



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de Bauru

Eliene Cristine Izu Nakamura Lisi

Olimpíadas de Matemática sua importância na divulgação e  
aprendizagem da Matemática. Uma experiência de análise,  
diagnóstico e intervenção didático pedagógica

Bauru  
2018

Eliene Cristine Izu Nakamura Lisi

Olimpíadas de Matemática sua importância na divulgação e aprendizagem da Matemática. Uma experiência de análise, diagnóstico e intervenção didático pedagógica

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares

Bauru  
2018

Lisi, Eliene Cristine Izu Nakamura.

Olimpíadas de Matemática sua importância na divulgação e aprendizagem da matemática : uma experiência de análise, diagnóstico e intervenção didático pedagógica / Eliene Cristine Izu Nakamura Lisi. -- Bauru, 2018

110 f. : il.

Orientador: Marcelo Reicher Soares

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências

1. Matemática (Ensino Médio) - Estudo e ensino. 2. Olimpíadas de matemática. 3. Matemática – Competições. 4. Jogos em educação matemática. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Eliene Cristine Izu Nakamura Lisi

Olimpíadas de Matemática sua importância na divulgação e aprendizagem da Matemática. Uma experiência de análise, diagnóstico e intervenção didático pedagógica

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares  
UNESP – Campus de Bauru  
Orientador

Profa. Dra. Ana Cláudia de Jesus Golzio  
UNICAMP

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lazaro  
UNESP – Campus de Bauru

Bauru  
03 de agosto de 2018

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus que me deu forças para continuar, mesmo quando tive vontade de desistir.

A minha filha Laís que me mostrou uma força que não imaginava que existia em mim.

Um agradecimento especial a minha mãe Emilia pelo amor incondicional e possibilitou que eu concluísse esse trabalho. Ao meu marido Eric pela motivação, pela paciência e por cuidar tão bem na nossa filha Laís e a minha irmã Emilene que sempre me ajudou e me incentivou para que eu conseguisse concluir esta etapa.

Ao meu tio Julio pela ajuda e que sempre acreditou em mim e a minha irmã Edilene pelo apoio e colaboração.

Aos colégios que leciono, por permitirem e nos capacitarem para trabalharmos algo diferente e pelo apoio nas competições matemáticas.

Ao amigo Marcos, pelo apoio e colaboração nas aulas, a amiga Renata, pela ajuda nas competições, nas aplicações e na criação do Clube de Matemática e a amiga Francine pelo apoio sempre e não me deixar desistir.

Agradeço ao meu Orientador Professor Doutor Marcelo Reicher Soares, pela paciência e pelo apoio que me deu neste trabalho, a Coordenadora do PROFMAT da UNESP de Bauru, Professora Doutora Tatiana Miguel Rodrigues por ter me apoiado nos momentos que precisei, e aos meus professores e colegas do PROFMAT 2015 pelo incentivo, pelos momentos de descontração e colaboração.

## RESUMO

As Olimpíadas de Matemática, nos moldes atuais, são disputadas desde 1894. A primeira olimpíada ocorreu na Romênia. Com o passar dos anos, competições semelhantes se espalharam pelo mundo. Em 1959 foi realizada a primeira Olimpíada Internacional de Matemática, esta competição se expandiu gradualmente para mais de 100 países. Em 1979, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), que durante esses anos passou por diversas mudanças. Este trabalho tem o objetivo de mostrar como as olimpíadas de matemática podem ser utilizadas como fonte de divulgação e estímulo para o ensino e a aprendizagem da matemática, além de desenvolver e aperfeiçoar a capacitação de professores e também como fonte de dados para a melhoria do ensino e aprendizado. Foi realizada uma descrição das principais competições de matemática que tiveram como participantes alunos de uma escola da cidade de Bauru-SP, com destaque para o HMMT (*The Harvard-MIT Mathematics Tournament*), bem como quais foram as ferramentas utilizadas na preparação desses alunos, além de uma análise de dados visando uma intervenção didático pedagógica. Por fim são apresentadas questões de olimpíadas de matemática que têm em suas soluções a utilização de conteúdos abordados nas diversas disciplinas do PROFMAT.

Palavras-chave: Olimpíadas de matemática. Ferramentas de preparação. Competições de matemática.

## **ABSTRACT**

*The Mathematical Olympiads of the present day have been disputed since 1894. The first Olympiad was played in Romania. Over the years, similar competitions have spread throughout the world. In 1959, the first International Mathematical Olympiad was held, this competition gradually expanded to more than 100 countries. In 1979, the Brazilian Mathematical Society (SBM) organized the 1st Brazilian Mathematical Olympiad (OBM), which during these years underwent several changes. This paper aims to show how mathematical olympiads can be used as a stimulus for teaching and learning mathematics, as well as to develop and improve teacher training and also as a data source for improving teaching and learning. A description of the main math competitions was carried out, which included students from a school in the city of Bauru, SP, highlighting the HMMT (The Harvard-MIT Mathematics Tournament) and which tools were used to prepare the students as well as the analysis of data for pedagogical didactic intervention. Finally, questions are dealt with in Mathematical Olympiads, with resolution through contents of the PROFMAT disciplines.*

*Keywords: Mathematical olympiads. Preparation tools. Mathematics tournament.*

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> - Competências para o século 21 .....	18
<b>Figura 2</b> - 16 habilidades do século 21 que os alunos precisam desenvolver.....	19
<b>Figura 3</b> - Comparação de indicadores de habilidades entre países participantes da pesquisa .....	20
<b>Figura 4</b> - Palestra do professor Po-Shen Loh.....	21
<b>Figura 5</b> - Docentes da escola na palestra de Po-Shen Loh.....	22
<b>Figura 6</b> - Desenvolvimento de atividade com alunos do Ensino Médio .	23
<b>Figura 7</b> - Desenvolvimento de atividade com alunos do Ensino Médio .	24
<b>Figura 8</b> - Número de participantes do Canguru de Matemática.....	30
<b>Figura 9</b> - Participação dos alunos no HMMT .....	61
<b>Figura 10</b> - Participação dos alunos no HMMT .....	61
<b>Figura 11</b> – Ensino híbrido .....	64
<b>Figura 12</b> - Rotação por estações.....	66
<b>Figura 13</b> - Alunos realizando atividades na perspectiva do Ensino Híbrido .....	67
<b>Figura 14</b> – Videoaula na plataforma <i>Khan Academy</i> .....	68
<b>Figura 15</b> - O uso do <i>Khan Academy</i> correlacionado aos aumentos das notas em testes de desempenho padronizados .....	69
<b>Figura 16</b> - <i>Aula de Matemática no Explica Mais</i> .....	72
<b>Figura 17</b> - Relatório dos alunos na plataforma Explica Mais .....	72
<b>Figura 18</b> - Plataforma IXL .....	73
<b>Figura 19</b> - Tópicos de Matemática na plataforma IXL.....	74
<b>Figura 20</b> - Conteúdos de álgebra no IXL .....	75
<b>Figura 21</b> - Questão objetiva de múltipla escolha na plataforma IXL .....	76
<b>Figura 22</b> - Questão objetiva na plataforma IXL.....	77

<b>Figura 23</b> - Exemplo de explicação dada para uma resposta errada na plataforma IXL.....	78
<b>Figura 24</b> - Segunda etapa da explicação dada para uma resposta errada na plataforma IXL.....	78
<b>Figura 25</b> - Terceira parte da explicação dada para uma resposta errada na plataforma IXL.....	79
<b>Figura 26</b> - Informações gerais sobre o desempenho dos alunos.....	81
<b>Figura 27</b> - Informações sobre o desempenho de cada aluno .....	82
<b>Figura 28</b> - Informações detalhadas sobre o desempenho de cada aluno .....	83
<b>Figura 29</b> - Informações detalhadas sobre os acessos e desempenho dos alunos .....	83
<b>Figura 30</b> - Interface da ferramenta Superpro .....	84
<b>Figura 31</b> - Tópicos de matemática disponíveis para seleção no Superpro .....	85
<b>Figura 32</b> - Filtros do Superpro .....	86
<b>Figura 33</b> - Relatório de rendimento da turma no Superpro .....	87
<b>Figura 34</b> – Registro de consulta do Superpro.....	87
<b>Figura 35</b> - Relatório de aproveitamento do Superpro .....	88
<b>Figura 36</b> - Relatório de Índices de acertos do Superpro.....	88

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Quadro para análise do desenvolvimento do Clube de Matemática .....	25
<b>Quadro 1</b> - Número de premiados no Canguru de Matemática Brasil em 2018.....	34
<b>Quadro 2</b> - Faixas de corte Canguru de Matemática Brasil 2018.....	34
<b>Quadro 3</b> - Desempenho dos alunos em questão envolvendo porcentagem.....	36
<b>Quadro 4</b> - Desempenho dos alunos em questão envolvendo função e geometria.....	48
<b>Quadro 5</b> - Diferenças entre os torneios realizados do HMMT .....	58

## SUMÁRIO

<b>1 IMPORTÂNCIA DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO, NO ESTÍMULO DO APRENDIZADO E NO DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM.....</b>	<b>13</b>
<b>1.1 Competências e Habilidades.....</b>	<b>14</b>
<b>1.2 Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.....</b>	<b>16</b>
<b>1.3 Competências e Habilidades do século 21.....</b>	<b>17</b>
<b>1.4 Clube de Matemática.....</b>	<b>20</b>
<b>1.5 Objetivo do Trabalho.....</b>	<b>26</b>
<b>2 COMPETIÇÕES MATEMÁTICAS.....</b>	<b>28</b>
<b>2.1 Canguru sem Fronteiras.....</b>	<b>29</b>
<b>2.2 Canguru de Matemática.....</b>	<b>30</b>
2.2.1 A organização da competição.....	31
2.2.2 A premiação dos participantes.....	33
2.2.3 Intervenções utilizando os dados do Canguru de Matemática.....	35
<b>2.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).....</b>	<b>37</b>
2.3.1 A organização da OBMEP.....	38
2.3.2 A premiação dos participantes.....	43
2.3.3 Recursos e Programas da OBMEP.....	44
2.3.4 Intervenções utilizando os dados da OBMEP.....	47
<b>2.4 Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).....</b>	<b>50</b>

<b>2.5 ORMUB</b> .....	51
2.5.1 A organização da ORMUB.....	52
2.5.2 A premiação dos participantes.....	53
2.5.3 Intervenções utilizando os dados da ORMUB feitas pela organização .....	53
2.5.4 Intervenções utilizando os dados da ORMUB.....	55
<b>2.6 HMMT (The Harvard-MIT Mathematics Tournament)</b> .....	56
2.6.1 American Mathematics Competitions (AMC) .....	59
2.6.2 A premiação dos participantes.....	62
2.6.3 - Intervenções utilizando os dados do HMMT .....	62
<b>3 FERRAMENTAS UTILIZADAS PARA A PREPARAÇÃO DOS ALUNOS</b> .....	63
<b>3.1 Ensino híbrido</b> .....	63
<b>3.2 Khan Academy</b> .....	67
<b>3.3 Explica Mais</b> .....	70
<b>3.4 - IXL</b> .....	73
3.4.1 Relatório do professor no IXL .....	81
<b>3.5 Super Professor</b> .....	84
<b>4 CONEXÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM AS DISCIPLINAS DO PROFMAT</b> .....	90
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	105
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	106

## **1 IMPORTÂNCIA DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO ENSINO, NO ESTÍMULO DO APRENDIZADO E NO DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM**

Os campeonatos de Matemática ou olimpíadas matemáticas são eventos em que os participantes realizam provas dessa área do conhecimento. Cada prova é composta por problemas que podem exigir respostas múltiplas ou numéricas, ou uma prova escrita detalhada. Segundo o diretor do IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada), Marcelo Viana, uma escola que participa ativamente de Olimpíadas de Matemática, a média dos alunos da escola aumenta em torno de 26 pontos na Prova Brasil<sup>1</sup>, o equivalente a um ano e meio a mais de ensino.

Podemos usar as competições matemáticas para estimular o estudo da Matemática, incentivar os alunos, revelar talentos na área e conseqüentemente para melhorar a aprendizagem da Matemática. Os principais objetivos de participarmos ativamente de Olimpíadas de Matemática são proporcionarmos aos alunos o desenvolvimento de pensamento crítico e desenvolver nos alunos competências para poder entender uma situação-problema, identificar o conhecimento envolvido, definir o processo e validar o resultado.

---

<sup>1</sup> A Prova Brasil é uma avaliação para diagnóstico, em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos.

## 1.1 Competências e Habilidades

O termo competência aparece com as seguintes definições:

Em relação ao termo “competência” dicionário Aurélio define como competência as “qualidades de quem é capaz de apreciar e resolver certos assuntos”. Significa ainda habilidade, aptidão, idoneidade. Muitos conceitos estão presentes nessa definição: competente é aquele que julga, avalia e pondera; acha a solução e decide, depois de examinar e discutir determinada situação, de forma conveniente e adequada. É ainda quem tem capacidade resultante de conhecimentos adquiridos (MENDES, 2011).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>2</sup>, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

No contexto educacional, o conceito de competência está relacionado a capacidade do aluno de mobilizar recursos visando a abordar e resolver uma situação complexa. Portanto, educar para competências é, então, orientar o aluno a adquirir e desenvolver as condições e/ou recursos que deverão ser utilizados para resolver a situação complexa.

Segundo o professor Vasco Moretto (2018), “competência não se alcança, desenvolve-se. Competência é fazer bem o que nos propomos a fazer”.

---

<sup>2</sup> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

“Simplificando bem, é o aluno *saber saber* ou *saber conhecer*”. (FRANÇA, 2018).

Habilidade está relacionado a aptidão, facilidade em fazer algo. As competências são compostas por habilidades, portanto as habilidades precisam ser desenvolvidas para que as competências sejam aprimoradas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais dos diferentes níveis de ensino, publicados em 1998, 1999 e 2002, e outros documentos oficiais referentes à Educação no Brasil têm enfatizado a necessidade de focar o ensino e a aprendizagem no desenvolvimento de competências e habilidades por parte do aluno, em lugar de centrá-lo no conteúdo conceitual (CERQUEIRA, 2013).

Ao adotar esse enfoque,

[...] a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC (BRASIL, 2017)

Segundo Thereza Bordoni (2018):

O conceito de habilidade também varia de autor para autor. As habilidades são inseparáveis da ação, mas exigem domínio de

conhecimentos. As competências pressupõem operações mentais, capacidades para usar as habilidades, emprego de atitudes, adequadas à realização de tarefas e conhecimentos. Desta forma as habilidades estão relacionadas ao saber fazer. Assim, identificar variáveis, compreender fenômenos, relacionar informações, analisar situações-problema, sintetizar, julgar, correlacionar e manipular são exemplos de habilidades.

## **1.2 Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio**

De acordo com a BNCC, temos as competências específicas de Matemática, que são:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

### **1.3 Competências e Habilidades do século 21**

A organização norte-americana *National Research Council* pesquisou sobre o que se espera que os estudantes alcancem nos seus ciclos escolares, nos seus futuros trabalhos e em outros aspectos da vida. Durante um ano, um comitê formado por educadores, psicólogos e economistas fez pesquisas sobre esse tema e o resultado, publicado em 2001 no livro “Educação para a Vida e para o Trabalho: Desenvolvimento Transferíveis de Competências e Habilidades do Século 21”.

De acordo com os pesquisadores, existem três amplos domínios: cognitivos, intrapessoais e interpessoais. São várias habilidades descritas em cada, destacamos no campo cognitivo: criatividade, pensamento crítico, razão e argumentação, poder de tomada de decisão e capacidade de resolver problemas. No intrapessoal: flexibilidade, determinação,

responsabilidade, interesse intelectual e curiosidade e no interpessoal destacamos: cooperação, trabalho em equipe, confiança e liderança.

**Figura 1 - Competências para o século 21**



Fonte: GOMES, 2012.

Priorizamos também que o aluno tenha o domínio de uma outra língua, principalmente por alguns recursos tecnológicos e materiais não terem a tradução feita.

Outro estudo foi feito em 2015 pelo *World Economic Forum*, chamado de *New Vision for Education Unlocking the Potential of Technology*. Nessa pesquisa definiram o que consideram como as 16 habilidades principais do século 21, habilidades para que os alunos se tornem grandes profissionais no futuro.

**Figura 2** - 16 habilidades do século 21 que os alunos precisam desenvolver



Traduzido e adaptado de WEF - New Vision for Education, p.4.

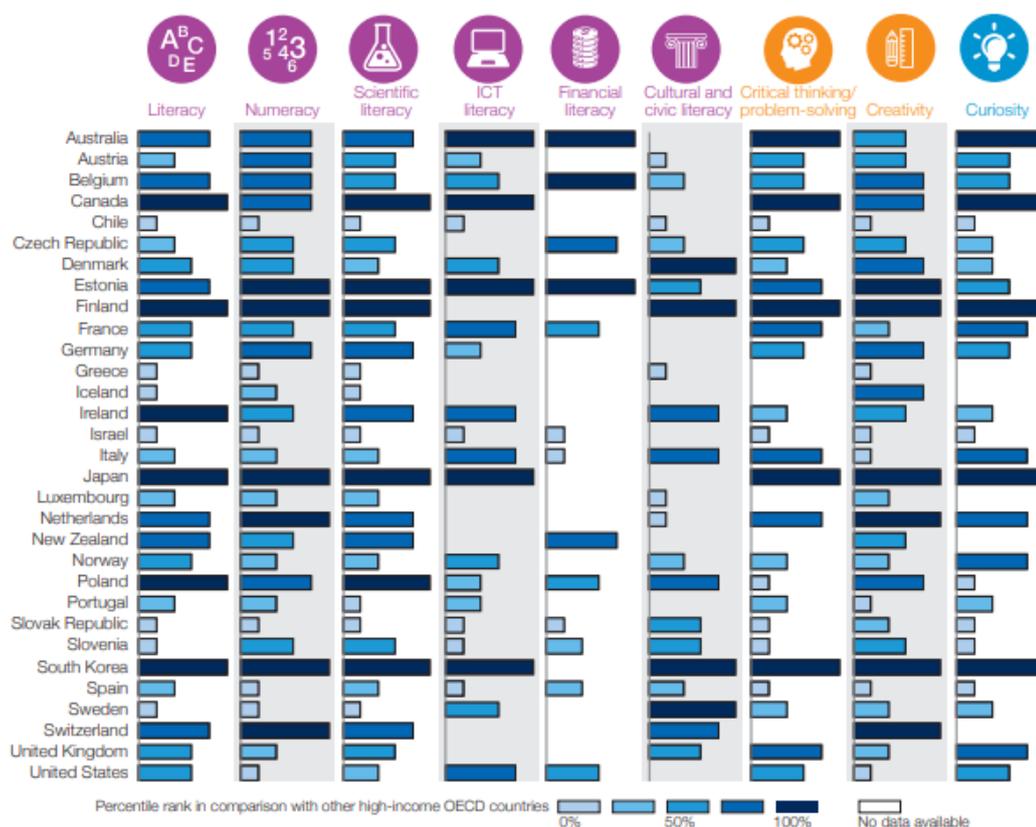
Fonte: WORLD ECONOMIC FORUM (2015) *apud* ESCOLA DE INVENTOR, 2017.

De acordo com o estudo do *World Economic Forum*, para prosperar em um ambiente de evolução rápida, mediado por tecnologia, os alunos devem não só possuir conhecimentos em áreas como artes, matemática e ciência, mas eles também devem ser adeptos de habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas, persistência, colaboração e curiosidade. Muitas vezes, no entanto, estudantes em muitos países não estão atingindo essas habilidades. Nesse contexto, analisaram mais de 100 países, entre países desenvolvidos e em desenvolvimento e encontraram lacunas em algumas habilidades, ou seja, muitos alunos não estão recebendo a educação que eles precisam para prosperar no século 21.

**Figura 3** - Comparação de indicadores de habilidades entre países participantes da pesquisa

**Exhibit 5:** Skills vary widely among wealthy countries

A comparison of select skill indicators among a sample of high-income OECD countries



Fonte: WORLD ECONOMIC FORUM, 2015.

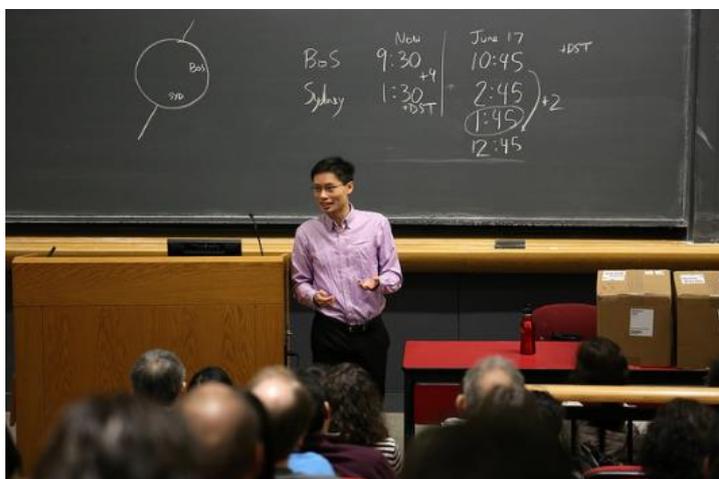
## 1.4 Clube de Matemática

Para trabalharmos as competências e habilidades específicas de Matemática e desenvolvermos as habilidades do século 21, criamos na escola um clube de Matemática.

Em 2016, participamos com os alunos de uma escola de Bauru-SP no HMMT (*The Harvard-MIT Mathematics Tournament*), uma competição de Matemática em Cambridge, nos Estados Unidos, que será descrita no próximo capítulo. Enquanto os alunos resolviam os problemas, os professores e pais eram convidados a assistir uma palestra com o professor Po-Shen Loh, um professor da Carnegie Mellon University e técnico da equipe dos Estados Unidos na IMO (Olimpíada Internacional de Matemática), inclusive foi a equipe campeã em 2018.

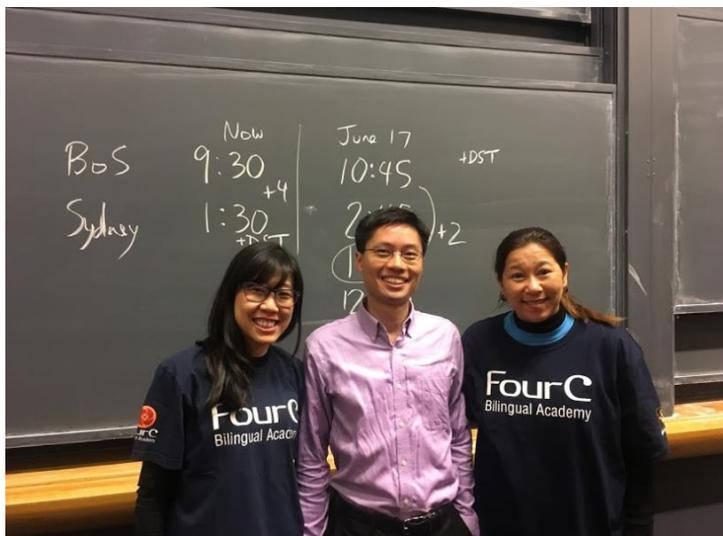
Po-Shen Loh destacava a capacidade que todas as pessoas têm de aprender a Matemática, a persistência no aprendizado e principalmente a importância de fazer com que o aluno consiga raciocinar, deduzir e analisar. Ele enfatiza que o aluno não deve simplesmente ficar memorizando fórmulas, que o aluno deve conseguir entender que na Matemática os conceitos são encadeados em sequência de dependências e com isso construir seu raciocínio. E nessa experiência que tivemos, constatamos como é comum nos Estados Unidos ter clube de Matemática nos colégios. Eles reúnem com outros clubes da mesma cidade, tendo como um dos objetivos participarem de competições matemáticas.

**Figura 4** - Palestra do professor Po-Shen Loh



Fonte: Harvard-MIT

**Figura 5** - Docentes da escola na palestra de Po-Shen Loh



Fonte: Arquivo da autora

Inspirados por esses relatos, criamos um clube de Matemática no colégio. Semanalmente, alunos do Ensino Médio se encontram para resolver problemas e desafios, compartilharem conhecimento, aprenderem novos conceitos e principalmente desenvolverem as competências e habilidades do século 21.

Baseado nesses estudos sobre quais habilidades e competências se espera que um aluno do século 21 tenha, trabalhamos com os alunos com o objetivo de desenvolverem essas habilidades através de resolução de problemas matemáticos. Descreveremos nos próximos capítulos quais os métodos e quais as ferramentas tecnológicas foram utilizadas.

Utilizamos as questões de Olimpíadas de Matemática para que os alunos desenvolvam o pensamento matemático. E, principalmente, para que eles possam relacionar os conteúdos matemáticos da sala de aula com sua vida, melhorando sua capacidade de interpretar as situações presentes no cotidiano.

Nesse aspecto, os alunos se sentem motivados e estimulados a resolverem problemas. As competições estimulam também o professor, considerando que, para resolver os problemas olímpicos, o professor precisa conhecer e dominar ainda mais a teoria matemática, seus métodos e aplicações. Um bom conhecimento por parte do professor permite que ele possa agir como mediador, orientador e não como única fonte de conhecimento do aluno. Além do mais, através dos problemas propostos, é possível abordar o mesmo conteúdo de maneiras diversas para alunos que apresentam níveis de conhecimento e de aprendizagem diferentes.

Usar a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem pode trazer fortes indícios de aprendizagem em matemática, uma vez que, através da exploração de tal metodologia, os alunos são expostos às situações que exigem concentração e criatividade na resolução, desenvolvendo competências e habilidades essenciais e conseqüentemente ele podem ter maior participação e motivação em aprender matemática.

**Figura 6** - Desenvolvimento de atividade com alunos do Ensino Médio



Fonte: Arquivo da autora

**Figura 7** - Desenvolvimento de atividade com alunos do Ensino Médio



Fonte: Arquivo da autora

Para analisarmos o processo de ensino aprendizagem do Clube, utilizamos as rubricas. A rubrica é uma espécie de tabela onde aparecem as tarefas que se quer observar e os possíveis critérios a serem avaliados.

Segundo Porto (2005), os pontos mais importantes a partir das definições de rubricas, são:

- Rubricas necessitam ser feita sob medida para as tarefas ou produtos que se pretende avaliar;
- Rubricas precisam descrever níveis de desempenho, de competências, na realização de tarefas específicas, ou de um produto específico;

Esses níveis devem ser descritos em detalhe e serem associados a uma escala de valores;

- No seu conjunto, esses níveis de competência, descrevem qualquer resultado possível sobre o desempenho de um aluno;
- Rubricas determinam expectativas de desempenho (BIAGIOTTI, 2005).

A escolha das rubricas tem o intuito de permitir que os processos de análise não sejam somente os resultados das competições matemáticas, e sim o do aprendizado de Matemática através da resolução de problemas e do desenvolvimento de competências e habilidades, esse método permite aos alunos entender melhor a nota que lhe está sendo atribuída e de melhorar o seu desempenho, uma vez que podemos intervir rapidamente e os alunos passam a saber onde devem focar seus esforços.

Utilizamos o seguinte quadro para analisarmos o desenvolvimento:

**Quadro 1 – Quadro para análise do desenvolvimento do Clube de Matemática**

<b>Clube de Matemática</b>				
	<b>Nível 4</b>	<b>Nível 3</b>	<b>Nível 2</b>	<b>Nível 1</b>
<b>Trabalho em equipe</b>	Partilha ideias com os colegas, mostrando liderança, dando suporte e se esforçando para trabalhar bem em grupo e resolver problemas, sendo sempre colaborativo e respeitoso.	Na maioria dos momentos, se envolve nas atividades em grupo, respeita e colabora, mas às vezes perde o foco.	Nem sempre demonstra ser um bom membro do grupo. Pouco partilha suas ideias ou tenta resolver problemas e ou ajudar os outros.	Muitas vezes não demonstra ser bom ouvinte, desrespeita o trabalho, mantendo conversas paralelas e continuadas com os colegas.
<b>Resolução de problemas</b>	Uma estratégia eficiente é escolhida e proporciona uma resposta correta. Ajustes na estratégia, se necessário, são feitos ao longo	Uma estratégia correta é escolhida, proporcionando um caminho para a solução, mas não para uma solução completa do	Uma estratégia parcialmente correta é escolhida ou utiliza uma estratégia correta para resolver parte do problema.	Nenhuma estratégia é escolhida ou uma estratégia é escolhida e não leva a uma solução.

	do caminho e/ou estratégias alternativas são consideradas.	problema. Evidências de conhecimentos prévios estão presentes e estes são aplicados na resolução dos problemas.	Evidências de alguns conhecimentos prévios estão presentes, mostrando algum engajamento na resolução.	Pouca ou nenhuma evidência de raciocínio matemático.
<b>Argumentação</b>	Argumentos dedutivos são usados para justificar decisões e podem resultar em provas formais. Evidências são usadas para justificar e apoiar as decisões tomadas e conclusões alcançadas, levando a conexões.	Argumentos são construídos com base matemática adequada. Uma abordagem sistemática e/ou a justificativa do raciocínio correto é presente, levando a conexões.	Argumentos são feitos com alguma base matemática. Algum raciocínio correto ou justificativa está presente ou o raciocínio apresentado é por tentativa e erro.	Argumentos são feitos sem base matemática.
<b>Conexões</b>	Conexões matemáticas ou observações são usadas para testar ou validar uma hipótese, estendendo a solução para outros casos.	Conexões matemáticas ou observações são reconhecidas e existe a tentativa de aplicação a outros casos.	Alguma tentativa de relacionar com outros assuntos é observada.	Não há conexões.

Fonte: Elaborado pela autora

## 1.5 Objetivo do Trabalho

O objetivo desta pesquisa é utilizar as competências matemáticas como ferramenta para um aprendizado matemático que tenha significado,

onde os alunos se deparem com situações desafiadoras para resolver e trabalhem para desenvolver estratégias de resolução. Além do conhecimento matemático, situações onde o aluno consiga desenvolver e aprender algumas habilidades em busca do aprimoramento das competências específicas de Matemática e esperadas para o século 21.

O público alvo foi alunos do Ensino Médio de um colégio particular da cidade de Bauru-SP, escolhida por conveniência, pois é uma das escolas que lecionamos e que tem um Projeto Pedagógico que incentiva o uso de diferentes estratégias de ensino centrado no aluno. Para este trabalho foram utilizadas ferramentas tecnológicas que permitiam desenvolverem atividades na escola e em casa. O **Clube de Matemática** acontecia fora do horário regular de aulas, e durante 18 meses estudamos essas competições e fizemos as intervenções necessárias. De início, todos os alunos foram convidados para participar do **Clube de Matemática**. Os alunos estavam motivados e animados em trabalhar os conceitos matemáticos, realizar atividades em grupo, utilizar diversas ferramentas tecnológicas e desenvolver habilidades.

As competições, ferramentas e metodologias utilizadas serão detalhadas nos próximos capítulos. O capítulo 2 vai abordar as principais competições de Matemática que participamos, com destaque para uma experiência internacional. No capítulo 3, falaremos das ferramentas utilizadas para a preparação dos alunos e para as intervenções feitas para melhorar o aprendizado e no capítulo 4, trataremos de exemplos de questões matemáticas, onde as disciplinas obrigatórias do PROFMAT foram altamente relevantes para desenvolver os trabalhos com os alunos.

## 2 COMPETIÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, serão abordadas as principais Olimpíadas de Matemática que participamos com os alunos, cada uma com as suas características, particularidades e finalidades.

Em cada uma será feita uma breve abordagem histórica e a descrição dos tipos de problemas propostos em cada prova e também das questões que utilizamos para a preparação dos alunos e para o desenvolvimento das competências e habilidades citadas no capítulo anterior. Além de comentarmos quais intervenções são feitas utilizando os dados e resultados dos alunos.

Essas competições matemáticas estimulam o estudo, incentivam os alunos e melhoram a aprendizagem da Matemática. Além do mais, as participações em Olimpíadas de Matemática proporcionam o desenvolvimento do pensamento crítico e de um raciocínio onde o aluno é capaz de compreender situações-problema e de identificar quais estratégias utilizar.

A primeira Olimpíada que explicaremos será o Canguru de Matemática, em seguida a OBMEP e a OBM, depois o HMMT e algumas Olimpíadas internacionais.

## 2.1 Canguru sem Fronteiras

De caráter internacional, o Canguru Sem Fronteiras constitui uma das competições com forte adesão de estudantes em todo o mundo, contando, atualmente, com mais de 52 países membros. Desde o surgimento dessa competição a aderência tem sido crescente e, no ano de 2018, participaram cerca de seis milhões de estudantes.

O Canguru Sem Fronteiras é uma competição realizada por meio de um questionário de múltipla escolha, com questões que possuem nível de dificuldade crescente. É destinada aos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio, que são organizados em níveis, de acordo com a faixa etária em que se encontram.

Possui característica diversa de outras olimpíadas internacionais na área da Matemática, pois não realiza a comparação do desempenho entre os diferentes países. Seu objetivo principal é incentivar o interesse dos estudantes pela Matemática por meio da avaliação individualizada das habilidades dos participantes. Assim, os dados do desempenho são enviados apenas para a escola onde estudam e, no site da competição, são divulgadas somente as notas de corte das premiações e outros dados estatísticos gerais. A organização da competição não fornece medalhas físicas, mas a escola que tiver interesse tem a possibilidade de adquiri-las por meio do site da competição com recursos próprios.

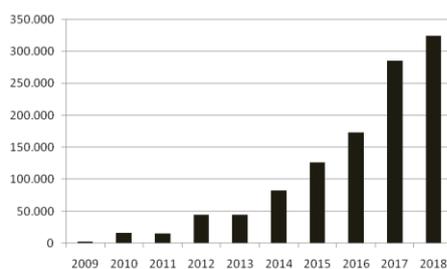
A primeira competição nesse formato surgiu na Austrália no ano de 1976, na Universidade de Camberra. O professor Peter O'Halloran organizou um comitê para preparar uma competição com o objetivo de incentivar o estudo da Matemática e torná-la mais atrativa aos estudantes. A competição obteve êxito e se popularizou, passando, em 1978, a ser realizada em nível nacional com o nome de Competição Matemática

Australiana. Em 1991, os professores franceses André Deledicq e Jean Pierre Boudine decidiram realizar na França uma competição nos mesmos moldes e a chamaram de *Kangourou*, em homenagem à competição australiana. Com o seu sucesso, essa competição foi amplamente adotada em sete países da Europa em 1993 e, posteriormente, foi criada a Associação Canguru Sem Fronteiras (*Association Kangourou Sans Frontières - AKSF*), que realiza reuniões anuais com os países participantes para debater os problemas matemáticos a serem propostos e toma outras providências relacionadas à organização da competição.

## 2.2 Canguru de Matemática

No Brasil, essa competição que recebe o nome de Canguru de Matemática, teve crescimento expressivo e, em 2018, contou com a participação de 324 000 estudantes. Veja, no gráfico a seguir, o aumento do número de participantes:

**Figura 8** - Número de participantes do Canguru de Matemática



Fonte: CANGURU DE MATEMÁTICA BRASIL

### 2.2.1 A organização da competição

O Canguru de Matemática funciona como um jogo, no qual são definidas seis categorias conforme as idades dos participantes. Podem participar alunos de escolas públicas e privadas do 3º ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio, que são inscritos nos seguintes níveis pelas escolas onde estão matriculados:

- a) Nível PE: Alunos do 3º e 4º anos do Ensino Fundamental;
- b) Nível E: Alunos do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental;
- c) Nível B: Alunos que 7º e 8º anos do Ensino Fundamental;
- d) Nível C: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental;
- e) Nível J: Alunos da 1ª e 2ª série do Ensino Médio;
- f) Nível S: Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Para cada um dos níveis, são definidos conteúdos programáticos mínimos e cumulativos, que são divulgados no Canguru de Matemática.

A competição é realizada em uma única etapa por meio de uma prova com questões de múltipla escolha, sendo propostos 24 problemas matemáticos para os níveis PE e E, e 30 problemas para os níveis B, C, J e S. A pontuação para as questões é diferente, pois os níveis de

dificuldade das questões também são. A duração da prova é de 1 hora e 40 minutos para todos os níveis.

As questões são propostas em ordem de dificuldade crescente; primeiro terço da prova, questões básicas; segundo terço, questões mais exigentes e terceiro terço, questões mais desafiantes ou técnicas. Nos níveis mais elementares, poucos conhecimentos técnicos são exigidos. Nos níveis J e S algum conhecimento técnico é necessário.

Nos níveis PE e E, as questões de 1 a 8 valem 3 pontos, as questões de 9 a 16 valem 4 pontos e as questões de 17 a 24 valem 5 pontos, totalizando 96 pontos. Nos demais níveis, as questões de 1 a 10 valem 3 pontos, as questões de 11 a 20 valem 4 pontos e as questões de 21 a 30 valem 5 pontos, totalizando 120 pontos. Respostas erradas, rasuradas ou com mais de uma opção são penalizadas. Para o cálculo final da nota, somam-se pontos para eliminar notas negativas. Veja o item a seguir.

Para o cálculo da pontuação final, são utilizados os seguintes critérios:

- Respostas erradas, rasuradas ou marcadas com mais de uma opção por questão na folha de respostas anulam a questão, além de acarretar um desconto de 25% do valor da questão;
- Questões não respondidas (marca na coluna X) valem 0 ponto. O aluno deve escolher esta opção se não tem certeza da resposta;
- O total de pontos é igual à soma dos pontos obtidos de acordo com as regras acima mais 24 pontos (níveis PE e E) ou 30 pontos (demais níveis).

A aplicação ocorre todos os anos na quinta-feira da terceira semana do mês de março, com flexibilidade da data de aplicação por

conta da diversidade de feriados nos calendários de cada país participante. Apesar de haver flexibilidade para a aplicação das provas, recomenda-se não passar dos 30 dias da data oficial, dado que há a possibilidade de que os alunos divulguem as questões da avaliação, e fica a critério da escola a entrega do caderno de questões.

As escolas interessadas devem se inscrever no site <<https://www.cangurudematematicabrasil.com>>. É necessário o pagamento de uma taxa para o acesso a área restrita do site. A prova é encaminhada para as instituições pela *internet*. Cabe a cada colégio imprimir as provas e aplicar no dia escolhido. Depois, as avaliações respondidas são submetidas à organização do Canguru no Brasil para a correção. Os resultados são encaminhados para cada escola individualmente.

### 2.2.2 A premiação dos participantes

As instituições que participam do exame recebem apenas a divulgação dos resultados de seus alunos. Não há uma hierarquização das melhores e piores escolas. Destaco aqui o diferencial dessa olimpíada, além de questões mais atraentes, que envolvem mais o raciocínio lógico e onde muitas vezes não é necessário cálculo para resolver, está também em premiar alunos de acordo com a pontuação atingida, sendo assim vários alunos de um mesmo nível são premiados.

Neste ano de 2018, o Canguru de Matemática premiou 33.265 alunos, do total de 326.579 participantes. Veja a tabela a seguir:

**Quadro 2** - Número de premiados no Canguru de Matemática Brasil em 2018

#	PE	E	B	C	J	S	TOTAL
PARTICIPANTES	66931	84599	76257	35656	47168	15968	326579
OURO (~1%)	690	1162	800	363	477	170	3662
PRATA (~2%)	1338	1702	1524	710	978	317	6569
BRONZE (~3%)	2191	2639	2296	1080	1414	491	10111
HONRA AO MÉRITO (~4%)	2741	3167	3063	1406	1888	658	12923
TOTAL PREMIADOS	6960	8670	7683	3559	4757	1636	33265

Fonte: CANGURU DE MATEMÁTICA BRASIL

E neste ano também, a organização premiou 4% dos participantes com honra ao mérito, antes a premiação era somente ouro, prata e bronze, além dessa mudança, para comemorar os 10 anos da prova no Brasil, as medalhas tiveram o símbolo do canguru em verde e amarelo.

As faixas de corte de 2018 foram:

**Quadro 3** - Faixas de corte Canguru de Matemática Brasil 2018

*Tabela*

#	PE	E	B	C	J	S
OURO	86,25 - 112,50	102,50 - 120,00	110,00 - 150,00	96,25 - 150,00	83,75 - 150,00	116,25 - 150,00
PRATA	73,75 - 86,20	93,75 - 102,45	97,50 - 109,95	82,25 - 96,20	70,00 - 83,70	103,50 - 116,20
BRONZE	65,00 - 73,70	87,50 - 93,70	88,25 - 97,45	73,75 - 82,20	62,00 - 69,95	92,00 - 103,45
HONRA AO MÉRITO	58,75 - 64,95	82,00 - 87,45	81,25 - 88,20	67,00 - 73,70	56,00 - 61,95	83,00 - 91,95

Fonte: CANGURU DE MATEMÁTICA BRASIL

E outro aspecto interessante de acordo com Élio Mega, representante do Canguru de Matemática no Brasil:

Optamos por manter o *low profile*<sup>3</sup>, porque não queremos de nenhuma forma, estimular competição entre escolas e que sirvam para fins de marketing. Nosso interesse é despertar o gosto pela Matemática e não servir de meio para promoção comercial. Aconselhamos as escolas a premiar seus alunos, sem se preocupar com os vizinhos (MEGA, E. *apud* NWABASIL, 2018)

Do calendário das principais olimpíadas de matemática que participamos durante o ano, o Canguru de Matemática é a primeira delas, os alunos que participam se sentem motivados, eles percebem que a questão principal é estimular a criatividade, que o interessante não é só fazer as operações e sim saber usar alguns conteúdos na prática. A prova valoriza o pensamento matemático, não só o saber fazer.

### 2.2.3 Intervenções utilizando os dados do Canguru de Matemática

O Canguru de Matemática é a primeira competição que os alunos participam durante o ano letivo, sendo que algumas questões dessa prova são utilizadas para o diagnóstico inicial de conhecimento do aluno e também como instrumento norteador para futuras ações com os alunos.

Após a realização da prova, é realizada uma análise de acordo com os acertos ou erros em cada questão. A análise é feita considerando o ano que o aluno está, o conteúdo esperado que o aluno tenha domínio e, em caso de erro, analisamos se foi conceitual ou relacionado à interpretação do texto. Acompanhe, a seguir, o exemplo de uma análise

---

<sup>3</sup> Discreto, sem alarde, sem divulgação

que fizemos em uma questão de um grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio:

*Canguru de Matemática – 2017/ Nível S - Questão 4:*

Dois números positivos  $a$  e  $b$  são tais que 75% de  $a$  é igual a 40% de  $b$ . Isto significa que:

- (A)  $15a = 8b$
- (B)  $7a = 5b$
- (C)  $3a = 2b$
- (D)  $5a = 12b$
- (E)  $8a = 15b$

*Resposta correta: A*

*Análise da questão*

Conhecimento envolvido: Porcentagem

Desempenho dos alunos:

- 8 acertos
- 2 erros
- 3 não souberam resolver a questão

**Quadro 4** - Desempenho dos alunos em questão envolvendo porcentagem

	Aluno	Respostas	Pontuação
1	ALUNO 1	D	40
2	ALUNO 2	X	43,75
3	ALUNO 3	A	45,25
4	ALUNO 4	A	46
5	ALUNO 5	A	49,5
6	ALUNO 6	A	41,25
7	ALUNO 7	A	54,25

8	ALUNO 8	A	91,25
9	ALUNO 9	A	88
10	ALUNO 10	X	50,25
11	ALUNO 11	X	30
12	ALUNO 12	A	56,75
13	ALUNO 13	D	41,25

Fonte: Elaborado pela autora

A intervenção é feita em sala de aula, individualmente, com a supervisão do professor e com o uso de ferramentas tecnológicas que serão descritas no capítulo 3 deste trabalho. Nesse exemplo, fica claro que 5 alunos não compreenderam o conteúdo matemático envolvido na questão.

### **2.3 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma competição nacional, criada em 2005 pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC). Atualmente, é considerada a maior olimpíada de Matemática do mundo, contando com a participação de aproximadamente 18 milhões de alunos, abrangendo quase todos os municípios do Brasil.

Destinada aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio das escolas públicas e privadas brasileiras, a OBMEP tem como objetivo contribuir para a melhoria da qualidade do ensino da Matemática, estimular o interesse dos alunos e revelar talentos na área. Ainda, busca estreitar laços entre as escolas e as universidades e as instituições de pesquisa, por meio de programas de aperfeiçoamento e de iniciação científica.

A OBMEP se inspirou nas experiências da Olimpíada Brasileira de Matemática<sup>4</sup> (OBM) e do Projeto Numeratizar<sup>5</sup>, realizado no Ceará. A adesão dos alunos desde a sua criação em 2005 tem sido expressiva, tendo registrado a participação de 10,5 milhões de alunos em sua primeira edição, e abrangendo 18 milhões de alunos em 2018.

Até o ano de 2016, a participação na OBMEP era exclusiva para alunos de escolas públicas. Com a participação de alunos de escolas privadas a OBMEP se tornou requisito necessário para participação na OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática).

### 2.3.1 A organização da OBMEP

Podem participar da OBMEP os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio das escolas públicas – municipais, estaduais ou federais – e das escolas privadas. Os alunos inscritos na olimpíada são classificados em níveis, conforme a fase de escolaridade:

---

<sup>4</sup> Criada na década de 70 pela Sociedade Brasileira de Matemática (SMB), a OBM realiza competições em todo o Brasil. Abrange alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até o nível universitário.

<sup>5</sup> Criado no Ceará pelo professor João Lucas Barbosa, que considera a OBMEP como uma expansão desse projeto.

- I. Nível 1 – alunos matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental.
- II. Nível 2 – alunos matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.
- III. Nível 3 – alunos matriculados em qualquer série do Ensino Médio.

Em cada nível, as escolas participantes da OBMEP 2018 serão divididas em 5 grupos, de acordo com o número de inscrições na primeira fase, assim distribuídos:

a) Nível 1:

- 1. Compõem o Grupo 1A as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 1 a 40 alunos no nível 1.
- 2. Compõem o Grupo 1B as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 41 a 80 alunos no nível 1.
- 3. Compõem o Grupo 1C as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 81 a 140 alunos no nível 1.
- 4. Compõem o Grupo 1D as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 141 a 240 alunos no nível 1.
- 5. Compõem o Grupo 1E as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP 241 alunos ou mais no nível 1.

b) Nível 2:

- 1. Compõem o Grupo 2A as escolas que inscreveram na primeira fase da OBMEP de 1 a 40 alunos no nível 2.

2. Compõem o Grupo 2B as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 41 a 80 alunos no nível 2.
3. Compõem o Grupo 2C as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 81 a 140 alunos no nível 2.
4. Compõem o Grupo 2D as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 141 a 240 alunos no nível 2.
5. Compõem o Grupo 2E as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP 241 alunos ou mais no nível 2.

c) Nível 3:

1. Compõem o Grupo 3A as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 1 a 120 alunos no nível 3.
2. Compõem o Grupo 3B as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 121 a 240 alunos no nível 3.
3. Compõem o Grupo 3C as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 241 a 380 alunos no nível 3.
4. Compõem o Grupo 3D as escolas que inscreverem na primeira fase da OBMEP de 381 a 620 alunos no nível 3.
5. Compõem o Grupo 3E as escolas que inscreverem na Primeira Fase da OBMEP 621 alunos ou mais no nível 3.

A realização da olimpíada ocorre em duas fases, sendo realizada, na primeira fase, uma avaliação com 20 questões objetivas (questões de múltipla escolha), de caráter eliminatório, realizadas nas próprias escolas inscritas e corrigidas pelos próprios professores de Matemática da

unidade, e, na segunda fase, uma avaliação com 6 questões discursivas, realizada em centros escolhidos pela OBMEP. Nesta fase, participam os alunos que obtiveram as melhores notas na primeira fase, sendo selecionados de acordo com os critérios descritos no *site* da OBMEP:

a) Nível 1:

1. As escolas do Grupo 1A que inscreverem 1 aluno na primeira fase selecionarão para a segunda fase, 1 aluno. Aquelas que inscreverem na primeira fase de 2 a 40 alunos, selecionarão para a segunda fase, 2 alunos.
2. As escolas do Grupo 1B selecionarão 4 alunos do nível 1 para a segunda fase.
3. As escolas do Grupo 1C selecionarão 7 alunos do nível 1 para a segunda fase.
4. As escolas do Grupo 1D selecionarão 12 alunos do nível 1 para a segunda fase.
5. As escolas do Grupo 1E selecionarão 5% do total de alunos inscritos na primeira fase no nível 1 para a segunda fase.

b) Nível 2:

1. As escolas do Grupo 2A que inscreverem 1 aluno na primeira fase selecionarão para a segunda fase, 1 aluno. Aquelas que inscreverem na primeira fase de 2 a 40 alunos, selecionarão para a segunda fase, 2 alunos.
2. As escolas do Grupo 2B selecionarão 4 alunos do nível para a segunda fase.

3. As escolas do Grupo 2C selecionarão 7 alunos do nível para a segunda fase.

4. As escolas do Grupo 2D selecionarão 12 alunos do nível para a segunda fase.

5. As escolas do Grupo 2E selecionarão 5% do total de alunos inscritos na primeira fase no nível para a segunda fase.

c) Nível 3:

1. As escolas do Grupo 3A que inscreverem até 6 alunos na primeira fase selecionarão todos os inscritos para a segunda fase. Aquelas que inscreverem na primeira fase de 7 a 120 alunos, selecionarão para a segunda fase 6 alunos.

2. As escolas do Grupo 3B selecionarão 12 alunos do nível 3 para a segunda fase.

3. As escolas do Grupo 3C selecionarão 19 alunos do nível 3 para a segunda fase.

4. As escolas do Grupo 3D selecionarão 31 alunos do nível 3 para a segunda fase.

5. As escolas do Grupo 3E selecionarão 5% do total de alunos inscritos na primeira fase no nível 3 para a segunda fase.

Para os Grupos 1E, 2E e 3E, quando o número equivalente a 5% não for um número inteiro, ele deverá ser aproximado para o número inteiro imediatamente superior.

As questões propostas nas provas da Primeira Fase apresentam conteúdos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e são questões do tipo múltipla escolha, com 5 opções (A a E) e uma única

resposta correta. A duração da prova na primeira fase é de 2 horas e 30 minutos e, na segunda fase, tem a duração de 3 horas.

A inscrição para as escolas públicas é gratuita, para a escola privada a inscrição é feita mediante pagamento da taxa mínima de R\$ 100,00, que corresponde à inscrição de até 25 alunos, de qualquer nível (1, 2 ou 3). Para as inscrições adicionais, o valor acrescido é de R\$ 4,00 por aluno.

### 2.3.2 A premiação dos participantes

A OBMEP realiza premiação não só dos alunos que apresentam os melhores desempenhos, mas também dos professores, das escolas e das Secretarias de Municipais de Educação. Os alunos de escolas públicas e privadas são premiados com medalhas de ouro, prata e bronze, além de certificados de menção honrosa.

Aos alunos premiados com medalhas são oferecidas bolsas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para participar do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC Jr OBMEP). Os alunos medalhistas participantes de qualquer edição da OBMEP poderão também, quando matriculados no Ensino Superior, concorrer a uma vaga para o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), que é oferecido em diversas Instituições de Ensino Superior.

Os professores de Matemática, bem como as suas escolas, são premiados conforme o desempenho dos seus alunos segundo critérios que consideram o número de alunos participantes na segunda fase: os alunos medalhistas – e os tipos de medalhas recebidas, aqueles que receberam menção honrosa e também quem não obteve premiação nessa fase. Os prêmios para os professores incluem participação no

programa OBMEP na escola, diploma de homenagem e livro de apoio à formação matemática. As escolas premiadas são divididas em grupos para a premiação e recebem um *kit* com material didático e troféu para a escola que alcança a maior pontuação em seu grupo.

As Secretarias Municipais de Educação também são premiadas conforme critérios que consideram o desempenho dos alunos das escolas públicas municipais participantes da segunda fase. Os prêmios concedidos são troféus para os dois municípios com melhor desempenho em cada Estado brasileiro.

### 2.3.3 Recursos e Programas da OBMEP

A OBMEP oferece o acesso a diversos recursos e programas a fim de colaborar com os projetos educacionais na escola e oferecer conteúdo gratuito de Matemática aos alunos, bem como aproximar as escolas dos projetos de pesquisa e aprofundar os conhecimentos de alunos e professores premiados. Segue uma breve descrição sobre cada um deles.

#### *Recursos oferecidos pela OBMEP*

- Portal da Matemática OBMEP

Disponibilizado no Portal do Saber OBMEP<sup>6</sup>, tem por objetivo disponibilizar o acesso *online* e gratuito a conteúdos de Matemática, do 6º ano do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio.

---

<sup>6</sup> O Portal do Saber oferece acesso ao Portal da Matemática e Portal da Física, que são os portais da OBMEP. O acesso ao portal está disponibilizado no endereço eletrônico < <https://portaldosaber.obmep.org.br/>>.

O conteúdo é oferecido para cada ano em módulos, que possuem aulas com diversos recursos: vídeo aulas explicativas e recursos como exercícios resolvidos, cadernos de exercícios, materiais teóricos, aplicativos *online* interativos e testes com correção automática.

- Material didático

A OBMEP disponibiliza, para todos os níveis, o acesso às provas de edições anteriores e suas respectivas soluções, ferramenta de busca de questões por tema, acesso às apostilas do Programa de Iniciação Científica Jr OBMEP, simulados, vídeos, links oficiais das páginas de olimpíadas de Matemática do Brasil e de outros países, bem como páginas com conteúdos de Matemática.

- Clubes de Matemática da OBMEP

Projeto desenvolvido com a finalidade de propiciar a troca de experiências entre alunos de diferentes localidades e estimular o estudo da Matemática de forma lúdica. O ambiente é interativo e oferece a possibilidade para criar atividades de Matemática, discutir sobre os temas de Matemática, filmes, resolução de problemas e participar de gincanas com alunos de escolas públicas e privadas.

### *Programas oferecidos pela OBMEP*

- Programa de Iniciação Científica Jr OBMEP

Programa desenvolvido com o intuito de aprofundar o conhecimento de Matemática, motivar os alunos na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas e articular uma relação entre as escolas e as universidades. É destinado aos alunos medalhistas da OBMEP, que podem participar de encontros em polos presenciais ou à distância. Os alunos recebem material didático adequado ao seu nível de participação na OBMEP e realizam atividades *online* mediadas por um

orientador. Os alunos participantes do PIC recebem um incentivo financeiro do CNPq durante a vigência do programa.

- Programa Mentores da OBMEP

Podem participar do Programa os alunos que já tenham participado do PIC mais de duas vezes, sendo, ao menos, uma delas no nível 3. O Programa Mentores da OBMEP tem o objetivo de oferecer a oportunidade de estudar conteúdos avançados em diversas áreas. O aluno realiza atividades em uma plataforma e conta com uma equipe de orientação. Os participantes desse programa podem receber auxílio financeiro do CNPq.

- Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME)

Podem se candidatar ao PICME os estudantes universitários que em alguma edição da OBMEP já foram medalhistas<sup>7</sup>. O Programa tem o intuito de oferecer estudos avançados de Matemática simultaneamente com o curso de graduação. É coordenado pelo IMPA e oferecido pelos Programas de Pós Graduação em Matemática ou Matemática Aplicada que possuem Mestrado Acadêmico recomendados pela CAPES. Por ter parceria com o CNPq e a CAPES, o Programa oferece bolsas de auxílio financeiro aos estudantes. Para a manutenção de alunos medalhistas matriculados no Ensino Superior, há também agências de fomento no setor privado<sup>8</sup> que oferecem bolsas.

- Programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)

Podem participar do Programa os alunos matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental ou em qualquer série do Ensino Médio. Tem por objetivo oferecer cursos gratuitos de Matemática, contribuindo para melhorar o desempenho dos alunos interessados em participar da OBMEP e da OBM. Os alunos inscritos podem assistir às aulas virtuais, que possuem orientador *online* para acompanhamento, e acesso aos materiais de apoio. Podem ainda assistir às aulas presenciais semanais

---

<sup>7</sup> Alunos que já foram medalhistas na OBM também podem se candidatar.

<sup>8</sup> Programa Bolsa Instituto TIM OBMEP

em pólos específicos, quando houver a disponibilidade no município onde reside.

- Programa OBMEP na Escola

Programa destinado aos professores de Matemática das escolas públicas e particulares, bem como estudantes de cursos de licenciatura e Matemática. Seu objetivo é colaborar com as práticas docentes e apoiar estudos aprofundados, oferecendo orientação para o desenvolvimento de conteúdos na perspectiva da resolução de problemas. O Programa conta com apoio do setor privado<sup>9</sup>.

#### 2.3.4 Intervenções utilizando os dados da OBMEP

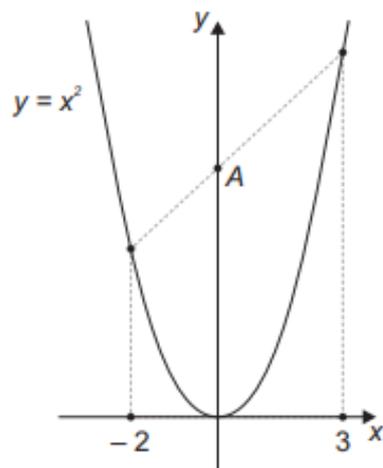
Após a realização da prova, é realizada uma análise das respostas dos alunos do Ensino Médio, de acordo com os acertos ou erros em cada questão. A prova do nível 3, como explicado anteriormente, abrange todos os alunos no Ensino Médio, portanto, é levado em consideração o ano que o aluno está, qual o conteúdo que se espera que o aluno tenha domínio e, em caso de erro, analisar se foi conceitual ou de interpretação de texto. Acompanhe, a seguir, o exemplo de uma análise feita em uma questão de um grupo de alunos que participaram da OBMEP:

#### OBMEP 2018 – Nível 3 – Questão 8

A figura mostra o gráfico da função definida por  $y = x^2$ . O ponto  $A$  tem coordenadas  $(0, p)$ . Qual é o valor de  $p$ ?

---

<sup>9</sup> Itaú Social



- A) 5
- B) 5,5
- C) 6
- D) 6,25
- E) 6,5

Resposta correta: C

#### *Análise da questão*

Conhecimento envolvido: Função quadrática, geometria plana e geometria analítica

Desempenho dos alunos

- 15 acertos
- 10 erros

**Quadro 5** - Desempenho dos alunos em questão envolvendo função e geometria

	Aluno	Série	Respostas	Pontuação
1	ALUNO 1	1ª	C	04
2	ALUNO 2	1ª	B	06

3	ALUNO 3	1ª	B	06
4	ALUNO 4	1ª	A	06
5	ALUNO 5	1ª	E	07
6	ALUNO 6	1ª	C	10
7	ALUNO 7	1ª	C	09
8	ALUNO 8	1ª	C	12
9	ALUNO 9	1ª	C	05
10	ALUNO 10	2ª	C	07
11	ALUNO 11	2ª	A	08
12	ALUNO 12	2ª	C	09
13	ALUNO 13	2ª	A	09
14	ALUNO 14	2ª	C	10
15	ALUNO 15	2ª	A	09
16	ALUNO 16	2ª	C	11
17	ALUNO 17	3ª	C	07
18	ALUNO 18	3ª	E	08
19	ALUNO 19	3ª	C	09
20	ALUNO 20	3ª	C	09
21	ALUNO 21	3ª	C	10
22	ALUNO 22	3ª	C	13
23	ALUNO 23	3ª	C	14
24	ALUNO 24	3ª	D	10
25	ALUNO 25	3ª	B	11

Fonte: Elaborado pela autora

Há também uma análise com alunos da 1ª e da 2ª série do Ensino Médio, que usaram função afim e geometria plana para resolver a questão, outros não conseguiram, pois não tinham assimilado bem o conceito de gráficos de funções. Para estes alunos, foram necessárias aulas expositivas e checagem de aprendizado usando as ferramentas tecnológicas que serão explicadas no próximo capítulo.

Alguns alunos da 3ª série do Ensino Médio usaram geometria analítica para resolver a questão, houve erro de aplicação das fórmulas e erros de cálculo também, sendo necessária a intervenção através de vídeo aulas e checagem de aprendizado usando as ferramentas tecnológicas.

#### **2.4 Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)**

A OBM é uma competição para os estudantes de ensino fundamental, médio e universitário das instituições públicas e privadas do país. A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou em 1979 a primeira edição.

São quatro os níveis de preparação, de acordo com a escolaridade do aluno:

- I. Nível 1 – alunos matriculados no 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental.
- II. Nível 2 – alunos matriculados no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.
- III. Nível 3 – alunos matriculados em qualquer ano do Ensino Médio ou que tendo concluído o Ensino Médio há menos de um ano, não tenham ingressado em nenhum curso de nível superior até a data da realização da prova.

IV. Nível Universitário: estudantes universitários em nível de graduação, podendo ser estudantes de qualquer curso.

Em 2017, houve uma mudança no formato, nos níveis 1, 2 e 3 a prova é composta somente de uma fase, realizada no segundo semestre e somente com alunos convidados.

São convidados a participar da OBM os 300 alunos de cada nível com maior pontuação na 2ª fase da OBMEP, os medalhistas da última OBM e de 3 a 10 alunos de cada nível em Olimpíadas Regionais apoiadas pela OBM que ainda não tenham sido contempladas pelos itens anteriores.

Um dos principais objetivos da OBM é selecionar estudantes que representarão o país em competições internacionais de Matemática, realizando o seu devido treinamento, apoiar olimpíadas regionais, descobrir jovens com talentos excepcionais e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisas de alto nível além de interferir na melhoria do ensino de Matemática no Brasil.

## **2.5 ORMUB**

A ORMUB, Olimpíada Regional de Matemática da UNESP de Bauru, é um evento realizado pelo departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru desde 1993. De acordo com Cruz, Varalta e Toledo (2011), é um evento no formato de Olimpíada que

tem como principal objetivo estimular e desenvolver o interesse dos alunos do Ensino Médio pela Matemática. Ao buscarem resolver questões e problemas matemáticos, são incentivados a empreenderem esforços no sentido de vencer desafios, angariar novas aprendizagens, compartilhar com colegas e professores novas descobertas e novos saberes.

A competição é destinada a alunos do Ensino Médio, matriculados em escolas municipais, estaduais, federais ou particulares de Bauru e região.

### 2.5.1 A organização da ORMUB

A inscrição é feita pela unidade escolar, que deve indicar até 2 alunos por série do Ensino Médio, totalizando no máximo 6 alunos por escola.

As provas são divididas por série: 1ª série, 2ª série e 3ª série do Ensino Médio. Cada prova contém 5 questões discursivas, com o conteúdo de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, a prova é realizada no campus da UNESP de Bauru - SP, a duração da prova é de no máximo 3 horas.

Considerando as últimas 17 provas de cada série que estão no *site*<sup>10</sup> da ORMUB, temos nas provas para a 1ª série questões de resolução de problemas envolvendo aritmética, divisibilidade, porcentagem, lógica matemática, sequências sendo progressão aritmética ou progressão geométrica, função afim e quadrática, exponencial e logaritmo, razões trigonométricas no triângulo retângulo, geometria plana e função modular. Esses foram os conteúdos que mais apareceram nas

---

<sup>10</sup> <http://www2.fc.unesp.br/matematica/ormub/>

questões da 1ª série, além de alguns problemas envolvendo conjuntos e trigonometria.

Nas provas para a 2ª série, eventualmente apareceram questões iguais as provas da 1ª série. Fazendo uma análise temos como conteúdo mais cobrado dos alunos: as geometrias (geometria plana e geometria espacial), funções trigonométricas, matrizes e determinantes, sistemas lineares, análise combinatória e probabilidade. As outras questões foram de funções: exponencial, logarítmica ou modular.

Nas provas da 3ª série, o conteúdo mais exigido é o de geometria analítica, seguido de números complexos e polinômios, geometria plana e trigonometria, além de alguns problemas envolvendo probabilidade, lógica matemática, funções e porcentagem.

### 2.5.2 A premiação dos participantes

A premiação da olimpíada é separada entre alunos de escolas particulares e escolas públicas. Segundo os organizadores, há uma discrepância nas notas entre os alunos, o que poderia causar uma desmotivação entre esses alunos participantes, a ORMUB divulga somente os 5 primeiros colocados de cada ano das escolas públicas e os 5 primeiros colocados de cada ano das escolas privadas.

### 2.5.3 Intervenções utilizando os dados da ORMUB feitas pela organização

De acordo com o professor Luiz Francisco da Cruz, que foi um dos organizadores da ORMUB, o objetivo é que a ORMUB seja uma

ferramenta motivadora e incentivadora do estudo da matemática, não como competição ou gratificação. Ela se iniciou tendo como objetivo principal o de ser um instrumento para interferir no ensino, melhorando a formação dos alunos em matemática. O Prof. Luiz Francisco durante alguns anos orientou projetos de iniciação científica envolvendo graduandos da licenciatura em matemática da UNESP de Bauru, com o título: “Análise e discussão dos erros apresentados pelos participantes da Olimpíada Regional de Matemática da UNESP Bauru”, que faziam a análise das resoluções dos problemas propostos e colaboravam para uma intervenção visando uma melhoria no ensino de matemática de cada escola.

Os organizadores, através da ORMUB, observaram quedas no desempenho dos participantes, tendo sido encontrados erros de conteúdo, conceitos mal assimilados, aplicações inadequadas, dificuldade com a linguagem matemática e erros de distração e compreensão, comprometendo o desenvolvimento das questões apresentadas. Supervisionados pelo professor Luiz Francisco da Cruz, estes projetos tiveram como objetivos, numa primeira etapa, fazer um levantamento dos erros cometidos pelos participantes da olimpíada, catalogá-los e colocá-los em gráficos comparativos, os quais mostram o desempenho dos alunos. Numa segunda fase, foram analisados e discutidos esses erros e finalmente, foram elaborados relatórios contendo os gráficos comparativos. Esses relatórios, que somente eram informados individualmente a cada escola participante, através do qual as escolas poderiam analisar o desempenho dos alunos participantes da olimpíada e o desempenho dos alunos da sua escola.

Após essa etapa, durante 5 anos foi desenvolvido um projeto de extensão, convidando alunos para participar de aulas, aos sábados das 14h às 17h. O projeto trabalhava com os alunos conteúdos visando a diminuição de erros mais básicos, principalmente o conteúdo de funções,

e somente alunos de escola pública de todas as séries do Ensino Médio eram convidados.

Outro projeto que surgiu baseado nas provas da ORMUB, também supervisionado pelo professor Luiz Francisco da Cruz foi o “Encontros com a Matemática”. Através de dados quantitativos e qualitativos, conseguiam detectar os conteúdos que os alunos mais apresentavam dificuldades e deficiências. O projeto tinha como objetivo dar oportunidade para os alunos da 3ª série do Ensino Médio das escolas públicas, de sanar essas dificuldades e deficiências em conteúdos específicos da matemática.

Nos encontros, foram desenvolvidos conteúdos específicos da matemática, selecionados com base em uma pesquisa realizada junto aos docentes e alunos das escolas públicas. Mediante análise desta pesquisa, ficou constatado que as maiores dificuldades e deficiências, por parte dos alunos, envolviam os conteúdos de Trigonometria, Números Complexos e Indução Matemática.

#### 2.5.4 Intervenções utilizando os dados da ORMUB

As provas de cada aluno que participou da ORMUB não são divulgadas, ou seja, a informação que temos das respostas é dos próprios alunos. As provas da ORMUB se caracterizam por serem bem conceituais, se o aluno não conseguiu responder, fazemos uma retomada do conteúdo e se o aluno teve alguma pequena dúvida, é feita uma orientação de tarefas através das ferramentas tecnológicas que serão descritas no capítulo 3.

## 2.6 HMMT (The Harvard-MIT Mathematics Tournament)

*The Harvard-MIT Mathematics Tournament*, usualmente conhecido como HMMT é uma das maiores e mais prestigiadas competições de Ensino Médio do mundo, teve a sua primeira edição em 1998 e desde 2008 são realizados dois torneios por ano, os alunos do MIT (Massachusetts Institute of Technology) e da *Harvard University* são os responsáveis pela organização, elaboração dos problemas, recepção das inscrições, aplicação de provas e correção das provas. Cada torneio atrai mais de 1000 estudantes de todo o mundo, incluindo os maiores pontuadores em olimpíadas nacionais e internacionais.

De acordo com Paul E. Handorff, um dos diretores do torneio, os coordenadores do HMMT, junto com cerca de 100 voluntários, escrevem os problemas, supervisionam e pontuam o torneio, além disso, eles oferecem seus dormitórios para abrigar a maioria dos competidores.

A competição é realizada duas vezes por ano, em fevereiro no MIT e novembro na *Harvard University*, ambas em Cambridge nos Estados Unidos. A principal diferença do torneio de fevereiro e novembro está na dificuldade dos exercícios. Os dois torneios tem como objetivo desafiar os estudantes de matemática de todo o mundo e possuem uma parte realizada individualmente e a outra por equipe.

O formato de cada torneio reflete a diferença em seu respectivo público-alvo. O torneio de novembro inclui duas rodadas individuais, a *General* e a *Theme Round* com 10 problemas cada uma, respostas com valores únicos, ou seja, respostas curtas e que devem ser resolvidos em até 50 minutos cada, ambas com problemas desafiadores e abrange

todas as áreas da matemática do Ensino Médio. A *Theme Round* é elaborada sobre dois temas, 5 problemas de cada tema. Já o torneio de fevereiro exige um conhecimento mais profundo e especializado nas rodadas individuais, com testes de assunto de álgebra, que abrange a álgebra do Ensino Médio e teoria dos números, geometria e análise combinatória. A rodada de equipes do torneio de novembro, que podem ter de 4 a 6 alunos por equipe, apresenta problemas de resposta curta, enquanto a de fevereiro, que podem ter de 6 a 8 alunos por equipe, é totalmente baseada em demonstrações e provas. Como tal, todos os alunos que participam do torneio de fevereiro devem apresentar respostas elaboradas, enquanto os alunos com menos experiência comprovada podem se sentir mais confortáveis, competindo em novembro.

Essa rodada em equipes é dividida em duas partes, a *Team Round*, com 10 problemas que devem ser resolvidos em até 60 minutos, onde todos os membros da equipe trabalham juntos, com problemas frequentemente trabalhados por temas, exigindo respostas curtas e com nível de dificuldade das questões como a *General* e a *Theme Round*, a rodada de equipes do torneio de fevereiro é baseada em provas. Como resultado, os estudantes que participarem do torneio de fevereiro devem elaborar e escrever demonstrações rigorosas. São problemas que exigem um nível avançado de conhecimento matemático e, por último, a *Guts Round* com 36 questões, com variados assuntos e diferentes graus de dificuldades e pontos. Todas as equipes se reúnem em uma das duas grandes salas de aula. No sinal de partida, cada equipe envia um corredor para uma estação de problema atribuída para pegar cópias do primeiro conjunto de problemas para cada membro da equipe. Assim que uma equipe tiver respostas para um conjunto de problemas, o corredor pode trazer as respostas para a estação com problema e pegar o próximo conjunto. Não se espera que os alunos terminem todos os problemas. A classificação é imediata e as pontuações são publicadas em tempo real.

Essa parte final é a mais emocionante do evento, pois os alunos recebem no torneio de novembro, 3 questões de cada vez, no torneio de fevereiro 4 questões e, através de um placar instantâneo, eles conseguem saber o que acertaram e como estão em relação as outras equipes. É facilmente a parte mais divertida, tanto para os alunos, para os organizadores, quanto para os professores responsáveis que acompanham as equipes. Os professores ficam em outra sala acompanhando o painel com as pontuações e conversando, trocando experiências com professores de todos os lugares do mundo.

Um resumo das principais diferenças entre os torneios:

**Quadro 6** - Diferenças entre os torneios realizados do HMMT

	<b>Novembro</b>	<b>Fevereiro</b>
<i>Individual Rounds</i>	<i>General, Theme</i> (50 min cada)	Álgebra, Geometria, Combinatória (50 min cada)
<i>Team Round</i>	Respostas curtas (60 min)	Demonstrações (60 min)
<i>Guts Round</i>	36 problemas: grupos de 3 (80 min)	36 problemas: grupos de 4 (80 min)
Integrantes da equipe	4 a 6	6 a 8
Dificuldade	AMC-10, AMC-12 e AIME	AIME
Público-alvo	Alunos de Ensino Médio do mundo inteiro	Alunos de Ensino Médio do mundo inteiro

Fonte: Site HMMT

### 2.6.1 American Mathematics Competitions (AMC)

A AMC (*American Mathematics Competitions*) são as primeiras de uma série de competições em matemática de escolas secundárias que determinam a equipe dos Estados Unidos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). O processo de seleção ocorre ao longo de aproximadamente quatro etapas.

Existem três níveis iniciais:

1. AMC 8 é para alunos até o 8<sup>a</sup> ano do Ensino Fundamental
2. AMC 10 é para alunos até a 1<sup>a</sup> série do Ensino Médio
3. AMC 12 é para alunos até a 3<sup>a</sup> série do Ensino Médio

Os alunos com bom desempenho nos exames AMC 10 ou AMC 12 são convidados a participar do *American Invitational Mathematics Examination* (AIME). Os alunos que tiverem bom desempenho na AIME são convidados para a Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos da América (USAMO) ou para a Olimpíada de Matemática Junior dos Estados Unidos da América (USAJMO). Os alunos que se saem excepcionalmente bem no USAMO (geralmente em torno de 30 alunos) são convidados a participar do Programa de Verão de Olimpíadas de Matemática (MOSP ou mais comumente, MOP) e seis alunos são selecionados entre os doze maiores pontuadores no USAMO para formar a Equipe Internacional de Olimpíadas de Matemática dos Estados Unidos.

O torneio de fevereiro do HMMT atrai os medalhistas da IMO (Olimpíada Internacional de Matemática), os participantes são os melhores alunos de matemática de cada país. Para participar da IMO, o aluno brasileiro primeiro tem que participar das duas fases da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas), ser convidado para a OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), e se obter um bom desempenho, ser selecionado e treinado para participar da IMO, similar ao programa dos Estados Unidos. Para chegar até a IMO, cada país pode levar uma equipe com 6 alunos. Em 2017 o Rio de Janeiro sediou pela primeira vez uma edição da IMO, a 58ª edição.

Para participar do HMMT, não é preciso fazer provas de matemática, a equipe escreve uma carta, onde o aluno conta, por exemplo, o porquê gostaria de participar do torneio, o que espera e também sobre o interesse de matemática. Isso nos chamou a atenção, pois percebemos que poderíamos oferecer aos alunos, uma oportunidade de participação em uma olimpíada internacional. Uma oportunidade de conhecer outros alunos que tem o mesmo interesse, além de trocas de experiências. O número de equipes é limitado, não é somente mandar a inscrição, por isso aguardamos para saber se seríamos aceitos ou não na competição.

Pesquisando sobre brasileiros que participaram do HMMT conhecemos um estudante de Campinas-SP que participou do torneio em novembro de 2014. Ele nos forneceu informações e nos incentivou a participar, foi um grande motivador na decisão de inscrevermos uma equipe de alunos. Em fevereiro de 2016, uma equipe de Pernambuco participou e a nossa participação foi em novembro de 2016, com uma equipe de 4 alunos e lá encontramos uma equipe de Goiânia e uma outra de Belo Horizonte. Em fevereiro de 2018, houve a participação de uma equipe do Rio de Janeiro, inclusive contando com patrocínio financeiro de empresas.

**Figura 9 - Participação dos alunos no HMMT**



Fonte: Harvard-MIT

**Figura 10 - Participação dos alunos no HMMT**



Fonte: Harvard-MIT

### 2.6.2 A premiação dos participantes

Os prêmios são concedidos aos dez participantes com as melhores pontuações em geral, os dez melhores pontuadores em cada um dos testes individuais, as cinco equipes com maior pontuação na rodada de equipes e as cinco equipes de maior pontuação na rodada *Guts*. As dez melhores equipes em geral são nomeadas vencedoras do sorteio.

Nenhum brasileiro ganhou o torneio até hoje, e o vencedor nas edições do ano passado e de 2016 foi o chinês Yuan Yao. Ele é aluno da tradicional *Phillips Exeter Academy*, uma escola do New Hampshire que também emplacou os vencedores de todas as edições do HMMT realizadas a partir de 2012. A escola é uma das mais prestigiadas dos EUA, e tem uma lista de ex-alunos que inclui desde o ex-presidente Abraham Lincoln ao escritor Gore Vidal (ANTUNES, 2018).

### 2.6.3 - Intervenções utilizando os dados do HMMT

Como na ORMUB, as provas de cada aluno que participou do HMMT não são divulgadas, ou seja, a informação que temos das respostas é dos próprios alunos, recebemos somente as notas de cada um. Baseado nesses dados, fazemos intervenções individualizadas ou em grupos pequenos, pois as questões são de um nível bem aprofundado e poucos alunos participam desta olimpíada, não só pela dificuldade das questões, mas também por envolver um custo muito alto. Utilizamos a metodologia do ensino híbrido para essa intervenção com o uso das ferramentas tecnológicas que serão descritas no capítulo 3.

## 3 FERRAMENTAS UTILIZADAS PARA A PREPARAÇÃO DOS ALUNOS

Utilizamos nesta pesquisa, para o trabalho realizado com os alunos, diversos recursos tecnológicos, tendo como base a metodologia do **ensino híbrido**, que é baseado na personalização do ensino e centrado na aprendizagem do aluno. Neste capítulo, descreveremos como é essa metodologia e as ferramentas tecnológicas utilizadas.

### 3.1 Ensino híbrido

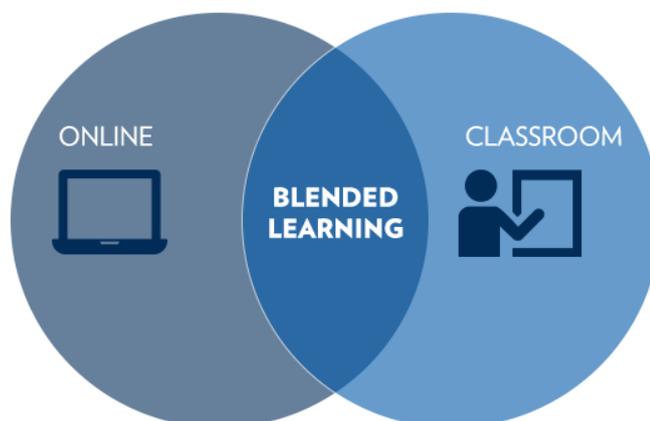
Para a preparação dos alunos, foi utilizada a metodologia do ensino híbrido ou *blended learning*, uma metodologia onde o aluno é o protagonista do seu aprendizado. É um método baseado na personalização, pois sabemos que os alunos aprendem em ritmos diferentes e que as aulas tradicionais, expositivas, centradas no professor não favorecem todos os alunos. Sendo assim, o uso da tecnologia é utilizado como uma aliada do professor para potencializar o aprendizado do aluno. Segundo Horn e Staker (2015, p. 54):

O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio da aprendizagem *on-line*, sobre o qual tem algum tipo de controle em relação ao tempo, ao lugar, ao caminho e/ou ao ritmo e, pelo menos em parte, em um local físico, supervisionado, longe de casa.

De acordo com as informações do Geekie (2018):

O ensino híbrido já está consolidado como uma das tendências mais importantes da educação do século 21. Com o grande leque de possibilidades aberto pela tecnologia, a proposta é a de que os alunos passem a ver mais sentido no conteúdo apresentado, tenham acesso a um processo de ensino personalizado, sejam estimulados a pensar criticamente, a trabalhar em grupo e a desenvolver a autonomia nos estudos.

**Figura 11** – Ensino híbrido



Fonte: UNIVERSIDADE DE MICHIGAN

Como a finalidade é a preparação para as competições matemáticas e as intervenções no ensino através das questões dessas provas, seguimos esse modelo que se caracteriza por uma parte do

ensino *on-line*, onde o aluno geralmente estuda sozinho, utilizando vídeos explicativos do conteúdo. As ferramentas mais indicadas foram o *Khan Academy*<sup>11</sup>, o *Explica Mais*<sup>12</sup> e o *Geekie*<sup>13</sup>, além das ferramentas que geram dados individuais de cada aluno, como por exemplo, o conteúdo estudado, erros e acertos, correção automática do exercício e o tempo de estudo. Para esse aprendizado utilizamos o *Superpro*<sup>14</sup> e o *IXL*<sup>15</sup>. Outra parte do ensino é *off-line*, presencial, onde o aluno estuda em grupo com os colegas e professores.

Na parte *on-line*, o aluno tem controle sobre o seu estudo, ele é o responsável por tomar as decisões, favorecendo, assim, sua autonomia, além de poder estudar na escola ou em casa usando computador, *tablet* ou celular. O mais importante é essa relação existente entre aluno e tecnologia. Nesse sentido, o intuito é que a parte *on-line* complemente a parte *off-line*, proporcionando diferentes formas de aprender um determinado conceito.

O objetivo é colocar o aluno no centro do processo de aprendizado, por isso, o ensino híbrido é um modelo em que o professor não é o único protagonista, dividindo o papel de apresentar o conhecimento com plataformas *on-line* de ensino, mas não se esquecendo de avaliar o aprendizado. Percebemos no uso desse modelo, o maior engajamento dos alunos no aprendizado, um melhor aproveitamento do tempo e intervenções mais efetivas com o planejamento e o acompanhamento personalizado de cada aluno<sup>16</sup>.

Dentro desse modelo híbrido, utilizamos os centros ou rotações por estação; de acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevizani (2015):

---

<sup>11</sup> <https://pt.khanacademy.org>

<sup>12</sup> <http://www.explicamais.com>

<sup>13</sup> [www.geekie.com](http://www.geekie.com)

<sup>14</sup> [www.sprweb.com](http://www.sprweb.com)

<sup>15</sup> [www.ixl.com](http://www.ixl.com)

<sup>16</sup> Assista ao vídeo “Ensino Híbrido – Personalização e Tecnologia na educação”, disponível em <<https://fundacaolemann.org.br/noticias/ensino-hibrido>>.

No modelo “Rotação por estações”, os alunos são organizados em grupos, cada um dos quais realiza uma tarefa, de acordo com os objetivos do professor para a aula planejada. Podem ser realizadas atividades escritas, leituras, entre outras. Um ou vários dos grupos podem estar envolvidos com propostas *on-line* que, de certa forma, independem do acompanhamento direto do professor. Neste modelo é importante valorizar momentos em que os estudantes possam trabalhar de forma colaborativa e aqueles em que possam fazê-los individualmente. Em um dos grupos, o professor pode estar presente de forma mais próxima, garantindo o acompanhamento de alunos que precisam de mais atenção. A variedade de recursos utilizados, como vídeos, textos, trabalho individual ou colaborativo, entre outros, também favorecem a personalização do ensino, pois, como sabemos, nem todos os alunos aprendem da mesma forma. Bom, após um determinado tempo, previamente combinado com os alunos, eles trocam de grupo, e esse revezamento continua até todos terem passado pelas estações indicadas pelo professor.

**Figura 12** - Rotação por estações



Fonte: BLENDED LEARNING UNIVERSE

**Figura 13** - Alunos realizando atividades na perspectiva do Ensino Híbrido



Fonte: Arquivo da autora

### **3.2 Khan Academy**

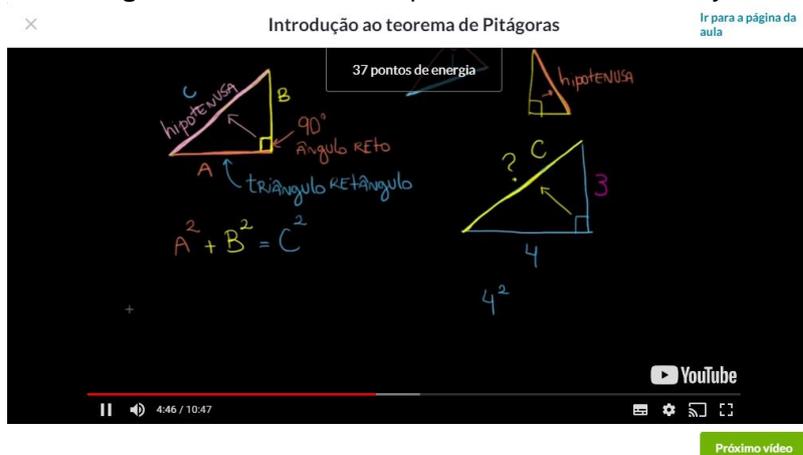
As plataformas utilizadas para vídeos foram do *Khan Academy* (<https://pt.khanacademy.org>), uma plataforma gratuita com vídeos de matemática, economia e finanças, computação, ciências e engenharia. As vídeo-aulas foram elaboradas pelo americano Salma Khan e traduzidos pela Fundação Lemann. O site é estruturado tanto para usuários individuais quanto para professores. O conteúdo foi dividido em habilidades e abrangem desde operações simples até exercícios de

cálculo, álgebra e geometria. A parte de matemática está dividida por assunto ou por ano escolar. A parte por assunto se divide em:

- Fundamentos da matemática
- Geometria
- Cálculo
- Aritmética
- Trigonometria
- Equações diferenciais
- Álgebra 1
- Probabilidade e estatística
- Álgebra linear

A plataforma possui pré-testes para saber quais habilidades o usuário possui, e a partir dos resultados a plataforma gera diversos conjuntos de tarefas, incluindo exercícios acompanhados das videoaulas. Veja, a seguir, o exemplo de uma videoaula disponível na plataforma:

**Figura 14** – Videoaula na plataforma *Khan Academy*

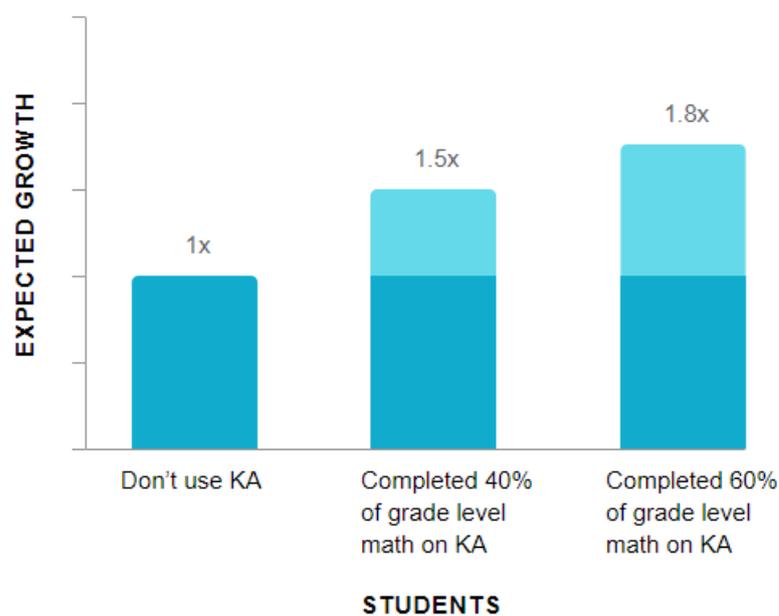


Fonte: KHAN ACADEMY

O impacto do uso dessa tecnologia foi alvo de diversas pesquisas e comprovado que os alunos que completam 60% de seus estudos de matemática na *Khan Academy* experimentam um crescimento 1,8 vez maior que o esperado no teste MAP da NWEA, um reconhecido teste de avaliação (ALBERTSON FAMILY FONDATION, 2015).

E um outro estudo foi feito pelo *Stanford Research Institute*, onde o uso que o aluno faz da *Khan Academy* é correlacionado aos aumentos das notas em testes de desempenho padronizados, conforme pode ser observado no gráfico a seguir:

**Figura 15** - O uso do *Khan Academy* correlacionado aos aumentos das notas em testes de desempenho padronizados



Fonte: KHAN ACADEMY

### 3.3 Explica Mais

O *Explica Mais* é uma ferramenta paga destinada a alunos do Ensino Médio que buscam na internet recursos e ferramentas que aprimorem seus conhecimentos, visando a um melhor desempenho nos vestibulares, no Enem e no caso específico de Matemática, para melhorar o desempenho em competições matemáticas.

Com vídeo-aulas objetivas, de todas as disciplinas do ensino médio, aprofundadas e de curta duração, além de plantões *on-line*, listas de aprofundamento e cursos específicos,

No *Explica Mais*, os alunos tem acesso a diversas ferramentas, como por exemplo:

- Vídeos específicos para alguns vestibulares e para o Enem;
- Cursos regulares para auxiliar no conteúdo visto em sala de aula;
- Plantões *on-line* com diversos professores para esclarecer dúvidas relacionadas à matéria desejada;
- Listas de exercícios disponíveis para aprofundar conhecimentos.
- Aulas de curta duração visando à otimização do tempo de estudo com abordagem aprofundada e de fácil assimilação.

A parte de matemática aparece dividida em 18 módulos:

- Geometria espacial
- Função
- Álgebra linear
- Geometria plana
- Exponencial

- Técnicas algébricas
- Porcentagem
- Conjuntos
- Módulo
- Análise combinatória
- Progressões
- Números complexos
- Logaritmo
- Polinômios
- Estatística
- Grandezas proporcionais
- Probabilidade
- Geometria analítica

O aluno pode utilizar os vídeos e listas de exercícios do *Explica Mais*, indicado pelo professor ou retomar algum conteúdo que não assimilou bem, ou aprender algum novo conteúdo, ou seja, o aluno gerencia seu aprendizado, ele é o responsável, ele analisa se é válido ou não o uso. A ferramenta é parecida com o *Khan Academy*. O diferencial é que nas vídeo-aulas, algum professor aparece explicando o conteúdo e no *Khan Academy* há somente a voz do professor com a escrita do conteúdo.

Veja, a seguir, o exemplo de uma aula de matemática:

Figura 16 - Aula de Matemática no Explica Mais

Fonte: EXPLICA MAIS

Quando se tem o cadastro de turmas de alunos, o professor consegue saber quais vídeos o aluno assistiu, quais conteúdos ele buscou soluções. Veja como é apresentado o relatório dos alunos:

Figura 17 - Relatório dos alunos na plataforma Explica Mais

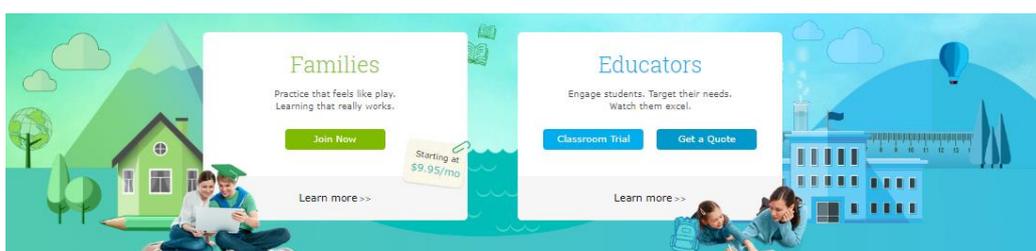
Aluno	Filial	Cargo	Setor	Aulas	Concluídas	Em andamento	Não iniciadas	Progresso
Aluno Teste				148	0 (0%)	4 (2.7%)	144 (97.3%)	<div style="width: 2.7%;"></div>
Antonio				148	7 (4.73%)	5 (3.38%)	136 (91.89%)	<div style="width: 8.11%;"></div>
Felipe				148	1 (0.68%)	7 (4.73%)	140 (94.59%)	<div style="width: 0.68%;"></div>
Fernando				148	0 (0%)	3 (2.03%)	145 (97.97%)	<div style="width: 0%;"></div>
Guilherme				148	0 (0%)	0 (0%)	148 (100%)	<div style="width: 100%;"></div>
Helôisa				148	0 (0%)	5 (3.38%)	143 (96.62%)	<div style="width: 0%;"></div>
Henrique				148	0 (0%)	0 (0%)	148 (100%)	<div style="width: 100%;"></div>
Henrique				148	6 (4.05%)	0 (0%)	142 (95.95%)	<div style="width: 4.05%;"></div>
Isadora				148	0 (0%)	3 (2.03%)	145 (97.97%)	<div style="width: 0%;"></div>
João				148	7 (4.73%)	3 (2.03%)	138 (93.24%)	<div style="width: 8.11%;"></div>

Fonte: EXPLICA MAIS

### 3.4 - IXL

Uma das ferramentas mais utilizadas foi o IXL ([www.ixl.com](http://www.ixl.com)), uma plataforma que já tem a sua versão traduzida para alunos da Educação Infantil até o 6º ano do Ensino Fundamental, mas em inglês para os alunos do Ensino Médio, que oferece uma experiência de aprendizado em matemática, artes, ciências, estudos sociais e espanhol, com conteúdo de alta qualidade. É uma ferramenta pouco conhecida no Brasil, mas muito usada nos Estados Unidos, 1 em cada 9 alunos dos Estados Unidos usam o IXL, e em mais de 190 países ela é usada por 6 milhões de estudantes. A plataforma é paga, podendo ter uma assinatura familiar ou pela escola, onde os educadores tem acesso ao que cada aluno resolveu, o nível que ele está e qual pontuação foi obtida.

**Figura 18** - Plataforma IXL



Fonte: IXL

O visual do IXL é criativo e cativante, os tópicos de matemática são separados por ano escolar ou por álgebra, geometria e cálculo.

Figura 19 - Tópicos de Matemática na plataforma IXL



**IXL Math**

On IXL, math is more than just numbers. With unlimited questions, engaging item types, and real-world scenarios, IXL helps learners experience math at its most mesmerizing!



<p><b>Pre-K skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Count shapes - up to 5</li> <li>Represent numbers - up to 5</li> <li>Classify shapes by color</li> <li>Count pennies</li> <li>Circles, squares, and triangles</li> </ul> <p><a href="#">See all 77 pre-K skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Kindergarten skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Count groups of ten</li> <li>Shape patterns</li> <li>Identify halves, thirds, fourths</li> <li>Count money - pennies through dimes</li> <li>Shapes of everyday objects I</li> </ul> <p><a href="#">See all 182 kindergarten skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>First-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Roman numerals I, V, X</li> <li>Addition word problems - sums up to 10</li> <li>Read a thermometer</li> <li>Compare money amounts</li> <li>Certain, probable, unlikely, and impossible</li> </ul> <p><a href="#">See all 205 first-grade skills &gt;&gt;</a></p>
<p><b>Second-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Put numbers up to 1,000 in order</li> <li>Greatest and least - word problems - up to 1,000</li> <li>Find the next row in a growing pattern</li> <li>Add multiples of 10</li> <li>Symmetry</li> </ul> <p><a href="#">See all 275 second-grade skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Third-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Multiplication tables up to 12</li> <li>Estimate sums</li> <li>Add and subtract money amounts</li> <li>What decimal number is illustrated?</li> <li>Compare and convert metric units of length</li> </ul> <p><a href="#">See all 376 third-grade skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Fourth-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Divisibility rules</li> <li>Objects on a coordinate plane</li> <li>Add and subtract mixed customary units</li> <li>Patterns of equivalent fractions</li> <li>Add and subtract decimals: word problems</li> </ul> <p><a href="#">See all 322 fourth-grade skills &gt;&gt;</a></p>
<p><b>Fifth-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Greatest common factor</li> <li>Least common multiple</li> <li>Multiply two fractions using models</li> <li>Create line graphs</li> <li>Parts of a circle</li> </ul> <p><a href="#">See all 335 fifth-grade skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Sixth-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Estimate square roots</li> <li>Multiply fractions: word problems</li> <li>Add integers</li> <li>Add and subtract integers: find the sign</li> <li>Create double bar graphs</li> </ul> <p><a href="#">See all 320 sixth-grade skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Seventh-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Add and subtract integers</li> <li>Arithmetic sequences</li> <li>Translations: find the coordinates</li> <li>Create histograms</li> <li>Experimental probability</li> </ul> <p><a href="#">See all 289 seventh-grade skills &gt;&gt;</a></p>
<p><b>Eighth-grade skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Estimate population size using proportions</li> <li>Find the distance between two points</li> <li>Rotations: graph the image</li> <li>Converse of the Pythagorean theorem: is it a right triangle?</li> <li>Graph a line using slope</li> </ul> <p><a href="#">See all 317 eighth-grade skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Algebra 1 skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Graph solutions to one-step linear inequalities</li> <li>Graph solutions to absolute value equations</li> <li>Classify a system of equations</li> <li>Match exponential functions and graphs</li> <li>Add and subtract radical expressions</li> </ul> <p><a href="#">See all 306 Algebra 1 skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Geometry skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Triangle Angle-Sum Theorem</li> <li>Proving a quadrilateral is a parallelogram</li> <li>Properties of trapezoids</li> <li>Similarity of circles</li> <li>Triangle Proportionality Theorem</li> </ul> <p><a href="#">See all 217 Geometry skills &gt;&gt;</a></p>
<p><b>Algebra 2 skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Solve matrix equations using inverses</li> <li>Fundamental Theorem of Algebra</li> <li>Find the vertices of a hyperbola</li> <li>Find the foci of a hyperbola</li> <li>Symmetry and periodicity of trigonometric functions</li> </ul> <p><a href="#">See all 311 Algebra 2 skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Precalculus skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Find inverse functions and relations</li> <li>Match quadratic functions and graphs</li> <li>Solve systems of linear inequalities by graphing</li> <li>Graph a resultant vector using the triangle method</li> <li>Add and subtract three-dimensional vectors</li> </ul> <p><a href="#">See all 261 Precalculus skills &gt;&gt;</a></p>	<p><b>Calculus skills</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Find one-sided limits using graphs</li> <li>Determine continuity on an interval using graphs</li> <li>Determine the continuity of a piecewise function at a point</li> <li>Find derivatives of polynomials</li> <li>Find derivatives of exponential functions</li> </ul> <p><a href="#">See all 97 Calculus skills &gt;&gt;</a></p>

Fonte: IXL

E dentro de cada tópico os assuntos estão separados por conteúdos específicos, por exemplo:

Figura 20 - Conteúdos de álgebra no IXL

<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="background-color: #0070C0; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">P</div> <div style="background-color: #FFC000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">K</div> <div style="background-color: #008000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">1</div> <div style="background-color: #800000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">2</div> <div style="background-color: #000080; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">3</div> <div style="background-color: #800080; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">4</div> <div style="background-color: #008080; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">5</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">6</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">7</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">8</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">A1</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">G</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">A2</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-bottom: 5px;">PC</div> <div style="background-color: #000000; color: white; border-radius: 50%; width: 20px; height: 20px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">C</div> </div>	<h2 style="margin: 0;">Algebra 1</h2> <p style="font-size: small; margin: 0;">Here is a list of all of the skills students learn in Algebra 1! These skills are organized into categories, and you can move your mouse over any skill name to preview the skill. To start practicing, just click on any link. IXL will track your score, and the questions will automatically increase in difficulty as you improve!</p>	
<h3 style="margin: 0;">Numbers</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>A.1 Compare and order rational numbers</li> <li>A.2 Absolute value and opposites</li> <li>A.3 Number lines</li> <li>A.4 Convert between decimals and fractions</li> <li>A.5 Convert between repeating decimals and fractions</li> <li>A.6 Square roots</li> <li>A.7 Cube roots</li> <li>A.8 Classify numbers</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Operations</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>B.1 Add, subtract, multiply, and divide integers</li> <li>B.2 Evaluate numerical expressions involving integers</li> <li>B.3 Evaluate variable expressions involving integers</li> <li>B.4 Add and subtract rational numbers</li> <li>B.5 Multiply and divide rational numbers</li> <li>B.6 Evaluate numerical expressions involving rational numbers</li> <li>B.7 Evaluate variable expressions involving rational numbers</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Ratios, rates, and proportions</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>C.1 Identify equivalent ratios</li> <li>C.2 Write an equivalent ratio</li> <li>C.3 Unit rates</li> <li>C.4 Unit prices</li> <li>C.5 Solve proportions</li> <li>C.6 Solve proportions: word problems</li> <li>C.7 Scale drawings: word problems</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Percents</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>D.1 Convert between percents, fractions, and decimals</li> <li>D.2 Solve percent equations</li> <li>D.3 Percent word problems</li> <li>D.4 Percent of change</li> <li>D.5 Percent of change: word problems</li> <li>D.6 Percent of a number: tax, discount, and more</li> <li>D.7 Find the percent: tax, discount, and more</li> <li>D.8 Multi-step problems with percents</li> </ul>	<h3 style="margin: 0;">Data and graphs</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>N.1 Interpret bar graphs, line graphs, and histograms</li> <li>N.2 Create bar graphs, line graphs, and histograms</li> <li>N.3 Circle graphs</li> <li>N.4 Interpret stem-and-leaf plots</li> <li>N.5 Interpret box-and-whisker plots</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Problem solving</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>O.1 Word problems: mixed review</li> <li>O.2 Word problems with money</li> <li>O.3 Consecutive integer problems</li> <li>O.4 Rate of travel: word problems</li> <li>O.5 Weighted averages: word problems</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Number sequences</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>P.1 Identify arithmetic and geometric sequences</li> <li>P.2 Arithmetic sequences</li> <li>P.3 Geometric sequences</li> <li>P.4 Evaluate variable expressions for number sequences</li> <li>P.5 Write variable expressions for arithmetic sequences</li> <li>P.6 Write variable expressions for geometric sequences</li> <li>P.7 Number sequences: mixed review</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Relations and functions</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>Q.1 Relations: convert between tables, graphs, mappings, and lists of points</li> <li>Q.2 Domain and range of relations</li> <li>Q.3 Identify independent and dependent variables</li> <li>Q.4 Identify functions</li> <li>Q.5 Identify functions: vertical line test</li> <li>Q.6 Find values using function graphs</li> <li>Q.7 Evaluate a function</li> <li>Q.8 Evaluate a function: plug in an expression</li> <li>Q.9 Complete a function table from a graph</li> <li>Q.10 Complete a function table from an equation</li> <li>Q.11 Interpret the graph of a function: word problems</li> </ul>	<h3 style="margin: 0;">Monomials</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>Y.1 Identify monomials</li> <li>Y.2 Multiply monomials</li> <li>Y.3 Divide monomials</li> <li>Y.4 Multiply and divide monomials</li> <li>Y.5 Powers of monomials</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Polynomials</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>Z.1 Polynomial vocabulary</li> <li>Z.2 Model polynomials with algebra tiles</li> <li>Z.3 Add and subtract polynomials using algebra tiles</li> <li>Z.4 Add and subtract polynomials</li> <li>Z.5 Add polynomials to find perimeter</li> <li>Z.6 Multiply a polynomial by a monomial</li> <li>Z.7 Multiply two polynomials using algebra tiles</li> <li>Z.8 Multiply two binomials</li> <li>Z.9 Multiply two binomials: special cases</li> <li>Z.10 Multiply polynomials</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Factoring</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>AA.1 GCF of monomials</li> <li>AA.2 Factor out a monomial</li> <li>AA.3 Factor quadratics using algebra tiles</li> <li>AA.4 Factor quadratics with leading coefficient 1</li> <li>AA.5 Factor quadratics with other leading coefficients</li> <li>AA.6 Factor quadratics: special cases</li> <li>AA.7 Factor by grouping</li> <li>AA.8 Factor polynomials</li> </ul> <h3 style="margin: 0;">Quadratic equations</h3> <ul style="list-style-type: none"> <li>BB.1 Characteristics of quadratic functions</li> <li>BB.2 Complete a function table: quadratic functions</li> <li>BB.3 Transformations of quadratic functions</li> <li>BB.4 Graph quadratic functions in vertex form</li> <li>BB.5 Solve a quadratic equation using square roots</li> <li>BB.6 Solve a quadratic equation using the zero product property</li> <li>BB.7 Solve a quadratic equation by factoring</li> </ul>

Fonte: Plataforma IXL

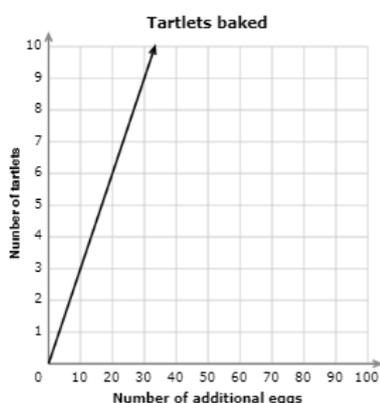
A plataforma IXL oferece aos alunos a possibilidade de aprender Matemática com uma estrutura conhecida como gamificação do sistema de aprendizagem, pois “gamificação se refere à aplicação de elementos de games fora do contexto dos games.” (FARDO, 2013).

Com diversos tipos de perguntas, onde para cada acerto o aluno ganha pontos, recompensas simbolizados por medalhas e troféus, motivando-os e para cada erro, a resolução da questão aparece detalhada e bem explicada. Além disso, o aluno perde pontos, treinando assim a sua capacidade de persistência para atingir o objetivo.

Um exemplo são questões do mesmo tópico, apresentadas na forma de teste:

**Figura 21** - Questão objetiva de múltipla escolha na plataforma IXL

This graph shows how the number of tartlets Zach can bake is related to the number of additional eggs he buys.



With 10 additional eggs, how many total tartlets can Zach bake?

 5 tartlets

 4 tartlets

 3 tartlets

 1 tartlet

Questions answered
<b>3</b>
Time elapsed
00   01   57 HR   MIN   SEC
SmartScore out of 100
<b>28</b>
Teacher results not recorded

Fonte: IXL

Ou discursiva:

**Figura 22** - Questão objetiva na plataforma IXL

This graph shows how William's bank account balance is related to the number of movie tickets he purchases.



How many tickets does William need to buy to get the account balance down to \$10?

movie tickets

Submit

Questions answered  
**5**

Time elapsed  
00 04 44  
HR MIN SEC

SmartScore  
out of 100

**43**  
Teacher results not recorded

Fonte: IXL

Do lado direito da tela, aparecem informações como a quantidade de questões respondidas (*questions answered*), o tempo que o aluno está resolvendo os exercícios (*time elapsed*) e a pontuação.

Se as respostas estão corretas, aparecem na tela palavras como: “*Wonderful*” (maravilhoso), “*That’s right*” (está certo), “*Well done*” (bem feito), “*Terrific*” (formidável), “*Awesome*” (impressionante), “*Excellent*” (excelente), “*Good work*” (bom trabalho)“, *Correct*” (correto), para o aluno saber que acertou. Se a resposta dada não for correta, o tempo é pausado e aparece a explicação detalhada do exercício. Por exemplo:

Figura 23 - Exemplo de explicação dada para uma resposta errada na plataforma IXL

## Sorry, incorrect...

The correct answer is:

4 hours

7 hours

3 hours

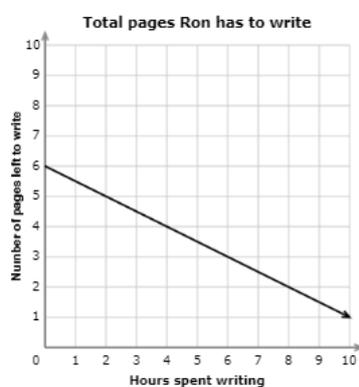
6 hours

Got it

### Explanation

review

This graph shows how the number of pages Ron still has to write for a research paper depends on the number of hours he spends writing.



How many hours of writing will Ron have to do in order to have 4 pages left to write?

Questions answered

27

Time elapsed

PAUSED

SmartScore out of 100 ?

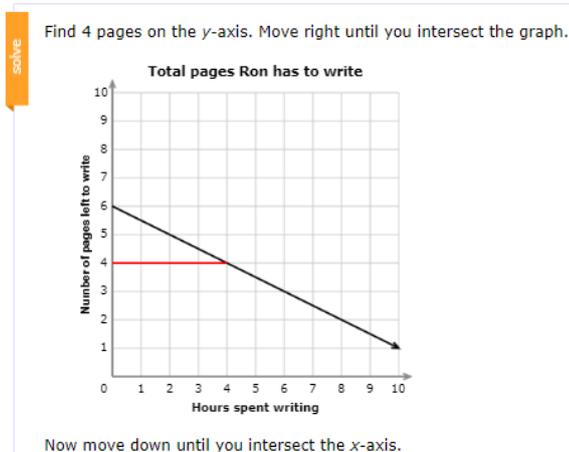
95



Teacher results not recorded

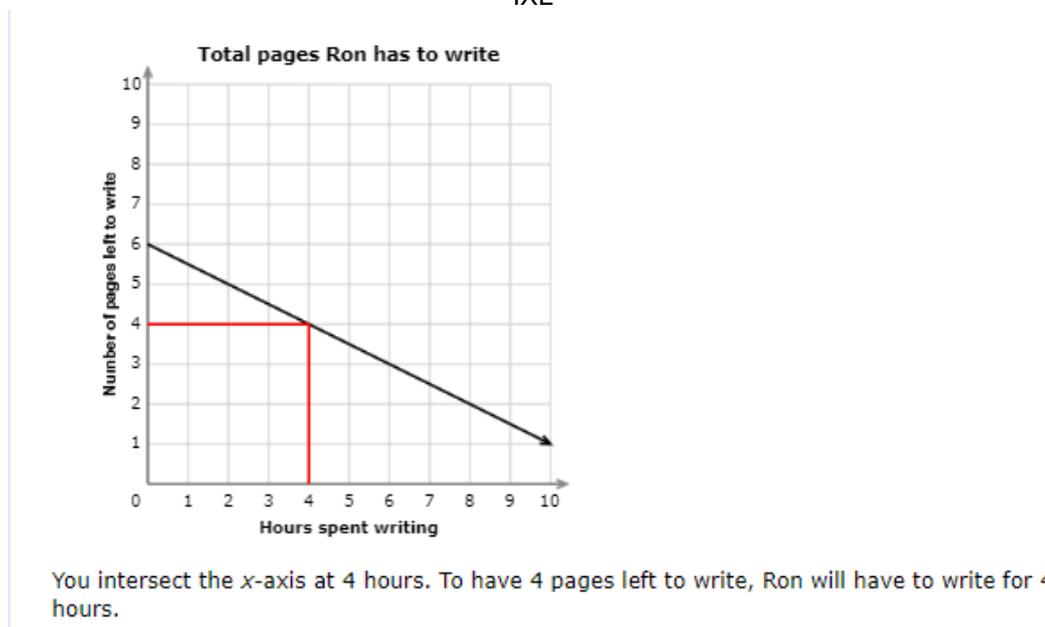
Fonte: IXL

Figura 24 - Segunda etapa da explicação dada para uma resposta errada na plataforma IXL



Fonte: IXL

**Figura 25** - Terceira parte da explicação dada para uma resposta errada na plataforma IXL



Fonte: IXL

Para a pontuação, o IXL utiliza o *SmartScore*, baseado em um algoritmo próprio e que foi projetado para oferecer a melhor medida possível do nível de domínio de seus alunos. O *SmartScore* oferece precisão superior na avaliação do aproveitamento do aluno, pois leva vários fatores em consideração, incluindo o número de perguntas concluídas, o número de perguntas corretas e incorretas e a dificuldade da pergunta. Um outro detalhe, as respostas recentes possuem um peso maior e a consistência (respostas corretas em uma linha) é altamente recompensada. A pontuação de cada questão varia, as primeiras possuem um valor maior, em torno de 9 pontos e as que estão próxima de 100 possuem uma pontuação menor, chegando a 1 ponto cada. De acordo com o *SmartScore* do IXL, sempre que um aluno atinge um *SmartScore* de 100, podemos confiar que ele realmente domina essa habilidade. Qualquer aluno que alcance o domínio do IXL completou um

amplo número de perguntas, incluindo as mais difíceis para essa habilidade. O processo de aprendizagem é recompensado, cada aluno aprende de um ritmo diferente, e o *SmartScore* respeita isso, não penalizando os alunos por perguntas perdidas no início de suas sessões de prática. Com perseverança e com a ajuda das explicações específicas de perguntas do IXL, qualquer aluno pode alcançar um nível de excelência. E os estudantes são constantemente reavaliados. O *SmartScore* está avaliando os alunos toda vez que eles se sentam para praticar. Isso significa que os alunos sempre podem visitar suas habilidades passadas e o professor receberá atualizações instantâneas sobre seu progresso e nível de retenção.

Além disso, o professor tem o controle das atividades desenvolvidas pelos alunos, as atividades podem ter sido propostas pelo professor ou o próprio aluno considerou importante a realização. Outro aspecto importante é o acompanhamento personalizado da aprendizagem, pois o relatório apresenta o tempo que o aluno realizou as atividades. Essas informações são usadas para o professor analisar as dificuldades de cada um, permitindo um melhor aproveitamento das aulas presenciais. O professor tem a comprovação de quais habilidades os alunos estão com dificuldade, de quais habilidades os alunos estão progredindo em relação ao domínio e quais habilidades o aluno tem o domínio.

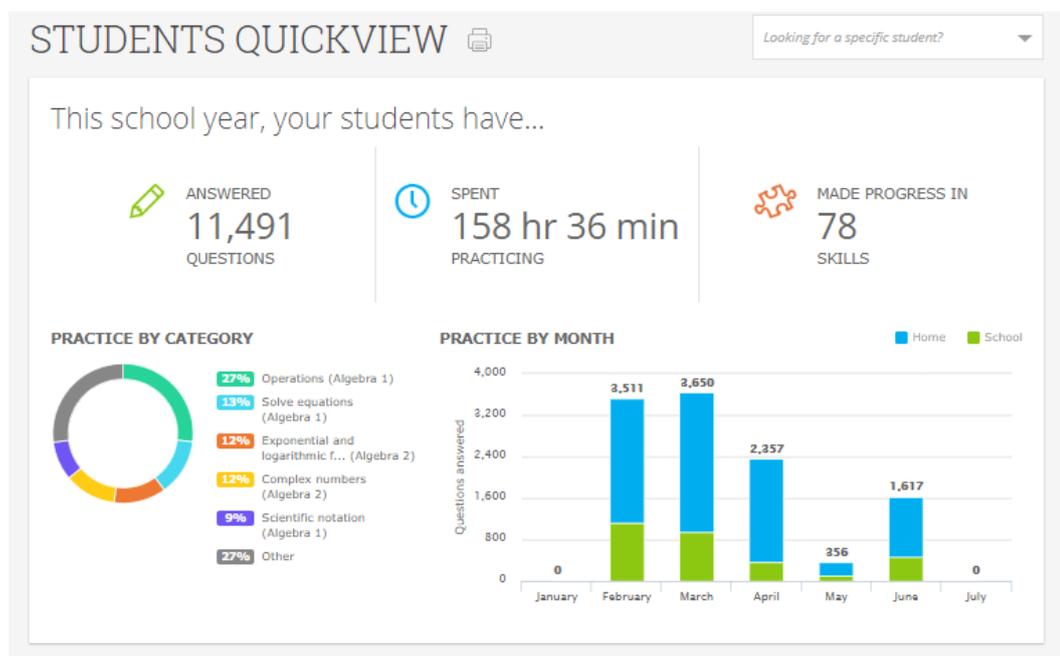
O diferencial no IXL é que cada aluno trabalha de acordo com seu nível, o aluno pode resolver exercícios, lembrar algum conteúdo que não aprendeu, preenchendo lacunas que ficaram ou resolver desafios, exercícios que serão propostos depois. E o mais importante no uso dessa ferramenta é a autonomia que o aluno desenvolve. Ele gerencia suas tarefas, seus estudos e aprendizado. O aluno se sente engajado e desafiado.

Especificamente para a preparação para as competições matemáticas, o IXL tem-se mostrado muito eficiente, pois temos a possibilidade de preparar estudos dirigidos para cada aluno, recomendando tópicos que devem ser estudados individualmente permitindo que as aulas presenciais enfatizem a resolução de problemas, com a participação ativa dos estudantes ao invés da passividade comum em aulas puramente expositivas.

### 3.4.1 Relatório do professor no IXL

Nos relatórios que recebemos podemos ter uma visão geral dos alunos, comparando quantidade de questões resolvidas, horas praticadas, progressos nas habilidades, divisão por assuntos das questões resolvidas e a quantidade por meses.

**Figura 26** - Informações gerais sobre o desempenho dos alunos



Fonte: IXL

Podemos fazer uma análise por aluno também, saber por exemplo em quais assuntos os alunos estão respondendo as questões e qual a pontuação atingida em cada.

Exemplo do que foi resolvido por três alunos do Ensino Médio.

**Figura 27** - Informações sobre o desempenho de cada aluno

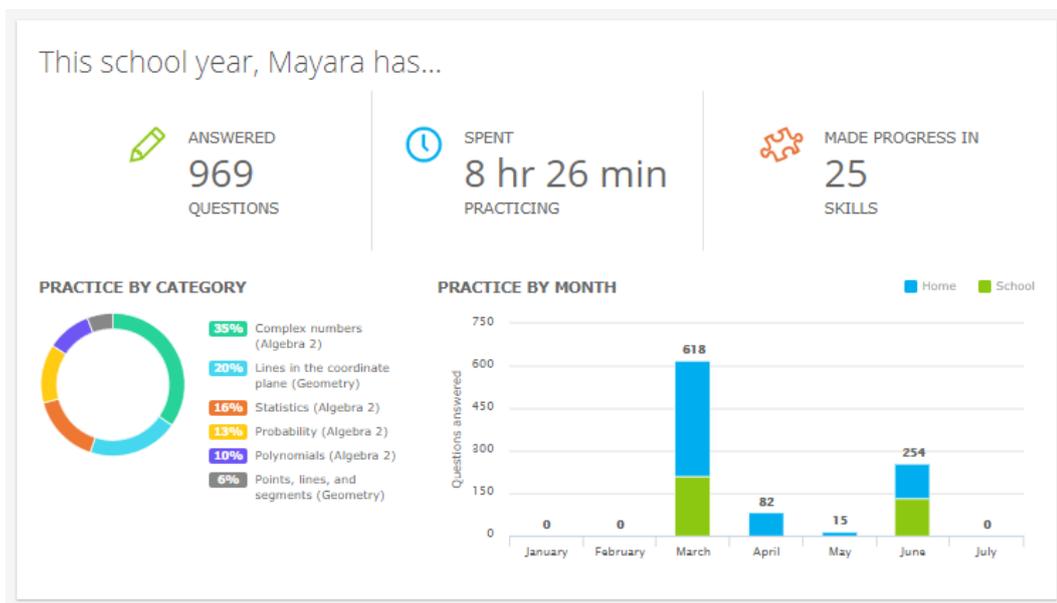
Aluno	Questões Resolvidas	Tempo	Última Prática
<b>Julia</b>	239 questions	2 hr 49 min	Practiced 28 days ago
G-E.4 Equations of lines	18	43 min	0 → 81
G-B.8 Distance formula	12	22 min	0 → 82
G-E.3 Graph a linear equation	14	12 min	0 → 81
G-E.2 Slopes of lines	9	4 min	0 → 82
G-B.7 Midpoint formula	19	11 min	0 → 82
<a href="#">See all 12 skills</a>			
<b>Luiza</b>	395 questions	5 hr 19 min	Practiced 48 days ago
A1-AA.6 Factor quadratics: special cases	50	32 min	0 → 80
A1-AA.2 Factor out a monomial	24	24 min	0 → 82
A1-J.10 Solve linear equations: word problems	14	6 min	0 → 81
A1-J.6 Solve equations with variables on both sides	14	10 min	0 → 81
A1-J.9 Create equations with no solutions or infinitely many solutions	28	16 min	0 → 84
<a href="#">See all 14 skills</a>			
<b>Heloisa</b>	85 questions	36 minutes	Practiced 99 days ago
A2-S.8 Solve logarithmic equations II	20	9 min	0 → 82
A2-S.7 Solve logarithmic equations I	27	6 min	0 → 82
A2-S.2 Evaluate exponential functions	8	2 min	0 → 82
A2-S.4 Solve exponential equations using factoring	30	18 min	0 → 91

Fonte: IXL

Podemos fazer uma análise mais aprofundada também, como saber qual o tempo demorado pelo aluno e em quais dias ele resolveu os problemas propostos.

Exemplo de um relatório detalhado de uma aluna:

**Figura 28** - Informações detalhadas sobre o desempenho de cada aluno



Fonte: IXL

**Figura 29** - Informações detalhadas sobre os acessos e desempenho dos alunos

Practice sessions and skills

MONDAY, JUNE 18   4:07 - 5:12 PM	57 min active practice   47 questions   1 skill	+
WEDNESDAY, JUNE 13   4:17 - 4:43 PM	24 min active practice   32 questions   2 skills	+
WEDNESDAY, JUNE 13   12:31 - 1:59 PM	1 hr 26 min active practice   131 questions   4 skills	+
TUESDAY, JUNE 12   6:28 - 6:51 AM	21 min active practice   44 questions   3 skills	+
TUESDAY, MAY 29   4:37 - 4:45 AM	7 min active practice   15 questions   2 skills	+
TUESDAY, APRIL 10   5:56 - 6:06 AM	9 min active practice   24 questions   1 skill	+
MONDAY, APRIL 9   5:17 - 5:25 PM	7 min active practice   58 questions   2 skills	+
WEDNESDAY, MARCH 28   8:16 - 8:57 PM	39 min active practice   61 questions   2 skills	+
WEDNESDAY, MARCH 28   8:47 - 9:09 AM	20 min active practice   19 questions   2 skills	+
FRIDAY, MARCH 23   3:51 - 5:45 PM	1 hr 51 min active practice   256 questions   5 skills	+
THURSDAY, MARCH 8   2:00 - 2:35 PM	31 min active practice   122 questions   6 skills	+
TUESDAY, MARCH 6   4:25 - 4:32 PM	6 min active practice   31 questions   2 skills	+
FRIDAY, MARCH 2   10:39 - 10:59 AM	19 min active practice   35 questions   1 skill	+
FRIDAY, MARCH 2   6:23 - 7:27 AM	1 hr 1 min active practice   94 questions   3 skills	+

Fonte: IXL

### 3.5 Super Professor

O **Super Professor** ou **Superpro**, como é mais conhecido, é uma ferramenta que auxilia o professor na elaboração de listas de exercícios para os alunos e na preparação de avaliações, é um banco de questões de todas as disciplinas. A assinatura é paga e o valor depende da quantidade de crédito que é comprado, cada crédito corresponde a uma questão.

As questões são separadas por assunto:

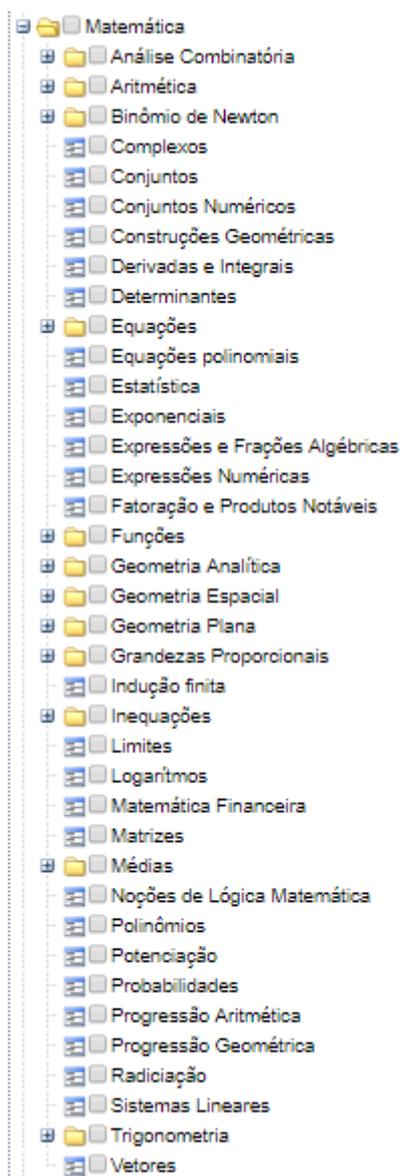
**Figura 30** - Interface da ferramenta Superpro

The screenshot shows the Superpro web interface. At the top, there is a navigation menu with links: Home, Tutoriais, Questões, Como comprar, Consumo, Meus Dados, Blog, Dicas, Contato, Sair, and a shopping cart icon labeled '+ créditos'. Below the menu, there are three main promotional boxes: 'Banco de questões' with the text 'Como deseja efetuar sua busca?', 'Adicione mais créditos à sua conta, gratuitamente!' with a magnifying glass icon over the word 'Ganhe', and 'Gerar Simulado a partir de estatísticas' with a bar chart icon. Below these is a search filter bar with three radio buttons: 'Filtrar por assunto' (selected), 'Consultar em todos os assuntos', and 'Localizar por número de questão'. Underneath, there are two radio buttons for 'FUNDAMENTAL II e MÉDIO' (selected) and 'ENSINO SUPERIOR'. The main content area is titled 'Assunto:' and contains a list of subjects with expandable icons: Biologia, Espanhol, Filosofia, Física, Geografia, História, Inglês, Matemática, Português, Química, and Sociologia. To the right of this list, it says 'Questões: 0'. At the bottom right of the subject list, there is a button labeled 'Visualizar questões >'. The source 'Fonte: SUPERPRO' is noted at the bottom of the page.

Fonte: SUPERPRO

Dentro da disciplina de matemática, temos as questões separadas por tópicos:

**Figura 31** - Tópicos de matemática disponíveis para seleção no Superpro



Fonte: SUPERPRO

As questões são de vestibulares de todo o país, o professor seleciona o tópico escolhido e pode filtrar as questões por região (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste ou Sul), universidade, ano, tipo de questão (analítica, múltipla escolha, somatório, verdadeira ou falsa), nível de dificuldade e nível de ensino (Ensino Fundamental ou Médio).

**Figura 32 - Filtros do Superpro**

**Filtros avançados:**

DICAS ÚTEIS PARA SELECIONAR OU DESFAZER SELEÇÃO DE ITENS EM UMA LISTA (Região, UF, Fonte etc):

- ▶ para selecionar dois ou mais itens pressione a tecla Ctrl ao clicar no item a ser selecionado.
- ▶ para desfazer a seleção de um item pressione a tecla Ctrl ao clicar no item a ser excluído.

A imagem mostra seis painéis de filtros avançados do Superpro, cada um com uma lista de opções e um botão 'Limpar' na base:

- Região:** Centro-oeste, Nordeste, Norte, Sudeste, Sul.
- UF:** AC, AL, AM, AP, BA, CE, DF, ES.
- Fonte:** Acafe, Cefet MG, Cesgranrio, Ebmsp, Eear, Eewb, Efomm, Enem.
- Ano:** 2018, 2017, 2016, 2015, 2014, 2013, 2012, 2011.
- Tipo/Questão:** Analítica, Múltipla escolha, Relac. de coluna, Somatória, Verdadeiro/Falso.
- Dificuldade:** Baixa, Elevada, Média, Não definida.
- Ensino:** Fundamental, Médio.

Fonte: SUPERPRO

Selecionadas as questões, o professor pode gerar um arquivo no *Word* ou enviar a lista de exercícios para os alunos através de *e-mail*. Essa lista pode ser configurada com o prazo que estará disponível para resolver, se o aluno poderá ou não ter o gabarito após a resolução e se essa lista é uma avaliação ou não. O professor recebe um relatório contendo o rendimento da turma, o rendimento do aluno e o tempo de resolução da lista.

**Figura 33 - Relatório de rendimento da turma no Superpro**



Fonte: SUPERPRO

**Figura 34 – Registro de consulta do Superpro**

Registros da consulta atual

ID/Alu	Nome	Acerto	Concluído	Escola	Turma	Dt Conclusão
31556	Victor	100%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	22/04/2018
31594	Rafaela	33.3%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	23/04/2018
31555	Mayara	0%	<input type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	
31555	Maria Elisa	100%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	22/04/2018
31592	Lucidia	0%	<input type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	
31564	Leonardo	0%	<input type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	
31564	Laura	100%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	22/04/2018
31539	Karen	66.7%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	22/04/2018
31541	Julia	88.9%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	23/04/2018
31590	João Pedro	88.9%	<input checked="" type="checkbox"/>	ESCOLA FOURC	260502_3M2018	22/04/2018

Página 1 de 2

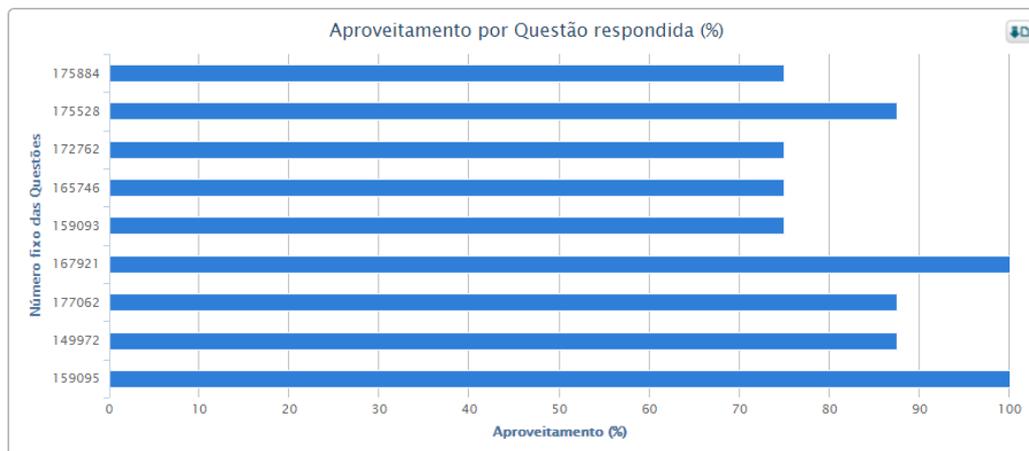
Exportar Alunos | Enviar Mensagem

Fonte: SUPERPRO

**Figura 35 - Relatório de aproveitamento do Superpro**

Resultados das questões dinâmicas da lista atual

Visualizar Questões pelo ID do banco SuperPro®
  Visualizar Questões na ordem em que aparecem na lista



Fonte: SUPERPRO

**Figura 36 - Relatório de Índices de acertos do Superpro**

Revisão 3º\_1ºtrim  
COD.: 1134814801

Total de alunos da lista: 12  
Alunos que responderam: 8  
Alunos que abriram, mas não responderam: 2

Alunos
  Resultados
  Comparar resultados
  Índice por alternativa

**LEGENDA**

Nº - Número da questão na lista  
ID/Questão - Identificador da questão no SuperPro®  
■ - Resposta certa  
■ - Resposta errada com a porcentagem igual ou maior que a correta

Nº	ID/questão	A	B	C	D	E
1	<a href="#">149972</a>	12.5%	87.5%	0%	0%	0%
2	<a href="#">159093</a>	12.5%	0%	75%	0%	12.5%
3	<a href="#">159095</a>	0%	0%	100%	0%	0%
4	<a href="#">165746</a>	12.5%	75%	0%	12.5%	0%
5	<a href="#">167921</a>	100%	0%	0%	0%	0%
6	<a href="#">172762</a>	12.5%	12.5%	0%	75%	0%
7	<a href="#">175528</a>	0%	0%	12.5%	87.5%	0%
8	<a href="#">175884</a>	75%	0%	0%	0%	25%
9	<a href="#">177062</a>	0%	0%	12.5%	0%	87.5%

Fonte: SUPERPRO

A facilidade desta ferramenta está em ter um método de avaliação, com resultados rápidos, onde o professor pode usar estratégias individuais, tendo uma otimização do seu tempo e uma melhora no aprendizado do aluno.

Além dessas ferramentas usadas no ensino, destacamos a importância do aprendizado de alguns conceitos no PROFMAT.

## 4 CONEXÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM AS DISCIPLINAS DO PROFMAT

As disciplinas cursadas no PROFMAT foram de grande contribuição para a minha prática pedagógica no trabalho realizado nesta pesquisa, oferecendo bases conceituais para ressignificar a prática. Permitiu aprofundar meus conhecimentos para propor uma situação didática em que me coloquei como mediadora do processo de ensino-aprendizagem na abordagem do **Ensino Híbrido**, bem como me ajudou a perceber as diferentes possibilidades de uso dos recursos tecnológicos sob uma nova perspectiva.

De acordo com o regimento do PROFMAT:

Art. 2º O PROFMAT tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática.

Neste capítulo, apresentarei algumas questões como exemplo, que com o conhecimento aprofundado adquirido nas disciplinas, pode contribuir na formação dos alunos e, principalmente, na resolução de problemas de Olimpíadas de Matemática.

Como o objetivo deste trabalho não são demonstrações matemáticas, em cada questão está indicada a teoria de cada conteúdo e as suas referências teóricas.

### *Divisibilidade*

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 3 – item 3.1 Divisibilidade, p. 46

Canguru de Matemática 2018 – Nível S

Qual dos números a seguir não é um divisor do número  $18^{2017} + 18^{2018}$ ?

- (A) 8
- (B) 18
- (C) 28
- (D) 38
- (E) 48

### **Resolução:**

$$18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017} (1 + 18) = 19 \cdot 18^{2017} = 19 \cdot 2^{2017} \cdot 9^{2017}.$$

Como  $8 = 2^3$ ;  $18 = 2 \cdot 3^2$ ;  $28 = 2^2 \cdot 7$ ;  $38 = 2 \cdot 19$  e  $48 = 2^4 \cdot 3$ , concluímos que o único número que não é fator de  $18^{2017} + 18^{2018}$  é 7, logo 28 não é divisor de  $18^{2017} + 18^{2018}$ .

### *O Princípio da Casa dos Pombos*

- Livro: **Iniciação à Matemática**, de Kresley Irraciel Martins Oliveira/  
Adán José Corcho Fernández  
Capítulo 4 – O Princípio da Casa dos Pombos, p. 143

### Canguru de Matemática 2017 – Nível J

A professora levou para a sala uma caixa contendo 203 fichas vermelhas, 117 fichas brancas e 28 azuis. Ela pediu então para os alunos irem até a caixa e, sem olhar, tirar uma ficha. Quantos estudantes terão que tirar fichas até seja possível afirmar que pelo menos três fichas de mesma cor já foram retiradas?

- (A) 3
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 28
- (E) 203

#### **Resolução:**

*Para este problema, escolhemos:*

*Casas: 1 caixa vermelha, 1 caixa branca e 1 caixa azul (3 caixas)*

*Pombos: fichas (7)*

*Relação: associamos a cada ficha, a caixa da mesma cor*

*Pelo Princípio das Casas de Pombos, como temos 3 casas e 7 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 3 pombos, ou seja, uma das caixas conterá, pelo menos, 3 fichas. Dessa forma, pelos menos 3 fichas retiradas têm a mesma cor, portanto a solução é 7 estudantes.*

#### *Números Primos e Divisibilidade*

- Livro: **Iniciação à Matemática**, de Kresley Irraciel Martins Oliveira/  
Adán José Corcho Fernández

Capítulo 3 – item 3.4 Números Primos e Compostos, p. 123

Canguru de Matemática 2016 – Nível S

Ana escolheu um número inteiro positivo  $n$  e escreveu a soma de todos os números inteiros de 1 a  $n$ . Um número primo  $p$  divide essa soma, mas não divide nenhum dos números que foram somados. Qual dos números a seguir poderia ser o valor de  $n + p$ ?

(A) 217

(B) 221

(C) 229

(D) 245

(E) 269

**Resolução:**

A soma dos números de 1 a  $n$  é  $s = \frac{n(n+1)}{2}$ . Se  $p$  é um primo que não divide nenhum dos números de 1 a  $n$  mas divide  $s$ , então  $p$  necessariamente divide  $n + 1$ . Como  $p$  é maior que  $n$ , então  $p = n + 1$ . Assim,  $n = p - 1$  é par e  $n + p = 2n + 1$ . Das alternativas, apenas em  $217 = 2 \cdot 108 + 1$  obtemos  $n = 108$  par e  $n + 1 = 109$  primo.

*Divisibilidade e Bases Numéricas*

- Livro: **Iniciação à Matemática**, de Kresley Irraciel Martins Oliveira/Adán José Corcho Fernández

Capítulo 3 – item 3.2, Bases Numéricas p. 99

Repetindo um par de algarismos  $ab$  três vezes, escrevemos um número de seis algarismos. Este número é divisível por qual dos números a seguir?

- (A) 2
- (B) 5
- (C) 9
- (D) 11
- (E) 13

**Resolução:**

O número  $n$  formado é  $ababab = ab \cdot 10\,000 + ab \cdot 100 + ab = ab \cdot 10\,101$ .  
 O fator  $10\,101$  decomposto em fatores primos é  $10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ .  
 Portanto,  $n$  é divisível por 13.

*Teorema de Menelaus*

- Livro: **Geometria** (coleção PROFMAT), de Antonio Muniz Caminha Neto  
 Capítulo 4 - item 4.4 Colinearidade e concorrência (Teorema 4.22),  
 p. 175

HMMT 2016 – *Theme Round*

Questão proposta por: Allen Liu

The three points  $A, B, C$  form a triangle,  $AB = 4$ ,  $BC = 5$  e  $AC = 6$ . Let the angle bisector of  $\angle A$  intersect side  $BC$  at  $D$ . Let the foot of the perpendicular from  $B$  to the angle bisector of  $\angle A$  be  $E$ . Let the line through  $E$  parallel to  $AC$  meet  $BC$  at  $F$ . Compute  $DF$ .

**Resolução:**

*Sendo  $AD$  a bissetriz do ângulo  $A$ , pelo teorema da bissetriz interna*

*$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ , então  $BD = 2$  e  $CD = 3$ , prolongando-se  $BE$  até  $AC$ , obtemos o*

ponto  $X$ , como  $AE$  é a mediatriz de  $BX$ ,  $AX = 4$ . Como  $B$ ,  $E$  e  $X$  são colineares, aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo  $ADC$ , obtemos:  $\frac{AE}{ED} \cdot \frac{DB}{BC} \cdot \frac{CX}{XA} = 1$ . Isso implica que  $\frac{AE}{ED} = 5$  e como  $EF \parallel AC$ ,

$$\frac{DF}{DC} = \frac{DE}{DA}, \text{ então } DF = \frac{DC}{6} = \frac{1}{2}.$$

### Último Teorema de Fermat

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 7 - item 7.4 O Renascimento da Aritmética, p. 161

HMMT 2015 – *Guts Round*

Questão proposta por: Rikhav Shah

Find all integers  $n$ , not necessarily positive, for which there exist positive integers  $a, b, c$  satisfying  $a^n + b^n = c^n$ .

### Resolução:

Pelo Último Teorema de Fermat, sabemos que  $n < 3$ . Supondo  $n \leq -3$ . Então:

$a^n + b^n = c^n \Rightarrow (bc)^{-n} + (ac)^{-n} = (ab)^{-n}$ , mas desde que  $-n \geq 3$ , isto também é impossível pelo Último Teorema de Fermat. Ou seja,  $|n| < 3$ .

Além disso,  $n \neq 0$ , como  $a^0 + b^0 = c^0 \Rightarrow 1 + 1 = 1$ , o que é falso. Agora só precisamos encontrar construções para  $n = -2, -1, 1, 2$ .

Para  $n = 1$ ,  $(a, b, c) = (1, 2, 3)$

Para  $n = 2$ ,  $(a, b, c) = (3, 4, 5)$

Para  $n = -1$ ,  $(a, b, c) = (6, 3, 2)$

Para  $n = -2$ ,  $(a, b, c) = (20, 15, 12)$

Portanto, os valores possíveis de  $n$  são  $\pm 2$  e  $\pm 1$ .

### Desigualdade de Cauchy-Schwarz

- Livro: **Iniciação à Matemática**, de Kresley Irraciel Martins Oliveira/  
Adán José Corcho Fernández  
Capítulo 7 – item 7.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz, p. 247

Questão proposta por: Alexander Katz

HMMT 2015 – *Guts Round*

Find the largest real number  $k$  such that there exists a sequence of positive reals  $\{a_i\}$  for which  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges but  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^k}$  does not.

### Resolução:

Para  $k > \frac{1}{2}$ , a segunda sequência deve convergir. A demonstração é pela

$$\text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz, } \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n^k} \right)^2 \leq \left( \sum_{n \geq 1} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} \right)$$

Para  $k \leq \frac{1}{2}$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}}$  converge, o lado direito converge. Portanto, o lado esquerdo deve convergir também.

Para  $k > \frac{1}{2}$  a construção funciona:  $a_n = \frac{1}{\log^2 n}$ , podendo ser facilmente

verificado que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge, enquanto  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \log n}$  não converge.

### Máximo Divisor Comum

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 5 - item 5.1 Máximo Divisor Comum, p. 86

HMMT 2014 – *General Round*

Compute the greatest common divisor of  $4^8 - 1$  and  $8^{12} - 1$ .

### Resolução:

Seja  $d$ , o maior divisor comum de  $(a, b)$  para qualquer  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Podemos escrever  $d = ax - by$ , onde  $x, y \in \mathbb{Z}^+$ , e

$$2^a - 1 \mid 2^{ax} - 1$$

$$2^b - 1 \mid 2^{by} - 1$$

Multiplicando o segundo membro da segunda sentença por  $2^d$ , obtemos:

$$2^b - 1 \mid 2^{ax} - 2^d$$

$$\text{Então, } \text{mdc}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^d - 1 = 2^{\text{mdc}(a,b)} - 1$$

Considerando  $a = 16$  e  $b = 36$ , obtemos:

$$\text{mdc}(2^{16} - 1, 2^{36} - 1) = 2^{\text{mdc}(16,36)} - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

### Teorema Chinês do Resto

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 11 – item 11.2 Teorema Chinês do Resto, p. 253

HMMT 2014 – *General Round*

Suppose that  $m$  and  $n$  are integers with  $1 \leq m \leq 49$  and  $n \geq 0$  such that  $m$  divides  $n^{n+1} + 1$ . What is the number of possible values of  $m$ ?

### Resolução:

Se  $n$  é par,  $n + 1 \mid n^{n+1} + 1$ , então podemos cobrir todos os  $m$  ímpares.

Se  $m$  é par e  $m \mid n^{n+1} + 1$ , então  $n$  deve ser ímpar, logo  $n + 1$  é par, e  $m$  não pode ser divisível por 4 ou qualquer primo congruente a 3 (mod 4). Por outro lado, se  $m / 2$  tem todos os fatores 1 (mod 4), então pelo Teorema Chinês do Resto existe  $N \equiv 1 \pmod{4}$  tal que

$$m \mid N^2 + 1 \mid N^{N+1} + 1 \text{ ((} N + 1 \text{) / 2 é ímpar)}.$$

Assim, os únicos números ruins tomam a forma  $2k$ , onde  $1 \leq k \leq 24$  é divisível por pelo menos um dos números 2, 3, 7, 11, 19, 23, 31, . . . Contamos  $k = 2, 4, \dots, 24$  (existem 12 números aqui),  $k = 3, 9, 15, 21$  (outros quatro),  $k = 7, 11, 19, 23$  (outros quatro), dando uma resposta final de  $49 - 12 - 4 - 4 = 29$ .

### Classes Residuais e Teorema Chinês do Resto

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 11 – item 11.3 Classes Residuais, p. 263

HMMT 2017 – *General Round*

Questão proposta por: Dhruv Rohatgi

Find the number of integers  $n$  with  $1 \leq n \leq 2017$  so that  $(n - 2)(n - 0)(n - 1)(n - 7)$  is an integer multiple of 1001.

### Resolução:

Note que  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ , então o produto indicado deve ser um múltiplo de 7, assim como um múltiplo de 11, bem como um múltiplo de 13. Existem 4 possíveis classes residuais de  $n$  módulo 11 para os quais o produto é um múltiplo de 11; similarmente, existem 4 possíveis classes residuais do módulo 13 para os quais o produto é um múltiplo de 13. No

entanto, existem apenas 3 possíveis resíduos de  $n$  módulo 7 para os quais o produto é um múltiplo de 7.

Considere cada um desses  $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$  triplos possíveis de restos. Pelo Teorema Chinês do Resto existe exatamente um valor de  $n$  com  $1 \leq n \leq 1001$  atingindo esses remanescentes e exatamente um valor de  $n$  com  $16 \leq n \leq 1016$  atingindo esses restos. Da mesma forma, existe exatamente um valor de  $n$  com  $1017 \leq n \leq 2017$  com esses mesmos restos. Portanto, existem 96 valores de  $n$  com  $16 \leq n \leq 2017$ , como

$(n - 2)(n - 0)(n - 1)(n - 7)$  é um múltiplo de 1001.

Resta verificar:  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ . Como o produto deve ser um múltiplo de 7, podemos restringir o conjunto para  $\{1, 2, 7, 8, 9, 14\}$ . Os primeiros 3 valores funcionam trivialmente, já que o produto é 0. Pode ser facilmente verificado que nenhum dos valores remanescentes de  $n$  produz um produto que é múltiplo de 11. Assim, a resposta final é  $96 + 3 = 99$ .

### Sistemas de Numeração

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 4 - item 4.1 Sistemas de Numeração, p. 66

HMMT 2013 – Theme Round

Express  $-2013$  in base  $-4$

### Resolução:

$-2013 \equiv 3 \pmod{4}$ , então o último dígito é 3; agora  $\frac{-2013-3}{-4} = 504 \equiv 0$ ,

então o próximo dígito (à esquerda) é 0; então  $\frac{504-0}{-4} = -126 \equiv 2$ ;

$\frac{-126-2}{-4} = 32 \equiv 0$ ;

$$\frac{32-0}{-4} = -8 \equiv 0; \quad \frac{-8-0}{-4} = 2.$$

Assim  $-2013_{10} = 200203_{-4}$ .

### Números Complexos

- Livro: **Polinômios e Equações Algébricas** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez/Maria Lúcia Torres Villela  
Capítulo 1 – item 1.7 Raízes da unidade, p. 43

HMMT 2017 – *General Round*

Given that  $a, b, c$  are integers with  $abc = 60$ , and that complex number  $\omega \neq 1$  satisfies  $\omega^3 = 1$ , find the minimum possible value of  $|a + b\omega + c\omega^2|$

Proposed by: Ashwin Sah

### Resolução:

Se  $\omega^3 = 1$ , e  $\omega \neq 1$ ,  $\omega$  é uma raiz da unidade. Para qualquer número complexo  $z$ ,  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Sendo  $z = a + b\omega + c\omega^2$ , encontramos  $\bar{z} = a + c\omega + b\omega^2$ , e

$$|z|^2 = a^2 + ab\omega + ac\omega^2 + ab\omega^2 + b^2 + bc\omega + ac\omega + bc\omega^2 + c^2 =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)(\omega) + (ab + bc + ca)(\omega^2) =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) =$$

$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$ , onde usamos que  $\omega^3 = 1$  e que  $\omega + \omega^2 = -1$ . Esta quantidade é mínima quando  $a, b$  e  $c$  são tão próximos uns dos outros quanto é possível, considerando  $a = 3, b = 4, c = 5$  a melhor escolha, dando  $|z|^2 = 3$ . (Um valor menor de  $|z|$  requer que dois de  $a, b, c$

sejam iguais e o terceiro seja diferente deles por no máximo 2, o que é impossível.). Então o valor mínimo de  $|z|$  é  $\sqrt{3}$ .

#### *Teorema de Ptolomeu*

- Livro: **Geometria** (coleção PROFMAT), de Antonio Caminha Muniz Neto  
Capítulo 4 – item 4.3 Algumas aplicações – Teorema de Ptolomeu, p. 167

HMMT 2017 – *Guts Round*

Points  $A, B, C, D$  lie on a circle in that order such that  $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{CD}$ . If  $AC = 3$  and  $BD = BC = 4$ , find  $AD$ .

#### **Resolução:**

*Pelo Teorema de Ptolomeu, temos  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD = 3 \cdot 4 = 12$ .*

*Essa condição implica  $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ , temos  $DA = \frac{6}{BC} = \frac{3}{2}$ .*

#### *Distância de um ponto a um plano*

- Livro: **Geometria Analítica** (coleção PROFMAT), de Jorge Delgado /Katia Frensel/ Lhaylla Crissaff  
Capítulo 16 – item 16.5 Distância de um ponto a um plano, p. 339

HMMT 2015 – *Guts Round*

Questão proposta por: Sam Korsky

Find the shortest distance between the lines  $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$  and

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

**Resolução:**

*Primeiro, encontramos a direção de uma reta perpendicular a ambas as retas. Tomando o produto vetorial  $(2, 3, 1) \times (-1, 1, 2) = (5, -5, 5)$ , encontramos que o plano  $x - y + z + 3 = 0$  contém a primeira reta e é paralelo ao segundo. Agora, tomamos um ponto na segunda reta, por exemplo, o ponto  $(3, 0, -1)$  e encontramos a distância entre este ponto e*

*o plano. Isto é,  $\frac{|3-0+(-1)+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ .*

*Aritmética dos restos*

- Livro: **Aritmética** (coleção PROFMAT), de Abramo Hefez  
Capítulo 9 – item 9.1 Aritmética dos Restos p. 192

OBMEP 2017

Joana retira bolas, sem reposição, de uma caixa com 2017 bolas numeradas de 1 a 2017.

- Qual é a quantidade mínima de bolas que ela deve retirar para garantir que em pelo menos uma delas haja um número múltiplo de 3?
- Qual é a quantidade mínima de bolas que ela deve retirar para garantir que existam duas bolas com a soma de seus números igual a um múltiplo de 3?
- Qual é a quantidade mínima de bolas que ela deve retirar para garantir que existam duas bolas de modo que a soma de seus

números seja um múltiplo de 3 e sua diferença seja um múltiplo de 2?

**Solução:**

*Temos três conjuntos disjuntos de números inteiros positivos:*

$$A_0 = \{x / 1 \leq x \leq 2017, x \equiv 0 \pmod{3}\}$$

$$A_1 = \{x / 1 \leq x \leq 2017, x \equiv 1 \pmod{3}\}$$

$$A_2 = \{x / 1 \leq x \leq 2017, x \equiv 2 \pmod{3}\}$$

*O número de elementos de  $A_1$  é 673, já os conjuntos  $A_0$  e  $A_2$  possuem 672 elementos. Começamos com o conjunto com maior número de elementos,  $A_1$ . Escolhemos todos os ímpares contidos em  $A_1$  e formamos um conjunto  $B_1$  com 337 inteiros (com certeza a soma de quaisquer dois deles não é múltiplo de 3).*

*Escolhemos, a seguir, todos os pares contidos em  $A_2$  e formamos um conjunto  $B_2$  com 336 inteiros (com certeza a soma de quaisquer dois deles não é múltiplo de 3).*

*A soma de um elemento de  $B_1$  com um elemento de  $B_2$  é múltipla de 3, porém, sua diferença não é par. Escolhemos, agora, dois elementos de  $A_0$ , um par e um ímpar e denotamos o conjunto formado por esses dois elementos por  $B_0$ . Temos que a união  $B_0 \cup B_1 \cup B_2$  é um conjunto em que quaisquer dois elementos  $x$  e  $y$  são tais que  $x + y$  ou não é múltiplo de 3 ou  $x - y$  não é par e, para qualquer outro elemento  $a$  do conjunto diferença  $(A_0 \cup A_1 \cup A_2) - (B_0 \cup B_1 \cup B_2)$ , existe um elemento  $b$  de  $B_0 \cup B_1 \cup B_2$  tal que*

$$a + b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{2}$$

*Portanto, a quantidade mínima de bolas que Joana deve retirar é  $337 + 336 + 2 + 1 = 676$ .*

## 5 CONCLUSÃO

Apresentamos uma proposta de estimular a aprendizagem de Matemática através das competições matemáticas. Mostramos algumas intervenções que foram feitas usando os dados dessas provas. Para a elaboração deste trabalho, descrevemos as principais Olimpíadas de Matemática, as ferramentas tecnológicas que foram usadas para apoiar a metodologia do Ensino Híbrido e qual foi o nosso principal objetivo, que é o de formar alunos com competências e habilidades que nos dias de hoje são fundamentais para o trabalho.

A nossa proposta foi de proporcionar aos alunos os recursos para se tornarem uma nova geração de pensadores criativos e críticos, uma geração que irá impactar seu mundo e mudar seu futuro.

A criação de um Clube de Matemática foi um incentivo que tivemos para poder desenvolver nossa proposta, unir o aprendizado em Matemática com o desenvolvimento de habilidades.

Concluimos que tivemos uma melhoria na aprendizagem, pois trabalhamos com a individualização e ainda pudemos acompanhar todo o processo de cada aluno, estimulando e fazendo as intervenções necessárias.

## REFERÊNCIAS

J.A. AND KATHRYN ALBERTSON FAMILY FOUNDATION. **Learning gets personal**: how Idaho students and teachers are embracing personalized learning through Khan Academy, 2015. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/KA-share/impact/learning-gets-personal.pdf>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

ANTUNES, Anderson. **Com apoio de André Esteves, brasileiros participam de Olimpíada de Matemática nos EUA**. 2018. Disponível em: <<https://glamurama.uol.com.br/com-apoio-de-andre-esteves-estudantes-brasileiros-participam-de-olimpiada-de-matematica-nos-eua/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.). **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BIAGIOTTI, Luiz Cláudio Medeiros. Conhecendo e aplicando rubricas em avaliações. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA, 12., 2005, Florianópolis. **Trabalhos Científicos apresentados**. Florianópolis: Abed, 2005. p. 1 - 9. Disponível em: <<http://www.abed.org.br/congresso2005/por/pdf/007tcf5.pdf>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

CLAYTON CHRISTENSEN INSTITUTE. Blended Learning Universe. **Modelos de ensino híbrido**. 2018. Disponível em: <<https://www.blendedlearning.org/modelos/?lang=pt-br>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

BORDONI, Thereza. Saber e fazer: competências e habilidades. In: CONGRESSO DE EDUCAÇÃO DE SALTO, 8., 2012. Salto. **Anais eletrônicos...** Salto: Prefeitura Municipal da Estância Turística de Salto, 2012. Apostila de minicurso. Disponível em: <[http://www.saberes.com.br/congressoSalto/mini\\_curso/MC5-Apostila\\_Monica.doc](http://www.saberes.com.br/congressoSalto/mini_curso/MC5-Apostila_Monica.doc)>. Acesso em: 20 jul. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category\\_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79611-anexo-texto-bncc-aprovado-em-15-12-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 20 jul. 2018.

CANGURU DE MATEMÁTICA BRASIL. **Estatísticas**. 2018. Disponível em: <<https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Provas anteriores 2016**. Disponível em: <<https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/index.php/provas-antiores>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Resultados Gerais 2018**. Disponível em: <<https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

CERQUEIRA, Dermeval Santos. **Estratégias didáticas para o ensino da Matemática**. 2013. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/2197/estrategias-didaticas-para-o-ensino-da-matematica>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

VARALTA, Najla; CRUZ, Luiz Francisco da; TOLEDO, Maíra Lopes. Encontros com a matemática. In: CONGRESSO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA DA UNESP, 6., 2011. Águas de Lindóia. **Anais eletrônicos...** Águas de Lindóia: Proex/Unesp, 2011. p. 474. Disponível em: <<https://alsafi.ead.unesp.br/bitstream/handle/11449/146097/ISSN21769761-2011-06-474.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

ESCOLA DE INVENTOR. **16 habilidades do século XXI que os alunos precisam desenvolver**. 2017. Traduzido e adaptado de World Economic Forum. Disponível em: <[https://escoladeinventor.com.br/wp-content/uploads/2018/03/habilidades\\_do\\_seculo\\_21.png](https://escoladeinventor.com.br/wp-content/uploads/2018/03/habilidades_do_seculo_21.png)>. Acesso em: 16 jul. 2018.

FARDO, Marcelo Luis. A gamificação aplicada em ambientes de aprendizagem. **Renote: Novas Tecnologias na Educação**. Porto Alegre, v. 11, n. 1, p. 1-9, 2013. Disponível em: <<http://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/41629/26409>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

FRANÇA, Luísa. **Competências e habilidades: o que são e como aplicá-las no ensino?** 2018. Disponível em: <<https://www.somospar.com.br/competencias-e-habilidades/>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

EXPLICA MAIS. **Complexos: Potenciação na Forma Trigonométrica**. Disponível em: <[http://app.explicamais.com/course\\_view/91/classes/657?team\\_id=531](http://app.explicamais.com/course_view/91/classes/657?team_id=531)>. Acesso em: 16 jul. 2018.

GEEKIE DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE S.A. **3 casos de escolas que colocaram o ensino híbrido em prática**. 2015. Disponível em: <<http://info.geekie.com.br/3-casos-de-escolas-que-colocaram-o-ensino-hibrido-em-pratica/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

GLOBO. **Conversa com Bial**: programa de segunda-feira, 13/11/2017, na íntegra. [Rio de Janeiro], 2017. Globo play. Disponível em: <<https://globoplay.globo.com/v/6286766/>>. Acesso em: 23 jul. 2018.

GOMES, Patrícia. **Conheça as competências para o século 21**. 2012. Disponível em: <<http://porvir.org/conheca-competencias-para-seculo-21/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

HARVARD-MIT MATH TOURNAMENT. **The Harvard-MIT mathematics tournament**. Disponível em: <<https://www.hmmt.co/archive/photos/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **HMMT November 2013: Theme Round**. Disponível em: <<https://www.hmmt.co/static/archive/november/problems/2013/theme.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **HMMT November 2014: General Test**. Disponível em: <<https://www.hmmt.co/static/archive/november/problems/2014/gen.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **HMMT November 2015: GUTS ROUND**. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/hmmt-archive/november/2015/problems/guts.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **HMMT November 2016: Theme Round**. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/hmmt-archive/november/2016/HMMTNovember2016ThemeRoundTest.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **HMMT November 2017: General Round**. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/hmmt-archive/november/2017/HMMTNovember2017GeneralRoundTest.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **HMMT November 2017: GUTS ROUND**. Disponível em: <<https://s3.amazonaws.com/hmmt-archive/november/2017/HMMTNovember2017GutsRoundTest.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended**: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

IXL LEARNING. **Prática que parece diversão**: aprendizado dinâmico e adaptado. 2018a. Disponível em: <<https://www.ixl.com>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **IXL Math**. 2018b. Disponível em: <<https://br.ixl.com/math/>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Álgebra 1**. 2018c. Disponível em: <<https://www.ixl.com/math/algebra-1>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Interpret the graph of a function: word problems**. 2018d. Disponível em: <<https://www.ixl.com/math/algebra-1/interpret-the-graph-of-a-function-word-problems>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Informações imediatas sobre o desempenho dos alunos**. 2018e. Disponível em: <<https://www.ixl.com/analytics/students-quickview>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Informações detalhadas sobre o desempenho dos alunos**. 2018f. Disponível em: <<https://www.ixl.com/analytics/student-details#student=58586491>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

KHAN ACADEMY. **Introdução ao teorema de Pitágoras**. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/modal/v/the-pythagorean-theorem>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Impacto**. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/about/impact>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

MENDES, Débora Lucia Lima Leite. **Estrutura e funcionamento do ensino e a gestão educacional**: avaliação de disciplinas em cursos de pedagogia e licenciaturas na Universidade Federal do Ceará. 2011. 203 f. Tese (Doutorado em Educação) - Curso de Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011. Disponível em: <[http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/15714/1/2011\\_tese\\_dllmendes.pdf](http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/15714/1/2011_tese_dllmendes.pdf)>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MORETTO, Vasco. **Escola pública**: protagonista de uma educação de qualidade. Disponível em: <<http://www.pmfi.pr.gov.br/Portal/VisualizaObj.aspx?IDObj=11257>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

NWABASILI, Mariana Queen. **Menos competitivo que olimpíadas, exame Canguru ganha espaço nas escolas brasileiras.** 2015. Disponível em: <<https://noticias.r7.com/educacao/menos-competitivo-que-olimpiadas-exame-canguru-ganha-espaco-nas-escolas-brasileiras-22032015>>. Acesso em: 12 jul. 2018.

OBMEP. **Prova Nível 3 Ensino Médio:** 2ª fase. 2017. Disponível em: <[http://www.obmep.org.br/provas\\_static/pf2n3-2017.pdf](http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n3-2017.pdf)>. Acesso em: 17 jul. 2018.

SUPERPRO. **Super Professor:** avaliações no clique do mouse. Disponível em: <[https://www.sprweb.com.br/mod\\_app/index.php](https://www.sprweb.com.br/mod_app/index.php)>. Acesso em: 16 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. **Relatórios.** Disponível em: <<http://dev.sprweb.com.br/professor/relatorios>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

PROFMAT. **Regimento.** 2016. Disponível em: <<http://www.profmt-sbm.org.br/funcionamento/regimento/>>. Acesso em: 17 jul. 2018.

STEPHEN M. ROSS SCHOOL OF BUSINESS AT THE UNIVERSITY OF MICHIGAN. **Blended learning.** 2018. Disponível em: <<https://michiganross.umich.edu/programs/executive-education/why-ross/blended-learning>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

WORLD ECONOMIC FORUM. **New vision for education:** unlocking the potential of technology. 2015. Disponível em: <[http://www3.weforum.org/docs/WEFUSA\\_NewVisionforEducation\\_Report2015.pdf](http://www3.weforum.org/docs/WEFUSA_NewVisionforEducation_Report2015.pdf)>. Acesso em: 16 jul. 2018.

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

---

Eliene Cristine Izu Nakamura Lisi