

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

**A BELEZA DOS NÚMEROS E DE SUAS PROPRIEDADES: UMA
ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO MÉDIO.**

CLÉSSIO DA SILVA ARAÚJO

SÃO LUÍS - MA 2018

CLÉSSIO DA SILVA ARAÚJO

**A BELEZA DOS NÚMEROS E DE SUAS PROPRIEDADES: UMA
ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO MÉDIO.**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob orientação do Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

SÃO LUÍS - MA

2018

CLÉSSIO DA SILVA ARAÚJO

**A BELEZA DOS NÚMEROS E DE SUAS PROPRIEDADES: UMA
ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO MÉDIO.**

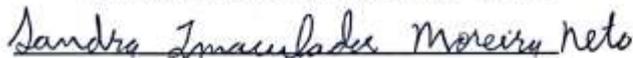
Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob orientação do Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 19/07/2018.

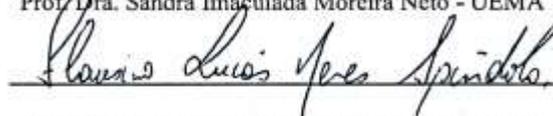
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos – UEMA



Prof. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto - UEMA



Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola - UFMA

Araújo, Cléssio da Silva.

A beleza dos números e de suas propriedades: uma abordagem histórica para o ensino médio / Cléssio da Silva Araújo. – São Luís, 2018.

97 f

Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos.

1.Padrão numérico. 2.História dos números. 3.Contagem. 4.Sequências.
I.Título

CDU: 511:373.5(091)

Dedico este trabalho a três pessoas: Ao meu pai Hilbernon (In memorian), pois sem ele nada do que eu sou eu seria, à minha querida esposa Joyce e ao meu amado filho Pedro Henrique por serem a causa de quase todos os momentos felizes da minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois todas as bênçãos e conquistas que eu obtive no decorrer de tantos anos ocorreram por intermédio Dele.

A minha mãe Maria Iris Menezes, por toda luta e incansável esforço na tentativa de dá a melhor educação possível para mim e para meus irmãos.

Ao meu irmão Cassio Araújo, que me deu inestimável ajuda na elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos, pelas sugestões e apoio no decorrer de meses e que serviram de enorme contribuição para conduzir este trabalho.

Aos meus amigos de sala da 1ª turma do PROFMAT-UEMA, pelo apoio constante e por todos os momentos bons que tivemos em nosso curso.

À coordenação do PROFMAT-UEMA, pelo suporte e compreensão que nos deram durante esses dois anos, assim como pela incansável luta em formar mestres em Matemática.

Aos professores do PROFMAT-UEMA, pelo aprendizado e conquistas que obtivemos, sempre espelhados na conduta deles.

Aos meus amigos da Escola Nosso Mundo, que representam para mim uma grande família da qual tenho o privilégio de fazer parte.

Ao meu grande amigo Moysés Castro, pelos conselhos que serviram de grande valia em momentos em que eu parecia perdido.

“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.”

(Descartes)

RESUMO

O presente trabalho surgiu de uma necessidade de proporcionar aos alunos do Ensino Médio uma visão complementar dos números, a ligação que estes números têm com a natureza, a beleza que suas propriedades apresentam e o enfoque histórico que os alunos muitas vezes desconhecem. Para isso, esse trabalho é respaldado em autores com grande reputação sobre o tema como Ian Stewart, Georges Ifrah, Howard Eves, entre outros. A obra clássica de Ifrah “*Os números: a história de uma grande invenção*” narra, de maneira simples e interessante, a origem dos números e como eles sofreram grandes alterações no decorrer dos séculos, até chegar nos algarismos que utilizamos hoje. Já as obras de Stewart e Eves desenvolvem temáticas extremamente fascinantes acerca da Matemática e de suas propriedades. Dividido em três capítulos, este trabalho tenta, de maneira inovadora, apresentar o mundo dos números como um universo simples, envolvente e essencialmente regido por padrões, reafirmando, assim, a tão célebre frase de Pitágoras de que os números governam o mundo.

Palavras-chave: Padrão numérico. História dos números. Contagem. Sequências.

ABSTRACT

The present work arose from a need to provide high school students with a complementary view of the numbers, the connection that these numbers have with nature, the beauty that their properties present, and the historical focus that students often do not know. For this, this work is supported in authors with great reputation on the subject as Ian Stewart, Georges Ifrah, Howard Eves, among others. Ifrah's classic work "The Numbers: The Story of a Great Invention" tells in a simple and interesting way the origin of the numbers and how they have undergone great changes over the centuries until we reach the figures we use today. On the other hand, the works of Stewart and Eves develop extremely fascinating themes about Mathematics and its properties. Divided into three chapters, this paper attempts, in an innovative way, to present the world of numbers as a simple universe, encompassing and essentially governed by patterns, thus reaffirming Pythagoras' most famous phrase that numbers rule the world.

Keywords: Numerical pattern. History of numbers. Score. Sequences.

LISTA DE FIGURAS

| | Pág. |
|--|------|
| Fig.1 Práticas primitivas de contagem..... | 21 |
| Fig.2 Práticas primitivas de contagem..... | 21 |
| Fig.3 Prática da contagem duodecimal..... | 22 |
| Fig.4 Representação da forma de contagem asteca..... | 22 |
| Fig.5 Retratando a forma de contagem sexagesimal..... | 24 |
| Fig.6 Técnica de contagem para os números de 1 a 28..... | 25 |
| Fig.7 O cálculo com os dedos..... | 27 |
| Fig.8 Multiplicação de números entre 10 e 15 e entre 15 e 20..... | 27 |
| Fig.9 Representação da forma inca de contagem (quipu)..... | 28 |
| Fig.10 Representação de uma forma primitiva de contagem (entalhe)..... | 29 |
| Fig.11 Representação de um ábaco romano..... | 30 |
| Fig.12 Ábaco chinês representando o número 6.302.715.408..... | 31 |
| Fig.13 Sistema de Numeração Mesopotâmico de Base 60..... | 33 |
| Fig.14 Princípio aditivo..... | 34 |
| Fig.15 Princípio posicional..... | 34 |
| Fig.16 Representação ática dos algarismos de 1 a 10..... | 39 |
| Fig.17 Representação do método multiplicativo do sistema ático..... | 40 |
| Fig.18 Representação no sistema jônico..... | 40 |
| Fig.19 Representação de números no sistema jônico..... | 40 |
| Fig.20 Representação do sistema de numeração hieroglífico..... | 41 |
| Fig.21 Representação no sistema numérico hieroglífico..... | 42 |
| Fig.22 Representação do método multiplicativo egípcio..... | 42 |
| Fig.23 Representação do sistema de numeração romano..... | 42 |
| Fig.24 Representação primitiva dos algarismos romanos..... | 43 |
| Fig.25 Evolução histórica do “L” no sistema romano..... | 43 |
| Fig.26 Números em escrita kharosthi..... | 45 |
| Fig.27 Princípio aditivo na escrita kharosthi..... | 45 |
| Fig.28 Múltiplos de 10 na escrita kharosthi..... | 45 |
| Fig.30 Múltiplos de 10 no sistema de numeração Brahmi..... | 46 |
| Fig.31 Múltiplos de 100 no sistema de numeração Brahmi..... | 46 |
| Fig.32 Desenvolvimento dos algarismos hindu-arábicos..... | 47 |
| Fig.33 Representação sequencial dos números de 1 a 9 no antigo sistema de numeração hindu..... | 49 |
| Fig.34 Representação “por extenso” dos números de 1 a 9 no antigo sistema hindu..... | 49 |
| Fig.35 Representação maia horizontal dos números de 0 a 19..... | 51 |

| | | |
|--------|---|----|
| Fig.36 | Irregularidade operatória do zero maia..... | 54 |
| Fig.37 | Diagrama para a permutação X..... | 58 |
| Fig.38 | Diagrama para a permutação Y..... | 58 |
| Fig.39 | Diagrama para a permutação X seguida de Y..... | 58 |
| Fig.40 | Diagrama para a permutação XY, antes da unificação das setas..... | 59 |
| Fig.41 | Diagrama para a permutação XY, após a unificação das setas..... | 59 |
| Fig.42 | Representação do enigma 14-15..... | 60 |
| Fig.43 | Código de barras..... | 66 |
| Fig.44 | Números triangulares..... | 74 |
| Fig.45 | Números quadrangulares..... | 75 |
| Fig.46 | Números pentagonais..... | 75 |
| Fig.47 | Números hexagonais..... | 76 |
| Fig.48 | As diagonais de um pentágono regular..... | 79 |
| Fig.49 | Aproximação da espiral logarítmica..... | 79 |
| Fig.50 | Espiral de triângulos formando números padovanos..... | 80 |
| Fig.51 | As sequências de Fibonacci e Padovan..... | 81 |
| Fig.52 | O crivo de Eratóstenes..... | 83 |
| Fig.53 | Classificação dos números quanto à soma de seus divisores próprios..... | 86 |
| Fig.54 | Relação entre o e os lados do hexágono regular..... | 90 |
| Fig.55 | A curva sino..... | 91 |
| Fig.56 | O problema das agulhas de Buffon..... | 91 |
| Fig.57 | Família de espirais num abacaxi..... | 92 |
| Fig.58 | Construção de um quadrado mágico de ordem 5..... | 93 |
| Fig.59 | Método de construção de um quadrado mágico de ordem 4..... | 94 |
| Fig.60 | Método de construção de um quadrado mágico de ordem 8..... | 94 |

SUMÁRIO

| | Pág. |
|--|------|
| INTRODUÇÃO..... | 14 |
| 1. A TRAJETÓRIA HISTÓRICA DOS NÚMEROS E DA CONTAGEM.. | 16 |
| 1.1 A Pré-história dos números..... | 16 |
| 1.2 A prática de contar..... | 17 |
| 1.3 O surgimento das bases de contagem..... | 20 |
| 1.3.1 O surgimento da base..... | 20 |
| 1.3.2 Bases primitivas..... | 20 |
| 1.3.3 A base sexagesimal..... | 23 |
| 1.3.4 A base decimal..... | 24 |
| 1.4 Os primeiros instrumentos de contagem..... | 24 |
| 1.4.1 A mão como primeiro instrumento de contagem..... | 24 |
| 1.4.2 O cálculo com as mãos..... | 25 |
| 1.4.3 Instrumentos primitivos de contagem..... | 28 |
| 1.4.4 O surgimento do ábaco..... | 30 |
| 1.5 A invenção dos algarismos..... | 32 |
| 1.5.1 Sistema de numeração mesopotâmico..... | 33 |
| 1.5.2 O sistema babilônico..... | 35 |
| 1.5.3 O sistema ático..... | 38 |
| 1.5.4 O sistema egípcio..... | 41 |
| 1.5.5 O sistema romano..... | 42 |
| 1.5.6 O sistema de numeração hindu..... | 43 |
| 1.5.7 O surgimento dos algarismos arábicos..... | 46 |
| 1.6 Um breve histórico sobre a origem do zero..... | 47 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2. | OS PADRÕES NUMÉRICOS..... | 55 |
| 2.1 | Par ou ímpar? | 56 |
| 2.2 | Divisão euclidiana..... | 60 |
| 2.3 | A regra dos nove fora e o código de barras..... | 62 |
| 2.4 | Sequências numéricas..... | 68 |
| 2.4.1 | Progressões Aritméticas..... | 69 |
| 2.4.2 | Progressões Geométricas..... | 72 |
| 2.4.3 | Números poligonais..... | 73 |
| 2.4.4 | A sequência de Fibonacci..... | 77 |
| 2.5 | O número áureo e o número de plástico..... | 79 |
| 2.6 | Números primos..... | 82 |
| 2.6.1 | Números primos importantes..... | 84 |
| 2.6.2 | Números perfeitos..... | 85 |
| 3. | CURIOSIDADES NUMÉRICAS..... | 89 |
| 3.1 | Afinal, qual a utilidade do π ?..... | 89 |
| 3.2 | A sequência de Fibonacci na natureza..... | 92 |
| 3.3 | Quadrados mágicos..... | 93 |
| | CONCLUSÃO..... | 95 |
| | REFERÊNCIAS..... | 96 |

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre esteve presente nas mais diversas atividades humanas, sendo os números os principais elos da “rainha” das ciências com as demais áreas do conhecimento. Ela é acima de tudo uma forma de raciocínio que nos permite compreender o mundo, classificar as coisas, estabelecer padrões e encontrar respostas que vão desde os problemas mais simples, como é o caso da prática da contagem, até os casos mais enigmáticos, que às vezes levam séculos para serem resolvidos.

A fascinação que os números exercem através das belezas de suas propriedades nos proporciona incontáveis formas de descrever o mundo que conhecemos. Levanta-se, então, um questionamento: a realidade na sua totalidade pode ser descrita por propriedades numéricas? Ou seja, tudo é realmente número?

Este trabalho foi desenvolvido através de uma pesquisa bibliográfica, em que se fez um levantamento dos principais autores que relacionam a história da Matemática com as propriedades dos números. A ideia surgiu de uma aparente dúvida de um jogo de dominó: Por que no dominó, quando o jogo se diz “fechado”, a paridade da soma dos pontos de cada uma das duas duplas que estão jogando sempre deve ser a mesma? A partir daí, e de tantas outras curiosidades sobre números, a busca por autores e obras de renome foi incessante, dentre os quais Ifrah e Stewart são os mais mencionados.

Neste trabalho mostraremos que apesar da Matemática muitas vezes encontrar obstáculos para descrever o mundo, ela é um instrumento poderosíssimo capaz de fascinar o ser humano com a sutileza que os números proporcionam. Para isso, abordaremos temas interessantes para o aluno do Ensino Médio, tais como: a regra dos “noves fora”, o número de ouro, números primos e propriedades, sequências numéricas, números intrigantes, a relação entre os números e a natureza, bem como a origem do 0 e aplicação do π .

Alguns desses temas serão abordados sob um viés histórico uma vez que conceitos matemáticos, quando trabalhados nessa perspectiva, aproximam didaticamente os alunos, que conseguem perceber a estrita relação entre a Matemática e suas próprias vidas.

A história da matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a matemática como uma condição humana, ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria

condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.37)

O presente trabalho também objetiva-se a servir como base para muitos professores de Matemática que utilizam as propriedades dos números como forma de encurtar a distância entre o abstrato e o concreto. Servirá como modelo para que muitos educadores consigam diminuir a aflição de seus alunos (e as suas próprias) e projetar o ensino da Matemática cada vez mais associado ao dia-a-dia.

Este trabalho divide-se em três capítulos: o primeiro capítulo narra o surgimento e a evolução histórica dos números bem como das técnicas primitivas de contagem. O segundo capítulo trata de padrões numéricos, cujo enfoque foram os números primos e suas elegantes propriedades. Já o terceiro trata de curiosidades numéricas, onde alguns números interessantes serão apresentados ao leitor, usando a essência dos números e de suas propriedades como ferramenta para motivá-los na busca de problemas divertidos e intrigantes.

1. A TRAJETÓRIA HISTÓRICA DOS NÚMEROS E DA CONTAGEM

1.1 A Pré-história dos números

O conceito de número é um dos mais fundamentais da Matemática. A necessidade de contar objetos deu origem ao número natural, e todas as civilizações que criaram alguma forma de linguagem escrita desenvolveram símbolos para os números naturais e operaram com eles. Num primeiro estágio, não havia conceito de número. O número era designado por um nome. Num estágio mais avançado, os números foram separados dos objetos e se tornaram entes abstratos. Foram criados, então, os sistemas numéricos.

Qual é a origem dos números? Qual o motivo de tanto fascínio que eles exercem? Muitas dessas perguntas têm suscitado dúvidas e despertado muito interesse entre aqueles que gostam de brincar com números.

É difícil ao certo fazer um relato cronológico do surgimento do conceito de número. Mas há quase um consenso de que esse conceito surgiu a partir dos primeiros esforços humanos em sistematizar a relação entre objetos de diferentes conjuntos.

O que se sabe é que houve um momento em que o homem não sabia contar. Ainda hoje existem homens em sociedades desprovidas de qualquer tipo de noção abstrata de número. Para estes, o número não consegue ser concebido através da abstração. Ele é sentido da forma como conseguimos cheirar, distinguir uma cor, ouvir um ruído.

Essa é uma realidade que vem de muito tempo como afirma Ifrah:

[...] O homem das épocas mais remotas desta história devia também ser incapaz de conceber os números em si mesmos. E suas possibilidades numéricas deviam, do mesmo modo, resumir-se numa apreciação global do espaço ocupado pelos seres e pelos objetos vizinhos. Nosso ancestral remoto devia no máximo poder estabelecer uma nítida diferença entre a unidade, o par e a pluralidade. (IFRAH, 1989, p.16-17)

Apesar da ausência do significado de número, os seres humanos, mesmo nas épocas mais remotas, tinham algum tipo de senso numérico. Não no sentido de fazer operações entre elementos, mas no sentido de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam elementos de um determinado conjunto. Aliás, existem estudos de que até mesmo animais são dotados desse tipo de senso, como salienta Ifrah:

Determinadas espécies animais também são dotadas de um tipo de percepção direta dos números. Em alguns casos, esta capacidade natural lhes permite reconhecer que um conjunto (numericamente reduzido),

observado pela segunda vez, sofreu uma modificação depois que um ou vários componentes foram retirados ou acrescentados. (IFRAH, 1989, p.19)

Há relatos, por exemplo, de pintassilgos que eram capazes de distinguir quantidades diferentes de grãos em seus alimentos e até de rouxinóis que eram capazes de diferenciar quantidades concretas de um a quatro. (Para mais detalhes vide IFRAH, G. A história universal dos algarismos. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997, p.26-30)

1.2 A prática de contar

Historicamente uma das grandes inquietações que vem desde os tempos remotos da Matemática foi a essência do número. Mas afinal, o que é número? Uma coerente definição de número foi dada em 1884 pelo matemático alemão Gottlob Frege na obra *As fundações da Aritmética* indicando que o número seria a classe de todas as classes que estão em necessária correspondência com uma determinada classe (Frege *apud* Stewart, 2015, p.27). Isto quer dizer, por exemplo, que um conjunto de sete xícaras ou de sete pires, apesar de quantificarem objetos distintos, representam essencialmente o número 7.

Frege referiu-se ao fato de que a noção de número independe de qualquer forma de representação simbólica, mas na verdade constitui-se de uma correspondência entre dois conjuntos.

A milenar história dos números sempre refletiu a necessidade do homem em quantificar as coisas. Quantificar é o ato que consiste em mensurar uma quantidade, expressando-a através de números. Em suma, quantificar é determinar a quantidade de elementos de um conjunto. No entanto, para que o homem possa quantificar as coisas é necessário que ele saiba contar. Mas afinal, o que significa contar objetos?

Contar objetos significa atribuir a cada um desses elementos um símbolo que corresponde a um número que está associado a uma sequência, começando com a unidade e prosseguindo até o encerramento dos elementos.

Como exemplo, temos uma fila com 50 pessoas. Se tivermos a necessidade de contar o número de pessoas dessa fila procedemos atribuindo o “número 1” à primeira pessoa da fila, o “número 2” à segunda, e assim por diante, até que o número 50 seja atribuído à última pessoa da fila. Poderemos então garantir que havia 50 pessoas na fila.

Notemos que a enumeração por este ou aquele elemento sempre conduzirá ao mesmo resultado, ou seja, a qualquer pessoa da fila poderia ser atribuído o “número 1”, desde que se esgotassem todos os elementos do conjunto.

Para Ifrah, a contagem pressupõe um entendimento sobre a noção de sucessão. Ele afirma que:

Na verdade, todo integrante da sequência regular dos números inteiros diferente de “1” é obtido pelo acréscimo de uma unidade ao número que o precede nesta sucessão natural. É o chamado *princípio da recorrência*, do qual se conclui, segundo a expressão do filósofo alemão Schopenhauer, que “todo número inteiro natural pressupõe os precedentes como causa de sua existência”. Isto é, *nosso espírito [sic] só é capaz de conceber um número sob o ângulo da abstração se já tiver assimilado os números precedentes*; sem esta capacidade intelectual, os números voltam a ser noções globais bastante confusas no espírito do homem. (IFRAH, 1989, p.47)

A questão do conceito de número, que de início parecia elementar, agora se torna algo sofisticado. Essa noção abrange dois aspectos complementares: o número cardinal e o número ordinal.

Como exemplo, podemos utilizar o mês de junho. Esse mês tem 30 dias. O número 30 representa a quantidade de dias que esse mês tem. Nesse caso é um número cardinal. Por outro lado, se considerarmos a expressão “dia 30 de junho”, o número 30 não está sendo empregado no aspecto cardinal. Ele designa uma ordenação: *o trigésimo* dia do mês de junho. Ou seja, ele especifica a posição desse elemento (o último da sucessão dos dias desse mês). Trata-se então de um número ordinal.

Aprendemos de forma tão natural a passar do número cardinal para o ordinal que não conseguimos distinguir esses dois aspectos. Quando aprendemos o conceito de número cardinal não precisamos mais recorrer a outro conjunto para equiparar seus elementos: simplesmente o contamos. No entanto, o conceito de contagem está associado ao de sucessão, que é a essência do número ordinal. Isso nos mostra que os sistemas de numeração estão intimamente relacionados a esses aspectos: o de correspondência e o de sucessão.

O princípio da correspondência deu sentido à prática da contagem. Tribos passaram a ter a necessidade, por exemplo, de saber quantos eram os seus membros, qual era o tamanho de seus rebanhos, etc. Isso mostra que a invenção dos números está associada a problemas de ordem prática, como contar coisas.

De acordo com Ifrah “Tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata” (IFRAH, 1989, p.25). É muito provável que a arte de contar tenha surgido através desse conceito que hoje denominamos

de relação biunívoca (relação entre dois conjuntos de forma que cada elemento do primeiro conjunto esteja em correspondência única com outro elemento do segundo conjunto).

Para entendermos essa *correspondência um a um* tomemos como exemplo um teatro com assentos para seus convidados. Nesse exemplo estamos diante de dois conjuntos: assentos e convidados. Através da *correspondência um a um* podemos estabelecer se esses conjuntos têm a mesma quantidade de elementos ou não, mesmo sem ter uma representação simbólica para representar suas quantidades.

Dessa forma, se cada convidado estiver associado a um único assento e, da mesma maneira, cada assento estiver associado a um único convidado, então se existirem assentos vazios e se ninguém estiver em pé no teatro, há mais assentos do que convidados. Por outro lado, se alguns convidados estiverem em pé, e se não há mais nenhum assento vazio, então saberemos que há mais convidados do que assentos. Por fim, se não há nenhum convidado em pé, e se não há nenhum assento vazio, saberemos que há tantos assentos quanto convidados. Nesse último caso, há uma equiparação entre os dois conjuntos, ou seja, existe uma bijeção entre o conjunto de convidados e o de assentos.

Essa possibilidade de equiparação entre dois conjuntos distintos é retratada por Ifrah:

Quando queremos equiparar termo a termo os elementos de uma primeira coleção com os de uma segunda, origina-se uma noção abstrata, inteiramente independente da natureza dos seres ou dos objetos presentes e que exprime uma característica comum a estas duas coleções. Desta forma, conjuntos como o dia e a noite, os gêmeos, um casal de animais, as asas de um pássaro ou ainda os olhos, as orelhas, os braços, os seios ou as pernas de um ser humano apresentam um caráter comum, totalmente abstrato, que é justamente o de “ser dois”. (IFRAH, 1989, p.30)

Assim, a propriedade de equiparação retira a distinção que existe entre os dois conjuntos mencionados, em razão da natureza de seus elementos respectivos. A partir daí, a correspondência um a um exerce importante papel na enumeração de elementos de um determinado conjunto.

Esse método de correspondência não apenas possibilita a comparação de conjuntos distintos, mas também oferece uma maneira de englobar vários números mesmo sem ter o conhecimento das quantidades envolvidas. Foi através desse método que o homem pré-histórico conseguiu praticar a aritmética mesmo sem ter a noção abstrata de número.

Ao contrário dessa percepção direta dos números, a arte de contar não é uma aptidão natural. Ela é uma característica exclusivamente humana pois, apesar de alguns animais demonstrarem algum senso numérico, os animais não contam da mesma forma que nós.

1.3 O surgimento das bases de contagem

1.3.1 O surgimento da base

Graças às noções de abstração dos números e a distinção entre número cardinal e ordinal é que o homem passou a enxergar os seus instrumentos sob a ótica da contagem. Mesmo com a utilização de seus instrumentos como símbolos numéricos, o homem passou a enfrentar obstáculos ao conceber números cada vez mais extensos. Assim, o número de dedos das mãos ou das partes do corpo já não era mais suficiente para contar. O homem passou então a buscar soluções para essa necessidade: a de tentar expressar números cada vez maiores com o mínimo possível de símbolos.

As bases se transformaram em preciosas ferramentas de contagem como afirma Eves:

Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Isso foi feito dispondo-se os números em grupos básicos convenientes, sendo a ordem de grandeza desses grupos determinada em grande parte pelo processo de correspondência empregado. Esquematizando as ideias, o método consistia em escolher um certo número b como base e atribuir nomes aos números $1, 2, \dots, b$. Para os números maiores do que b os nomes eram essencialmente combinações dos números já escolhidos. (EVES, 2004, p.27)

Assim, dizemos que um número n está escrito em uma base b , se n puder ser representado como combinação dos elementos da base b . Como exemplo, o número 245 escrito na base decimal pode ser representado da seguinte forma:

$$245 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

1.3.2 Bases primitivas

Existem poucas evidências de quais teriam sido as primeiras bases a serem utilizadas pelo ser humano. Suspeita-se que 2, 3 e 4 foram as primeiras bases a serem utilizadas. Alguns registros apontam agrupamentos de objetos em pares ou trios. Já o sistema de base 5 tem origem antropomórfica. A base *quinária* tem sua razão de existência no fato de que alguns povos passaram a contar numa única mão, agrupando os objetos por feixes de cinco. É curioso como era feito a prática da contagem no sistema quinário, como cita Ifrah:

Contam-se inicialmente as cinco primeiras unidades, estendendo sucessivamente os dedos da mão esquerda. Em seguida, quando se chega ao número 5, dobra-se o polegar direito. Depois se continua a contar até 10, estendendo novamente os dedos da mão esquerda, para dobrar o indicador direito quando as cinco unidades suplementares tiverem sido consideradas. Assim se poderá contar até 25. E, se não bastar, a operação poderá ser prolongada até 30, voltando de novo aos dedos da mão esquerda, agora livre. (IFRAH, 1989, p.60)

Figuras 1 e 2: Práticas primitivas de contagem.



Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAexUsAG/resumo>

Há indícios também de que o homem pré-histórico utilizava a contagem por dúzias, principalmente em relação a medidas. A utilização da base 12 certamente trouxe um sistema de numeração mais cômodo do que as 2, 3, 4 e 5, pelo fato do 12 ser divisível por 1, 2, 3, 4 e 6.

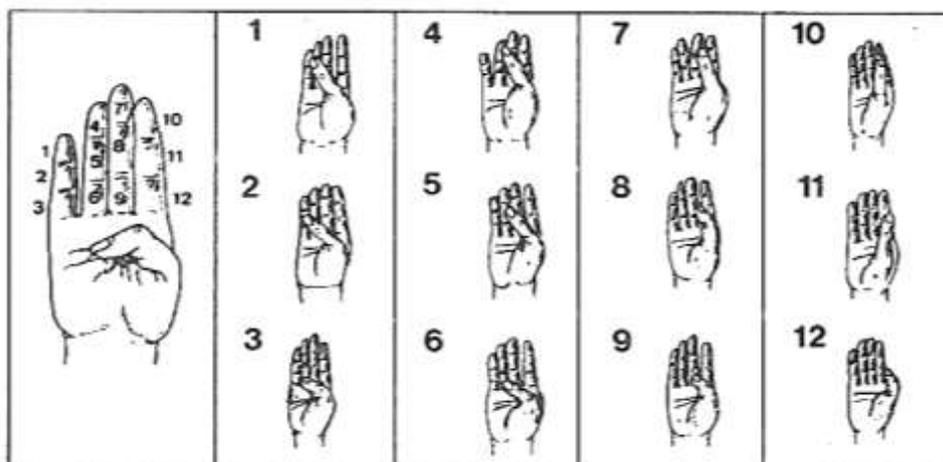
Esta numeração foi muito utilizada em antigos sistemas comerciais. Os sumérios tinham o hábito de subdividir o dia em doze partes iguais, aos quais chamavam *danna*, que hoje equivalem a duas de nossas horas. Até hoje tem-se o hábito de contar banana e pães na base 12. Não é à toa que a expressão “dúzia de padeiro” ficou consagrada.

A origem da base duodecimal talvez esteja fundamentada na mão. O próprio Ifrah chega a uma hipótese, quando sugere que:

[...] Com efeito, é possível contar de 1 a 12 usando os dedos de uma única mão: basta apoiar o polegar, sucessivamente, em cada uma das três

falanges (ou articulações) dos quatro dedos opostos da mesma mão. Tendo cada dedo três falanges, e estando as do polegar excluídas da conta (pois é o dedo que efetua a operação), a dúzia pode impor-se deste modo como base de um sistema numérico. (IFRAH, 1989, p.67)

Figura 3: Prática da contagem duodecimal.



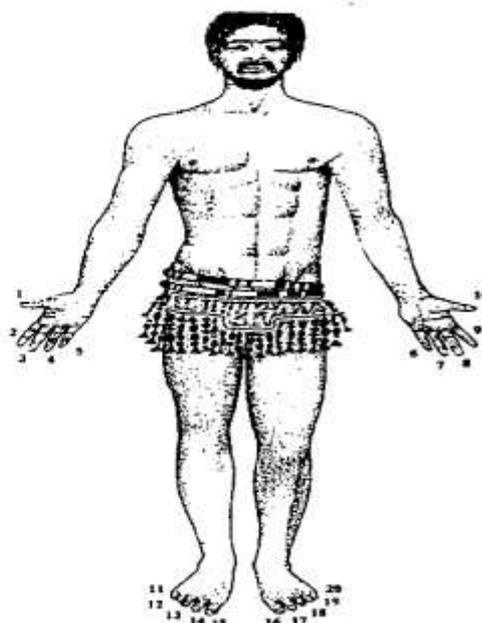
Fonte: <https://qualeoxisdaquestao.wordpress.com/tag/contagem-com-as-maos/>

Outros povos preferiram, no entanto, agrupar objetos em coleções de vintenas ou potências de 20. Foi, por exemplo, o caso de povos do Senegal, Guiné, Nigéria e outros povos africanos, além dos maias e astecas da América pré-colombiana.

A contagem dos astecas se baseava em partes do corpo como destaca a figura:

Figura 4: Representação da forma de contagem asteca.

- 1 polegar direito
- 2 indicador direito
(= 1 + 1)
- 3 médio direito
(= 1 + 2)
- 4 anular direito
(= 1 + 3)
- 5 mínimo direito
(= 1 + 4)
- 6 mínimo esquerdo
(= 5 + 1)
- 7 anular esquerdo
(= 5 + 2)
- 8 médio esquerdo
(= 5 + 3)
- 9 indicador esquerdo
(= 5 + 4)
- 10 polegar esquerdo
(= 5 + 5)
- 11 pequeno arnelho direito
(= 10 + 1)
- 12 arnelho seguinte
(= 10 + 2)
- 13 arnelho seguinte
(= 10 + 3)
- 14 arnelho seguinte
(= 10 + 4)
- 15 grande arnelho direito
(= 10 + 5)
- 16 grande arnelho esquerdo
(= 15 + 1)
- 17 arnelho seguinte
(= 15 + 2)
- 18 arnelho seguinte
(= 15 + 3)
- 19 arnelho seguinte
(= 15 + 4)
- 20 pequeno arnelho esquerdo
(= 15 + 5)



Fonte: <http://docplayer.com.br/178681-Soroba-suas-implicacoes-e-possibilidades-na-construcao-do-numero-e-no-processo-operatorio-do-aluno-com-deficiencia-visual.html>

Mesmo se desenvolvendo em grandes civilizações, como a asteca, a numeração vigesimal não foi muito difundida no decorrer da história. Porém percebe-se em diversas línguas traços de sua utilização. Expressões inglesas envolvendo a base 20 são empregadas até hoje como *one score, two scores, three scores, etc.*, significam respectivamente 20, 40, 60 etc.

1.3.3 A base sexagesimal

A origem da base 60 ainda é desconhecida. Até hoje não se sabe o motivo pelo qual os sumérios (possivelmente o primeiro povo a empregar essa base) escolheram uma base tão elevada. Há várias hipóteses para explicar o surgimento dessa base, entre as quais a mais aceitável é a de que ela teria surgido da combinação das bases 5 e 12. A própria língua suméria sugere isso quando, por exemplo, representa o número 6, escrito como *àsh* (= *à* + *sh* = *ià* + *gesh* = 1 + 5).

Outra teoria sugere que o arredondamento do número de dias do ano para 360, possibilitou a divisão do círculo em 360°. E, já que a corda do sextante é igual ao raio correspondente, este número teria influenciado a divisão do círculo em seis partes de 60°, possibilitando a preferência pela base sexagesimal.

Uma hipótese curiosa é a da fusão de duas práticas de contagem: uma que utilizava a contagem por dúzias (que era muito utilizada pelos sumérios) e outra que utilizava a contagem por dezenas. Isto teria favorecido a utilização da sessentena como base principal, devido o 60 ser o *mínimo múltiplo comum* entre essas bases secundárias, além de ser o menor número que apresenta os seis primeiros números naturais como divisores.

De qualquer maneira, essa forma de contar possibilitou outra interessante técnica com os dedos, onde o 60 aparecia como base principal e 12 e 5 como bases auxiliares. Nas palavras de Ifrah, essa técnica era utilizada da seguinte forma:

Na mão direita conta-se de 1 a 12, apoiando o polegar, sucessivamente, nas três falanges dos quatro dedos opostos da mesma mão. Ao atingir a dúzia nesta mão, dobra-se o mindinho esquerdo. Volta-se à primeira mão e conta-se de 13 a 24 repetindo a mesma técnica. Uma vez atingido o 24, dobra-se o anular esquerdo e se continua a contar do mesmo modo na mão direita de 25 a 36. Abaixa-se em seguida o médio da mão esquerda e se procede do mesmo modo até 48 (quando se dobra o indicador esquerdo), e depois até 60, quando os cinco dedos da mão esquerda são dobrados. (IFRAH, 1989, p.70)

Figura 5: Retratando a forma de contagem sexagesimal.



Fonte: <https://qualeoxisdaquestao.wordpress.com/tag/contagem-com-as-maos/>

1.3.4 A base decimal

A base 10 tem possivelmente origem no fato de pastores (possivelmente do Oriente médio), em épocas muito remotas, terem o costume de contar seus rebanhos empregando uma técnica que utilizava conchas e fio de lã branca. Para cada grupo de 10 animais, o colar feito de conchas era desmanchado e se introduzia uma concha agora numa lã azul, que representava as dezenas. E se continuava o processo até chegar ao vigésimo animal (em que novamente outra concha era introduzida no fio de lã azul). O processo era feito até que se chegasse a 100 animais. Nesse momento, o colar das dezenas era desfeito e uma concha era posta numa linha de lã vermelha, representando as centenas.

É razoável, portanto, supor que o emprego da base 10 também tem raiz antropomórfica. O homem passou a agrupar objetos em grupos de 10 associando cada elemento a um dos dedos das mãos. A sua utilização tem vantagens claras, motivo pelo qual a base 10 é universalmente utilizada e adotada até os dias atuais. Uma dessas vantagens reside no fato de que não é uma base grande, como a vigesimal e a sexagesimal, portanto, apresenta poucos símbolos para representar seus elementos.

Logo, uma simples tabela de multiplicação seria de fácil memorização. Da mesma forma, a base decimal tem vantagem sobre as bases pequenas, como a binária e a quinária, pois evita uma representação extensa do numeral. Para se ter uma ideia o número 53, escrito na base 10 tem 2 algarismos. Já na base binária ele é escrito com 6 algarismos.

1.4 Os primeiros instrumentos de contagem

1.4.1 A mão como primeiro instrumento de contagem

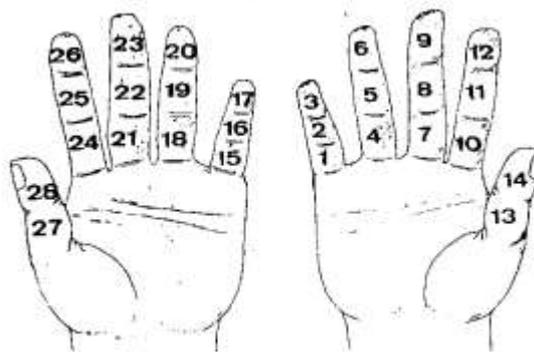
Historicamente a mão se tornou o nosso primeiro instrumento de contagem. O método que utilizamos hoje consiste em atribuir a cada dedo um número natural, iniciando

a contagem de forma sucessiva e tendo a unidade como ponto de “partida”. Sobre o uso das mãos, Ifrah comenta:

O procedimento a que às vezes recorremos, e através do qual as crianças aprendem a contar, é o mais comum. Ele consiste em atribuir um valor inteiro a cada dedo na ordem da sucessão regular dos números, começando pela unidade. Nesta técnica digital, que apresenta variações múltiplas em todo o mundo, a atribuição numérica é feita ora levantando sucessivamente os dedos – começando com as mãos fechadas –, ora baixando-os uns após os outros a partir de uma posição aberta. Além disso, a ordem desta distribuição pode ser tanto da direita para esquerda quanto da esquerda para a direita. Finalmente, esta contagem pode começar tanto pelo polegar quanto pelo mindinho, ou ainda pelo indicador, como fazem os muçulmanos do norte da África. (IFRAH, 1989, p.80)

Uma técnica muito comum até hoje na China e na Índia é a contagem usando as falanges dos dedos das mãos. Com essa técnica é possível contar de 1 a 14 em uma das mãos (e até 28 usando as duas mãos). Para isso, deve-se levar em conta que cada falange tem valor de unidade, começando a contagem em uma das mãos pela falange inferior do dedo mindinho e prosseguindo até a falange superior do polegar.

Figura 6: Técnica de contagem para os números de 1 a 28.



Fonte: Ifrah, 1989, p.83.

1.4.2 O cálculo com as mãos

A mão, além de ser um importante instrumento de contagem, também pode ser utilizada para efetuar diversas operações aritméticas básicas, como a multiplicação. Há vestígios de povos antigos que efetuavam cálculos aritméticos com os dedos das mãos sem recorrer a nenhum tipo de artifício, quer seja geométrico ou algébrico.

Ifrah (1989, p.94-95) afirma que um amigo seu, como exemplo, para *multiplicar 8 por 9* dobrava numa das mãos tantos dedos quantas unidades suplementares há em 8 com

relação a 5 (3 dedos) e mantinha os dois outros estendidos. Em seguida, dobrava na outra mão os dedos correspondentes às unidades, suplementares de 9 em relação à 5 (4 dedos), mantendo o último estendido. A partir daí ele encontrava o resultado multiplicando inicialmente por 10 o número de dedos dobrados nas duas mãos – o que dava $(3+4) \times 10 = 70$ -, acrescentando em seguida este resultado parcial ao produto dos dedos levantados da primeira mão pelos dedos idênticos da outra (isto é: $2 \times 1 = 2$). Assim, ele chegava a $8 \times 9 = (3 + 4) \times 10 + (2 \times 1) = 72$.

O fato de essa técnica funcionar perfeitamente para qualquer multiplicação de números que estejam compreendidos entre 5 e 10 é justificado da seguinte forma (nos dias atuais e de maneira algébrica): Considere x e y dois números compreendidos entre 5 e 10 (os quais pretendemos multiplicar). Ao dobrarmos numa das mãos os dedos correspondentes às unidades suplementares de x em relação a 5, teremos $(x - 5)$ dedos dobrados numa das mãos, e na outra, tantos dedos quanto forem as unidades suplementares de y em relação a 5, ou seja, teremos $(y - 5)$ dedos dobrados na outra mão.

Em relação ao número de dedos dobrados nas duas mãos, ele será igual:

$$D = (x - 5) + (y - 5) = x + y - 10.$$

Chamemos agora de E e F o número de dedos levantados em cada mão. A regra se resume à seguinte expressão algébrica:

$$(10 \times D) + (E \times F)$$

Essa expressão é o produto do número total de dedos dobrados por 10, somado com o produto dos dedos levantados. Desenvolvendo a expressão temos:

$$\begin{aligned} 10(x + y - 10) + [5 - (x - 5)][5 - (y - 5)] &= \\ 10x + 10y - 100 + [10 - x][10 - y] &= \\ 10x + 10y - 100 + 100 - 10x - 10y + xy &= xy. \end{aligned}$$

Ifrah (1989, p.96-97) também afirma que seu amigo camponês era capaz de multiplicar números compreendidos entre 10 e 15 e, de maneira semelhante, entre 15 e 20, e assim por diante. Ele narra que, para multiplicar 14 por 13, por exemplo, o camponês dobrava numa das mãos os dedos correspondentes às unidades suplementares de 14 em relação a 10 (4 dedos) e na outra, tantos dedos quantas são as unidades suplementares de 13 em relação a 10 (3 dedos). O camponês chegava ao resultado multiplicando, de cabeça, por 10 o número total de dedos dobrados – o que dava $(4 + 3) \times 10 = 70$, acrescentando a esse resultado o produto dos dedos dobrados, ou seja, $(4 \times 3 = 12)$. Enfim, ele acrescentava a este resultado o número 100.

Dessa forma, ele chegava a:

$$14 \times 13 = 10 \times (4 + 3) + (4 \times 3) + 100 = 182.$$

A justificativa algébrica desse método é análoga à do método anterior:

Para multiplicarmos dois números x e y , compreendidos entre 10 e 15 fazemos:

$$10[(x - 10) + (y - 10)] + (x - 10)(y - 10) + 100 = xy.$$

A figura 7 mostra dois exemplos de como eram feitas as multiplicações de números compreendidos entre 5 e 10, recorrendo-se ao cálculo com os dedos:

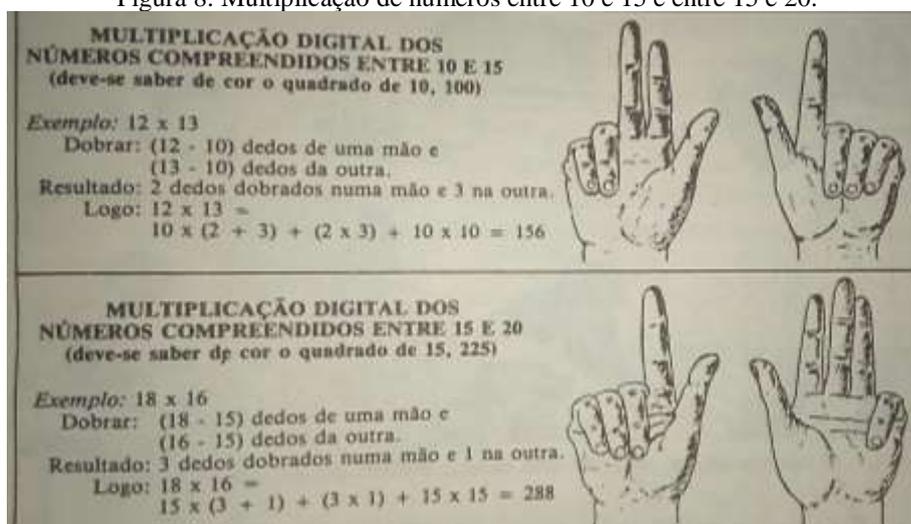
Figura 7: O cálculo com os dedos



Fonte: Ifrah, 1989, p.95.

Já a figura 8 nos fornece exemplos de como eram feitas as multiplicações que envolvem números entre 10 e 15 e entre 15 e 20 usando o cálculo com os dedos:

Figura 8: Multiplicação de números entre 10 e 15 e entre 15 e 20.



Fonte: Ifrah, 1989, p.97.

Exemplos como estes sugerem que, durante séculos, os homens usaram diversos recursos para efetuar cálculos com as mãos, mesmo não tendo um sistema numérico consolidado.

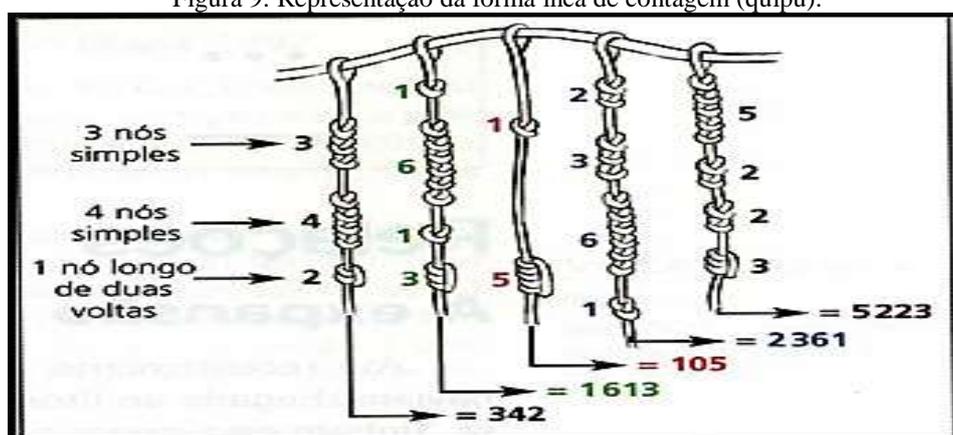
1.4.3 Instrumentos primitivos de contagem

Inúmeras foram as ferramentas desenvolvidas pelo homem no intuito de aperfeiçoar a contagem. A civilização inca usava, em seu sistema de contabilidade, um sistema interessante de cordões em nós. Esse sistema era denominado *quipu* (que significa “nó”). O *quipu* em essência era uma corda de aproximadamente 60 cm de comprimento em que eram amarrados vários fios (cordões) coloridos e postos em intervalos regulares.

O *quipu* era um instrumento que se baseava na base decimal e tinha uma grande utilidade no sistema de contabilidade dos incas. A forma como os incas utilizavam os nós nos cordões para representar determinado número é exposta por Ifrah:

Num cordão munido de diversas marcas consecutivas, equidistantes umas das outras, as nove unidades simples eram representadas efetuando-se tantos nós quanto fossem necessários no nível da primeira marca, a partir da ponta do cordão pendente. Em seguida, figuravam-se as nove dezenas pelo mesmo número de nós no nível da segunda marca, as nove centenas fazendo o mesmo na terceira marca, e assim por diante. Para representar o número 3643, por exemplo, faziam-se três nós ao nível da primeira marca, quatro na segunda, seis na terceira e três na quarta. (IFRAH, 1989, p.100)

Figura 9: Representação da forma inca de contagem (quipu).

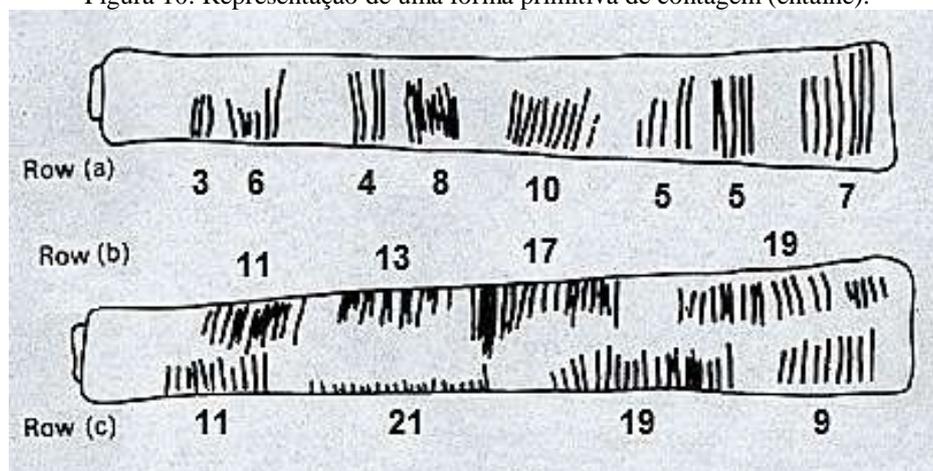


Fonte: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2014/11/matematica-na-antiguidade-os-incas.html>

Outra técnica primitiva que permitia a memorização e representação dos números era o *entalhe*. Os primeiros indícios do aparecimento dessa técnica datam período aurignacense (35000 a 20000 a.C), um período que estima-se ter se iniciado há 45 mil anos numa cultura material do que se convencionou chamar de Paleolítico Superior. Os entalhes mais antigos mostram que o homem primitivo já concebia a noção de base, visto que os entalhes eram divididos de modo regular, quando na verdade a prática do entalhe consistia apenas numa série contínua de traços.

A finalidade desses entalhes ainda continua um mistério, mas esse método já demonstrava um rudimentar senso aritmético. A cada vez, por exemplo, que o homem matava um animal, ele fazia um pequeno traço num osso. Para não ter a necessidade de contar várias vezes o conjunto de entalhes, o homem acabava por agrupá-los de cinco em cinco, provavelmente tendo como referência os cinco dedos da mão. Dessa forma, o homem estabeleceu uma notação gráfica dos primeiros números inteiros na base quinária.

Figura 10: Representação de uma forma primitiva de contagem (entalhe).



Fonte: <https://www.matematicafacil.com.br/2016/07/matematica-continente-africano-osso-ishango.html>

Outro método que desempenhou um papel importante na aritmética e na contabilidade foi o uso dos “montes de pedrinhas” (ou outros objetos que pudessem ser de fácil acesso e de fácil agrupamento). Essa prática, que é tão rudimentar quanto a prática do entalhe, é o ponto de partida de qualquer método numérico, pois não exige nenhuma memorização nem conhecimento abstrato dos números.

Mas foi a partir do momento em que o homem passou a ter um domínio razoável do conceito de base é que esse método permitiu grandes progressos na arte da contagem. Sobre isso, Ifrah comenta:

Este método desempenhou um papel importante na história da aritmética na medida em que foram as pedras que permitiram verdadeiramente ao homem iniciar-se na arte do cálculo. E, quando dizemos “cálculo”, a própria palavra nos remete a este processo que vem do fundo dos tempos, pois em latim *calculus* significa precisamente “pequena pedra”, etimologia que encontramos nas línguas grega e árabe, por exemplo: na primeira, *pséphos* significa ao mesmo tempo “um número” e “uma pedra”, e na segunda a palavra *haswa*, que significa “pedra”, tem o mesmo radical que *Isa*, cujo sentido é “enumeração” ou estatística”. (IFRAH, 1989, p.117)

1.4.4 O surgimento do ábaco

As pedras estão intimamente relacionadas à origem dos ábacos. A palavra ábaco deriva do grego *abakos*, derivado da palavra *abax* (tábua de cálculos). Este instrumento teve origem provavelmente na Babilônia e foi de extrema importância no comércio, impulsionando o surgimento das primeiras máquinas de calcular. Historiadores acreditam que ábaco tenha surgido das tábuas de cálculos desenvolvidas pelo homem na tentativa de criar instrumentos que possibilitassem o registro e a simplificação de contagens.

Dentre os primeiros ábacos destaca-se o ábaco de bolso romano, que consistia numa placa metálica com um determinado número de ranhuras paralelas, em que botões móveis deslizavam ao longo dessas ranhuras.

Ifrah explica como era feita a representação dos números no ábaco de bolso romano:

Cada uma dessas ranhuras correspondia geralmente a uma ordem decimal, com exceção das duas primeiras à direita, reservadas às frações do *as* (mais precisamente às onças, ou doze avos desta unidade aritmética, monetária ou ponderável, assim como à metade, ao quarto e ao terço de onça). Partindo da direita para esquerda, a terceira ranhura correspondia de fato às unidades simples (ou, para os cálculos monetários ou de peso, aos *as*), a quarta, às dezenas, a quinta, às centenas, a sexta, aos milhares, e assim por diante. Além disso, cada ranhura associada a uma ordem de inteiros era subdividida em duas peças distintas: uma, em posição inferior, tinha quatro botões valendo, cada um, uma unidade da ordem decimal correspondente; a outra, mais curta e em posição superior, com um botão apenas, de valor cinco vezes maior. (IFRAH, 1989, p.121-122)

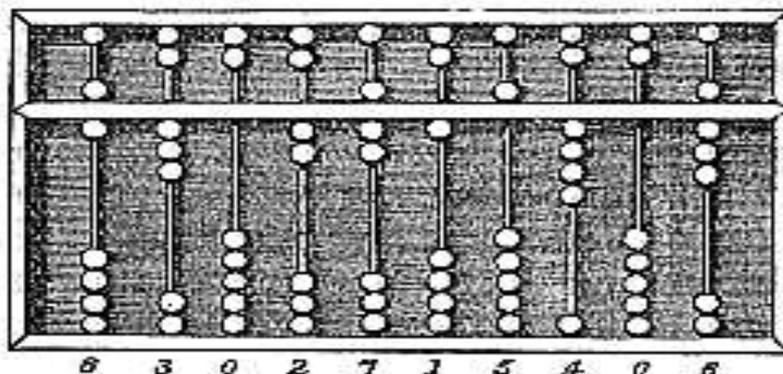
Figura 11: Representação de um ábaco romano.



Fonte: <http://slideplayer.it/slide/529846/>

O ábaco foi se incorporando às grandes civilizações como um poderoso instrumento para efetuar cálculos. Outro ábaco que ficou muito conhecido foi o ábaco chinês.

Figura 12: Ábaco chinês representando o número 6.302.715.408.



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/Abacus_6.png

Este poderoso instrumento de cálculo era constituído, em geral, de um quadro retangular de madeira, formado por uma quantidade definida de hastes nas quais se encontravam bolas móveis que poderiam ser aproximadas de uma vareta horizontal, que dividia o quadro em duas partes.

Dessa forma, a disposição das bolas era feita de tal maneira que sempre configuravam duas bolas em cima da haste transversal e cinco bolas embaixo. Cada haste representava uma ordem decimal específica. Por convenção, a haste situada à esquerda tem valor dez vezes maior que a haste situada à sua direita. As bolas situadas acima da haste transversal representam múltiplos de 5 (0, 5 e 10). A figura 12 mostra a representação do número 6.302.715.408 no ábaco chinês. Na primeira haste (da direita para a esquerda), por exemplo, nota-se que na parte superior uma bola foi aproximada à transversal, e na parte inferior, três bolas foram aproximadas. Como cada bola na parte superior vale 5 unidades e cada bola na parte inferior tem valor de 1 unidade temos então $5 + 3 = 8$.

Dessa maneira, para indicar o número 2, por exemplo, basta suspender duas bolas da parte inferior da haste das unidades. Por outro lado, para indicar o número 7, é necessário abaixar uma bola da haste superior das unidades e suspender duas bolas da parte inferior dessa mesma haste.

Números decimais também eram representados nessa ferramenta de cálculo. Ifrah salienta:

Em geral, os usuários do contador chinês não começam pelas duas primeiras hastes (da direita para a esquerda), reservando-as para as frações decimais de primeira e segunda ordem, isto é, para os décimos e centésimos da unidade. Neste caso, a terceira haste é destinada às unidades simples, a

seguinte, às dezenas, a quinta, às centenas, e assim por diante. (IFRAH, 1989, p.126)

Dessa forma, para representar o número 26,57 é necessário elevar inicialmente duas bolas inferiores da haste dos centésimos e abaixar uma bola superior dessa mesma haste. Em seguida, abaixa-se uma bola superior da haste dos décimos. Depois, na haste das unidades, ergue-se apenas uma bola inferior e abaixa-se também uma bola superior. Por fim, na haste das dezenas, erguem-se duas bolas inferiores.

1.5 A invenção dos algarismos

Um dos acontecimentos mais revolucionários da história da humanidade foi a invenção dos algarismos. Muitos foram os povos que sentiram necessidade de criar seus próprios sistemas de numeração. Dentre estes povos, os babilônios, os gregos, os romanos, os maias, os chineses e os hindus desenvolveram importantes sistemas numéricos, no intuito de conseguir aperfeiçoar a arte da contagem.

Isso facilitou a manipulação de várias operações envolvendo os números, que agora seriam representados através de símbolos gráficos. Portanto, essa iniciativa do homem em sistematizar a contagem foi uma tentativa de contornar os obstáculos que surgiram quando o homem passou a operar com números muito extensos.

O homem possui aquilo a que podemos chamar de *iniciativa* simbólica, isto é, ele pode atribuir símbolos para representar objetos ou ideias, estabelecer relações entre eles e operar com eles num nível conceitual (WILDER, 1968, p.4).

Os números passaram a ser dispostos em grupos, adotando-se um número b como base. Eles foram distribuídos de maneira regular e hierarquizada, fundamentados em suas respectivas bases. Em termos não muito formais, mas suficientemente descritivos, diremos que “base” é o número de unidades que se convencionou tomar para com elas construir uma unidade maior, de ordem imediatamente superior, num processo que, em princípio, se pode repetir até ao infinito (NOGUEIRA, 2001, p.39).

Grande parte dos sistemas numéricos utilizados no decorrer da história evidenciavam muitas dificuldades estruturais. Uma dessas dificuldades consistia na representação de valores muito elevados. Mas foi graças a existência de símbolos para valores superiores à base, que o homem conseguiu atenuar as dificuldades colocadas pela ausência de unidades de certa ordem.

Um passo importantíssimo para isso foi a utilização do princípio de posição, onde o valor de um determinado algarismo depende exclusivamente da posição que o mesmo ocupa na representação.

Para que uma notação numérica seja perfeitamente adaptada à prática das operações escritas é necessário, não somente que ela repouse sobre o princípio de posição, mas que possua também símbolos significativos distintos (...). Outra condição fundamental para que um sistema de numeração seja tão perfeito e eficaz é possuir o zero. Enquanto outros povos usaram numerações não posicionais, a necessidade desse conceito não se fez sentir. (IFRAH, 1997, p.684). Isso deve-se ao fato de que na ausência do princípio posicional, cada número era designado pela soma dos algarismos que formavam esse número, independentemente da ordem que os mesmos ocupavam na representação. Espaços deixados entre dois algarismos não tinham nenhuma interferência numérica no princípio aditivo.

1.5.1 Sistema de numeração mesopotâmico

O sistema de numeração mesopotâmico tem muita semelhança com o sistema egípcio (principalmente os 9 primeiros algarismos). Fundamentado na base 60, seus símbolos eram gravados em forma de cunhas em pedaços de argila.

Também conhecido como sistema de numeração babilônico, o sistema de numeração mesopotâmico usava apenas 2 símbolos.

- um pequeno “prego” vertical, que representava a unidade.
- uma “viga”, para representar a dezena.

Figura 13: Sistema de Numeração Mesopotâmico de Base 60.

| | | | | | | | | | | | |
|----|------------|----|-------------|----|--------------|----|---------------|----|----------------|----|----------------|
| 1 | ┆ | 11 | ┆┆ | 21 | ┆┆┆ | 31 | ┆┆┆┆ | 41 | ┆┆┆┆┆ | 51 | ┆┆┆┆┆┆ |
| 2 | ┆┆ | 12 | ┆┆┆ | 22 | ┆┆┆┆ | 32 | ┆┆┆┆┆ | 42 | ┆┆┆┆┆┆ | 52 | ┆┆┆┆┆┆┆ |
| 3 | ┆┆┆ | 13 | ┆┆┆┆ | 23 | ┆┆┆┆┆ | 33 | ┆┆┆┆┆┆ | 43 | ┆┆┆┆┆┆┆ | 53 | ┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 4 | ┆┆┆┆ | 14 | ┆┆┆┆┆ | 24 | ┆┆┆┆┆┆ | 34 | ┆┆┆┆┆┆┆ | 44 | ┆┆┆┆┆┆┆┆ | 54 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 5 | ┆┆┆┆┆ | 15 | ┆┆┆┆┆┆ | 25 | ┆┆┆┆┆┆┆ | 35 | ┆┆┆┆┆┆┆┆ | 45 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 55 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 6 | ┆┆┆┆┆┆ | 16 | ┆┆┆┆┆┆┆ | 26 | ┆┆┆┆┆┆┆┆ | 36 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 46 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 56 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 7 | ┆┆┆┆┆┆┆ | 17 | ┆┆┆┆┆┆┆┆ | 27 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 37 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 47 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 57 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 8 | ┆┆┆┆┆┆┆┆ | 18 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 28 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 38 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 48 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 58 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 9 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 19 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 29 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 39 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 49 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 59 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ |
| 10 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 20 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 30 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 40 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | 50 | ┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆┆ | | |

Em suas tabelas numéricas, encontram-se também representações para 600 (60×10), para 3600 (60^2), para 36000 ($60^2 \times 10$) e para 216000 (60^3). No entanto, essas representações eram conseguidas através de composições recorrendo aos pictogramas abaixo apresentados:

- 60 era associado a um prego vertical grande. 
- 600 por um “prego” vertical associado a uma “viga” 
- 3600 por um polígono formado pela reunião de quatro “pregos”.
- 36000 por um polígono precedente, munido de uma “viga”.
- 216000 reunindo o polígono de 3600 unidades com o prego das sessenta unidades.

A partir dos símbolos da base, os nove primeiros “*números naturais*” eram representados repetindo-se o símbolo da unidade quantas vezes fossem necessárias. Para os números 20, 30, 40 e 50, repetia-se o número de vezes necessárias o pictograma que exprimia a dezena. Usando esse mesmo princípio, os números 120, 180, 240 e demais múltiplos de 60, eram representados repetindo o número de vezes necessárias o pictograma das sessenta unidades, e assim prosseguindo de forma ordenada.

As imagens a seguir mostram como o número 69 deveria ser escrito (figura 14) se o princípio aditivo persistisse e como ele de fato é representado (figura 15) usando-se o princípio posicional.

Figura 14: Princípio aditivo

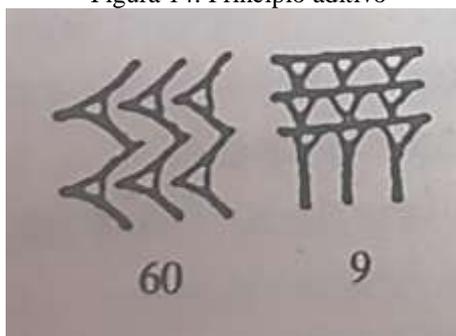
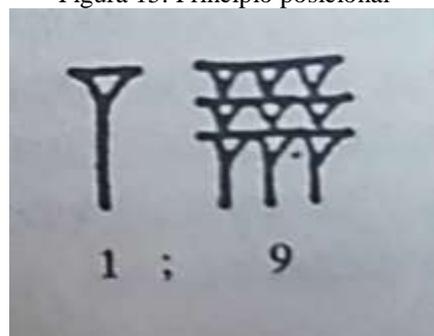


Figura 15: Princípio posicional



Fonte: Ifrah, 1989, p.237.

O alicerce da numeração suméria assentava então no princípio aditivo. Os símbolos podiam ser repetidos até nove vezes. O cravo (prego vertical) era utilizado para representar os números de 1 a 9. Já a asna (viga) representava os números de 10 a 90.

A numeração suméria exigia, nesse caso, repetições de sinais idênticos, já que se apoiava no princípio da justaposição dos símbolos pela simples adição de valores. Dessa forma, qualquer número desse sistema poderia ser representado com o uso desses dois símbolos.

1.5.2 O sistema babilônico

As tábuas numéricas desvendaram uma numeração científica posicional babilônica alicerçada numa base sexagesimal. Isto significa dizer que sessenta unidades de certa ordem eram equivalentes a uma unidade de ordem imediatamente superior.

[...] Os números de 1 a 59 formavam, assim, as unidades simples ou unidades de primeira ordem; os de sessenta constituíam as unidades de segunda ordem; os múltiplos de 60 (ou “sessenta vezes sessenta”) correspondiam às unidades de terceira ordem; e assim por diante. (IFRAH, 1989, p.237)

Os babilônios utilizavam como símbolos apenas um “prego” vertical que representava a unidade e uma “viga” associada às dez unidades, tornando seu sistema numérico muito repetitivo.



As ferramentas de escrita, no entanto, trouxeram limitações drásticas em relação à variedade de novas marcas, impossibilitando assim o surgimento de novos símbolos.

“Os números de 1 a 59 eram representados de modo aditivo, repetindo cada um desses dois signos tantas vezes quantas fosse necessário” (IFRAH, 1989, p.237)

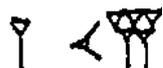
Esse princípio também persistia no interior de cada ordem de unidades. A partir do 60, no entanto, o princípio se tornava multiplicativo já que a base adotada era a sexagesimal. A partir daí, a representação de um número se tornaria mais simplificada, pois o sistema, sendo posicional, exigiria uma quantidade menor de símbolos para representá-lo.

Dessa forma, o número 19 tinha a seguinte configuração:



Já o número 75, com o uso do princípio da numeração posicional, era escrito da

seguinte forma:



Com o surgimento dessa nova forma de escrita, os babilônios abreviaram de uma forma expressiva a escrita dos seus números. Como exemplo, extraído de Ifrah (1997, p.299), podemos representar o número 1859 usando os dois sistemas, sistema aditivo sumério contra o sistema posicional babilônico. Nota-se então que a simplificação da escrita ocorre de maneira satisfatória:

No sistema sumério (princípio aditivo):

$$1859 = 600 + 600 + 600 + 50 + 9$$

No sistema babilônico (princípio posicional):

$$1859 = 30 \times 60 + 59$$

Percebe-se notadamente nestas circunstâncias a diferença entre o sistema de numeração suméria e o sistema erudito babilônico.

Os eruditos babilônicos passaram a perceber que esse princípio podia ser estendido à representação de todos os inteiros, abolindo-se deste modo os antigos símbolos sumérios para as unidades superiores a 60.

Apesar de toda a facilidade de utilização do sistema sexagesimal, o sistema babilônico não estava isento de imprecisões e dificuldades. Uma dessas dificuldades encontrava-se na ausência do zero. No início, os babilônios não dispunham de um símbolo pra representar a ausência de um número em uma determinada posição, o que muitas das vezes gerava registros ambíguos.

Por exemplo, o número $80(60+2 \times 10)$, nesse sistema de numeração, era representado da seguinte forma:



Já o número $3620(60^2 + 0 \times 60 + 2 \times 10)$ era representado assim:



Note que ambos os números são escritos com uso dos mesmos símbolos. A única

diferença está no espaçamento dos dois primeiros símbolos à esquerda. Esse espaçamento indicava a ausência de uma potência de base 60. Ou seja, tudo dependeria da presença ou não do zero.

Os babilônios até tentaram contornar essa dificuldade. Mas vez ou outra esse tipo de numeração gerou confusão:

[...] não tinham nenhum símbolo para o zero; para obviar essa dificuldade, eles deixavam algumas vezes um espaço em branco quando não havia unidades de certa ordem, mas nunca esse espaço em branco aparecia no fim da representação de números (ESTRADA, 2000b, p.71).

O sistema de numeração posicional ressentiu-se, até depois do ano 300 a.C., da falta de um símbolo para o zero que pudesse representar as potências ausentes de 60, originando deste modo alguns mal entendidos na expressão de um dado número.

Para tentar superar essa dificuldade, os babilônios deixaram por vezes um espaço vazio para indicar dessa forma a potência de sessenta que faltava (o que ainda gerava polêmica visto que era difícil representar números que tinham ausências consecutivas de potências de base 60).

Assim sendo,   representaria:

$$1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 35$$

Essa dificuldade foi contornada quando se introduziu um novo símbolo, constituído de dois “pregos” inclinados ou duas “vigas” inclinadas. No entanto, esse símbolo só era usado para indicar, dentro de um número, a ausência de uma potência 60, e não quando ela ocorria no final da sequência. Esse símbolo, portanto, era apenas um *zero* parcial, pois um zero verdadeiro serve para indicar as potências ausentes da base, tanto no meio como no final das sequências de símbolos numéricos.

Um belo exemplo é o referido por Ifrah (1997, p.309), que foi encontrado numa tábua astronómica datando da época selêucida (período compreendido entre o fim do século IV a.C. e I a.C.), onde surge o número:

$$2 \times 60^4 + 0 \times 60^3 + 25 \times 60^2 + 38 \times 60 + 4$$

o qual, recorrendo à escrita cuneiforme, assumiria a seguinte configuração:



A introdução das vigas inclinadas foi uma das primeiras tentativas do homem em

representar o zero, apesar do “zero” babilônico não ser concebido como uma quantidade.

Sobre isso Ifrah comenta:

O cravo duplo oblíquo dos sábios mesopotâmicos foi sem dúvida compreendido no sentido do vazio (ou melhor, “do lugar vazio que marca a ausência das unidades de uma certa ordem”), mas não do número zero (isto é, “quantidade nula”). Vazio e nada já eram concebidos, mas ainda não eram considerados sinônimos. (IFRAH, 1989, p.243)

Apesar de toda a preocupação em representar ausências de potências de 60, a dificuldade (ou distração) dos escribas em simbolizar a ausência de duas ou mais ordens de unidades consecutivas ainda continuou presente. Mesmo assim, o contexto tornava claro o que o escriba queria dizer (o que, para eles, tornava o seu sistema de numeração algo fácil de entender).

1.5.3 O sistema ático

Muitas civilizações antigas, como a egípcia e a mesopotâmica, aprenderam a pensar os números associados a uma aplicação prática. Os gregos, no entanto, foram os primeiros a usar uma abordagem dissociada do concreto.

Para os pitagóricos a Matemática lida com abstrações, onde a noção de número tem papel fundamental e que tudo pode ser expresso recorrendo-se aos números naturais e às suas propriedades.

Na procura das leis eternas do universo, os pitagóricos estudaram geometria, aritmética, astronomia e música (o que mais tarde se chamaria o *quadrivium*) (...) Os números, isto é, os inteiros, chamados *arithmoi*, eram divididos em classes: ímpares e pares, primos e compostos, perfeitos, amigos, triangulares, quadrados, pentagonais, etc. (...) os pitagóricos investigavam as propriedades desses números, acrescentando-lhes uma marca do seu misticismo e colocando-os no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações numéricas («tudo é número»)(STRUICK, 1997, p.78).

Os gregos não adotaram um sistema numérico posicional. No decorrer de sua história, eles recorriam a dois sistemas de numeração, ambos decimais: o ático (em que os números eram arranjados por ordem e agrupados) e o jônico (que se apresentava na forma de sistema alfabético).

A referência mais antiga de que se tem notícia da utilização do sistema ático é uma inscrição cuja datação aponta para cerca de 450 a.C. De qualquer forma, no período clássico

já aparecem um maior número de vestígios que permitem estudar a implementação desse sistema.

Há indícios de que o uso do sistema ático se generalizou gradualmente no século de Péricles, quando do apogeu de Atenas como cidade-estado. A supremacia de Atenas teria contribuído para o sucesso do sistema. Os atenienses continuaram a utilizar a numeração ática durante muito tempo, e assim o fizeram nas suas inscrições públicas, mesmo após a expansão do sistema jônico.

A numeração ática usava 6 símbolos. O número 1 era representado por um traço vertical. Havia representações para as potências 10 , 10^2 , 10^3 e 10^4 , as quais eram, respectivamente, Δ , H , X e M .

Havia também um símbolo para representar o número 5, designado por Γ , símbolo que é uma antiga forma de Π (pi), a letra inicial da palavra grega *penete* (cinco).

Recorrendo assim aos símbolos numéricos áticos, a seguinte sequência

$H H H \Delta \Delta \Gamma$

representaria trezentos e vinte e cinco unidades. Percebe-se que a ordem dos termos é irrelevante para o cálculo do número apresentado, pois o valor depende unicamente dos próprios símbolos e não depende da posição que estes ocupam na sequência.

Dessa forma, bastará somar os valores que cada um deles simboliza para se obter o número em questão. Contudo, a convenção adotada foi ordenar os símbolos por ordem decrescente do seu valor da esquerda para a direita, o que parece lógico, pois corresponde à forma de escrita grega.

A representação dos números de 1 a 10 no sistema ático aparece na tabela:

Figura 16: Representação ática dos algarismos de 1 a 10.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| | | | | Γ | Γ | Γ | Γ | Γ | Δ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Fonte: Almeida, 2007, p.53.

Assim como os sistemas de numeração antecessores, o sistema ático também enfrentou alguns problemas no momento de representar certos números.

Por ser um sistema aditivo, seriam necessários vários símbolos para exibir determinadas quantidades como, por exemplo, o número 9999, que precisaria de impressionantes 36 símbolos.

Para contornar essa dificuldade, eles introduziram novos símbolos para 5, 50 e

500, o que possibilitou uma redução considerável na quantidade de símbolos utilizados numa representação.

O símbolo do número cinco, Γ , tanto foi usado sozinho, como também apareceu em combinação com outros símbolos, no intuito de encurtar a representação numérica. Recorreu-se a um princípio multiplicativo. Nesses novos símbolos, o Γ do cinco é também associado às letras das potências de 10: um pequeno Δ inscrito no Γ designará 50, e assim por diante.

Em suma, a numeração ática passou de um simples sistema decimal aditivo para um sistema de agrupamento multiplicativo.

Figura 17: Representação do método multiplicativo do sistema ático.

| | | | | | | | |
|----------|-------------------|-----|------------|------|------------|-------|------------|
| Δ | Γ^{Δ} | H | Γ^H | X | Γ^X | M | Γ^M |
| 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | 50000 |

Fonte: Almeida, 2007, p.53.

Já o sistema jônico passou a ser utilizado aproximadamente no ano de 200 a. C., apesar do sistema ático perdurar por mais um século em Atenas. Esse sistema aditivo e decimal empregava vinte e sete símbolos e quatro letras do alfabeto grego, além de mais três do alfabeto fenício (diganima para 6, koppa para 90 e sampi para 900).

Figura 18: Representação do sistema jônico.

| | | | | | | | | |
|---|------------|--------------|----|------------|---------|-----|------------|---------|
| 1 | α | alpha (alfa) | 10 | ι | iota | 100 | ρ | rho |
| 2 | β | beta | 20 | κ | kappa | 200 | σ | sigma |
| 3 | γ | gamma (gama) | 30 | λ | lambda | 300 | τ | tau |
| 4 | δ | delta | 40 | μ | mu | 400 | υ | upsilon |
| 5 | ϵ | epsilon | 50 | ν | nu | 500 | ϕ | phi |
| 6 | obsoleta | digamma | 60 | ξ | xi | 600 | χ | chi |
| 7 | ζ | zeta | 70 | \omicron | omicron | 700 | ψ | psi |
| 8 | η | eta | 80 | π | pi | 800 | ω | omega |
| 9 | θ | theta (teta) | 90 | obsoleta | koppa | 900 | obsoleta | sampi |

Fonte: Eves, 2004, p.35.

Os exemplos a seguir, retirados de Eves (2004, p.35), mostram o uso desses símbolos para representar alguns números:

Figura 19: Representação de números no sistema jônico.

$$12 = \iota\beta, 21 = \kappa\alpha, 247 = \sigma\mu\zeta.$$

Fonte: Eves, 2004, p.35.

Assim como no sistema de numeração mesopotâmico, o sistema ático e o jônico não apresentavam o zero. Além disso, os gregos ignoravam as frações: “Diz-se que os gregos do período clássico consideravam os inteiros como os únicos números existentes. As frações não poderiam existir como números na medida em que os gregos consideravam como sendo impossível a divisão da unidade” (COUSQUER, 1994, p.42). De qualquer forma, a descoberta dos números incomensuráveis pelos pitagóricos trouxe um novo conceito de número para os gregos.

1.5.4 O sistema egípcio

O sistema de numeração hieroglífico era decimal, existindo símbolos para os números 1, 10, 100, 1.000, 10.000 e 1.000.000, como se observa na figura:

Figura 20: Representação do sistema de numeração hieroglífico.

| Símbolo egípcio | descrição | nosso número |
|-----------------|----------------|--------------|
| | bastão | 1 |
| ∩ | calcanhar | 10 |
| ∞ | rolo de corda | 100 |
| ☐ | flor de lótus | 1000 |
| ☞ | dedo apontando | 10000 |
| 🐟 | peixe | 100000 |
| ♁ | homem | 1000000 |

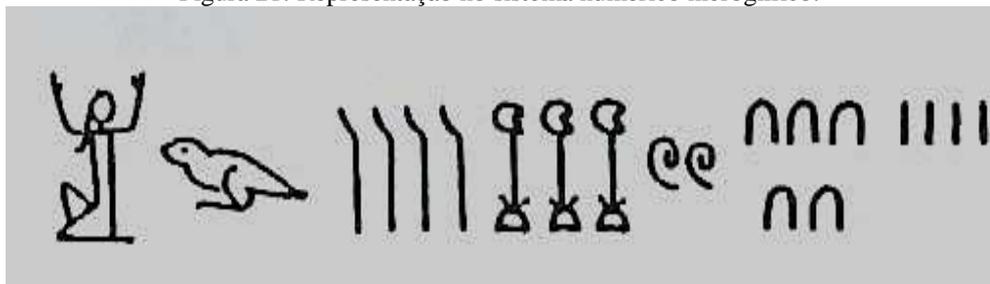
Fonte: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm>

Devido à forma como se organizava, o sistema hieroglífico era tido como um sistema de agrupamento simples. Um valor b era escolhido como base e logo depois escolhiam-se símbolos para 1, b , b^2 , b^3 , b^4 , etc.

Cada símbolo podia ser repetido até nove vezes, exprimindo adição. Num sistema deste tipo a ordem dos símbolos não tem consequências, mas os egípcios usualmente escreviam os símbolos por ordem decrescente, ou da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. (GULLBERG, 1997, p.34)

Um exemplo da forma como os números eram representados pelos egípcios é a representação do número 1.143.254:

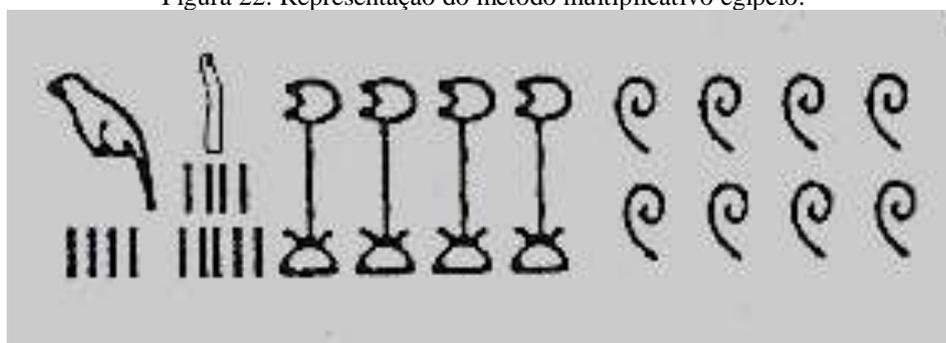
Figura 21: Representação no sistema numérico hieroglífico.



Fonte: Gullberg, 1997, p.34.

Pelo fato de não ser posicional, mas sim aditivo, o sistema hieroglífico apresentou a mesmas dificuldades do sistema ático na Grécia: determinadas quantidades, para serem representadas, necessitavam de um número elevado de símbolos. Para diminuir o excesso de símbolos, os egípcios recorreram à sobreposição de sinais, passando a exprimir um princípio multiplicativo.

Figura 22: Representação do método multiplicativo egípcio.



Fonte: Austin, 2000, p.80.

1.5.5 O sistema romano

O sistema de numeração romano é um sistema decimal de agrupamento simples, em que os símbolos gráficos pertencentes a esse sistema de numeração parecem ter sido extraídos de letras do alfabeto latino.

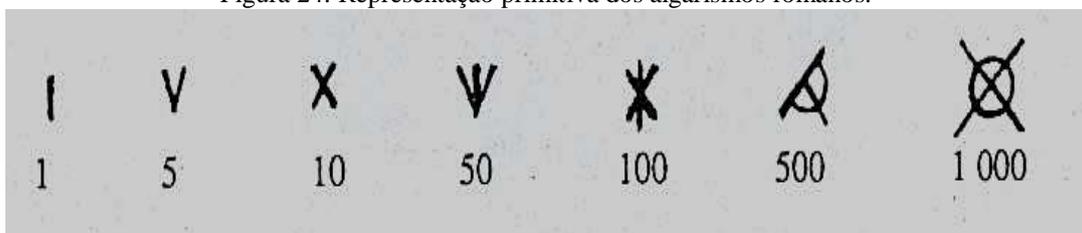
Figura 23: Representação do sistema de numeração romano.

| | | | | | | |
|---|---|----|----|-----|-----|-------|
| I | V | X | L | C | D | M |
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1.000 |

Fonte: Ifrah, 1997, p.397.

Os símbolos romanos eram originalmente assim representados:

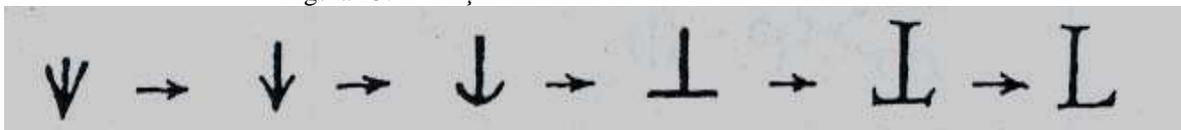
Figura 24: Representação primitiva dos algarismos romanos.



Fonte: Ifrah, 1997, p.397.

Com o decorrer do tempo, novas alterações na grafia foram introduzidas, ocasionando uma transformação gráfica na representação desses símbolos. Um exemplo disso é o processo evolutivo que ocorreu com o símbolo que representa o 50 (nos dias atuais) até chegar ao conhecido *L*.

Figura 25: Evolução histórica do “L” no sistema romano.



Fonte: Ifrah, 1997, p.397.

O sistema de numeração romano baseava-se no princípio aditivo e no princípio subtrativo. O princípio aditivo não era exclusividade do sistema romano (o sistema ático e hieroglífico, por exemplo, adotavam esse princípio), mas o subtrativo representou uma novidade nos sistemas de numeração.

Este princípio consistia no fato de que, um símbolo de uma unidade menor colocado antes do símbolo de uma unidade maior significa a diferença entre as duas unidades. Segundo Eves, “no uso do princípio subtrativo deve-se levar em conta, porém, a seguinte regra: o *I* só pode preceder o *V* ou *X*, o *X* só pode preceder o *L* ou o *C* e o *C* só pode preceder o *D* ou o *M*” (EVES, 2004, p.33).

Como exemplo disso, podemos analisar o número 2944. Se fosse aplicado apenas o princípio aditivo, esse número seria escrito assim *MMDCCCXXXIII*. Com o uso do princípio subtrativo, a representação se reduz a *MMCMLIV*.

1.5.6 O sistema de numeração hindu

Os primeiros sinais de atividade matemática hindu foram encontrados, segundo Cousquer (1994, p.46)), em hinos litúrgicos que datam do séc. XV a.C. No entanto, há uma dificuldade em datar com precisão algumas descobertas feitas pelos hindus.

Todavia Cousquer (1994, p.46) afirma que “foi no norte da Índia, por volta do séc. V da nossa era, que nasceu o antepassado do nosso sistema de numeração e onde foram estabelecidas as bases do cálculo escrito que conhecemos hoje”.

Hoje em dia há um consenso na comunidade científica quando se atribui aos hindus a proveniência do nosso sistema de numeração. A expressão “algarismos árabes” soa, então, de maneira enganosa, visto que, apesar da grande contribuição feita pelos árabes, os árabes retomaram o sistema de numeração hindu.

O sistema posicional decimal que hoje usamos ter-se-á originado na Índia. Depois, ter-se-á espalhado pelas regiões vizinhas; os povos islâmicos terão tido dele conhecimento ainda no século VIII, ou diretamente, ou através de uma visita de sábios hindus a Bagdad, no tempo de al-Mansur (754-775). Estes sábios terão trazido um texto astronómico, Siddhanta, que depois de traduzido terá influenciado o interesse dos sábios islâmicos pela astronomia e pelo sistema de numeração decimal. (ESTRADA, 2000c, p.409)

O período da história da matemática hindu que compreende 200 a.C. a 1200 d.C. foi uma das mais importantes etapas da matemática hindu. Nesse período, matemáticos hindus brilhantes desenvolveram importantes trabalhos nos campos da Álgebra e Aritmética. Dentre eles, aparecem os nomes de Aryabhata, nascido aproximadamente em 476 d.C., Brahmagupta, que viveu entre 598 e 660 d.C. aproximadamente, Mahavira no século XI e Bháskara no século XII.

Os hindus recorriam a algumas técnicas bastante hábeis para fazer determinadas manipulações aritméticas. Um exemplo disso foi o método da inversão, no qual se trabalha para trás (substituição de cada operação pela sua inversa), a partir dos dados. Os hindus também:

somavam progressões aritméticas e geométricas e resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos (...) Grande parte do conhecimento aritmético dos hindus provém do texto Lilavati de Bhaskara. (EVES, 2004, p.255)

Ao longo da sua história, diversos foram os métodos aos quais os hindus recorreram para escrever números. No entanto, destacamos duas formas de escrita que se destacaram: o *Kaharosthi* e o *Brahmi*.

A escrita Kharosthi, que era registrada da direita para a esquerda, espalhou-se pelo norte da Índia. Com origem no alfabeto sírio-aramaico, a escrita Kharosthi apresentava símbolos específicos para os seguintes números:

Figura 26: Números em escrita Kharosthi.

| | | | | |
|---|---|----|-----|------|
| 1 | 4 | 10 | 20 | 100 |
| 𑀓 | 𑀘 | 𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓 |

Fonte: Van der Waerden, 1976a, p.36.

Os números de 1 a 8 obedeciam ao princípio aditivo como mostra a figura:

Figura 27: Princípio aditivo na escrita Kharosthi.

| | | | | | | | |
|---|----|-----|------|-------|--------|---------|----------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 |
| 𑀓 | 𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 |

Fonte: Van der Waerden, 1976a, p.36.

De maneira análoga, a representação dos múltiplos de 10 na numeração Kharosthi era da seguinte forma:

Figura 28: Múltiplos de 10 na escrita Kharosthi.

| | | | | | |
|----|-----|------|-------|--------|---------|
| 𑀓 | 𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 |
| 20 | 50 | 60 | 70 | 100 | 200 |

Fonte: Van der Waerden, 1976a, p.36.

Já o alfabeto Brahmi difere do alfabeto Kharosthi, pois é escrito da esquerda para a direita. Nesse sistema de numeração, também de base decimal, atribuía-se um símbolo a cada uma das unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar e dezenas de milhar, “seguindo o mesmo princípio da numeração grega” (COUSQUER, 1994, p.47)

Além de não ser um sistema posicional, o sistema Brahmi apresenta uma característica interessante: as unidades não são mais construídas por agrupamentos, diferentemente do que acontecia em outros sistemas de numeração.

Mais propriamente cada unidade recebe um símbolo individual, uma “figura”. A existência de símbolos especiais para 1 ... 9 é uma das importantes características da aritmética hindu e proporciona o pré-requisito para se avançar para um sistema decimal posicional (VAN DER WAERDEN, 1976a, p.37).

A numeração Brahmi apresentava, no séc. III a.C., símbolos diferentes para os números um, quatro ... nove, entre outros.

Figura 29: Numeração Brahmi

| | | | | | | | | |
|---|----|-----|------|-------|--------|---------|----------|-----------|
| 𑀓 | 𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 | 𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓𑀓 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Fonte: Kline, 1972, p.183.

Além disso, o sistema Brahmi apresentava símbolos específicos para os múltiplos de 10:

Figura 30: Múltiplos de 10 no sistema de numeração Brahmi.

| | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 𑀓 | 𑀔 | 𑀕 | 𑀖 | 𑀗 | 𑀘 | 𑀙 | 𑀚 | 𑀛 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |

Fonte: Van der Waerden, 1976a, p.37.

Múltiplos de 100 também foram representados nesse sistema:

Figura 31: Múltiplos de 100 no sistema de numeração Brahmi

| | | | | | | | | | | | |
|---|-------|---|-------|---|-------|---|--------|---|--------|---|-------|
| 𑀜 | 100 ; | 𑀝 | 200 ; | 𑀞 | 500 ; | 𑀟 | 1000 ; | 𑀠 | 4000 ; | 𑀡 | 70000 |
|---|-------|---|-------|---|-------|---|--------|---|--------|---|-------|

Fonte: Van der Waerden, 1976a, p.37.

É importante ressaltar que muitas especulações mostram-nos que a sequência dos números hindus já era decimal a muito tempo e que existiam palavras para representar não apenas os números de 1 a 9, como também diversas potências de 10.

Uma das características hindus é que a terminologia para as potências de dez não parou em 10^4 , tal como nos Gregos, ou tal como nos Romanos em 10^3 ; eles já tinham sinais para potências de dez até 10^{53} no terceiro século. Por conseguinte parece que o sistema hindu de escrever números era baseado no número 10 numa era da qual não há evidências escritas. (VAN DER WAERDEN, 1976a, p.35).

1.5.7 O surgimento dos algorismos arábicos

Ao contrário da maioria dos povos cristãos da Europa, que continuaram adotando sistemas numéricos arcaicos, os árabes apreciaram as vantagens do sistema hindu e passaram a ser intermediários entre a Índia e o Ocidente. Esse interesse dos árabes pela cultura oriental é retratado por Ifrah:

[...] Com relação aos números, primeiro eles se interessaram pelas numerações alfabéticas grega e judia, cujo uso foi adaptado às 28 letras de seu próprio alfabeto. Por intermédio dos gregos e dos cristãos da Síria e Mesopotâmia, eles recuperaram também o velho sistema sexagesimal posicional e o zero dos sábios babilônios, adaptando-os a sua própria escrita em suas tábuas astronômicas. Mas quando eles tiveram acesso às descobertas hindus, foi como uma iluminação. Mantendo frutuosas relações comerciais com a Índia pelo golfo Pérsico a partir do porto de Bassora, os árabes se iniciaram na astronomia, na aritmética e na álgebra dos sábios desta civilização. A partir do final do século VIII, adotaram o conjunto do sistema numérico hindu: números, numeração decimal de posição, zero e métodos de cálculo. (IFRAH, 1989, p.297)

Apesar dos árabes terem absorvido produtos das culturas grega, babilônica e hindu, eles também trouxeram suas próprias contribuições, ao aliar com admirável sucesso, por exemplo, o caráter rigoroso do pensamento matemático e filosófico grego ao aspecto prático da ciência desenvolvida pelos hindus. Isso possibilitou um enorme progresso na Matemática e Astronomia da época.

No período do califado, os algarismos árabes ainda apresentavam uma grafia bem próxima da numeração hindu. Após algum tempo, eles assumiram um aspecto bem diferente da grafia que lhes deu origem. Essa transformação é retratada na figura a seguir:

Figura 32: Desenvolvimento dos algarismos hindu-arábicos.

| | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Indiano séc. III a.C. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Indiano séc. IV-VI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Árabe Oriental séc. IX | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Árabe Ocidental séc. XI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Europeu séc. XVI | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| Atual | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |

Fonte: <http://criandonumeros.blogspot.com.br/2012/05/>

A superioridade da cultura e ciência árabe em relação aos povos ocidentais se tornou tão evidente que, durante várias gerações, os símbolos acima representados ficaram conhecidos, equivocadamente, como “algarismos arábicos”.

Dentre os matemáticos que apresentaram destaque na cultura árabe, figura o nome de al-Khowarizmi (aproximadamente 780-850). Um sábio que contribuiu para a propagação de métodos algébricos e de cálculo para o mundo ocidental.

As obras de al-Khowarizmi tiveram tamanha contribuição e foram tão difundidas que seu nome, latinizado, passou por diversas alterações e acabou dando origem às palavras *algoritmo* e *algarismo*.

1.6 Um breve histórico sobre a origem do zero

O sistema de numeração decimal permite perfeitamente a representação de qualquer número com o auxílio de seus 10 algarismos. Essa facilidade de representação numérica não está relacionada com a natureza de sua base. Outras representações equivalentes poderiam ser obtidas através de sistemas de numeração não decimais. Mas a

superioridade de nosso sistema de numeração atual deve-se principalmente à união do princípio de posição e do conceito de zero.

Há indícios de que a origem do zero remonta do sistema de numeração babilônico. Por ser posicional, o sistema de numeração babilônico esbarrava em certas dificuldades como, por exemplo, a insistência que os matemáticos e astrônomos babilônios tinham em ignorar o uso de um símbolo para representar o vazio. A aceitação do zero incomodava-os bastante, pois, segundo Ifrah:

Quando se aplica o princípio de posição, há um momento em que é preciso dispor de um signo gráfico especial para representar as unidades que estão faltando. Um exemplo: é preciso escrever o número 10 utilizando nossa atual numeração decimal de posição. Dez é a base do sistema: deve-se então colocar o algarismo 1 na segunda posição para que ele signifique “uma dezena”. Mas como significar que este “1” está na segunda posição se não há nada para colocar na primeira? Com doze é fácil; escreve-se primeiro um “1”, depois um “2” (uma dezena e duas unidades). Mas, e dez? é preciso colocar um “1” e...nada. Assim, também para 702 é preciso colocar um “2” na primeira posição, um “7” na terceira e *nada* entre os dois. (IFRAH, 1989, p.241)

Historicamente falando, as “vigas” inclinadas do sistema babilônico indicaram a primeira representação do zero. Apesar disso, o zero babilônico não tinha a conotação de número em sua essência: ele era apenas um recurso que a notação exigia. Como salienta Stewart:

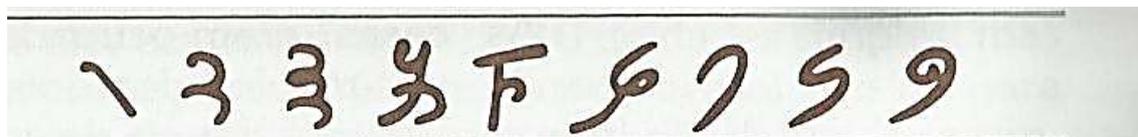
Antes do século IX, o zero era visto como um *símbolo* conveniente para cálculos numéricos, mas não era considerado um *número* como tal. Provavelmente porque não contava nada. Se alguém pergunta quantas vacas você tem, e você tem algumas vacas, você aponta para elas, uma de cada vez, e vai contando “um, dois, três,...”. Mas se você não tem nenhuma, não aponta para uma vaca e diz “zero”, porque não há vaca para apontar. Como você não pode obter 0 por contagem, evidentemente não é um número. (STEWART, 2016, p.146)

O fato dos números passarem a apresentar outras utilidades além da prática de contagem e a rápida propagação do zero para outras culturas e sistemas de numeração fortaleceu a ideia de que o zero poderia se comportar como qualquer outro número, apesar de apresentar certas características bem distintas em relação aos demais números (como por exemplo, o fato de que qualquer número não nulo multiplicado por zero resulta no próprio zero).

Apesar da brilhante ideia dos babilônicos de representar o zero usando o um signo, o antigo sistema hindu traz um diferente ponto de vista sobre a sua invenção.

Esta numeração apresentava uma característica bem semelhante ao nosso sistema de numeração moderno: todos os números, de 1 a 9, eram representados por símbolos distintos e, visualmente, não traziam consigo nenhuma relação com os números que estavam associados. Isso quer dizer que o número 7, por exemplo, não era mais representado por um grupo de sete barras, e sim por um símbolo específico.

Figura 33: Representação sequencial dos números de 1 a 9 no antigo sistema de numeração hindu.



Fonte: <http://pedagogasmatematica.blogspot.com.br/2013/11/> (adaptado)

Este sistema arcaico apresentou um grande obstáculo aos astrônomos da época: números grandes (acima de 100.000, por exemplo) não eram passíveis de representação neste sistema.

Para contornar essa dificuldade, houve a necessidade de recorrer aos nomes de números do *sânscrito*, ou seja, tiveram a ideia de representar os números “por extenso”. Assim, cada número recebeu um nome específico.

Figura 34: Representação “por extenso” dos números de 1 a 9 no antigo sistema hindu.

| | | |
|----------------|------------------|------------------|
| 1 – <i>eka</i> | 4 – <i>catur</i> | 7 – <i>sapta</i> |
| 2 – <i>dvi</i> | 5 – <i>pañca</i> | 8 – <i>asta</i> |
| 3 – <i>tri</i> | 6 – <i>sat</i> | 9 – <i>nava</i> |

Fonte: <https://sites.google.com/site/fisiklain/home/1/matematica-hindu>

Além destes números, as potências de 10 também receberam nomes particulares:

| | |
|---------------|------------|
| 10 | = dasa |
| 100 | = sata |
| 1.000 | = sahasra |
| 10.000 | = ayuta |
| 100.000 | = laksa |
| 1.000.000 | = prayuta |
| 10.000.000 | = koti |
| 100.000.000 | = vyarbuda |
| 1.000.000.000 | = padma |

Considerando as potências de 10 e os números de 1 a 9 agora com esta nomenclatura, qualquer número era facilmente representado.

Para exprimir um determinado número, bastava colocar o nome indicador da dezena (*dasa*) entre o das unidades simples e o das unidades de segunda ordem, o nome indicador da centena (*sata*) entre o das unidades de segunda e terceira ordens, em seguida o nome indicador do milhar (*sahasra*) entre o das unidades de terceira e quarta ordens, e assim por diante, conformando-se para tanto ao sentido da leitura acima. (IFRAH, 1989, p.268)

Dessa forma, o número 435.712 era enunciado da seguinte forma: *2, 1 dasa, 7 sata, 5 sahasra, 3 ayuta, 4 laksa*. (literalmente, dois, uma dezena, sete centenas, cinco milhares...).

Apesar de todas essas novas contribuições e avanços, novas alterações no sistema ainda eram imprescindíveis. Para abreviar a representação por extenso de um determinado número, os matemáticos e astrônomos hindus passaram a omitir os nomes que indicavam as potências de base 10 (*dasa*, *sata*, *sahasra*, *ayuta*, etc), mantendo apenas a sequência regular das unidades de 1 a 9, de acordo com as potências crescentes de 10.

Dessa forma, com a nova “versão”, o número 5.347 passou a ser enunciado e representado da seguinte maneira:

“Sete. Quatro. Três. Cinco”
 $(7+4\times 10+3\times 100+5\times 1000)$

Esta nova forma de representação trouxe um grande progresso na escrita e nos cálculos da época. Assim, ao dizer: “dois, dois”, por exemplo, atribuía-se o valor de 2 unidades ao primeiro dois, e o valor de duas dezenas ao segundo, formando o número 22.

Mas esse progresso se esbarraria em uma nova dificuldade. Como expressar números que apresentam ausências de unidades de uma certa ordem?

Tomemos por exemplo o número 403. Se não existia uma palavra específica para representar que nesse número não há dezena, então como representá-lo? Não bastava dizer “Três. Quatro”, pois essa representação vocabular representaria 43 e não 403.

Os hindus resolveram a dificuldade ao introduzir o vocábulo *sunya* (vazio), para representar a ausência da unidade de uma determinada ordem. Assim o número 403 seria enunciado como:

Tri sunya catur
 (“Três. Vazio. Quatro”)

Com essa possibilidade de representar o “vazio”, não haveria mais possibilidade de equívocos. Os hindus acabavam de inventar o zero. Eles detinham todos os elementos necessários para a construção da numeração moderna, a saber: a descoberta do zero, uso do princípio de posição e algarismos distintos e isentos de qualquer intuição visual para os números de 1 a 9.

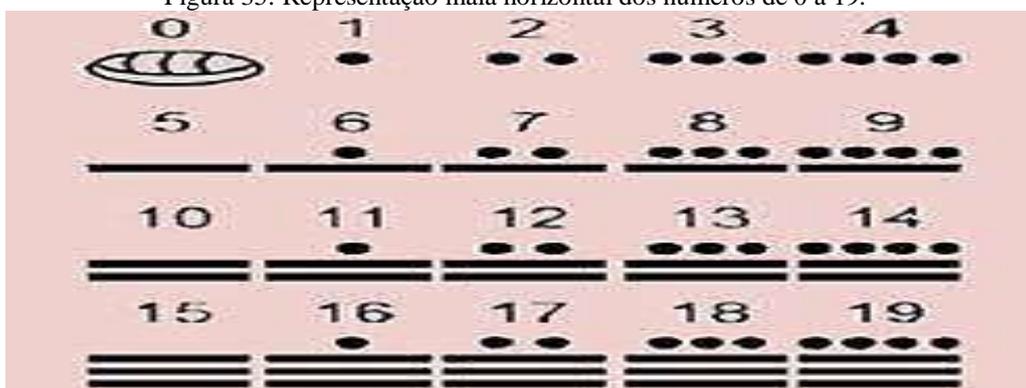
De certa forma, o zero dos hindus ainda necessitava de um grande aperfeiçoamento, pois até o final do século VI sua única função era aparentemente preencher “vazios” deixados pelas unidades ausentes. Era preciso fazer dele um número como todos os demais.

A matemática hindu conseguiu então agregar duas noções distintas e complexas: a noção de *nulidade* e a de *ausência*. Nas palavras de Ifrah:

Grças a isto, o matemático e astrônomo Brahmagupta pôde ensinar, numa obra do ano de 628, o modo de efetuar simplesmente as seis operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação a potências e extração de raízes), em relação ao que foi denominado “os bens”, “as dívidas” e “o nada”, isto é, em termos modernos, os números positivos, negativos ou nulos. A álgebra moderna acabava de nascer, e o sábio descobrira uma de suas regras fundamentais: *uma dívida subtraída do nada torna-se um bem, e um bem subtraído do nada torna-se uma dívida* (o oposto de um número positivo é negativo, e inversamente). (IFRAH, 1989, p.293)

Mas a invenção do zero não deve ser creditada apenas aos babilônios e hindus. Os Maias também desenvolveram um interessante sistema de numeração, fundamentado na base 20. Esse sistema, bem semelhante ao babilônico, era restrito a apenas dois símbolos: um ponto (.) para representar a unidade e um traço horizontal (–) para representar o número 5.

Figura 35: Representação maia horizontal dos números de 0 a 19.



Fonte: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/o-sistema-numeracao-maia.htm>

Além de a base escolhida ser o número 20, os maias usavam um símbolo específico para representar o nada, isto é, para a ausência de unidades que deveriam compor um número. Para isso, eles representaram o zero usando uma concha, como mostra a figura 35.

Sobre essa representação simbólica do zero, Gundlach apud Lovo & Souza & Baraneck comenta:

Talvez o uso sistemático mais antigo de um símbolo para zero num sistema de valor relativo se encontre na matemática dos maias das Américas Central e do Sul. O símbolo maia do zero era usado para indicar a ausência de quaisquer unidades das várias ordens do sistema de base vinte modificado. Esse sistema era muito mais usado, provavelmente, para registrar o tempo em calendários do que para propósitos computacionais. (GUNDLACH, 1992, p.35)

É curioso o fato de que no sistema de numeração maia, os números de 1 a 19 sejam representados de forma simples por traços e pontos, mas a partir do número 20, cada algarismo apresentava um valor que dependia exclusivamente de sua posição na coluna vertical. Isso tornava o sistema essencialmente semiposicional.

Dessa forma, para os números de duas ordens, por exemplo, colocava-se o algarismo das unidades embaixo e o algarismo das vintenas na parte superior. Assim, os número $41(2 \times 20 + 1)$ e $120(0 + 6 \times 20)$ eram representados da seguinte maneira:

Mais curioso ainda é o fato de que o sistema de numeração maia era fundamentado numa base vigesimal modificada. Nas palavras de Ifrah:

Normalmente, o patamar imediatamente superior (a terceira posição deste sistema de base vinte) deveria corresponder a valores vinte vezes maiores que os do segundo patamar. Assim como para nós a terceira ordem é associada às centenas (isto é, aos múltiplos de $10 \times 10 = 100$), a terceira fileira desta numeração deve ter correspondido às “quatro centenas” (isto é, aos múltiplos de $20 \times 20 = 400$). (IFRAH, 1989, p.252)

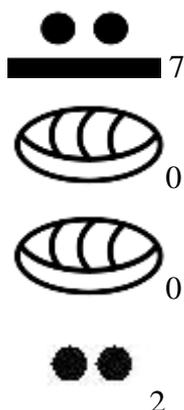
A irregularidade no sistema encontrava-se no fato de que o terceiro patamar indicava na verdade os múltiplos de $360(18 \times 20)$ e não de 400. Dessa forma, o número:



Indicava na verdade $11 \times 360 + 2 \times 20 + 6$ e não $12 \times 400 + 2 \times 20 + 6$.

Para as posições seguintes, voltava-se a um uso estrito da base vinte, valendo cada patamar, a partir do quarto, vinte vezes mais do que o patamar imediatamente inferior. Assim, em virtude da irregularidade da terceira ordem, a quarta posição correspondia, por sua vez, aos múltiplos de $7.220 = 20 \times 360$ (e não aos de $8.000 = 20 \times 20 \times 20$), a quinta posição aos múltiplos de $144.000 = 20 \times 7200$ (e não aos múltiplos de $160.000 = 20 \times 20 \times 20 \times 20$), e assim por diante. (IFRAH, 1989, p.252)

A invenção do zero foi fundamental para que cada algarismo ocupasse o seu devido lugar mesmo que existissem unidades ausentes. Como exemplo, temos o seguinte número escrito na numeração maia:



Na base vigesimal modificada este número pode ser transcrito da seguinte forma: $7 \times 7200 + 0 \times 360 + 0 \times 20 + 2 = 50.402$.

Ressalta-se que a irregularidade causada pelo fato da terceira posição não ser um múltiplo de 400 tornou o zero maia impróprio para qualquer possibilidade operatória.

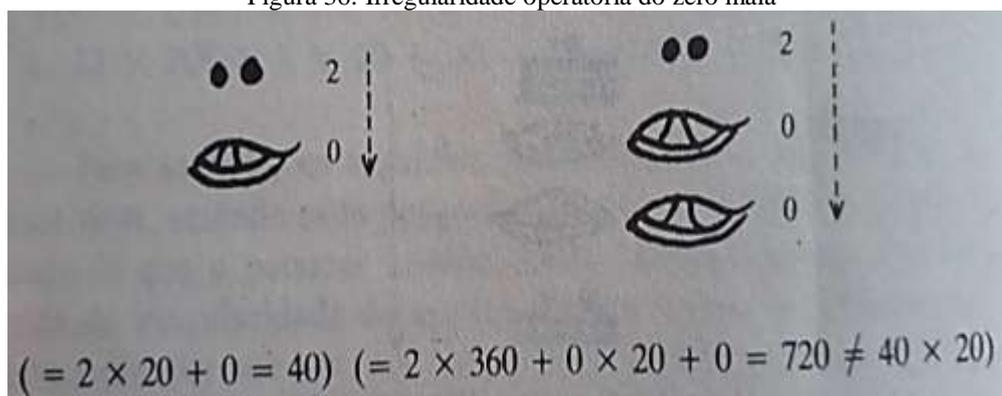
Segundo Ifrah:

Em nossa numeração atual, o zero desempenha realmente um papel de operador aritmético: o valor 460 ($= 4 \times 100 + 6 \times 10 + 0$) cuja escrita foi deduzida por adjunção de um zero no final da representação do número 46 ($= 4 \times 10 + 6$), tem por valor o produto de 46 pela base 10 ($460 = 46 \times 10$).

Se a numeração maia tivesse sido estritamente vigesimal, seu zero também disporia da propriedade operatória: a adjunção de um zero no final da representação por algarismos teria multiplicado pela base vinte o valor do número correspondente. (IFRAH, 1989, p.254)

Não foi o caso, como podemos constatar no seguinte exemplo:

Figura 36: Irregularidade operatória do zero maia



Fonte: Ifrah, 1989, p.254.

Esta irregularidade impossibilitou que os Maias desfrutassem de descobertas essenciais nos ramos de Cálculo e Matemática Abstrata.

2. OS PADRÕES NUMÉRICOS

A aprendizagem da Matemática inicia-se com a noção de número. Os números estruturam esta ciência. Embora o estudo deles muitas vezes se atenha às suas propriedades, é dominante no Ensino da Matemática a perspectiva que os concebem também vinculados ao contexto histórico que deu origem a eles.

Outro grande alicerce da Matemática são os padrões numéricos. Eles podem nos revelar uma Matemática muito mais divertida e interessante do que se possa pensar. Existem diversos tipos de padrões, sendo os numéricos um dos que se apresentam de forma mais interessante. O conceito de padrão numérico é utilizado quando nos referimos a um agrupamento de números onde se detectam regularidades.

É incontestável que a natureza é regida por padrões. Mas o que devemos fazer com eles? A Matemática estudada no Ensino Médio é realmente tão interessante e abrangente a ponto de mostrar que, por exemplo, apesar do π ter incontáveis aplicações na trigonometria e na geometria, ele pode aparecer em problemas que nem sequer envolvem círculos?

Vivemos sob um universo de padrões, declarou Stewart (1996, p.11). E nesse sentido, os padrões dão vida à matemática. Segundo o autor:

A mente e a cultura humanas desenvolveram um sistema formal de pensamento para reconhecer, classificar e explorar padrões. Nós o chamamos Matemática. Usando a Matemática para organizar e sistematizar nossas ideias a respeito de padrões, descobrimos um grande segredo: os padrões da natureza não existem somente para ser admirados, eles são pistas vitais para as regras que governam os processos naturais[...] (STEWART, 1996, p.11)

A busca por uma Matemática divertida e intrigante tem impulsionado as pessoas a implantar diversos tipos de enigmas e problemas de forma a instigá-las a desafiar suas próprias mentes no intuito de estimular o desenvolvimento de habilidades baseadas nos números e suas peculiaridades.

Poucos autores trabalham a Matemática lúdica associada a um contexto histórico. Dentre esses, O professor Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo de Malba Tahan, foi um dos que trouxeram excelentes obras de caráter pedagógico para o ensino de Matemática no Brasil.

Na sua obra prima *O homem que calculava*, Malba Tahan traz uma narrativa envolvendo Matemática e cultura árabe e apresenta soluções simples para problemas matemáticos aparentemente complexos. Dessa forma, a obra expõe em enfoque histórico uma Matemática associada a problemas da vida cotidiana, como preconiza as exigências curriculares nacionais de Matemática do Ensino Médio:

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica (BRASIL, 2006, p.69-70)

Os autores citados nesse trabalho tentam mostrar que não há necessidade em dissociar os aspectos “sérios” da Matemática dos aspectos divertidos, afinal, mesmo em meio às brincadeiras e jogos matemáticos existem muitas propriedades que estruturam campos ainda não abordados pela rainha das ciências.

2.1 Par ou ímpar?

Denominamos de números pares todos os números que pertencem à sequência ..., -4, -2, 0, 2, 4, 6,..., ou seja, todos os números que podem ser escritos na forma $2k$, em que k é um inteiro qualquer. Consequentemente, um número é dito ímpar se pertencer a sequência complementar..., -3, -1, 1, 3, 5,..., ou seja, são os números da forma $2k + 1$, em que k é algum inteiro.

Em outras palavras, números pares são números divisíveis por 2 (números que ao serem divididos por 2 deixam resto 0); números ímpares deixam resto 1 quando são divididos por 2.

Essa distinção dos números inteiros em pares e ímpares dá origem a leis aritméticas interessantes: a soma e o produto de dois números pares é sempre par, a soma de dois números ímpares é sempre par, o quadrado de um número ímpar é ímpar, etc.

Um importante conceito que surge a partir daí é o conceito de *paridade*. A paridade de um número é a característica desse número em ser par ou ímpar. Dizemos que dois números têm a mesma paridade se ambos forem pares ou ambos forem ímpares. Dessa forma, 2 e 8 têm a mesma paridade; já 5 e 6 têm paridades distintas. Uma consequência disso é que a soma de dois números com a mesma paridade é par e a soma de dois números com paridades distintas é ímpar.

A partir deste conceito surgem outras propriedades importantes:

- A soma de qualquer quantidade de inteiros pares é um número inteiro par.
- A soma de qualquer quantidade par de inteiros ímpares é um número inteiro par.
- A soma de uma quantidade ímpar de inteiros ímpares é um inteiro ímpar.
- A soma de um grupo de inteiros pares e ímpares é um inteiro que tem a mesma paridade que a quantidade de parcelas ímpares que foram somadas.

Uma simples aplicação destas propriedades pode resolver facilmente o seguinte exemplo:

Mostrar que em qualquer grupo é par o número de pessoas que já apertaram um número ímpar de mãos nesse grupo.

De fato, seja N o número de pessoas de um determinado grupo, n_p o número de apertos de mão dados pela pessoa p e k o número de apertos de mão trocados. Assim temos:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_N = 2k.$$

Como a soma dos apertos de mão é par, então há uma quantidade par de parcelas ímpares.

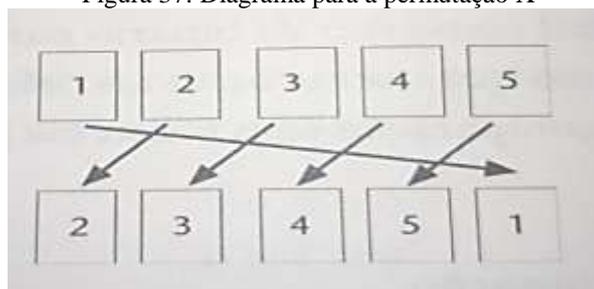
O conceito de paridade estende-se até às permutações. Permutações são formas de se reagrupar uma lista ordenada de objetos. Se o conjunto apresentar n objetos, então o número de permutações possíveis será dado por:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

As permutações são classificadas em dois tipos: permutações pares e permutações ímpares. As permutações pares são assim chamadas, porque trocam a ordem de um número par de pares de objetos distintos; já as permutações ímpares trocam a ordem de uma quantidade ímpar de pares de objetos.

Stewart (2016, p.48-51) nos dá uma maneira interessante para entendermos a diferença que há entre as permutações pares e ímpares usando diagramas com setas. Suponha, por exemplo, uma permutação X que inicia com a lista 1, 2, 3, 4, 5 e logo em seguida seus elementos são reordenados na seguinte maneira: 2, 3, 4, 5, 1. Usando setas para representar a movimentação dos números temos:

Figura 37: Diagrama para a permutação X

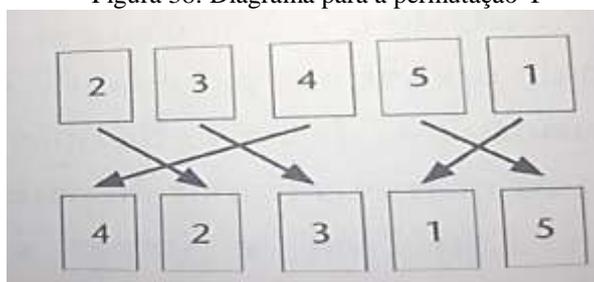


Fonte: Stewart, 2016, p.48.

Definição 1: Dizemos que uma permutação X é par se $c(X)$ é par. De forma complementar, uma permutação é dita ímpar se $c(X)$ for ímpar. Em que $c(X)$ representa o número de cruzamentos das setas da permutação X .

O diagrama da figura 37 mostra uma seta partindo de 1 e cruzando as demais setas. Dizemos que essa permutação X tem *número de cruzamento* 4, e representamos por $c(X) = 4$. Já a permutação Y , indicada na figura abaixo, tem *número de cruzamento* 3, logo $c(Y) = 3$.

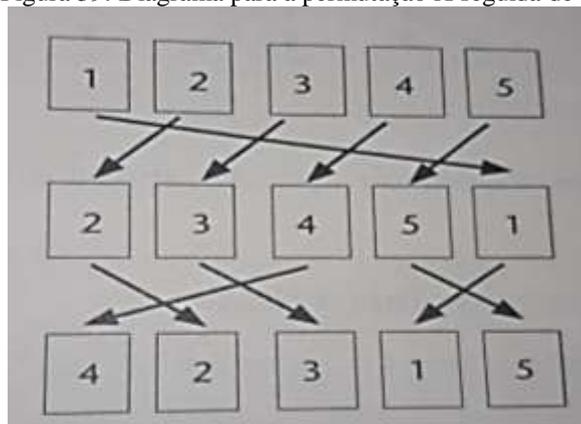
Figura 38: Diagrama para a permutação Y



Fonte: Stewart, 2016, p.48.

Uma operação muito interessante a respeito das permutações é a *composição de permutações*, isto é, a criação de uma permutação a partir de outras duas permutações. Suponha que XY seja a composição das permutações X e Y , dadas anteriormente. Com o uso do diagrama de setas podemos representar este tipo de composição.

Figura 39: Diagrama para a permutação X seguida de Y



Fonte: Stewart, 2016, p.49.

Retirando-se a linha central de números e logo em seguida unificando as setas, obtemos a composição XY, cujo processo está exemplificado nas figuras a seguir:

Figura 40: Diagrama para a permutação XY, antes da unificação das setas.

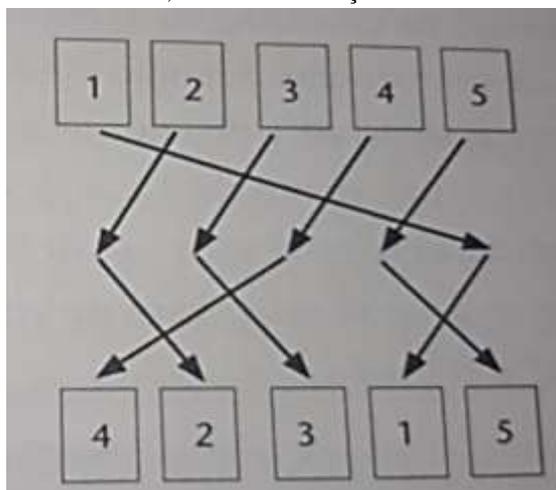
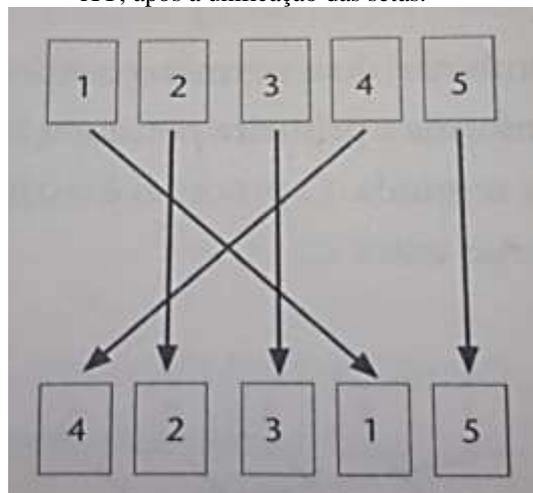


Figura 41: Diagrama para a permutação XY, após a unificação das setas.



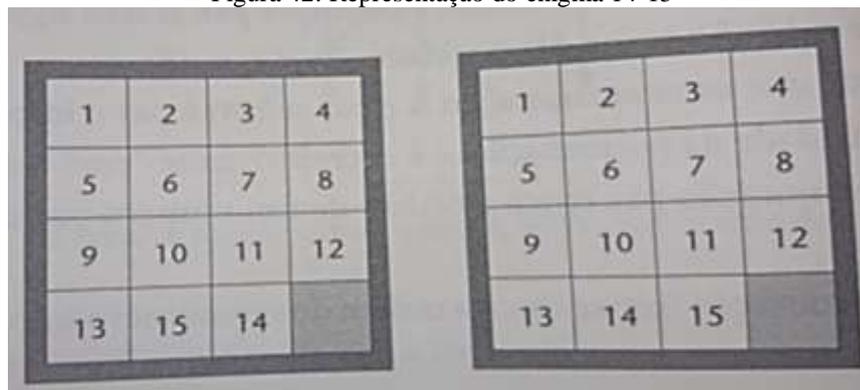
Fonte: Stewart, 2016, p.49-50.

Note que, antes da unificação das setas, a soma do número de cruzamentos de X e Y (7 no total) era justamente o número de cruzamentos da composição XY. Com a unificação, dois cruzamentos foram “cancelados”. Essa particularidade é ressaltada por Stewart:

Esta observação vale genericamente. Se compusermos duas permutações quaisquer A e B para obter AB, então, antes de unificarmos as setas, a quantidade de cruzamentos para AB é a quantidade de A mais a quantidade de B. Quando unificamos as setas, a quantidade de cruzamentos ou fica a mesma, ou subtraímos um número par. Então, embora $c(AB)$ não precise ser igual a $c(A) + c(B)$, sua diferença é sempre *par*. E isso significa que a *paridade* de $c(AB)$ é a soma das paridades de $c(A)$ e $c(B)$. (STEWART, 2016, p.51).

A paridade de permutações apresenta importantes aplicações em demonstrações que envolvem problemas aritméticos, em especial problemas relacionados a *invariantes combinatórios*. Um desses problemas é o enigma 14-15. Este quebra-cabeça é composto de 15 peças quadradas e um quadrado vazio localizado no canto inferior direito que deslizam num tabuleiro de 16 casas, em que o 14 e 15 são os únicos números que ocupam posições invertidas. O objetivo é deslizar os números sucessivamente para o quadrado vazio no intuito de obter a sequência numérica correta.

Figura 42: Representação do enigma 14-15



Fonte: Stewart, 2016, p.52.

A paridade das permutações mostra que este enigma não tem solução. Cada posição deste quebra-cabeça é entendida como uma permutação da posição inicial. O quebra-cabeça é na verdade uma permutação ímpar da sequência correta, visto que há apenas um par de blocos trocados (14 e 15), isto é, se X representa a sequência com os números 14 e 15 invertidos, então $c(X) = 1$. Mas para que o problema fosse resolvido, os movimentos possíveis deveriam sempre levar a permutações pares. (Para ver mais detalhes vide SINGH, Simon. *O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*; tradução de Jorge Luiz Calife. 13ed. – Rio de Janeiro: Record, 2008, p.139-144).

2.2 Divisão euclidiana

Teorema 1: Sejam a e b dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:

$b = aq + r$; com $0 \leq r < |a|$, em que q é o quociente e r é o resto da divisão de b por a .

Demonstração: Primeiramente devemos mostrar a existência de q e de r . Em seguida mostraremos suas unicidades. Temos que b é um múltiplo de a ou b está compreendido entre dois múltiplos de a : aq e $a(q+1)$ para algum q inteiro. Se b é um múltiplo de a , digamos, $b = ak$, trivialmente temos $q = k$ e $r = 0$. Caso b não seja múltiplo de a , teremos $aq < b < a(q+1)$. Nesta igualdade podemos subtrair aq de todos os membros, tendo assim, $0 < b - aq < a$. Tomando $b - aq = r$ temos $b = aq + r$, daí $0 \leq r < |a|$. Segue que, quando $r = 0$, b é um múltiplo de a .

Para provarmos a unicidade de q e r , suponhamos que existam outros inteiros r' e q' tais que $b = aq' + r'$, com $0 \leq r' < |a|$. Dessa maneira temos $b = aq + r = aq' + r'$. Ou seja, $(r - r') = a(q - q')$. Assim, $(r - r')$ é um múltiplo de a e como $-a < r - r' < a$, o único valor possível é $r - r' = 0$, o que implica em $r = r'$ e, conseqüentemente, em $q = q'$.

Assim, o quociente e o resto da divisão de 77 por 5 são $q = 15$ e $r = 2$. Dessa maneira, o 77 pode ser escrito na forma $77 = 5(15) + 2$. Já a divisão de -14 por 3 resulta em $q = -5$ e $r = 1$ e assim $-14 = 3(-5) + 1$.

Com a divisão euclidiana, os números inteiros são divididos em dois grupos: o dos pares e o dos ímpares. Dessa maneira, se n é um inteiro qualquer, há somente duas possibilidades:

- i) Um número será par se for representado na forma $n = 2q$, em que $q \in \mathbb{Z}$.
- ii) Um número será ímpar se for representado na forma $n = 2q + 1$, em que $q \in \mathbb{Z}$.

O conhecimento deste tipo de classificação e da divisão euclidiana possibilita a análise da paridade de algumas operações com números inteiros. Por exemplo, se quisermos saber a paridade do quadrado de um número inteiro ímpar fazemos da seguinte forma: Seja n um número inteiro ímpar. Logo n pode ser escrito na forma $2k + 1$, em que k é um inteiro qualquer. Dessa forma temos:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Fazendo $k^2 + k = p$, isso acarreta que $n^2 = 4p + 1$, ou seja, que n^2 é ímpar.

Proposição: Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que, se n é ímpar, então $n^2 - 1$ é divisível por 8.

Demonstração: Devemos mostrar que, dado n ímpar, $n^2 - 1 = 8k$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

$$n^2 - 1 = (2p + 1)^2 - 1 = (4p^2 + 4p + 1) - 1 = 4(p^2 + p) = 4p(p + 1).$$

Sendo p e $p + 1$ são naturais consecutivos, então o produto entre eles é par. Logo, fazendo $p(p + 1) = 2k$ chegamos a $n^2 - 1 = 4 \cdot 2k = 8k$, concluindo que $n^2 - 1$ é divisível por 8.

O método de divisão euclidiana, quando feito de maneira sucessiva, possibilita também a conversão de bases. Pela divisão euclidiana sabemos que:

$$a = bq + r; \text{ com } r < b, \text{ em que } a, b, q \text{ e } r \in \mathbb{N} \text{ e } b > 1.$$

Aplicando sucessivamente o algoritmo da divisão temos:

$$\begin{aligned}
 a &= bq_0 + r_0; r_0 < b; \\
 q_0 &= bq_1 + r_1; r_1 < b; \\
 q_1 &= bq_2 + r_2; r_2 < b; \\
 &\vdots \\
 q_{n-1} &= bq_n + r_n; r_n < b.
 \end{aligned}$$

A representação de um certo número a para uma nova base b é dada por $a = (r_n r_{n-1} \dots r_2 r_1 r_0)_b$, ou seja, para transformarmos um número a para uma nova base b dividimos a por b , encontrando um quociente q_0 . Depois dividimos q_0 por b , encontrando um novo quociente q_1 e assim sucessivamente até encontrarmos um quociente nulo. Logo em seguida tomamos a ordem inversa dos restos sucessivos dessas divisões. Exemplificando, para transformarmos $(492)_{10}$ para a base 5, procedemos da seguinte maneira:

$$492 = 5 \cdot 98 + 2$$

$$98 = 5 \cdot 19 + 3$$

$$19 = 5 \cdot 3 + 4$$

$$3 = 5 \cdot 0 + 3$$

Portanto, o número 492 na base 5 é representado por $(3432)_5$.

2.3 A regra dos nove fora e o código de barras

A famosa prova dos nove, que em tempos passados era bastante difundida no ensino de Matemática, é um teste aritmético de verificação de possíveis erros que um resultado pode apresentar. Baseada em conceitos de divisibilidade e congruência, a regra dos nove é condição necessária, mas não suficiente, para que um resultado de uma determinada operação esteja correto.

Sobre o uso da regra dos nove surgem questionamentos importantes: Por que utilizar o número 9 nessa regra, em vez de tentar os demais? Por que não usamos, por exemplo, a regra dos “*onzes-fora*” ou dos “*quinzes-fora*”? O que o número 15, por exemplo, teria de diferente para que o 9 tivesse prioridade?

Uma coerente resposta é dada por Oliveira e Lustosa apud Lacava e Costa:

Não existe nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinze. O problema é essencialmente de ordem prática, pois o resto da divisão de um número natural não nulo por 15 não é obtido tão simplesmente quanto o resto da divisão por 9. Usamos a prova dos nove

porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e [...] cada número natural e a soma dos algarismos da sua decomposição decimal deixam o mesmo resto quando divididos por nove. (OLIVEIRA; LUTOSA, 1998, p.21)

A regra dos nove é fundamentada no processo dos “noves-fora”, isto é, no processo de subtrair de um dado número natural n o maior múltiplo de nove nele contido. Este processo resulta em um número que nada mais é do que o resto da divisão de n por 9. Dessa forma, para tirar os “noves-fora” do número 42, por exemplo, deve-se subtrair do número 42 o maior múltiplo de 9 nele contido, ou seja, subtrair 36 de 42, o que resulta em 6. Dizemos então que 42 “noves-fora” é igual a 6.

No entanto, existe outra maneira de se obter os “noves-fora” de um número natural n . Somam-se os algarismos do número n que se deseja obter os “noves-fora” encontrando outro número. A partir deste novo número, somam-se novamente os algarismos deste e assim sucessivamente até restar um número de um único algarismo.

Assim, para tirarmos os “noves-fora” do número 763 devemos somar seus algarismos, ou seja, $7 + 6 + 3 = 16$. Após isso continuamos somando os algarismos do resultado obtido até restar um número de um único algarismo. No exemplo anterior essa soma é 7. Logo 763 “noves-fora” é igual a 7.

Esta regra prática de se obter o resto da divisão de um número n por 9, os “noves-fora”, a partir da soma consecutiva de seus algarismos pode ser demonstrada matematicamente, como a seguir:

Primeiramente, devemos mostrar por indução que $10^n - 1$ é um múltiplo de 9, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para $n = 1$ temos: $10^1 - 1 = 10 - 1 = 9$.

Hipótese: Suponha que $10^n - 1$ é um múltiplo de 9, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, vamos provar para $n + 1$. Chamemos $k = n + 1$. Logo, teremos:

$$10^k - 1 = 10^{n+1} - 1 = 10^n \cdot 10 - 1 = 10^n(9 + 1) - 1 = 9 \cdot 10^n + 10^n - 1.$$

De fato, $9 \cdot 10^n$ é múltiplo de 9. Além disso, por hipótese, $10^n - 1$ também é múltiplo de 9. Consequentemente, a soma $9 \cdot 10^n + 10^n - 1$ é múltiplo de 9. Portanto, provamos que $10^n - 1$ é múltiplo de 9 para todo número natural n .

Agora provaremos que o resto da divisão de um número natural n por 9 é o mesmo que a soma consecutiva de seus algarismos.

Seja $(x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0)$ a representação decimal de um número natural x , em que x_i é um algarismo do sistema decimal para todo i natural, com $0 \leq i \leq n$. Logo, a decomposição decimal do número natural x pode ser representada da seguinte forma:

$$x = (10^n \cdot x_n + 10^{n-1} \cdot x_{n-1} + \dots + 10 \cdot x_1 + x_0).$$

Devemos mostrar que x e a soma dos seus algarismos, quando divididos por 9, deixam restos idênticos.

Sejam x e $x' = (x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0)$ dois números naturais definidos de tal forma que $x = 9q + r$ e $x' = 9q' + r'$, em que $q, q', r, r' \in \mathbb{N}$ e além disso, devemos ter:

$$0 \leq r < 9 \text{ e } 0 \leq r' < 9.$$

Pelo Algoritmo da divisão, nota-se que r e r' são os restos, respectivamente, das divisões de x e x' por 9.

Como sabemos que $x = (10^n \cdot x_n + 10^{n-1} \cdot x_{n-1} + \dots + 10 \cdot x_1 + x_0)$, então temos:

$$x = [(10^n - 1 + 1)x_n + (10^{n-1} - 1 + 1)x_{n-1} + \dots + (10 - 1 + 1)x_1 + x_0].$$

$$x = [(10^n - 1)x_n + (10^{n-1} - 1)x_{n-1} + \dots + (10 - 1)x_1 + x_n + x_{n-1} + \dots + x_1 + x_0].$$

Consideremos $a = (10^n - 1)x_n + (10^{n-1} - 1)x_{n-1} + \dots + (10 - 1)x_1$. Note que a é divisível por 9, pois todas as parcelas são números múltiplos de 9. Dessa forma, $x = a + x'$. Lembrando que $x = 9q + r$ e $x' = 9q' + r'$, podemos então escrever $(9q + r) = a + (9q' + r')$. Como a é múltiplo de 9, escrevemos $a = 9q''$, em que q'' é natural. Conseqüentemente, teremos $(9q + r) = 9q'' + (9q' + r')$. Logo:

$$(9q + r) = 9q'' + (9q' + r') = 9(q'' + q') + r'$$

$$9q + r = 9(q'' + q') + r'.$$

Como $9q$ e $9(q'' + q')$ são ambos múltiplos de 9, podemos concluir que $r = r'$, pois r e r' são menores que 9.

Portanto x e x' deixam o mesmo resto quando divididos por 9, garantindo assim que os restos das divisões de um número natural n e da soma dos seus algarismos por 9 sejam iguais.

Definição 2: Seja n um número natural. Denominamos excesso de n ao resto da divisão de n por 9.

Para melhor compreensão, exemplifiquemos com a seguinte situação: Na adição, para verificarmos o resultado de uma soma usando a prova dos nove, primeiramente calculamos os *noves-fora* de cada uma das parcelas da adição e logo em seguida os somamos. A partir daí, verificamos se o valor dos *noves-fora* dessa soma é igual ao valor dos *noves-fora* do resultado. Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 345 \\ +854 \\ \hline 1199 \end{array}$$

Verificação da regra dos noves:

Noves-fora da 1ª parcela: $3 + 4 + 5 = 12 - 9 = 3$

Noves-fora da 2ª parcela: $8 + 5 + 4 = 17 - 9 = 8$

Soma dos noves-fora das parcelas: $3 + 8 = 11$

Noves-fora dessa soma (se for possível): $1 + 1 = 2$

Noves-fora do resultado: $1 + 1 + 9 + 9 = 20 = 2 + 0 = 2$

Quando o excesso da soma é igual ao excesso da soma dos excessos das parcelas, a regra dos noves indica que a operação está correta. Uma demonstração disso é indicada abaixo:

Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}$, tais que $x + y = z$. Pelo Algoritmo da divisão, podemos escrever: $x = 9q_1 + r_1$, $y = 9q_2 + r_2$ e $z = 9q_3 + r_3$, onde $q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}$ e r_1, r_2 e r_3 são tais que $0 \leq r_1 < 9$, $0 \leq r_2 < 9$ e $0 \leq r_3 < 9$. Como consequência:

$$9q_1 + r_1 + 9q_2 + r_2 = 9q_3 + r_3$$

$$9(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = 9q_3 + r_3.$$

Portanto, $r_1 + r_2 = r_3$ se $r_1 + r_2 < 9$ ou $r_1 + r_2 = 9 + r_3$ se $r_1 + r_2 \geq 9$, em que r_3 é o excesso da soma e r_1 e r_2 são os excessos das parcelas.

A prova dos nove identifica um erro quando o resultado de uma determinada operação aritmética está errado. O curioso é que nem todos os erros podem ser identificados por essa regra, ou seja, ao aplicar a prova dos nove e ela apontar que não há erros, ainda assim, pode ser que aquela operação aritmética esteja incorreta. Qual o motivo disso acontecer? Quais os tipos de erros que a regra não detecta?

A possibilidade da regra dos noves não detectar um pequeno erro acontece pelo fato de que a regra se baseia na soma dos algarismos dos números envolvidos. Na adição, por exemplo, caso haja permutação entre dois algarismos, a soma continuará inalterada, mas o erro não será detectado pela regra dos noves. Ou seja, se o resultado for 173 e um aluno colocar (por descuido talvez) 137, a prova dos noves indicará que a operação está correta, pois ambos os números deixam resto 2 quando divididos por 9. Além do erro de transposição,

a regra dos nove não detecta o erro compensatório, isto é, o erro que acontece quando o resultado apresenta algarismos distintos dos algarismos que deveriam compor o resultado correto e que mesmo assim possuem excesso igual ao excesso dos algarismos do resultado correto.

Assim, se o resultado de uma adição for 345, o resultado da operação dos *noves-fora* continuará dando 3 mesmo que o aluno escreva 363, 255, 192, etc.

Os possíveis erros decorrentes dos cálculos que envolvem aritmética dos restos podem ser identificados com o uso do chamado dígito verificador.

Como exemplo temos o uso do sistema EAN-13 (European Article Number) dos códigos de barras.

Com a difusão dos códigos de barras, algumas dúvidas surgem acerca de sua utilização. Se, por um descuido, ao se digitar os números contidos num código de barras, aconteça uma inversão de ordem entre dois algarismos adjacentes ou mesmo a digitação errada de um número, o erro seria detectado?

Para que estes tipos de erros sejam imediatamente identificados, o sistema EAN - 13 de código de barras utiliza um dígito verificador (13º algarismo). A figura abaixo mostra um exemplo de código de barras nesse sistema:

Figura 43: Código de barras



Fonte: <https://www.gs1br.org/codigos-e-padres/codigo-de-barras>

Os três primeiros dígitos servem para indicar o país de origem do produto. Os quatro dígitos restantes antes das barras centrais indicam o fabricante. Já os cinco primeiros dígitos do lado direito das barras centrais identificam o produto específico do fabricante. O último dígito, chamado de *dígito de verificação*, é acrescentado ao final do processo de elaboração do código de barras e serve para detectar erros de digitação.

Suponha que um determinado produto esteja identificado, no sistema EAN-13, por uma sequência de dígitos da forma $a_1a_2 \dots a_{12}a_{13}$, em que $0 \leq a_k \leq 9$.

Representando esta sequência de números na forma de sequência ordenada, temos:

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_{11}, a_{12}, x).$$

O sistema EAN-13 utiliza uma sequência fixa de pesos w para encontrar o dígito verificador:

$$w = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Calcula-se então o somatório dos produtos ordenados, obtendo-se o número:

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + x.$$

O dígito de verificação x se escolhe de tal maneira que o número acima seja um múltiplo de 10.

Sendo assim, no caso do código de barras da figura 43, os números que indicam o país de origem, o fabricante e o produto são 789835741001. O dígito de verificação foi determinado da seguinte forma: chamando este dígito verificador de x , temos: $7 + 3 \times 8 + 9 + 3 \times 8 + 3 + 3 \times 5 + 7 + 3 \times 4 + 1 + 3 \times 0 + 0 + 3 \times 1 + x = 105 + x$.

Consequentemente, como $0 \leq x \leq 9$, para que esse número seja um múltiplo de 10, o valor de x deverá ser igual a 5.

Dessa forma, a detecção de um erro acontece facilmente, como indica o próximo exemplo: Suponha que o código de barras de um livro foi digitado na seguinte sequência 9782004125021. Ao fazer a verificação de leitura, o computador recebe a informação e faz as devidas operações:

$$9 + 3 \times 7 + 8 + 3 \times 2 + 0 + 3 \times 0 + 4 + 3 \times 1 + 2 + 3 \times 5 + 0 + 3 \times 2 + 1 = 75.$$

Como o resultado obtido não é um múltiplo de 10, ele avisa imediatamente que algum erro foi cometido.

Um leitor atento notará que, se houver apenas um único erro de digitação, trocando-se um dos dígitos a_i por qualquer outro valor distinto, o erro será detectado. No entanto, se mais de um erro de digitação acontecer, não haverá garantia de que os erros sejam identificados, pois alguns podem se “compensar” de tal maneira que a soma ainda continue sendo um múltiplo de 10.

Além disso, há alguns erros de transposição de algarismos adjacentes que não são detectados neste sistema. Como exemplo, suponha que ao se digitar o número 9781402002380 tenha-se cometido um erro de transposição, e que o número de fato

digitado fosse 9781402002830. Efetuando os devidos cálculos temos:

$$9 + 21 + 8 + 3 + 4 + 2 + 6 + 3 + 24 = 80, \text{ que é um múltiplo de } 10.$$

Todos estes fatos mostram que o sistema de detecção de erros não consegue detectar qualquer tipo de erro de transposição cometido. Aliás, pode-se provar que a transposição de dois termos consecutivos a_i e a_{i+1} é detectada por este sistema se, e somente se, $|a_i - a_{i+1}| \neq 5$. (Para ver a demonstração vide TAKAHASHI, Cássia Regina dos Santos. A matemática dos códigos de barras. 20013, p.39-45)

2.4 Sequências numéricas

As sequências numéricas sempre estiveram intimamente relacionadas a processos de contagem e desenvolvimento de sistemas de numeração. Na própria cultura babilônica encontramos tábuas de cálculo onde era comum encontrar sequências numéricas de quadrados e cubos de números inteiros. Já na civilização grega encontramos diversos exemplos de sequências numéricas notáveis, como é o caso dos números figurados. O próprio Leonardo de Pisa (1175 – 1240), conhecido como Fibonacci, estabeleceu um problema que gerava uma sequência extremamente interessante e que leva o seu nome.

As sequências numéricas trazem consigo interessantes propriedades numéricas de ordem prática. Elas ajudam, por exemplo, na previsão de um próximo eclipse ou passagem de um cometa. Mas para entendermos melhor suas aplicações e curiosidades devemos primeiramente entender sua definição.

Definição 3: Uma sequência numérica é uma função de domínio no conjunto \mathbb{N} e contradomínio no conjunto \mathbb{R} , ou seja, é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número natural n , um número real $f(n)$. Denominemos de $f(1) = x_1, f(2) = x_2, f(3) = x_3$, e assim por diante. Denotemos então a sequência numérica por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, em que x_n é chamado de n -ésimo termo da sequência numérica

As sequências numéricas podem ser classificadas de acordo com alguma relação que há entre seus elementos, como a seguir.

Definição 4: Uma sequência (X_n) é denominada:

- a) crescente se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, ou seja, $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$
- b) decrescente se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, ou seja, $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$
- c) não decrescente se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

d) não crescente se $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

Algumas seqüências numéricas podem ser representadas por *leis de recorrências*. A lei de recorrência é uma função f que possibilita determinar cada termo de uma seqüência a partir de seus termos anteriores, desde que o primeiro termo (ou os primeiros) esteja explicitamente determinado. Ou seja, usando a linguagem matemática:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1).$$

Definição 5: Seja k a quantidade de termos anteriores necessários para determinar o próximo termo de uma seqüência numérica. Dizemos então que a seqüência recorrente é de ordem k e a representamos por:

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_{n+1}, a_n).$$

Assim, a seqüência (1, 2, 4, 8, 16, ...) poderia ser representada pela seguinte lei de recorrência:

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2.$$

Já a seqüência (1, 3, 4, 7, 11, ...) é de ordem 2 e pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

2.4.1. Progressões Aritméticas

Definição 6: Uma seqüência numérica em que a diferença entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo, é constante é chamada de Progressão Aritmética (P.A.). Essa constante é indicada por r denominada razão da progressão aritmética.

Em linguagem recursiva, se a_1 é o primeiro termo da P.A. e r é a sua razão, então cada termo da P.A. pode ser determinado usando-se a lei de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2.$$

Dessa forma, a seqüência (2, 5, 8, 11, ...) representa uma P.A. de razão 3 e $a_1 = 2$. Já uma seqüência de termos idênticos representa uma P.A. de razão nula.

Apesar de uma P.A. apresentar explicitamente alguns de seus termos, muitas das vezes estamos interessados num termo específico da seqüência que não foi explicitamente representado. Para encontrarmos esse n -ésimo termo, procedemos da seguinte maneira: Seja

$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ uma P.A. Então da definição temos,

$$a_2 - a_1 = r$$

$$a_3 - a_2 = r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

$$a_5 - a_4 = r$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = r$$

Somando-se e cancelando-se os termos opostos obtemos uma fórmula para o chamado *termo geral*:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Há situações em que é necessário o conhecimento da soma dos termos de uma P.A. finita. Para isso, definamos a soma dos termos de uma P.A. por S_n . Assim, a soma dos termos da P.A. pode ser representada de duas formas distintas.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1.$$

Somando-se membro a membro temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Usando o termo geral da progressão aritmética, verificamos que todas as parcelas são iguais, isto é:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_n + a_1.$$

Dessa forma, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

Um interessante problema, cuja resolução depende do uso do termo geral da P.A. e da soma de seus termos, é apresentado a seguir:

(PROFMAT – MA12 – PROVA 3 - 2011) A sequência 0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, ... é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é, o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o

segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.

- Qual é o centésimo termo dessa sequência?
- Qual é a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência?
- Algum termo desta sequência é igual a 2.000? Por quê?

Resolução:

- Note que a sequência formada pelos termos de ordem ímpar (a_1, a_3, a_5, \dots) é uma P.A. de primeiro termo 0 e razão 7. Já a sequência dos termos de ordem par (a_2, a_4, a_6, \dots) é uma P.A. de primeiro termo 3 e razão 7. Logo o centésimo termo é o 50º termo da sequência dos pares. Assim:

$$a_{100} = 3 + (50 - 1) \cdot 7$$

$$a_{100} = 3 + 343$$

$$a_{100} = 346$$

- Uma maneira prática seria encontrar separadamente a soma dos termos da sequência dos termos de ordem ímpar e de ordem par. Chamando-as, respectivamente, de S_1 e S_2 , temos:

$$S_1 = \frac{(0 + 343) \cdot 50}{2} = 8.575$$

$$S_2 = \frac{(3 + 346) \cdot 50}{2} = 8.725$$

$$\text{Portanto } S_1 + S_2 = 17.300$$

- Note que os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par diminuídos de 3 são múltiplos de 7. Em outras palavras, se n é ímpar então a_n é múltiplo de 7, se n é par então $a_n - 3$ é múltiplo de 7. Usando o algoritmo da divisão sabemos que $2000 = 285 \cdot 7 + 5$ e que $1997 = 285 \cdot 7 + 2$. Logo nem 2000 e nem 1997 são múltiplos de 7, pois deixam restos diferentes de 0. Portanto a_n não poderá ser igual a 2000 nem para um valor par nem para um valor ímpar de n .

2.4.2 Progressões Geométricas

Definição 7: Uma sequência numérica em que a razão entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo, é constante é chamada de Progressão Geométrica (P.G.). Essa constante é indicada por q denominada razão da progressão geométrica.

Fazendo uso da recorrência, se a_1 é o primeiro termo da P.G. e q é a sua razão, então cada termo da P.G. pode ser determinado usando-se a lei de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, n \geq 2.$$

Assim, a sequência (5, 10, 20, 40, ...) é uma P.G. de primeiro termo 5 e razão 2. A sequência com termos idênticos pode ser interpretada como uma P.G. de razão 1.

Para determinarmos o n -ésimo termo de uma P.G. usamos o seguinte raciocínio, baseado na definição:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Isolando-se a razão q no segundo membro, multiplicando-se todos os termos do primeiro membro e cancelando-se os devidos termos chegamos a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n > 1.$$

Para determinarmos a soma dos termos de uma P.G. finita, também usamos um interessante artifício algébrico:

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma P.G. com $q \neq 1$. Então a soma dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por q , obtemos:

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \dots + qa_{n-1} + qa_n.$$

Já que $a_n = qa_{n-1}$, então:

$$qS_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo as duas igualdades anteriores e eliminando-se os termos comuns temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}.$$

Como consequência temos:

$$(1 - q)S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$(1 - q)S_n = a_1(1 - q^n)$$

Para $q \neq 1$ temos a fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Para uma P.G. de termos infinitos e $-1 < q < 1$, q^n tende a zero para valores cada vez maiores de n . Dessa forma, a fórmula da soma de termos se reduz a:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Uma aplicação da soma de termos da P.G. infinita é a determinação da fração geratriz de uma dízima periódica. Se quisermos descobrir a geratriz da dízima $1,32323232\dots$, devemos proceder da seguinte maneira:

Seja $x = 1,32323232\dots$, podemos escrever x na forma:

$$x = 1 + 0,32 + 0,0032 + 0,000032 + \dots$$

A sequência $(0,32; 0,0032; 0,000032, \dots)$ representa uma P.G. infinita de razão $q = 1/100$. Assim:

$$S_n = \frac{32}{\frac{100}{1 - \frac{1}{100}}}$$

$$S_n = \frac{32}{99}$$

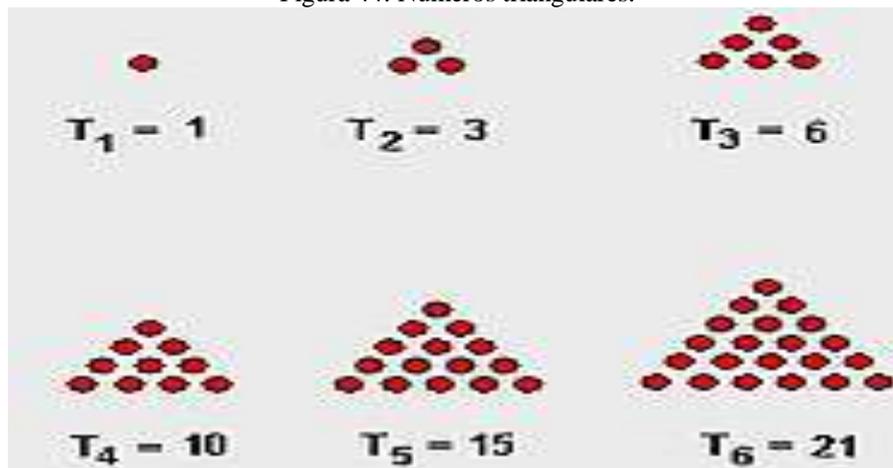
Logo $x = 1 + \frac{32}{99} = \frac{131}{99}$, que é a nossa fração geratriz procurada.

2.4.3 Números poligonais

Os números figurados que possibilitam uma construção geométrica de pontos equidistantes no formato de polígono regular são denominados *números poligonais*. Os principais números poligonais são: os triangulares, os quadrados, os pentagonais e os hexagonais. Eles apresentam interessantes propriedades que estão relacionadas com a soma de termos de uma sequência numérica.

Os números triangulares são representados por pontos dispostos no formato de triângulos.

Figura 44: Números triangulares.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_triangular

Propriedade 1: O n-ésimo número triangular T_n é igual à soma dos n primeiros números naturais.

Analisando a figura 44 podemos representar recursivamente a sequência dos triangulares:

$$T_2 = T_1 + 2$$

$$T_3 = T_2 + 3$$

$$T_4 = T_3 + 4$$

$$T_5 = T_4 + 5$$

$$T_6 = T_5 + 6$$

$$\vdots$$

$$T_n = T_{n-1} + n,$$

Em que n é um número natural maior que 1 e T_n indica o n -ésimo número triangular.

Somando-se os termos, membro a membro, e cancelando-se os termos opostos temos:

$$T_n = T_1 + (2+3+ \dots + n)$$

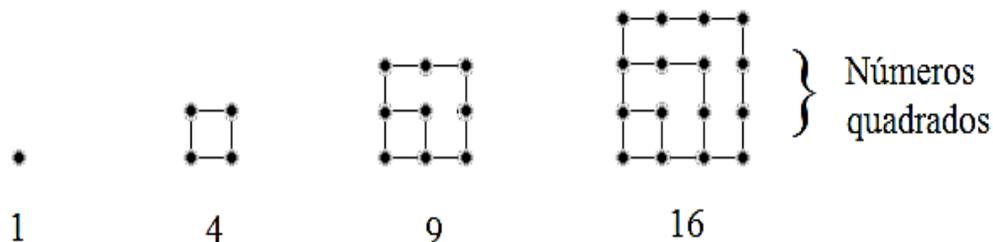
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Logo, T_n é a soma de n termos de uma P.A com $a_1 = 1$ e $a_n = n$. Portanto, é dado algebricamente por:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Os números quadrados se apresentam na forma de um quadrilátero regular e são indicados por Q_n .

Figura 45: Números quadrangulares



Fonte: <https://www.phylos.net/2017-12-13/matematica-grecia-antiga/>

Propriedade 2: Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos.

Sejam T_n e T_{n+1} dois números triangulares consecutivos e Q_n o n -ésimo número quadrado. Devemos mostrar que $T_n + T_{n+1} = Q_{n+1}$, em que $Q_n = n^2$.

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$T_n + T_{n+1} = \frac{2n^2 + 4n + 2}{2}$$

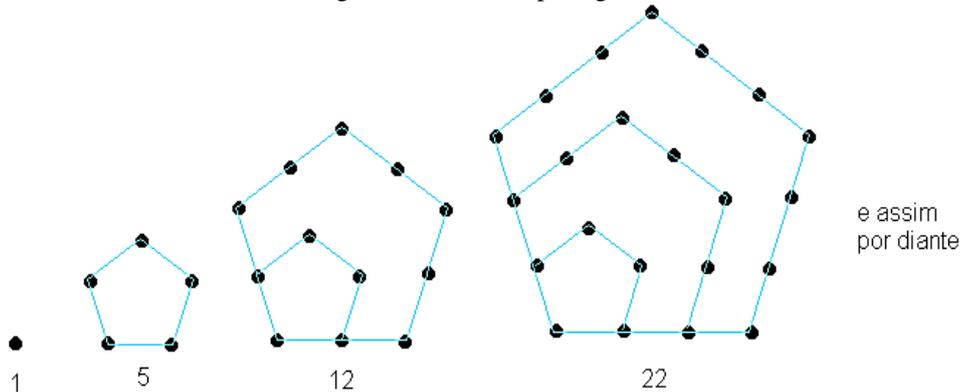
$$T_n + T_{n+1} = n^2 + 2n + 1$$

$$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$$

$$T_n + T_{n+1} = Q_{n+1}.$$

Os números pentagonais são aqueles dispostos na forma de pentágonos regulares.

Figura 46: Números pentagonais



Fonte: <http://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>

Propriedade 3: O n-ésimo número pentagonal é igual a n mais três vezes o (n-1)-ésimo número triangular.

Seja P_n o n-ésimo número pentagonal. Como P_n é dado pela soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (1, 4, 7, ..., $3n - 2$), então:

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

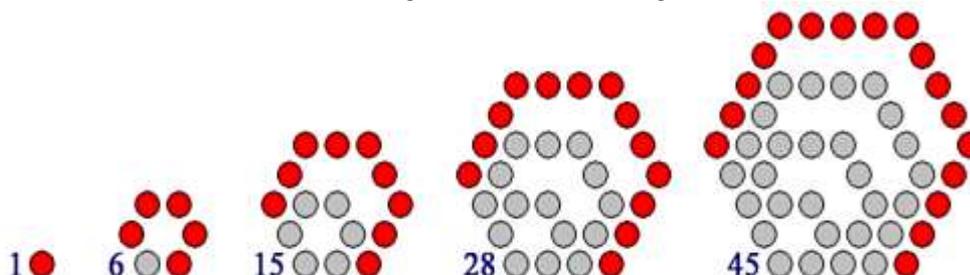
$$P_n = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2}$$

$$P_n = n + \frac{3n(n-1)}{2}$$

$$P_n = n + 3.T_{n-1}.$$

Já os números hexagonais são números representados geometricamente por pontos distribuídos no formato de hexágonos regulares.

Figura 47: Números hexagonais



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_poligonal

Seja H_n o n-ésimo número hexagonal. Para obtermos o número hexagonal seguinte, precisamos somar 4 lados de comprimento $(n + 1)$ e subtrairmos em seguida 3 unidades que são justamente as quantidades sobrepostas nos cantos.

Dessa forma, a sequência dos hexagonais é dada recursivamente por:

$$H_1 = 1$$

$$H_{n+1} = H_n + 4n + 1.$$

Algebricamente, os números hexagonais podem ser expressos através da expressão $H_n = n(2n - 1)$. Assim os 10 primeiros hexagonais são 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153 e 190. Existem muitas propriedades interessantes acerca dos números hexagonais como, por exemplo, o fato de que todos os hexagonais são números triangulares e que os únicos triangulares que são hexagonais são os de ordem ímpar.

2.4.4 A sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (mais conhecido como Leonardo Fibonacci) foi um grande matemático italiano que viveu em Pisa e foi autor da obra *O Liber Abaci* (o livro do ábaco). Ele ficou conhecido pela introdução dos algarismos arábicos na Europa e pela sequência numérica que hoje leva o seu nome.

A sequência de Fibonacci tem a seguinte formação: os dois primeiros termos desta sequência são iguais a 1 e os demais termos são obtidos pela soma de seus dois termos predecessores.

Dessa forma, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3$, e assim por diante. Logo a sequência se apresenta da seguinte forma:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

De modo geral, se F_n indica o n -ésimo número da sequência de Fibonacci então, recursivamente temos:

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

A sequência de Fibonacci apresenta propriedades importantes e interessantes que podem ser verificadas com o uso da recorrência.

Propriedade 4: A soma S_n dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci, com $n > 1$, pode ser expressa por $S_n = F_{n+2} - 1$.

Para determinar $S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n$, note primeiramente que:

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

A partir daí temos:

$$S_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + \dots + (F_n - F_{n-1}) + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1})$$

Cancelando os termos opostos e lembrando que $F_2 = 1$, teremos:

$$S_n = F_{n+2} - 1.$$

Propriedade 5: A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por $(F_1)^2 + (F_2)^2 + \dots + (F_{n-1})^2 + (F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Note que $F_1 = F_2$. Logo $(F_1)^2 = F_1 \cdot F_2$. Dessa forma, para $n > 1$:

$$(F_1)^2 = F_1 \cdot F_2$$

$$(F_2)^2 = F_2 \cdot F_3 - F_1 \cdot F_2$$

$$(F_3)^2 = F_3 \cdot F_4 - F_2 \cdot F_3$$

⋮

$$(F_{n-2})^2 = F_{n-2} \cdot F_{n-1} - F_{n-3} \cdot F_{n-2}$$

$$(F_{n-1})^2 = F_{n-1} \cdot F_n - F_{n-2} \cdot F_{n-1}$$

$$(F_n)^2 = F_n \cdot F_{n+1} - F_{n-1} \cdot F_n$$

Somando membro a membro e cancelando os termos opostos encontramos:

$$S_n = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Propriedade 06: Dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são primos entre si.

Sejam F_n e F_{n+1} termos consecutivos da sequência de Fibonacci e d um número natural. De fato:

- Se $d|F_n$ e $d|F_{n+1}$, então $d|F_{n+1} - F_n$ (propriedade de divisibilidade), isto é, $d|F_{n-1}$;
- Se $d|F_n$ e $d|F_{n-1}$, então $d|F_n - F_{n-1}$, ou seja, $d|F_{n-2}$;
- ⋮
- Se $d|F_1$, então $d|1$. Consequentemente $d=1$.

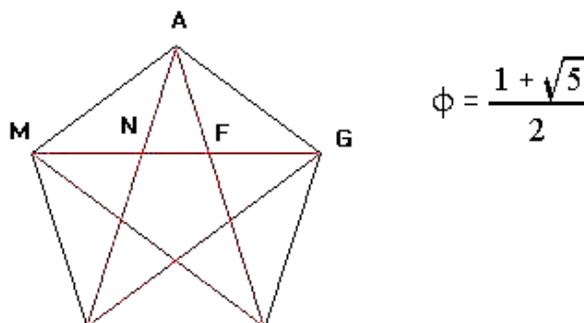
Portanto, $\text{mdc}(F_n, F_{n+1}) = 1$ para todo $n \geq 1$, o que mostra que F_n e F_{n+1} são primos entre si.

2.5 O número áureo e o número de plástico.

A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci se aproxima de 1,618034 à medida que os termos tendem para valores cada vez maiores de F_n . Esse valor recebe o nome de “número áureo” e tem incontáveis aplicações na natureza e arquitetura. Ele aparece em abacaxis, espirais e até mesmo num problema de crescimento de uma população de coelhos*.

O número áureo tem estreita relação com a geometria dos pentágonos regulares. Ele é a razão entre a medida da diagonal de um pentágono regular e a medida do seu lado. Dessa maneira, está associado também à geometria do dodecaedro e do icosaedro e satisfaz a equação $\Phi = 1 + 1/\Phi$.

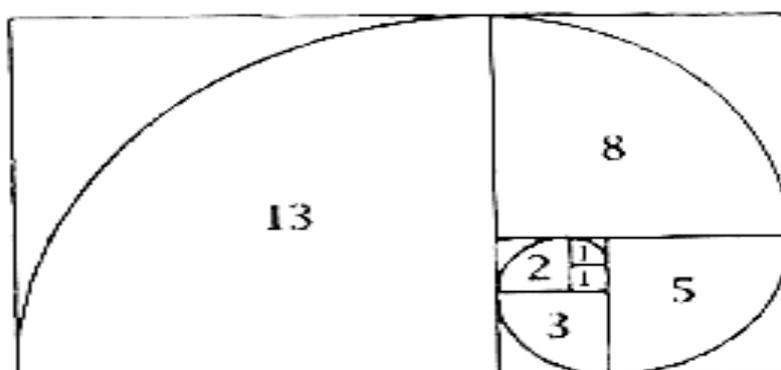
Figura 48: As diagonais de um pentágono regular



Fonte: <http://www.monografias.com/trabajos75/numero-aureo/numero-aureo2.shtml>

O número áureo apresenta padrões geométricos e algébricos bastante peculiares como mostra a figura (em que os números expressam as medidas dos lados dos quadrados):

Figura 49: Aproximação da espiral logarítmica



Fonte: <http://www.monografias.com/trabajos75/numero-aureo/numero-aureo2.shtml>

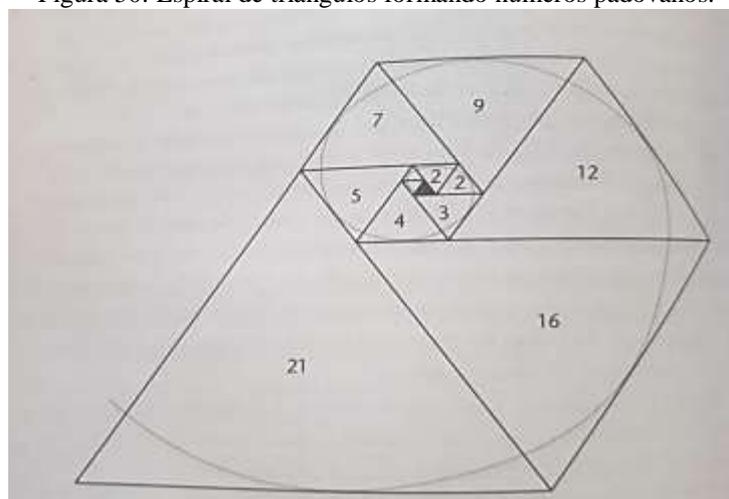
* O problema dos coelhos aparece na obra de Fibonacci “*Liber abbaci*” (*Livro dos cálculos*) publicada em 1202. O problema é assim descrito: Um homem pôs um par de coelhos em um lugar cercado por paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos serão produzidos por esse par em um ano, se supusermos que a cada mês, cada par produzirá um novo par, que se tornará fértil a partir do 2º mês de vida?

Um quarto de círculo foi colocado em cada quadrado que compõe a figura. Os arcos se juntam para formar uma elegante espiral, que é rotineiramente encontrada na natureza (como a concha de caramujo) e é uma razoável aproximação para a representação da *espiral logarítmica*.

Na figura 49, os dois quadrados iniciais tem lado 1. Depois, um quadrado de lado 2 é acrescentado justamente para se “encaixar” com os dois quadrados iniciais. Logo em seguida são acrescentados quadrados de lados 3, 5, 8 e 13, que são os números de Fibonacci. Assim, cada quadrado de lado maior que 1 “encaixa” exatamente nos dois quadrados anteriores justapostos. Por exemplo, a figura acima mostra que o quadrado de lado 13 tem a mesma altura que os de lados 5 e 8 justapostos.

Um fato semelhante acontece quando tratamos com a geometria dos triângulos. Para fins de comparação temos a figura:

Figura 50: Espiral de triângulos formando números padovanos.



Fonte: Stewart, 2005, p.82.

Os triângulos da figura 50 são todos equiláteros. O triângulo inicial está destacado em preto e tem lado 1. Note que, para se ajustarem, os três primeiros triângulos têm lados com medidas iguais a 1, os dois seguintes têm lados com medida igual a 2 e em seguida acrescentam-se triângulos com lados medindo 4, 5, 7, 12, 16 e 21.

Esse padrão geométrico, gerador da sequência (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, ...), recebe importante destaque na obra de Stewart, onde ele salienta:

[...]Mais uma vez, há uma regra simples de formação, análoga à regra para a geração dos números de Fibonacci: agora cada número na sequência é a soma do número *prévio* ao anterior com o que vem antes dele. Por exemplo $12 = 7 + 5$, $16 = 9 + 7$, $21 = 12 + 9$. Novamente, isto é claro a partir da geometria dos triângulos e das condições necessárias para que se ajustem.

Chamarei esta sequência a *sequência padovana* em homenagem a Richard Padovan. (STEWART, 2005, p.83)

Assim, a chamada *sequência de Padovan* está intimamente relacionada com a sequência de Fibonacci e ela traz consigo um “parente” distante do número áureo.

Algebricamente, as leis de recorrência que geram os números de Fibonacci e de Padovan são as seguintes:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ em que } F_0 = F_1 = 1$$

$$P_{n+1} = P_{n-1} + P_{n-2}, \text{ em que } P_0 = P_1 = P_2 = 1.$$

A figura a seguir apresenta um quadro com a relação dos 20 primeiros termos da sequência de Fibonacci (F_n) e de Padovan (P_n).

Figura 51: As sequências de Fibonacci e Padovan

| n | $F(n)$ | $P(n)$ | n | $F(n)$ | $P(n)$ |
|-----|--------|--------|-----|--------|--------|
| 0 | 1 | 1 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 11 | 144 | 16 |
| 2 | 2 | 1 | 12 | 199 | 21 |
| 3 | 3 | 2 | 13 | 343 | 28 |
| 4 | 5 | 2 | 14 | 542 | 37 |
| 5 | 8 | 3 | 15 | 885 | 49 |
| 6 | 13 | 4 | 16 | 1427 | 65 |
| 7 | 21 | 5 | 17 | 2312 | 86 |
| 8 | 34 | 7 | 18 | 3739 | 114 |
| 9 | 55 | 9 | 19 | 6051 | 151 |
| 10 | 89 | 12 | 20 | 9790 | 200 |

Fonte: Stewart, 2005, p.84.

Da mesma forma como a razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci resulta no número áureo, a razão de termos sucessivos da sequência de Padovan se aproxima do número 1,324718... que é chamado de *número plástico* e desempenha importante função na área de Arquitetura. Representado pela letra p , o número plástico é a única solução real da equação gerada pela regra de formação dos números padovanos, a saber, $p^3 - p - 1 = 0$.

Algumas particularidades que envolvem tanto a sequência de Fibonacci quanto a de Padovan são conhecidas. Por exemplo, sabe-se que 0, 1, 2, 3, 5 e 21 são os únicos números tanto de Fibonacci quanto padovanos. Outras ainda continuam perguntas sem respostas. Um exemplo é, se existem outros números padovanos, além de 1, 4, 9, 16 e 49, que são quadrados perfeitos. E quantos seriam?

2.6 Números primos

Os números primos exercem grande fascínio desde o tempo dos pitagóricos. Eles são o principal foco de estudo do ramo da Teoria dos Números. Uma de suas grandes aplicações está na segurança digital, com o desenvolvimento da chamada *criptografia*, onde números primos gigantescos são utilizados para codificar e decodificar mensagens e códigos.

O Teorema Fundamental da Aritmética garante que qualquer número natural $n \geq 2$ ou é primo ou pode ser decomposto de forma única, exceto pela ordem dos fatores, como produto de números primos. Dessa forma, o produto de dois primos muito grandes geraria um número não-primo maior ainda, o que dificultaria ainda mais a sua decomposição, aumentando assim a segurança de senhas, mensagens, etc. Isso talvez explique o fato dessa busca incessante por números primos.

Definição 8: Um número natural $n > 1$ é dito primo se for divisível apenas por ele mesmo e pela unidade.

Assim, os 10 primeiros números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29. Já o número 9, por exemplo, tem divisores 1, 3 e 9. Nesse caso, dizemos que esse número é composto.

A palavra primos vem do latim *primus* e quer dizer primeiro, no sentido de que os primos são os “átomos da aritmética” e são elementos essenciais na formação de outros números.

Há muitos questionamentos acerca dos números primos. O primeiro deles foi resolvido por Euclides quando o mesmo provou que há uma infinidade de números primos. A prova de Euclides desenvolveu-se da seguinte forma:

Seja P o conjunto dos números primos. Suponha, por absurdo, que P é finito, isto é, que $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ e suponha que temos $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Considere o número $u = p_1 \dots p_k + 1$, que não pode ser primo, pois é maior que o maior primo desse conjunto, ou seja, $u > p_k$. Então, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existe $p_i \in P$, $1 \leq i \leq k$ tal que $p_i | u$. Logo existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $u = p_1 \dots p_k + 1 = p_i q$. Isto implica que $1 = p_i q - p_1 \dots p_k = p_i (q - p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_k)$. Ou seja, $p_i | 1$, que é um absurdo, pois o número 1 não possui divisores primos. Logo P é infinito.

A busca por números primos teve início provavelmente na Grécia. Por volta de 200 a.C, Eratóstenes de Cirene (aproximadamente 276 – 194 a.C) criou um algoritmo para encontrar números primos, conhecido como crivo de Eratóstenes.

Este algoritmo consiste em dispor os números naturais em uma tabela e eliminar gradativamente da lista os múltiplos dos números primos que já se conhecia.

Figura 52: O crivo de Eratóstenes.

| | | | | | | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Fonte: <http://curiousguys2.blogspot.com.br/2011/09/quais-sao-os-numeros-primos-e-naturais.html>

Apesar dos grandes avanços da Teoria dos Números, muitas afirmações envolvendo números primos ainda continuam sem demonstração. Não se sabe, por exemplo, uma regularidade na distribuição dos primos ou como descobrir, de forma simples, se um número é simples ou composto.

Há muitas indagações também a respeito dos chamados primos gêmeos (aqueles números primos que diferem apenas em duas unidades, como 3 e 5, 5 e 7, 37 e 39, etc.). Até hoje não se sabe se há uma infinidade de números primos gêmeos.

Um grande problema da aritmética dos primos resiste até hoje, mesmo com as poderosas ferramentas proporcionadas pela Teoria dos Números. É a *conjectura de Goldbach*.

A conjectura de Goldbach surgiu a partir de uma carta de Christian Goldbach a Leonhard Euler em 1742, em que Goldbach afirmava que “*todo número natural par maior que 2 poderia ser escrito como soma de dois números primos*” mas que não conseguia provar isso.

Analisando os primeiros números pares percebemos notadamente que a conjectura é válida, pois $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$. Mas encontrar uma prova geral parecia ir além das capacidades intelectuais da época.

O certo é que a conjectura de Goldbach resistiu a séculos e ainda hoje ninguém conseguiu encontrar um contra-exemplo para refutá-la.

2.6.1 Números primos importantes

Os números da forma $F_n = 2^k + 1$, em que $k = 2^n$, com n natural, são chamados de números de Fermat. Em uma carta endereçada a Mersenne, o matemático Pierre de Fermat (1601 – 1665) afirmava ter descoberto uma fórmula que “gerava” números primos. De fato, a fórmula $F_n = 2^k + 1$, em que $k = 2^n$, é verdadeira para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4 . No entanto, para $n = 5$ temos $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ que é divisível por 641 . Portanto F_5 é composto.

Apesar desse “escorregão”, Fermat desenvolveu um notável estudo sobre números primos. Em um de seus estudos, ele provou o que ficou conhecido como *Pequeno Teorema de Fermat*:

Se p é primo, então para todo $a \in \mathbb{Z}$, $a^p - a$ é divisível por p .

Uma consequência direta desse teorema é que se p não divide a , então a^{p-1} é divisível por p .

Os números da forma $M_n = 2^n - 1$, com n natural, são conhecidos como *números de Mersenne*. Estes números estão intimamente ligados com os números perfeitos (números que resultam da soma de seus divisores próprios).

O matemático Marin Mersenne (1588 – 1648) tinha conhecimento de que, se n fosse composto, M_n também o seria. Mas que se n fosse primo, nem sempre $2^n - 1$ seria. Um contra-exemplo é o número $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Através de seus estudos, Mersenne chegou a conjecturar que para $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ e 257 , M_n seria primo e que para os demais primos menores, M_n seria composto.

Sabe-se que Mersenne passou pelo mesmo equívoco de Fermat, pois M_{61} , M_{89} e M_{107} são primos e M_{67} e M_{257} são compostos.

Um fato curioso é que em Dezembro de 2017 Jonathan Pace, um engenheiro americano, fez a descoberta do 50º número primo de Mersenne. Esse número é o maior primo conhecido e tem aproximadamente impressionantes 23 milhões de dígitos.

Outro instrumento poderoso da aritmética dos primos é a conhecida *função ϕ* de Euler. Desenvolvida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783), a *função $\phi(n)$* é definida da seguinte forma:

Definição 9: Seja $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Então $\phi(n)$ é a quantidade de números inteiros a , em que $1 \leq a \leq n$, tais que o mdc $(a, n) = 1$.

Em outras palavras, $\phi(n)$ é a quantidade de inteiros positivos que são *coprimos* com n (apresentam o número 1 como maior divisor comum entre eles e n). Assim, $\phi(2) = 1$, $\phi(4) = 2$, $\phi(10) = 4$, etc.

Uma consequência imediata da definição da função $\phi(n)$ é que se p é primo, então $\phi(p) = p - 1$. Assim, $\phi(11) = 10$, pois todos os números de 1 a 10 são coprimos com 11.

Uma importante propriedade da função $\phi(n)$ é que ela é multiplicativa, isto é, se $m, n > 1$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$, então $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.

Dessa forma, para sabermos a quantidade de números que são *coprimos* com um dado número composto n , devemos decompor o número em fatores primos e usar a propriedade multiplicativa de $\phi(n)$.

Como exemplo, temos o número 30. Decompondo-o em fatores primos obtém-se $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Logo, usando a propriedade multiplicativa temos:

$$\phi(30) = \phi(2 \cdot 3 \cdot 5) = \phi(2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(5) = (2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (5 - 1) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

Portanto, existem 8 números menores do que 30 que são coprimos com ele. São eles: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29.

2.6.2 Números perfeitos

A busca por números perfeitos é bastante antiga e passa por diversos matemáticos ao longo do tempo. Começa com a descoberta destes números durante o período da escola pitagórica. Estes acreditavam que o número era o conceito fundamental do universo, ou seja, a essência de todas as coisas. Os números eram classificados pelos pitagóricos de diversas formas: números figurados, primos, amigáveis, triangulares, quadrangulares, etc.

Um dos seus conceitos fundamentais era a definição de número primo, visto que era a partir dos primos que podia se escrever todos os demais números. Outra classificação que trazia consigo propriedades peculiares era a classificação de perfeição de um número.

Para os pitagóricos, um número poderia ser considerado *deficiente* se a soma dos seus divisores, exceto o próprio, fosse menor que o próprio número. Era definido como *abundante* se a mencionada soma fosse maior que o próprio número. Caso a soma dos divisores de um número, exceto ele mesmo, coincidissem com o próprio número, este era considerado *perfeito*. Assim, $6 = 1 + 2 + 3$ era considerado perfeito, pois é igual à soma de seus divisores próprios (divisores com exceção do próprio número). Como o número 10 tem divisores próprios 1, 2 e 5, a soma dos mesmos é menor que 10, logo ele seria deficiente. Já o número 12 seria abundante, pois a soma de seus divisores próprios (1, 2, 3, 4 e 6) é maior que 12.

Sobre isso, Stewart analisa:

Isso mostra que todos os três tipos ocorrem, mas também sugere que números deficientes são mais comuns que os outros dois tipos. Em 1998, Marc Deléglise provou uma fórmula precisa desse enunciado: à medida que n se torna tão grande quanto se queira, a proporção de números deficientes entre 1 e n tende a uma constante entre 0,7526 e 0,7520, enquanto a proporção de números abundantes jaz entre 0,2474 e 0,2480. Em 1995, Hans – Joachim Kanold já havia provado que a proporção de números perfeitos tende a 0. Então, cerca de três quartos de todos os números são deficientes e um quarto são abundantes. Dificilmente são perfeitos. (STEWART, 2015, p.96-97)

Figura 53: Classificação dos números quanto à soma de seus divisores próprios

| número | soma dos divisores próprios | tipo |
|--------|-----------------------------|------------|
| 1 | 0 (nenhum divisor próprio) | deficiente |
| 2 | 1 | deficiente |
| 3 | 1 | deficiente |
| 4 | $1 + 2 = 3$ | deficiente |
| 5 | 1 | deficiente |
| 6 | $1 + 2 + 3 = 6$ | perfeito |
| 7 | 1 | deficiente |
| 8 | $1 + 2 + 4 = 7$ | deficiente |
| 9 | $1 + 3 = 4$ | deficiente |
| 10 | $1 + 2 + 5 = 8$ | deficiente |
| 11 | 1 | deficiente |
| 12 | $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ | abundante |
| 13 | 1 | deficiente |
| 14 | $1 + 7 = 8$ | deficiente |
| 15 | $1 + 3 + 5 = 9$ | deficiente |

Fonte: Stewart, 2016, p.97.

Euclides foi o primeiro, após os pitagóricos, a desenvolver interesse pelas propriedades dos números perfeitos. Em sua obra “Os elementos” destaca-se uma passagem sobre números perfeitos que hoje, em linguagem algébrica moderna, é representada pelo seguinte teorema:

Teorema 2: Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$. Se $2^n - 1$ é primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito.

Para demonstrarmos esse teorema, precisaremos de algumas definições e proposições preliminares.

Definição 10: Sendo n um número natural, designaremos por $\tau(n)$ o número de divisores positivos de n , incluindo o 1 e o n .

Definição 11: Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\sigma(n)$ a soma dos divisores de n .

A função $\sigma(n)$, assim como a função ϕ de Euler, é multiplicativa, ou seja, para m e n naturais coprimos temos $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \sigma(n)$.

Uma consequência imediata da definição é que se p é primo então $\sigma(p) = p + 1$.

Proposição 2: Seja n um número natural maior do que um e seja $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ a sua decomposição em fatores primos. Então:

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1-1} \right) \left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}}{p_2-1} \right) \dots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k-1} \right).$$

Demonstração: Notemos primeiramente que, para qualquer número natural n maior do que um, $1 + n + n^2 + \dots + n^\alpha$ corresponde à soma dos $\alpha+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão n . Assim, temos:

$$1 + n + n^2 + \dots + n^\alpha = \frac{n^{\alpha+1} - 1}{n - 1}.$$

Sendo p um número primo, os divisores de p^α são exatamente as potências de p até ao expoente α , ou seja, $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$, o que resulta em:

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$

Assim, como $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ e a função $\sigma(n)$ é multiplicativa, temos:

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k}) =$$

$$\sigma(n) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1-1} \right) \left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}}{p_2-1} \right) \dots \left(\frac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k-1} \right).$$

Voltando ao teorema dos números perfeitos, sendo $p = 2^n - 1$ um número primo e sendo $a = p \cdot 2^{n-1}$, devemos mostrar que a é um número perfeito.

Os divisores próprios de a são: $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}, p, 2p, 2^2 p, \dots, 2^{n-2} p$. Então:

$$\sigma(a) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2 p + \dots + 2^{n-2} p$$

$$\sigma(a) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + p (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2})$$

$$\sigma(a) = 2^n - 1 + p(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1 (2^n - 1) (2^{n-1} - 1)$$

$$\sigma(a) = (1 + (2^{n-1} - 1))(2^n - 1)$$

$$\sigma(a) = 2^{n-1} (2^n - 1)$$

$$\sigma(a) = a$$

Portanto $a = 2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito.

Para os pitagóricos, os únicos números perfeitos conhecidos eram: 6, 28, 496 e 8128. Estes números eram obtidos a partir da fórmula de Euclides, em que n assume os valores 2, 3, 5 e 7 respectivamente.

Algumas conjecturas sobre os números perfeitos foram rapidamente refutadas, como por exemplo a afirmação de que todos os perfeitos terminavam, alternadamente, em 6 ou 8. Ou que o 5º número par perfeito seria originado do próximo primo (nesse caso o 11) e que o mesmo teria 5 algarismos. O quinto número perfeito, encontrado no século XV, é 33550336 e é gerado pelo número 13. Já o sexto número perfeito é 8589869056, que termina em 6, assim como seu antecessor.

Apesar de todos os avanços da Teoria dos números, a descoberta de números perfeitos ímpares ou a comprovação da infinidade ou não dos números pares perfeitos ainda representam questões sem resposta, despertando interesse e resistindo à engenhosidade da mente dos matemáticos.

3. CURIOSIDADES NUMÉRICAS

A relação que existe entre os números e as propriedades que os mesmos apresentam encantam à medida que se entra nesse universo intrigante e envolvente. Os números podem mostrar mais do que realmente são. Não são apenas símbolos para representar quantidades. A essência do número está no fato de que cada um é especial por apresentar uma particularidade. Essa característica muitas das vezes foge à percepção humana.

O número 5, por exemplo, é a constante relacionada com quadrados mágicos de ordem 3. O 7 é o quarto primo e é o menor número de cores necessárias para colorir os mapas num toro, de modo que regiões adjacentes recebam cores diferentes. O número 8 é o primeiro cubo não trivial da sequência de Fibonacci. E muitos outros números trazem consigo uma curiosidade que os fazem ser cada vez mais apreciados.

3.1 Afinal, qual a utilidade do π ?

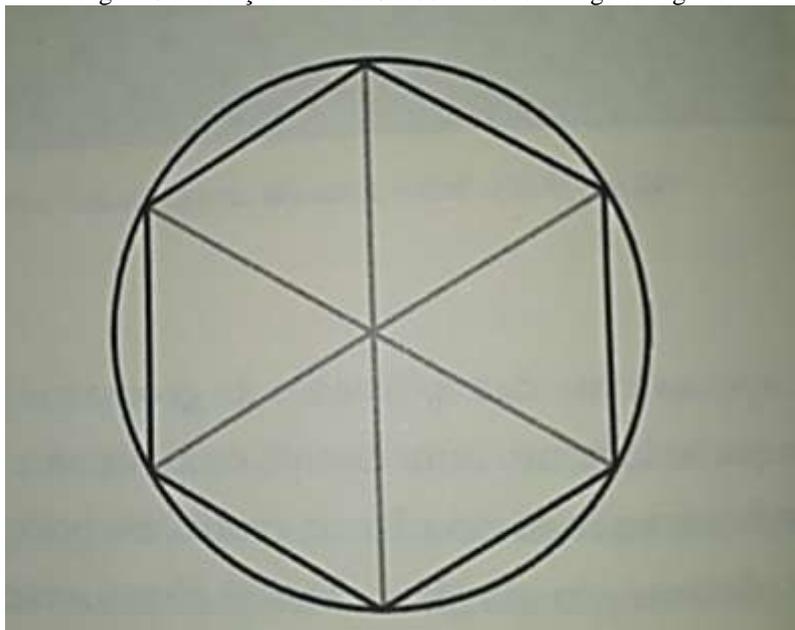
Os números naturais servem para a contagem, por isso se tornaram tão familiares que qualquer um pode facilmente manipulá-los em determinadas operações. Alguns números, no entanto, são bem estranhos pois apresentam características incomuns. Talvez o primeiro contato com esse tipo de número ocorre com o estudo de círculos, onde nos deparamos com o π .

O número π é definido como a razão entre o comprimento da circunferência de um dado círculo e a medida de seu diâmetro. Não importa o tamanho do círculo, essa razão se aproxima de $22/7 = 3,1428\dots$ Por não apresentar uma expansão decimal finita ou periódica, o π é um número irracional e é representado pela 16ª letra do alfabeto grego por corresponder à primeira letra da palavra *perímetro*.

O cálculo cada vez mais preciso do π sempre foi um grande obstáculo para os matemáticos. Arquimedes obteve um valor bem preciso para π . Ele provou que π está compreendido entre $223/71$ e $22/7$. Matematicamente, isso está longe de mostrar a ausência de padrão nas casas decimais do π . Nas palavras de Stewart:

A relação entre a circunferência e o diâmetro não é tão imediata. Se você desenhar um hexágono dentro de um círculo, poderá se convencer de que a circunferência é um pouco maior que o triplo do diâmetro. A figura mostra seis raios, que se juntam aos pares para formar três diâmetros. O hexágono tem o mesmo comprimento que seis raios – isto é, três diâmetros. E o círculo é claramente um pouco mais longo que o hexágono. (STEWART, 2016, p.204)

Figura 54: Relação entre o π e os lados do hexágono regular.



Fonte: Stewart, 2016, p.204.

Sendo o número π uma constante, ele aparece na fórmula do comprimento C de uma circunferência qualquer. Essa fórmula é dada pela expressão:

$$C = 2\pi R$$

em que R indica o raio da circunferência. A constante π também está presente na fórmula da área de círculos, que é dada por:

$$A = \pi R^2$$

Mas o π aparece em muitas outras áreas que nem sequer envolvem círculos diretamente. Por exemplo, Leonhard Euler estabeleceu uma prodigiosa relação entre as mais famosas constantes da Matemática: 0, 1, e , i , π .

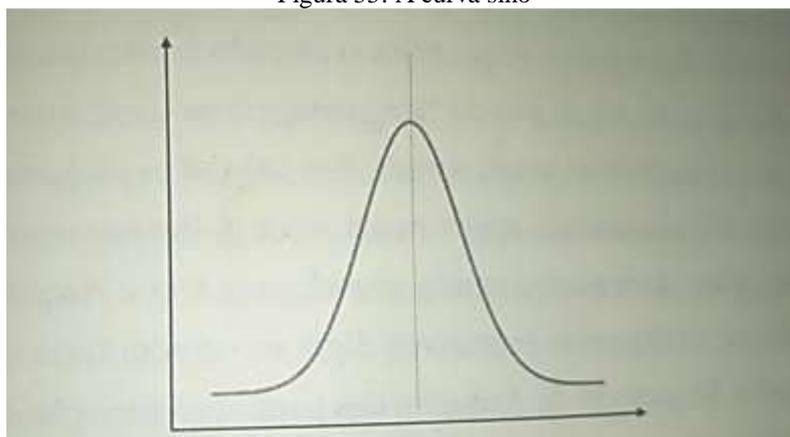
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Euler também associou o π às séries infinitas. Ao tentar encontrar a soma dos inversos de todos os quadrados, ele encontrou a seguinte relação:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Outra área que parece ter estreita relação com o π é a Estatística. A área sobre a curva famosa designada de “curva do sino” vale exatamente a raiz quadrada de π .

Figura 55: A curva sino



Fonte: Stewart, 2016, p.207.

Uma aplicação do π extremamente interessante aparece no famoso *Problema das agulhas de Buffon*.

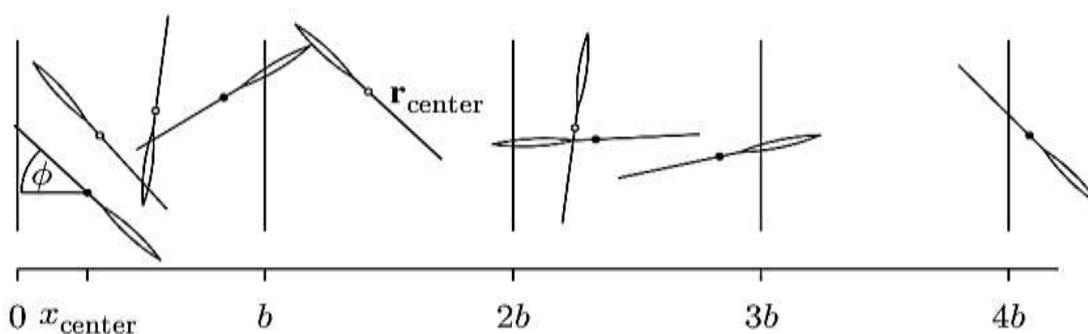
Em maio de 1733, o matemático francês George-Louis Leclerc, chamado de conde Buffon, submeteu à Academia de Ciências o seguinte problema:

“Sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?”

Buffon calculou a probabilidade de uma agulha de comprimento L intersectar uma das linhas paralelas separadas por uma distância d e dispostas sobre o plano quando a agulha é lançada de maneira aleatória sobre o plano.

Essa probabilidade é igual a $2L/d \pi$, permitindo assim o cálculo de π .

Figura 56: O problema das agulhas de Buffon



Fonte: <http://recologia.com.br/2017/12/metodo-de-monte-carlo-e-o-experimento-da-agulha-de-buffon/>

3.2 A sequência de Fibonacci na natureza

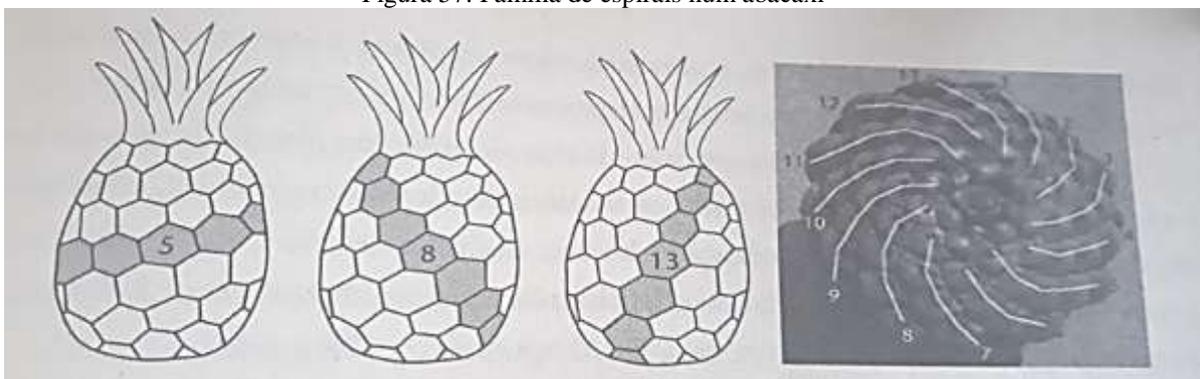
A sequência de Fibonacci apresenta uma característica incomum, não só pelo fato do padrão em que seus números exibem, mas também pela forma como aparecem na natureza, principalmente em plantas e espirais.

Muitas flores exibem em seu formato, quantidade de pétalas que expressam números de Fibonacci. Malmequeres têm 13 pétalas. Margaridas apresentam em geral 34, 55 ou 89 pétalas. Girassóis 55, 89 ou 144. Outros números são mais difíceis de serem encontrados. Os brincos-de-princesa, por exemplo, possuem 4 pétalas. Este número está associado a outra conhecida sequência, chamada de sequência de Lucas (1, 3, 4, 7, 11, 18,...), que possui o mesmo padrão de formação da sequência de Fibonacci, mas tem primeiro elemento igual a 1 e o segundo igual a 3.

A estreita relação desses números com as plantas e espirais é retratada por Stewart:

Os mesmos números aparecem em diversas outras características de plantas. O abacaxi tem um padrão aproximadamente hexagonal na sua superfície; os hexágonos são frutos individuais, que coalescem à medida que crescem. Eles se encaixam em duas famílias de espirais enganchadas. Uma família se enrola no sentido anti-horário, vista de cima, e contém 8 espirais; a outra, no sentido horário e contém 13 espirais. Também é possível ver uma terceira família de 5 espirais, enrolando-se no sentido horário num ângulo menos inclinado. (STEWART, 2016, p.218)

Figura 57: Família de espirais num abacaxi



Fonte: Stewart, 2016, p.219.

Os girassóis também apresentam essas características. A base para a geometria espiralada dos girassóis está no número áureo, explicando o aparecimento dos números de Fibonacci.

3.3 Quadrados mágicos

Um *quadrado mágico* de ordem n é um arranjo quadrado de n^2 inteiros que estão dispostos de tal maneira que a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal é a mesma. Essa soma é denominada de *constante mágica*. Um quadrado mágico é dito *normal* se os n^2 elementos forem os n^2 primeiros números inteiros.

Há uma maneira simples de construção de quadrados mágicos de ordem ímpar. Os passos que devem ser seguidos na construção de um quadrado mágico de ordem 5 são esses: Desenhe um quadrado e divida-o em 25 quadrados menores, distribuídos em 5 linhas e 5 colunas. Faça cópias do quadrado grande em cima, na diagonal e ao lado do primeiro quadrado desenhado. Escreva o número 1 no quadradinho central superior do quadrado original. Proceda diagonalmente para cima e para a direita com os números inteiros sucessivos. Quando essa operação nos leva para fora do quadrado, voltamos ao quadrado original, deslocando o número que cairia fora do quadrado, ou de cima para baixo ou da direita para a esquerda, conforme o caso, para o último quadradinho em branco da fila correspondente. Quando o procedimento nos leva a um quadradinho já ocupado, escrevemos o número no quadradinho imediatamente abaixo do último a ser preenchido e prosseguimos normalmente com o método.

Figura 58: Construção de um quadrado mágico de ordem 5.

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| | 18 | 25 | 2 | 9 | |
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 | 17 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 | 23 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 | 4 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 | 10 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 | |

Fonte: Eves, 2004, p.270.

Na figura, notamos que o 2 deve ser colocado diagonalmente acima do 1. Como o 2 recai sobre a cópia superior, ele deve ser deslocado para o quarto quadradinho da linha inferior do quadrado original. Continuando com o método, a regra faria com que o número 6 recaísse sobre o 1, portanto ele deve ser colocado no quadradinho imediatamente abaixo do 5, que foi o último número registrado.

Há também um método muito elegante para a construção de quadrados mágicos de ordem $4n$. Esse método é explicado por Eves:

[...] Começando pelo canto superior esquerdo, enumere da esquerda para a direita, em ordem crescente, as celas das diversas linhas, registrando apenas os numerais daquelas não-cortadas pelas diagonais. Proceda agora da mesma maneira, mas a partir do canto inferior direito, no sentido contrário, registrando apenas os numerais das celas cortadas pelas diagonais. O quadrado mágico resultante difere pouco do de Dürer. A mesma regra se aplica a qualquer quadrado mágico de ordem $4n$, considerando agora as diagonais dos n^2 sub-blocos 4×4 principais [...]. (EVES, 2004, p.318-319)

As figuras a seguir mostram esse método de construção de quadrados mágicos.

Figura 59: Método de construção de um quadrado mágico de ordem 4.

| | | | |
|---|----|----|----|
| | 2 | 3 | |
| 5 | | | 8 |
| 9 | | | 12 |
| | 14 | 15 | |

| | | | |
|----|----|----|----|
| 16 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |

Fonte: Eves, 2004, p.319.

Figura 60: Método de construção de um quadrado mágico de ordem 8.

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 2 | 3 | | | 6 | 7 | |
| 9 | | | 12 | 13 | | | 16 |
| 17 | | | 20 | 21 | | | 24 |
| | 26 | 27 | | | 30 | 31 | |
| | 34 | 35 | | | 38 | 39 | |
| 41 | | | 44 | 45 | | | 48 |
| 49 | | | 52 | 53 | | | 56 |
| | 58 | 59 | | | 62 | 63 | |

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 64 | 2 | 3 | 61 | 60 | 6 | 7 | 57 |
| 9 | 55 | 54 | 12 | 13 | 51 | 50 | 16 |
| 17 | 47 | 46 | 20 | 21 | 43 | 42 | 24 |
| 40 | 26 | 27 | 37 | 36 | 30 | 31 | 33 |
| 32 | 34 | 35 | 29 | 28 | 38 | 39 | 25 |
| 41 | 23 | 22 | 44 | 45 | 19 | 18 | 48 |
| 49 | 15 | 14 | 52 | 53 | 11 | 10 | 56 |
| 8 | 58 | 59 | 5 | 4 | 62 | 63 | 1 |

Fonte: Eves, 2004, p.319.

CONCLUSÃO

A história da Matemática aliada à análise das propriedades numéricas propicia ao estudante e ao leitor novas formas de percepção dos números. Ela é estruturada em belos conceitos e padrões que são intrínsecos a todos os números, por mais simples ou complexos que possam ser.

O conhecimento da origem do nosso sistema decimal, com a evolução histórica que os números sofreram, fornece contribuições riquíssimas para o desenvolvimento e compreensão de novas operações e novos sistemas numéricos.

A beleza da Matemática se encontra nas relações mais simples que existem entre os números: desde o conceito de zero e de paridade, passando por sequências e simetrias numéricas.

A definição de números primos e o estudo de suas possíveis aplicações na construção de outros números revelam uma mescla de mistério e encantamento e proporcionam ao leitor novas formas de compreender os números.

Padrões e curiosidades numéricas podem ser percebidos em diversas ocasiões da vida. A repetição de eclipses, o formato de algumas espirais, a quantidade de pétalas de determinadas flores, as regras de um jogo de dominó ou xadrez, uma fita colorida em listras alternadas nas cores preto e branco, a montagem de um cubo de Rubik, a determinação do domingo de Páscoa de cada ano, são alguns dos inúmeros exemplos de como os números governam o mundo.

Os assuntos trabalhados nesta dissertação mostram que a matemática tem inesgotáveis formas de encantar aqueles que buscam no universo dos números uma maneira de retratar a realidade em que vivem. A relação entre a regra dos nove e o código de barras, por exemplo, foi apenas uma das tentativas de mostrar que a matemática pura e a aplicada não precisam trilhar caminhos opostos, uma vez que são essenciais para a prática do saber.

Este trabalho é uma fonte importante de consulta para que todo professor de Matemática consiga empregar o verdadeiro significado dos números, suas características e peculiaridades, a forma como se desenvolveram e suas aplicações, por mínimas que sejam, no intuito de transformar o universo dos números em algo divertido e intrigante, possibilitando ao aluno a busca por novas descobertas neste universo que ainda tem muito a se desbravar. Com novas conquistas, tanto alunos como professores poderão desfrutar do significado da frase: Os números são decididamente incríveis.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fernando Manuel M. de Brito. **Sistemas de Numeração Precusores do Sistema Indo-Árabe**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Ago. 2007. Disponível em http://www.fc.up.pt/fcup/contactos/teses/t_000369009.pdf acesso em 23 mar. 2018.

AUSTIN, Daniel (2000). **Les nombres en Égypte: approche historique**. In Barbin, Évelyne & Le Goff, Jean-Pierre (Eds), IREM – Histoire des mathématiques: Si le nombre m''était conté... (pp. 67-89). Paris: Ellipses Édition Marketing S. A.

BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**; volume 2, Brasília, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

COUSQUER, Eliane (1994). **Histoire du Concept de Nombre**. IREM – Université des Sciences et Technologies de Lille.

ESTRADA, M. Fernanda. **A Matemática na Mesopotâmia**. In: ESTRADA, M. Fernanda et all. História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta (2000b).

_____. **A Matemática na Civilização Islâmica**. In: ESTRADA, M. Fernanda et all. História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta (2000c).

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad.: Higyno H. Domingues. 2. ed. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2004. 844p.

GULLBERG, Jan. **Mathematics, from the Birth of Numbers**. New York: W. W. Norton & Company, 1997.

GUNDLACH, Bernard H., Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: números e numerais: Editora atual, 78p. 1ª edição (1992). In: LOVO, Leliane de Fátima; SOUZA, Luana da Silva; BARANECK, Fátima Zampiva. **A evolução dos números através das civilizações**. Revista Eletrônica FACIMEDIT, v5, n1, jan-ago, 2016. Disponível em <https://www.passeidireto.com/arquivo/38198567/historia-da-matematica/2> acesso em 02 jan. 2018.

IFRAH, G. **Os números: A história de uma grande invenção**. São Paulo: Globo, 1989.

_____. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

KLINE, Morris (1972). **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University press Inc.

NOGUEIRA, J. Eurico. **Curiosidades numéricas**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2001.

OLIVEIRA, A; LUTOSA, L. **A prova dos nove**. Caderno dá licença. Universidade Federal Fluminense. vol 1. Ano 1. Dez/1998. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume1/a_prova_dos_nove.pdf>. Acesso em 10 fev. 2018.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**; tradução de Jorge Luiz Calife. 13ed. – Rio de Janeiro: Record, 2008.

STEWART, Ian. **Os números da natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro. Editora Rocco, 1996.

_____. **Mania de matemática: diversão e jogos de logica matemática**. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2016.

_____. **O fantástico mundo dos números: A matemática do zero ao infinito**. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2016.

STRUIK, Dirk J. **Por que estudar a História da Matemática**. In Grupo de Trabalho sobre História e Ensino da Matemática (Ed), *Cadernos do GTHEM – Relevância da História no Ensino da Matemática* (pp. 1-14). Lisboa: Associação de Professores de **and calculation 3: written numbers**. Manchester: the Open University press. 1976a.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro. Editora Record, 2008.

TAKAHASHI, Cássia Regina dos Santos. **A matemática dos códigos de barras**. 2013. 66 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94272>>. Acesso em 17 Jul. 2018.

WILDER, Raymond L. **Evolution of Matemática**, 1997.

VAN DER WAERDEN, B. L. & Folkerts, Menso. **History of mathematics, counting, numerals Mathematical Concepts: An Elementary Study**. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1968.