



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de Bauru

Marcos Paulo Rodrigues Bueno

Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no Ensino Médio

Bauru  
2018

Marcos Paulo Rodrigues Bueno

Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristiane Alexandra Lázaro.

Bauru

2018

Bueno, Marcos Paulo Rodrigues.

Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no ensino médio/  
Marcos Paulo Rodrigues Bueno. -- Bauru, 2018.  
83f. : 60il., tabs.

Orientadora: Cristiane Alexandra Lázaro  
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) - Metodologia. 3. Medidas de superfície. 4. Teorema de Pappus. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no ensino médio.

CDU - 51(07)

Marcos Paulo Rodrigues Bueno

Teorema de Pappus: conceitos e aplicações no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristiane Alexandra Lázaro  
UNESP – Campus de Bauru  
Orientadora

Prof. Dr. Marcelo ReicherSoares  
UNESP – Campus de Bauru

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Carina Alves Severo  
UNESP – Campus de Rio Claro

Bauru

11 de julho de 2018

## **AGRADECIMENTOS**

Dedico a conclusão deste trabalho a todos que me apoiaram nessa jornada, agradeço a Deus por me dar força interior e coragem para concluir mais uma formação e pela perseverança de não desistir nunca.

Agradeço em especial minha esposa Renata, meu filho Murilo, meus pais, meus irmãos e a minha família, pela motivação e pelo incentivo que contribuíram para que eu conseguisse concluir essa etapa e concretizar esse sonho.

Agradeço à minha Orientadora Professora Doutora Cristiane Alexandra Lázaro, aos meus professores e colegas do PROFMAT 2015 pelo incentivo e apoio, que colaboraram com dedicação, paciência e comprometimento para a realização desse trabalho.

*“Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar”.*

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de abordagem dos conceitos de área de superfícies e volume de sólidos que podem ser obtidos pela rotação de uma curva, ou figura, no Ensino Médio. As práticas correntes mostram que a apresentação desses conceitos no Ensino Médio se dá, em geral, pelo uso de fórmulas. Com a intenção de colaborar com novas propostas e possibilidades de trabalho com esses conceitos no Ensino Médio, nesse trabalho foi realizada a proposta de uso das aplicações dos teoremas de Pappus a partir de conceitos conhecidos dos alunos desse segmento de ensino, sem a necessidade do uso de recursos matemáticos mais sofisticados necessários nas demonstrações dos Teoremas, ambientados no Cálculo Integral. A partir disso, foram elaboradas e aplicadas atividades com alunos da 3ª série do Ensino Médio em uma escola na cidade de Bauru. A percepção do pesquisador, frente às atividades realizadas pelos alunos e o diálogo estabelecido com eles, evidenciou boa receptividade em relação ao método utilizado e a aparente compreensão do conteúdo de modo satisfatório.

Palavras-chave: Teoremas de Pappus. Área de superfícies. Volume. Cálculo integral.

## ***ABSTRACT***

The aim of this work is to present a proposal to approach the concepts of surface area and volume of solids that can be obtained by the rotation of a curve, or figure, in High School. The current practices show that the presentation of these concepts in High School is usually by the use of formulas. With the intention of collaborating with new proposals and possibilities to work with these concepts in High School, in this work, the proposal was to use the applications of Pappus theorems from concepts known to the students of this segment of education, without the need of more sophisticated mathematical resources involving the demonstrations of theorems, such as integral calculus. From this, activities were carried out and applied to students of the 3rd grade of High School in a school in the city of Bauru. The researcher's perception of the activities carried out by the students and the dialogue established with them showed a good acceptance to the method used and the apparent understanding of the content in a satisfactory way.

Keywords: Pappus theorems. Surface area. Volume. Integral calculus.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> - Partições de uma função positiva .....	17
<b>Figura 2</b> - Função $f$ que assume valores positivos e negativos.....	19
<b>Figura 3</b> - Integral para área .....	20
<b>Figura 4</b> - Retângulo típico e retângulos aproximantes.....	21
<b>Figura 5</b> - Função positiva.....	22
<b>Figura 6</b> - Retângulo típico .....	23
<b>Figura 7</b> - Retângulo aproximante.....	24
<b>Figura 8</b> - A área de um retângulo típico.....	25
<b>Figura 9</b> - Função não positiva.....	26
<b>Figura 10</b> - Área de função não positiva .....	27
<b>Figura 11</b> - Comparativo de medição.....	28
<b>Figura 12</b> - Limite comprimentos dos polígonos.....	29
<b>Figura 13</b> - Aproximação para $C$ .....	29
<b>Figura 14</b> - Aproximação poligonal.....	30
<b>Figura 15</b> - Arco da parábola semicúbica.....	32
<b>Figura 16</b> - Função positiva.....	35
<b>Figura 17</b> - Região $R$ em torno do eixo $x$ .....	36
<b>Figura 18</b> - Função constante .....	36
<b>Figura 19</b> - Fatias verticais.....	37
<b>Figura 20</b> - Retângulo cilíndrico .....	38
<b>Figura 21</b> - Retas verticais .....	39
<b>Figura 22</b> - Esfera de raio $r$ centrada .....	40
<b>Figura 23</b> - Aproximação por cascas.....	41
<b>Figura 24</b> -Retângulos verticais.....	41
<b>Figura 25</b> - Áreas de superfícies .....	42
<b>Figura 26</b> - Áreas de superfícies .....	43
<b>Figura 27</b> - Áreas mais elementares .....	44
<b>Figura 28</b> - Ponto $P$ .....	46

<b>Figura 29</b> - Massa de gravidade da placa .....	46
<b>Figura 30</b> - Divisão pela massa total .....	47
<b>Figura 31</b> - Concentração de massa .....	48
<b>Figura 32</b> - Região entre as retas $x=a$ , $x=b$ , acima do eixo $x$ e abaixo do gráfico da função contínua $y=f(x)$ .....	50
<b>Figura 33</b> - Aproximação da Figura 32 por retângulos .....	50
<b>Figura 34</b> - Centro de massa.....	53
<b>Figura 35</b> - Sólido gerado pela rotação da região $R$ .....	55
<b>Figura 36</b> - Área lateral de um cilindro .....	59
<b>Figura 37</b> - Retângulo no $R^2$ .....	61
<b>Figura 38</b> - Retângulo no $R^3$ .....	62
<b>Figura 39</b> - Cilindro gerado pela rotação do retângulo.....	62
<b>Figura 40</b> - Área do retângulo no $R^2$ .....	63
<b>Figura 41</b> - Área lateral do cilindro de raio $a$ e altura $b$ .....	64
<b>Figura 42</b> - Triângulo retângulo no $R^2$ .....	65
<b>Figura 43</b> - Triângulo retângulo no $R^3$ .....	65
<b>Figura 44</b> - Cone gerado pela rotação do triângulo retângulo.....	66
<b>Figura 45</b> - Círculo no $R^2$ .....	66
<b>Figura 46</b> - Círculo no $R^3$ .....	67
<b>Figura 47</b> - Toro gerado pela rotação do círculo.....	67
<b>Figura 48</b> - Triângulo equilátero no $R^2$ .....	68
<b>Figura 49</b> - Triângulo equilátero no $R^3$ .....	69
<b>Figura 50</b> - Sólido gerado pela rotação do triângulo equilátero.....	69
<b>Figura 51</b> - Quadrado no $R^2$ .....	70
<b>Figura 52</b> - Quadrado no $R^3$ .....	70
<b>Figura 53</b> - Sólido gerado pela rotação do quadrado.....	71
<b>Figura 54</b> - Semicírculo no $R^2$ .....	71
<b>Figura 55</b> - Semicírculo no $R^3$ .....	72
<b>Figura 56</b> - Esfera gerada pela rotação do semicírculo.....	72
<b>Figura 57</b> - Figura composta no $R^2$ .....	74

<b>Figura 58</b> - Figura composta no $R^3$ .....	74
<b>Figura 59</b> - Sólido gerado pela rotação do polígono composto .....	75
<b>Figura 60</b> - Área da figura composta .....	75

## SUMÁRIO

<b>1INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>2HISTÓRIA DE PAPPUS .....</b>	<b>15</b>
<b>3NOÇÕES DE CÁLCULO INTEGRAL E OS TEOREMAS DE PAPPUS</b>	<b>17</b>
<b>3.1 Integralde Riemann.....</b>	<b>17</b>
<b>3.2Áreaentre duas curvas .....</b>	<b>19</b>
<b>3.3Comprimento de um arco.....</b>	<b>27</b>
<b>4VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....</b>	<b>35</b>
<b>4.1Aproximação por cilindros.....</b>	<b>37</b>
<b>4.2Aproximação por cascas.....</b>	<b>40</b>
<b>4.3Áreas de superfícies de revolução.....</b>	<b>42</b>
<b>4.4Centros de Massa .....</b>	<b>45</b>
<b>4.5Teorema de Pappus – Volume .....</b>	<b>54</b>
<b>4.6Teorema de Pappus – Área .....</b>	<b>57</b>
<b>5APLICAÇÃO.....</b>	<b>60</b>
<b>5.1Atividades propostas .....</b>	<b>61</b>
<b>5.2 Relato da apresentação das atividades .....</b>	<b>76</b>
<b>5.2.1 Apresentação dos Teoremas .....</b>	<b>77</b>
<b>5.2.2 Apresentação e resolução da atividade 1 .....</b>	<b>77</b>
<b>5.2.3 Apresentação e resolução da atividade 2 .....</b>	<b>78</b>
<b>5.2.4 Apresentação e resolução da atividade 3 .....</b>	<b>79</b>
<b>5.2.5 Apresentação e resolução da atividade 4 .....</b>	<b>79</b>
<b>5.3Percepções a respeito da aplicação das atividades.....</b>	<b>80</b>
<b>6CONCLUSÃO .....</b>	<b>81</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>83</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo da área de superfícies e do volume de sólidos que podem ser obtidos a partir da rotação de uma figura em torno de um eixo ocorre tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior. Revisando a literatura, é possível notar que, no Ensino Médio, muitas das práticas correntes dos professores de Matemática apontam a apresentação de fórmulas aos alunos para o trabalho com esses conteúdos. No Ensino Superior, esse estudo fica mais abrangente e complexo, já que tais assuntos são aprofundados com o uso de recursos do Cálculo Integral.

A partir desse contexto, identificamos a possibilidade de utilizar os Teoremas de Pappus para trabalhar o cálculo de volume e da área no Ensino Médio, tentando aproximar essas duas formas de abordagem desse conteúdo. Assim, o intuito dessa dissertação é o de fazer uma proposta diferente para o cálculo da área de superfícies e do volume de sólidos obtidos a partir da rotação de uma figura em torno de um eixo, a partir das aplicações dos Teoremas de Pappus, sem a necessidade do uso de recursos matemáticos sofisticados envolvidos nas demonstrações, ambientados no Cálculo Integral.

Com base nessa proposta, foram elaboradas atividades relativas a esses conteúdos para trabalhar com alunos do Ensino Médio. Optamos por trabalhar com a 3ª série, pois já possuem os conceitos prévios de Geometria necessários para a abordagem dessa teoria: áreas de polígonos, conceito de círculo e semicírculo e o cálculo de suas áreas, definição de distância, rotação de uma figura em torno de seu eixo e centro de massa de uma figura. Essas atividades elaboradas foram aplicadas à uma turma com 35 alunos de uma escola na cidade de Bauru, os quais receberam convite para participar das atividades.

Uma contextualização temporal dos objetos abordados neste trabalho é feita no capítulo 2, por meio de uma apresentação sucinta da história de Pappus de Alexandria e a sua contribuição para o ensino da Matemática. No capítulo 3, apresentamos os conceitos de integral para determinar área entre curvas e comprimento de arcos.

No quarto capítulo, abordamos os conceitos de cálculo de volume, utilizando aproximação por cilindros e por cascas, cálculo de áreas de superfícies de revolução, determinação de centro de massa e algumas demonstrações dos Teoremas de Pappus com o auxílio do Cálculo Integral. Por se tratar de um texto voltado para professores do Ensino Médio, apresentamos um texto mais sucinto, omitindo demonstrações e o rigor matemático exigido em um curso de Cálculo para o Ensino Superior.

No quinto capítulo, apresentaremos uma proposta de abordagem deste conteúdo no Ensino Médio, a partir dos Teoremas de Pappus, por meio de atividades que elaboramos, utilizando como recurso facilitador o *software* livre de geometria dinâmica GeoGebra. Ainda, descrevemos como foi a aplicação dessas atividades com os alunos e a percepção do pesquisador quanto aos resultados.

## 2 HISTÓRIA DE PAPPUS

Neste capítulo faremos um breve resumo da vida e da obra de Pappus de Alexandria, que foi importante geômetra da civilização antiga grega e dentre as muitas de suas contribuições, demonstrou os teoremas que abordaremos neste trabalho.

Segundo Boyer (1974), Pappus de Alexandria nasceu na Grécia no final do século II d.C. Os teoremas de Pappus para área de superfícies e volume de sólidos de revolução são encontrados em vários livros de Cálculo. Sucessor de grandes nomes da época como Ptolomeu, Apolônio, Euclides e Arquimedes, que fizeram parte da primeira fase da Escola de Alexandria, Pappus de Alexandria fez parte da segunda fase da Escola de Alexandria e é considerado por muitos como um dos últimos grandes matemáticos gregos. No ano 320 d.C. escreveu “A Coleção Matemática”, considerada sua principal obra e que originalmente era composta por oito livros. “A Coleção Matemática” é um resumo de alguns conhecimentos anteriores, enriquecida de comentários e novas proposições e foi o último tratado matemático antigo significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a Geometria não teve sucesso. Obras matemáticas continuaram a ser escritas por mais de mil anos, mas os autores que vieram depois de Pappus nunca chegaram ao seu nível. A morte de Pappus teve forte impacto em Alexandria, tanto que foi considerado por muitos como o fim de Alexandria como grande centro de Matemática.

Desta coleção destaca-se o livro VII, chamado Tesouro da Análise, onde, entre outras coisas, Pappus faz afirmações sobre área de superfícies e volume de sólidos de revolução. Trata-se de afirmações, pois o livro não traz nenhuma demonstração. Heath (1921) relata que tais demonstrações estariam num possível décimo segundo livro da coleção. Sendo assim,

imagina-se que a obra completa de “A Coleção Matemática” continha 12 volumes, porém os demais livros nunca foram encontrados. Com as afirmações feitas por Pappus, era possível determinar o volume um sólido de revolução conhecendo a sua área e a distância de seu centro de gravidade até o eixo de rotação. Assim como também era possível determinar a área de sua superfície conhecendo seu perímetro e a distância de seu centro de gravidade até o eixo de rotação.

No livro VII consta um teorema, não demonstrado, que diz: “Se uma curva plana fechada gira em torno de uma reta no mesmo plano que não a corta, o volume do sólido gerado é obtido tomando-se o produto entre a área da região limitada pela curva dada e a distância percorrida durante a revolução pelo centro de massa da área”.

Com este teorema, conhecendo-se o volume do sólido de revolução e a área da seção transversal da figura que gerou este sólido, é possível obter a localização do centro de massa desta figura.

Neste mesmo volume VII de “A Coleção Matemática” se encontra um teorema análogo que diz: “a área da superfície gerada pela revolução de uma curva em torno de uma reta coplanar que não a corta é igual ao produto do comprimento da curva pela distância percorrida pelo centro de massa da região definida pela curva durante a revolução”.

Paul Guldin (1577-1643), autor de “Centrobarica”, obra cujo foco principal era o estudo dos centros de gravidade de figuras geométricas, demonstrou os dois teoremas (BUSARD, 1970). Nesse estudo, não traremos suas demonstrações, mas as faremos utilizando o Cálculo Integral.

### 3 NOÇÕES DE CÁLCULO INTEGRAL E OS TEOREMAS DE PAPPUS

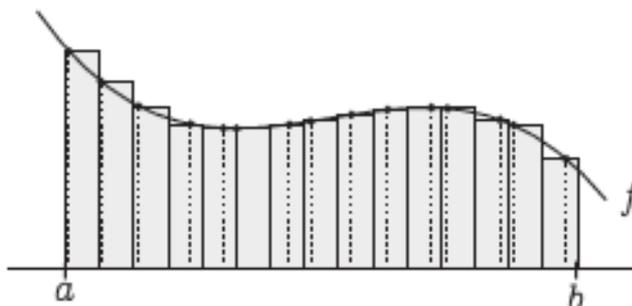
Neste capítulo apresentaremos os conceitos de Integral de Riemann, Área entre curvas e Comprimento de Arcos. Tais conceitos são fundamentais para a compreensão dos assuntos abordados e para as demonstrações dos Teoremas de Pappus.

#### 3.1 Integralde Riemann

De modo geral, a área da região  $R$  delimitada pelo gráfico de uma função positiva  $f : [a, b] \rightarrow R$  pode ser definida via um processo de limite.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , escolhemos  $(a, b): x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , que formam uma partição de  $[a, b]$ , que é ilustrada na Figura 1.

**Figura 1-** Partições de uma função positiva



Fonte: FRIEDLI, 2013, p. 145.

Em seguida, escolhemos um ponto  $x_j^*$  em cada intervalo  $[x_{j-1}, x_j]$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) e definimos a soma de Riemann  $I_n$  por:

$$I_n = \sum_{j=1}^n f(x_j^*) \Delta x_j \quad (1)$$

Sendo  $f$  uma função positiva,  $I_n$  aproxima a área abaixo do gráfico de  $f$  pela soma das áreas dos retângulos, em que o  $j$ -ésimo retângulo tem como base  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ , e como altura o valor da função no ponto  $x_j^*$ , ou seja,  $f(x_j^*)$  (Na Figura 1, os pontos  $x_j$  foram escolhidos equidistantes).

A integral definida de  $f$  em  $[a, b]$  é obtida considerando  $I_n$  para uma sequência de partições em que o tamanho dos intervalos  $\Delta x_j$  tende a zero na medida em que  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 1.** A função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **integrável** se o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  existir, qualquer que seja a sequência de partições em que  $\max_j \Delta x_j \rightarrow 0$ , e qualquer que seja a escolha de  $x_j^* \in [x_{j-1}, x_j]$ . Quando  $f$  for integrável, o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  é chamado de **integral (de Riemann)** de  $f$ , ou **integral definida** de  $f$  e denotada por:

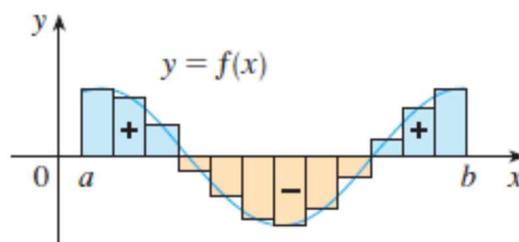
$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Os números  $a$  e  $b$  são chamados de limites de integração.

Se a função  $f$  assumir valores positivos e negativos, como na Figura 2, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão

acima do eixo x e oposto da soma das áreas dos retângulos dos retângulos que estão abaixo do eixo x.

**Figura 2** - Função  $f$  que assume valores positivos e negativos



Fonte: STEWART, 2013, p. 338.

**Observação 1.** Estabelecemos a integral definida para uma função integrável, mas nem todas as funções são integráveis. O teorema a seguir mostra que a maioria das funções que ocorrem comumente são de fato integráveis.

**Teorema 1.** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$ , ou tiver apenas um número finito de descontinuidades de saltos, então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , ou seja,

a integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  existe.

A demonstração desse teorema é realizada para cursos avançados, não sendo o foco deste trabalho.

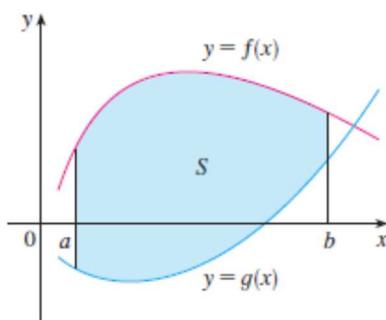
### 3.2 Área entre duas curvas

Consideremos uma região  $S$  localizada entre os gráficos de duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , entre as retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f$  e  $g$

são funções contínuas<sup>1</sup> e  $f(x) \geq g(x)$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Dividimos  $S$  em  $n$  faixas de larguras iguais e, então, aproximamos a  $i$ -ésima faixa por um retângulo com base  $\Delta x$  e altura  $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ , conforme mostra a Figura 3. Poderíamos ainda tomar todos os pontos extremos direitos e esquerdos como pontos de amostragem e, neste caso,  $x_i = x_i^*$ . A soma de Riemann(3) é, portanto, uma aproximação intuitiva do valor da área de  $S$ :

$$\sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x \quad (3)$$

**Figura 3-** Integral para área



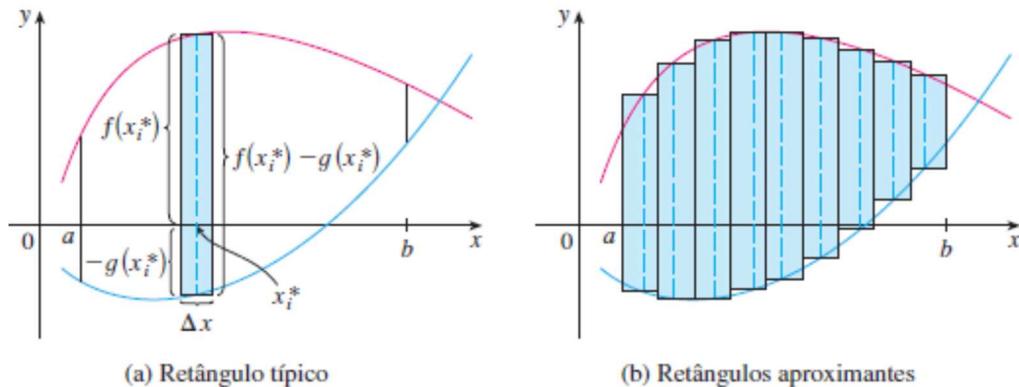
$$S = \{(x, y) / a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Fonte: STEWART, 2013, p. 382.

<sup>1</sup> De acordo com Stewart (2013), uma função  $f$  é **contínua em um número  $a$**  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Implicitamente, essa definição requer três coisas para a continuidade de  $f$  em  $a$ :

- $f(a)$  está definida (isto é,  $a$  está no domínio de  $f$ );
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**Figura 4** - Retângulo típico e retângulos aproximantes



Fonte: STEWART, 2013, p. 382.

Essa aproximação parece melhorar quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 2.** Dadas as funções  $f$  e  $g$  nas condições estabelecidas anteriormente, definimos a área da região  $S$  como o valor-limite da soma das áreas desses retângulos aproximados, isto é:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x \quad (4)$$

Reconhecemos o limite em (4) como a integral definida de  $f - g$  em  $[a, b]$ . A área da região limitada pelos gráficos das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , as retas  $x = a$  e  $x = b$ , onde  $f$  e  $g$  são contínuas e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , é denotada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (5)$$

**Observação 2.** No caso especial onde  $g(x) \equiv 0$ ,  $S$  é a região sob o gráfico de  $f$ , e a nossa definição geral de área (4) é reduzida à seguinte definição:

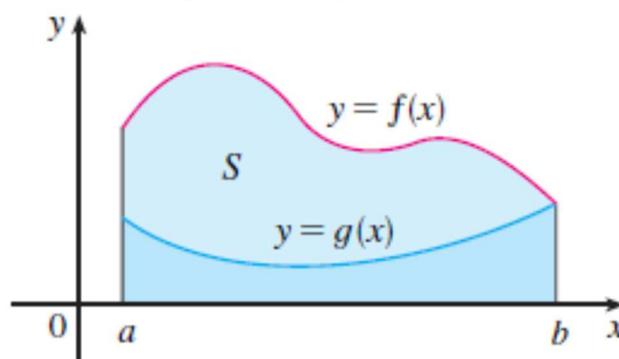
**Definição 3.** A área  $A$  da região  $S$  que está sob o gráfico de uma função contínua e positiva  $f$  é o limite da soma das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*)] \Delta x \quad (6)$$

**Observação 3.** No caso em que  $f$  e  $g$  forem ambas positivas, podemos ver na Figura 5 por que a Definição 2 é válida:

$$\begin{aligned} A &= [\text{área sob } y = f(x)] - [\text{área sob } y = g(x)] = \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \end{aligned} \quad (7)$$

Figura 5 - Função positiva

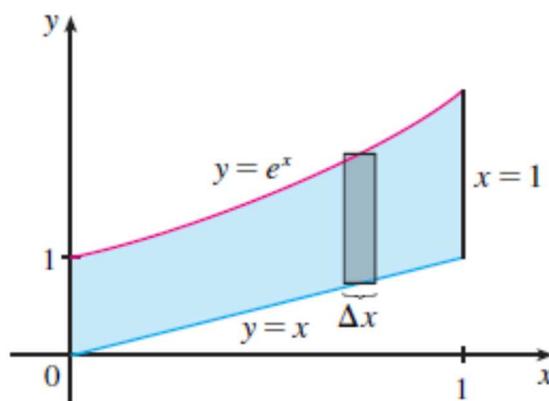


Fonte: STEWART, 2013, p. 382.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos.

**Exemplo 1.** Encontre a área da região limitada por cima por  $y = e^x$ , e por baixo por  $y = x$ , e limitada pelos lados por  $x = 0$  e  $x = 1$ .

**Figura 6** - Retângulo típico



Fonte: STEWART, p. 383.

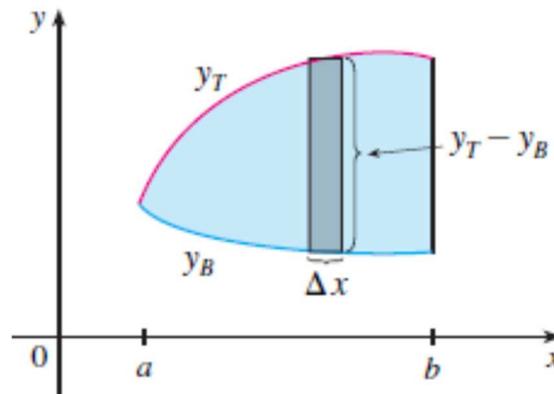
**Solução:** A região é mostrada na Figura 6. A curva limitante superior é  $y = e^x$  e a curva limitante inferior,  $y = x$ . Então, usamos a fórmula (5) da área com  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x$ ,  $a = 0$  e  $b = 1$ :

$$A = \int_0^1 (e^x - x) dx = \left[ e^x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1,5$$

Na Figura 7, desenhamos um retângulo aproximante típico com largura  $\Delta x$  que nos lembra do procedimento pelo qual a área é definida em (2). Em geral, quando calculamos a área por meio de uma integral, é útil esboçar a região para identificar a curva superior  $y_T$ , a curva inferior  $y_B$  e um retângulo aproximante típico, como na Figura 7. Então, a área de um retângulo típico é  $(y_T - y_B)\Delta x$  e a equação seguinte resumem o procedimento de adição (no sentido de limite) das áreas de todos os retângulos típicos:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (y_T - y_B) \Delta x = \int_a^b (y_T - y_B) dx \quad (8)$$

**Figura 7** - Retângulo aproximante



Fonte: STEWART, p. 383.

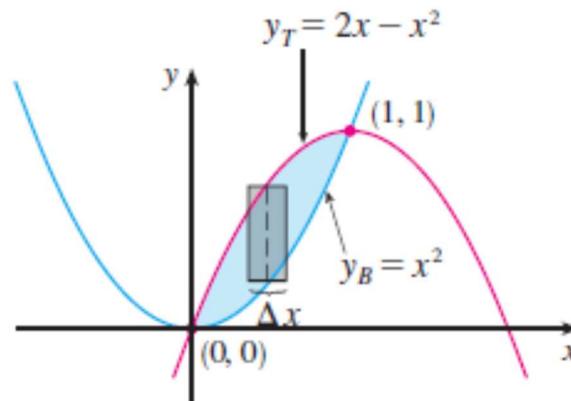
Observe que na Figura 7 o limite esquerdo se reduz a um ponto, enquanto na Figura 5 o limite direito é que se reduz a um ponto. No próximo exemplo, ambos os limites laterais se reduzem a um ponto, de modo que a primeira etapa é encontrar  $a$  e  $b$ .

**Exemplo 2.** Encontre a área da região formada pela intersecção das parábolas  $y = x^2$  e  $y = 2x - x^2$ .

**Solução:** *Primeiro, vamos encontrar os pontos de intersecção das parábolas, resolvendo suas equações simultaneamente. Isso resulta em  $x^2 = 2x - x^2$  ou  $2x^2 - 2x = 0$ . Os pontos de intersecção são  $(0,0)$  e  $(1,1)$ .*

*Verificamos na Figura 8 que os limites superior e inferior são:  $y_T = 2x - x^2$  e  $y_B = x^2$ .*

**Figura 8** - A área de um retângulo típico



Fonte: STEWART, p. 383.

A área do retângulo típico é:

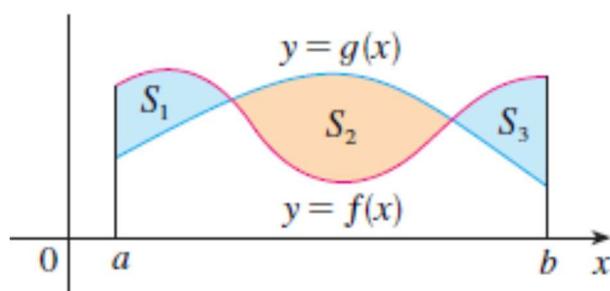
$$(y_T - y_B)\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\Delta x$$

e encontra-se entre a região  $x = 0$  e  $x = 1$ . Então, a área total é:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = \\ &= 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Observação 4.** Para encontrarmos a área  $S$  de  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, determinada pelos gráficos das funções  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ , onde  $f(x) \geq g(x)$  para alguns valores de  $x$ , mas  $g(x) \geq f(x)$  para outros valores de  $x$ , dividimos determinada região em várias sub-regiões  $S_1, S_2, \dots$  com áreas  $A_1, A_2, \dots$ , como mostrado na Figura 9.

**Figura 9** - Função não positiva



Fonte: STEWART, 2013, p. 384.

Em seguida, definimos a área da região  $S$  como a soma das áreas das regiões menores  $S_1, S_2, \dots$ , ou seja,  $A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \dots$ . Considerando:

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x), & \text{onde } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x), & \text{onde } g(x) \geq f(x) \end{cases} \quad (9)$$

temos a seguinte expressão para  $A$ :

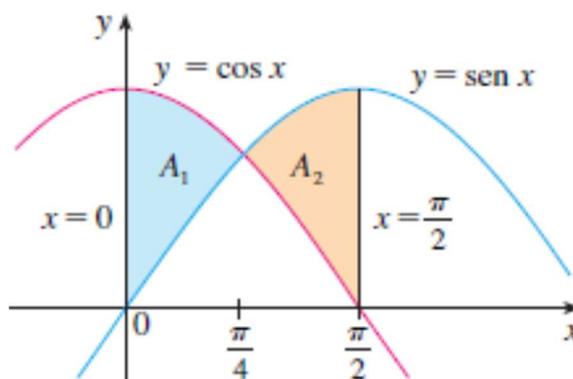
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (10)$$

No entanto, ao calcular a área conforme a expressão (9), ainda temos que dividi-la em integrais correspondentes a  $A_1, A_2, \dots$

**Exemplo 3.** Encontre a área da região formada pela intersecção das curvas  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Solução:** Os pontos de intersecção ocorrem quando  $\sin x = \cos x$ , isto é, quando  $x = \frac{\pi}{4}$  (considerando que  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ). A região é esboçada na Figura 10.

**Figura 10** - Área de função não positiva



Fonte: STEWART, 2013, p. 385.

Observe que  $\cos x \geq \sin x$ , quando  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ , mas  $\sin x \geq \cos x$ ,

quando  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Assim, a área requerida é:

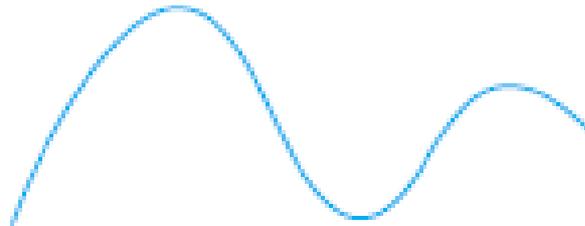
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx = A_1 + A_2 = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = \\
 &= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
 &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 \right) + \left( -0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

Às vezes pode ser difícil, ou mesmo impossível, encontrar os pontos exatos de intersecção de duas curvas. Nestes casos podemos utilizar uma calculadora gráfica ou um computador para encontrar valores aproximados para os pontos de intersecção e, então, prosseguir como anteriormente.

### 3.3 Comprimento de um arco

Uma maneira prática para medirmos um arco é colocar um pedaço de barbante sobre uma curva, como na Figura 12, e então medir o comprimento do barbante com algum instrumento de medição.

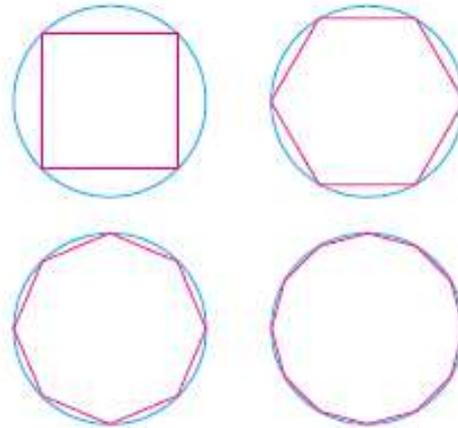
**Figura 11**-Comparativo de medição



Fonte: STEWART, p. 488.

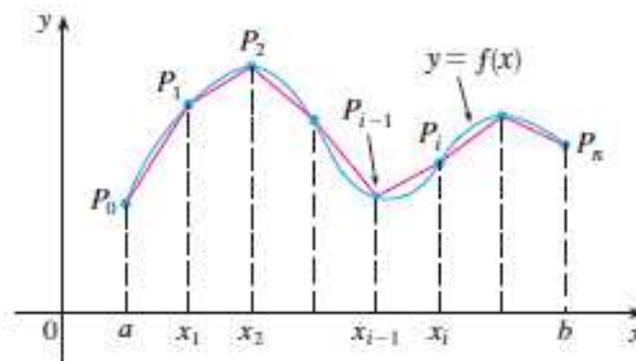
Mas isso pode se tornar complicado, dependendo da curva. Precisamos de uma definição exata para o comprimento de um arco de uma curva, da mesma maneira como desenvolvemos definições de área e volume.

Se a curva é uma poligonal, podemos facilmente encontrar seu comprimento apenas somamos os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal. Definiremos o comprimento de uma curva geral primeiro aproximando-a por uma poligonal e, então, tomando o limite quando o número de segmentos da poligonal aumenta. Esse processo é familiar para o caso de um círculo, onde a circunferência é o limite dos comprimentos dos polígonos inscritos (veja a Figura 13).

**Figura 12** - Limite comprimentos dos polígonos

Fonte: STEWART, p. 488.

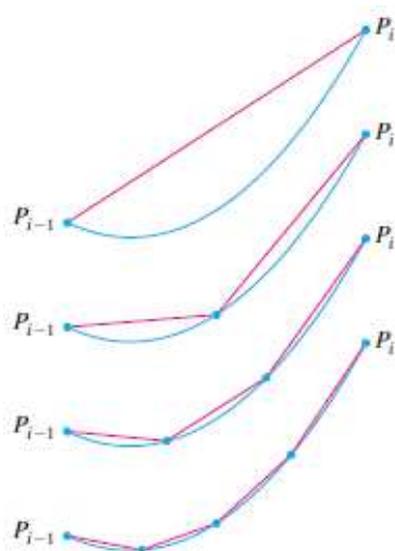
Agora, suponhamos que uma curva  $C$  seja definida pela equação  $y = f(x)$ , onde  $f$  é contínua e  $a \leq x \leq b$ . Obtemos uma poligonal de aproximação para  $C$  dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos com extremidades  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e com larguras iguais a  $\Delta x$ . Se  $y_i = f(x_i)$ , então o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  está em  $C$  e a poligonal com vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , ilustrada na Figura 13, é uma aproximação para  $C$ .

**Figura 13** - Aproximação para  $C$ 

Fonte: STEWART, p. 488.

O comprimento  $L$  de  $C$  é aproximadamente o mesmo dessa poligonal e a aproximação fica melhor quando  $n$  aumenta. Veja a Figura 15, onde o arco da curva entre  $P_{i-1}$  e  $P_i$  foi ampliado e as aproximações com valores sucessivamente menores de  $\Delta x$  são mostradas.

**Figura 14** -Aproximação poligonal



Fonte: STEWART, p. 488.

**Definição 4.** Definimos **comprimento  $L$**  da curva  $C$  com equação  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , como o limite dos comprimentos dessas poligonais inscritas (se o limite existir):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \quad (11)$$

Observamos que o procedimento para a definição de comprimento de arco é muito similar àquele que usamos para definir a área, dividimos a curva em um número maior de partes pequenas e, então, encontramos os comprimentos aproximados das partes pequenas e os somamos. Finalmente, tomamos o limite com  $n \rightarrow \infty$ .

A definição de comprimento de arco dada pela Equação (11) não é muito conveniente para propósitos computacionais, mas podemos deduzir uma fórmula integral para  $L$  no caso em que  $f$  tem uma derivada contínua em  $[a, b]$ .

Se tomarmos  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ , então,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (12)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio<sup>2</sup> para  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , descobrimos que existe um número  $x_i^*$  entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$  tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}), \quad (13)$$

isto é,

$$\Delta y_i = f'(x_i^*) \Delta x. \quad (14)$$

Então, temos:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x, \text{ já}$$

que  $\Delta x > 0$ .

Logo, pela Definição 4,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x \quad (15)$$

---

<sup>2</sup>Seja  $f$  uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1.  $f$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .

2.  $f$  é derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ .

Então, existe um número  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

Reconhecemos essa expressão como igual a:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (16)$$

Pela definição de integral definida, essa integral existe porque a função  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$  é contínua. Então, demonstramos o seguinte teorema:

**Teorema 2.** Fórmula do Comprimento do Arco.

Se  $f'$  for contínua em  $[a, b]$ , então o **comprimento da curva**  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , é:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (17)$$

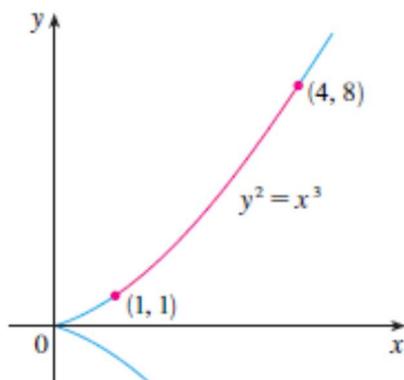
**Observação 5.** Se usarmos a notação de Leibniz para as derivadas, podemos escrever a fórmula do comprimento de arco da seguinte forma:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (18)$$

Antes de iniciar o Capítulo 4, apresentaremos um exemplo da teoria abordada nesta seção.

**Exemplo 4.** Calcule o comprimento de arco da parábola semicúbica  $y^2 = x^3$  entre os pontos  $(1, 1)$  e  $(4, 8)$ , (veja a Figura 15).

**Figura 15** - Arco da parábola semicúbica



Fonte: STEWART, p. 489.

**Solução:** Para a porção superior da curva, temos,

$$y = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

E, assim, substituindo na fórmula do comprimento de arco,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

Se substituirmos  $u = 1 + \frac{9}{4}x$ , então  $du = \frac{9}{4}dx$ .

Quando  $x = 1$ ,  $u = \frac{13}{4}$ ; quando  $x = 4$ ,  $u = 10$ . Portanto,

$$L = \frac{4}{9} \int_{13/4}^{10} \sqrt{u} du = \left[ \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{13/4}^{10} = \frac{8}{27} \left[ 10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{27} (80\sqrt{10} - 13\sqrt{13})$$

**Observação 6.** Se uma curva tem a equação  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , e  $g'(y)$  é contínua, então, pela mudança dos papéis de  $x$  na Equação (17) ou Equação (18), obtemos a seguinte fórmula para seu comprimento:

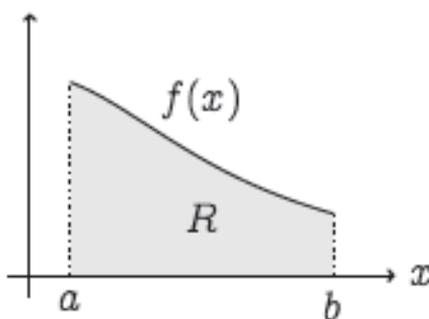
$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (19)$$

## 4 VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas algumas formas de determinar o volume de um sólido de revolução, utilizando aproximação por cilindros e aproximação por cascas. Além disso, apresentaremos também área de superfície, centro de massa e as demonstrações dos Teoremas de Pappus para área e volume.

Consideremos uma função positiva no intervalo  $[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Seja  $R$  a região delimitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$ , como ilustrado na Figura 16:

Figura 16 - Função positiva



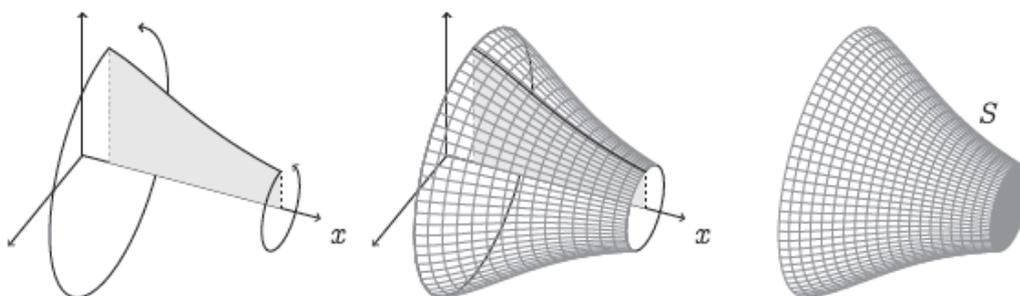
Fonte: FRIEDLI, p. 160.

Sabemos que a área de  $R$  é dada pela integral de Riemann:

$$\text{área}(R) = \int_a^b f(x) dx \quad (20)$$

Consideremos agora o sólido  $S$  obtido girando a região  $R$  em torno do eixo  $x$ , como na Figura 17:

**Figura 17**-Região R em torno do eixo x



Fonte: FRIEDLI, p. 160.

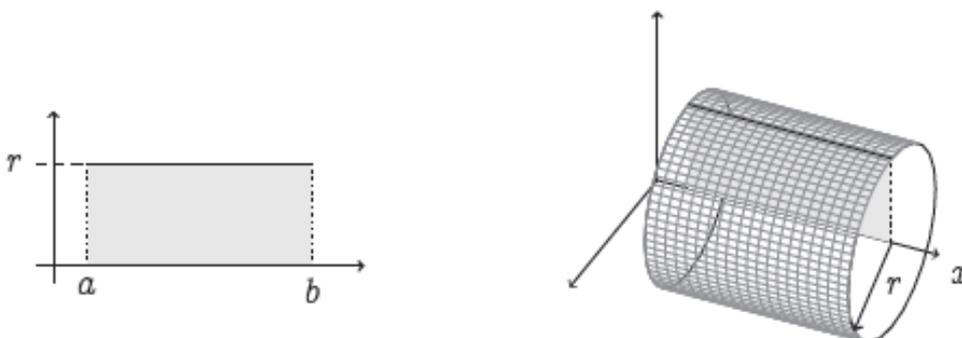
Sólidos que podem ser gerados dessa maneira, girando uma região em torno de um eixo, são chamados **sólidos de revolução**. Veremos situações em que a região não precisa ser delimitada pelo gráfico de uma função e que o eixo não precisa ser o eixo x.

Vamos desenvolver métodos para calcular o volume  $V(S)$  de um sólido de revolução  $S$ .

Antes de começar, consideremos um caso particular, que será também usado para o caso geral.

**Exemplo 5.** Suponha que  $f$  é uma constante em  $[a, b]$ , isto é:  $f(x) = r > 0$ , para todo  $x \in [a, b]$ , conforme ilustrado na Figura 18:

**Figura 18** - Função constante



Fonte: FRIEDLI, p. 161.

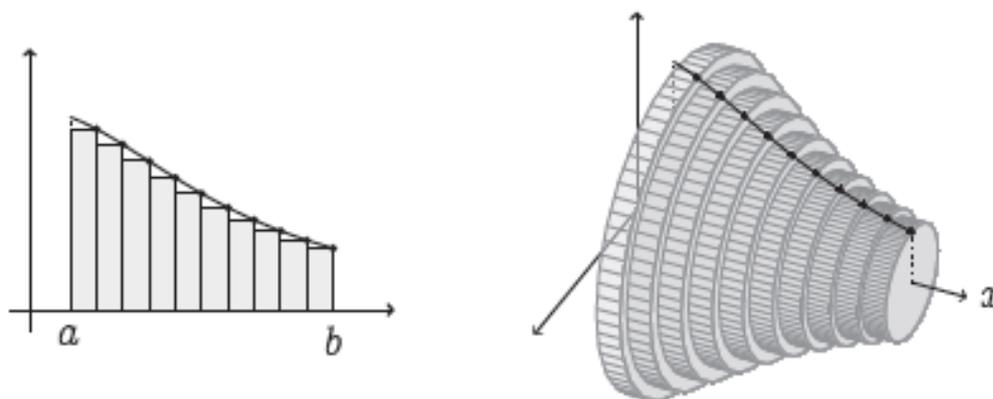
Neste caso, o sólido gerado  $S$  é um cilindro. A sua base é circular de raio  $r$ , e a sua altura é  $b - a$ . Pela fórmula já conhecida do volume de um cilindro,  $V(S) = (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = \pi r^2 (b - a)$ .

Queremos agora calcular  $v(s)$  para um sólido de revolução qualquer. O procedimento será o mesmo que levou à própria definição da Integral de Riemann: aproximaremos  $S$  por sólidos mais elementares. Usaremos dois tipos de sólidos elementares: cilindros e cascas.

#### 4.1 Aproximação por cilindros

Voltemos para o sólido de revolução da seção anterior. Um modo de decompor o sólido  $S$  é aproximá-lo por uma união de fatias verticais, concentradas no eixo  $x$ , como ilustrado na Figura 19:

**Figura 19** - Fatias verticais

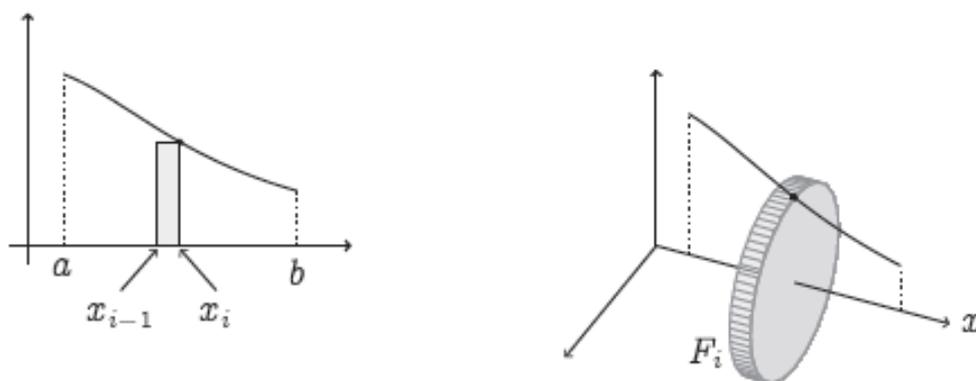


Fonte: FRIEDLI, p. 161.

Cada fatia é obtida girando um retângulo cujo tamanho é determinado pela função  $f$ . Para ser mais preciso, escolhemos pontos no intervalo  $[a, b]$ ,  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , e a cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  associamos o retângulo cuja base tem tamanho  $(x_i - x_{i-1})$  e cuja altura é

$f(x_i)$ . Ao girar em torno do eixo  $x$ , cada um desses retângulos gera uma fatia cilíndrica  $F_i$ , como no Exemplo 5 (ver Figura 20).

**Figura 20** -Retângulo cilíndrico



Fonte: FRIEDLI, p. 162.

Mas, como a fatia  $F_i$  é um cilindro de raio  $f(x_i)$  e de altura  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , o seu volume é dado por  $V(F_i) = \pi f(x_i)^2 \Delta x_i$ . Logo, o volume do sólido  $S$  pode ser aproximado pela soma dos volumes das fatias, que é uma soma de Riemann:

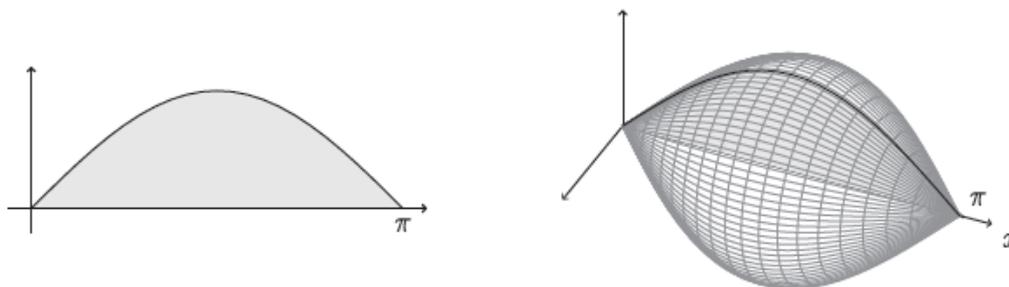
$$\sum_{j=1}^n V(F_j) = \sum_{i=1}^n \pi f(x_i)^2 \Delta x_i \quad (21)$$

Quando o número de retângulos  $n \rightarrow \infty$  de maneira de simultaneamente  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , esta soma converge para uma Integral de Riemann que permite calcular o volume do sólido  $S$ :

$$V(S) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx \quad (22)$$

**Exemplo 6.** Seja  $R$  a região delimitada pela curva  $y = \sin x$ , pelo eixo  $x$ , e pelas duas retas verticais  $x = 0$  e  $x = \pi$ . Vamos calcular o volume do sólido  $S$  obtido girando  $R$  em torno do eixo  $x$  (ver Figura 21).

**Figura 21-** Retas verticais



Fonte: FRIEDLI, p. 162.

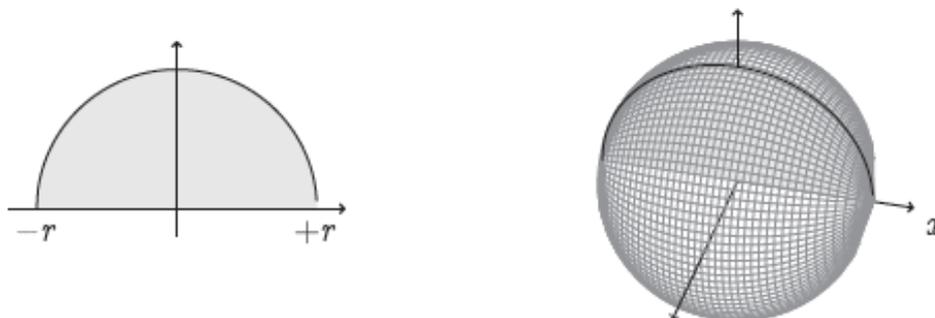
**Solução:** Utilizando a fórmula (22), o volume do sólido é dado pela integral:

$$V = \int_0^{\pi} \pi (\sin x)^2 dx = \pi \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi^2$$

O método permite calcular volumes clássicos da geometria.

**Exemplo 7.** Seja  $r > 0$  fixo e  $R$  a região delimitada pela semicircunferência  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , entre  $x = -r$  e  $x = +r$ , e pelo eixo  $x$ . O sólido  $S$  obtido girando  $R$  em torno do eixo  $x$  é uma esfera de raio  $r$  centrada na origem, conforme é mostrado na Figura 22. Vamos calcular o seu volume.

**Figura 22-** Esfera de raio  $r$  centrada



Fonte: FRIEDLI, p. 163.

**Solução:** O volume da esfera é dado pela integral:

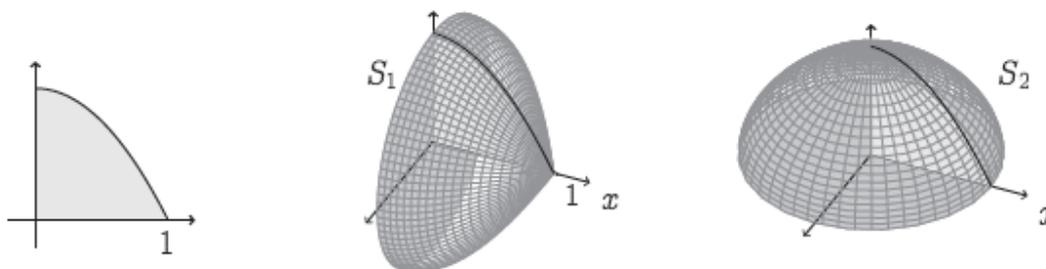
$$V = \int_{-r}^{+r} \pi \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{+r} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

## 4.2 Aproximação por cascas

Os exemplos considerados na seção anterior partiam de uma decomposição do sólido usando fatias cilíndricas. Veremos agora outro tipo de decomposição, usando cascas.

**Exemplo 8.** Consideremos a região  $R$  do primeiro quadrante, delimitada pelo gráfico da função  $f(x) = 1 - x^2$ . Consideremos os sólidos  $S_1$  e  $S_2$ , obtidos rodando  $R$  em torno, respectivamente, do eixo  $x$  e  $y$ , e calcule o volume.

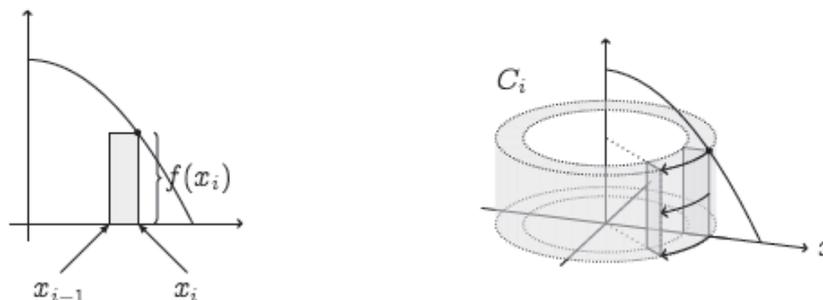
**Figura 23** - Aproximação por cascas



Fonte: FRIEDLI, p. 163.

**Solução:** Vamos calcular o volume  $v(S_2)$  com uma integral obtida a partir de uma soma de cascas. Cascas são obtidas pela rotação de retângulos verticais, em torno do eixo  $y$ , como ilustrado na Figura 24.

**Figura 24**-Retângulos verticais



Fonte: FRIEDLI, p. 165.

O volume da casca  $C_i$  pode ser calculado pela diferença dos volumes de dois cilindros: o externo tem raio  $x_i$ , o interno tem raio  $x_{i-1}$ , e ambos têm altura  $f(x_i)$ . Logo,

$$V(C_i) = \pi x_i^2 f(x_i) - \pi x_{i-1}^2 f(x_i) = \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) f(x_i) = \pi (x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

Quando  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  for muito pequeno, isto é, quando  $x_i$  e  $x_{i-1}$  forem muito próximos, podemos aproximar  $x_i + x_{i-1}$  por  $2x_i$ . Logo,

$$V(C_i) \cong 2\pi x_i f(x_i) \Delta x_i.$$

*Essa fórmula é fácil de entender observando que a casca  $C_i$  pode ser obtida torcendo um paralelepípedo cuja base é um retângulo de base  $(x_i - x_{i-1})f(x_i)$  e de altura dada pelo comprimento da circunferência do círculo de raio  $x_i$ , isto é,  $2\pi x_i$ . (Atenção: esse raciocínio é correto somente se a base do retângulo é pequena em relação à sua distância ao eixo de rotação).*

*Portanto, o volume do sólido  $S_2$  pode ser calculado via integral associada às somas de Riemann dos  $V(C_i)$ , isto é:*

$$V(S_2) = \int_0^1 2\pi x f(x) dx \quad (23)$$

*Assim, teremos:*

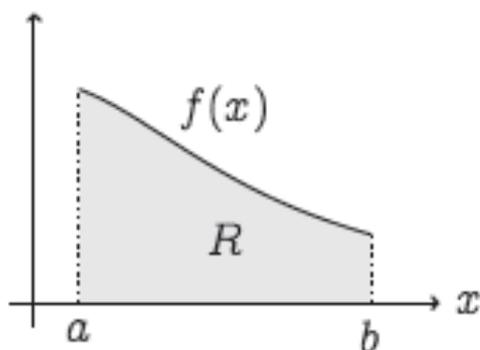
$$V(S_2) = \int_0^1 2\pi x (1 - x^2) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Com isso, podemos concluir que podemos calcular volumes de sólidos de revolução usando cilindros ou cascas.

### 4.3 Áreas de superfícies de revolução

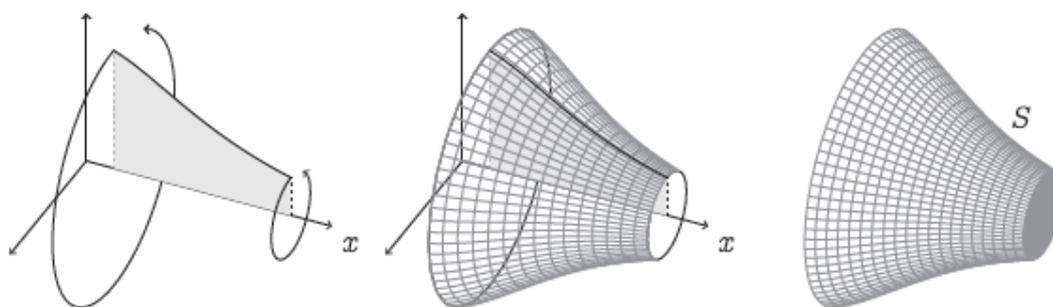
Suponhamos que se queira calcular a área  $A(S)$  da superfície do sólido  $S$  obtido girando a região  $R$  em torno do eixo  $x$ , como mostramos Figuras 25 e 26 (sem os dois discos de frente e de trás).

**Figura 25** - Áreas de superfícies



Fonte: FRIEDLI, p. 160.

**Figura 26** - Áreas de superfícies



Fonte: FRIEDLI, p. 160.

Aproximaremos a área  $A(S)$  por uma soma de áreas mais simples. Para decompor a área em áreas mais elementares, foi escolhida a partição  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , de  $[a, b]$  e para cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , consideremos o anel  $J_i$  obtido girando o segmento ligando  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  a  $(x_i, f(x_i))$  em torno do eixo  $x$  (ver Figura 27):

Figura 27 - Áreas mais elementares



Fonte: FRIEDLI, p. 169.

Pode ser verificado que o anel  $J_i$  tem uma área dada por:

$$A(J_i) = \pi \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} (f(x_i) + f(x_{i-1})). \quad (24)$$

Quando  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  for suficientemente pequeno, e se  $f$  for contínua,  $f(x_i) + f(x_{i-1})$  pode ser aproximada por  $2f(x_i)$ . Logo, colocando  $\Delta x_i$  em evidência dentro da raiz, temos:

$$A(J_i) \cong 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + \left( \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} \right)^2} \Delta x_i \quad (25)$$

Quando  $\Delta x_i$  for pequeno, o quociente  $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$  pode ser aproximado por  $f'(x_i)$ . Logo, a área total pode ser aproximada pela soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^n A(J_i) \cong \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} \Delta x_i \quad (26)$$

Quando  $n \rightarrow \infty$  e todos os  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , a soma de Riemann acima converge para a integral:

$$A(S) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (27)$$

**Definição 5.** Dada uma função positiva no intervalo  $[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , definimos a **área da superfície** obtida pela rotação da curva  $y_i = f(x_i)$ , em torno do eixo  $x$  como:

$$A(S) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (28)$$

**Exemplo 9.** Considere a superfície gerada pela rotação da curva  $y = \sqrt{x}$  em torno do eixo  $x$ , entre  $x = 0$  e  $x = 1$ . Calcule a sua área.

**Solução:** A sua área é dada pela integral:

$$A(S) = \int_0^1 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4x} dx = \frac{\pi}{6} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

#### 4.4 Centros de Massa

Iremos encontrar aqui o ponto  $P$  no qual uma placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, como na Figura 28.

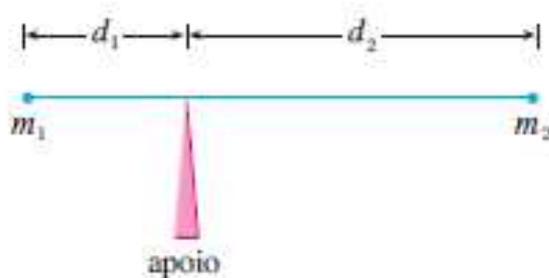
Figura 28 - Ponto P



Fonte: STEWART, p.503.

Esse ponto é chamado **centro de massa** ou **centro de gravidade** da placa. Inicialmente, consideramos a situação mais simples mostrada na Figura 29, onde duas massas  $m_1$  e  $m_2$  são presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos e a distâncias  $d_1$  e  $d_2$  do apoio.

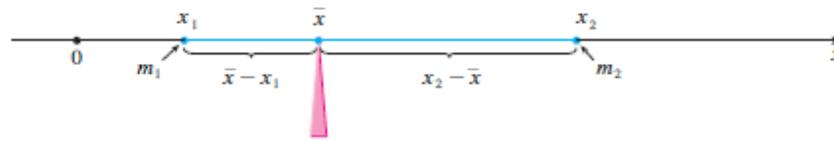
Figura 29 - Massa de gravidade da placa



Fonte: STEWART, p.503.

O bastão ficará em equilíbrio se  $m_1 d_1 = m_2 d_2$ . Este é um fato descoberto experimentalmente por Arquimedes e chamado Lei da Alavanca. Agora suponhamos que o bastão esteja ao longo do eixo  $x$  com  $m_1$  em  $x_1$  e  $m_2$  em  $x_2$  e o centro de massa em  $\bar{x}$ , como ilustrado na Figura 30.

**Figura 30** - Divisão pela massa total



Fonte: STEWART, p.503.

Se compararmos as Figuras 29 e 30, vemos que  $d_1 = \bar{x} - x_1$  e  $d_2 = x_2 - \bar{x}$  e, portanto, teremos:

$$\begin{aligned} m_1(\bar{x} - x_1) &= m_2(x_2 - \bar{x}) \\ m_1\bar{x} + m_2\bar{x} &= m_1x_1 + m_2x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (29) \end{aligned}$$

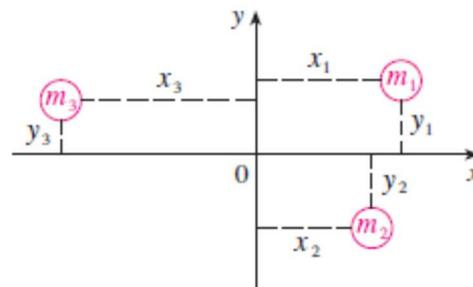
Os números  $m_1x_1$  e  $m_2x_2$  são denominados momentos das massas  $m_1$  e  $m_2$  (em relação à origem) e a Equação (29) diz que o centro de massa  $\bar{x}$  é obtido somando-se os momentos das massas e dividindo pela massa total  $m = m_1 + m_2$ .

Em geral, se tivermos um sistema de  $n$  partículas com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  localizadas nos pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sobre o eixo  $x$ , podemos mostrar analogamente que o centro de massa do sistema  $\bar{x}_1$  está localizado em (30), aí  $m = \sum m_i$  é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais  $M = \sum_{i=1}^n m_i x_i$  é chamada momento do sistema em relação à origem.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} = \frac{M}{m} \quad (30)$$

Então, a Equação (30) pode ser reescrita como  $m\bar{x} = M$ , que diz que, se a massa total fosse considerada como concentrada no centro de massa  $\bar{x}$ , então seu momento deveria ser o mesmo que o momento do sistema.

**Figura 31** - Concentração de massa



Fonte: STEWART, p.504.

Agora, consideremos um sistema de  $n$  partículas com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  no plano- $xy$  como mostra a Figura 32. Por analogia com o caso unidimensional, definimos o momento do sistema com relação ao eixo  $y$  como:

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (31)$$

E o momento do sistema com relação ao eixo  $x$  como:

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (32)$$

Então,  $M_y$  mede a tendência de o sistema girar em torno do eixo  $y$  e  $M_x$  mede a tendência de ele girar em torno do eixo  $x$ .

Como no caso unidimensional, as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas seguintes, onde  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  é a massa total. Como  $m\bar{x} = M_y$  e  $m\bar{y} = M_x$ , onde o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  é o ponto em que uma única partícula de massa  $m$  teria os mesmos momentos do sistema.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{m} \quad \text{e(33)} \\ \bar{y} &= \frac{M_x}{m} \quad \text{(34)} \end{aligned}$$

**Exemplo10.** Calcule os momentos e os centros de massa do sistema de objetos que têm massa 3, 4 e 8 nos pontos  $(-1, 1)$ ,  $(2, -1)$  e  $(3, 2)$ , respectivamente.

**Solução:** Usamos as equações (31) e (32) para calcular os momentos.

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

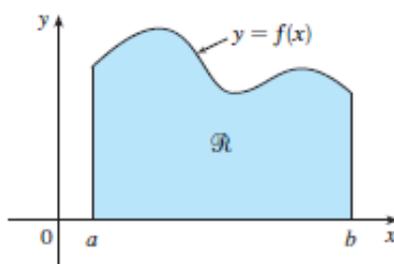
Como  $m = 3 + 4 + 8 = 15$ , usamos as equações (33) e (34) para obter:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

Então, o centro de massa é  $\left(\frac{29}{15}, 1\right)$ .

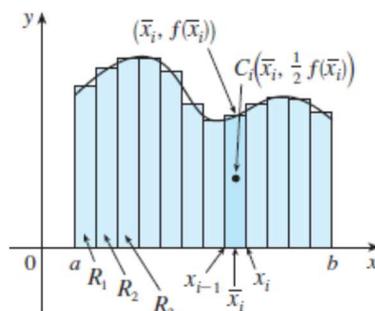
Consideramos, agora, uma placa plana com densidade constante uniforme  $\rho \left( \frac{u.m.}{u.a.} \right)$  que ocupa uma região  $IR$  do plano. Desejamos encontrar o centro de massa da placa, chamado centroide ou centro geométrico de  $IR$ . Ao fazermos isso, usamos os seguintes princípios físicos: o princípio da simetria diz que se  $IR$  é simétrica em relação à reta  $l$ , então o centroide de  $IR$  encontra-se em  $l$ . Logo, o centroide de um retângulo é seu centro. Os momentos devem ser definidos de maneira que, se a massa total da região está concentrada no centro de massa, então seus momentos permanecem inalterados. Além disso, o momento da união de duas regiões sem intersecção deve ser a soma dos momentos das regiões individuais.

**Figura 32** - Região entre as retas  $x=a$ ,  $x=b$ , acima do eixo  $x$  e abaixo do gráfico da função contínua  $y=f(x)$



Fonte: STEWART, p.505.

**Figura 33**-Aproximação da Figura 32 por retângulos



Fonte: STEWART, p.505.

Suponha que a região  $R$  seja do tipo mostrado na Figura 32; isto é,  $\mathfrak{R}$  esteja entre as retas  $x = a$  e  $y = b$ , acima do eixo  $x$  e abaixo do gráfico de  $f$ , onde  $f$  é uma função contínua. Dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos com extremidades  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e larguras iguais a  $\Delta x$ .

Escolhemos o ponto amostral  $x_i^*$  como o ponto médio  $\bar{x}_i$  do  $i$ -ésimo subintervalo, que é  $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ . Isso determina a aproximação poligonal de  $\mathfrak{R}$ , mostrada na Figura 33. O centroide do  $i$ -ésimo retângulo aproximante  $x = +r$  é seu centro  $C_i \left( \bar{x}_i, \frac{1}{2} f(\bar{x}_i) \right)$ . Sua área é  $f(\bar{x}_i) \Delta x$ . Assim, sua massa é

$$\rho f(\bar{x}_i) \Delta x \quad (35)$$

O momento de  $R_i$  em relação ao eixo  $y$  é o produto de sua massa pela distância de  $C_i$ , ao eixo  $y$ , que é  $\bar{x}_i$ . Logo,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i) \Delta x] \bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x \quad (36)$$

Somando esses momentos, obtemos o momento da aproximação poligonal de  $\mathfrak{R}$  e, então, tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , obtemos o momento da própria região  $\mathfrak{R}$  em relação ao eixo  $y$ :

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x = \rho \int_a^b x f(x) dx \quad (37)$$

De maneira análoga, calculamos o momento  $R_i$  em relação ao eixo  $x$  como o produto de sua massa e da distância de  $C_i$  ao eixo  $x$ :

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i) \Delta x] \frac{1}{2} f(\bar{x}_i) = \rho \frac{1}{2} [f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x \quad (38)$$

Novamente somamos esses momentos e tomamos o limite para obter o momento de  $\mathfrak{R}$  em relação ao eixo  $x$ :

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \frac{1}{2} [f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx \quad (39)$$

Como no caso do sistema de partículas, o centro de massa da placa é definido de maneira que  $m\bar{x} = M_y$  e  $m\bar{y} = M_x$ . Porém, a massa da placa é o produto de sua densidade por sua área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x) dx. \quad (40)$$

E, assim,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x) dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (41)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (42)$$

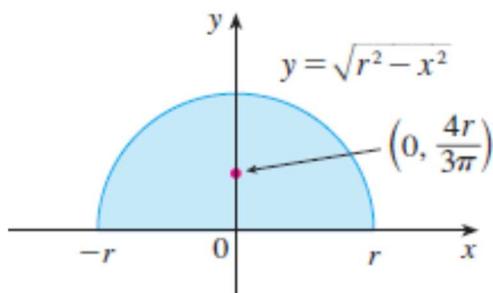
Observemos o cancelamento dos  $\rho$ 's. A posição do centro de massa independe de sua densidade. Em resumo, o centro de massa da placa ou centroide de  $\mathfrak{R}$  será localizado no ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , onde

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx \quad \text{e (43)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx. \quad (44)$$

**Exemplo 11.** Calcule o centro de massa de uma placa semicircular de raio  $r$  e densidade uniforme constante.

**Figura 34-** Centro de massa



Fonte: STEWART, p.506.

**Solução:** Para usarmos as equações (43) e (44), colocamos o semicírculo como na Figura 34, de modo que  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  e  $a = -r$  e  $b = r$ . Neste caso não há necessidade de usar a fórmula para calcular  $\bar{x}$  porque, pelo princípio da simetria, o centro de massa deve estar sobre o eixo  $y$ , e, dessa forma,  $\bar{x} = 0$ . A área do semicírculo é  $A = \frac{1}{2} \pi r^2$ , e assim,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_{-r}^r \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{\frac{1}{2} \pi r^2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi r^2} \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi} \end{aligned}$$

Portanto, o centro de massa está localizado no ponto  $\left(0, \frac{4r}{3\pi}\right)$ .

#### 4.5 Teorema de Pappus – Volume

A seguir, apresentamos o Teorema de Pappus para o cálculo do volume de sólidos de revolução.

**Teorema 3.** Se uma figura plana de área  $A$ , de centro de gravidade  $(\bar{x}, \bar{y})$ , é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução gerado é dado pelo produto entre a área  $A$  da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de rotação.

Inicialmente, demonstraremos para o caso em que a região  $A$  é rotacionada em torno do eixo  $y$  utilizando método de aproximação por cascas e o centro de massa.

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \quad (\text{ver (23), p. 42})$$

$$V = (2\pi A) \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \quad (\text{ver (43), p. 52})$$

$$V = (2\pi A) \bar{x}$$

$$V = 2\pi \bar{x} A \quad (45)$$

Portanto,  $V = 2\pi d A$ , onde  $2\pi d$  é o perímetro da circunferência cujo raio  $d = \bar{x}$  é a distância do eixo de rotação  $y$  ao centro de gravidade da região, de área  $A$ , que foi rotacionada.

Para o caso em que a região é rotacionada em torno do eixo  $x$ , utilizaremos o método dos anéis circulares:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \quad (\text{ver (22), p. 38})$$

$$V = (2\pi A) \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x) - g(x)]^2 dx \quad (\text{ver (44), p. 53})$$

$$V = (2\pi A) \bar{y}$$

$$V = 2\pi \bar{y} A$$

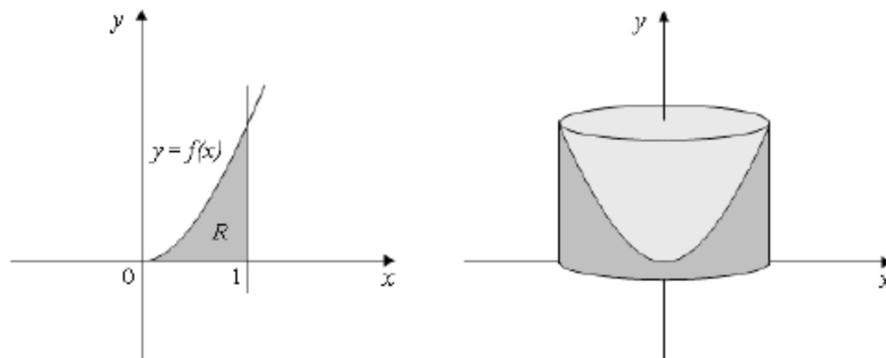
$$V = 2\pi d A \tag{46}$$

Portanto,  $V = 2\pi d A$ , e nesse caso  $2\pi d$  representa o perímetro da circunferência cujo raio  $d = \bar{y}$  é a distância do centro de gravidade da região de área  $A$  ao eixo de rotação  $x$ .

A demonstração para o caso em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela a um dos eixos é análoga.

**Exemplo 12.** Encontre o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $y$ , da região  $R$  do 1º quadrante limitada pela função definida por  $f(x) = x^2$ , pela reta  $x = 1$  e pelo eixo  $x$ , conforme pode ser visto na Figura 35:

**Figura 35-** Sólido gerado pela rotação da região  $R$



Fonte: RAUTENBERG, p.45.

**Solução:** Utilizaremos o Teorema de Pappus para o volume, por meio da fórmula (46). Para calcular a área, fazemos:

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Vamos determinar as coordenadas do seu centro de gravidade usando (43) e (44):

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x f(x) dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4} \text{ e}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx = 3 \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 dx = \frac{3}{2} \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Assim, as coordenadas do centro de gravidade da região  $R$  são  $\left( \frac{3}{4}, \frac{3}{10} \right)$ , em que  $\bar{x} = d$  representa a distância desse ponto ao eixo de rotação  $y$ . Usando (46) para calcular o volume do sólido gerado, temos:

$$V = 2\pi d A = 2\pi \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$$

#### 4.6 Teorema de Pappus – Área

A seguir, apresentamos o Teorema de Pappus que relaciona comprimento e centro de gravidade de arcos com a área da superfície de um sólido de revolução:

**Teorema 4.** Se um arco, de perímetro  $L$ , que tem centro de gravidade  $(\bar{x}, \bar{y})$ , é rotacionado em torno de um eixo que não o intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro  $L$  do arco e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade desse arco e o eixo de rotação.

Para o caso de rotacionarmos em torno do eixo  $y$ , teremos:

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{área obtida pela rotação em torno do eixo } y)^3$$

$$A = (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{coordenadas do centro de massa})^4$$

<sup>3</sup>**Proposição 3.5:** Seja  $y = f(x)$  uma função definida no intervalo fechado  $[a, b]$ . Se  $f(x) \geq 0$  e  $f'$  são contínuas nesse intervalo, então a área  $A$  da superfície obtida pela rotação de  $y = f(x)$ , com  $x \in [a, b]$ , em torno do eixo  $y$  é dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{RAUTERBERG, 2013, p. 36})$$

<sup>4</sup>**Proposição 3.8:** Seja  $f$  uma função contínua, com derivada contínua no intervalo  $[a, b]$ . Seja  $L$  o comprimento do arco da função  $f$ , de extremos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . O centro de massa, ou centroide  $(\bar{x}, \bar{y})$ , desse arco é dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (\text{RAUTERBERG, 2013, p. 39})$$

$$A = (2\pi L)\bar{x}$$

$$A = 2\pi\bar{x}L$$

$$A = 2\pi dL \quad (47)$$

Portanto,

$$A = 2\pi dL,$$

Onde  $L$  representa o perímetro do arco rotacionado e  $2\pi d$  é o comprimento de uma circunferência cujo raio  $d = \bar{x}$  é a distância entre o centro de gravidade do arco e o eixo  $y$ .

De maneira equivalente àquela mostrada no caso do teorema para o volume de um sólido de revolução, podemos obter a fórmula da área de uma superfície de um sólido de revolução quando a rotação do arco é feita em torno do eixo  $x$ . Nesse caso, teremos:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$A = (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$A = (2\pi L)\bar{y}$$

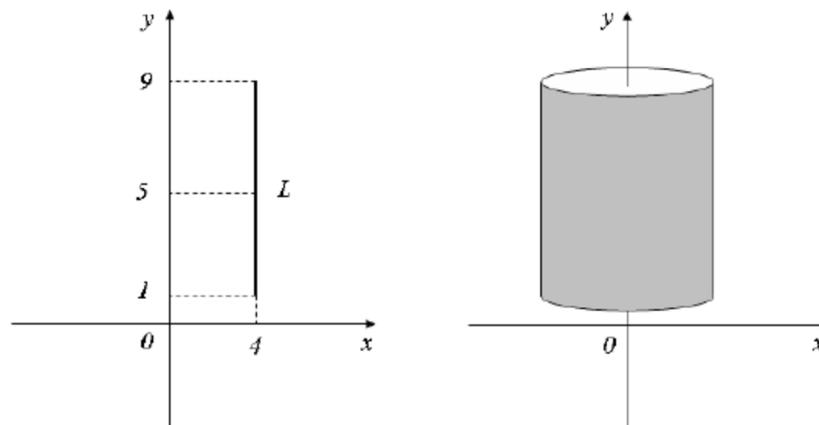
$$A = 2\pi\bar{y}L$$

$$A = 2\pi dL$$

Desta forma, temos que  $A = 2\pi dL$ , onde  $2\pi d$  representa o comprimento de uma circunferência cujo raio  $d = \bar{y}$  é dado pela distância do centro de gravidade  $(\bar{x}, \bar{y})$  ao eixo  $x$ , enquanto que  $L$  é o perímetro, ou comprimento, do arco rotacionado. Aqui, novamente, a prova para o caso em que um arco é rotacionado em torno de uma reta paralela a um dos eixos é obtida de forma análoga ao que foi demonstrado.

**Exemplo 13.** Qual é a área da superfície gerada pela rotação de um segmento  $AB$ , como mostrado na Figura 36, com  $A = (4, 1)$  e  $B = (4, 9)$  pertencentes a reta vertical  $x = 4$ , em torno do eixo  $y$ ?

**Figura 36-** Área lateral de um cilindro



Fonte: RAUTENBERG, p.51.

**Solução:** O centro de gravidade do segmento  $AB$  é dado pelas coordenadas do seu ponto médio, ou seja,  $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 5)$ . Como esse segmento é paralelo ao eixo de rotação, teremos que  $d = 4$ . Utilizando o Teorema de Pappus para o cálculo de área, obtemos:

$$A = 2\pi d L = 2\pi(4)(8) = 64\pi$$

Mais aplicações dos teoremas de Pappus podem ser encontradas em Rautenberg (2013).

## 5 APLICAÇÃO

A partir dos conceitos apresentados a respeito do cálculo da área de uma superfície e do volume de um sólido gerado a partir da rotação de uma curva, realizamos o levantamento de algumas aplicações que poderiam ser trabalhadas com alunos do Ensino Médio. Assim, neste capítulo, iremos descrever as atividades trabalhadas com os alunos envolvendo os conceitos dos Teoremas de Pappus para área de superfície e volume de um sólido de revolução, bem como as teorias envolvidas.

Com uma turma de 35 alunos, foi realizada uma retomada de conceitos básicos de Geometria como os tipos de polígonos e suas áreas, definição de círculo e semicírculo e como calcular suas áreas, a definição de distância, o que significa rotacionar uma figura em torno de um eixo de rotação, o conceito de centro de massa de uma figura e como determiná-lo.

Em seguida, apresentamos aos alunos os Teoremas de Pappus, para cálculo da área de uma superfície e do volume de um sólido de revolução, conforme foi apresentado no capítulo 4, que são:

1) Teorema de Pappus para cálculo de área:

$$A = 2\pi \bar{x} L, \text{ onde:}$$

$\bar{x}$  = Distância entre o centro de massa da curva e o eixo de rotação.

$L$  = Comprimento da curva rotacionada.

2) Teorema de Pappus para cálculo do volume:

$$V = 2\pi \bar{x} A, \text{ onde:}$$

$\bar{x}$  = Distância entre o centro de massa da figura e o eixo de rotação.

$A$  = Área da figura rotacionada.

Os teoremas enunciados anteriormente consideram rotação de  $360^\circ$ . Caso a rotação não seja esta, o volume ou área da superfície do sólido gerado será proporcional ao do comprimento do arco de rotação.

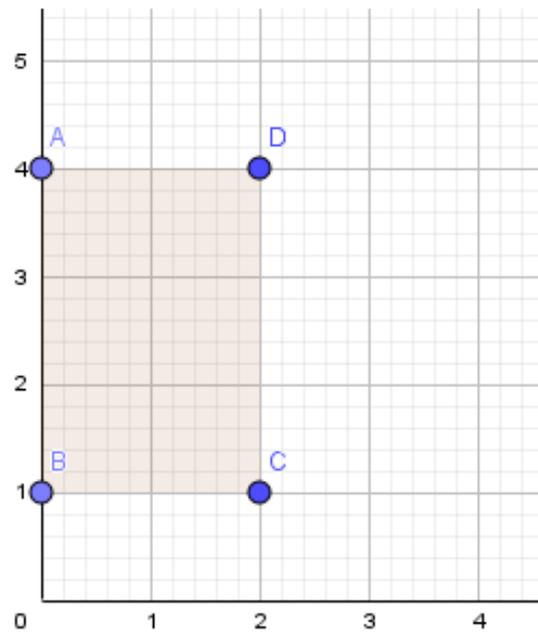
## 5.1 Atividades propostas

Foram elaboradas atividades a serem exploradas com o uso do *software* de geometria dinâmica, Geogebra, com a intenção de tornar as atividades atraentes e facilitar a compreensão dos alunos, aplicadas pelo pesquisador. A seguir, apresentaremos as atividades que foram propostas:

### 5.1.1 Atividade 1

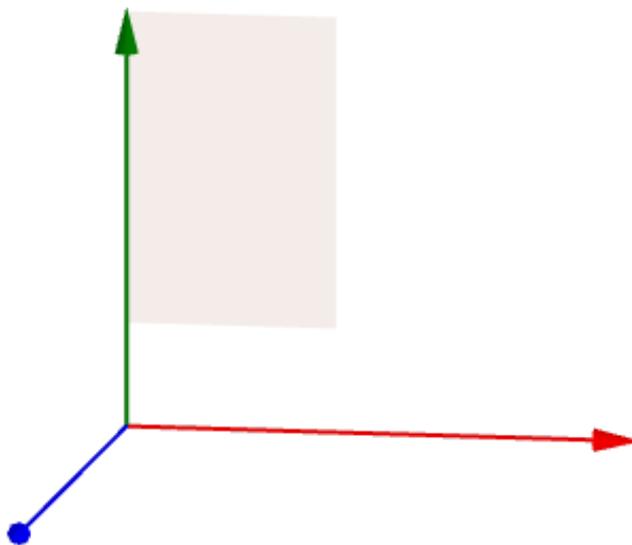
A primeira atividade proposta aos alunos teve o objetivo de verificar a veracidade dos Teoremas. Vale ressaltar que a atividade não se trata de uma demonstração, e sim mostrar aos alunos que tais teoremas são válidos em casos particulares facilmente aferíveis. Assim, com o auxílio do *software* GeoGebra rotacionamos um retângulo com lados medindo  $a$  e  $b$  em torno do eixo das ordenadas, de modo que o lado  $b$  coincidissem com o eixo das ordenadas. Assim, o sólido gerado foi um cilindro reto com raio medindo  $a$  e altura medindo  $b$ , conforme pode ser observado nas Figuras 37, 38 e 39:

**Figura 37-** Retângulo no  $R^2$



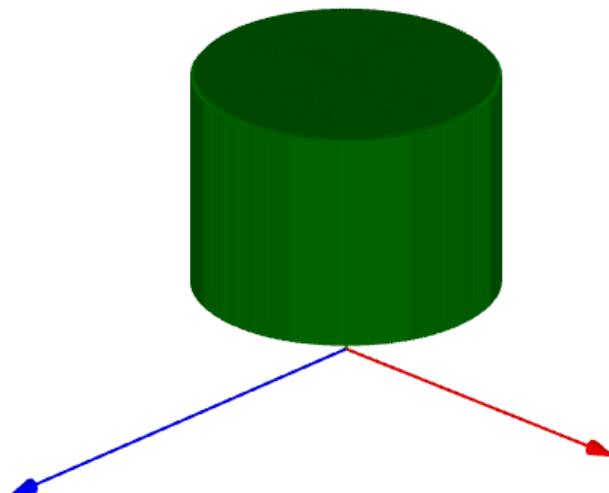
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 38** - Retângulo no  $R^3$



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 39** - Cilindro gerado pela rotação do retângulo.

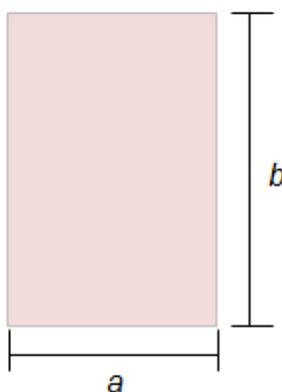


Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos Teoremas de Pappus pudemos encontrar as fórmulas já conhecidas pelos alunos de volume e área lateral:

*Volume de um cilindro de raio  $a$  e altura  $b$ :*

**Figura 40** - Área do retângulo no  $R^2$



Fonte: Elaborado pelo autor

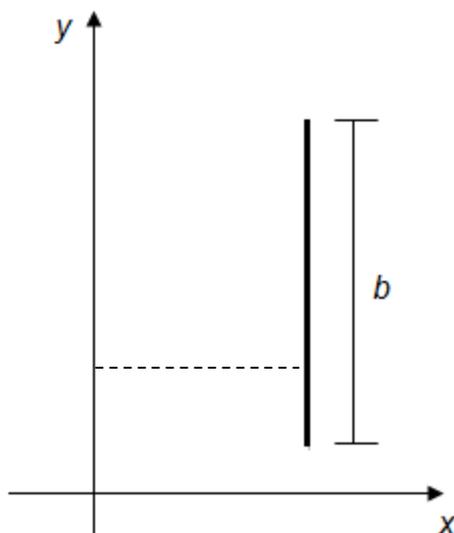
$$A = a \cdot b$$

$$\bar{x} = \frac{a}{2}$$

$$V = 2\pi a b \frac{a}{2} \Rightarrow V = \pi a^2 b$$

*Área lateral de um cilindro com raio  $a$  e altura  $b$*

**Figura 41** - Área lateral do cilindro de raio  $a$  e altura  $b$



Fonte: Elaborado pelo autor

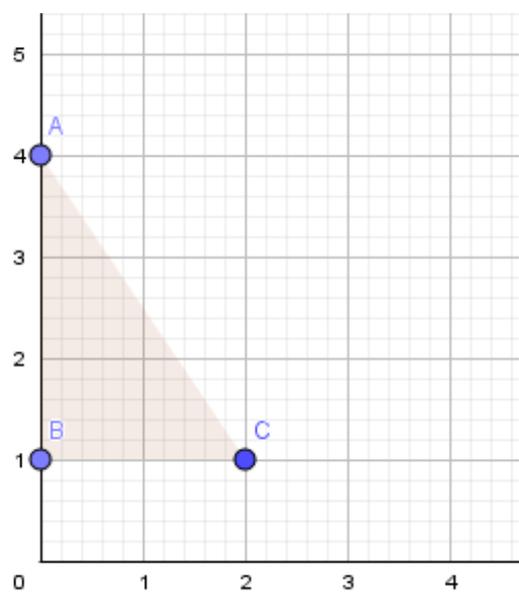
$$A = 2\pi \bar{x} L$$

$$\bar{x} = a$$

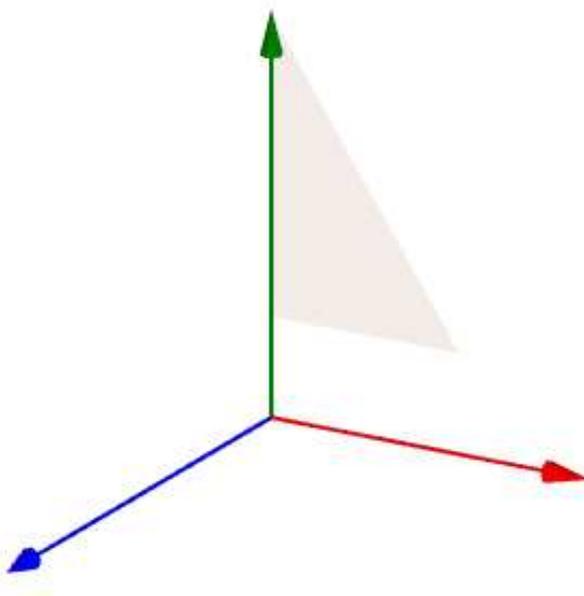
$$L = b$$

$$A = 2\pi a b$$

O mesmo procedimento foi realizado para o cone. Rotacionamos um triângulo retângulo de catetos medindo  $a$  e  $b$ . Ao rotacionarmos esse triângulo em torno do eixo das ordenadas, de modo que o cateto  $b$  coincidissem com esse eixo, obtemos um cone reto de raio  $a$  e altura  $b$ , conforme pode ser verificado nas Figuras 42, 43 e 44:

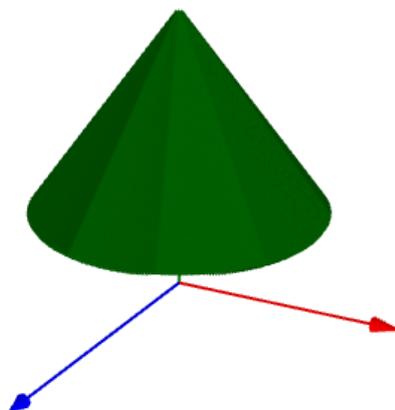
**Figura 42** - Triângulo retângulo no  $R^2$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 43**-Triângulo retângulo no  $R^3$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 44-** Cone gerado pela rotação do triângulo retângulo

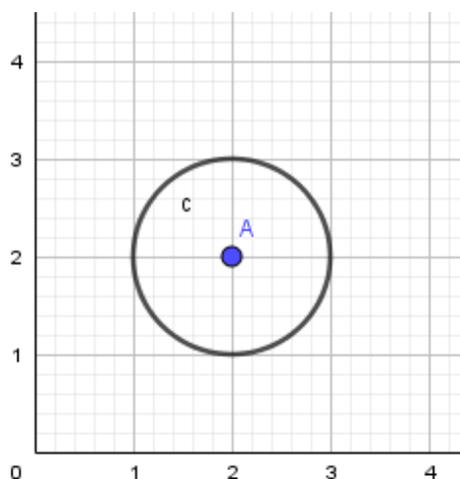


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.1.2 Atividade 2

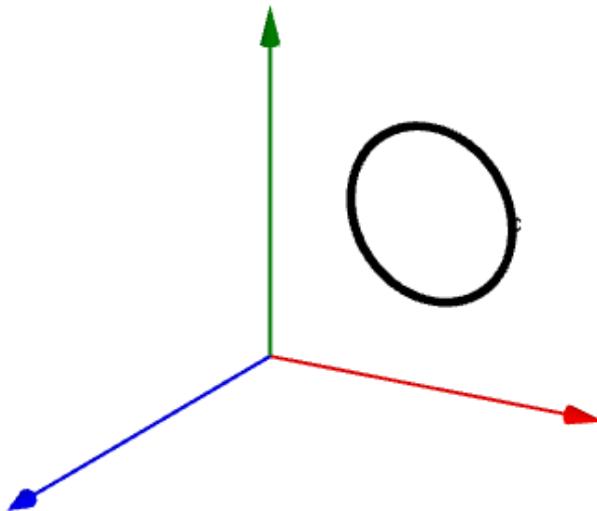
A segunda atividade realizada foi a de determinar o volume e área da superfície de alguns sólidos que geralmente não são estudados durante o ensino médio. Utilizamos, nessa atividade, a rotação de figuras geométricas já conhecidas pelos alunos, iniciando pelo círculo (ver Figuras 45, 46 e 47):

**Figura 45-** Círculo no  $R^2$



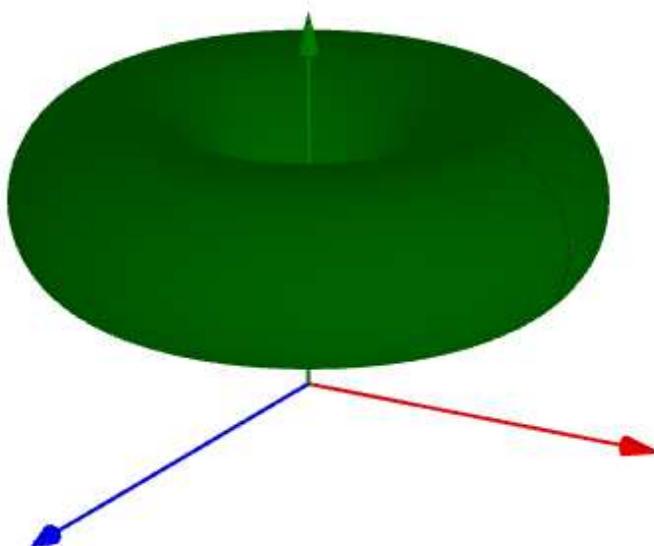
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 46-** Círculo no  $R^3$



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 47-** Toro gerado pela rotação do círculo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da construção, foi realizado o cálculo do volume do toro com os alunos.

### Volume do toro

$$V = 2\pi \bar{x} A$$

$$\bar{x} = 2$$

$$A = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$V = 2\pi \cdot 2\pi$$

$$V = 4\pi^2$$

### Área da superfície do toro:

$$A = 2\pi \bar{x} L$$

$$\bar{x} = 2$$

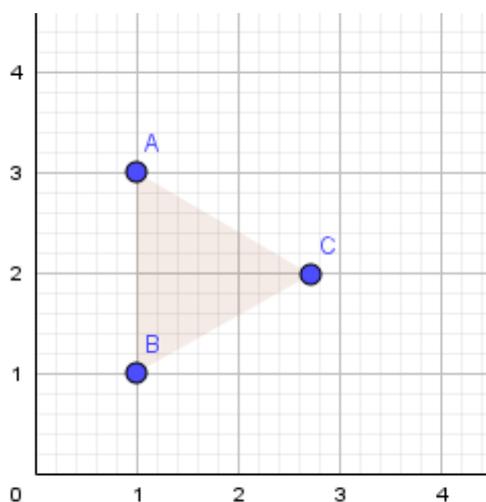
$$L = 2\pi \cdot 1$$

$$A = 2\pi \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$A = 8\pi^2$$

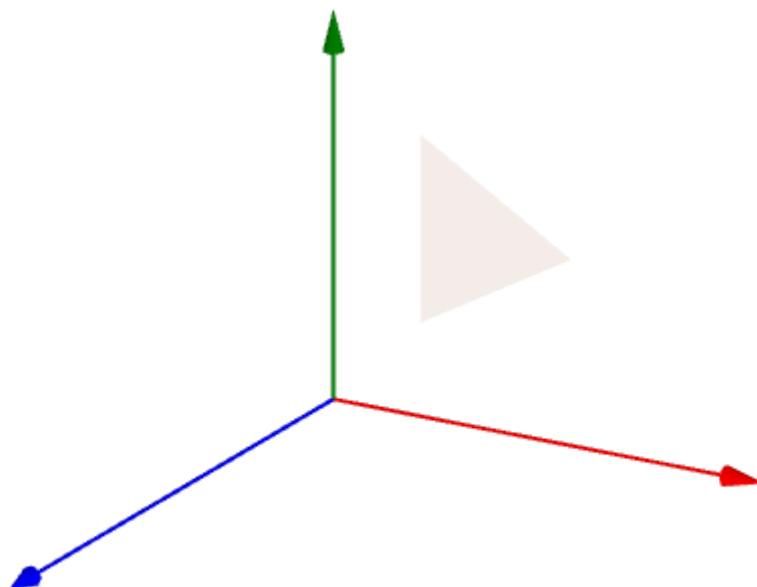
Foi realizado um procedimento análogo para triângulo equilátero, o quadrado e o retângulo. Os dois primeiros casos são ilustrados a seguir:

**Figura 48-** Triângulo equilátero no  $R^2$



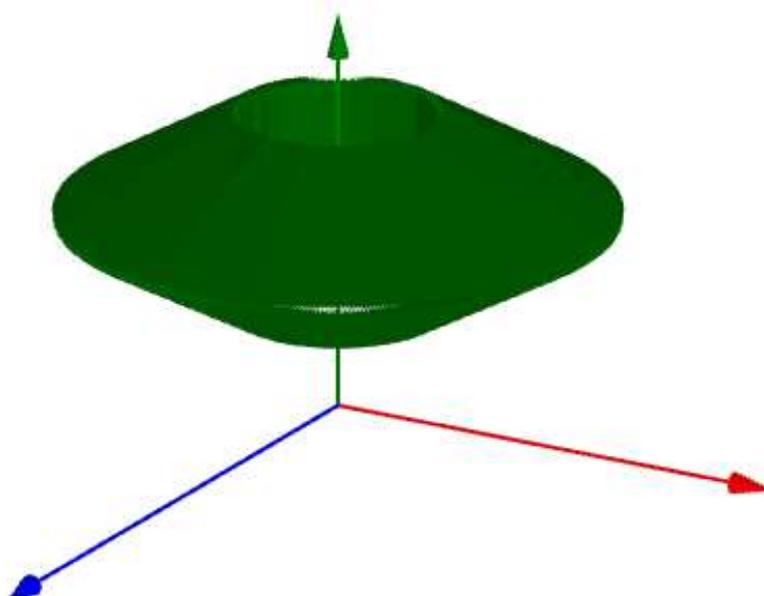
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 49-** Triângulo equilátero no  $R^3$

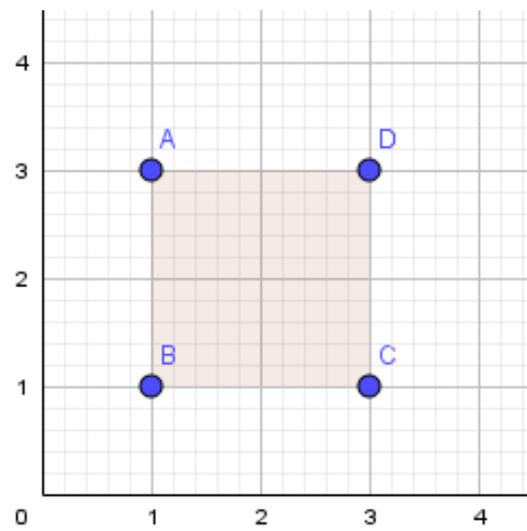


Fonte: Elaborado pelo autor.

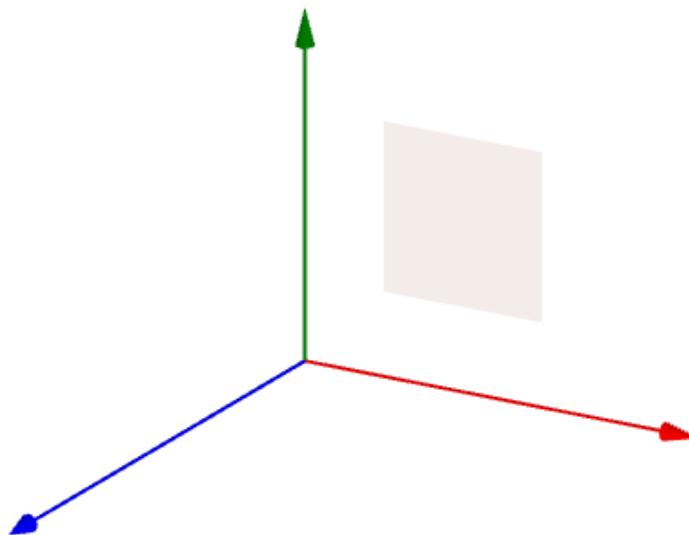
**Figura 50-** Sólido gerado pela rotação do triângulo equilátero



Fonte: Elaborado pelo autor.

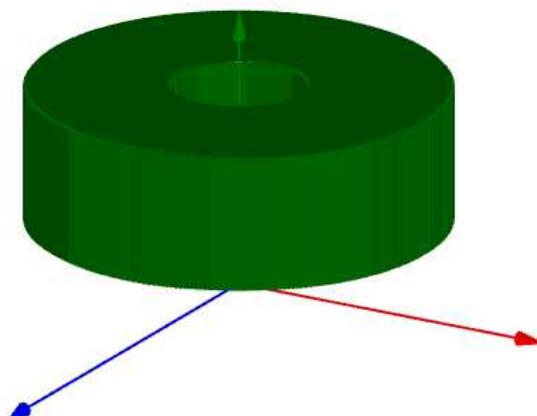
**Figura 51-** Quadrado no  $R^2$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 52-** Quadrado no  $R^3$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 53-** Sólido gerado pela rotação do quadrado



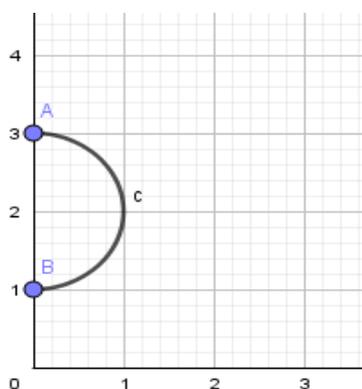
.Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.1.3 Atividade 3

Na terceira atividade, determinamos o centro de massa de um semicírculo.

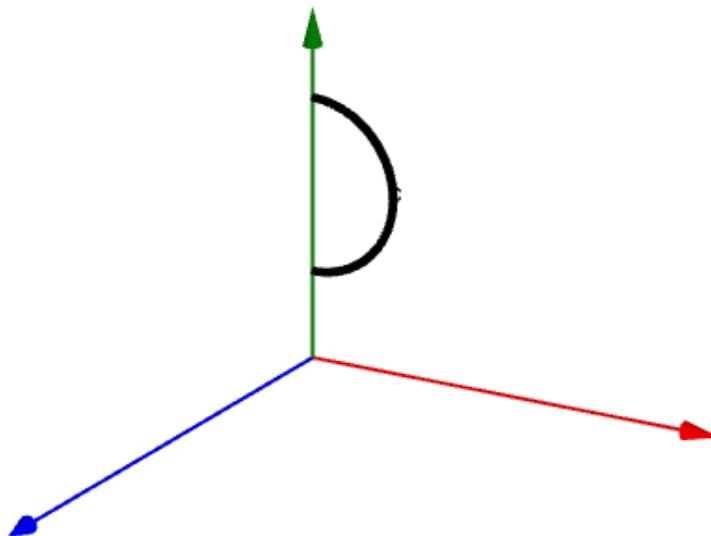
Com auxílio do GeoGebra, foi mostrado aos alunos que ao rotacionarmos um semicírculo de maneira conveniente obteremos uma esfera. Utilizamos o Teorema de Pappus para o cálculo de volume, e a fórmula já conhecida pelos alunos de volume da esfera, para determinar o centro de massa do semicírculo (ver Figuras 54, 55 e 56).

**Figura 54-** Semicírculo no  $R^2$



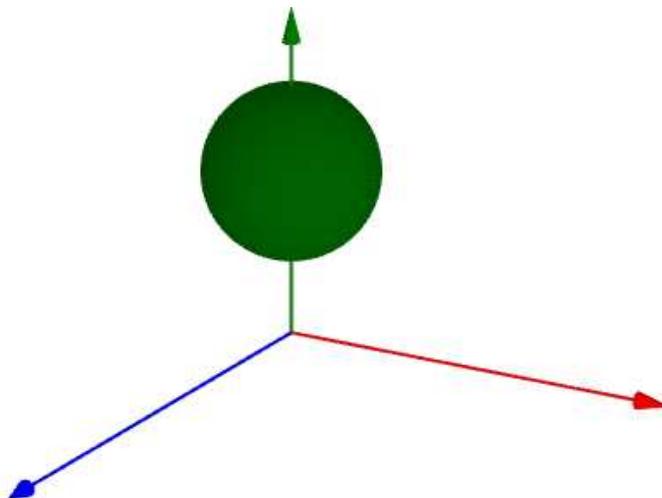
Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 55-** Semicírculo no  $R^3$



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 56-** Esfera gerada pela rotação do semicírculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cálculos realizados com os alunos:

*Volume de uma esfera usando teorema de Pappus*

$$V = 2\pi \bar{x} A, \text{ onde } A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

Volume de uma esfera

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Logo,

$$2\pi\bar{x} \cdot \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \bar{x}\pi = \frac{4R}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Antes de propor aos alunos a quarta atividade, apresentamos a eles um conceito simples para determinar o centro de massa de uma figura composta.

#### 5.1.4 Centro de massa de figuras planas compostas

Para calcular o centro de massa de figuras planas compostas, devemos considerar cada parte da figura individualmente, encontrar os seus centros de massa e, em seguida, utilizar o processo que segue:

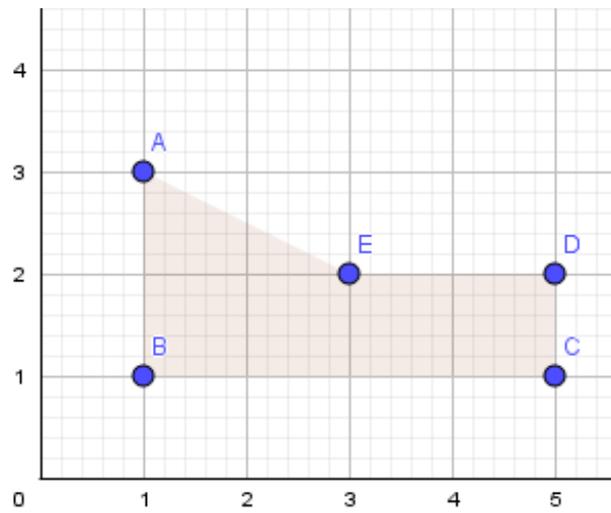
$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \dots + \bar{x}_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} \quad (48)$$

Onde:

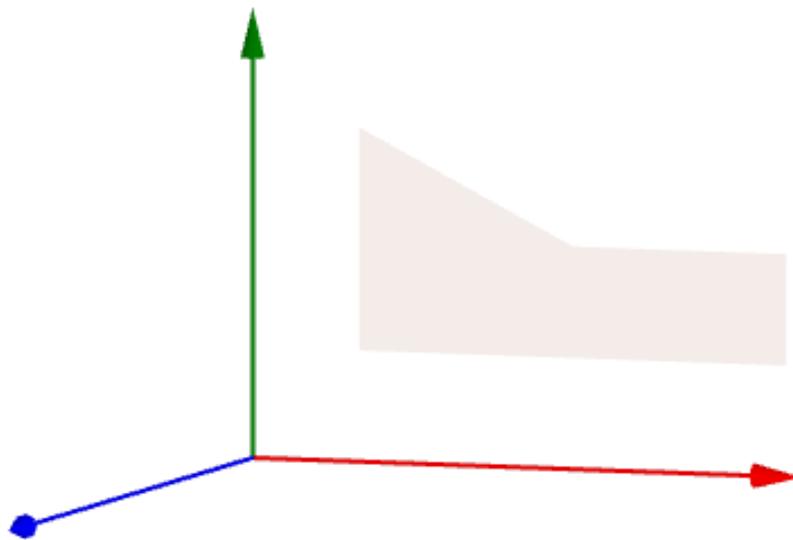
$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  são as distâncias entre os centros de massa e o eixo de rotação;

$A_1, A_2, \dots, A_n$  são as áreas das figuras.

Na atividade 4, utilizamos o conceito de centro de massa e o Teorema de Pappus para o cálculo de volume. Assim, pudemos determinar o volume de alguns sólidos que são gerados a partir de figuras compostas (ver Figuras 57, 58 e 59):

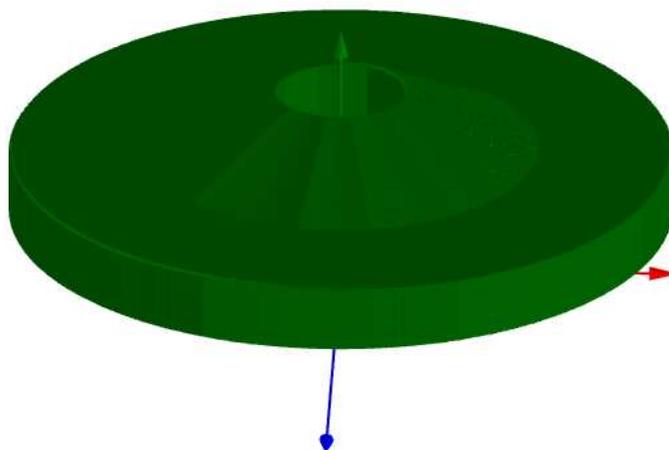
**Figura57-** Figura composta no  $R^2$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Figura 58-** Figura composta no  $R^3$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

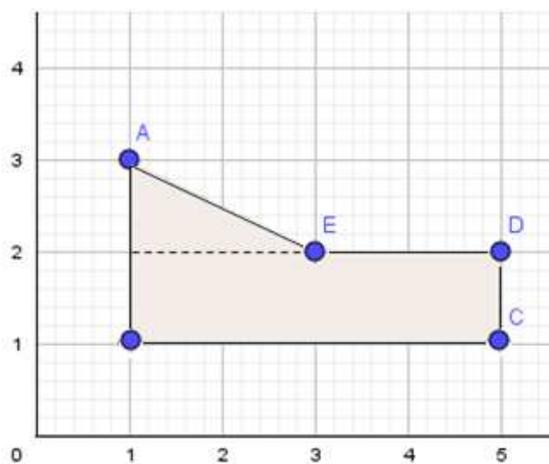
**Figura 59-** Sólido gerado pela rotação do polígono composto



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cálculo realizado com os alunos utilizando as medidas do plano cartesiano:

**Figura 60 -** Área da figura composta



Fonte: Elaborado pelo autor

*Decompondo a figura em um triângulo e um retângulo, temos:*

1) Área do triângulo ( $A_1$ ):

$$A = \frac{2 \cdot 1}{2} = 2$$

Centro de massa ( $\bar{x}_1$ ):

$$\bar{x}_1 = \frac{1+1+3}{3} = \frac{5}{3}$$

2) Área do retângulo ( $A_2$ ):

$$A_2 = 4 \cdot 1 = 4$$

Centro de massa ( $\bar{x}_2$ ):

$$\bar{x}_2 = \frac{1+1+5+5}{4} = 3$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{5}{3} \cdot 2 + 4 \cdot 3}{2+4} = \frac{\frac{10}{3} + 12}{6} = \frac{\frac{46}{3}}{\frac{6}{1}} = \frac{46}{18} = \frac{23}{9}$$

$$A = 2 + 4 = 6$$

$$V = 2\pi \bar{x} A \Rightarrow V = 2\pi \frac{23}{9} \cdot 6 \Rightarrow V = \frac{92\pi}{3}$$

## 5.2 Relato da apresentação das atividades

A apresentação dos conceitos foi feita aos alunos do terceiro ano do ensino médio do Colégio particular Coolidge, localizado na cidade de Bauru e teve duração de aproximadamente 3 horas e meia. Escolhemos apresentar os conceitos aos alunos da 3ª série do Ensino Médio, pois estes já possuem os conhecimentos prévios que seriam necessários para o desenvolvimento das atividades, principalmente em relação aos volumes de sólidos. O convite foi feito aos 38 alunos da turma, sendo que destes 35

participaram. Antes do início das atividades, os alunos se mostraram muito receptivos e interessados em conhecer os conteúdos que seriam trabalhados. No entanto, durante a apresentação, foi possível observar que alguns não demonstravam muito interesse no conceito apresentado.

### 5.2.1 Apresentação dos Teoremas

O conteúdo teórico foi apresentado aos estudantes por meio de uma apresentação de *slides*, as figuras e os sólidos foram construídos e apresentados utilizando o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e os cálculos foram realizados no quadro branco.

Inicialmente, foi realizada uma breve introdução do contexto histórico, depois levamos ao conhecimento dos alunos os teoremas estabelecidos por Pappus e explicamos do que se trata cada uma das variáveis e como utilizá-las. Não apresentamos nenhum tipo de demonstração, já que elas envolvem conceitos matemáticos abordados no Ensino Superior, tendo sido realizadas justificativas intuitivas. Houve um questionamento sobre a não demonstração das fórmulas, e justificamos que o conteúdo utilizado na demonstração não faz parte da matriz curricular do Ensino Médio.

### 5.2.2 Apresentação e resolução da atividade 1

Utilizando o GeoGebra apresentamos um retângulo num plano cartesiano, onde um de seus lados coincidia com o eixo das ordenadas. Foi pedido aos alunos que não utilizassem as medidas dos eixos coordenados como base para executar os cálculos. Sendo assim, consideramos que o retângulo possuía base com medida  $a$  e altura  $b$ . Ao questionar os alunos sobre qual sólido seria gerado com a rotação em torno do eixo das ordenadas, alguns alunos se mostraram confusos. Ao mostrar a revolução, alguns se mostraram bastante impressionados. Verificaram, então, que o

sólido era um cilindro com raio medindo  $a$  e altura medindo  $b$ . Com o auxílio do Teorema de Pappus para cálculo de volume, mostramos a equivalência entre o teorema e a fórmula que eles já conheciam. Ao utilizarmos o mesmo procedimento para o cálculo da superfície, muitos alunos tiveram dificuldade em determinar a distância do centro de massa ao eixo de rotação. Eles imaginavam que seria utilizada a mesma figura, isto é, o retângulo. Assim, tivemos que esclarecer que o que determina a superfície lateral do cilindro é o lado de medida  $b$  do retângulo que não coincide com o eixo das abscissas.

Em um segundo momento, apresentamos um triângulo retângulo num plano cartesiano, onde um de seus catetos coincidia com o eixo das ordenadas. Usando a mesma estratégia de usar valores genéricos, solicitamos que os alunos determinassem apenas a equivalência entre o teorema para o cálculo de volume e a fórmula. Alguns conseguiram finalizar a tarefa rapidamente e com sucesso.

Para as próximas atividades o procedimento foi análogo, isto é, sempre mostrando a figura num plano cartesiano e posteriormente o sólido gerado com sua rotação.

### 5.2.3 Apresentação e resolução da atividade 2

Na atividade 2, mostramos os sólidos gerados com a rotação de um círculo, um quadrado e um triângulo equilátero em torno do eixo das ordenadas. Nesta atividade, os sólidos não tinham nenhum ponto em comum com o eixo de rotação. Com a apresentação feita, foi proposto aos alunos que determinassem o volume e área da superfície apenas do Toro, sólido gerado pela rotação do círculo. Utilizamos um círculo de raio unitário e centro no ponto  $(2,2)$ . Consideramos a atividade realizada satisfatória, pois a maioria dos alunos demonstrou bastante interesse e realizou todas as etapas com sucesso.

#### 5.2.4 Apresentação e resolução da atividade 3

O desafio da atividade 3 foi o de determinar o centro de massa de um semicírculo. Assim, foi apresentado aos alunos um semicírculo com diâmetro coincidindo com o eixo das ordenadas. Muitos alunos já concluíram que a rotação do semicírculo em torno do eixo das ordenadas iria gerar uma esfera. Porém, poucos chegaram à conclusão que poderíamos determinar o centro de massa a partir da fórmula já conhecida por eles para o cálculo do volume da esfera. Apesar disso, após breve debate todos conseguiram compreender o que a atividade propunha e a maioria conseguiu efetuar os cálculos necessários.

#### 5.2.5 Apresentação e resolução da atividade 4

Antes de apresentarmos a atividade 4 aos alunos, trabalhamos um método para determinarmos o centro de massa de figuras compostas. Essa teoria foi apenas apresentada a eles, sem nenhum tipo de demonstração. Alguns deles mostraram conhecimento do conteúdo, pois já haviam trabalhado o conceito em física. O método se encontra na seção 4.4. De modo geral, foi possível perceber que todos conseguiram entender.

Na atividade 4, os alunos tinham que determinar o volume do sólido gerado pela rotação de um pentágono não convexo. Os vértices do pentágono foram posicionados nos pontos  $A = (1; 3)$ ,  $B = (1; 1)$ ,  $C = (5; 1)$ ,  $D = (5; 2)$  e  $E = (3; 2)$ . Conforme era esperado, os alunos fizeram a decomposição da figura de maneiras diferentes, o que facilitou a realização da atividade. Alguns relataram como haviam feito a decomposição e como obtiveram o resultado. Uma parte dos alunos conseguiu determinar o resultado de maneira correta. Constatou-se, ainda, que alguns alunos que não conseguiram determinar o resultado correto acabaram errando em

cálculos. Poucos não conseguiram desenvolver a atividade. Porém, mesmos esses que não conseguiram desenvolver atividade, ao participar da discussão conseguiram entender como os demais haviam procedido na resolução.

### **5.3 Percepções a respeito da aplicação das atividades**

Ao final das atividades, os alunos foram questionados quanto ao entendimento dos conceitos de maneira geral. Os comentários dos alunos evidenciaram que a maioria da turma apresentou bom entendimento do conteúdo proposto.

Os alunos também foram questionados sobre a possibilidade de abordar essa forma de trabalho com esses conteúdos no Ensino Médio e foi quase unânime a resposta positiva, inclusive alguns relataram considerar o método bem simples.

A nossa percepção, frente às atividades realizadas pelos alunos e o diálogo estabelecido com eles, evidenciou boa receptividade em relação ao método utilizado e a aparente compreensão do conteúdo de modo satisfatório.

## 6 CONCLUSÃO

Apresentamos uma proposta de abordagem para o trabalho com os sólidos geométricos gerados a partir da revolução de uma curva ou figura, no Ensino Médio. Para a elaboração dessa proposta, utilizamos os Teoremas de Pappus para o cálculo da área e do volume. Passando por um breve relato sobre a vida e a obra de Pappus de Alexandria – consideradom dos principais geômetras em sua época, apresentamos os conceitos de cálculo integral relacionados ao assunto abordado na pesquisa. Tais conceitos foram utilizados na demonstração dos teoremas de Pappus para cálculo de área de superfície e volume, tema principal do nosso trabalho.

Posteriormente, apresentamos os Teoremas de Pappus para o cálculo da área e do volume, que são abordados tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, ondeo estudo fica mais abrangente e complexo, pois são aprofundados com o uso de recursos do Cálculo Integral. Por isso, nesta pesquisa, selecionamos aplicações possíveis de serem realizadas no Ensino Médio, com o uso dos conceitos prévios de Matemática que já possuem, e com o cuidado de não adentrar nas demonstrações, pois utilizam recursos abordados no Ensino Superior.

As aplicações dos Teoremas de Pappus trabalhadas na pesquisa foram reunidas em 4 atividades, propostas aos alunos de uma turma com 35 alunos da 3ª série do Ensino Médio, com a utilização do *software* GeoGebra. Estimamos, no início da pesquisa, que essas aplicações pudessem dispor uma abertura a um trabalho diferente com os conceitos e cálculos de área e volume no Ensino Médio, de modo que não se reduzam somente às fórmulas já utilizadas nas práticas pedagógicas correntes.

Após a aplicação das atividades com os alunos, pudemos confirmar a nossa estimativa, que foi verificada através da participação e relato dos alunos de que as atividades podem se configurar como uma proposta diferente para o Ensino Médio. De modo geral, podemos dizer que ficou evidente uma boa receptividade em relação à proposta feita e a participação dos alunos nas atividades indicou a aparente compreensão do conteúdo de forma satisfatória.

## REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

FRIEDLI, Sacha. **Cálculo 1**. Belo Horizonte: Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2013. Disponível em: <[www.mat.ufmg.br/~sacha](http://www.mat.ufmg.br/~sacha)>. Acesso em: 18 jun. 2018.

GULDIN, Paul. **Complete Dictionary of Scientific Biography**. New York: Charles Scribner, 2008. Disponível em: <<https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/guldin-paul>>. Acesso em: 18 jun. 2018.

HEATH, Thomas. **A history of greek mathematics**. Oxford: The Clarendon Press, 1921. v.2. Disponível em: <<http://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog>>. Acesso em: 18 jun. 2018.

RAUTENBERG, Robson Raulino. **Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução**. 2013. 57 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Disponível em: <[http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/471/1/CT\\_PROFMAT\\_M\\_Rautenberg,RobsonRaulino\\_2013.pdf](http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/471/1/CT_PROFMAT_M_Rautenberg,RobsonRaulino_2013.pdf)>. Acesso em: 18 jun. 2018.

STEWART, James. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.