grande contribuição de Sophie para o UTF, segundo Eves (2004), foi a prova de que para todo primo ímpar $p < 100$ a equação $b^p + c^p = a^p$ não tem soluções no conjunto dos inteiros não divisíveis por p. Isso contribuiu fortemente para que em 1825 Legendre (1752-1833) e Dirichlet (1805-1859) demonstrassem de forma independente o caso $n = 5$. Já a demonstração para o caso $n = 7$ é atribuída ao matemático Gabriel Lamé (1795-1870).

Com a descoberta de Sophie a Academia Francesa de Ciências ofereceu diversos prêmios para quem provasse o UTF. Segundo Singh (2012), no dia 1º de março de 1847, Lamé subiu ao pódio da Academia e anunciou que estava muito próximo da tal demonstração para todos os casos, causando espanto na multidão. Imediatamente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) também anuncia que estava próximo de uma prova. Após três semanas, ambos colocaram as provas em envelopes lacrados no cofre da Academia. Porém, nenhum deles conseguiu sucesso. O responsável pelo julgamento foi o matemático Ernst Kummer (1810-1893). Para ele o problema das demonstrações de Lamé e Cauchy era que essas dependiam do uso da fatoração única, propriedade também conhecida como teorema Fundamental da Aritmética, que embora seja válida para todos os números inteiros, no conjunto dos números imaginários ela pode falhar. E essa perda da fatoração única, segundo SINGH (2012), colocou as provas de Lamé e Cauchy em perigo.

Em 1850, segundo Eves (2004), Kummer provou que o Último Teorema de Fermat era verdadeiro para todos os expoentes que são primos regulares. Contudo, o maior problema era trabalhar com os primos irregulares, Kummer sabia que não era possível abordar todos os primos irregulares de uma só vez. Mas acreditava que, usando técnicas desenvolvidas para cada primo irregular, cada caso poderia ser resolvido separadamente. Porém, a grande questão é a infinidade desses primos, o que tornaria impossível esse processo. Conforme Singh (2012), Kummer mostrou que a demonstração do Último Teorema de Fermat estava fora dos conteúdos descobertos na matemática da época. Diante dessa enorme dificuldade citada por Kummer, o último teorema de Fermat parecia cada vez mais longe de uma resolução.

> No final do século XIX o problema ainda ocupava um lugar especial no coração dos teóricos dos números, mas eles tratavam o Último Teorema de Fermat do mesmo modo que os químicos encaravam a alquimia: ambos eram sonhos românticos de uma época que passara (SINGH, 2012, p. 135).

Para a maior parte dos matemáticos profissionais, o Último Teorema de Fermat era uma causa perdida e mesmo com estímulos financeiros como por exemplo, a criação do Prêmio Wolfskehl que daria 100 mil marcos ao primeiro que demonstrasse o teorema, não compensaria desperdiçar suas carreiras em uma busca inútil. Segundo Singh (2012), a importância do Prêmio Wolfskehl, criado por Paul Wolfskehl (1856-1906) um industrial alemão e matemático que nas horas vagas gostava de estudar teoria dos números, em especial o Último Teorema de Fermat, foi além do valor financeiro. O prêmio foi divulgado em todas as revistas e periódicos especializados em matemática, propagando o desafio para novos matemáticos dispostos a decifrar esse tão misterioso enigma. Mesmo assim ainda o Último Teorema de Fermat parecia indecifrável.

Após a segunda guerra mundial, matemáticos começaram a usar os computadores como aliados aos cálculos. Conforme Singh (2012), foi com a ajuda de computadores, que equipes de matemáticos demonstraram o Último Teorema de Fermat para valores de n até 500, e depois para valores de 1000 até 10000. Na década de 1980 ele já tinha sido provado para valores de n até 2500. Mesmo que os computadores com enormes potências provassem para valores gigantescos de n, sempre ficava a dúvida para um valor ainda maior, pois o teorema se estende para valores infinitos de n. Com isso, essa tecnologia, embora eficiente e rápida em cálculos, não seria capaz de demonstrar o Último Teorema de Fermat. E os matemáticos teóricos sabiam disso. Eles estavam convencidos de que apesar de evidências geradas pelos computadores, somente uma prova absoluta era capaz de pôr fim a esse mistério. E isso iria acontecer. Depois de 350 anos que Fermat lançou seu desafio o brilhante matemático inglês Andrew Wiles finalmente colocaria um fim a esse enigma. Isso é falado no capítulo 5. No próximo capítulo são apresentadas as demonstrações para $n = 3$ e $n = 4$.

4 DEMONSTRAÇÕES DO UTF PARA OS CASOS $n = 3$ E $n = 4$

Um dos objetivos dessa dissertação é apresentar de uma forma mais simples o Último Teorema de Fermat. Por se tratar de uma matemática muito avançada, nesse trabalho não será feito a demonstração para o caso geral. Apenas será demonstrado os casos $n = 3$ e $n = 4$, que exploram assuntos mais acessíveis para estudantes e professores do ensino médio. Para essas demonstrações são usados como referência os trabalhos: Boeing (2013), Bruno (2014), Silva (2010) e Anjos (2015).

4.1 Caso $n = 4$

Para essa demonstração é usado o método da descida infinita. Conforme visto no Capítulo 3, esse método é uma poderosa prova por contradição.

> Para provar que uma certa relação de números inteiros positivos é impossível, assuma inicialmente o contrário, que ela possa ser satisfeita por algum conjunto particular de inteiros positivos. Com essa suposição prove que essa mesma relação também vale para algum outro conjunto de inteiros positivos menores. Daí, repetindo esse raciocínio, essa relação deve valer para outro conjunto de inteiros positivos ainda menores, e assim infinitamente. Mas como os inteiros positivos não podem decrescer infinitamente, a suposição inicial não faz sentido, portanto a relação original é impossível (EVES, 2004, p. 392).

Para efeito de ilustração, provaremos que $\sqrt{2}$ é irracional usando o método da descida infinita. Suponha que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos, seja um número racional.

Multiplicando por b e elevando ao quadrado ambos os lados, temos:

$$a^2 = 2b^2. \tag{4.1}$$

Como, $b^2 < 2b^2 < 4b^2$, substituindo $2b^2$ por a^2 em 4.1 temos:

$$b^2 < a^2 < 4b^2.$$

Com isso segue que $b < a < 2b$.

Sejam $a_1 = 2b - a$ e $b_1 = a - b$. Logo, $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ e $a_1 < a$, pois:

$$\begin{aligned} a_1 - a &= 2b - a - a \\ &= 2b - 2a \\ &= 2(b - a) < 0. \end{aligned}$$

E ainda , $b_1 < b$, pois,

$$b_1 - b = a - b - b$$

$$= a - 2b < 0.$$

Observe que

$$(a_1)^2 - 2(b_1)^2 = (2b - a)^2 - 2(a - b)^2$$
$$= 2b^2 - a^2 = 0.$$

ou seja, $$(a_1)^2 = 2(b_1)^2.$$

Assim, a_1e b_1 são soluções de (4.1) menores do que a e b. Repetindo o procedimento indefinidamente, poderíamos obter uma sequência infinita decrescente de números inteiros positivos que são soluções de (4.1) o que é impossível, pois os inteiros positivos não decrescem infinitamente. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

A seguir será feita a demonstração de alguns teoremas, para em seguida provar o Último Teorema de Fermat para o caso $n = 4$.

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo número natural n maior do que 1 ou é primo, ou se escreve de modo único como um produto de números primos $p_1, p_2, \dots p_r$, ou seja, $n = p_1 . p_2 . \dots . p_r$.

Demonstração: Usaremos o segundo princípio da indução. Se $n = 2$, como 2 é primo, a afirmação obviamente é verdadeira. Suponha que o resultado seja válido para todo natural menor do que n e vamos provar que vale para n. Se n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos então n um número composto. Logo, existem números naturais a e b tais que $n = a.b$, com $1 < a < n$ e $1 < b < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, p_2, \dots p_r$ e $q_1, q_2, \dots q_s$ tais que $a = p_1 . p_2 . \dots . p_r$ e $b = q_1 . q_2 . \dots . q_s$. Assim $n = p_1 . p_2 . \dots . p_r . q_1 . q_2 . \dots . q_s$.

Agora vamos provar a unicidade. Suponha que $n = p_1 . p_2 . \dots . p_r = q_1 . q_2 . \dots . q_s$, com p_i e q_i números primos. Como $p_1 | q_1 . q_2 . \dots . q_s$, então $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenamento de $q_1, q_2, \dots q_s$ podemos supor que seja q_1.

Portanto, $p_2 . \dots . p_r = q_2 . \dots . q_s$. Como $p_2 \dots p_r < n$, a hipótese de indução usada na prova da existência, implica que $r = s$ e os p_i e q_i são iguais aos pares, provando assim a unicidade da escrita. ■

Teorema 3: Se $x^n | y^n$, com $n \in Z_+^*$, $x \in \mathbb{Z}^*$ e $y \in Z_+$, então $x | y$.

Demonstração: Para $y = 0$, temos que $x | 0$. Se $x = \pm 1$, é imediato, pois ± 1 é divisor de qualquer número inteiro. Se $y = \pm 1$, então pela hipótese $x^n | y^n$, temos $y^n = k . x^n$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim,

$$k.x^n = (\pm 1)^n$$
$$k.x^n = \pm 1.$$

Como $k, x \in \mathbb{Z}$, temos $k = x = \pm 1$. Logo $x|\, y$.

Considere agora que $y \neq 0, x \neq \pm 1$e $y \neq \pm 1$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética x e y podem ser escritos como produto de números primos. Assim,

$$x = (\pm 1)(p_1)^{\alpha_1}(p_2)^{\alpha_2}(p_3)^{\alpha_3} \ldots (p_w)^{\alpha_w}.$$
$$y = (\pm 1)(q_1)^{\beta_1}(q_2)^{\beta_2}(q_3)^{\beta_3} \ldots (q_v)^{\beta_v}.$$

em que $w, v, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_+^*$ e p_ie q_j são primos positivos. Seja $i \in \{1,2,3, \ldots, w\}$. Assim,

$$(p_i)^{\alpha_i} \mid x$$
$$((p_i)^{\alpha_i})^n | x^n$$
$$(p_i)^{n\alpha_i} | x^n.$$

Por hipótese $x^n | y^n$, logo $(p_i)^{n\alpha_i} | y^n$. Logo, $y^n = t(p_i)^{n\alpha_i}$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Como, $y^n = (\pm 1)(q_1)^{n\beta_1}(q_2)^{n\beta_2}(q_3)^{n\beta_3} \ldots (q_v)^{n\beta_v}$ segue que

$$t(p_i)^{n\alpha_i} = (\pm 1)(q_1)^{n\beta_1}(q_2)^{n\beta_2}(q_3)^{n\beta_3} \ldots (q_v)^{n\beta_v}.$$

Como a decomposição de fatores primos é única, temos que deve existir um $j \in \{1,2,3, \ldots, v\}$ tal que $p_i = q_j$ com $n\alpha_i < n\beta_j$ ou $\alpha_i < \beta_j$, pois $n \in Z_+^*$ .Com isso reorganizando os elementos q_j temos $(p_i)^{\alpha_i} = (q_i)^{\gamma_i}$ com $0 \leq \gamma_i \leq \beta_i$ para todo $i \in \{1,2,3, \ldots, w\}$. Dividindo y por x, temos:

$$q = (\pm 1)(q_1)^{\beta_1 - \gamma_1}(q_2)^{\beta_2 - \gamma_2}(q_3)^{\beta_3 - \gamma_3} \ldots (q_v)^{\beta_v - \gamma_v}.$$

o que conclui que $x|\, y$. ■

Teorema 4: Sejam b, c e a inteiros positivos tais que $b^n + c^n = a^n$ e n um número natural. As seguintes afirmações são equivalentes:

$$(i)\ mdc(b, c) = 1.$$
$$(ii)\ mdc(b, a) = 1.$$
$$(iii)\ mdc(c, a) = 1.$$

Demonstração: $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$ Suponha que $mdc(b, a) = d$, com $d > 1$. Daí, existem $m,p \in \mathbb{Z}$ tais que $b = md$ e $a = pd$. Logo,

$$b^n + c^n = a^n$$
$$(md)^n + c^n = (pd)^n$$
$$c^n = (pd)^n - (md)^n$$
$$c^n = d^n(p^n - m^n).$$

Com isso, $d^n | c^n$. Pelo teorema 3, $d|$c. Como $d|$b, obtemos $mdc(b,c) \geq d > 1$, o que pela hipótese é um absurdo. Portanto $mdc(b,a) = 1$. Analogamente $(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$. ■

Teorema 5 (Lema de Gauss): Sejam x, y, z e n números inteiros. Se x divide yz e $mdc(x,y) = 1$, então x divide z.

Demonstração: Se x divide yz, então existe $w \in \mathbb{Z}$ tal que $yz = xw$. Como $mdc(x,y) = 1$, existem m e n inteiros tais que $mx + ny = 1$.

Multiplicando por z ambos os lados dessa última igualdade temos:

$$mzx + nzy = z.$$

Substituindo yz por xw nessa última igualdade, temos:

$$mzx + nxw = z$$

$$x(mz + nw) = z.$$

Dessa última igualdade concluímos que x divide z. ■

Teorema 6: Sejam x, y, z e n números inteiros e $mdc(x,y) = 1$, com $n \geq 2$. Se $x.y = z^n$, então x e y também são potências n-ésimas.

Demonstração: Suponha $x.y = z^n$ e seja $d = mdc(x,z)$. Disso segue que $x = x_1.d$ e $z = z_1.d$, com $mdc(x_1, z_1) = 1$ e $mdc(x_1, z_1^n) = 1$. Substituindo $x = x_1.d$ e $z = z_1.d$ em $x.y = z^n$ temos:

$$x.y = z^n$$

$$x_1.d.y = (z_1.d)^n$$

$$x_1.d.y = z_1^n.d^n$$

$$x_1.y = z_1^n.d^{n-1}.$$

Assim z_1^n divide y. Logo, $y = l.z_1^n$, para algum $l \in \mathbb{Z}^*$.

Com isso, temos:

$$x_1.y = z_1^n.d^{n-1}$$

$$x_1.l.z_1^n = z_1^n.d^{n-1}$$

$$x_1.l = d^{n-1}.$$

Como d^{n-1}divide x e l divide y, temos que $mdc(d^{n-1}, l)$ divide $mdc(x,y) = 1$. Logo, $mdc(d^{n-1}, l) = 1$. Como d^{n-1} divide $x_1.l$ e $mdc(d^{n-1}, l) = 1$, pelo Teorema 5, temos que d^{n-1} divide x_1.

Assim, $x_1 = \gamma.d^{n-1}$, para algum $\gamma \in \mathbb{Z}^*$. Mas:

$$x_1.l = d^{n-1}$$

$$\gamma.d^{n-1}.l = d^{n-1}$$

$$\gamma.l = 1.$$

Como γ e l são inteiros, temos $\gamma = 1$ e $l = 1$. Com isso $y = l.z_1^n = 1.z_1^n = z_1^n$.

Do mesmo modo, $x = x_1.d = \gamma.d^{n-1}.d = 1.d^n = d^n$.

Portanto, x e y podem ser escritos na forma de potências n-ésimas. ■

O próximo resultado é o caso $n = 4$ do UTF.

Teorema 7: Não existem inteiros positivos a, b, c , tais que $b^4 + c^4 = a^4$.

Demonstração: Seja (b, c, a) uma solução primitiva, ou seja, $mdc(b, c) = 1$, para a equação

$$b^4 + c^4 = a^4. \qquad (4.2)$$

Como foi dito no início desse capítulo, usaremos o método da descida infinita. Considere o conjunto inicial de números b, c e a^2 com $mdc(b, c) = 1$, sendo $b^4 + c^4 = (a^2)^2$. Com isso temos $(b^2)^2 + (c^2)^2 = (a^2)^2$, o que permite concluir que (b^2, c^2, a^2) é um terno pitagórico. Considerando b^2 par, c^2 ímpar, temos $mdc(b^2, c^2) = 1$, portanto (b^2, c^2, a^2) é um terno primitivo e pelo Teorema 1 suas soluções são:

$$\begin{cases} b^2 = 2uv \\ c^2 = u^2 - v^2 \\ a^2 = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad (4.3)$$

com $u, v \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, sendo um par e o outro ímpar e $u > v$.

Usando a equação $c^2 = u^2 - v^2$ de (4.3) temos que

$$v^2 + c^2 = u^2. \qquad (4.4)$$

Como $mdc(u, v) = 1$, pelo Teorema 4, $mdc(v, c) = 1$. Logo, concluímos que (v, c, u) é um terno pitagórico primitivo. Como c^2 é impar, temos que c também é ímpar. Pelo Teorema 1 segue que u é impar. Logo, v deve ser par. Com isso, temos a seguinte solução primitiva para (v, c, u):

$$\begin{cases} v = 2m.n \\ c = m^2 - n^2 \\ u = m^2 + n^2 \end{cases} \qquad (4.5)$$

com $m, n \in \mathrm{N}^*$, primos entre si, sendo um par e outro ímpar, $m > n$. Substituindo as equações de (4.5) na primeira equação de (4.3) temos:

$$b^2 = 2uv = 2(m^2 + n^2).(2mn) = 4mn(m^2 + n^2).$$

Como b^2 é um quadrado, $4mn(m^2 + n^2)$ também deve ser. Logo,

$$b^2 = 4mn(m^2 + n^2) = (2t)^2. \qquad (4.6)$$

Vamos provar que $mdc(mn, m^2 + n^2) = 1$. Suponha que exista um número primo d que divida mn e $m^2 + n^2$. Como $mdc(m, n) = 1$, temos que d divide m e d não divide n. Logo d não divide n^2. Sendo assim, podemos escrever:

$$m^2 = fd.$$

$$n^2 = gd + i.$$

com $f, g, i \in \mathbb{N}^*$ e $g > i$. Donde, $m^2 + n^2 = fd + gd + i = d(f + d) + i$, o que equivale a dizer que d não divide $m^2 + n^2$. O que é um absurdo. Logo, não existe um número primo d que divide mn e $m^2 + n^2$. Portanto, $mdc(mn, m^2 + n^2) = 1$. Como $b^2 = 4mn(m^2 + n^2)$ e usando o Teorema 6, temos que mn e $m^2 + n^2$ são quadrados. Disso obtemos que $mn = j^2$ e $m^2 + n^2 = w^2$, com $j, w \in \mathbb{N}$.

Analogamente temos que m e n devem ser quadrados, ou seja, $m = r^2$ e $n = s^2$ com $r, s \in \mathbb{N}$. Fazendo $r^4 + s^4 = (r^2)^2 + (s^2)^2 = m^2 + n^2 = w^2$, temos $r^4 + s^4 = w^2$.

Como $mdc(m, n) = 1$, segue que o $mdc(r, s) = 1$ e com isso a solução (r^2, s^2, w) é uma solução primitiva e r, s e w estão relacionados da mesma forma que b, c e a^2, em que $r^2 < m^2 < u < b^2$.

Então, a partir dos três números inteiros positivos iniciais encontramos um novo conjunto de números ainda menores relacionados da mesma maneira que os iniciais. Essa solução gera a descida infinita provando que (b, c, a) não é uma solução de $b^4 + c^4 = a^4$. Logo, para $n = 4$, o Último Teorema de Fermat é válido. ■

Considerando $n = 4k$, sendo k um número natural, temos que:

$$b^n + c^n = a^n$$

$$b^{4k} + c^{4k} = a^{4k}$$

$$(b^k)^4 + (c^k)^4 = (a^k)^4.$$

Como vimos essa última equação não tem solução inteira não trivial, logo para $n = 4k$, sendo k um número natural, a equação $b^n + c^n = a^n$ não admite soluções inteiras não nulas.

Considere agora n um número inteiro divisível por algum primo $p \neq 2$. Logo, $n = pr$, com $r \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$b^n + c^n = a^n$$

$$b^{pr} + c^{pr} = a^{pr}$$

$$(b^r)^p + (c^r)^p = (a^r)^p.$$

Com isso, basta provar que a equação não tem solução para o expoente primo p diferente de 2 que o Último Teorema de Fermat estará provado para todo expoente inteiro $n > 2$.

4.2 Caso $n = 3$

Segundo Eves (2004), Leonhard Euler foi o primeiro matemático a apresentar uma prova para o caso $n = 3$ do Último Teorema de Fermat. Inicialmente é provado um teorema que será útil na demonstração do caso $n = 3$.

Teorema 8: As soluções de a e b inteiros positivos na equação $r^3 = a^2 + 3b^2$, com $mdc(a,b) = 1$, sendo r ímpar e da forma $r = c^2 + 3d^2$, onde $a^2 + 3b^2$ é um número cúbico, são dadas por:

$$a = c^3 - 9cd^2.$$
$$b = 3c^2d - 3d^3.$$

Demonstração: Inicialmente vamos desenvolver a expressão $r^2 = (c^2 + 3d^2)^2$ para uma expressão conveniente.

$$\begin{aligned}(c^2 + 3d^2)^2 &= c^4 + 6c^2d^2 + 9d^4 \\ &= c^4 - 6c^2d^2 + 12c^2d^2 + 9d^4 \\ &= (c^2 - 3d^2)^2 + 3(2cd)^2.\end{aligned}$$

Assim, r^3=$(c^2 + 3d^2)^3$

$$\begin{aligned}&= (c^2 + 3d^2)(c^2 + 3d^2)^2 \\ &= (c^2 + 3d^2)((c^2 - 3d^2)^2 + 3(2cd)^2) \\ &= c^2(c^2 - 3d^2)^2 + c^2 3(2cd)^2 + 3d^2(c^2 - 3d^2)^2 + 3d^2 3(2cd)^2 \\ &= \big(c.(c^2 - 3d^2) - 3d.(2cd)\big)^2 + 3.\big(c.(2cd) + d(c^2 - 3d^2)\big)^2 \\ &= (c^3 - 3cd^2 - 6cd^2)^2 + 3(2c^2d + dc^2 - 3d^3)^2 \\ &= (c^3 - 9cd^2)^2 + 3(3c^2d - 3d^3)^2 \\ &= \big(c(c^2 - 9d^2)\big)^2 + 3\big(3d(c^2 - d^2)\big)^2 \\ &= a^2 + 3b^2.\end{aligned}$$

com $a = c(c^2 - 9d^2) = c^3 - 9cd^2$ e $b = 3d(c^2 - d^2) = 3c^2d - 3d^3$. ■

O próximo teorema é o caso $n = 3$ do UTF.

Teorema 9: Não existem inteiros positivos a, b, c , tais que $b^3 + c^3 = a^3$.

Prova: Assim como foi feito na demonstração do caso $n = 4$, usaremos também o método da descida infinita para o caso $n = 3$. Considere um conjunto inicial de números inteiros positivos b, c e a tais que (b, c, a) é uma solução primitiva de $b^3 + c^3 = a^3$.

Pelo Teorema 4, temos que apenas um dos números b, c e a pode ser par. Como a soma ou diferença de dois números ímpares resulta em um par, sem perda de generalidade, consideremos então duas possibilidades: b é par ou a é par.

Se b é par, então a e c são ímpares. Assim $a + c = 2k$ e $a - c = 2p$, com k e p inteiros positivos de paridades distintas.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + c = 2k \\ a - c = 2p \end{cases}$, temos:

$$a = k + p \; ; c = k - p. \qquad (4.7)$$

De $b^3 + c^3 = a^3$, temos

$$b^3 = a^3 - c^3. \qquad (4.8)$$

Substituindo (4.7) em (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 - c^3 \\ &= (a - c)(a^2 + ac + c^2) \\ &= (k + p - k + p)((k + p)^2 + (k + p)(k - p) + (k - p)^2) \\ &= 2p(k^2 + 2kp + p^2 + k^2 - p^2 + k^2 - 2kp + p^2) \\ &= 2p(3k^2 + p^2). \qquad (4.9) \end{aligned}$$

Se a é par, então b e c são ímpares. Assim $b + c = 2d$ e $b - c = 2e$, com d e e inteiros positivos de paridades distintas.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} b + c = 2d \\ b - c = 2e \end{cases}$, temos:

$$b = d + e \; ; c = d - e. \qquad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em $b^3 + c^3 = a^3$ obtemos:

$$\begin{aligned} a^3 &= b^3 + c^3 \\ &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\ &= (d + e + d - e)((d + e)^2 - (d + e)(d - e) + (d - e)^2) \\ &= 2d(d^2 + 2de + e^2 - d^2 + e^2 + d^2 - 2de + e^2) \\ &= 2d(d^2 + 3e^2). \qquad (4.11). \end{aligned}$$

Em ambos os casos, encontramos resultados semelhantes, e pelo Teorema 8, temos dois números cúbicos. Por isso trabalharemos apenas com o segundo número cúbico encontrado.

Como e e d tem paridades distintas, temos que $d^2 + 3e^2$ é ímpar. Como a é par, então 8 divide $2d$. Disso temos que $2d = 8g$, com $g \in Z$ o que equivale a, $d = 4g$. Logo, d é par e consequentemente e é ímpar.

Assim o $mdc(2d\ , d^2 + 3e^2) = 1$ ou 3. De fato, seja p um primo e p^n um fator comum de ambos os termos. Considere $2d = p^n.i$ e $d^2 + 3e^2 = p^n.j$, com i, j inteiros diferentes de zero. Como $d^2 + 3e^2$ é impar, temos que $p \neq 2$. Como p^n divide $2d$, então p^n divide d. Se p^n divide d^2 e $d^2 + 3e^2$, então p^n divide $3e^2$. Mas, $mdc(d, e) = 1$ e p sendo divisor de d, segue que p não divide e. Como p divide $3e^2$, concluímos que $p = 3$ e $n = 1$. Assim, temos dois casos a considerar $mdc(2d\ , d^2 + 3e^2) = 1$ ou 3.

1^o Caso: $mdc(2d\ , d^2 + 3e^2) = 1$.

Nesse caso é evidente que 3 não divide d, pois teríamos $mdc(2d\ , d^2 + 3e^2) \neq 1$. Como $2d(d^2 + 3e^2)$ é um número cúbico e pelo Teorema 9 concluímos que $2d$ e $d^2 + 3e^2$ também devem ser números cúbicos. Pelo Teorema 8 obtemos que: $d^2 + 3e^2 = (x^2 + 3y^2)^3$, sendo $d = x^3 - 9xy^2$ e $e = 3x^2y - 3y^3$, com $x, y \in \mathbb{Z}^*$. Como $2d$ é cúbico então é da forma $2d = z^3$, com $z \in \mathbb{Z}^*$, logo:

$$2d = 2(x^3 - 9xy^2) = 2x(x^2 - 9y^2) = 2x(x - 3y)(x + 3y) = z^3\ . \qquad (4.12)$$

Temos que y é ímpar, x é par, pois e é par, 3 não divide x, uma vez que não divide d. Além disso, $mdc(x, y) = 1$ pois pelo Teorema 4, temos que $mdc(d, e) = 1$. Logo, $2x, x - 3y$ e $x + 3y$ são relativamente primos entre si. Pelo Teorema 9 temos que $2x, x - 3yx + 3y$ são também cubos que podem assim ser escritos:

$$\begin{cases} 2x = w^3 \\ x - 3y = t^3 \\ x + 3y = q^3 \end{cases} \qquad (4.13)$$

em que $w, t, q \in \mathbb{Z}^*$.

Assim, temos que $t^3 + q^3 = x - 3y + x + 3y = 2x = w^3$.

Como $mdc(t^3, q^3) = mdc(x - 3y, x + 3y) = 1$, segue que $mdc(t, q) = 1$. Logo, (t, q, w) é uma solução primitiva de $b^3 + c^3 = a^3$.

Como $w^3.t^3.q^3 = 2x.(x - 3y)(x - 3y) = 2d$, e usando a relação (4.11) podemos afirmar que $w^3.t^3.q^3$ divide a^3quando a é um número par.

Como $w^3.t^3.q^3 = 2p$ e usando a relação (4.9), temos que $w^3.t^3.q^3$ divide b^3, quando b é um número par.

Com isso temos que t, q e w são números menores do que a ou b da solução inicial. logo (t, q, w) gera a descida infinita, provando que não existem inteiros positivos a, b, c, tais que $b^3 + c^3 = a^3$.

2^o Caso: $mdc(2d\,, d^2 + 3e^2) = 3$.

Nesse caso temos que 3 divide d. Logo, $d = 3h$, para $h \in \mathbb{Z}^*$. Usando a relação (4.11):

$$\begin{aligned} a^3 &= 2d(d^2 + 3e^2) \\ &= 2.3h(9h^2 + 3e^2) \\ &= 9.2h(3h^2 + e^2). \qquad (4.14) \end{aligned}$$

Como a é par, então 8 divide a^3e assim divide $2d$. Logo, d é par e com isso h também é par. Como $mdc(d, e) = 1$, temos que 3 não divide e. Assim, $3h^2 + e^2$ é impar. Agora, 3 não divide $3h^2 + e^2$, pois não divide e. Assim segue que $mdc(9.2h, 3h^2 + e^2) = 1$, com $mdc(h, e) = 1$. Usando o Teorema 6 temos que $9.2h$ e $3h^2 + e^2$ são cubos que podem ser escritos como:

$$\begin{cases} 9.2h = f^3 \\ 3h^2 + e^2 = g^3 \end{cases}$$

Pelo Teorema 8 temos que $e^2 + 3h^2$=$(x^2 + 3y^2)^3$, sendo $e = x^3 - 9xy^2$ e $h = 3x^2y - 3y^3$, com $x, y \in \mathbb{Z}^*$. Como $9.2h = z^3$, segue que

$9.2h = 9.2(3x^2y - 3y^3) = 9.2.\, 3y(x^2 - y^2) = 27.2y(x - y)(x + y) = z^3$.

Como x é impar e y par, pois e é ímpar, 3 não divide x e $mdc(x, y) = 1$, assim $2y, x - y$ e $x + y$ são relativamente primos entre si. Com isso pelo Teorema 6 temos que $2y, x - yx + y$ são também cubos que, para facilitar o uso de simbologias, usaremos as mesmas notações dadas em (4.13):

$$\begin{cases} 2y = w^3 \\ x - y = t^3 \\ x + y = q^3 \end{cases}$$

sendo $w, t, q \in \mathbb{Z}^*$.

Assim, temos que $q^3 - t^3 = x + y - x + y = 2y = w^3$.

Consequentemente, $w^3 + t^3 = q^3$. Com $mdc(w^3, t^3) = mdc(2y, x - y) = 1$, temos que $mdc(w, t) = 1$, logo (w, t, q) é uma nova solução primitiva de $b^3 + c^3 = a^3$. Assim analogamente ao 1^ocaso, temos a geração da descida infinita e com isso provamos que não existem inteiros positivos a, b, c , tais que $b^3 + c^3 = a^3$.

Portanto o Último Teorema de Fermat está provado para o caso $n = 3$. ■

A seguir é mostrado a história de Andrew Wiles e a jornada até a demonstração do Último Teorema de Fermat.

5 ANDREW WILES

O Último Teorema de Fermat surgiu na vida de Andrew Wiles quando ele ainda era garoto. Segundo Singh (2012), Wiles aos dez anos de idades conheceu o Último Teorema de Fermat através de um livro chamado "O último problema"[3].

> Trinta anos depois de ler o relato de Bell, Wiles ainda se lembra do que sentira ao ser apresentado ao Último Teorema de Fermat: 'Parecia tão simples, e no entanto nenhum dos grandes matemáticos da história conseguira resolvê-lo. Ali estava um problema que eu, um menino de dez anos, podia entender e eu sabia que a partir daquele momento nunca o deixaria escapar. Tinha de solucioná-lo' (SINGH, 2012, p. 27).

Wiles iniciou seu estudo de pós-graduação em 1975, na universidade de Cambridge. Seu campo de pesquisa foram as curvas elípticas. Uma área da matemática que inicialmente foi estudada pelos gregos, entre eles Diofante e Fermat, deu a Wiles as técnicas necessárias para o estudo do Último Teorema de Fermat. As curvas elípticas ou também chamadas equações elípticas são equações da forma $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, com a, b, c números inteiros. Nessas equações o objetivo é verificar se elas possuem soluções inteiras, e em caso afirmativo, qual o número de soluções.

Conforme Singh (2012), Wiles junto com Jonh Coates (1945-), seu orientador, rapidamente conseguiu grandes avanços no estudo das equações elípticas. Mas apesar desse avanço, Wiles ainda não percebia a ligação disso com Último Teorema de Fermat. Os primeiros a fazerem essa relação, foram os matemáticos japoneses, entre eles, Yutaka Taniyama (1927-1958) e Goro Shimura (1930-), uma parceria que mudaria a história da matemática. Um dos objetos de estudos dos dois eram as formas modulares. Em 1955, em um simpósio internacional de matemática em Tóquio, os dois apresentaram alguns trabalhos que relacionavam formas modulares e equações elípticas. Entre eles, o trabalho que ficou conhecido como conjectura de Taniyama-Shimura: Toda curva elíptica racional é modular. Na época a relação entre formas modulares e equações elípticas era algo inacreditável por matemáticos. Entretanto, Taniyama e Shimura revolucionaram a matemática ao sugerirem que esses dois assuntos na verdade eram uma coisa só. Se realmente a conjectura de Taniyama-Shimura estivesse correta, muitos dos problemas matemáticos ainda sem solução, poderiam ser resolvidos, entre eles de acordo com o matemático Gerhard Frey (1944-), o Último Teorema de Fermat.

---

[3] BELL, Eric Temple. **The last problem**. New York: Simon and Schuster, 1961.

De acordo com Singh (2012), em 1984 Frey, num congresso, questionou o que aconteceria se o Último Teorema de Fermat fosse falso. Para isso ele usou o seguinte argumento: suponha a, b, c uma solução para a equação $a^n + b^n = c^n$. Através de manobras matemáticas, ele modelou a equação original com a sua hipotética solução, para a seguinte equação elíptica:

$$y^2 = x^3 + (a^n - b^n)x^2 - a^n b^n.$$

Ao transformar a equação de Fermat em uma equação elíptica, Frey conectou o Último Teorema de Fermat com a conjectura de Taniyama-Shimura. Essa ideia apesar de genial tinha um pequeno erro, o qual coube ao matemático Ken Ribet (1948-) consertá-lo e definitivamente provar a relação entre os dois.

> O Último Teorema de Fermat estava agora inseparavelmente ligado à conjectura de Taniyama-Shimura. Se alguém pudesse provar que toda equação elíptica é modular, isso implicaria que a equação de Fermat não teria solução e por fim o Último Teorema de Fermat estaria provado.
>
> Por três séculos e meio o Último Teorema de Fermat fora um problema isolado, um enigma curioso e impossível na fronteira da matemática. Agora Ken Robet, inspirado por Gerhard Frey, o trouxera para o centro das atenções. O problema mais importante do século XVII fora ligado ao problema mais significativo do século XX. Um enigma de enorme importância histórica e emocional estava ligado agora a uma conjectura que poderia revolucionar a matemática moderna (SINGH, 2012, p. 210).

Uma das formas para a demonstração seria a prova por contradição. Inicialmente supor que o Último Teorema de Fermat é falso. Com isso a conjectura de Taniyama-Shimura também seria. Assim se essa conjectura fosse demonstrada como verdadeira, ter-se-ia um absurdo na demonstração. Logo, o Último Teorema de Fermat deveria ser verdadeiro.

Para Wiles, essa descoberta foi a motivação para a realização da tão sonhada prova. Para isso mergulhou intensamente nos estudos. Segundo Singh (2012), Wiles passou dezoito meses se familiarizando com cada elemento da matemática que associava equações elípticas com formas modulares. Wiles se dedicou a trabalhar em completo isolamento e sigilo, sendo apenas sua esposa a única que sabia da sua missão.

O desafio de Wiles era construir um argumento indutivo, mostrando que cada uma das infinitas equações elípticas podia ser relacionada com uma das infinitas formas modulares. Para isso, inicialmente ele contou com a ajuda de um importante ramo da matemática, a teoria dos grupos. Enquanto os grupos originais de Galois eram construídos a partir das soluções da equação do quinto grau, Wiles construiu seus grupos usando um punhado de soluções para cada equação elíptica. Após meses de estudo, Wiles usou esses grupos elípticos para tentar igualar cada equação elíptica com sua forma modular. Esse já era um grande avanço para demonstrar a conjectura de Taniyama-Shimura, digna de divulgação. Porém, Wiles ainda permanecia em silêncio. Segundo Singh (2012), ele acreditava que era injusto passar anos de sua vida tentando resolver algo, e alguém munido de suas ideias resolver antes o teorema. Por isso mantinha a total discrição.

Foram anos de esforços, em um trabalho árduo de paciência e dedicação. Nas palavras de Singh (2012, p. 241), "Wiles aplicava os grupos de Galois nas equações elípticas e as dividiam em um número infinitos de peças. Daí demonstrava que cada primeira peça, de cada equação elíptica, tinha que ser modular. Feito isso, tentaria derrubar todas as outras peças". O grande problema é que Wiles ainda não sabia como provar que se um elemento da equação elíptica é modular, então o elemento seguinte também seria. Ele tentou usar a teoria de Iwasawa (1917-1998), um método para analisar equações elípticas, mas também não deu certo.

Depois disso, após um congresso em Boston sobre equações elípticas, Wiles começou a atacar o problema usando o método de Kolyvagin-Flach de análise de equações elípticas.

> Nesta fase final de sua demonstração, Wiles começou a perceber que toda a sua prova dependia da exploração de uma técnica que ele descobrira há apenas alguns meses. Ele começou a questionar se estava usando o método Kolyvagin-Flach de modo completamente rigoroso.
> 'Durante aquele ano eu trabalhei muito duramente tentando fazer o método Kolyvagin-Flach funcionar, mas isso envolvia ferramentas sofisticadas com as quais eu não estava familiarizado. Havia um bocado de álgebra complexa que exigia que eu aprendesse muita matemática nova. Então em janeiro de 1993, eu decidi que precisava do conselho de alguém que fosse especialista no tipo de técnicas geométricas que eu estava invocando na demonstração. Eu tinha que escolher com cuidado, para quem contaria meu segredo, porque ele teria que ser mantido em sigilo. Resolvi falar com Nick Katz' (SINGH, 2012, p. 245-246).

Após revelado o segredo a Nick Katz (1943-), professor do departamento de matemática de Princeton, os dois decidiram criar um curso aberto a estudantes de graduação na qual cobriria a parte da demonstração que precisava ser verificada, mas sem os estudantes saberem o real motivo. O curso era chamado: Cálculo em Curvas Elípticas. O plano era genial. Para os alunos, não passava de um curso cheio de tediosos e complexos cálculos. Wiles teve sucesso em aplicar o método de Kolyvagin-Flach a cada família de equações elípticas. Faltava somente um tipo de família. Wiles descreve como isso conseguiu esse feito:

> Uma manhã, no final de maio, nada tinha saído com as crianças e eu estava sentado em minha mesa pensando sobre a família de equações elípticas que restara. Olhara casualmente para um trabalho de Barry Mazur e havia uma frase ali que chamou minha atenção. Ele mencionou um cálculo do século XIX, e subitamente eu percebi que poderia usar aquilo para fazer o método de Kolyvagin-Flach funcionar na última família de elípticas. O trabalho se estendeu pela tarde e esqueci-me de almoçar. Por volta de três ou quatro horas da tarde eu estava realmente convencido de que isto

> resolveria o último problema. Era hora do chá e eu desci para a parte inferior da casa. Nada ficou surpresa de me ver chegar tão tarde. Então eu contei a ela: resolvi o Último Teorema de Fermat (SINGH, 2012, p. 247-248).

Após sete anos de trabalho finalmente Wiles tinha obtido êxito na demonstração da conjectura de Taniyama-Shimura e com isso o Último Teorema de Fermat. Assim em junho de 1993, em uma conferência em Cambridge, ele resolveu divulgar para o mundo a sua descoberta. Foram três palestras, na qual a última, após encerrar a demonstração com a declaração do Último Teorema de Fermat, Wiles disse: “Acho que vou parar por aqui” (SINGH, 2012, p. 253).

Enquanto a mídia explorava o assunto divulgando a grande demonstração, o trabalho de Wiles era submetido a uma criteriosa avaliação. Em 23 de agosto de 1993 veio a grande bomba. Katz encontrou um erro muito abstrato em uma parte crucial do argumento relacionado ao método de Kolyvagin-Flach. O sonho de Wiles em sua demonstração virou um enorme pesadelo. Embora com a enorme frustração do fracasso, não foi capaz de fazer Wiles desistir. Ele acreditava que era preciso apenas fazer alguns detalhes. Mas o problema era mais grave. Diante a enorme pressão por parte da comunidade acadêmica de querer os manuscritos da prova e diante de boatos de alguma falha na demonstração, Wiles resolveu que não poderia mais manter em silêncio e relatou o problema, segundo Singh (2012) no seguinte e-mail direcionado ao departamento de Matemática:

> Assunto: Situação de Fermat
> Data: 4 dez 93 01:36:50 GMT
> Em vista das especulações sobre o estado do meu trabalho com a conjectura de Taniyama-Shimura e o Último Teorema de Fermat eu vou fazer um breve resumo da situação. Durante o processo de avaliação surgiram alguns problemas. A maioria foi resolvida logo, mas um problema em particular ainda não foi solucionado. A redução-chave da (em sua maioria dos casos) conjectura de Taniyama-Shimura para o cálculo do grupo Selmer está correta. Contudo, o cálculo final de uma fronteira superior precisa para o grupo Selmer no caso semi-estável (da representação do quadrado simétrico associado com a forma modular) ainda não está completa. Eu acredito que serei capaz de terminar isto no futuro próximo, usando as ideias explicadas em minhas palestras de Cambridge.
> O fato de que ainda resta um bocado de trabalho a ser feito no manuscrito o torna inadequado para impressão. Em meu curso em Princeton, que vai começar em fevereiro, eu farei um relato completo deste trabalho.
> Andrew Wiles (SINGH, 2012, p. 267-268).

A busca pela reparação do erro parecia cada vez mais difícil. Muitos matemáticos acreditavam na derrota de Wiles. Ele mesmo já se sentia esgotado. Segundo Singh (2012), em conversa com Peter Sarnak (1953-), Wiles admitiu que a situação estava ficando desesperadora. Mas Peter sugeriu que Wiles procurasse um especialista em manipular o método Kolyvagin-Flach. Daí veio o nome de Richard Taylor (1962-), professor na universidade de Cambridge que foi aluno de Wiles. Os dois começaram a trabalhar juntos em janeiro de 1994. Mas os resultados não apareciam, e o desanimo por parte de Wiles era visível. Ele sugeriu a Taylor que tentassem apenas mais um mês. Então Wiles passou o mês de setembro examinando uma última vez a estrutura do método Kolyvagin-Flach, para tentar detectar a falha. O grande momento de inspiração de Wiles foi perceber que juntos o método de Kolyvagin-Flach e a teoria de Iwasawa se completavam perfeitamente. E essa era a grande cartada final para corrigir o erro. Singh (2012) descreveu assim a emoção de Wiles:

> Era tão indescritivelmente belo, tão simples e excelente. Eu não podia entender como deixara de perceber aquilo e fiquei olhando, descrente, por vinte minutos. Então, durante o dia, eu caminhei pelo departamento e ficava voltando para a minha mesa para ver se a solução ainda estava lá. Não podia me conter, estava tão empolgado. Era o momento mais importante da minha vida profissional. Nada, nunca mais significaria tanto! (SINGH, 2012, p. 277-278).

Após quatorze meses de sofrimento, Wiles divulgou seu novo trabalho mostrando a correção: Dois trabalhos assim intitulados: “Curvas Elípticas Modulares e o Último Teorema de Fermat” por Andrew Wiles e “Propriedades teóricas de um anel em certas álgebras de Hecke” por Richard Taylor e Andrew Wiles.

Após ser minuciosamente examinado, não havia mais dúvidas, o Último Teorema de Fermat estava finalmente provado. Enfim, Wiles tinha realizado seu sonho de infância. Singh (2012) descreve as palavras emocionantes de Wiles:

> Eu tive o raro privilégio de conquistar, em minha vida adulta, o que fora o sonho da minha infância. Sei que este é um privilégio raro, mas se você puder trabalhar, como adulto, com algo que significa tanto para você, isto será mais compensador do que qualquer coisa imaginável. Tendo resolvido este problema, existe certo sentimento de perda, mas ao mesmo tempo há uma tremenda sensação de liberdade. Eu fiquei tão obcecado por este problema durante oito anos, pensava nele o tempo todo quando acordava de manhã e quando ia dormir de noite. Isto é um tempo muito longo pensando só em uma coisa. Esta odisseia particular agora acabou. Minha mente pode repousar (SINGH, 2012, p. 286).

A demonstração do Último Teorema de Fermat por Wiles, por si só foi uma das maiores conquistas para a matemática. Mas também contribuiu para grandes avanços. Problemas clássicos de elípticas que desde a Grécia antiga eram insolúveis, agora poderiam ser reexaminados. Com a demonstração da conjectura de Taniyama-Shimura, Wiles conseguiu unificar os mundos elípticos e modulares e com isso deu a matemática um atalho para muitas outras provas e descobertas.

No próximo capítulo é feito a exposição e análise de algumas atividades pedagógicas sobre o teorema de Pitágoras e o Último Teorema de Fermat que podem ser desenvolvidas em salas de aulas no Ensino Fundamental e Médio.

6 UMA PROPOSTA PARA ABORDAR O UTF NO ENSINO BÁSICO

Como forma de enriquecer o conteúdo dessa dissertação, nesse capítulo mostraremos algumas atividades propostas aos alunos que, em equipes, estudaram desde o Teorema de Pitágoras até o Último Teorema de Fermat.

As atividades foram realizadas no colégio Alto Vale localizado na cidade de Rio do Sul, no qual eu[4] trabalho com alunos do Ensino Médio. O colégio é particular, com Ensino Fundamental, Médio e preparatórios para vestibulares e concursos.

Nesse estudo foram convidados seis alunos dos níveis fundamental e Médio. Quatro alunos do Ensino Fundamental: um do 8º e três do 9º ano, e dois alunos do Ensino Médio: um do 1º e um do 2º ano. Como eu não atuo no Ensino Fundamental, a escolha dos alunos desse nível foi feita por indicação da professora que trabalha com eles. Em conversa com a professora sobre o tema do projeto decidimos que seria interessante escolher alunos a partir do 8º Ano, pois nessa turma já tinham estudado o teorema de Pitágoras. Também foi proposto que fossem escolhidos alunos de diferentes desempenhos, variando de notas altas até baixas em matemática. A professora então me apresentou os alunos e eu expliquei para eles o projeto e eles aceitaram participar. O mesmo critério foi aplicado para o Ensino Médio, apenas diferenciando que nesse caso, como sou professor de 1º e 2º ano, eu escolhi os alunos. O projeto foi apresentado a direção do colégio e, o diretor e a coordenadora mostraram bastante entusiasmo com a ideia. O Diretor assinou uma carta de anuência (Anexo A) e para cada responsável dos alunos envolvidos no projeto foi enviado um documento (Anexo B) para consentimento e todos assinaram concordando com a presença dos filhos no projeto. Optamos pela escolha de alunos de níveis diferentes para investigar como cada aluno iria lidar com as atividades usando o seu grau de conhecimento sobre o assunto. As atividades foram realizadas extraclasse no período vespertino, visto que os alunos têm aula regular no período matutino. Foram três semanas de trabalhos, sempre nas terças-feiras. Na primeira semana, foi apresentado o projeto, e realizada a atividade 1. Na segunda semana foram feitas as atividades 2 e 3 e na 3º semana a última atividade e as conclusões finais do trabalho. Utilizamos uma sala de estudo com um computador e projetor para exibir alguns vídeos de apoio e esclarecimentos sobre o assunto.

Inicialmente os alunos foram divididos em três duplas de modo que ficaram dois alunos do ensino médio juntos, uma dupla do 9º ano e a outra dupla um aluno do 8º e outro do 9º ano. Identificaremos as duplas como D1, D2 e D3, respectivamente.

---

[4] Autor dessa dissertação.

Na sequência do texto é descrito o desenvolvimento das atividades propostas e as resoluções apresentadas pelas duplas, usando a observação do professor, os registros fotográficos e os registros dos alunos que foram entregues para o professor.

6.1 ATIVIDADE 1: JOGO DOS QUADRADOS

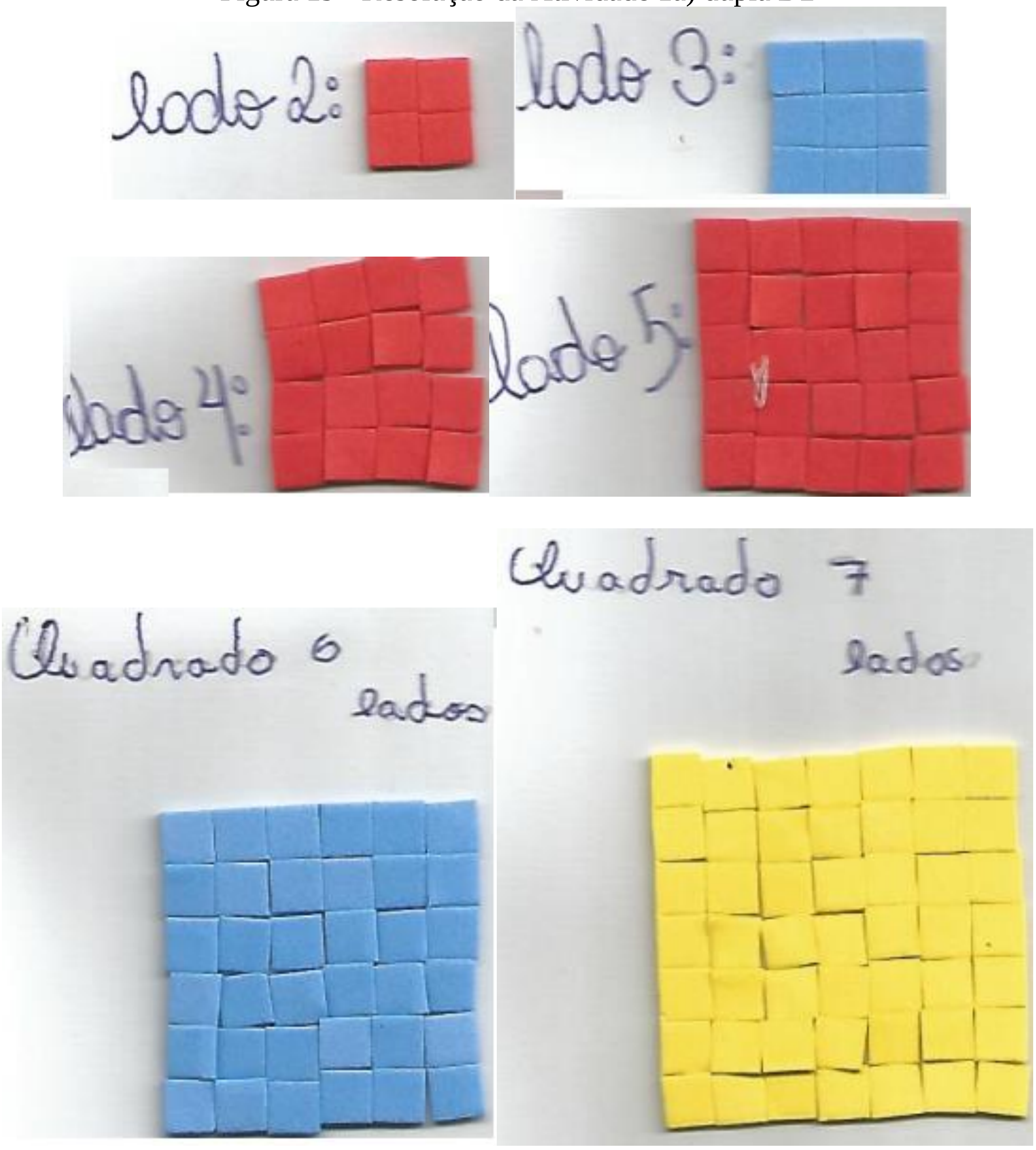
Essa atividade foi adaptada de Silva (2010) e tem como objetivo a construção de quadrados como soma de dois quadrados menores. Para a sua aplicação foi proposta a seguinte sequência de tarefas:

a) Entregar, para cada aluno ou equipe, quadrados de lado 1u.c. e propor que construam novos quadrados com lados 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8u.c.
b) Lançar o desafio para que os alunos reordenem a soma dos quadradinhos de dois quadrados para formar um terceiro quadrado de lado maior.
c) Solicitar que os alunos apresentem as soluções.
d) Debater com os alunos sobre as ternas pitagóricas e pedir que eles deem exemplos de forma algébrica (sem usar o artifício geométrico das áreas).

6.1.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 1

As duplas receberam o material feito de material EVA que consistia em quadradinhos de 1 u.c. de lado e cada dupla montou quadrados de lados 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 u.c. conforme ilustra a Figura 19 que mostra a atividade da dupla D2.

Figura 19 - Resolução da Atividade 1a) dupla D2



Fonte: Produção do autor, 2017.

Em seguida veio a parte mais importante, a reordenação dos quadradinhos de dois quadrados para formarem um terceiro quadrado de lado maior. O professor explicou a atividade e pediu para cada dupla fazer a reordenação pedida. A dupla D3 a princípio sem montar uma estratégia tentou juntar os quadradinhos do quadrado de lado 2 e lado 3 observando que no fim ainda faltavam três quadradinhos (Figura 20).

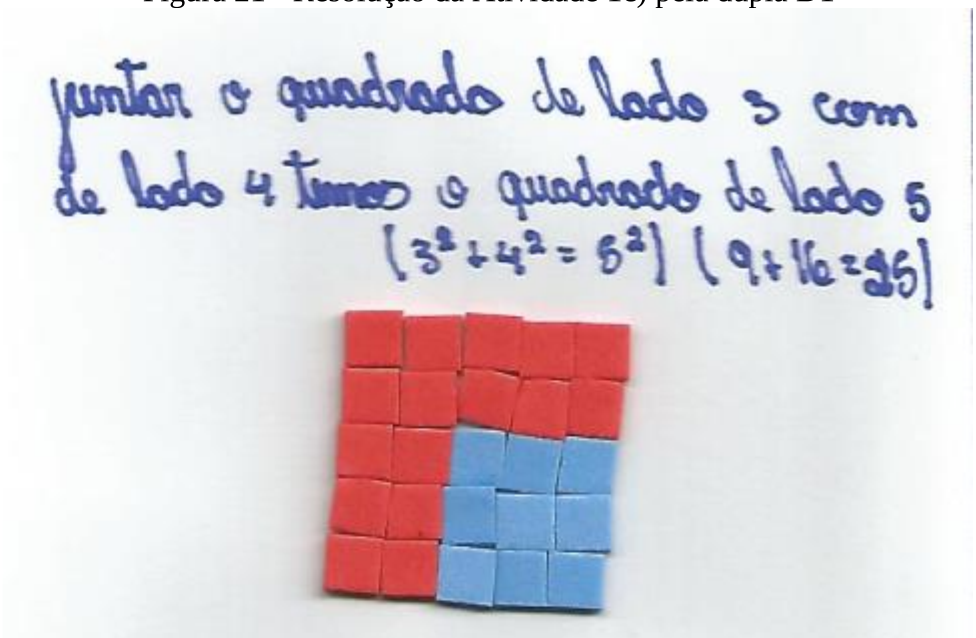
Figura 20 - Resolução da atividade 1b) pela dupla D3

Fonte: Produção do autor, 2017.

Já as duplas D1 e D2 foram direto para a montagem mais prevista: juntaram os quadradinhos de lado 4 com os quadradinhos de lado 3 que daria o quadrado de lado 5, como ilustra a Figura 21. Em sequência a dupla D3 também fez essa montagem.

Já as duplas D1 e D2 foram direto para a montagem mais prevista: juntaram os quadradinhos de lado 4 com os quadradinhos de lado 3 que daria o quadrado de lado 5, como ilustra a Figura 21. Em sequência a dupla D3 também fez essa montagem.

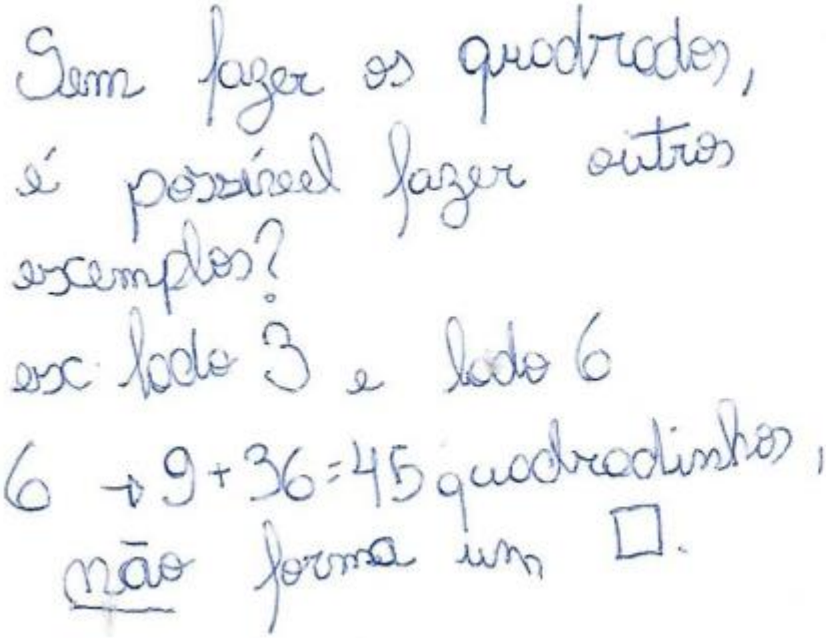
Figura 21 - Resolução da Atividade 1c) pela dupla D1



Fonte: Produção do autor, 2017.

Em seguida foi questionado aos alunos se, com as construções dos quadrados que cada dupla tinha feito na atividade 1a, seria possível outro arranjo. O professor mostrou antes para todos a possibilidade sem sucesso de fazer com lado 16 da dupla D3. As respostas negativas iam surgindo à medida que as duplas pensavam nas combinações que precisavam, por exemplo para um quadrado de lado 9 precisavam juntar dois quadrados cujo soma dos quadradinhos daria 81, e isso não seria possível. A Figura 22 ilustra a resposta apresentada pela dupla D1.

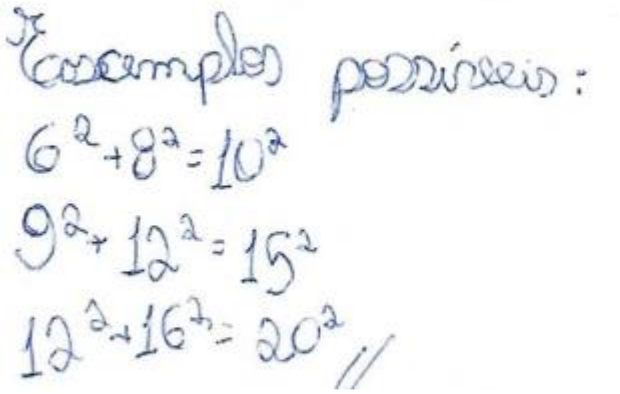
Figura 22 - Resolução da Atividade 1c) pela dupla D1


Sem fazer os quadrados,
é possível fazer outros
exemplos?
ex: lado 3 e lado 6
6 → 9+36=45 quadradinhos,
não forma um □.

Fonte: Produção do autor, 2017.

Em seguida, o professor pediu aos alunos exemplos de possibilidades sem usar os quadrados construídos. A dupla D1, dos alunos do Ensino Médio, já associou essa busca de números com o teorema de Pitágoras. Como o aluno do 1º ano tinha no caderno anotado exercícios de Pitágoras colocou alguns exemplos, entre eles exemplos de lados 10, 24 e 26. As duplas do Ensino Fundamental só perceberam essa semelhança após o primeiro exemplo que foi de lados 6, 8 e 10. Depois também pegaram exemplos do caderno de atividades de sala. Entre eles lados 9, 12 e 15. O professor, então, para finalizar pediu aos alunos que colocassem de forma algébrica esses exemplos, a dupla D2 apresentou os exemplos da Figura 23. Houve uma pergunta do aluno do 8º ano sobre essa semelhança com o teorema de Pitágoras questionando se esse teorema não era somente para triângulos. A outra dupla do fundamental não soube responder e a dupla do médio respondeu que, embora não tivesse certeza, também poderia usar em outras situações, todavia não citou nenhuma. O professor concluiu que esse trio obtido pelos alunos na verdade tinha sim relação com Pitágoras e denominou de terna pitagórica esses números encontrados.

Figura 23 - Resolução da Atividade 1d) pela dupla D2



Fonte: Produção do autor, 2017.

6.2 ATIVIDADE 2: TERNAS PITAGÓRICAS

O objetivo dessa atividade é observar a validade do teorema que trata sobre ternas pitagóricas. Para a sua aplicação foi proposta a seguinte sequência de tarefas:

a) Solicitar aos alunos que completem a Tabela 1 que trata da decomposição da terna pitagórica.

Tabela 1 - Decomposição da terna pitagórica

$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{a = 2uv}$	$\boldsymbol{b = u^2 - v^2}$	$\boldsymbol{c = u^2 - v^2}$
2	1			
3	2			
4	1			
5	2			

Fonte: Produção do autor, 2017.

b) Discutir com os alunos os resultados obtidos na Tabela 1, a fim de fazê-los perceber as ternas pitagóricas.

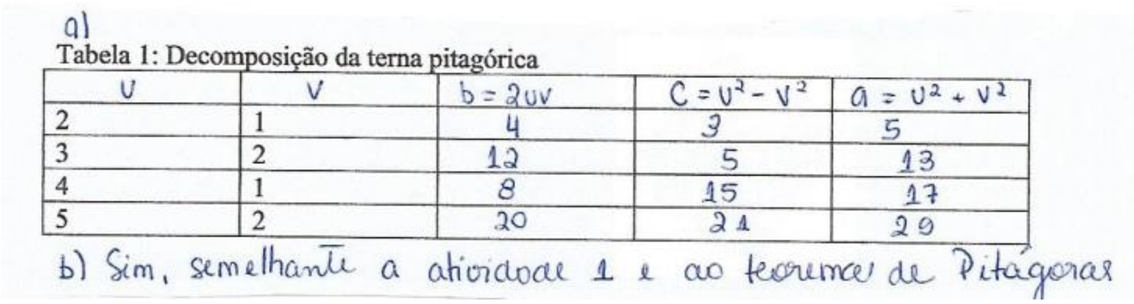
c) Apresentar o teorema que generaliza o resultado observado na tabela.

Considere a terna pitagórica (a, b, c) primitiva em que a é par. Então, existem $u, v \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, um par e outro ímpar, $u > v$, tais que: $a = 2uv, b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$.

6.2.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 2

As duplas receberam as atividades e iniciaram a preencher a Tabela 1, que de um modo em geral foi respondida rapidamente pelos alunos. A dupla D3 apresentou a resolução ilustrada na Figura 24.

Figura 24 - Resolução da Atividade 2a) pela dupla D3



a)

Tabela 1: Decomposição da terna pitagórica

u	v	$b = 2uv$	$c = u^2 - v^2$	$a = u^2 + v^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
5	2	20	21	29

b) Sim, semelhante a atividade 1 e ao teorema de Pitágoras

Fonte: Produção do autor, 2017.

Após o preenchimento da Tabela 1 os alunos, na tarefa 2b, novamente associaram os valores a, b e c com a Atividade 1 e consequentemente com o Teorema de Pitágoras, principalmente com os resultados das duas primeiras linhas da Tabela 1. Com isso, veio a discussão por parte de todas as duplas sobre a origem dessas fórmulas misteriosas para calcular esses valores. Diante isso, o professor explicou a tarefa 2c, introduzindo que algebricamente esses valores a, b e c seriam chamados de terna Pitagórica ou ternos pitagóricos.

Na sequência o professor passou aos alunos o teorema da tarefa 2c: Considere o terno pitagórico (b, c, a) primitivo em que b é par. Então, existem $u, v \in \mathbb{N}^*$, primos entre si um par e outro ímpar, $u > v$, tais que:

$$b = 2uv,\ c = u^2 - v^2 \text{ e } a = u^2 + v^2.$$

Foi explicado que esse teorema seria como uma fábrica para calcular ternos pitagóricos. Um aluno do 2º ano questionou sobre o terno $(6, 8, 10)$ que não se encaixa no teorema. O professor então reforçou a definição de que o terno primitivo (b, c, a) é aquele que $\mathrm{mdc}(b, c, a) = 1$. Foi interessante que nesse momento, a dupla D2 associou que o terno $(6, 8, 10)$ era o terno $(3,4,5)$ multiplicado por dois e o terno$(9,12,15) = (3.3,4.3,5.3)$. Assim principalmente as duplas do Ensino Fundamental perceberam que poderiam utilizar esse processo para facilitar cálculos do teorema de Pitágoras. A conclusão final de que usando os valores dos ternos primitivos poderiam chegar a outros ternos entusiasmou os alunos.

6.3 ATIVIDADE 3: PROVAR O TEOREMA DE PITÁGORAS

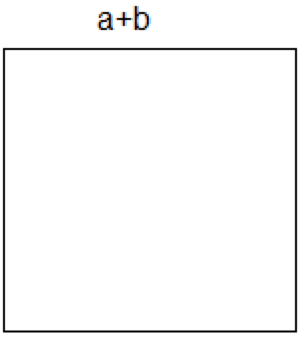
O objetivo dessa atividade é provar o teorema de Pitágoras de duas formas diferentes. Para a sua aplicação é proposta a seguinte sequência de tarefas:

i) Contar para os alunos parte histórica de Pitágoras e enunciar o seu teorema.

ii) Construir a demonstração clássica do teorema de Pitágoras, seguindo os seguintes passos:

Passo 1: Distribuir para os alunos cartolinas e pedir que construam dois quadrados iguais de lados $a + b$ (sugerir que cada aluno escolha um valor para a e b e então construam os quadrados).

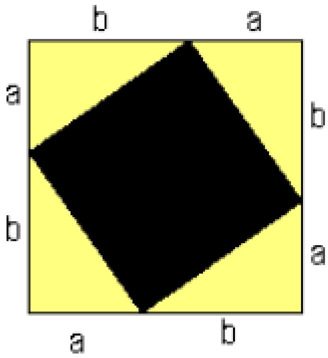
Figura 25 - Quadrado de lado $\boldsymbol{a + b}$



Fonte: Produção do autor, 2017.

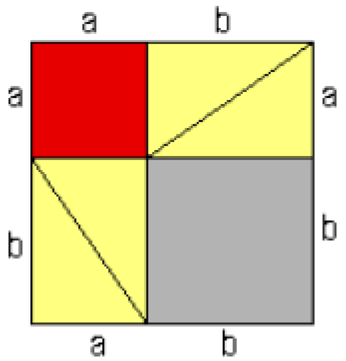
Passo 2: Orientar os alunos para que dividam os quadrados construídos no Passo 1 usando as marcações das Figuras 26 e 27.

Figura 26 - Divisão do quadrado de lado $\boldsymbol{a + b}$ construindo um quadrado interior de lado $\boldsymbol{c}$



Fonte: Produção do autor, 2017.

Figura 27 - Divisão do quadrado de lado $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ construindo um quadrado de lado $\boldsymbol{a}$ e outro de lado $\boldsymbol{b}$



Fonte: Produção do autor, 2017.

Passo 3: Pedir para que os alunos respondam as seguintes questões usando como base as construções feitas:

a) Quanto mede o lado do quadrado interior da construção de vocês (ilustrado com o quadrado preto da Figura 26)?

b) Quantos quadrados e triângulos menores vocês podem observar na construção conforme a Figura 27?

c) Calculem a área da construção de vocês, conforme a Figura 26, de modo que apareçam as áreas dos quatro triângulos e a área do quadrado preto.

d) Calculem a área da construção de vocês, conforme a Figura 27, de modo que apareçam as áreas de todos os quadrados e triângulos menores.

e) Comparem os resultados obtidos nos itens c) e d).

f) Na construção de vocês, conforme a Figura 27, qual o valor da área da nova figura se retirarmos os quatro triângulos retângulos.

g) Qual a relação da área obtida no item f) com o quadrado preto da Figura 26? O que você pode concluir a partir disso?

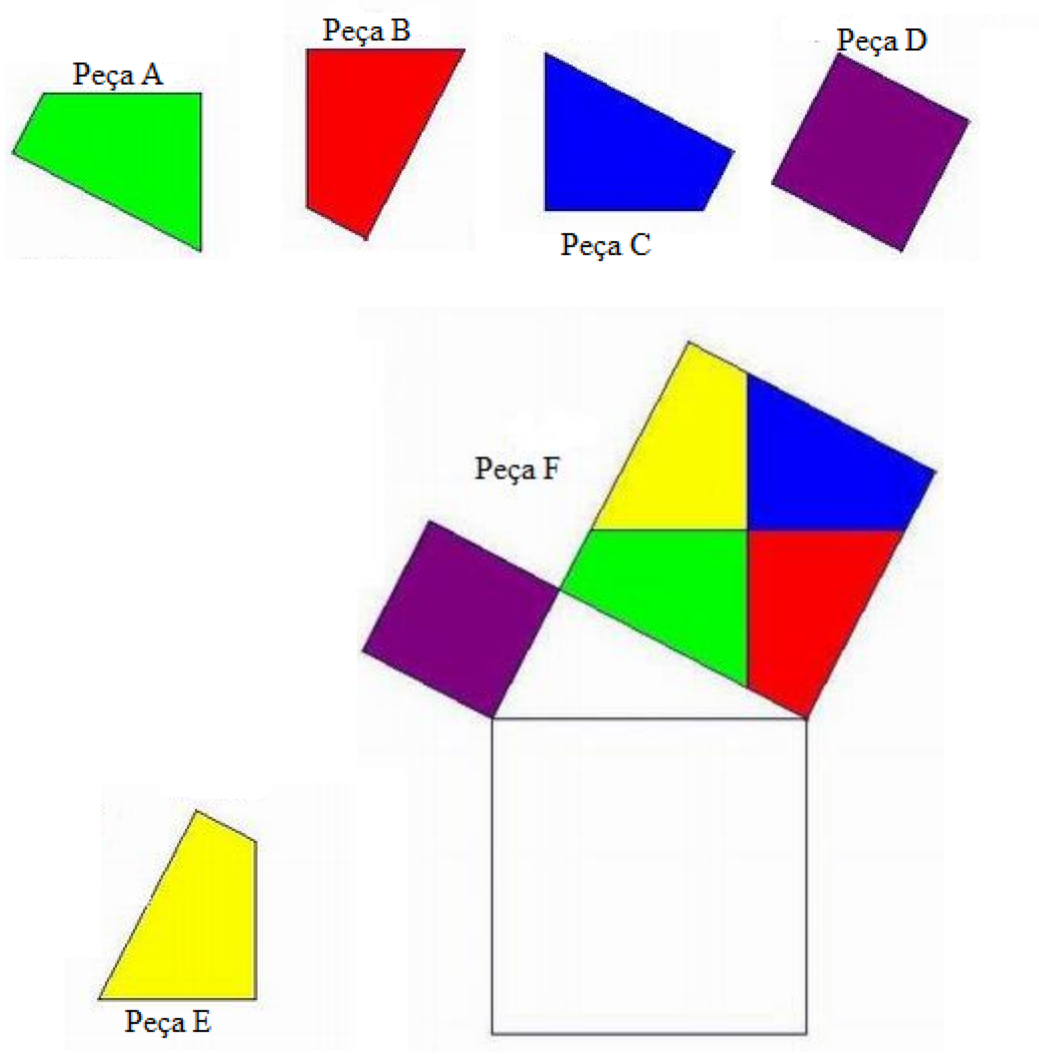
h) Resolva os itens c), d) e e) com a e b sendo valores arbitrários. Registrem suas conclusões.

Passo 3: Discutir com os alunos as conclusões.

iii) Construir a demonstração de Perigal do teorema de Pitágoras seguindo os seguintes passos:

Passo 1: Entregar para cada dupla de alunos o material ilustrado na Figura 28.

Figura 28 - Peças para demonstração de Perigal do teorema de Pitágoras



Fonte: Produção do autor, 2017.

Passo 2: Solicitar aos alunos que identifiquem na Peça F três quadrados e um triângulo retângulo e nomeiem cada lado do triângulo retângulo com um valor a, b e c.

Passo 3: Orientar que cada dupla recorte as peças e tente encaixar as peças A, B, C, D e E dentro do quadrado branco da Peça F. Na sequência solicitar aos alunos que registrem por escrito suas conclusões.

Passo 4: Discutir com os alunos as conclusões.

iv) Deixar como atividade para os alunos pesquisarem outras formas de demonstrar o Teorema de Pitágoras.

6.3.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 3

Inicialmente foi passado um vídeo[5] que contava uma parte da história de Pitágoras e na sequência o professor mostrou o seu famoso teorema. Foi colocado no quadro o desenho de um triângulo retângulo e por escrito o enunciado do teorema. Logo após o professor perguntou para os alunos em que conteúdo das aulas de matemática tinham usado o teorema de Pitágoras. O aluno do 2º ano comentou que o teorema foi muito usado durante as aulas no conteúdo de geometria espacial, principalmente em pirâmides. Já o aluno do 1º ano relatou ter usado com frequência no início de trigonometria. Os alunos do 9º ano não lembravam, então foi pedido para eles pesquisarem em seus cadernos em que conteúdo tinham usado o teorema de Pitágoras. Eles encontraram: aplicações em questões contextualizadas que envolvia o cálculo de hipotenusa e catetos, cálculo da altura de triângulos equiláteros e cálculo da diagonal do quadrado. O aluno do 8º ano disse que a professora tinha ensinado o Teorema de Pitágoras no 2º bimestre, mas não foram dados muitos exercícios. Diante disso o professor também solicitou uma pesquisa sobre aplicações do teorema, e a maioria dos exercícios eram questões contextualizadas, como por exemplo, cálculo de alturas, medidas de diagonais de terrenos retangulares. Para finalizar essa etapa da sequência os alunos foram questionados se lembravam de uma demonstração do teorema de Pitágoras. Os alunos do Ensino Fundamental disseram que o professor não fez essa demonstração. Já os alunos do Ensino Médio não lembravam.

Dando continuidade à atividade foram entregues para as duplas o roteiro impresso (Figura 29) e uma cartolina para que fizessem a atividade proposta.

---

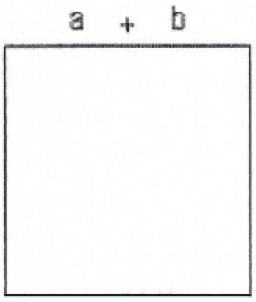
[5] https://youtu.be/dTMNnikuyrc.

Figura 29 - Roteiro para a demonstração clássica do teorema de Pitágoras

Atividade 3: (Provar o teorema de Pitágoras)

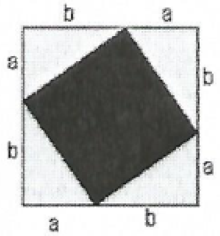
1)Construir dois quadrados iguais de lados $a + b$. (escolha um valor para a e b) semelhante a figura 1.

Figura 1: Quadrado de lado $a + b$



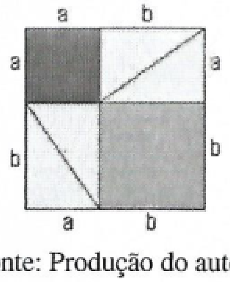
Em seguida, dividam os quadrados construídos na figura 1 usando as marcações das Figuras 2 e 3.

Figura 2: Divisão do quadrado de lado $a + b$ construindo um quadrado interior de lado c



Fonte: Produção do autor, 2017.

Figura 3: Divisão do quadrado de lado $a + b$ construindo um quadrado de lado a e outro de lado b



Fonte: Produção do autor, 2017.
2)Responda :

a) Na Figura 2 quanto mede o lado do quadrado negro?

b) Na Figura 3, quantos quadrados e triângulos menores podemos observar?

c) Calcule a área da Figura 2 de modo que apareçam as áreas dos quatro triângulos e a área do quadrado negro.

d) Calcule a área da Figura 3 de modo que apareçam as áreas de todos os quadrados e triângulos menores.

e) Compare os resultados obtidos nos itens c) e d). O que pode ser concluído?

f) Na construção de vocês, conforme a Figura 26, qual o valor da área da nova figura se retirarmos os quatro triângulos retângulos.

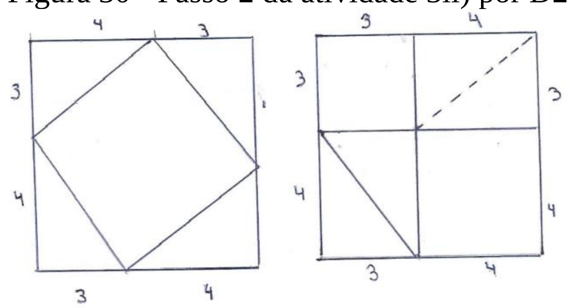
g) Qual a relação da área obtida no item f) com o quadrado preto da Figura 25? O que você pode concluir a partir disso?

h) Resolva os itens c), d) e e) com a e b sendo valores arbitrários. Registrem suas conclusões.

Fonte: Produção do autor, 2017.

Nessa atividade inicialmente a tarefa era construir dois quadrados de lados a e b, sendo esses valores escolhidos pelas duplas. A dupla D1 escolheu $a = 6$ e $b = 8$. A dupla D2 escolheu $a = 3$ e $b = 4$. A escolha não foi ao acaso, pois os alunos observaram que no quadrado da Figura 30, a e b eram catetos de um triângulo retângulo. A dupla D3 também observou isso, mas a pedido do professor pegaram medidas em que a hipotenusa não daria um valor inteiro, então escolheram $a = 6$ e $b = 12$. A Figura 30 ilustra a construção de D2.

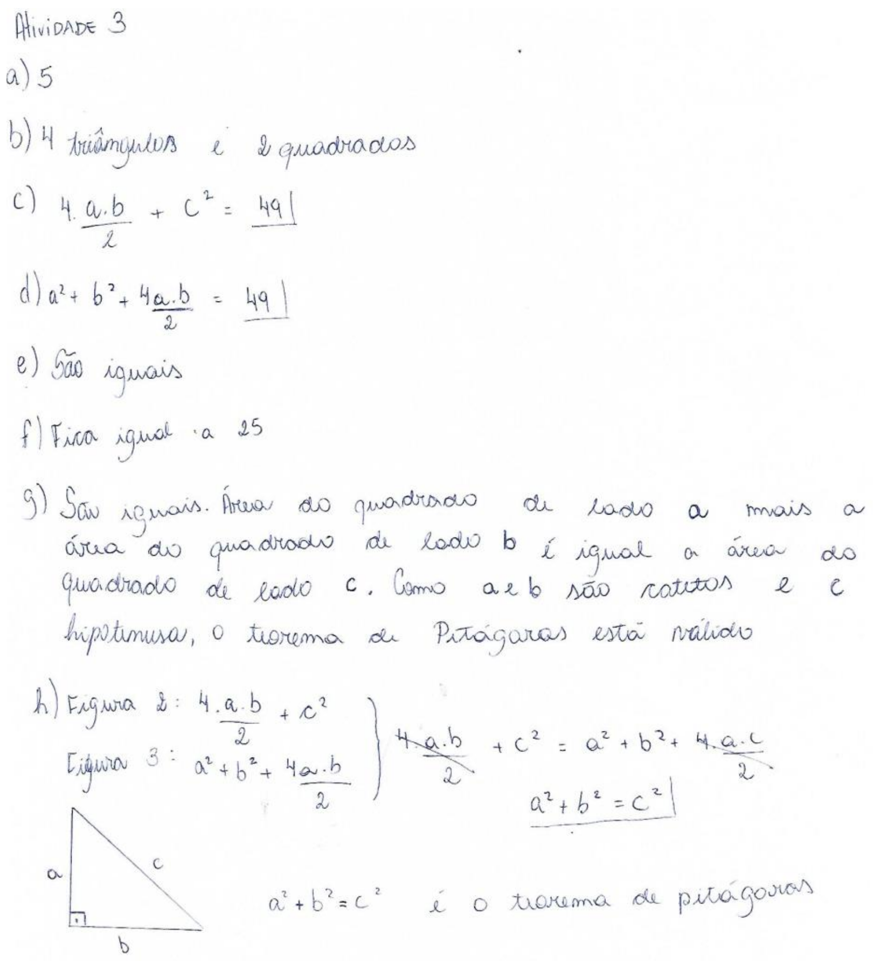
Figura 30 - Passo 2 da atividade 3ii) por D2



Fonte: Produção do autor, 2017.

A seguir cada dupla respondeu os itens do Passo 3 da atividade 3 b). As Figuras 31 e 32 apresentam as respostas das duplas D2 e D3. A resolução da dupla D1 é similar a dupla D2.

Figura 31 - Passo 3 da atividade 3ii) por D2



Atividade 3

a) 5

b) 4 triângulos e 2 quadrados

c) $4 . \frac{a.b}{2} + c^2 = \underline{49}$

d) $a^2 + b^2 + 4\frac{a.b}{2} = \underline{49}$

e) São iguais

f) Fica igual a 25

g) São iguais. Área do quadrado de lado a mais a área do quadrado de lado b é igual a área do quadrado de lado c. Como a e b são catetos e c hipotenusa, o teorema de Pitágoras está válido

h) Figura 2: $4 . \frac{a.b}{2} + c^2$

Figura 3: $a^2 + b^2 + 4\frac{a.b}{2}$

$\cancel{4\frac{a.b}{2}} + c^2 = a^2 + b^2 + \cancel{4.\frac{a.c}{2}}$

$\underline{a^2 + b^2 = c^2}$

a

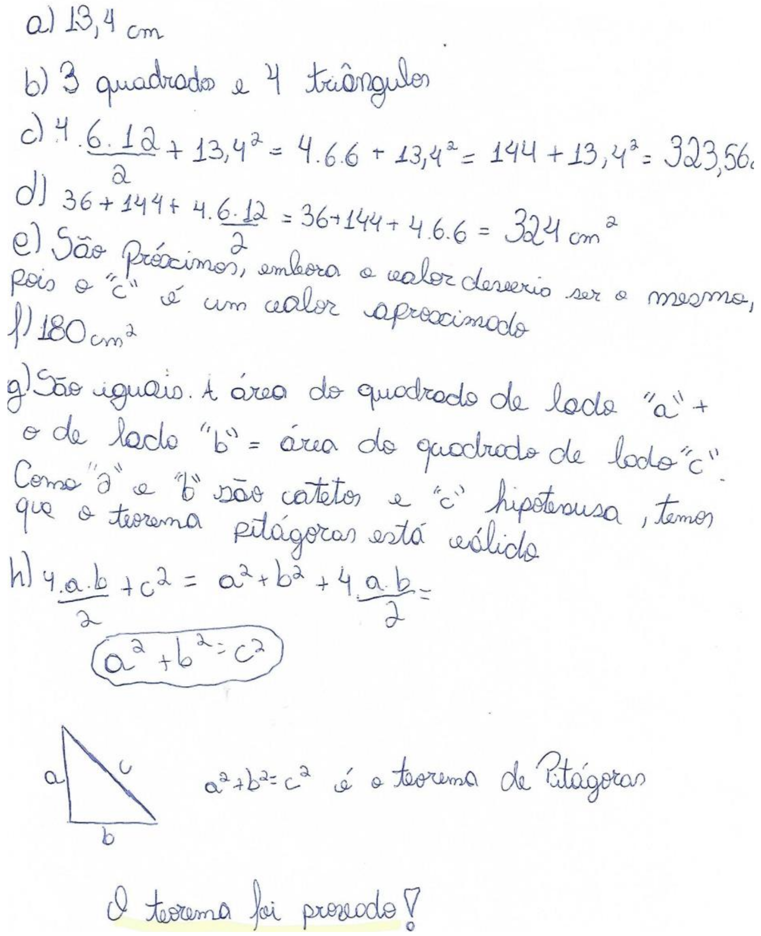
c

b

$a^2 + b^2 = c^2$ é o teorema de pitágoras

Fonte: Produção do autor, 2017.

Figura 32 - Passo 3 da atividade 3ii) por D3



Fonte: Produção do autor, 2017.

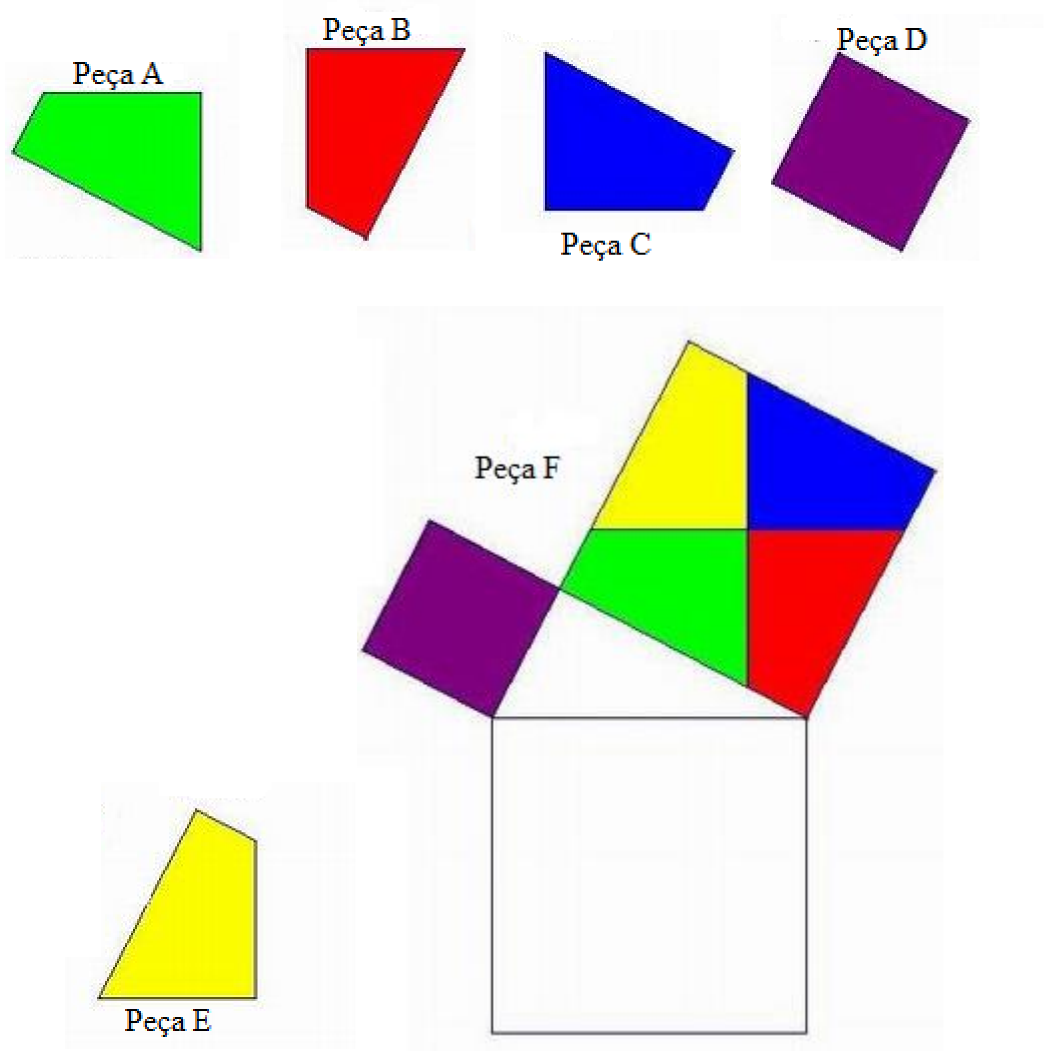
Observamos que no item a) era pedido a medida c do lado do quadrado central e esse valor deveria ser obtido por medição com uma régua, pois o objetivo não era usar o teorema. As duas primeiras duplas conseguiram rapidamente chegar no resultado esperado visto que escolheram números que satisfaziam o terno pitagórico. O problema maior foi a dupla D3 que escolheu as medidas $a = 6$ e $b = 12$. Como o valor de c não era exato, tiveram que aproximar para 13,4 cm (Figura 32). Isso acabou dificultando, em parte, as conclusões finais. Porém, no item g) após os cálculos a dupla D3 constatou que as áreas envolvidas provavam o teorema de Pitágoras.

Para contornar esse problema dos valores aproximados, como o ocorrido com D3, foi proposto o item h). Os alunos tiveram dúvidas em trabalhar com variáveis a e b, principalmente o aluno do 8º ano. Então, o professor teve que ajudar na montagem e por fim todos chegaram à conclusão de que o teorema de Pitágoras estava demonstrado.

Nessa demonstração também foi levantada uma discussão histórica sobre os gregos, que não associavam expressões do tipo, a^2, como potências e sim como áreas de quadrados, por exemplo, 3^2 era a área de um quadrado de lado 3. Isso foi importante para que os alunos enxergassem com clareza essa demonstração do teorema de Pitágoras.

A seguir foi feita a demonstração de Perigal. Para isso foram entregues para cada aluno uma atividade impressa junto com os seguintes materiais ilustrados na Figura 33.

Figura 33 - Peças para a demonstração de Perigal

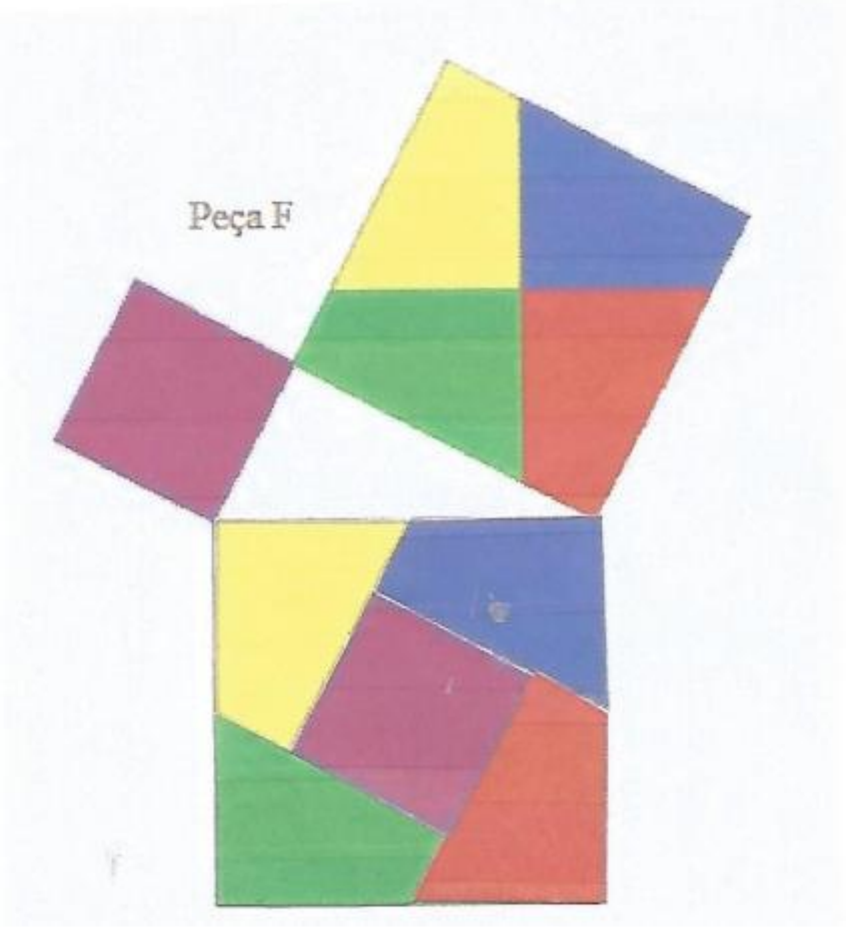


Fonte: Produção do autor, 2017.

Inicialmente foi perguntado aos alunos o que as peças A, B, C e E teriam em comum? A primeira resposta foi 4 lados, mas daí questionados não souberam responder qual era o tipo de quadrilátero. Nessa parte o professor falou que esses quadriláteros não tinham nomes específicos. Depois constataram que todos eram iguais. Aqui um ponto interessante é que essa noção de igualdade não levou imediatamente a ideia de áreas iguais. E expressões como quadriláteros congruentes também causaram espanto para os alunos. Isso se deve a uma linguagem pouco usada por professores em sala de aula.

Após explicações desses termos para os alunos foi pedido que cada dupla realizasse a seguinte tarefa: encaixar as peças A, B, C, D e E dentro do quadrado branco da Peça F. A Figura 34 mostra a montagem da dupla D2.

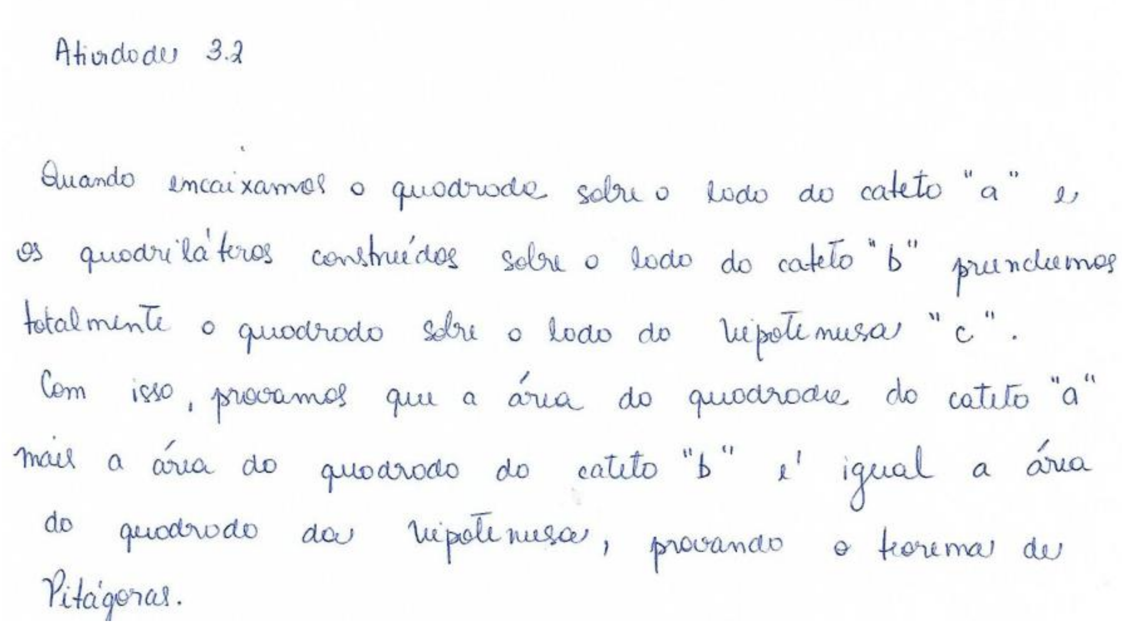
Figura 34 - Montagem das peças para demonstração de Perigal de D2



Fonte: Produção do autor, 2017.

Os alunos não tiveram dificuldades para isso, apenas a dupla D3 questionou se a ordem das peças A, B, C, D e E alteraria na montagem final. Nessa parte o professor interviu e questionou sobre a peça D. Concordaram que essa deveria ser colocada primeiro (no centro) e as outras em qualquer ordem. Por fim perceberam que ao encaixar as peças A, B, C, D e E em F que estavam sobre os quadrados dos lados dos catetos, estaria preenchendo todo o quadrado construído sobre a hipotenusa. Nisso concluíram mais uma vez o teorema de Pitágoras sendo provado. A Figura 35 apresenta a conclusão da Dupla D1.

Figura 35 - Relatório de atividade de Perigal

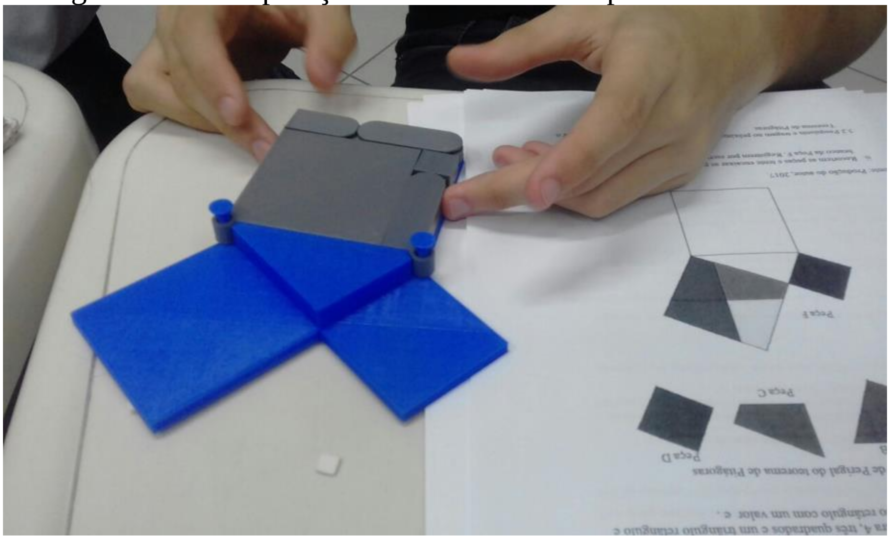

Atividade 3.2

Quando encaixamos o quadrado sobre o lado do cateto "a" e
os quadriláteros construídos sobre o lado do cateto "b" preenchemos
totalmente o quadrado sobre o lado da hipotenusa "c".
Com isso, provamos que a área do quadrado do cateto "a"
mais a área do quadrado do cateto "b" é igual a área
do quadrado da hipotenusa, provando o teorema de
Pitágoras.

Fonte: Produção do autor, 2017.

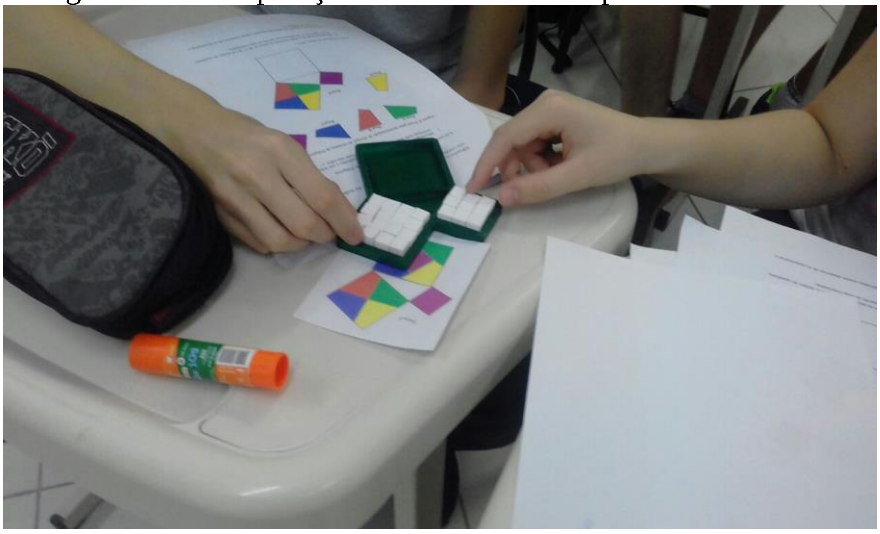
Para finalizar foram mostrados materiais feitos em impressora 3D com o objetivo de reforçar a demonstração do teorema de Pitágoras por áreas. As Figuras 36, 37 e 38 ilustram os alunos manipulando esses materiais.

Figura 36 - Manipulações do material da impressora 3D de D1



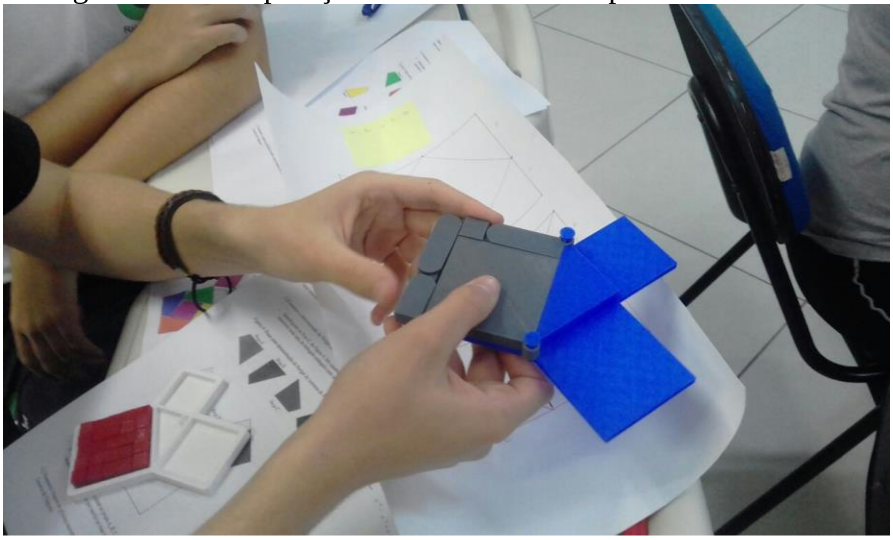
Fonte: Produção do autor, 2017.

Figura 37 - Manipulações do material da impressora 3D de D2



Fonte: Produção do autor, 2017.

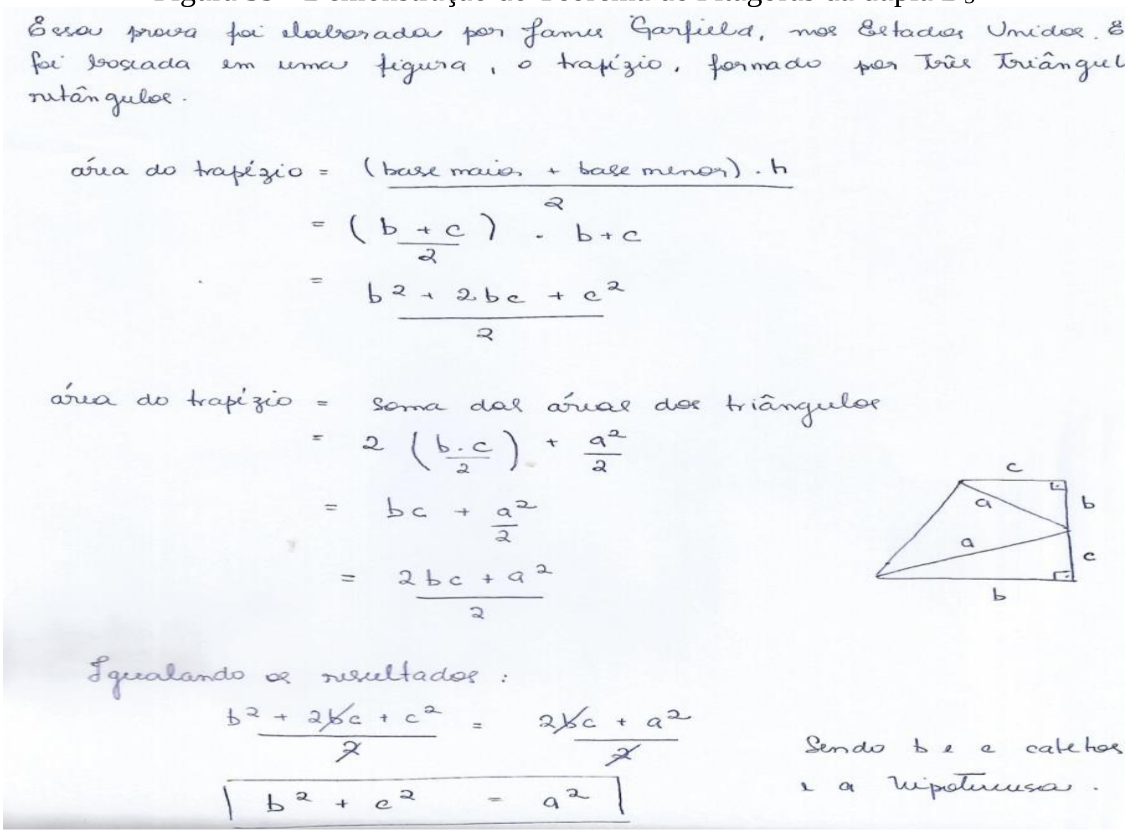
Figura 38 - Manipulações do material da impressora 3D de D3



Fonte: Produção do autor, 2017.

Como última atividade relacionada a demonstração o Teorema de Pitágoras foi solicitado que cada dupla entregasse na próxima aula uma demonstração do teorema de Pitágoras. Todas as duplas trouxeram a demonstração. Entre elas, temos a demonstração da dupla D3 na Figura 39 que foi apresentada também no capítulo 2.

Figura 39 - Demonstração do Teorema de Pitágoras da dupla D_3



Essa prova foi elaborada por James Garfield, nos Estados Unidos. E foi baseada em uma figura, o trapézio, formado por três triângul retângulos.

$$\text{área do trapézio} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot h}{2}$$

$$= \left(\frac{b+c}{2}\right) \cdot b+c$$

$$= \frac{b^2 + 2 \cdot bc + c^2}{2}$$

$$\text{área do trapézio} = \text{soma das áreas dos triângulos}$$

$$= 2\left(\frac{b \cdot c}{2}\right) + \frac{a^2}{2}$$

$$= bc + \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{2bc + a^2}{2}$$

Igualando os resultados:

$$\frac{b^2 + 2\cancel{b}c + c^2}{\cancel{2}} = \frac{2\cancel{b}c + a^2}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

Sendo b e c catetos e a hipotenusa.

Fonte: Produção do autor, 2017.

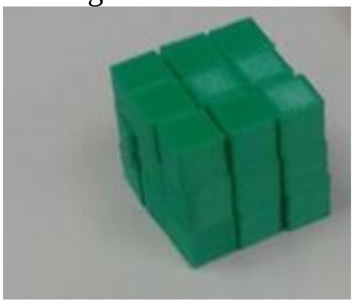
Um ponto a ser comentado é que para os alunos, principalmente para o aluno do 8º ano as demonstrações feitas foram de grande entusiasmo. Nunca pensaram que o teorema podia ter relação com áreas. Relataram que o teorema de Pitágoras agora fazia mais sentido. Os alunos do ensino médio que conheciam a mais tempo o Teorema de Pitágoras e estavam acostumados apenas usar a fórmula para calcular medidas perceberam a importância algébrica dos ternos pitagóricos. O objetivo final foi concluído com sucesso. Todos conheceram o conceito de prova matemática que é um dos alicerces da escola pitagórica.

6.4 ATIVIDADE 4: JOGO DOS CUBOS

Essa atividade foi adaptada de Silva (2010) e tem como objetivo falar para os alunos sobre o Último Teorema de Fermat. Para a sua aplicação é proposto a seguinte sequência de tarefas:

a) Distribuir cubos[6] unitários (conforme Figura 40) e solicitar aos alunos para montarem cubos de aresta 2 e 3 unidades de comprimento.

Figura 40 - Cubos



Fonte: Produção do autor, 2017.

b) Propor o seguinte desafio: é possível juntar a soma de cubos unitários dos 2 cubos (de aresta 1 e aresta 2) de modo a formar um terceiro cubo? Em caso contrário, qual a medida da aresta do cubo mais próximo, informando a quantidade de sobra ou falta.

c) Propor, sem o uso de cubos, aos alunos que analisem se é possível responder o mesmo desafio caso fossem cubos unitários em 2 cubos de aresta 3 cada.

d) Pedir aos alunos que respondam as questões:

i) Você consegue encontrar 3 números inteiros a, b, c tais que $a^3 = b^3 + c^3$? Se sim, dê um exemplo.

ii) E se a, b, c no item anterior forem diferentes de zero, é possível encontrar esses inteiros? Se sim, dê um exemplo.

iii) Você consegue encontrar 3 números inteiros a, b, c tais que $a^4 = b^4 + c^4$? Se sim, dê um exemplo. E se a, b, c forem diferentes de zero, é possível encontrar esses inteiros? Se sim, dê um exemplo.

e) Contar a História do Último teorema de Fermat.

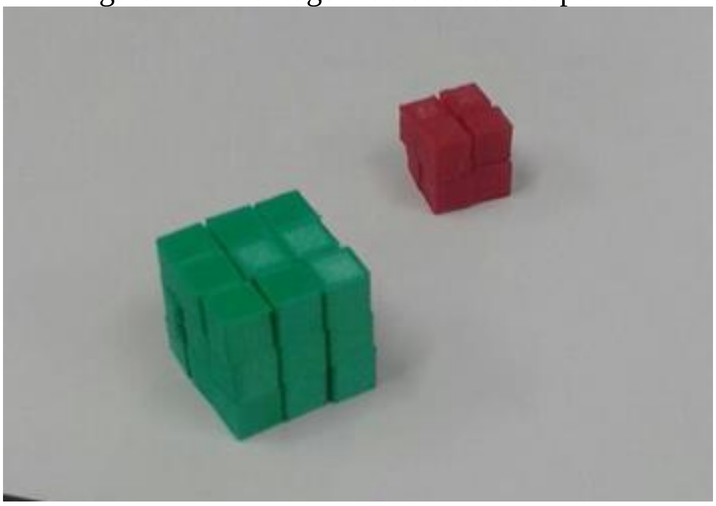
6.4.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 4

Para a realização dessa atividade foram entregues as duplas cubinhos unitários feitos com uma impressora 3D. O professor explicou a atividade e as duplas começaram a montar cubos de aresta 2 e 3. Após a montagem, o aluno do 8º Ano questionou a relação dos cubos construídos com o número de cubinhos utilizados. A conclusão imediata foi que o número de

[6] Cubos feitos na impressora 3D.

cubinhos usados para construir um cubo de aresta n, segue a relação n^3, em que n é o número de cubinhos unitários. Nesse momento o aluno do 2ºAno que está estudando geometria espacial já associou essa relação com a fórmula do volume de um cubo. A Figura 41 ilustra a montagem da dupla D2.

Figura 41 - Montagem de cubos da dupla D2



Fonte: Produção do autor, 2017.

Em seguida, foi pedido aos alunos o desafio de juntar os cubos unitários dos 2 cubos (de aresta 1, com um cubinho e outro de aresta 2, com 8 cubinhos) de modo a formar um terceiro cubo. Antes mesmo de tentar montar o cubo, os alunos já tinham a certeza que não seria possível. Isso se deve ao fato que eram poucas peças. Após a montagem, responderam que para formar um novo cubo de aresta 3, ou seja, com 27 cubinhos, precisavam acrescentar 18 cubinhos, visto que já tinham 9 cubinhos.

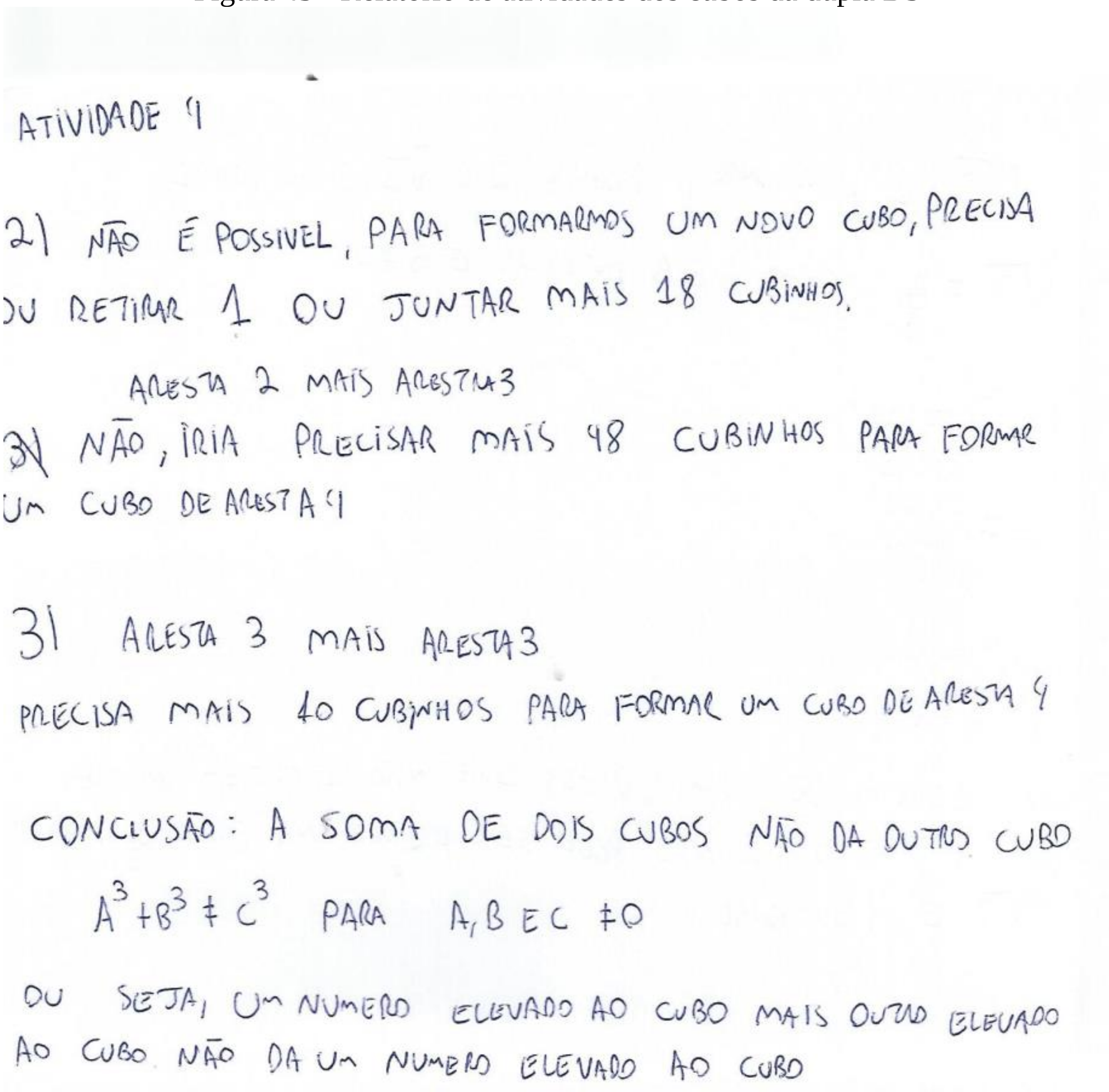
O mesmo aconteceu na montagem de dois cubos de arestas 3 unidades cada. Perceberam que ainda precisavam de mais 10 cubinhos para formar um cubo de aresta 4. Na Figura 42 temos a tentativa da dupla D1.

Figura 42 - Montagem de cubos da dupla D_1

Fonte: Produção do autor, 2017.

Foi dado um tempo aos alunos para pensarem se teria um exemplo de construção usando outros cubos de arestas diferentes das citadas. É valido observar que nessas tentativas os alunos estavam inicialmente analisando o problema sob o ponto de vista algébrico, ou seja, de encontrar três números tais que o primeiro número elevado ao cubo mais o segundo elevado ao cubo daria um terceiro valor também elevado ao cubo, para depois tentar uma construção geométrica. Como não achavam esses valores, logo veio a indignação misturada a uma frustração de não conseguirem a resposta. O professor insistiu mais um pouco com os alunos que tentassem pensar se um cubo de aresta b junto com um cubo de aresta c formaria um cubo de aresta a. Novamente veio a decepção por parte dos alunos que já estavam convencidos que isso era impossível, ou que se existisse, eram valores muito altos. Diante disso o professor pediu que um aluno usasse uma calculadora para tentar com números altos, e também, novamente a decepção. O professor então questionou como os alunos provariam que era impossível existir esses valores. Todos responderam que não tinham a mínima ideia de como fazer tal prova. A conclusão final é que para a maioria a soma de dois cubos não daria outro cubo. Na Figura 43 temos as respostas da dupla D3.

Figura 43 - Relatório de atividades dos cubos da dupla D3



ATIVIDADE 4

2) NÃO É POSSIVEL, PARA FORMARMOS UM NOVO CUBO, PRECISA OU RETIRAR 1 OU JUNTAR MAIS 18 CUBINHOS.

ARESTA 2 MAIS ARESTA 3

3) NÃO, IRIA PRECISAR MAIS 48 CUBINHOS PARA FORMAR UM CUBO DE ARESTA 4

3) ARESTA 3 MAIS ARESTA 3

PRECISA MAIS 10 CUBINHOS PARA FORMAR UM CUBO DE ARESTA 4

CONCLUSÃO: A SOMA DE DOIS CUBOS NÃO DA OUTRO CUBO

$A^3 + B^3 \neq C^3$ PARA A, B E C $\neq 0$

OU SEJA, UM NUMERO ELEVADO AO CUBO MAIS OUTRO ELEVADO AO CUBO NÃO DA UM NUMERO ELEVADO AO CUBO

Fonte: Produção do autor, 2017.

Consideramos importante destacar a vontade e persistência dos alunos em acreditarem na existência desses valores. Para eles, essa impossibilidade parece algo absurdo, uma espécie de incompetência matemática. O método da tentativa para esses alunos a princípio é a única ferramenta matemática conhecida. A prova matemática é pouquíssimo usado nas aulas de Ensino Médio e Fundamental.

Essa atividade foi muito válida para despertar nos alunos esse espírito matemático de curiosidade, de desafio, de interesse em brincar com os números, sem pensar em aplicá-los no cotidiano. Atualmente nota-se que os alunos são poucos desafiados com a teoria dos números. Existe uma grande preocupação em aplicar a matemática no dia a dia, mas ao mostrar a beleza da matemática pura também podemos encantar os estudantes.

Na sequência foi pedido que as duplas respondessem ao seguinte questionário:

a) Você consegue encontrar 3 números inteiros a, b, c tais que $a^3 = b^3 + c^3$? Se sim, dê um exemplo.

b) E se a, b, c no item anterior forem diferentes de zero, é possível encontrar esses inteiros? Se sim, dê um exemplo.

c) Você consegue encontrar 3 números inteiros a, b, c tais que $a^4 = b^4 + c^4$? Se sim, dê um exemplo. E se a, b, c forem diferentes de zero, é possível encontrar esses inteiros? Se sim, dê um exemplo.

É importante destacar que o professor pediu que os alunos respondessem sob o ponto de vista algébrico. No item a) os alunos não tiveram problemas. Todas as respostas que apareceram foram:

$$a = 1;\ b = 0\ ; c = 1$$

$$a = 1;\ b = 1\ ; c = 0$$

$$a = -1;\ b = 0\ ; c = -1$$

$$a = -1;\ b = -1\ ; c = 0$$

$$a = 0;\ b = 0\ ; c = 0$$

No item b) os alunos associaram imediatamente com a atividade dos cubos e responderam que não existiam tais valores.

No item c) inicialmente responderam que sim e deram alguns exemplos. A seguir, todas as respostas que apareceram:

$$a = 1;\ b = 0\ ; c = 1$$

$$a = 1;\ b = 1\ ; c = 0$$

$$a = 1;\ b = 0\ ; c = -1$$

$$a = 1;\ b = -1\ ; c = 0$$

$$a = -1;\ b = 0\ ; c = 1$$

$$a = -1;\ b = 0\ ; c = -1$$

$$a = -1;\ b = -1\ ; c = 0$$

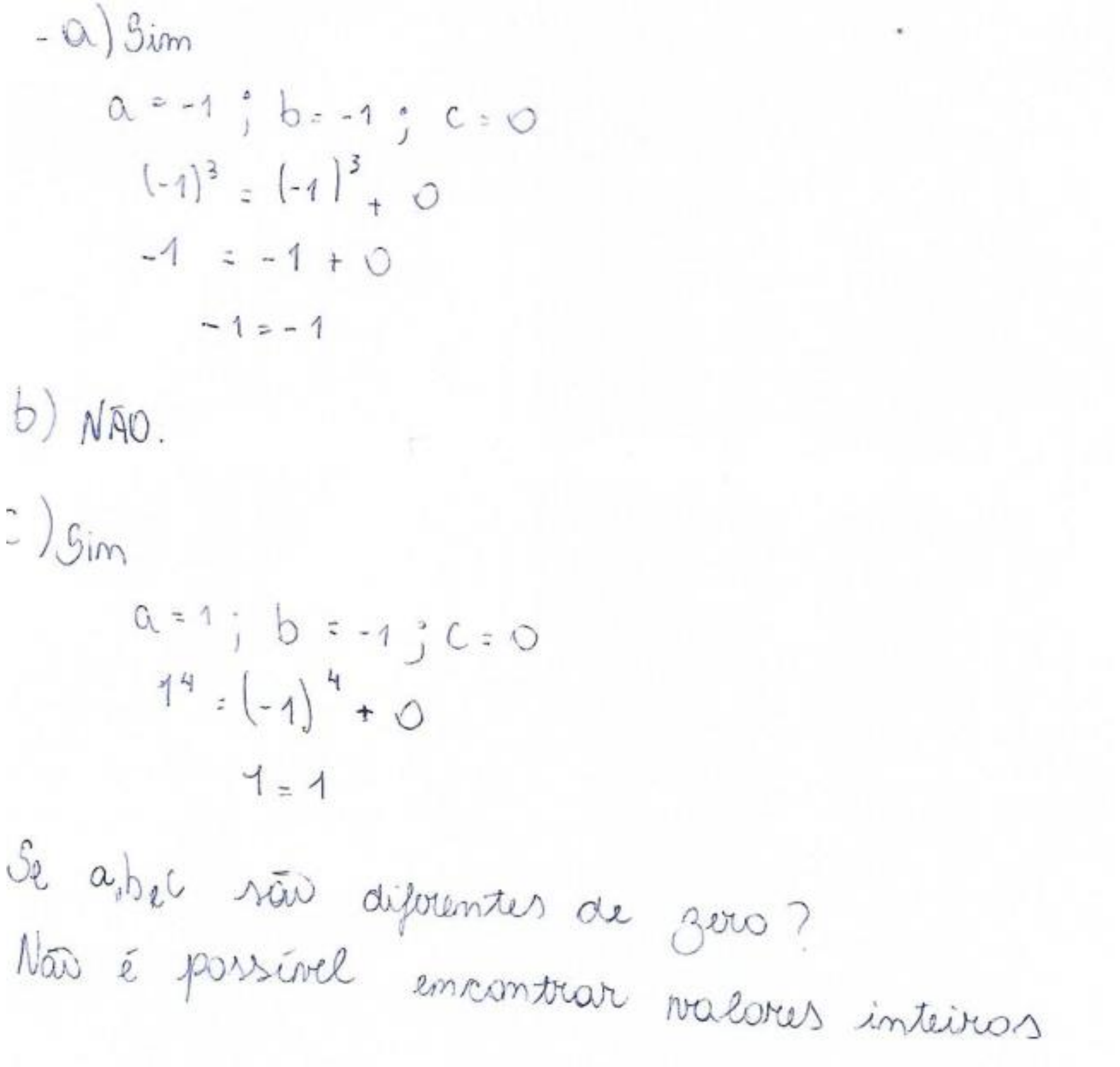
$$a = 0;\ b = 0\ ; c = 0$$

Já na segunda parte desse item em que eram valores diferentes de zero, novamente veio a ideia da tentativa. Mas, foram unânimes em responder que não existiam tais valores. Nesse momento o professor ainda insistiu para que os alunos tentassem procurar exemplos. Porém, a ideia frustrada da relação dos cubos influenciou a resposta negativa dos alunos. O professor tentou fazer uma relação entre $a^4 = b^4 + c^4$ e a relação já estudada e tão conhecida $a^2 = b^2 + c^2$ da seguinte forma:

$$a^4 = b^4 + c^4$$
$$(a^2)^2 = (b^2)^2 + (c^2)^2$$

Alguns pensaram na possibilidade de aplicar Pitágoras duas vezes, outros usar também as fórmulas das ternas pitagóricas, e alguns simplesmente por tentativas. Todos "fracassaram". Isso reforçou ainda mais a resposta não dos alunos. Na Figura 44 temos as respostas da dupla D2.

Figura 44 - Respostas questionário da dupla D2


a) Sim
a = -1 ; b = -1 ; c = 0
$(-1)^3 = (-1)^3 + 0$
$-1 = -1 + 0$
$-1 = -1$
b) NÃO.
c) Sim
a = 1 ; b = -1 ; c = 0
$1^4 = (-1)^4 + 0$
$1 = 1$
Se a, b e c são diferentes de zero?
Não é possível encontrar valores inteiros

Fonte: Produção do autor, 2017.

Um aluno do 9º Ano perguntou se essa impossibilidade também ocorreria com expoente 5. Os alunos também debateram e entre eles chegaram a conclusão que para valores diferentes de zero era impossível achar tais números.

Após esse debate o professor finalmente apresentou o Último Teorema de Fermat aos alunos. Foi mostrado o vídeo no *youtube* chamado Grandes Pensadores[7]: vida de Pierre de Fermat. Nesse vídeo foi mostrado a história de Fermat e seu último teorema: Não existem inteiros positivos a, b, c , com $n > 2$, tais que $b^n + c^n = a^n$. Foi também mostrado o livro "O Último Teorema de Fermat" de Simon Singh o qual conta a fascinante história do Último Teorema de Fermat.

Para enfatizar o teorema o professor leu para os alunos o seguinte trecho: "É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de dois números elevado a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes".

Os alunos ficaram muito surpresos inicialmente que Fermat não era matemático profissional. Não acreditavam como isso era possível. Depois ficaram espantados como esse enigma tão simples parecia tão complicado de solucionar. E por fim, encantados com esse tom de mistério quando o professor disse que foram gastos 358 anos para alguém demonstrar esse teorema. Alguns dos alunos não acreditaram que Fermat teria feito tal prova.

6.5 ATIVIDADE 5: DESAFIO

Essa atividade foi adaptada de Silva (2010) e tem como objetivo explorar uma aplicação do UTF. O desafio proposto aos alunos foi provar, usando o UTF, que $\sqrt[n]{2}$ é irracional.

6.5.1 Desenvolvimento e aplicação da atividade 5

Para realizar essa atividade, inicialmente o professor enfatizou a ideia de prova matemática. Explicou sobre a prova por absurdo usando o exemplo da demonstração que $\sqrt{2}$ é irracional. Supondo que $\sqrt{2}$ é racional da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, sendo a e b primos entre si.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2.$$

[7] https://youtu.be/39vQgSKuQg8.

Temos que a^2 é par, logo a é par. Com isso $a = 2m$, sendo m um número inteiro qualquer. Disso segue que:

$$2b^2 = a^2$$
$$2b^2 = (2m)^2$$
$$b^2 = 2m^2.$$

donde b^2 é par, logo b também é par da forma $b = 2n$. Mas isso é um absurdo, pois a e b são primos entre si. Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser racional. Portanto temos que $\sqrt{2}$ é irracional.

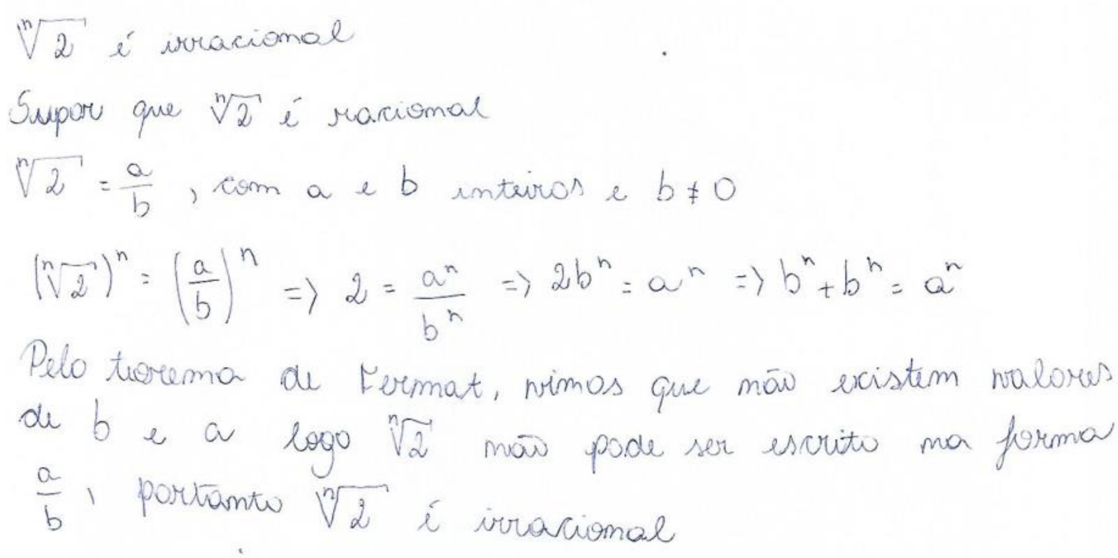
Nessa demonstração foram relembrados conceitos como radiciações, número racional e irracional e o conceito de números pares.

Com isso o professor passou para os alunos o desafio: provar, usando o último teorema de Fermat, que $\sqrt[n]{2}$ é irracional.

Inicialmente o professor pediu que os alunos usando o conceito de radiciação investigassem exemplos de valores com n conhecido. Evidentemente ninguém conseguiu. O professor pediu que os alunos seguissem o modelo do exemplo da demonstração de $\sqrt{2}$.

Por se tratar de algo mais complexo, principalmente para os alunos do fundamental, foi natural que eles tivessem dificuldade. Assim o professor resolveu a questão com os alunos. A Figura 45 apresenta o registro da atividade pela dupla D1.

Figura 45 - Prova que $\sqrt[n]{2}$ é irracional da dupla D1



Fonte: Produção do autor, 2017.

6.6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO

Após todas as atividades realizadas o objetivo de mostrar aos alunos o último teorema de Fermat foi alcançado. Esse teorema fez sentido para os alunos, pois começou na origem do problema com Pitágoras e suas demonstrações, até com a atividade 4 decisiva para conclusão do último teorema de Fermat. Mesmo sem uma demonstração feita, o que seria inviável para estudantes desse nível, os alunos conheceram e se encantaram por ele. O fato de ver a matemática sob outro aspecto, diferente do modelo tradicional, usando materiais diferentes dos usuais para fazer demonstrações, concluir resultados e não apenas aceitar fórmulas, com certeza dará aos alunos daqui em diante um olhar mais atencioso pela disciplina. Por exemplo, acreditamos que em questões de geometria plana, esses alunos usarão o teorema de Pitágoras com mais confiança. Eles saberão qual o raciocínio empregado para o Teorema de Pitágoras e não aplicarão apenas com o objetivo de substituir valores. Serão mais críticos e contestadores com teoremas e fórmulas dadas pelos seus professores.

Um fato a ser destacado foi como os alunos de diferentes níveis trabalharam com os mesmos assuntos. Nas atividades que envolviam o teorema de Pitágoras foi percebido uma maior empolgação dos alunos do Ensino Fundamental, com mais perguntas e construções. Isso se deve ao fato que o aluno do Ensino Médio muitas vezes já está tão acostumado com o modelo tradicional e sufocante da matemática que somente nas atividades 4 e 5 que se entregaram totalmente a essa “empolgação”. Aliás, nas atividades 4 e 5 houve muitos debates e questionamentos. Foi concluído que mesmo alunos com diferentes desempenhos de notas em matemática nessa escola souberam trabalhar bem com a dinâmica proposta. E isso sugere que, quando apresentada ao aluno de outra forma a matemática pode ser mais acessível e mais interessante.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa dissertação vimos que o Último Teorema de Fermat é um assunto muito intrigante da história da matemática. Um teorema simples de ser anunciado, que desafiou as maiores mentes matemáticas por vários séculos.

No decorrer dos capítulos foi apresentado de forma cronológica a história desse teorema. Pitágoras mereceu um destaque especial, visto a sua importância para o nascimento do Último Teorema de Fermat. Tivemos a preocupação de descrever detalhadamente a vida desse filósofo/matemático. Como o teorema de Pitágoras é um assunto muito importante no ensino da matemática, apresentamos várias formas de demonstrações, desde as mais simples, como o caso da demonstração clássica, até as mais complexas, como a de Perigal. É de extrema importância que os alunos saibam a origem e principalmente a prova do teorema de Pitágoras. Um dos objetivos dessa dissertação é dar aos professores uma leitura de forma clara e compreensível, para que possam transmitir aos estudantes tais conhecimentos.

Descrevemos a história de Pierre de Fermat, o criador do grande enigma, que também contribuiu de forma significante para o avanço de diversos campos da matemática. Seu maior legado, o Último Teorema de Fermat, fez com que grandes matemáticos tentassem demonstrá-lo. Citamos no decorrer do capítulo 3 alguns matemáticos que tentaram e fracassaram, até chegar no capítulo 5, no qual contamos a história de Andrew Wiles, o grande matemático que finalmente fez a grande demonstração.

Com o intuito de enriquecer principalmente a formação dos professores de Ensino Básico, mostramos no capítulo 4 a demonstração do Último Teorema de Fermat para os casos $n = 4$ e $n = 3$. Mesmo que os professores de Ensino Básico não façam essas demonstrações em sala de aula, é importante para seu enriquecimento matemático.

Como o Último Teorema de Fermat não é um assunto visto no currículo do Ensino Fundamental e Médio, nossa ideia é mostrar que ele pode ser trabalhado nesses níveis. Por isso propomos algumas atividades que os professores podem aplicar aos seus alunos. São atividades que tem como objetivo enriquecer as aulas e dar aos professores opções de como introduzir o Último Teorema de Fermat para os estudantes. Além disso, já nas aulas do teorema de Pitágoras é possível aplicar as atividades 1,2 e 3.

É notável o entusiasmo dos alunos nessas atividades. Poder construir passo a passo o saber faz com que o estudante assimile e goste mais da matemática. Nas atividades realizadas e descritas nesse trabalho percebeu-se claramente o encantamento dos alunos pela descoberta do Último Teorema de Fermat.

Por fim, esperamos que essa dissertação sirva de inspiração para que outros professores tenham mais conhecimento e possam enriquecer suas aulas. Que não fiquem apenas nos assuntos que estão na grade curricular, e sim, que sejam criativos, com histórias, atividades, jogos, desafios, curiosidades do mundo matemático. Esperamos também que esse trabalho possibilite aos alunos um maior aprofundamento do teorema de Pitágoras e a descoberta do Último Teorema de Fermat, despertando a vontade de conhecer e estudar novos campos da matemática, dentre eles a teoria dos números.

Vale destacar a importância desse trabalho para meu enriquecimento profissional. Embora já tendo experiência em sala de aula, ao realizar essas atividades percebi um entusiasmo e uma grande vontade de aprender dos alunos. O resultado da aplicação no grupo de estudos foi muito positivo, portanto, pretendo aplicar essas atividades nas próximas turmas considerando que a associação de conteúdos com atividades nas aulas regulares aprimora a qualidade de ensino.

REFERÊNCIAS

ANJOS, Antoniel Abreu. **Equações diofantinas:** sequência didática e o método da descida infinita de Fermat. 2015. Dissertação (Mestrado) PROFMAT - Universidade Estadual do Ceará, 2015.

BOEING, Francielle K. **Fatoração única em corpos ciclotômicos e o último teorema de Fermat**. 2013. Trabalho de Graduação - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática, Joinville, 2013.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRUNO, Salvador da Silva. **O último teorema de Fermat para $\boldsymbol{n = 3}$**. 2014. Dissertação (Mestrado) - PROFMAT-UNIRIO, 2014.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de aritmética.** São Paulo: Atual, 1991.

EVES, Howard W. **Introdução à história da matemática.** São Paulo: UNICAMP, 2004.

GUINNESS WORLD RECORDS. 1999. Disponível em <http://www.guinnessworldrecords.com>. Acesso em: 08 jul. 2018.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SILVA, Daniel da Cunha. **O último teorema de Fermat.** 2010. Monografia - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica.** São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**. Tradução de Jorge Luis Calife. 20. ed. Rio de Janeiro: Record, 2012.

WIKIMEDIA COMMONS. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diophantus-II-8-Fermat.jpg>. Acesso em: 08 jul. 2018.

ANEXOS

ANEXO A - Declaração da instituição participante. Carta de Anuência

UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO PARTICIPANTE
CARTA DE ANUÊNCIA

Autorizamos o pesquisador responsável Olavo Dias, mestrando do Programa de Pós-Graduação PROFMAT, na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), orientado pela professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo, a realizar uma aplicação para sua Dissertação de Mestrado nas dependências do colégio Alto vale, intitulada "Último Teorema de Fermat: Um resgate histórico e uma proposta de aplicação no Ensino Básico" sendo esta a instituição coparticipante, motivo ao qual está sendo direcionada a carta de anuência.

Como mencionado anteriormente, a pesquisa será realizada nas dependências da escola, onde o pesquisador trabalha como docente do Ensino Fundamental II e médio atualmente.

Concordamos que os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados por escritos e oralmente em banca de Dissertação, em exposição oral, congressos e revistas científicas.

Rio do sul, 07 de 11 de 2017.

Atenciosamente,

Diretor Geral

ANEXO B - Modelo do Termo de Consentimento

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | JOINVILLE CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

TERMO DE CONSENTIMENTO

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: Último Teorema de Fermat: Um resgate histórico e uma proposta de aplicação no Ensino Básico, do acadêmico *Olavo Dias*, tendo como objetivo analisar as soluções apresentadas nas atividades propostas pelo acadêmico que é também professor dele(a), e também da direção do colégio Alto Vale.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar diversas formas de demonstração do teorema de Pitágoras e conhecimentos sobre o Último teorema de Fermat, podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A pessoa que estará acompanhando os procedimentos será o próprio Acadêmico e professor Olavo Dias.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(ua) filho(a)/dependente, como as resolução das atividades e da transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das transcrições dos áudios e resoluções das atividades do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestrando Olavo Dias

Telefone: (47) 984781200
Endereço: Rua Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

Professora Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

Telefone:
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome do aluno:____

Nome do responsável por extenso:______________________________________

Assinatura ________________________ Local: ________________ Data: ____/____/____ .