



Universidade Federal
de São João del-Rei

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

Luiz Fernando Brunelli Ribas

CURVAS PARAMETRIZADAS EM COORDENADAS CARTESIANAS E POLARES:
UMA PROPOSTA NO ENSINO MÉDIO

São João del Rei
2018

Luiz Fernando Brunelli Ribas

**CURVAS PARAMETRIZADAS EM COORDENADAS CARTESIANAS E POLARES:
UMA PROPOSTA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação apresentada ao curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade Federal de São João del Rei como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar.

**São João del Rei
2018**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI – UFSJ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –
PROFMAT

Dissertação intitulada “*Curvas Parametrizadas em Coordenadas Cartesianas e Polares: uma proposta no ensino médio*”, de autoria do mestrando Luiz Fernando Brunelli Ribas, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar – UFSJ – Orientador

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Ávila - UFSJ

Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón - UNIFEI

São João del Rei, 10 de agosto de 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as minhas conquistas, sem Ele eu não teria chegado aqui. Obrigado Senhor por mais esta vitória!

A toda minha família, que sempre acreditou na minha capacidade, até mais que eu mesmo...

A meu orientador, professor Juan Carlos, por sua atenção, paciência e apoio durante a escrita desta dissertação. Além de seu orientando, também fui seu aluno... Obrigado por tudo que me ensinou durante o curso!

A todos os professores do Profmat da UFSJ com quem tive contato no curso. Obrigado por todos os ensinamentos!

Aos meus colegas de turma. Juntos, encontrávamos força para a caminhada, sempre nos ajudando. O convívio com vocês fez o curso mais prazeroso.

A Daniele, pela correção gramatical e formatação deste trabalho, sempre feitas com carinho e dedicação, me ajudou muito.

A Capes, pelo incentivo financeiro.

A todos os meus familiares, queridos alunos, amigos e colegas pelas orações e palavras de apoio!

A todos os amigos que torceram por mim nesse período.

Enfim, a todos que se dedicaram e ainda se dedicarão à leitura deste trabalho, muito obrigado!

Aos maiores presentes que Deus me deu, as razões da minha vida: meus filhos, Gabriel e Camila. Aos meus familiares: minha mãe, Eliane; meu irmão, Hélio, e minha filha de coração, Sarah. E, é claro, à minha esposa, Débora, que tanto me incentivou e por estar ao meu lado nos momentos mais difíceis.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo refletir sobre a possibilidade de inserção do ensino de curvas parametrizadas no 3º ano do ensino médio. Para isso, apresenta-se a teoria básica relacionada com curvas parametrizadas, passando pelo cálculo diferencial e integral das curvas planas em coordenadas cartesianas e polares. Também, serão discutidas algumas aplicações das curvas parametrizadas, como as parametrizações das cônicas em coordenadas cartesianas e polares, as Leis de Kepler e o Problema da Braquistócrona. Visando a inserção de curvas parametrizadas no ensino médio, elaborou-se uma aula com o tema “Parametrização das Cônicas” para uma turma de 15 alunos do 3º ano do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Barbacena e foram analisadas, junto aos alunos, questões envolvendo o ensino da matemática e a assimilação da aula proposta. Por outro lado, a mesma aula foi apresentada a cinco professores experientes que trabalham ou já trabalharam com o 3º ano do ensino médio e foram analisadas questões relacionadas com a parametrização de curvas e sobre a aula proposta. A partir da análise dos dados, verificou-se que os alunos têm interesse pelo assunto, identificaram sua importância e conheceram uma nova abordagem sobre cônicas. Quanto aos professores questionados, observou-se a viabilidade do ensino de parametrização de cônicas no ensino médio, sendo o grau de dificuldade compatível com o nível de conhecimento dos alunos, tornando a aplicabilidade da parametrização de cônicas no dia a dia um incentivo a mais para a aprendizagem.

Palavras-chaves: Curvas Parametrizadas; Aplicações de Parametrizações de Curvas; Parametrização das Cônicas no Ensino Médio; Pesquisa junto com Discentes e Professores.

ABSTRACT

This work aims to reflect on the possibility of insertion of parameterized curves teaching in the third year of high school. For this, we present basic theory related to parameterized curves, going through the differential and integral calculus of Planar curves in polar and Cartesian coordinates. Some applications of parameterized curves will also be discussed, such as the parameterizations of the conical structures in Cartesian and polar coordinates, Kepler's laws and the Problem of the Brachistochrone curve. Aiming the insertion of parameterized curves in high school, a lesson with the theme "Parametrization of Conics" was drawn up to a class of 15 students in the 3rd year of the Tiradentes Military Police School in Barbacena and were analyzed along with the students, questions involving the teaching of mathematics and the assimilation of the proposed class. On the other hand, the same class was presented to five experienced teachers who work or have worked with the 3rd year of high school and were analyzed issues related to parameterization of curves and on the proposed class. From the analysis of the data, it was found that students showed interest in the subject, identified its importance and met a new approach on Conic sections. Regarding to the teachers questioned, it was showed up the feasibility of teaching parametrization of conics in high school, being the degree of difficulty compatible with the level of knowledge of the students, making the day by day applicability of the parametrization of conics one more incentive for learning.

Keywords: Parametrized Curves; Applications of Curve Parameters; Parameterization of Conics in High School; Research along with Students and Teachers.

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1 - Partícula movendo-se ao longo de uma curva C.....	16
Figura 2 - Lugar geométrico descrito pelo ponto P da circunferência geradora.....	17
Figura 3 - Círculo de diâmetro OA.....	18
Figura 4 - Parâmetro θ no Círculo de diâmetro OA.....	19
Figura 5 - Esboço da curva “Cissóide de Diocles”	20
Figura 6 - Esboço da curva C.....	22
Figura 7 - Esboço da cicloide e suas tangentes	23
Figura 8 - Polígono com vértices P_0, P_1, \dots, P_n	24
Figura 9 - Comprimento de um arco de uma cicloide	27
Figura 10 - Coordenadas polares	28
Figura 11 - Caso em que r é negativo	28
Figura 12 - Pontos do exemplo 8 marcados no sistema de coordenadas polares	29
Figura 13 - Representação do ponto $(1, \frac{5\pi}{4})$, do exemplo 1-(a), no sistema de coordenadas polares	29
Figura 14 - Relação entre coordenadas polares e cartesianas	30
Figura 15 - Curvas de equação polar $r = a$, $a = \frac{1}{2}, 1, 2$ e 4	31
Figura 16 - Tabela de valores e gráfico de $r = 2 \cos(\theta)$	32
Figura 17 - Ilustração geométrica do círculo do exemplo 10.....	32
Figura 18 - Retas tangentes da cardioide $r = 1 + \sin(\theta)$	34
Figura 19 - Esboço do gráfico do exemplo 12	35
Figura 20 - Esboço da curva cardioide.....	36
Figura 21- As curvas. a) Elipse, b) Hipérbole e c) Parábola.....	38
Figura 22 - Elementos da elipse sobre as retas focal e não focal	40
Figura 23- Simetria de ε em relação ao centro	40
Figura 24 - Esboço de $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	41
Figura 25 - Esboço de $\varepsilon: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	42
Figura 26 - Esboço de $\varepsilon: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	43
Figura 27 - Esboço de $\varepsilon: \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$	44
Figura 28 - Hipérbole e seus elementos.....	45

Figura 29 - Gráfico de H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.	46
Figura 30 - Gráfico de H: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.	47
Figura 31 - Gráfico de H: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.	48
Figura 32 - Gráfico de H: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.	49
Figura 33 - Posição do vértice em relação a F e à L.	50
Figura 34 - Parábola P: $y^2 = 4px$.	50
Figura 35 - Parábola P: $y^2 = -4px$.	51
Figura 36 - Parábola P: $x^2 = 4py$.	51
Figura 37 - Parábola P: $x^2 = -4py$.	52
Figura 38 - P: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.	53
Figura 39 - P: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$.	54
Figura 40 - P: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.	54
Figura 41 - P: $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.	55
Figura 42 - Sistema OXY escolhido.	56
Figura 43 - Círculo C: $x^2 + y^2 = r^2$.	59
Figura 44 - Círculo C: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.	60
Figura 45 - Círculos C_a e C_b , $a > b > 0$.	61
Figura 46 - Construção da elipse ϵ .	61
Figura 47 - Gráficos de $\cos h(t)$ e $\sinh(t)$.	63
Figura 48 - Gráfico de $H = H_+ \cup H_-$.	64
Figura 49 - Parábola P: $(x - a)^2 = K(y - b)$.	66
Figura 50 - L não intersecta o eixo polar \overrightarrow{OA} .	67
Figura 51 - L intersecta o eixo polar \overrightarrow{OA} .	68
Figura 52 - Eixo polar paralelo à diretriz L.	69
Figura 53 - Sol no foco F.	72
Figura 54 - Jakob e Johann Bernoulli.	74
Figura 55 - Lei da refração de Snell.	74
Figura 56 - Velocidade de propagação da luz em camadas paralelas.	75
Figura 57 - Trajetória da partícula de P_0 a P_1 .	76
Figura 58 - Respostas à pergunta número 1.	78
Figura 59 - Respostas à pergunta à pergunta número 2.	79

Figura 60 – Resposta à pergunta número 3	79
Figura 61 - Respostas à pergunta número 4	80
Figura 62 - Respostas à pergunta número 5	80
Figura 63 - Respostas à pergunta número 6	81
Figura 64 - Respostas à pergunta número 7	81
Figura 65 - Respostas à pergunta: número 8	82
Figura 66 - Resposta à pergunta número 9.....	82
Figura 67 - Resposta à pergunta número 10.....	83
Figura 68 – Resposta à pergunta número 11	83
Figura 69 - Resposta à pergunta número 12.....	84
Figura 70 - Resposta à pergunta número 13.....	84
Figura 71 - Resposta à pergunta número 14.....	85
Figura 72 - Resposta à pergunta número 15.....	85
Figura 73 - Curva que descreve a trajetória de uma formiga	87
Figura 74 - Circunferência de centro na origem e raio r	88
Figura 75 - Triângulo retângulo formado por um ponto qualquer (x, y) e um ângulo θ	89
Figura 76 - Circunferência com os pontos A,B,C,D e E mostrando o sentido da trajetória da curva	90
Figura 77 - Circunferência com os pontos A,B,C,D e E, mostrando que muda o sentido da trajetória.....	91
Figura 78 - Elipse de centro na origem	91
Figura 79 - Elipse com os pontos A,B,C,D e E, mostrando o sentido anti-horário	93
Figura 80 - Elipse com os pontos A,B,C,D e E, mostrando que muda o sentido horário	93
Figura 81 - Trajetória elíptica de um planeta P em torno do sol	94
Figura 82 - Planeta (simbolizado por \oplus) no seu afélio e periélio	95
Figura 83 - Órbitas plotadas e a posição do Sol	98
Figura 84 - Esboço da curva do exercício 1	99
Figura 85 - Respostas da pergunta número 1	101
Figura 86 - Respostas da pergunta 2	101
Figura 87 - Respostas da pergunta 4.....	102

Figura 88 - Respostas para a pergunta 6	103
Figura 89 - Respostas para a pergunta 7	103
Figura 90 - Respostas para a pergunta 8	104
Figura 91 - Respostas para a pergunta 9	104
Figura 92 - Respostas da pergunta 10	105
Figura 93 - Respostas para a pergunta 12	105
Figura 94 - Respostas para a pergunta 13	106
Figura 95 - Respostas à pergunta número 1	108
Figura 96 - Respostas à pergunta número 2	108
Figura 97 - Respostas à pergunta número 3	109
Figura 98 - Respostas da primeira parte da pergunta 7.....	111
Figura 99 - Respostas da primeira parte da pergunta 10.....	113
Figura 100 - Respostas à pergunta número 11	113
Figura 101 - Resposta da primeira parte da pergunta 12	114
Quadro 1 – Esboço do gráfico das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$	89
Tabela 1 – Obtenção dos pontos A, B, C, D e E, a partir de valores escolhidos para θ	90
Tabela 2 – Obtenção dos pontos A, B, C, D e E, a partir de valores escolhidos para θ	92
Tabela 3 – Medidas de A, P e e dos planetas usando a relação (63)	90
Tabela 4 – Equações orbitais obtidas dos oito planetas do sistema solar	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	CURVAS PARAMETRIZADAS	16
2.1	Tangentes a curvas parametrizadas	20
2.2	Comprimento de arco de curvas paramétricas	24
2.3	Curvas planas em coordenadas polares	27
2.3.1	Coordenadas polares	27
2.3.2	Curvas polares	31
2.3.3	Tangentes a curvas polares	33
2.3.4	Comprimento de arco em coordenadas polares	35
3	APLICAÇÕES DE CURVAS PARAMETRIZADAS	38
3.1	Cônicas	38
3.1.1	Parametrização de cônicas	38
3.1.1.1	Forma canônica da elipse	39
3.1.1.2	Forma canônica da hipérbole	44
3.1.1.3	Formas canônicas da parábola	49
3.1.2	Definição geral de uma cônica	55
3.1.3	Equações paramétricas das cônicas	58
3.1.3.1	Parametrização do círculo	58
3.1.3.2	Parametrização da elipse	60
3.1.3.3	Parametrização da hipérbole	63
3.1.3.4	Parametrização da parábola	65
3.1.4	Equações polares das cônicas	67
3.2	Leis de Kepler	69
3.3	O problema da braquistócrona	73
4	CÔNICAS PARAMETRIZADAS NO ENSINO MÉDIO	78
4.1	Perguntas gerais	78
4.2	Aula proposta	86
4.2.1	Parametrização de uma circunferência	88

4.2.2	Parametrização da circunferência em coordenadas polares	89
4.2.3	Parametrização da elipse	91
4.2.4	Aplicações	93
4.2.5	Exercícios envolvendo equações paramétricas	98
4.3	As impressões dos alunos após a aula	100
5	A OPINIÃO DE PROFESSORES	107
5.1	O perfil profissional dos professores entrevistados	107
5.2	Perguntas, resultados e opiniões dos professores pesquisados	108
5.3	Opinião dos professores sobre a aula de parametrização de cônicas	115
6	CONCLUSÃO	118
	APÊNDICES	122

1 INTRODUÇÃO

Segundo o PCN- Ensino Médio:

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 1998, p. 40).

Cabe ao professor mostrar a matemática no cotidiano, suas aplicações nas mais diversas áreas, fazendo com que a aprendizagem tenha sentido para o aluno.

[...] Primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem da matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, dos quais não se duvida ou questiona, e nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios (D'AMBROSIO, 1989, p. 16).

Quando os alunos enxergam a matemática em sala de aula com sua utilização no cotidiano, o interesse na aprendizagem aumenta, porque eles veem a aplicabilidade da matemática no dia a dia e não apenas como expressões matemáticas que fazem sentido somente no mundo abstrato.

Uma importante aplicação na matemática é a parametrização de curvas, a qual é uma ferramenta que serve, por exemplo, para conhecer a localização de um corpo no plano ou no espaço em determinado instante e descrever a trajetória desse corpo.

Em um levantamento das dissertações realizadas no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), observam-se temas envolvendo curvas parametrizadas e outras sobre cônicas. Porém, apenas uma dissertação trata de curvas parametrizadas para o ensino médio com enfoque em cônicas, a dissertação “Curvas planas parametrizadas: um ensaio para o ensino médio”, de Raimundo José Pinto Cutrim.

Em relação ao estudo de Raimundo José Pinto Cutrim, este, além de desenvolver a teoria que trata o estudo de parametrizações de curvas, mostra a possibilidade de inclusão do tema dentro dos conteúdos matemáticos do ensino médio, em especial, o estudo das parametrizações das cônicas.

No ensino médio, por exemplo, pode-se aplicar a parametrização de curvas em física, ao tratar-se de cinemática, e em matemática, no conteúdo de cônicas no 3º ano. Entretanto, observa-se que nos livros didáticos de matemática mais utilizados nas escolas da região de Barbacena¹, Minas Gerais, não há nada relacionado à parametrização de curvas.

Ao discutir esse tema, este estudo propõe uma reflexão para professores e alunos do ensino médio, especialmente do 3º ano, sobre uma nova abordagem para as cônicas e como descrevê-las por meio de equações parametrizadas. Sendo possível mostrar, por exemplo, como localizar a posição de um corpo móvel em um determinado instante de tempo e descrever sua trajetória e não, simplesmente, esboçando uma curva de forma “mecânica” que muitas vezes não faz sentido para o aluno. Além disso, o tema em escopo se coloca como de grande valia na vida acadêmica futura dos alunos, principalmente para aqueles que continuarão os estudos no ensino superior, quando esses conhecimentos são retomados e generalizados em disciplinas como cálculo diferencial e integral e/ou geometria analítica.

Com relação aos conteúdos de matemática no ensino médio, uma importante utilização da parametrização de curvas é, sem dúvida, a parametrização de cônicas. O tema sobre cônicas deveria ser ensinado no 3º ano, porém sabe-se que em algumas escolas esse assunto não é tratado ou é tratado inadequadamente, muitas vezes por falta de tempo devido ao grande número de assuntos trabalhados no último ano do ensino médio, isso segundo alguns professores que lecionaram ou lecionam no 3º ano do ensino médio. Em pesquisa feita com alguns professores de ensino médio que já lecionaram cônicas, como pode ser observado no quinto capítulo desta dissertação, nenhum deles aborda o assunto de parametrizar as cônicas, e muitos sequer conhecem o que seria parametrizar uma cônica e sua utilidade prática.

Este trabalho propõe-se a estudar os conceitos matemáticos relacionados com a parametrização de curvas e suas aplicações, tendo como objetivo principal apresentar, didaticamente, a parametrização de curvas para o ensino médio. Para isso, está dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro capítulo a introdução. O segundo capítulo trata sobre os conceitos matemáticos relacionados com a parametrização de curvas em coordenadas cartesianas e polares. O capítulo três é dedicado às aplicações de parametrização de curvas como cônicas parametrizadas e as leis de Kepler. Também, aborda-se o problema da Braquistócrona, bem como seu contexto histórico e uma demonstração. O quarto capítulo

¹ Os livros didáticos são “Matemática: novo olhar”, de Joamir Souza; “Matemática: contexto e aplicações”, de Luiz Roberto Dante; “Matemática: ciência e aplicações”, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e David Degenszajn.

foca-se na proposta e análise de resultados de uma aula didática, expositiva, feita com alunos do 3º ano do ensino médio, do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais de Barbacena (PMMG). O capítulo cinco apresenta uma pesquisa realizada com alguns professores que lecionam ou já lecionaram o conteúdo de cônicas com o intuito de analisar a possibilidade de implementar o tema cônicas parametrizadas no ensino médio, bem como investigar as percepções dos professores com relação a esse conteúdo e compreender as dificuldades a ele relacionadas.

2 CURVAS PARAMETRIZADAS

Algumas curvas são mais bem manipuladas quando as variáveis (coordenadas) x e y forem dadas em termos de uma terceira variável t , chamada parâmetro, formando assim as equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Outras curvas têm sua descrição mais conveniente usando-se um novo sistema de coordenadas denominado “sistema de coordenadas polares”.

Imagine que uma partícula se mova ao longo de uma curva C , como mostrado na Figura 1. É impossível descrever C com uma função do tipo $y = f(x)$, porque C não passa no “teste da reta vertical”². Porém, as coordenadas x e y da partícula são funções do tempo. Portanto, é possível escrever: $(x, y) = (f(t), g(t))$.

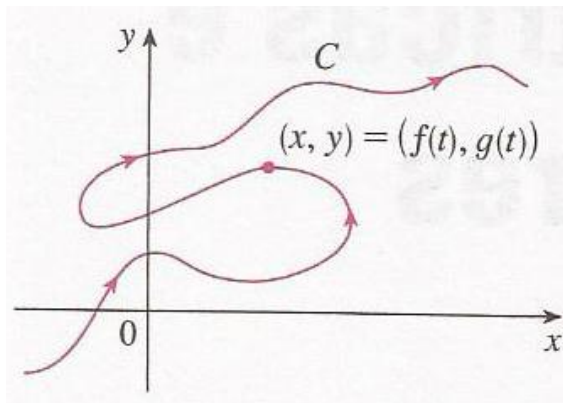


Figura 1 - Partícula movendo-se ao longo de uma curva C .
Fonte: STEWART, 2016, p. 576.

Dessa forma, percebe-se que esse par de equações é, muitas vezes, uma maneira conveniente de descrever uma curva, sugerindo a definição a seguir.

Definição 1 – Seja C uma curva plana. Dizemos que uma aplicação $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é uma parametrização de C se a sua imagem $\gamma(D)$ coincide com C , ou seja:

$$C = \gamma(D) = \{(x(t), y(t)) / t \in D\}$$

² A exigência de que para cada elemento do domínio de uma função existe uma única imagem pode ser usada para determinar visualmente quando um gráfico é um gráfico de uma função. Pontos no eixo horizontal representam os elementos do domínio e pontos no gráfico representam pares domínio/imagem. Então, se o gráfico representa uma função, então uma reta vertical através de qualquer ponto do eixo horizontal pode interceptar o gráfico somente uma vez. Essa checagem visual é conhecida como o “teste da reta vertical”. Outros detalhes sobre o “teste da reta vertical” podem ser observados no site: <http://www.professorglobal.com.br/arquivos_ckeditor/files/teste_da_reta_vertical.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2018.

Onde D é um subconjunto de \mathbb{R} (geralmente um intervalo ou uma reunião finita de intervalos).

A imagem $\gamma(D)$ está contida em \mathbb{R}^2 é também chamada traço de γ .

Dada a definição acima, usaremos como notação:

$$\boxed{x = f(t); y = g(t).} \quad (1)$$

As equações em (1) são chamadas de “equações paramétricas”. À medida que o valor de t varia, tem-se um ponto $(x, y) = [f(t), g(t)]$ marcado em um plano coordenado, traçando assim a curva C , chamada de “curva parametrizada”.

De modo geral, a curva com equações paramétricas $x = f(t); y = g(t), a \leq t \leq b$, tem “ponto inicial” $(f(a), g(a))$ e “ponto final” $(f(b), g(b))$.

Observação 1: Geralmente, o parâmetro t representa o tempo, porém pode representar outra grandeza física. Também se poderia usar outra letra para representar o parâmetro.

Exemplo 1: Um exemplo de curva parametrizada é a cicloide.

A seguir, é feita uma descrição de como se obtém as equações paramétricas dessa curva. Dado um sistema de coordenadas OXY , a cicloide é o lugar geométrico descrito pelo ponto P da circunferência geradora, de raio a e centro C , que rola sobre o eixo x . O ponto inicial ocorre na posição em que C está no semieixo positivo dos y .

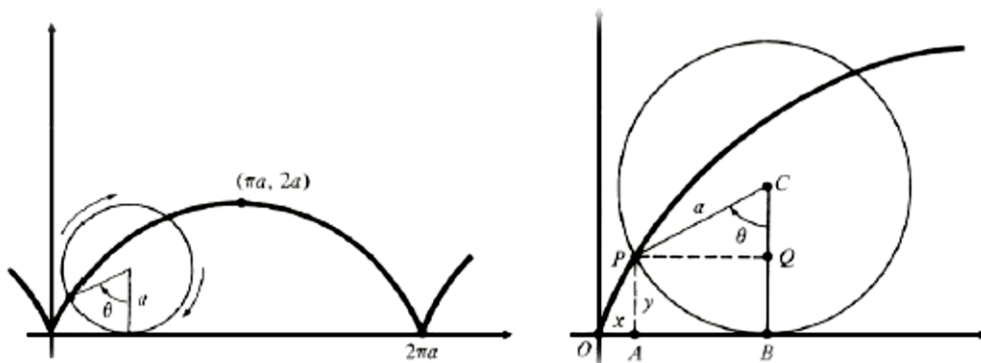


Figura 2 - Lugar geométrico descrito pelo ponto P da circunferência geradora.

Fonte: PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 21.

O ângulo θ da Figura 2 é o ângulo varrido pelo raio CP quando a circunferência rola para uma nova posição. Se x e y são as coordenadas de P , então, considerando esse movimento como $OB = \text{arco } BP = a\theta$, tem-se:

$$x = OA = OB - AB = OB - PQ = a\theta - a\text{sen}(\theta) = a[\theta - \text{sen}(\theta)]$$

$$y = AP = BC - QC = a - a \cos(\theta) = a[1 - \cos(\theta)].$$

Portanto, as equações polares da cicloide são:

$$\boxed{x = a[\theta - \text{sen}(\theta)]; \quad y = a[1 - \cos(\theta)].} \quad (2)$$

Nas equações dadas em (2), é possível eliminar θ para obter-se a equação cartesiana da cicloide, $x = f(y)$. De fato, da segunda equação de (2), tem-se:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{y}{a}, \text{ ou seja, } \theta = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right).$$

$$\text{Logo, } \text{sen}(\theta) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = \pm \frac{\sqrt{(2a-y)y}}{a}.$$

Portanto,

$$\boxed{x = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) \pm \sqrt{(2a-y)y} = f(y)} \quad (3)$$

A equação (3) é a equação cartesiana da cicloide.

Exemplo 2: Considere o círculo da Figura 3, sejam AO o diâmetro sobre o eixo OX, AB um segmento tangente ao círculo em A e C o ponto em que o segmento OB intercepta o círculo. Se P está sobre o segmento OB e OP = CB, obtenha as equações paramétricas do lugar geométrico descrito por tais pontos P. Esta curva é denominada “Cissóide de Diocles”. Determine também a equação cartesiana, mostre que a reta $x = 2a$ é uma assíntota e faça um esboço da curva.

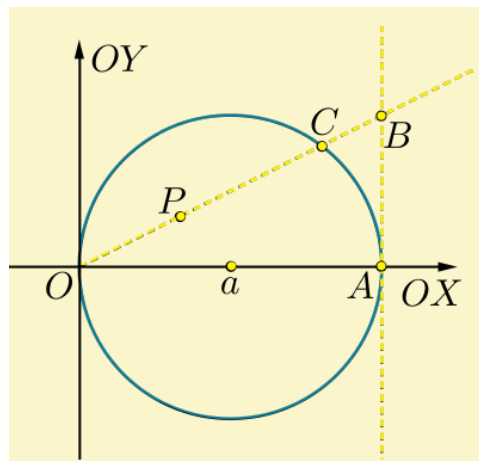


Figura 3 - Círculo de diâmetro OA.

Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 26.

Solução:

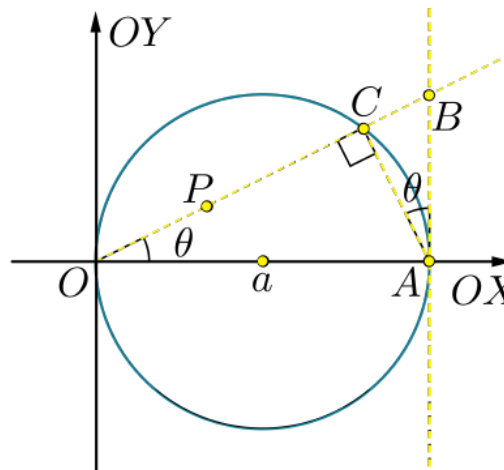


Figura 4. Parâmetro θ no Círculo de diâmetro OA.
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 26.

Da Figura 4, como $AB = 2a \tan(\theta)$ e $CB = OP = r = AB \sin(\theta)$, tem-se que $r = 2a \tan(\theta) \sin(\theta)$. Portanto,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) = 2a \tan(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) = 2a \tan(\theta) \sin^2(\theta) \end{cases}.$$

Essas são as equações paramétricas da curva.

Além disso, como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ e $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, a equação cartesiana da curva é:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{y}{x} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ou seja,

$$x^3 = y^2(2a - x).$$

A curva é, portanto, simétrica em relação ao eixo $-OX$, e como

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}, 0 \leq x \leq 2a, \lim_{x \rightarrow 2a^-} y = \pm \infty, \text{ logo, } x = 2a \text{ é uma assíntota da}$$

curva.

A Figura 5 representa o esboço da curva “Cissóide de Diocles”.

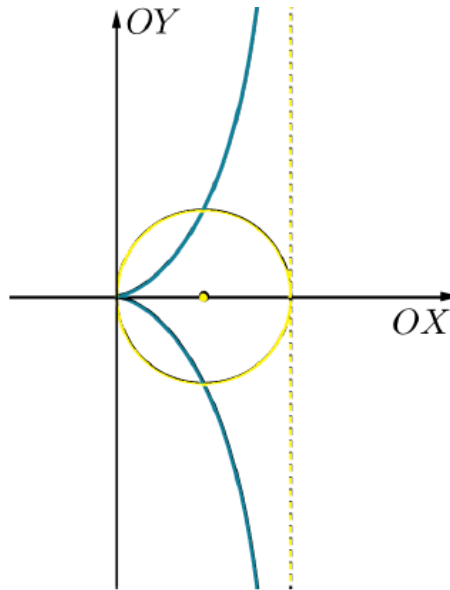


Figura 5 - Esboço da curva “Cissóide de Diocles”.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 27.

Exemplo 3: Descreva o movimento de uma partícula com posição (x, y) , onde x e y são dadas pelas equações $x = 3 + 2\cos(t)$; $y = 1 + 2\sin(t)$, e o parâmetro t varia no intervalo $\pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$.

Solução:

Das equações dadas no exemplo, pode-se observar que as mesmas satisfazem $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$, onde $r = 2$, $h = 3$ e $k = 1$, sendo r o raio do círculo, h e k são as coordenadas do centro. Assim, o movimento da partícula ocorre em um círculo centrado em $(3, 1)$ de raio 2. Como t varia de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$, então, a partícula começa no ponto $(3, 3)$ e move-se no sentido anti-horário ao longo do círculo.

2.1 Tangentes a curvas parametrizadas

Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis e pretende-se encontrar uma reta tangente à curva parametrizada $x = f(t)$; $y = g(t)$, onde y também é uma função diferenciável de x . Segundo a Regra da Cadeia, tem-se:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}} \quad (4)$$

Se $dx/dt \neq 0$, pode-se isolar dy/dx :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ se } \frac{dx}{dt} \neq 0} \quad (5)$$

Observação 2: Pensando-se em uma curva parametrizada sendo traçada pelo movimento de uma partícula, então $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ são as velocidades vertical e horizontal da partícula e a fórmula (5) diz que a inclinação da tangente é a razão dessas velocidades.

A equação (5) permite encontrar a inclinação dy/dx da tangente a uma curva parametrizada sem ter que eliminar o parâmetro t . Observa-se que a curva tem uma tangente horizontal quando $dy/dt = 0$ (desde que $dx/dt \neq 0$) e tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 0$ (desde que $dy/dt \neq 0$). Essa informação é útil para esboçar as curvas parametrizadas.

Como se sabe, é também útil calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$, por exemplo, para analisar a concavidade da curva. Isso pode ser encontrado mudando y por dy/dx na equação (5):

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}} \quad (6)$$

Observação 3: Deve-se ter cuidado na equação (6), ao considerar $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}}$.

Exemplo 4: Uma curva C é definida pelas equações $x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$.

- Mostre que C tem duas tangentes no ponto $(3,0)$ e encontre suas equações.
- Encontre os pontos em C onde é horizontal ou vertical.
- Determine onde a curva sobe e desce e onde sua concavidade é para cima ou para baixo.
- Esboce a curva.

Solução:

a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$, quando $t = 0$ ou $t = \pm\sqrt{3}$.

Portanto, o ponto $(3,0)$ em C surge de dois valores do parâmetro, $t = \sqrt{3}$ e

$t = -\sqrt{3}$. Isso indica que C intercepta a si própria em $(3,0)$. Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

A inclinação da tangente quando $t = \pm\sqrt{3}$ é $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{6}{(2\sqrt{3})} = \pm\sqrt{3}$. Assim, as equações das tangentes em $(3,0)$ são: $y = \sqrt{3}(x - 3)$ e $y = -\sqrt{3}(x - 3)$.

b) C tem uma tangente horizontal quando $\frac{dy}{dx} = 0$, isto é, quando $\frac{dy}{dt} = 0$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$.

Uma vez que $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$, isso ocorre quando $t^2 = 1$, isto é $t = \pm 1$. Os pontos correspondentes em C são $(1, -2)$ e $(1, 2)$. C tem uma tangente vertical quando $\frac{dx}{dt} = 2t = 0$, isto é, $t = 0$. (Observe que $\frac{dy}{dt} \neq 0$ ali). O ponto correspondente em C é $(0,0)$.

c) Para determinar a concavidade, calcula-se a segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

Então, a concavidade da curva é para cima quando $t > 0$ e para baixo quando $t < 0$.

d) Usando as informações das partes (b) e (c), esboça-se C como na Figura 6.

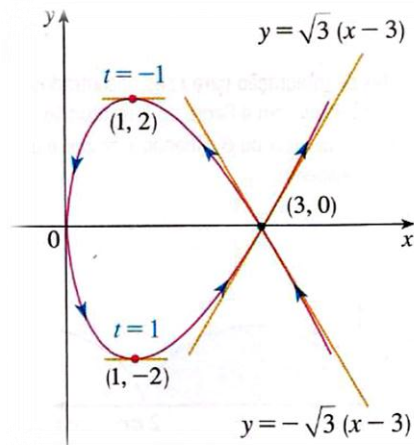


Figura 6. Esboço da curva C.
Fonte: STEWART, 2016, p. 585.

Exemplo 5:

a) Encontre a tangente à cicloide $x = r[\theta - \text{sen}(\theta)]$, $y = r[1 - \text{cos}(\theta)]$ no ponto, onde $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Em ambos os pontos a tangente é horizontal? Quando é vertical?

Solução:

a) A inclinação da reta tangente é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\text{sen}(\theta)}{r[1 - \cos(\theta)]} = \frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)}$$

Quando $\theta = \pi/3$, tem-se:

$$x = r \left[\frac{\pi}{3} - \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = r \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad y = r \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] = \frac{r}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{3})}{1 - \cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente é $\sqrt{3}$ e sua equação é:

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3} \left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt{3}x - y = r \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2 \right)$$

A tangente está esboçada na Figura 7.

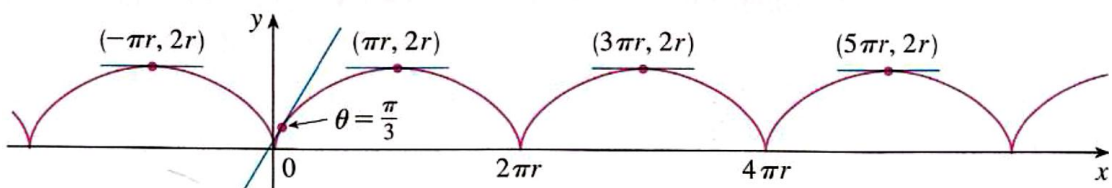


Figura 7 - Esboço da cicloide e suas tangentes.

Fonte: STEWART, 2016, p. 585.

b) A tangente é horizontal quando $\frac{dy}{dx} = 0$, o que ocorre quando $\text{sen}(\theta) = 0$ e $1 - \cos(\theta) \neq 0$, isto é, $\theta = (2n - 1)\pi$, n é um número inteiro. O ponto correspondente na cicloide é $[(2n - 1)\pi r, 2r]$. Quando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ quanto $dy/d\theta$ são 0.

A partir da Figura 7 parece que existem tangentes verticais naqueles pontos. Pode-se verificar isso usando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{\theta \rightarrow 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \rightarrow 2n\pi^+} \frac{\text{sen}(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 2n\pi^+} \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} = \infty$$

Um cálculo similar mostra que $\frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$, quando $\theta \rightarrow 2n\pi^-$. Assim, realmente existem tangentes verticais quando $\theta = 2n\pi$, isto é, quando $x = 2n\pi r$.

2.2 Comprimento de arco de curvas paramétricas

Utilizando-se o comprimento L de uma curva C dada da forma $y = f(x)^3$, definida para $a \leq x \leq b$,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (7)$$

Suponha que C também possa ser descrita pelas equações paramétricas:

$x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, em que $\frac{dx}{dt} = f'(t) > 0$. Isso significa que C é percorrida uma vez, da esquerda para a direita, quando t aumenta de α até β e $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Obtem-se

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt$$

Uma vez que $dx/dt > 0$, tem-se:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (8)$$

Mesmo que C não possa ser expressa na forma $y = f(x)$, a fórmula (8) ainda é válida, mas obtida por aproximações poligonais. Divide-se o intervalo do parâmetro t , $[\alpha, \beta]$, em n subintervalos de comprimentos iguais Δt . Se $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ são as extremidades desses subintervalos, então $x_i = f(t_i)$ e $y_i = g(t_i)$ são as coordenadas dos pontos $P_i(x_i, y_i)$ que estão em C , e o polígono com vértices P_0, P_1, \dots, P_n aproxima C (Figura 8).

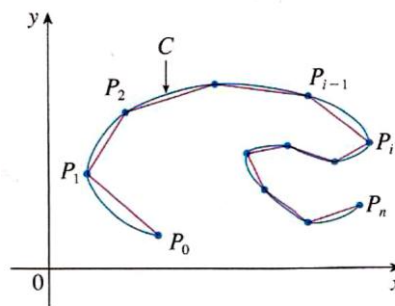


Figura 8 - Polígono com vértices P_0, P_1, \dots, P_n
Fonte: STEWART, 2016, p. 587.

³ Ver exemplo em STEWART, James. **Cálculo**. v. 1, 5.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. (capítulo 8).

Define-se o comprimento L de C como limite dos comprimentos dessas poligonais aproximadoras, quando $n \rightarrow \infty$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

O Teorema do Valor Médio, quando aplicado a f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, fornece um número t_i^* em que $t_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que,

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Agora, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, e essa equação fica

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\Delta t$$

Analogamente, quando aplicado a g , o Teorema do Valor Médio fornece um número t_i^{**} em (t_{i-1}, t_i) , de tal forma que $\Delta y_i = g'(t_i^{**})\Delta t$

Portanto,

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\Delta t$$

e também

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\Delta t \quad (9)$$

A soma em (9) se parece com a soma de Riemann da função $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$. Contudo, não é exatamente a soma de Riemann, porque em geral $t_i^* \neq t_i^{**}$. Mesmo assim, se f' e g' forem contínuas, pode ser mostrado que o limite em (9) é o mesmo que se t_i^* e t_i^{**} fossem iguais; ou seja,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

Então, usando a notação de Leibniz, provou-se o “Teorema 1”.

Teorema 1: Se uma curva C é descrita por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C é percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de α até β , então o comprimento C é

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (10)$$

Exemplo 6: Calcule o comprimento da curva:

$$x = 1 + 3t^2; y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Solução:

$$\frac{dx}{dt} = 6t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 6t^2$$

Assim,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36t^2 + 36t^4$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{36t^2 + 36t^4} dt = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2} dt = 6 \int_0^1 \sqrt{u} \left(\frac{1}{2} du\right) = 3 \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 2 \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ &= 2(2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Observação 4: No cálculo da integral foi usado $[u = 1 + t^2, du = 2t dt]$.

Exemplo 7: Encontre o comprimento de um arco da cicloide $x = r[\theta - \text{sen}(\theta)]$; $y = r[1 - \text{cos}(\theta)]$.

Solução:

Sabe-se que um arco é descrito pelo intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como

$$\frac{dx}{d\theta} = r[1 - \text{cos}(\theta)] \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = r\text{sen}(\theta)$$

Tem-se,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2[1 - \text{cos}(\theta)]^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)} d\theta \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2[1 - \text{cos}(\theta)]} d\theta \end{aligned}$$

Para calcular essa integral, usa-se a identidade $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}[1 - \text{cos}(2x)]$, com

$\theta = 2x$, que fornece $1 - \text{cos}(\theta) = 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Como $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtem-se $0 \leq \theta/2 \leq \pi$, logo, $\text{sen}(\theta/2) \geq 0$. Portanto,

$$\sqrt{2[1 - \text{cos}(\theta)]} = \sqrt{4\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2 \left|\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

E também,

$$L = 2r \int_0^{2\pi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2r \left[-2 \text{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 2r[2 + 2] = 8r$$

Observação 5: O resultado do exemplo 7 diz que o comprimento de um arco de uma cicloide é oito vezes o raio do círculo gerador (Figura 9). Isso foi demonstrado pela primeira vez em 1658 por Christopher Wren, que depois se tornou o arquiteto da Catedral de São Paulo, em Londres (STEWART, 2016).

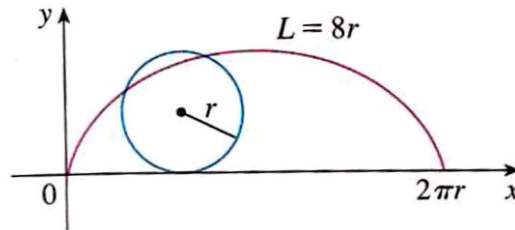


Figura 9 - Comprimento de um arco de uma cicloide.
Fonte: STEWART, 2016, p. 588.

2.3 Curvas planas em coordenadas polares

2.3.1 Coordenadas polares

Um sistema de coordenadas no plano cartesiano representa cada ponto do plano como um par ordenado de números reais chamados pontos coordenados. A seguir, descreve-se outro sistema de coordenadas denominado “sistema de coordenadas polares”, que é mais útil em muitos casos.

Escolhe-se um ponto no plano chamado “polo” (ou origem), o qual está representado pela letra O . Em seguida, desenha-se uma meia linha, começando por O , chamada “eixo polar”, geralmente desenhado horizontalmente para a direita e que corresponde ao eixo positivo nas coordenadas cartesianas.

Se P for qualquer outro ponto no plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e a reta OP , como mostra a Figura 10. Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ) , onde r e θ são chamados “coordenadas polares de P ”. Usa-se a convenção de que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e negativo se for medido no sentido horário. Se $P = O$, então $r = 0$, e convencionou-se que $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ .

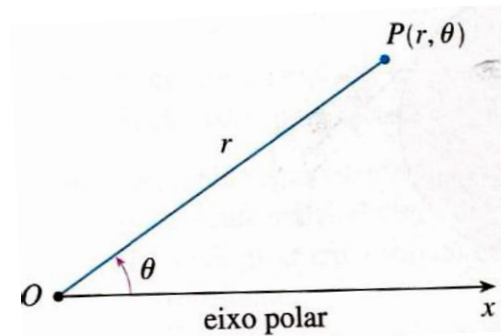


Figura 10 - Coordenadas polares.
Fonte: STEWART, 2016, p. 592.

Entende-se o significado de coordenadas polares (r, θ) para o caso no qual r é negativo e convencionam-se que, como na Figura 11, os pontos $(-r, \theta)$ e (r, θ) estão na mesma reta, passando por O , e estão à mesma distância $|r|$, a partir de O , mas em lados opostos de O . Se $r > 0$, o ponto (r, θ) está no mesmo quadrante que θ ; se $r < 0$, ele está no quadrante do lado oposto ao polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

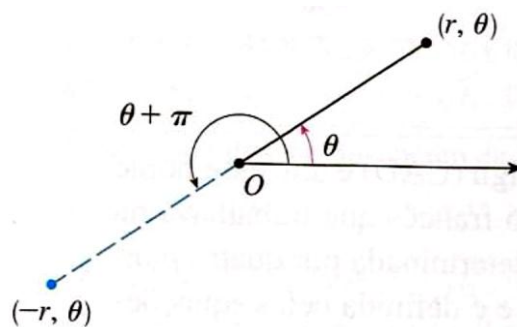


Figura 11. Caso em que r é negativo.
Fonte: STEWART, 2016, p. 592.

Exemplo 8: Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas.

- a) $(1, \frac{5\pi}{4})$
- b) $(2, 3\pi)$
- c) $(2, -\frac{2\pi}{3})$
- d) $(-3, 3\pi/4)$

Solução:

Os pontos estão marcados na Figura 12. Na parte (d) o ponto $(-3, \frac{3\pi}{4})$ está localizado três unidades a partir do polo no quarto quadrante, porque o ângulo $\frac{3\pi}{4}$ está no segundo quadrante e $r = -3$ negativo.

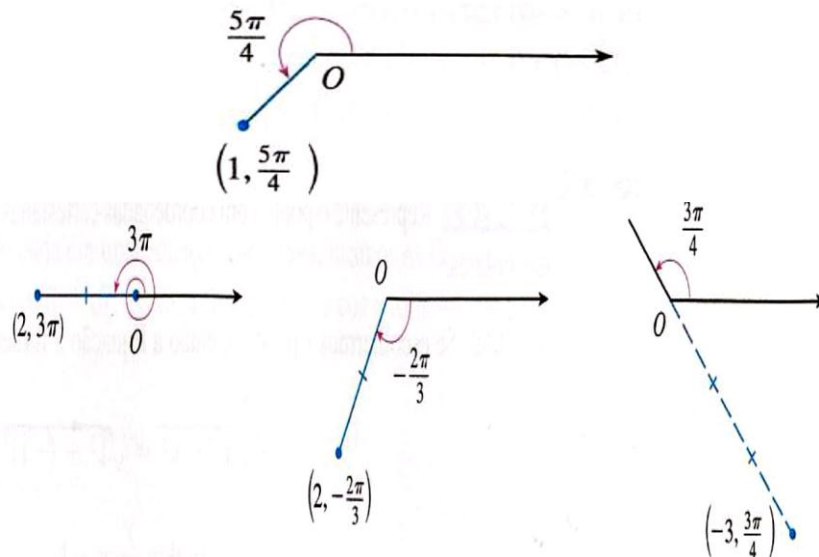


Figura 12 - Pontos do exemplo 8 marcados no sistema de coordenadas polares.
 Fonte: STEWART, 2016, p. 593.

No sistema de coordenadas cartesianas cada ponto tem apenas uma representação, mas no sistema de coordenadas polares cada ponto tem muitas representações. Por exemplo, o ponto $(1, \frac{5\pi}{4})$ no exemplo 1-(a) poderia ser escrito como $(1, -\frac{3\pi}{4})$ ou $(1, \frac{13\pi}{4})$ ou $(-1, \frac{\pi}{4})$ como mostra a Figura 13.

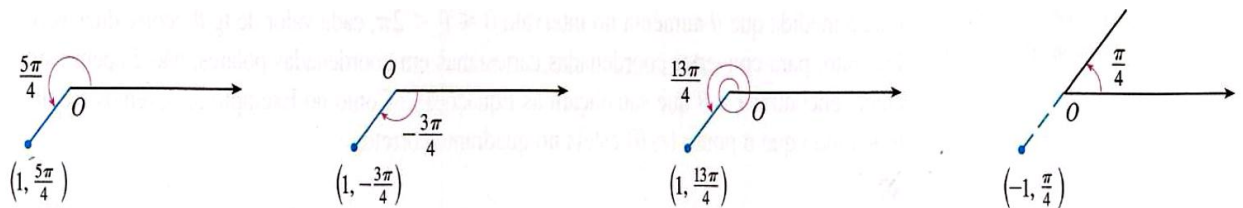


Figura 13 - Representação do ponto $(1, \frac{5\pi}{4})$, do exemplo 1-(a), no sistema de coordenadas polares.
 Fonte: STEWART, 2016, p. 593.

Como uma rotação completa no sentido anti-horário é dada por um ângulo 2π , o ponto representado pelas coordenadas polares (r, θ) pode ser representado por $(r, \theta + 2n\pi)$ e $[-r, \theta + (2n + 1)\pi]$, onde n é qualquer número inteiro. A relação entre as coordenadas polares e cartesianas pode ser vista a partir da Figura 14, em que o polo corresponde à origem

e o eixo polar coincide com o eixo x positivo. Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) , então, a partir da Figura 14 tem-se:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}; \quad \text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$$

e também

$$x = r\cos(\theta); \quad y = r\text{sen}(\theta) \quad (11)$$

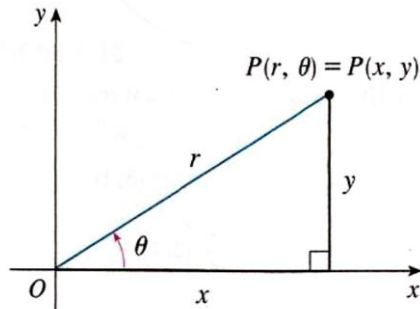


Figura 14 - Relação entre coordenadas polares e cartesianas.
Fonte: STEWART, 2016, p. 593.

Embora as equações (11) tenham sido deduzidas a partir da Figura 14, quando $r > 0$ e $0 < \theta < \pi/2$, essas equações são válidas para todos os valores de r e θ .

As equações (11) permitem encontrar as coordenadas cartesianas de um ponto quando as coordenadas polares são conhecidas. Para calcular r e θ quando x e y são conhecidos, usa-se as equações,

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \text{tg}(\theta) = \frac{y}{x} \quad (12)$$

Essas equações em (12) podem ser deduzidas a partir das equações em (11).

Exemplo 9: Converta o ponto $(2, \frac{\pi}{3})$ de coordenadas polares para cartesianas.

Solução:

Como $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$, as equações (11) fornecem

$$x = r\cos(\theta) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\text{sen}(\theta) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Portanto, o ponto $(2, \frac{\pi}{3})$ corresponde ao ponto $(1, \sqrt{3})$ em coordenadas cartesianas.

2.3.2 Curvas polares

O “gráfico de uma equação polar” $r = f(\theta)$ ou mais genericamente $F(r, \theta) = 0$, é o gráfico em que todos os pontos P , que têm pelo menos uma representação (r, θ) , satisfazem a equação dada.

Exemplo 10: Que curva é representada pela equação polar $r = 2$?

Solução:

A curva representa todos os pontos (r, θ) com $r = 2$. Como r representa a distância do ponto ao polo, a curva $r = 2$ representa o círculo com centro O e raio 2. Em geral, a equação $r = a$ representa um círculo com centro O e raio $|a|$ (Figura. 15).

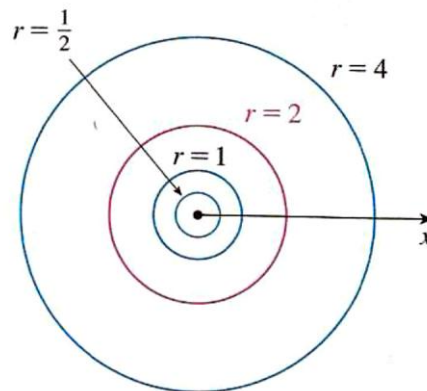


Figura 15 - Curvas de equação polar $r = a$, $a = \frac{1}{2}, 1, 2$ e 4 .
Fonte: STEWART, 2016, p. 594.

Exemplo 11:

- Esboce a curva com equação polar $r = 2\cos(\theta)$.
- Encontre a equação cartesiana para essa curva.

Solução:

- Na Figura 16 tomam-se valores convenientes de θ , obtém-se a partir da equação dada valores para r e marca-se os pontos correspondentes (r, θ) . Com esses pontos esboça-se a curva, que parece ser um círculo. Usa-se os valores de θ apenas entre 0 e π , já que, se θ aumentar além de π , obtém-se os mesmos pontos.

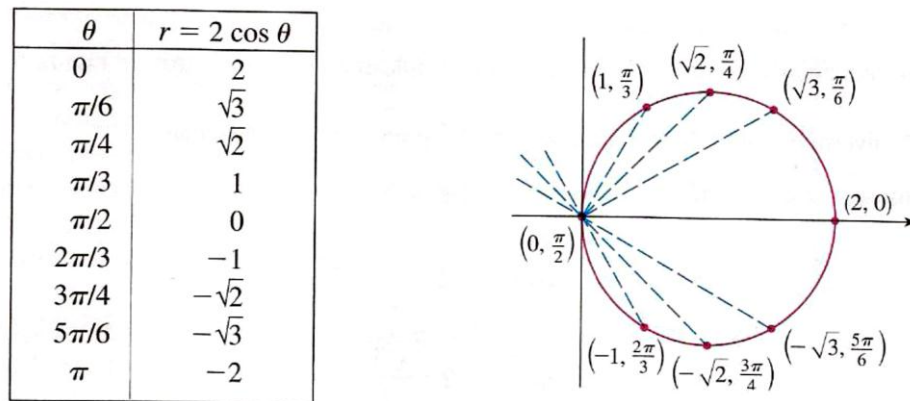


Figura 16 - Tabela de valores e gráfico de $r = 2 \cos(\theta)$.
Fonte: STEWART, 2016, p. 594.

b) Para converter a equação dada em uma equação cartesiana, usam-se as equações (11) e (12). A partir de $x = r \cos(\theta)$, tem-se $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$. Assim, a equação $r = 2 \cos(\theta)$ torna-se $r = \frac{2x}{r}$ que fornece

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Completando o quadrado, obtém-se $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, que é uma equação do círculo com centro (1,0) e raio 1 (Figura 17).

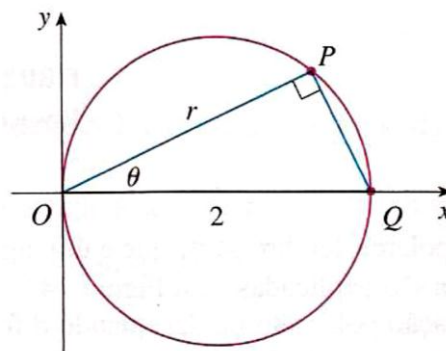


Figura 17 - Ilustração geométrica do círculo do exemplo 11.
Fonte: STEWART, 2016, p. 595.

2.3.3 Tangentes a curvas polares

Considerando θ como um parâmetro, pode-se encontrar a reta tangente à curva polar $r = f(\theta)$ e escrever suas equações paramétricas como:

$$x = r\cos(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \text{ e } y = r\sin(\theta) = f(\theta)\sin(\theta)$$

Então, usando a fórmula para encontrar inclinações de curvas paramétricas e a Regra do Produto, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin(\theta) + r\cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - r\sin(\theta)} \quad (13)$$

Localizam-se as tangentes horizontais, encontrando os pontos em que $\frac{dy}{d\theta} = 0$ (desde que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$).

Observação 6: Olhando para as retas tangentes no polo, $r = 0$ e a equação (13) é simplificada para,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta), \quad \text{se } \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

Exemplo 12:

a) Para a cardioide $r = 1 + \sin(\theta)$, calcule a inclinação da reta tangente quando $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Encontre os pontos na cardioide onde a reta tangente é horizontal e vertical.

Solução:

a) Usando a equação (13) com $r = 1 + \sin(\theta)$, obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dr}{d\theta}\sin(\theta) + r\cos(\theta)}{\frac{dr}{d\theta}\cos(\theta) - r\sin(\theta)} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta) + [1 + \sin(\theta)]\cos(\theta)}{\cos(\theta)\cos(\theta) - [1 + \sin(\theta)]\sin(\theta)} \\ &= \frac{\cos(\theta)[1 + 2\sin(\theta)]}{1 - 2\sin^2(\theta) - \sin(\theta)} = \frac{\cos(\theta)[1 + 2\sin(\theta)]}{[1 + \sin(\theta)][1 - 2\sin(\theta)]} \end{aligned}$$

A inclinação da tangente no ponto em que $\theta = \pi/3$ é:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} /_{\theta=\pi/3} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left[1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

b) Observa-se que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos(\theta) [1 + 2\text{sen}(\theta)] = 0, \quad \text{quando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = [1 + \text{sen}(\theta)][1 - 2\text{sen}(\theta)] = 0, \quad \text{quando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, existem tangentes horizontais nos pontos $(2, \frac{\pi}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}), (\frac{1}{2}, \frac{11\pi}{6})$ e tangentes verticais em $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{6})$ e $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{6})$. Quando $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{dy}{d\theta}$ e $\frac{dx}{d\theta}$ são 0. Dessa forma, deve-se ser cuidadoso na escolha. Usando a Regra de L'Hôpital tem-se:

$$\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{1 + 2\text{sen}(\theta)}{1 - 2\text{sen}(\theta)} \right) \left(\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{\cos(\theta)}{1 + \text{sen}(\theta)} \right) = -\frac{1}{3} \lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{-\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \infty$$

Por simetria,

$$\lim_{\theta \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$$

Então, existe uma reta tangente vertical no polo (Figura 18).

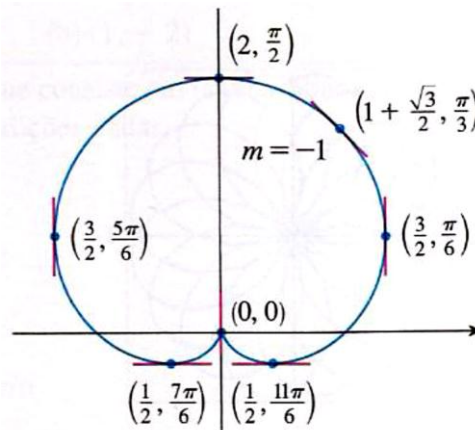


Figura 18 - Retas tangentes da cardioide $r = 1 + \text{sen}(\theta)$.

Fonte: STEWART, 2018, p. 597.

Exemplo 13: Esboce uma curva com a equação polar $r = -2 \text{sen}(\theta)$, esboçando o gráfico de r como função de θ em coordenadas cartesianas.

Solução:

Atribuindo valores para θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtêm-se o esboço dado na Figura 19.

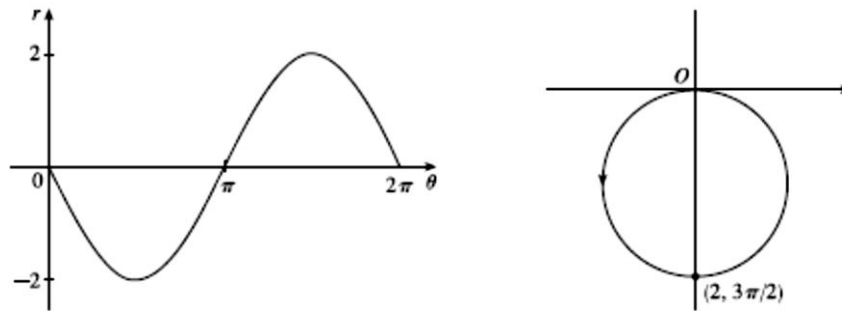


Figura 19 - Esboço do gráfico do exemplo 12.

2.3.4 Comprimento de arco em coordenadas polares

Para calcular o comprimento de uma curva polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$, refere-se à θ como um parâmetro e escreve-se as equações paramétricas da curva como,

$$x = r \cos(\theta) = f(\theta) \cos(\theta) \quad ; \quad y = r \sin(\theta) = f(\theta) \sin(\theta)$$

Usando a Regra do Produto e derivando em relação a θ , obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta),$$

Assim, usando $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \\ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \cos^2(\theta) - 2r \frac{dr}{d\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \sin^2(\theta) + \\ 2r \frac{dr}{d\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) + r^2 \cos^2(\theta) &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \end{aligned}$$

Assumindo que f' é contínua, pode-se escrever o comprimento de arco como,

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Portanto, o comprimento da curva com equação polar $r = f(\theta)$, $a \leq \theta \leq b$ é

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Exemplo 14: Esboce e calcule o comprimento do arco da curva de equação polar $r = 1 + \cos(\theta)$.

Solução:

Esta curva é uma cardioide e seu gráfico é mostrado conforme a Figura 20.

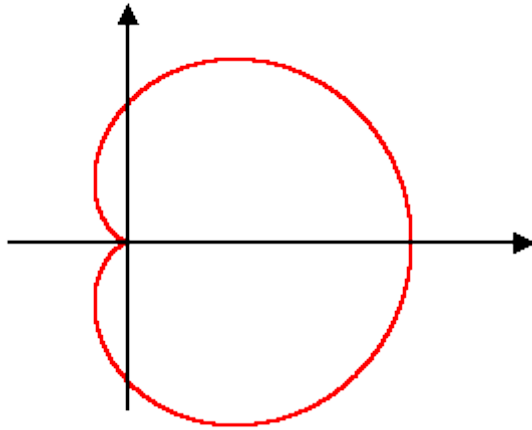


Figura 20 - Esboço da curva cardioide.

Para o comprimento de arco tem-se:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\text{sen}(\theta) \quad \text{e}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-\text{sen}(\theta)]^2 + [1 + \cos(\theta)]^2} d\theta \rightarrow$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}^2(\theta) + [1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)]} d\theta \rightarrow$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos(\theta)} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)} d\theta$$

Usando: $\frac{1+\cos(\theta)}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, então,

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} |\cos(\theta/2)| d\theta. \end{aligned}$$

De acordo com o sinal de $\cos(\theta/2)$ temos

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\theta/2) d\theta = \\ &= 4 \left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^{\pi} - 4 \left[\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

Exemplo 15: Calcule o comprimento exato da curva polar $r = 2\cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solução:

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{[2 \cos(\theta)]^2 + [-2 \sin(\theta)]^2} d\theta = \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)]} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{4} d\theta = [2\theta]_0^\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Observação 7: A curva representa um círculo de raio 1, da qual sabe-se que o comprimento de sua circunferência é $2\pi(1) = 2\pi$.

3 APLICAÇÕES DE CURVAS PARAMETRIZADAS

3.1 Cônicas

3.1.1 Parametrização das cônicas

A história da matemática revela que foi por volta dos anos 300 A.C. a descoberta das curvas cônicas ou seções cônicas. Segundo Delgado, Frensel, Crissaf (2017) o feito foi do matemático *Menaecmus* (380-320 A.C. aproximadamente), discípulo de *Eudóxio* na Academia de Platão, durante suas tentativas de duplicar o cubo.

Pappus de Alexandria escreveu que o “geômetra grego Aristeu (370-300 A.C.)” foi o primeiro a publicar sobre seções cônicas e “mais tarde, o astrônomo e matemático grego Apolônio de Perga (262-190 A.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Seções Cônicas*” (DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p.2).

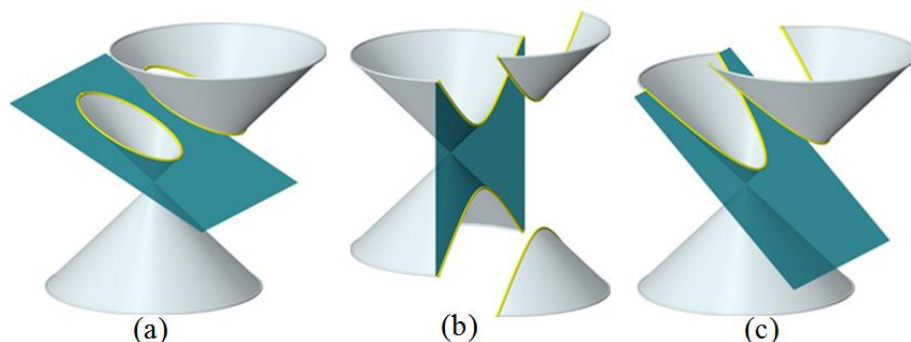


Figura 21- As curvas. a) Elipse, b) Hipérbole e c) Parábola.

Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 2, adaptação do autor.

Na tentativa de restaurar a obra de Apolônio, “*Plane loci*”, Pierre de Fermat, em “*Ad locos planos et sólidos isagoge*” (1636), estabeleceu “um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente a Descartes), seguindo o delineamento feito por Pappus de Alexandria (290-350 A.C. aproximadamente)” (DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p.2). Baseado na teoria de equações de François Viète, Fermat, através da “linguagem algébrica”, demonstrou os teoremas de Pappus ao descrever a obra de Apolônio.

Também ao estudar a obra “*Cônicas de Apolônio*”, Fermat obteve suas equações que definem as seções cônicas. Eram sete equações obtidas a partir da equação geral do

segundo grau com duas variáveis. Escrita na linguagem atual, a equação geral do 2º grau com duas variáveis é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (14)$$

Conforme Delgado; Frensel; Crissaf (2017), “segundo os valores dos coeficientes dessa equação, Fermat classificou os lugares geométricos obtidos na seguinte nomenclatura: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial” (p. 2).

3.1.1.1 Forma canônica da elipse

Definição 2: Uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo

$$0 \leq c < a \text{ e } d(F_1, F_2) = 2c,$$

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

- A reta l que contém os focos é a reta focal. (Figura 22)
- A interseção da elipse com a reta focal l consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2 , chamados vértices da elipse sobre a reta focal.
- O segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ é o eixo focal da elipse.
- O centro C da elipse é o ponto médio do eixo focal A_1A_2 .
- A reta não focal é a reta l' perpendicular a l que passa pelo centro C .
- A elipse intersecta a reta não focal l' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2 , denominados vértices da elipse sobre a reta não focal.
- O eixo não focal da elipse é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
- O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse. Note que $0 \leq e < 1$.
- O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e c é a distância do

centro aos focos.

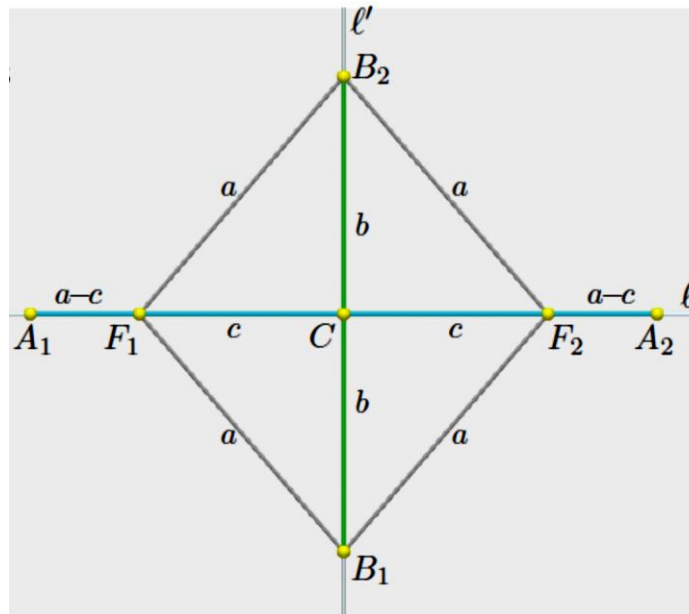


Figura 22 - Elementos da elipse sobre as retas focal e não focal.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 5.

Observação 8: Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é simétrico de P em relação ao centro (Figura 23), então:

$$\Delta PCF_2 \equiv \Delta P''CF_1 \quad \text{e} \quad \Delta F_1CP \equiv \Delta F_2CP''$$

Em particular, $|F_1P| = |F_2P''|$ e $|F_2P| = |F_1P''|$. Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \rightarrow P'' \in \mathcal{E}$$

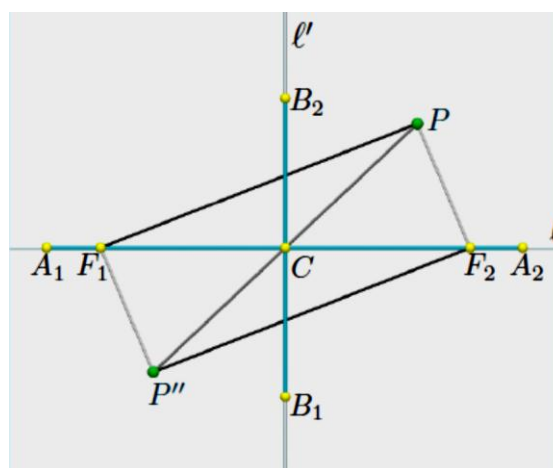


Figura 23- Simetria de \mathcal{E} em relação ao centro.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 5.

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga.

Observação 9: Observa-se que:

$$e = \frac{c}{a} = 0 \leftrightarrow c = 0.$$

Logo, $\varepsilon = \{P | d(P, C) = a\}$ é um círculo de centro C e raio a .

Existem alguns casos especiais para os quais é possível obter as equações da elipse a partir de um sistema de eixos ortogonais OXY , os quais serão vistos a seguir.

Elipse ε com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso, os vértices e focos de ε são:

$$F_1 = (-c, 0)$$

$$F_2 = (c, 0)$$

$$A_1 = (-a, 0)$$

$$A_2 = (a, 0)$$

$$B_1 = (0, -b)$$

$$B_2 = (0, b)$$

Onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

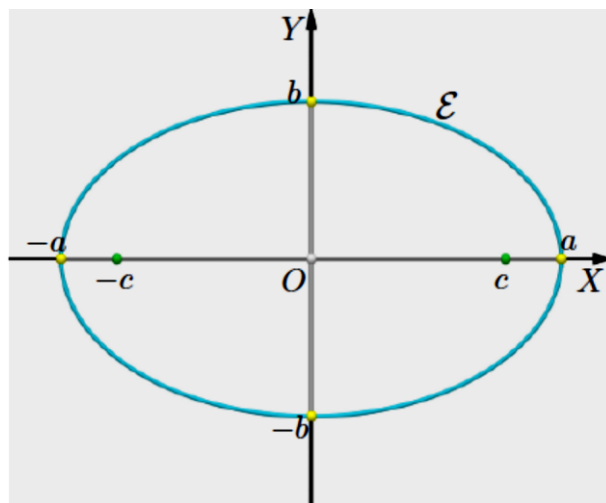


Figura 24 - Esboço de $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 8.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (15)$$

A equação (15) é a forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, os vértices e focos de ε são:

$$F_1 = (0, -c)$$

$$F_2 = (0, c)$$

$$A_1 = (0, -a)$$

$$A_2 = (0, a)$$

$$B_1 = (-b, 0)$$

$$B_2 = (b, 0)$$

Onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

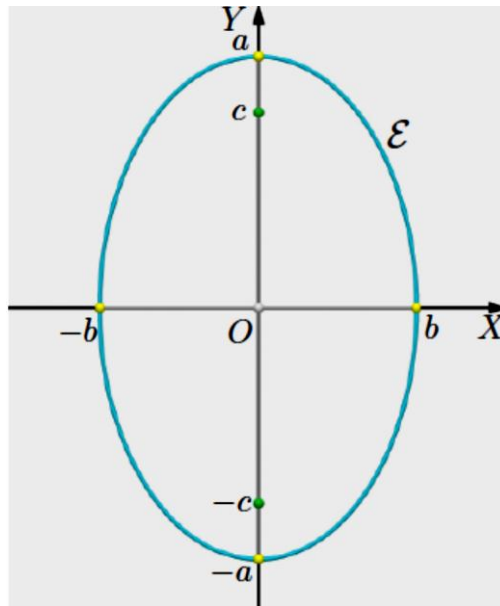


Figura 25 - Esboço de $\varepsilon: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 9.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(16)

A equação (16) é a forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

Elipse com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$

Por uma translação dos eixos coordenados obtém-se a equação de uma elipse \mathcal{E} , cuja reta focal é horizontal ou vertical.

Seja $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando o sistema OXY para a nova origem \bar{O} .

Caso 1: Reta focal paralela ao eixo OX

A forma canônica da equação da elipse \mathcal{E} com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (17)$$

onde, $b^2 = a^2 - c^2$.

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal $l: y = y_0$
- Reta não focal $l': x = x_0$
- Focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$
- Vértices sobre a reta não focal $B_1 = (x_0, y_0 + b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 - b)$

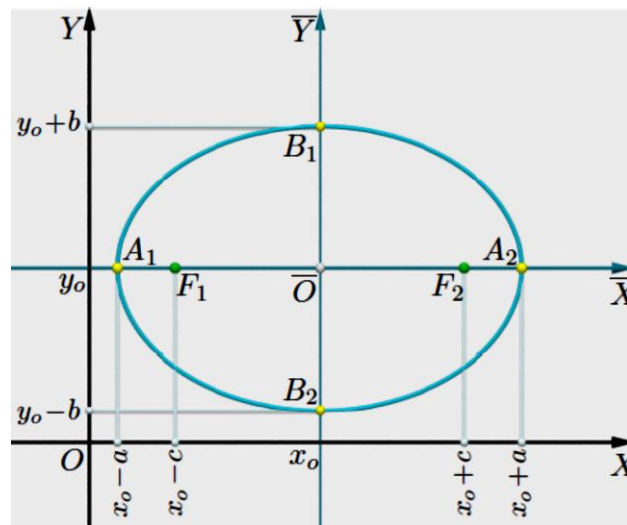


Figura 26 - Esboço de $\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 13.

Caso 2: Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação da elipse \mathcal{E} com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1, \quad (18)$$

onde, $b^2 = a^2 - c^2$.

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal $l: x = x_0$
- Reta não focal $l': y = y_0$
- Focos $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$
- Vértices sobre a reta não focal $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$

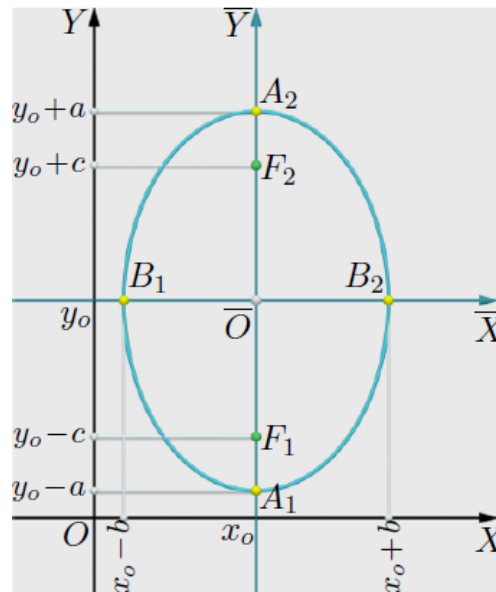


Figura 27 - Esboço de $\varepsilon: \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$

Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 13.

3.1.1.2 Forma canônica da hipérbole

Definição 3: Uma hipérbole H de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$.

$$H = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, \quad 0 < a < c, \quad d(F_1, F_2) = 2c.$$

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, e a reta que os contém é a reta focal.
- A interseção da hipérbole H com a reta focal consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2 , chamados vértices da hipérbole.
- O segmento A_1A_2 é denominado eixo focal da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.

- O ponto C do eixo focal A_1A_2 é o centro da hipérbole.
- A reta que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal é a reta não focal da hipérbole.
- O segmento B_1B_2 , perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio C e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado eixo não focal da hipérbole.
- A excentricidade da hipérbole H é $e = \frac{c}{a}$.
- O retângulo de base da hipérbole H é o retângulo cujos lados têm A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as assíntotas de H .
- O ângulo θ é chamado de abertura da hipérbole

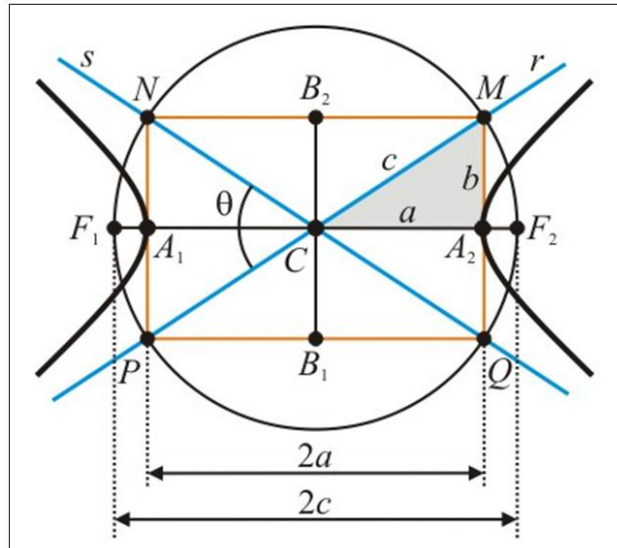


Figura 28 - Hipérbole e seus elementos
Fonte: KILHIAN, 2011.

Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Neste caso,

$$F_1 = (-c, 0)$$

$$F_2 = (c, 0)$$

$$A_1 = (-a, 0)$$

$$A_2 = (a, 0)$$

$$B_1 = (0, -b)$$

$$B_2 = (0, b)$$

Tem-se:

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(19)

É a forma canônica da equação da hipérbole H de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

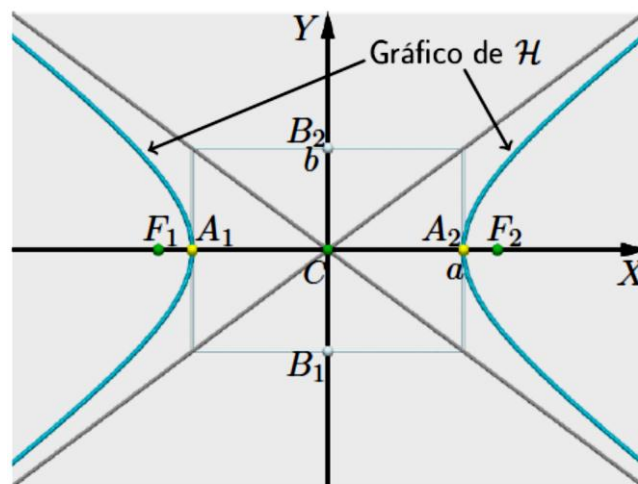


Figura 29 - Gráfico de H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 6.

Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso,

$$F_1 = (0, -c)$$

$$F_2 = (0, c)$$

$$A_1 = (0, -a)$$

$$A_2 = (0, a)$$

$$B_1 = (-b, 0)$$

$$B_2 = (b, 0)$$

$$\text{Onde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Tem-se:

$$\boxed{H: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \quad (20)$$

É a forma canônica da equação da hipérbole H de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

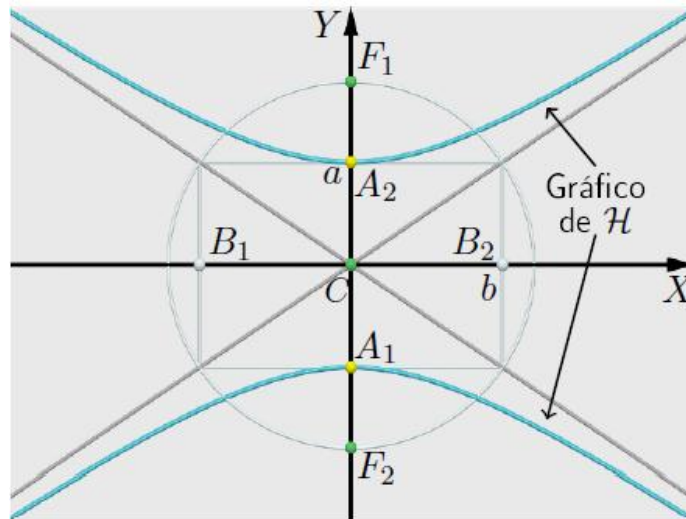


Figura 30 - Gráfico de $H: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 9.

Hipérbole com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$

Caso 1: Reta focal paralela ao eixo OX

A forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX é:

$$\boxed{H: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (21)$$

$$\text{onde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Os elementos dessa hipérbole são:

- Reta focal $l: y = y_0$
- Reta não focal $l': x = x_0$
- Focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$
- Vértices sobre a reta não focal $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$
- Assíntotas $y - y_0 = \mp \frac{b}{a}(x - x_0)$, ou seja, $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$ e $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$.

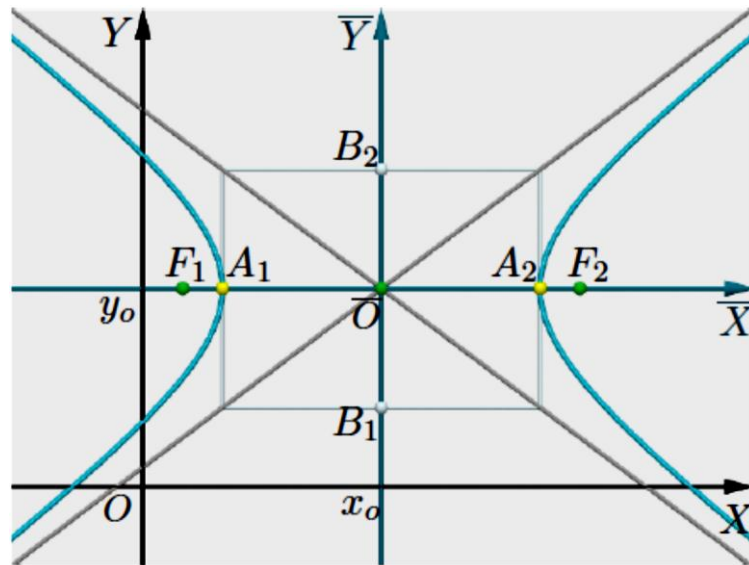


Figura 31 - Gráfico de $H: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 12.

Caso 2: Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo como no caso anterior, verifica-se que a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY é:

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1} \quad (22)$$

Onde $b^2 = c^2 - a^2$.

Os elementos dessa hipérbole são:

- Reta focal $l: x = x_0$
- Reta não focal $l': y = y_0$

- Focos $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$
- Vértices sobre a reta não focal $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$
- Assíntotas $x - x_0 = \mp \frac{b}{a}(y - y_0)$, ou seja, $a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

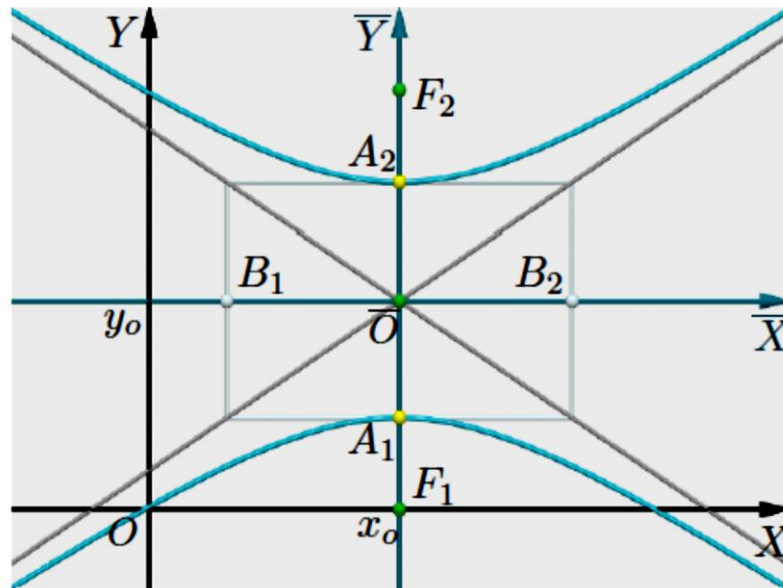


Figura 32 - Gráfico de $H: \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 12.

3.1.1.3 Formas canônicas da parábola

Definição 4: sejam L uma reta e F um ponto no plano não pertencente a L . A parábola P de foco F e diretriz L é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a L .

$$P = \{P | d(P, F) = d(P, L)\}.$$

Elementos da parábola:

- O ponto F é o foco.
- L é a diretriz da parábola.
- A reta focal l da parábola P é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.
- O ponto V da parábola P que pertence à reta focal é o vértice de P .

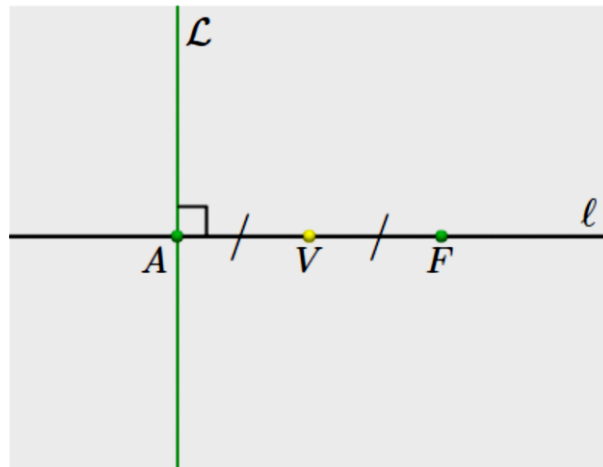


Figura 33 - Posição do vértice em relação a F e à L.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 3.

Observação 10: Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Caso 1: O foco F está à direita da diretriz L

Como o vértice da parábola P é a origem $V = (0,0)$, tem-se que o foco é o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz é a reta $L: x = -p$, onde $2p = d(F, L)$.

Logo:

$$y^2 = 4px \quad (23)$$

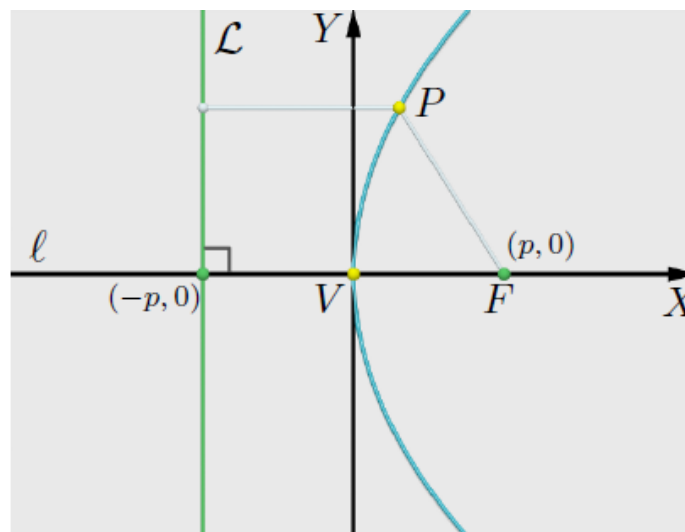


Figura 34 - Parábola P: $y^2 = 4px$
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 4.

Caso 2: O foco F está à esquerda da diretriz L

Neste caso, $F = (-p, 0)$ e $L: x = p$, onde $2p = d(F, L)$.

Logo:

$$y^2 = -4px \quad (24)$$

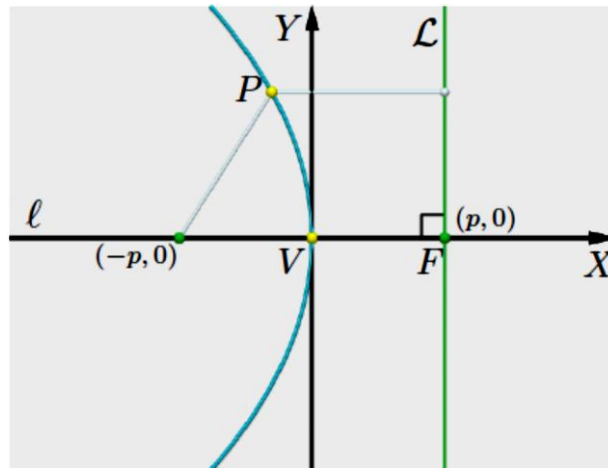


Figura 35 - Parábola P: $y^2 = -4px$
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 5.

Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Caso 1: O foco F está acima da diretriz L

Neste caso, $F = (0, p)$ e $L: y = -p$, onde $2p = d(F, L)$.

Logo:

$$x^2 = 4py \quad (25)$$

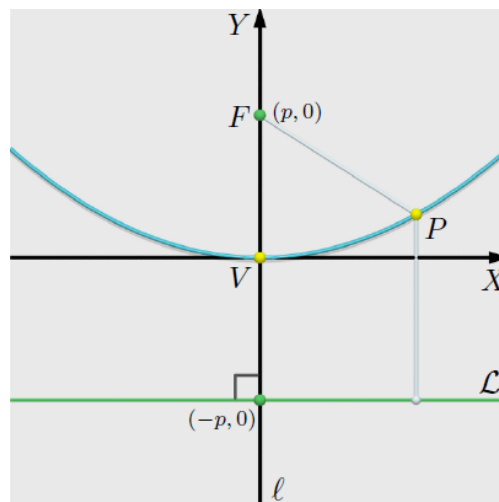


Figura 36 - Parábola P: $x^2 = 4py$
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 5.

Caso 2: O foco F está abaixo da diretriz L

Neste caso, $F = (0, -p)$ e $L: y = p$, onde $2p = d(F, L)$.

Logo:

$$x^2 = -4py$$

(26)

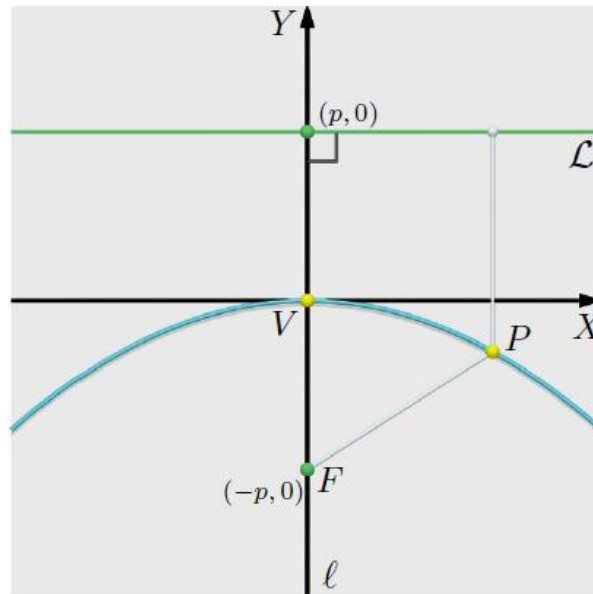


Figura 37 - Parábola P: $x^2 = -4py$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 5.

Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX

Da mesma forma que foi feita para a elipse e a hipérbole, para se obter a forma canônica da parábola P de vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX, consideramos o sistema de eixos ortogonais $\overline{OX}\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos \overline{OX} e \overline{OY} que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos OX e OY, respectivamente.

Caso 1: O foco F está à direita da diretriz L.

Sabe-se que no sistema de coordenadas $\overline{OX}\overline{Y}$ a equação da parábola é $P: \overline{y}^2 = 4p\overline{x}$, o foco é $\overline{F} = (p, 0)$; o vértice é $\overline{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\overline{L}: \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\overline{l}: \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, a equação da parábola P é:

$$P: (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

(27)

E seus elementos são:

- Foco $F = (x_0 + p, y_0)$.
- Vértice $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz $L: x - x_0 = -p$, ou seja, $L: x = x_0 - p$.
- Reta focal $l = y - y_0 = 0$, ou seja, $l: y = y_0$.

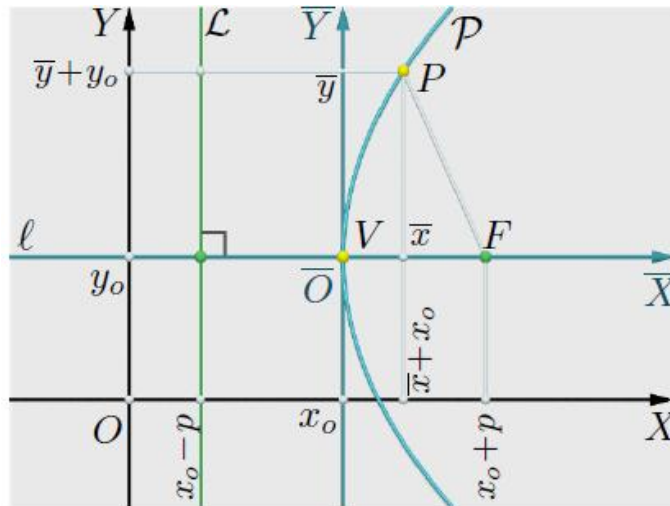


Figura 38 - P: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 8.

Caso 2: O foco F está à esquerda da diretriz L

Neste caso, a equação da parábola no sistema de coordenadas \overline{OXY} é $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$, e seus elementos são: foco é $\bar{F} = (-p, 0)$; vértice é $\bar{V} = (0, 0)$; a diretriz é $\bar{L}: \bar{x} = p$ e a reta focal é $\bar{l}: \bar{y} = 0$.

Passando para as coordenadas x e y do sistema OXY , a equação da parábola P é:

$$P: (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0) \quad (28)$$

E seus elementos são:

- Foco $F = (x_0 - p, y_0)$.
- Vértice $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz $L: x - x_0 = p$, ou seja, $L: x = x_0 + p$.
- Reta focal $l = y - y_0 = 0$, ou seja, $l: y = y_0$.

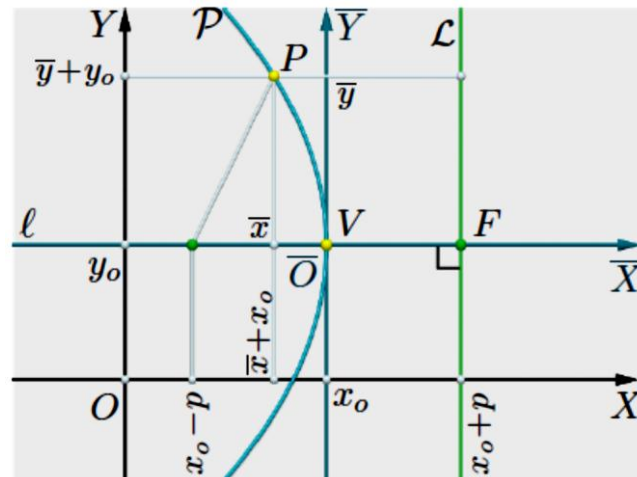


Figura 39 - P: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 8.

Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY

Como no caso anterior, considera-se o sistema de eixos ortogonais $\overline{OX}\overline{OY}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos \overline{OX} e \overline{OY} que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos OX e OY , respectivamente, para se obter a forma canônica da parábola P de vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY .

Caso 1: O foco F está acima da diretriz L

Nesse caso, o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$; a diretriz é $L: y = y_0 - p$; a reta focal é $l: x = x_0$ e a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \quad (29)$$

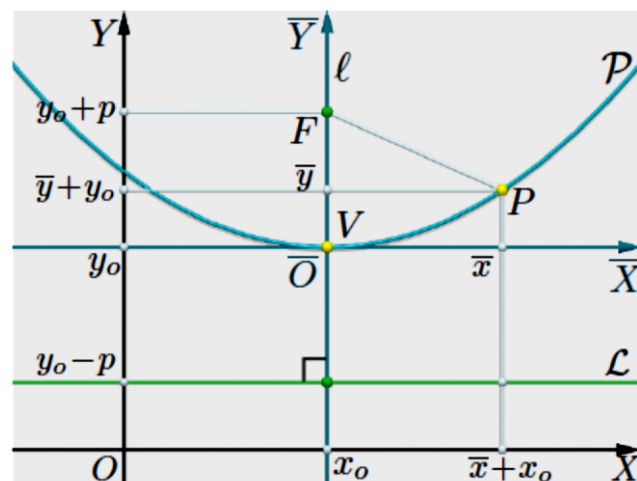


Figura 40 - P: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 9.

Caso 2: O foco F está abaixo da diretriz L

Nesse caso, o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$; a diretriz é $L: y = y_0 + p$; a reta focal é $l: x = x_0$ e a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0) \quad (30)$$

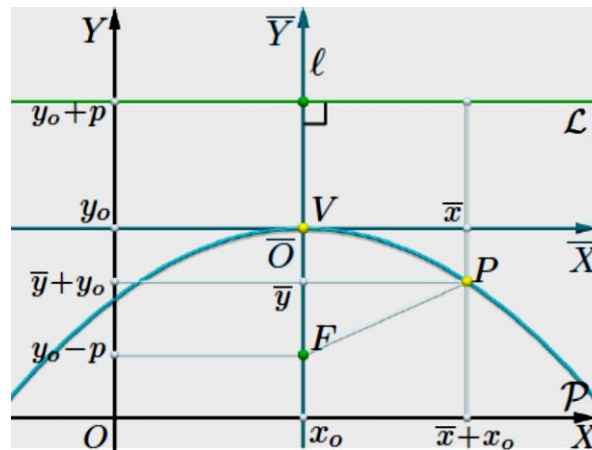


Figura 41 - P: $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 9.

3.1.2 Definição geral de uma cônica

Anteriormente, definiu-se uma parábola em termos de seu foco e de sua diretriz, e uma elipse e uma hipérbole em termos de seus focos. Agora, uma definição geral, em termos de um Teorema, que engloba os três tipos de cônicas em termos de um foco e da diretriz correspondente a esse foco.

Teorema 2: Seja F um ponto do plano, L uma reta do plano tal que $F \notin L$ e e um número real positivo. Então, o conjunto $C = \{P \mid d(P, F) = e \cdot d(P, L)\}$ é uma elipse se $e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$, de foco no ponto F e excentricidade e .

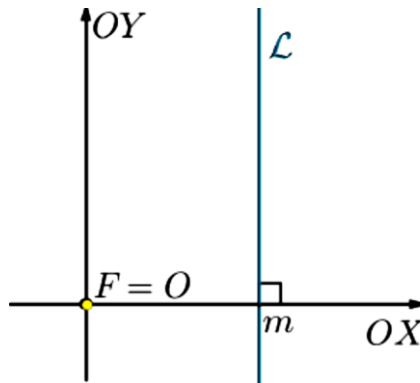


Figura 42 - Sistema OXY escolhido.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 2.

Demonstração:

Note que se $e = 1$, então $C = \{P \mid d(P, F) = e d(P, L)\}$ é uma parábola de foco F e diretriz L .

Suponha-se que $0 < e \neq 1$. Seja o sistema de eixos ortogonais OXY tal que $F = (0,0)$ e $L: x = m$, com $m > 0$.

Tem-se, então que:

$$\begin{aligned}
 P = (x, y) \in C &\leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = e|x - m| \\
 &\leftrightarrow x^2 + y^2 = e^2(x - m)^2 \\
 &\leftrightarrow x^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2mx + m^2) \\
 &\leftrightarrow (1 - e^2) \left(x^2 + \frac{2me^2}{1 - e^2}x \right) + y^2 = m^2e^2 \\
 &\leftrightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = m^2e^2 + \frac{(1 - e^2)m^2e^4}{(1 - e^2)^2} \\
 &\leftrightarrow (1 - e^2) \left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{m^2e^2}{1 - e^2} \\
 &\leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{me^2}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{m^2e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{m^2e^2}{1 - e^2}} = 1.
 \end{aligned}$$

- Se $0 < e < 1$, então $0 < 1 - e^2 < 1$. Assim, C é uma elipse, cuja reta focal é o eixo-OX, pois $\frac{m^2e^2}{(1 - e^2)^2} > \frac{m^2e^2}{1 - e^2}$. Logo, $a = \frac{me}{1 - e^2}$, $b = \frac{me}{\sqrt{1 - e^2}}$.

Portanto,

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{m^2e^2}{1 - e^2} \left(\frac{1}{1 - e^2} - 1 \right) = \frac{m^2e^2}{1 - e^2} \left(\frac{e^2}{1 - e^2} \right)$$

$$\leftrightarrow c^2 = \frac{m^2 e^4}{(1 - e^2)^2} \leftrightarrow c = \frac{me^2}{1 - e^2}.$$

Além disso,

- $\frac{c}{a} = \frac{me^2}{1 - e^2} \cdot \frac{1 - e^2}{me} = e$ é a excentricidade.
- $C = \left(-\frac{me^2}{1 - e^2}, 0\right)$ é o centro.
- $F_1 = C + (c, 0) = (0, 0) = F$ é o foco.
- $L: x = m$ é perpendicular à reta focal = eixo-OX e

$$d(C, L) = |x - m| = \left| -\frac{me^2}{1 - e^2} - m \right| = m \left| \frac{e^2 + 1 - e^2}{1 - e^2} \right| = \frac{m}{1 - e^2} = \frac{a}{e}$$

Observe que o foco F está entre o centro C e o ponto $M = (m, 0)$, pois a abscissa m de M é positiva e a abscissa $-\frac{me^2}{1 - e^2}$ de C é negativa, onde M é o ponto de interseção de L com a reta focal.

- Se $e > 1$, então $1 - e^2 < 0$. Logo, C é uma hipérbole com reta-focal = eixo-OX, pois $\frac{m^2 e^2}{(1 - e^2)^2} > 0$ e $\frac{m^2 e^2}{1 - e^2} < 0$. Assim,

$$C: \frac{\left(x + \frac{me}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{m^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{m^2 e^2}{e^2 - 1}} = 1,$$

onde:

$$a = \sqrt{\frac{m^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} = \frac{me}{e^2 - 1}, \quad b = \sqrt{\frac{m^2 e^2}{e^2 - 1} \frac{me}{\sqrt{e^2 - 1}}},$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{m^2 e^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{m^2 e^2}{e^2 - 1} = \frac{m^2 e^2}{1 - e^2} \left(\frac{1}{1 - e^2} - 1 \right)$$

$$\leftrightarrow c = \frac{me^2}{e^2 - 1}.$$

Tem-se também que

- $\frac{c}{a} = \frac{me^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{e^2 - 1}{me} = e$ é a excentricidade.
- $C = \left(-\frac{me^2}{1 - e^2}, 0\right)$ é o centro,
- $F_1 = C + (c, 0) = (0, 0) = F$ é o foco.
- $L: x = m$ é perpendicular à reta-focal = eixo-OX.

e

$$d(C,L) = |x - m| = \left| -\frac{me^2}{1-e^2} - m \right| = \left| \frac{me^2}{1-e^2} + m \right| = \frac{a}{e}.$$

Note que na hipérbole o ponto $M = (m, 0)$ está entre o foco F e o centro C , pois $0 < m < \frac{me^2}{1-e^2}$, onde M é o ponto de interseção de L com a reta focal.

A reta L mencionada no teorema é chamada **diretriz correspondente ao foco F** .

No caso de uma elipse de focos F_1 e F_2 , tem-se duas diretrizes L_1 L_2 correspondentes a cada um dos focos.

A diretriz L_i corresponde ao foco F_i , $i = 1, 2$, é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\frac{a}{e}$ do centro, com o foco F_i pertencente ao segmento CM_i , onde M_i é o ponto da interseção da reta focal l com L_i .

3.1.3 Equações paramétricas das cônicas

3.1.3.1 Parametrização do círculo

Seja $C: x^2 + y^2 = r^2$ o círculo de centro na origem e raio $r > 0$.

Seja t a medida, em radianos, do ângulo $\widehat{P_0OP}$ (tomada no sentido positivo), onde O é a origem do sistema cartesiano de coordenadas, $P_0 = (r, 0)$ é a interseção do círculo com o semieixo positivo OX e $P = (x, y) \in C$.

Considere-se o ponto $P' = (x, 0)$. Como o triângulo OPP' é retângulo em P' (figura 43), as expressões das coordenadas x e y , em função do parâmetro t , são: $x = x(t) = r\cos(t)$ e $y = y(t) = r\sen(t)$

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, obtém-se todos os pontos do círculo.

Pode-se considerar também t percorrendo todos os valores reais.

Isso implica realizar um número infinito de voltas do círculo. Portanto, uma possibilidade de equações paramétricas para o círculo C é:

$$C: \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sen(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}. \quad (31)$$

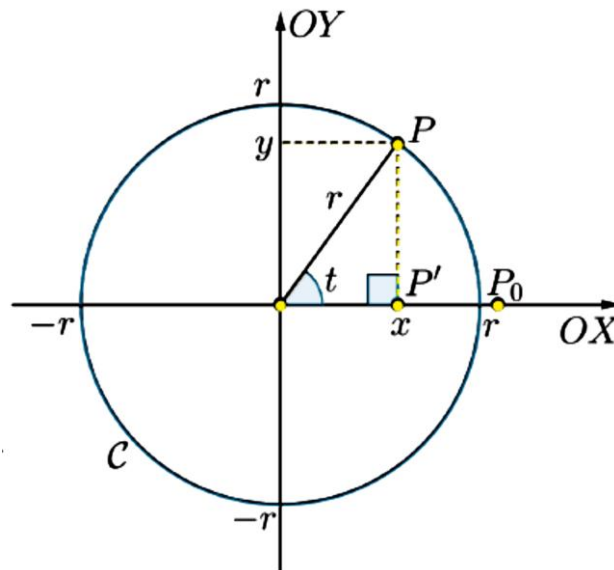


Figura 43 – Círculo $C: x^2 + y^2 = r^2$.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 3.

Observação 11: Para quaisquer valores reais a e b , com $a \neq 0$, as equações

$$x = r \cos(at + b) \quad \text{e} \quad y = r \sin(at + b); \quad (32)$$

Também são equações paramétricas para o círculo C , pois: $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2(at + b) + r^2 \sin^2(at + b) = r^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e conforme t percorre todos os valores em $\left[-\frac{b}{a}, \frac{2\pi - b}{a}\right)$, o ponto $P = [r \cos(at + b), r \sin(at + b)]$ percorre todos os pontos do círculo.

Em particular para $a = -1$ e $b = \frac{\pi}{2}$, obtém-se que

$$C: \begin{cases} x = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r \sin(t) \\ y = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r \cos(t) \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

As equações (33) são equações paramétricas para o círculo C .

Seja agora o círculo de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$:

$$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Por uma translação do sistema de eixos OXY , obtém-se um novo sistema de eixos $\overline{OX\overline{Y}}$, onde $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro do círculo. Nas coordenadas \overline{x} e \overline{y} do sistema $\overline{OX\overline{Y}}$, a equação cartesiana do círculo é $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = r^2$, pois nesse sistema, o círculo C tem raio r e centro na origem.

Sendo $\overline{x} = r \cos(t)$ e $\overline{y} = r \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, equações paramétricas de C nas coordenadas \overline{x} e \overline{y} , segue que:

$$C: \begin{cases} x = x_0 + \bar{x} = x_0 + r\cos(t) \\ y = y_0 + \bar{y} = y_0 + r\sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

As equações (34) são equações paramétricas do círculo C nas coordenadas x e y.

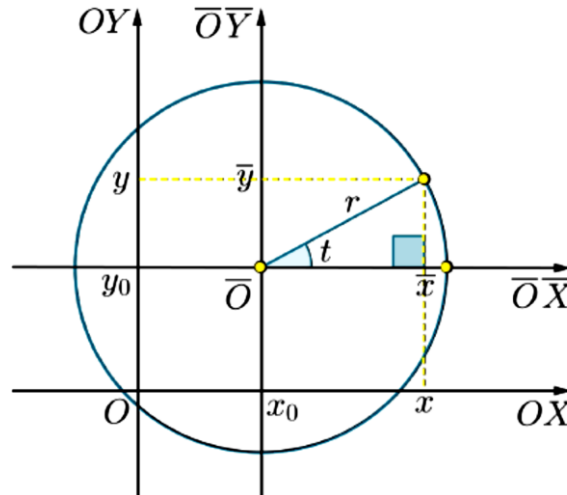


Figura 44 – Círculo C: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 4.

3.1.3.2 Parametrização da elipse

Seja $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uma elipse de centro na origem.

Seja C: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ o círculo de centro na origem e raio = 1. Note que, $(x, y) \in \varepsilon$ se, e só se $(\alpha, \beta) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \in C$, e C: $\begin{cases} \alpha = \cos(t) \\ \beta = \sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}$, ou C: $\begin{cases} \alpha = \sin(t) \\ \beta = \cos(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}$, são parametrizações de C, obtem-se que:

$$\varepsilon: \begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon: \begin{cases} x = a \sin(t) \\ y = b \cos(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

As equações (35) são possíveis parametrizações da elipse ε .

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, obtêm-se todos os pontos da elipse.

O significado geométrico do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ pode ser visto da seguinte maneira.

Sejam $C_a: x^2 + y^2 = a^2$ o círculo de centro na origem e raio a e $C_b: x^2 + y^2 = b^2$ o círculo de centro na origem e raio b.

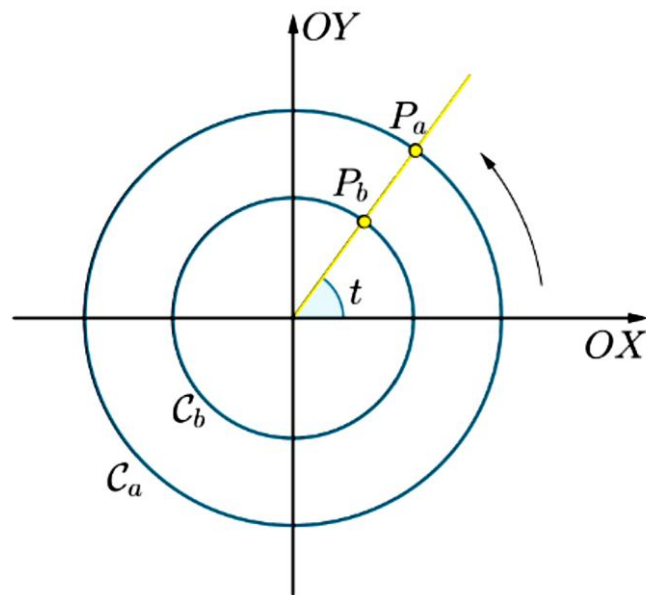


Figura 45 – Círculos C_a e C_b , $a > b > 0$.
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 5.

Considere para $t \in \mathbb{R}$, os pontos $P_a = (a \cos(t), a \sin(t)) \in C_a$ e $P_b = (b \cos(t), b \sin(t)) \in C_b$, tais que os vetores $\overrightarrow{OP_a}$ e $\overrightarrow{OP_b}$ fazem um ângulo t , no sentido positivo, com o semieixo positivo OX. (Figura 46).

A interseção da reta $r_a: x = a \cos(t)$, paralela ao eixo-OY que passa pelo ponto P_a , com a reta $r_b: y = b \sin(t)$, paralela ao eixo-OX que passa pelo ponto P_b , dá o ponto $P = (a \cos(t), b \sin(t))$ pertencente à elipse $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

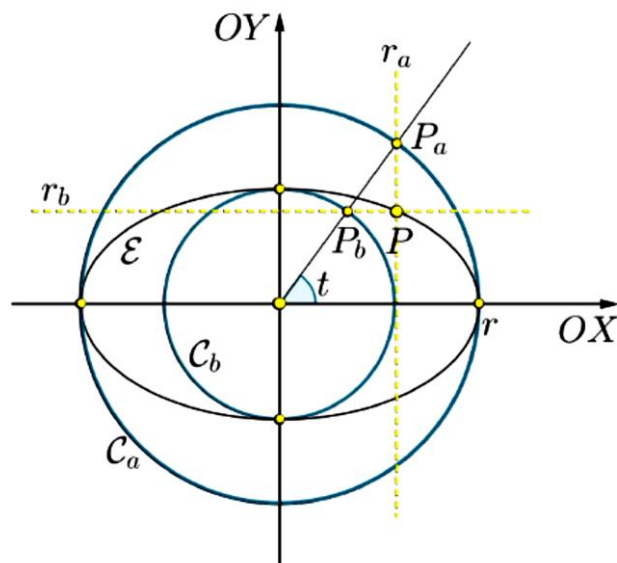


Figura 46 – Construção da elipse ε .
 Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 6.

Seja agora a elipse $\varepsilon: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) .

Por uma translação dos eixos coordenados, obtém-se um sistema de eixos \overline{OXY} , onde $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é o centro da elipse. Nas novas coordenadas \bar{x} e \bar{y} , a equação cartesiana da elipse fica na forma

$$\varepsilon: \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \text{ e, portanto,}$$

$$\varepsilon: \begin{cases} \bar{x} = a \cos(t) \\ \bar{y} = b \sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \varepsilon: \begin{cases} \bar{x} = a \sin(t) \\ \bar{y} = b \cos(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad (36)$$

As equações (36) são parametrizações da elipse nas coordenadas \bar{x} e \bar{y} .

Como $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$, obtém-se que:

$$\varepsilon: \begin{cases} x = x_0 + a \cos(t) \\ y = y_0 + b \sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon: \begin{cases} x = x_0 + a \sin(t) \\ y = y_0 + b \cos(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad (37)$$

As equações (37) são parametrizações da elipse nas coordenadas x e y .

Observação 12: A parametrização do círculo é um caso particular da parametrização da elipse.

Exemplo 16: Parametrize a elipse $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y = -4$.

Solução:

Completando quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4y^2 - 8y = -4 &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = -4 + 4 + 4 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1, \end{aligned}$$

É uma elipse ε de centro no ponto $(2,1)$, reta focal $y = 1$ paralela ao eixo $-OX$, $a = 2$ e $b = 1$. Logo, segundo (37):

$$\varepsilon: \begin{cases} x = 2 + 2\cos(t) \\ y = 1 + \sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de ε , onde o sentido da trajetória é o sentido anti-horário.

Observação 13: Na verdade, pode-se ter outra parametrização para a elipse ε .

Segundo (37) poderia ter:

$$\varepsilon: \begin{cases} x = 2 + 2\sin(t) \\ y = 1 + \cos(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

Neste caso, o sentido da trajetória muda para o sentido horário.

Exemplo 17: Parametrize o círculo $C = x^2 + y^2 - 10x + 8y = 8$.

Solução:

Completando quadrados, tem-se:

$x^2 - 10x + y^2 + 8y = 8 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 8 + 25 + 16 = 49$,
é um círculo C de centro $C = (5, -4)$ e raio $r = 7$. Logo, segundo (34):

$$C: \begin{cases} x = 5 + 7\cos(t) \\ y = -4 + 7\sin(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização do círculo C , onde o sentido da trajetória é o sentido anti-horário.

Observação 14: Pode ter outra parametrização para um círculo C , mudando o sentido da trajetória, segundo (34), para o sentido anti-horário:

$$C: \begin{cases} x = 5 + 7\sin(t) \\ y = -4 + 7\cos(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

3.1.3.3 Parametrização da hipérbole

Considere-se a hipérbole $H: x^2 - y^2 = 1$ equilátera ($a = b = 1$) de centro na origem cuja reta focal é o eixo- OX .

Sejam $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico. Os pontos $[\cosh(t), \sinh(t)]$ e $[-\cosh(t), \sinh(t)]$ pertencem à hipérbole H , pois, $[\cosh(t)]^2 - [\sinh(t)]^2 =$

$$= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

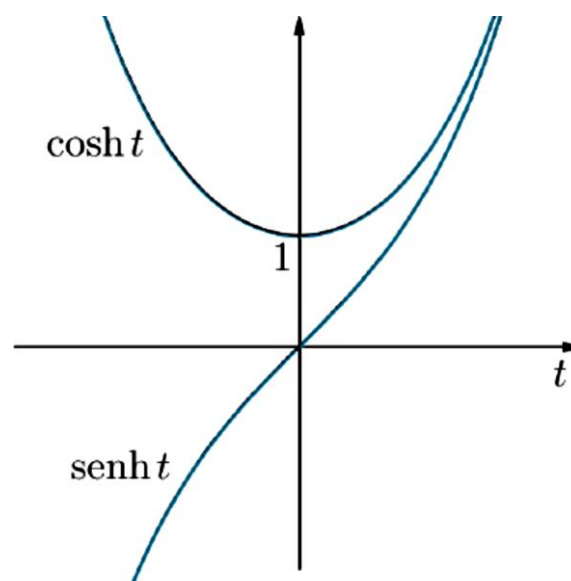


Figura 47 – Gráficos de $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 7.

Além disso, variando t em \mathbb{R} , vemos que $x = \cosh(t)$ [$x = -\cosh(t)$] percorre todos os valores em $[1, +\infty)$ (respectivamente, $(-\infty, -1]$), enquanto $y = b \sinh(t)$ percorre todos os valores reais.

Portanto,

$$\begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

A equação (38) é uma parametrização do ramo H_+ de H que intersecta o semieixo positivo OX , e

$$\begin{cases} x = -\cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad (39)$$

A equação (39) é uma parametrização do ramo H_- de H que intersecta o semieixo negativo OX .

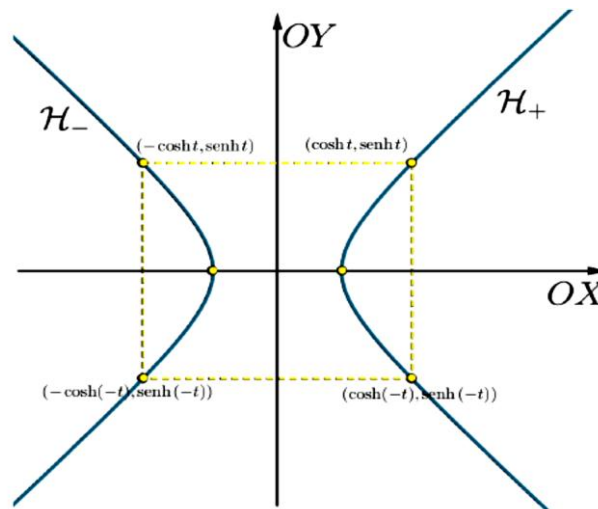


Figura 48 – Gráfico de $H = H_+ \cup H_-$.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 8.

Seja agora a hipérbole $H: \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo- OX .

Considere a hipérbole $H_0: \alpha^2 - \beta^2 = 1$.

Como $(x, y) \in H$ se e só se $(\alpha, \beta) = \left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{b}\right) \in H_0$ e $\begin{cases} \alpha = \mp \cosh(t) \\ \beta = \sinh(t) \end{cases}$;

$t \in \mathbb{R}$ é uma parametrização de H_0 , tem-se que

$$\begin{cases} x = x_0 \mp a \cosh(t) \\ y = y_0 + b \sinh(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

As equações (40) são paramétricas da hipérbole H.

De modo análogo, verifica-se que

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + b \operatorname{senh}(t) \\ y = y_0 \mp a \operatorname{cosh}(t) \end{cases}; t \in \mathbb{R},} \quad (41)$$

As equações (41) são paramétricas da hipérbole H: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo-OY.

Exemplo 18: Parametrize a hipérbole H: $x^2 - 4y^2 + 6x - 16y = 11$.

Solução:

Completando quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 + 6x - 16y = 11 &\Leftrightarrow (x + 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 11 + 9 - 16 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + 3)^2}{4} - (y + 2)^2 = 1. \end{aligned}$$

Logo, H é uma hipérbole de centro $(-3, -2)$, reta focal $y = -2$ paralela ao eixo-OX, $a = 2$ e $b = 1$. Segundo (40)

$$H: \begin{cases} x = \mp 2 \operatorname{cosh}(t) - 3 \\ y = \operatorname{senh}(t) - 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de H.

Observação 15: Pode-se ter outra parametrização para uma hipérbole H, se a reta focal for paralela ao eixo-OY, segundo (41) tem-se:

$$H: \begin{cases} x = \operatorname{senh}(t) - 3 \\ y = \mp 2 \operatorname{cosh}(t) - 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

como outra parametrização da hipérbole H.

3.1.3.4 Parametrização da parábola

As equações canônicas das parábolas se caracterizam por apresentarem uma das variáveis no primeiro grau. Isso permite expressar essa função da variável do segundo grau.

Assim, por exemplo, na parábola P de equação

$$\boxed{(x - a)^2 = k(y - b) \Leftrightarrow y = \frac{1}{k}(x - a)^2 + b} \quad (42)$$

De vértice (a, b) e reta focal paralela ao eixo-OY, escolhendo o parâmetro t como sendo $x - a$, a variável y se expressa como $y = \frac{1}{k}t^2 + b$.

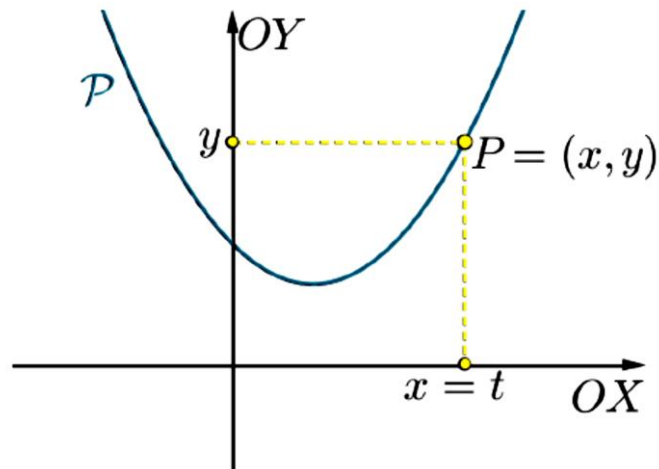


Figura 49 – Parábola $P: (x - a)^2 = K(y - b)$.
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 10.

Portanto, P tem por equações paramétricas:

$$P: \begin{cases} x = t + a \\ y = \frac{1}{k}t^2 + b \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (43)$$

Exemplo 19: Parametrize a parábola $P: y^2 - 4x + 8y = 0$.

Solução:

Completando quadrados, tem-se:

$$y^2 - 4x + 8y = 0 \Leftrightarrow (y + 4)^2 = 4x + 16 = 4(x + 4),$$

é uma parábola P de vértice $V = (-4, -4)$ e reta focal $y = -4$ paralela ao eixo-OX.

Como $x = \frac{(y+4)^2}{4} - 4$, de (43), tem-se :

$$P: \begin{cases} x = \frac{t^2}{4} - 4 \\ y = t - 4 \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

é uma paramétricas da parábola P .

Observação 16: Podem-se ter outra parametrização, se a reta focal for paralela ao eixo-OY, temos segundo (43):

$$P: \begin{cases} x = t - 4 \\ y = \frac{t^2}{4} - 4 \end{cases}; t \in \mathbb{R},$$

como outra parametrização da parábola P .

3.1.4 Equações polares das cônicas

Delgado, Frensel e Crissaf (2017) usou a definição geral de uma cônica e escolheu um sistema de coordenadas polares com origem no foco e eixo polar perpendicular ou paralela à diretriz para mostrar que uma cônica nessas coordenadas polares assume uma forma bem simples.

“Seja C uma cônica de excentricidade $e > 0$. Consideremos um sistema de coordenadas polares em que um foco F da cônica é a origem O e o eixo polar \overrightarrow{OA} está contido na reta focal de C . Designamos L a diretriz associada ao foco F e seja $h = d(F, L)$ ” (DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 8. Cap.10).

Para os autores, com base na definição geral de uma cônica e usando as coordenadas polares (ρ, θ) , tem-se,

$$P = (\rho, \theta) \in C \leftrightarrow d(P, F) = e d(P, L) \leftrightarrow \rho = e d(P, L).$$

Daí tem-se dois casos a considerar, de acordo com Delgado, Frensel e Crissaf (2017):

Caso 1: Se L não intersecta o eixo polar, então $d(P, L) = h + \rho \cos(\theta)$

Neste caso, $P = (\rho, \theta) \in C$ se, e somente se,

$$\rho = e[h + \rho \cos(\theta)] \leftrightarrow \rho = \frac{eh}{1 - e \cos(\theta)} \quad (44)$$

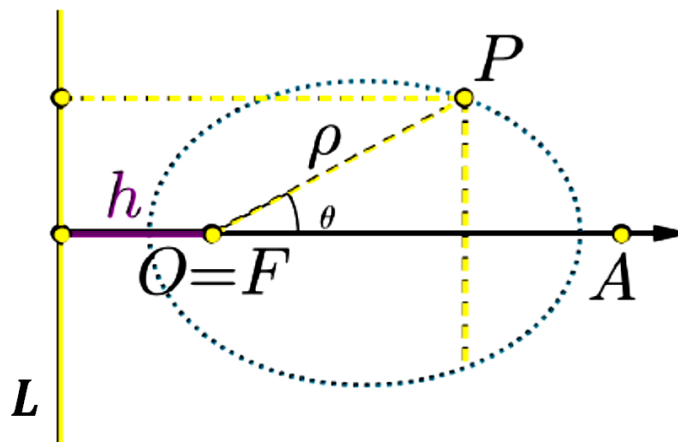


Figura 50 - L não intersecta o eixo polar \overrightarrow{OA} .
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 9.cap.12

Caso 2: Se L intersecta o eixo polar, então $d(P, L) = h - \rho \cos(\theta)$

Neste caso, $P = (\rho, \theta) \in C$ se, e somente se,

$$\rho = e[h - \rho \cos(\theta)] \leftrightarrow \rho = \frac{eh}{1 + e \cos(\theta)} \quad (45)$$

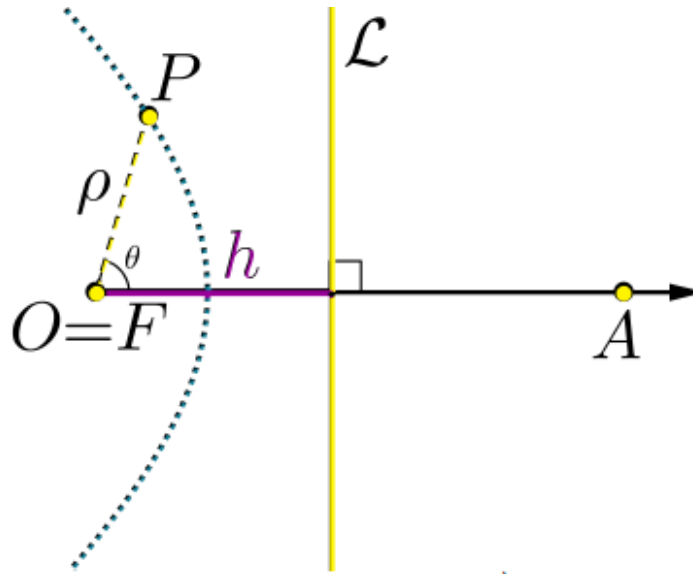


Figura 51 - L intersecta o eixo polar \overrightarrow{OA} .
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2017, p. 9.

Ou seja, a equação polar de C , nesse sistema, $O\rho\theta$ é

$$C: \rho = \frac{eh}{1 + e \cos(\theta)} \quad (46)$$

Na qual tomamos o sinal positivo (+) se a diretriz L intersecta o eixo polar, e o sinal negativo (−) se L não intersecta o eixo polar.

De modo análogo, se o eixo polar \overrightarrow{OA} , com origem $O = F$, for escolhido de modo a ser paralelo à diretriz L , ou seja, perpendicular à reta focal, podemos mostrar que a equação polar da cônica é dada por

$$C: \rho = \frac{eh}{1 + e \sin(\theta)} \quad (47)$$

Na qual tomamos o sinal positivo (+) se a diretriz L intersecta a semirreta \overrightarrow{OB} (Figura 52), onde \overrightarrow{OB} é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ do eixo polar \overrightarrow{OA} , no sentido positivo. Caso contrário, tomamos o sinal negativo (-). (Figura 52).

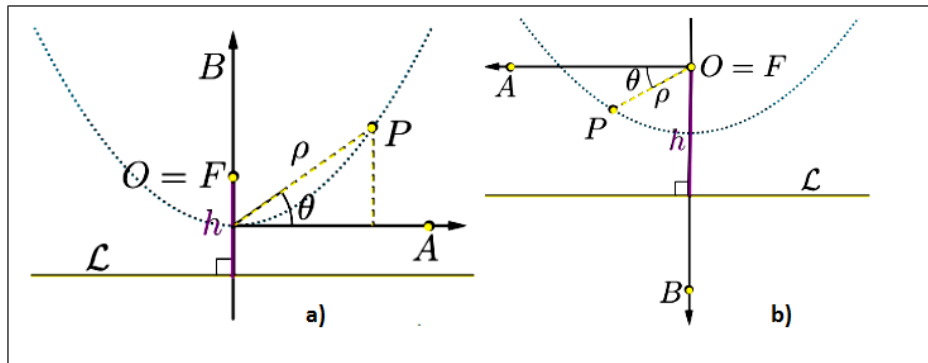


Figura 52- Eixo polar paralelo à diretriz L . a) L não intercepta \overrightarrow{OB} . b) L intercepta \overrightarrow{OB} .
Fonte: DELGADO, FRENSEL, CRISSAFF, 2017, p. 10.

Exemplo 20⁴: Seja P uma parábola com foco F na origem O e vértice V no ponto $(4, \pi)$ com respeito a um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$. Obtenha a equação polar da parábola P .

Solução:

A equação polar de P é da forma da equação (46), com sinal negativo no denominador, excentricidade $e = 1$ e $h = d(F, L) = 2p = 8$, pois $p = d(V, F) = 4$. Logo, a equação polar de P é:

$$\rho = \frac{8}{1 - \cos(\theta)}$$

e a equação de sua diretriz L é $r\cos(\theta) = -8$.

Observação 17: Se o eixo polar, com origem $O = F$, for perpendicular à reta focal, tem-se:

$$\rho = \frac{8}{1 - \sin(\theta)}$$

3.2 Leis de Kepler

O ano de 1543 é considerado o marco da ciência moderna em função das ideias de Nicolau Copérnico (1473-1543), que provocou o início de revolução não só astronômica, mas

⁴ Exemplo retirado de DELGADO, FRENSEL, CRISSAFF, 2017, p. 10.

filosófica e religiosa. Com base em observações dos corpos celestes, em 1506 ele negou a hipótese geocêntrica de Aristóteles e Claudio Ptolomeu. “Ptolomeu e seus sucessores recorriam ao artifício de utilizar círculos deferentes e epiciclos: o círculo deferente era o círculo básico que girava em torno da Terra; e o epiciclo era um círculo menor, centrado em algum ponto do deferente. O planeta deslocava-se no deferente” (ROCHA, 2013, p. 3). Com os raios do deferente e do epiciclo devidamente ajustados, bem como suas velocidades, era possível fazer com que os movimentos planetários observados da Terra pudessem ser mais ou menos explicados. Como as observações não se conformavam exatamente com as previsões da teoria, o recurso era refazer os cálculos, adicionando epiciclo sobre epiciclo, em construções de crescente complexidade.

Questionar as teorias de Ptolomeu era naquele momento entrar “em conflito frontal com a teologia cristã e com arraigados princípios de ordem estética e simplicidade matemática do Universo” (ROCHA, 2013, p. 3). Porém, apesar de não responder a todas as perguntas que havia levantado, as ideias de Copérnico “tiveram um impacto profundo na evolução científica, separando a Ciência da religião” (ROCHA, 2013, p. 3). Sendo assim, tivera como seguidores Galileu Galilei (1564-1642), que marca o início da Mecânica, e Johannes Kepler (1571-1630), que seguido por Newton a formalizou da forma como se conhece hoje.

Kepler, competente em Matemática, Astronomia e Óptica, teve, em 1595, a “brilhante ideia”, inspirada em Pitágoras e Platão, de uma correlação entre os cinco sólidos regulares da Geometria e os seis planetas então conhecidos (de Mercúrio a Saturno, inclusive a Terra)” (ROCHA, 2013, p. 4).

Segundo (ROCHA, 2013), Kepler desenvolveu uma teoria que defendia que os planetas se apoiam sobre esferas, sendo as órbitas dos planetas situadas “sobre seis esferas separadas entre si por cinco poliedros regulares, cada um circunscrito a esfera anterior e inscrito na seguinte” (p. 4). Com base nessa teoria publicou o “Mysterium Cosmographicum” (Mistérios dos Cosmos), defendendo o heliocentrismo e o “modelo de orbitas circulares, percorridas com velocidades constantes”. Tal livro serviu de inspiração para os estudos do astrônomo Tycho Brahe, que mais tarde desempenhou “um papel fundamental nas descobertas de Kepler” (p. 4).

Após uns anos de trabalho com Tycho e a morte deste, Kepler, a partir de 1602, começou a perceber que a ideia de velocidades uniformes não era verdadeira, que Marte movia-se mais depressa quando mais perto do sol, que a órbita não era circular e que a “linha

que liga Marte ao Sol varre, em tempos iguais, áreas iguais, qualquer que seja a posição do planeta sobre sua órbita” (ROCHA, 2013, p. 4). Kepler, então, concluiu que a órbita de Marte é uma elipse, com o Sol em um dos focos e através de testes, estendeu essa afirmação para outros planetas, anunciando suas duas primeiras leis em 1609 na publicação de “Astronomia Nova”. Suas leis afirmam que “as órbitas dos planetas são elipses, das quais o Sol ocupa um dos focos” e “a linha que une o Sol a qualquer planeta cobre áreas iguais em tempos iguais, quaisquer que sejam as posições do planeta sobre sua órbita” (ROCHA, 2013, p. 4).

Em 1619, Kepler publicou “*Harmonices Mundi*” (A Harmonia do Mundo), anunciando sua terceira lei do movimento planetário “os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias ao Sol” (ROCHA, 2013, p. 5). Autores afirmam que pouco depois, em 1687, Newton “mostrou que as três leis de Kepler podem ser obtidas como consequência de outras duas leis de sua autoria, a Segunda Lei do Movimento e a Lei da Gravitação Universal” (ROCHA, 2013, p. 5).

Apesar de Kepler se referir aos movimentos dos planetas em torno do Sol, suas leis se relacionam também ao movimento de luas, cometas, satélites e outros corpos que também sofrem influência da gravidade. Sendo assim, usa-se a Primeira Lei de Kepler, com a equação polar da elipse, para calcular quantidades de interesse em astronomia (STEWART, 2016).

Para o propósito de cálculos astronômicos, é útil expressar a equação de uma elipse em termos de sua excentricidade e e de seu semieixo maior a . Pode-se escrever a distância d do foco à diretriz de a , usando-se:

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e)^2} \rightarrow d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{e^2} \rightarrow d = \frac{a(1 - e^2)}{e} \quad (48)$$

Assim, $ed = a(1 - e^2)$. Se a diretriz for $x = d$, então a equação polar é

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} \quad (49)$$

A equação (49) é polar de uma elipse com foco na origem, semieixo maior a , excentricidade e e diretriz $x = d$ pode ser escrita na forma:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} \quad (50)$$

As posições de um planeta que estão mais próximas e mais distantes do Sol são chamadas **periélio** e **afélio**, respectivamente, e correspondem aos vértices da elipse. As distâncias do Sol ao periélio e afélio são chamadas **distâncias do periélio** e **distância do afélio**, respectivamente. Na Figura 53, o sol está no foco F, de modo que no periélio tem-se $\theta = 0$

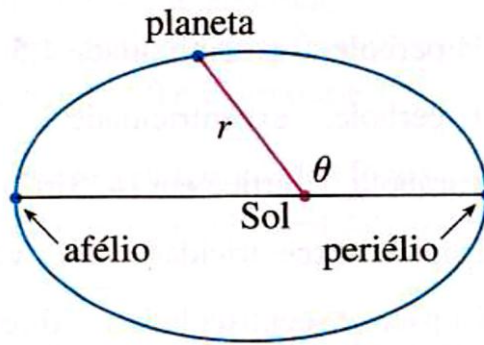


Figura 53 - Sol no foco F.
Fonte: STEWART, 2016, p. 617.

E, da equação 50,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos 0} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e) \quad (51)$$

De forma análoga, no afélio $\theta = \pi$ e $r = a(1 + e)$.

A distância do periélio de um planeta ao Sol é $a(1 - e)$ e a distância do afélio é $a(1 + e)$.

Exemplo 21: a) Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra em torno do Sol (em um foco), dado que a excentricidade é cerca de 0,017 e o comprimento do eixo maior é cerca de $2,99 \times 10^8$ Km.

Solução:

O comprimento do eixo maior é $2a = 2,99 \times 10^8$, de modo que $a = 1,495 \times 10^8$. Foi dado que $e = 0,017$ e assim, da equação (51), uma equação da órbita da Terra em torno do Sol é:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{(1,495 \times 10^8)[1 - (0,017)^2]}{1 + 0,017 \cos(\theta)}$$

Ou, aproximadamente,

$$r = \frac{1,49 \times 10^8}{1 + 0,017 \cos(\theta)}$$

b) Encontre a distância da Terra ao Sol no periélio e no afélio.

Solução:

Da equação (51), a distância do periélio da Terra ao Sol é:

$$a(1 - e) \approx (1,495 \times 10^8)(1 - 0,017) \approx 1,47 \times 10^8 \text{ Km}$$

E a distância do afélio é:

$$a(1 + e) \approx (1,495 \times 10^8)(1 + 0,017) \approx 1,52 \times 10^8 \text{ Km.}$$

Exemplo 22: A órbita do cometa Halley, visto pela última vez em 1986 e com retorno esperado para 2062, é uma elipse com excentricidade 0,97 e com um foco no Sol. O comprimento do eixo maior é 36,18 AU [unidade astronômica (AU) é a distância média entre a Terra e o Sol, cerca de 93 milhões de milhas]. Encontre uma equação polar para a órbita do cometa Halley. Qual é a distância máxima do cometa até o Sol?

Solução:

Aqui $2a$ = comprimento do eixo principal = 36,18 AU e $e = 0,97$. Da equação (51) tem-se que a equação da órbita é

$$r = \frac{18,09[1 - (0,97)^2]}{1 + 0,97 \cos(\theta)} \approx \frac{1,07}{1 + 0,97 \cos(\theta)}$$

De (51), a distância máxima do cometa ao sol é

$$18,09(1 + 0,97) \approx 35,64 \text{ AU}$$

Ou sobre 3.314 bilhões de milhas.

3.3 O Problema da Braquistócrona

Segundo Pedroso e Precioso (2014), a cicloide apareceu como solução para o problema da braquistócrona ou do tempo mínimo por Johann Bernoulli, na Acta Eruditorum, em 1696. Sua solução “envolve uma analogia com refração da luz, um tema que foi de grande preocupação dos cientistas do início do século XVII” (p. 15).



Figura 54 – Jakob e Johann Bernoulli.

Fonte: PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 15.

Segundo os autores, apesar das contribuições de Fermat e Descartes, “a lei de refração foi descoberta por Willebrord Snell (1591-1626) em 1621 de um modo experimental” (PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 15).

Pedroso e Precioso (2014) explicam que “Pela Lei da refração de Snell ou Princípio do menor tempo de Fermat: Sejam v_1 v_2 as velocidades da luz em dois meios distintos, (ar e água, por exemplo). Se um raio de luz percorre de um ponto A de um meio, para o outro, por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto, então” (p. 15):

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{v_1} = \frac{\text{sen}(\theta_2)}{v_2} \quad (52)$$

Sendo θ_1 o ângulo de Incidência e θ_2 , o ângulo de refração (Figura 55).

Pela solução de Johann Bernoulli, Pedroso e Precisos (2014) sugerem o exemplo de dois pregos martelados em uma parede ou plano (não na mesma vertical). O prego superior (ponto P_0) conectado ao inferior (ponto P_1) “por um arame flexível na forma de uma curva lisa. O problema consiste em determinar qual a forma do arame no qual uma partícula deslizará (sem atrito), sob influência da gravidade, para passar do ponto superior ao inferior no menor tempo possível” (p. 15).

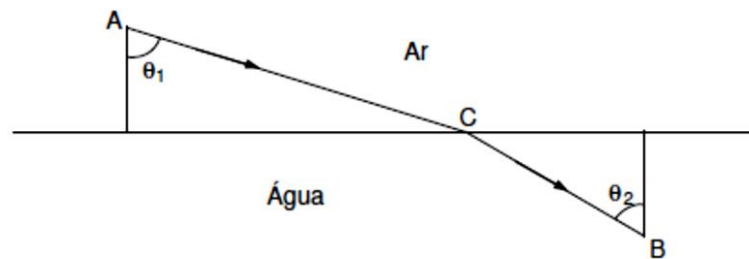


Figura 55: Lei da refração de Snell.
Fonte: PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 15.

Bernoulli soluciona o problema utilizando a ideia de “propagação da luz em meios de densidade variável”. Sendo o meio atravessado pela luz “constituído por uma série de camadas paralelas F_1, F_2, F_3, \dots de densidade decrescente. Logo, as velocidades de propagação nessas camadas são $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$ ” (PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 16). Conforme se verifica na Figura 56.

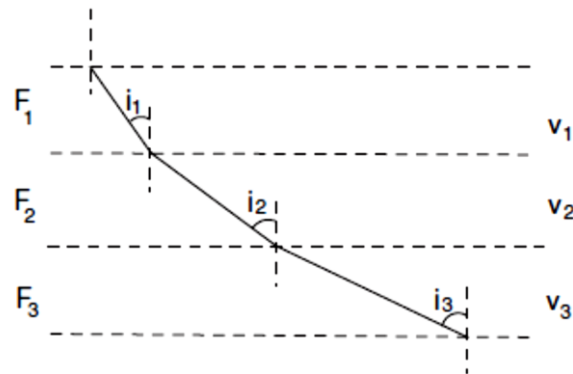


Figura 56 - Velocidade de propagação da luz em camadas paralelas.
Fonte: PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 16.

Pela lei de Snell tem-se

$$\boxed{\frac{\text{sen}(i_1)}{v_1} = \frac{\text{sen}(i_2)}{v_2} = \frac{\text{sen}(i_3)}{v_3}} \quad (53)$$

Conforme destaca Pedroso e Preciso (2014) “por considerar que essas camadas se tornam mais finas e mais numerosas e, portanto, no limite, a velocidade da luz cresce continuamente, quando a raio de luz desce” (p. 16). Com base nessa consideração de Bernoulli, é possível afirmar que:

$$\boxed{\frac{\text{sen}(i)}{v} = \text{constante}} \quad (54)$$

A equação (54) é constante em todos os pontos da trajetória da luz “e o ângulo i se torna tangente à trajetória com a vertical” (PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 16).

Os autores exemplificam supondo um sistema de coordenadas em que a “partícula (como o raio de luz) seja capaz de escolher a trajetória em que irá deslizar de P_0 a P_1 no menor tempo possível” (PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 16).

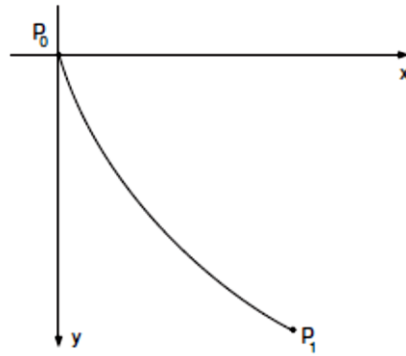


Figura 57. Trajetória da partícula de P_0 a P_1 .
Fonte: PEDROSO; PRECIOSO, 2014, p. 16.

Designando por v a velocidade da partícula de massa m , quando ela passa pelo ponto $P = (x, y)$ tem-se, pela lei de conservação de energia⁵, que

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

em que $g = 9,8\text{m/s}^2$. Desse modo

$$v = \sqrt{2gy} \quad (55)$$

Pela figura 57, observa-se que

$$\text{sen}(i) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{1}{\sec\left(\frac{\pi}{2} - i\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - i\right)}} \quad (56)$$

Substituindo, (55) e (56) em (54), tem-se

$$\frac{\text{sen}(i)}{v} = c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{2gy}} = c$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gy}} = c$$

$$\rightarrow \frac{1}{y[1 + (y')^2]} = 2gc^2$$

$$\rightarrow y[1 + (y')^2] = c \quad (57)$$

⁵ Os cálculos aqui descritos foram retirados de PEDROSO; PRECIOSO, 2014.

A equação (57) é conhecida como equação diferencial da braquistócrona, cuja solução tratar-se da enunciada cicloide.

Substituindo y' por $\frac{dy}{dx}$ e separando as variáveis tem-se

$$y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = c \rightarrow \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{c-y}{y}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{c-y}{y}} \rightarrow dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy \rightarrow \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy.$$

Fazendo a substituição $u^2 = \frac{y}{c-y}$, tem-se $y = \frac{cu^2}{1+u^2}$ e $dy = \frac{2cu}{(1+u)^2} du$ e, portanto,

$$x = \int \frac{2cu^2}{(1+u^2)^2} du.$$

Agora, utilizando a substituição trigonométrica $u = \tan(\theta)$, tem-se $du = \sec^2(\theta)d\theta$ e então

$$x = \int \frac{2c \tan^2(\theta) \sec^2(\theta)}{[1+\tan^2(\theta)]^2} d\theta = 2c \int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)} d\theta = 2c \int \sin^2(\theta) d\theta = c \int [1 - \cos 2(\theta)] d\theta =$$

$$\frac{1}{2} c [2\theta - \sin(2\theta)] + k, \text{ (k constante).}$$

Na verdade, $k = 0$, pois $y = 0$ quando $\theta = 0$, e como P_0 está na origem, deve-se ter $x = 0$ quando $\theta = 0$.

Uma vez que $y = \frac{cu^2}{1+u^2}$, tem-se:

$$y = \frac{c \tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)} = c \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} c [1 - \cos(2\theta)]$$

Portanto,

$$\boxed{x = \frac{1}{2} c [2\theta - \sin(2\theta)] \quad e \quad y = \frac{1}{2} c [1 - \cos(2\theta)]} \quad (58)$$

Em (58), fazendo $a = \frac{c}{2}$ e $\alpha = 2\theta$, conclui-se que

$$\boxed{x = a[\alpha - \sin(\alpha)], \quad y = a[1 - \cos(\alpha)]} \quad (59)$$

As equações (59) são as equações paramétricas da cicloide.

4 CÔNICAS PARAMETRIZADAS NO ENSINO MÉDIO

Visando implementar uma proposta pedagógica para o ensino de cônicas parametrizadas no 3º ano do ensino médio, elaborou-se uma aula expositiva sobre cônicas, utilizando suas parametrizações. A aula foi ministrada para alunos do 3º ano do ensino médio do colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais, unidade de Barbacena. Os estudantes já haviam estudado cônicas, pois o assunto está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do 3º ano do ensino médio.

Logo após a aula, os alunos responderam a um questionário com perguntas gerais sobre o ensino da matemática, as perguntas contemplavam a relação de cada aluno com a disciplina, sua maneira de pensar enquanto estudante e o tema proposto para a aula “A Parametrização das Cônicas”.

4.1 Perguntas gerais

Os estudantes responderam a um questionário com 15 perguntas (APÊNDICE A) sobre a sua relação com a matemática. O objetivo desse questionário é de perceber a importância e a vivência da disciplina segundo a opinião deles. A turma é composta por 15 estudantes. Para preservar a identidade dos estudantes, eles serão nomeados com as letras do alfabeto aleatoriamente.

A primeira pergunta foi “1- Consigo perceber a presença da matemática no meu cotidiano?” Os resultados estão dados na Figura 58.

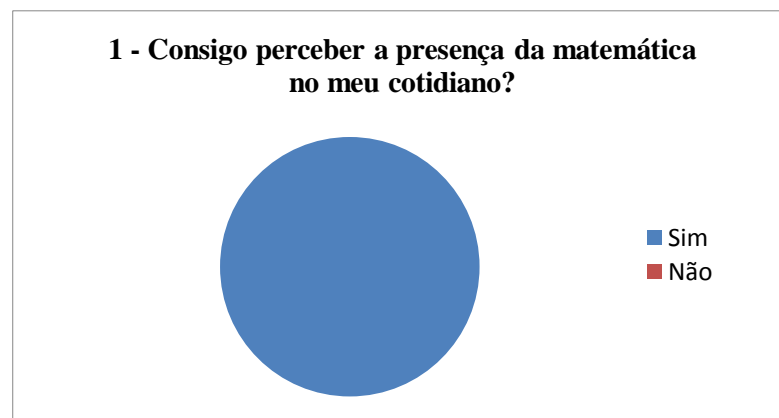


Figura 58 – Respostas à pergunta número 1.

Observa-se que todos os entrevistados são capazes de relacionar a disciplina com situações do seu dia a dia, pois 100% dos entrevistados responderam “sim”.

As perguntas seguintes foram relacionadas com a curiosidade e tentativas de solução das atividades dadas em sala “2 - Fico curioso em saber a resolução das atividades propostas pelo professor?” e “3 - Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassam, eu tento novamente?” (Figuras 59 e 60).

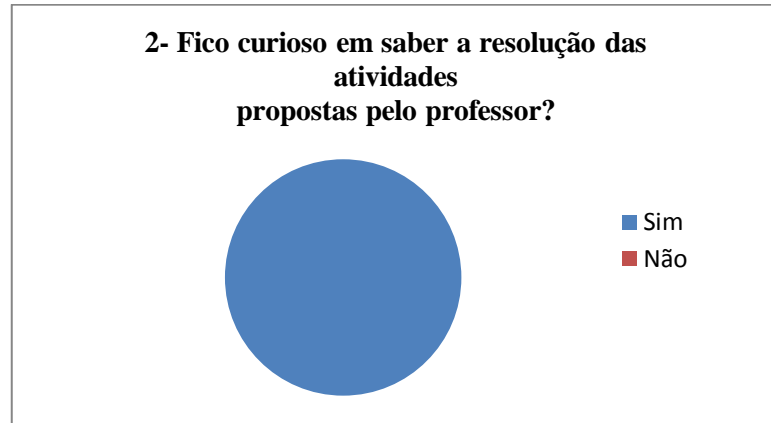


Figura 59 – Respostas à pergunta número 2.

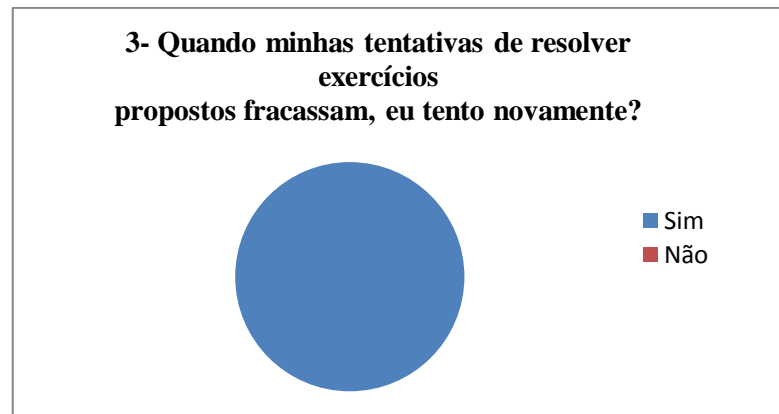


Figura 60 – Respostas à pergunta número 3.

Todos os entrevistados responderam “sim” nessas duas perguntas. Sendo possível verificar que estes alunos se interessam pela matemática, já que as atividades da disciplina são desafiantes para eles, provocando curiosidade e despertando-os a buscar a solução correta.

A pergunta 4 confirma de forma contundente a boa relação dos alunos com a disciplina. Ao serem perguntados; “Aprender matemática é um prazer?”, 100% deles responderam que “sim”, conforme Figura 61.

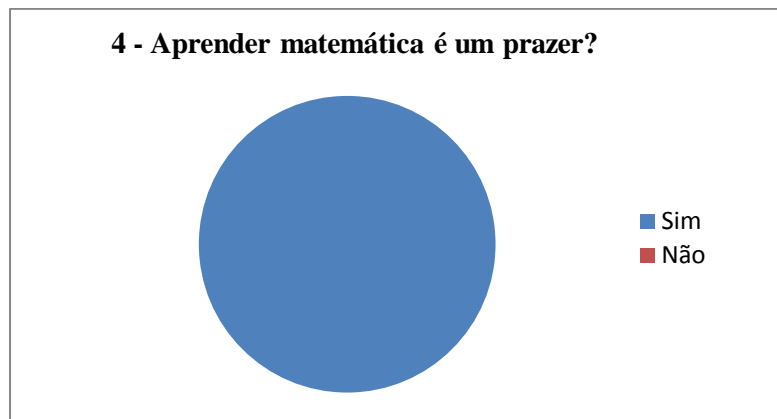


Figura 61 – Respostas à pergunta número 4.

Os 15 entrevistados responderam “sim” ao serem perguntados: “Conseguo relacionar conhecimentos de outras disciplinas com conhecimentos da matemática?” na pergunta 5, conforme figura 62.

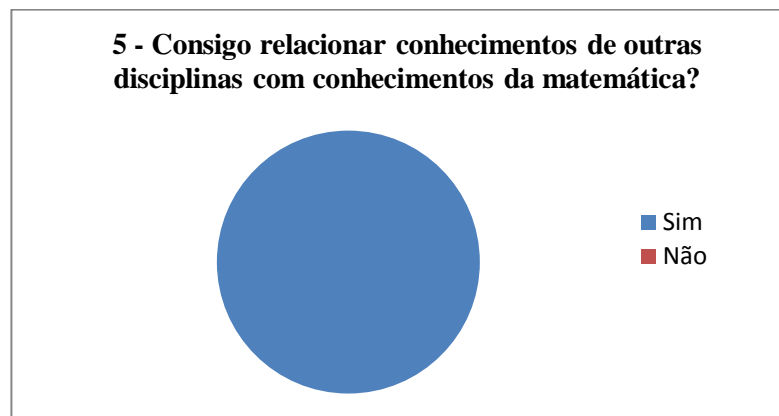


Figura 62 – Respostas à pergunta número 5.

As respostas da pergunta 5 mostram que os estudantes entrevistados não só assimilam bem o conteúdo da disciplina, mas também conseguem relacionar o conteúdo a outras disciplinas.

Observa-se que 100% dos alunos participantes da pesquisa responderam positivamente às perguntas 1, 2, 3, 4 e 5. Um dos fatores que explica esse resultado é o fato de ser uma turma que gosta de matemática e nenhum dos alunos apresentarem dificuldade de aprendizagem na disciplina.

A pergunta 6 também demonstra boa assimilação da disciplina por 80% dos entrevistados, ou 12 alunos, que responderam serem capazes de explicar fenômenos da natureza com conhecimentos de matemática, pois só quem tem bom entendimento do conteúdo é capaz de utilizar o conhecimento para explicar quaisquer fenômenos. Dos

entrevistados, 2 (13,3%) afirmaram que às vezes conseguem utilizar conhecimentos de matemática para esse fim e 1, (6,7%), respondeu que “não” (Figura 63).

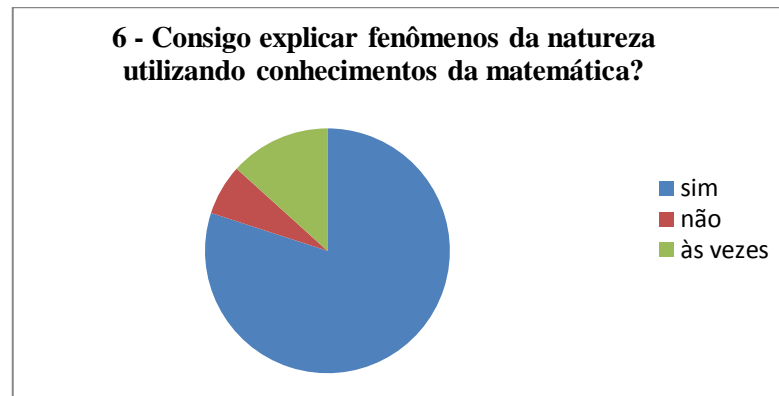


Figura 63 – Respostas à pergunta número 6.

“Fico frustrado(a) ao não conseguir resolver determinado problema?” Essa é a pergunta 7 e suas respostas mostram que 93,3% dos alunos, 14 deles, se frustram quando não resolve uma questão, conforme a Figura 64. Isso mostra que eles se preocupam em e tentam resolver as questões que lhe são propostas, sentem-se satisfeitos diante disso, e quando isso não acontece, frustram-se. Entre os entrevistados, somente um não se incomoda ao não dar conta de resolver determinado problema.

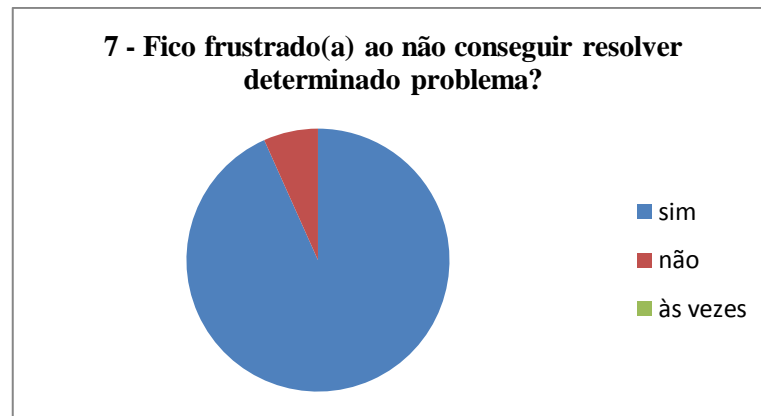


Figura 64 – Respostas à pergunta número 7.

Em relação à pergunta 7, vale ressaltar que esse sentimento de frustração não deve ser constante, pois, assim, pode-se tornar desinteressante em relação á aprendizagem, uma vez que os alunos, de modo geral, perdem o interesse na aprendizagem e se desanimam diante das dificuldades encontradas em alguns exercícios.

Com a pergunta 8 “Sinto-me desafiado em realizar as atividades propostas?”, 80% dos entrevistados dizem que “sim”, enquanto os outros 20% afirmam que às vezes (Figura 65)



Figura 65 – Respostas à pergunta: número 8.

De modo geral, com essas respostas, conclui-se que a disciplina atrai a atenção deles e que eles se envolvem com a solução das atividades propostas de maneira positiva, motivados em encontrar a solução dos exercícios.

“Tenho dificuldade em aprender matemática?” Essa é a pergunta 9 e a que teve maior variabilidade de respostas. Apesar disso, 60% dos alunos, 9 dos 15 participantes, responderam que não têm dificuldade em aprender matemática. 2 deles, ou 13,33%, disseram que às vezes têm e 4, ou 26,67%, responderam que “sim”, têm dificuldades (Figura 66).



Figura 66 – Resposta à pergunta número 9.

Como no ensino médio os conteúdos estão relacionados e dependem do que foi aprendido no ensino fundamental, essa dificuldade pode estar relacionada ao conteúdo que não se consolidou nas fases anteriores. Essa dificuldade pode estar relacionada também com a dificuldade do aluno de perceber a utilidade prática da matemática, sua utilidade a aplicação. Essa situação pode tornar a disciplina desinteressante e, conseqüentemente, difícil.

A pergunta número 10 ajuda a reforçar a reflexão da pergunta 9. Ao serem perguntados se acham a matemática chata, 66,67% ou 10 alunos disseram que “não” 33,33%

ou 5 disseram que às vezes. Apesar de nenhum afirmar que “sim”, a matemática é chata, a grande maioria dos alunos, ao responder por que, relacionou sua resposta com a compreensão e aplicação prática da matéria (Figura 67).

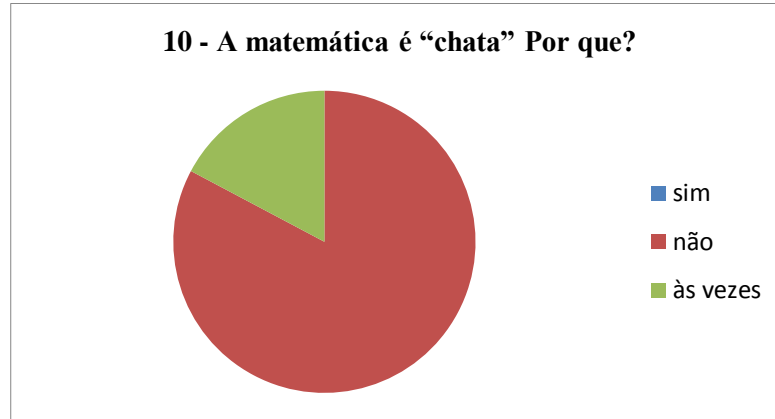


Figura 67 – Resposta à pergunta número 10.

Isso confirma que o desinteresse está atrelado a falta de compreensão do conteúdo, como se pode ver em alguns exemplos: “Não. Ela é incrível quando compreendida.” Aluno A. “Não. A matemática se torna “chata” quando não conseguimos perceber suas aplicações no dia-a-dia.” Aluno B. “ Não, ela (a matemática) está presente em tudo.” Aluno C “As vezes. Pois nem tudo que aprendemos na escola vemos aplicação em nossas vidas.” Aluno D

A pergunta 11 questiona os estudantes sobre a prática de resolução dos problemas e exercícios, se eles têm o hábito de resolver exercícios e problemas para testar os conhecimentos. 73,33% ou 11 dos 15 entrevistados disseram que “sim”, praticam a resolução de exercícios e problemas e 26,67% ou 4 deles disseram que “às vezes” (Figura 68).

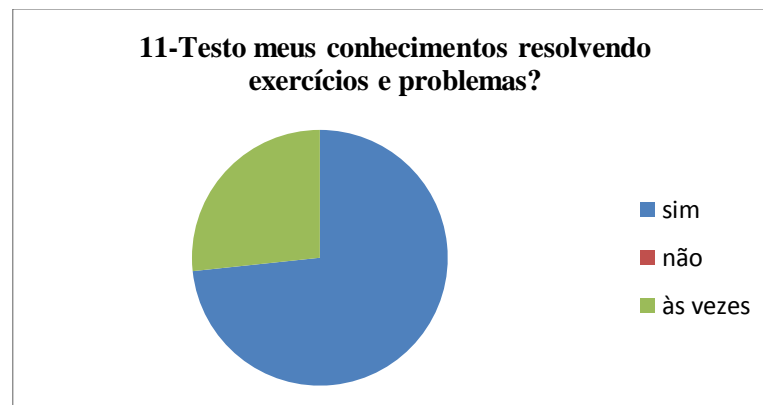


Figura 68 – Resposta à pergunta número 11.

Com esse resultado, verifica-se que boa parte deles se dedica ao estudo da matemática através da resolução de exercícios.

“Tenho menos problemas com a matemática do que com outras disciplinas?” é a pergunta 12. Entre os entrevistados 80% ou 12 responderam que “sim”, 6,7% ou 1, que “não” e 13,3% ou 2, que “às vezes” (Figura 69).

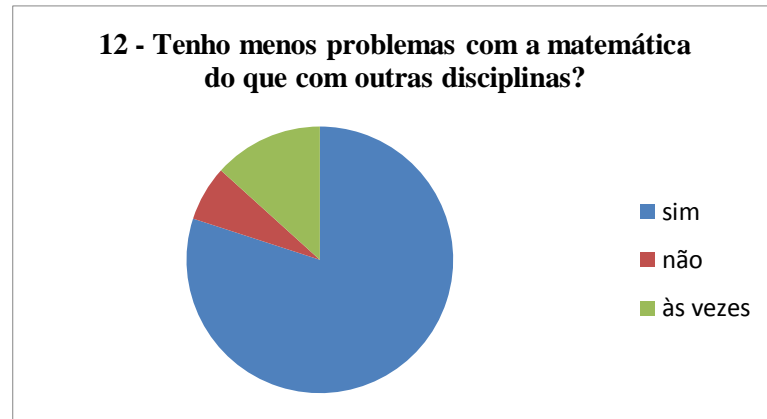


Figura 69 – Resposta à pergunta número 12.

Observa-se que, no geral, os alunos da turma estudada podem ter problemas em outras disciplinas, mas a matemática não representa problemas quanto à compreensão, dificuldades ou nota.

A pergunta 13 reforça a anterior. “Consigo bons resultados em matemática?”, 80% ou 12 entre os 15 entrevistados disseram que “sim” e somente 3 ou 20% que às vezes (Figura 70).

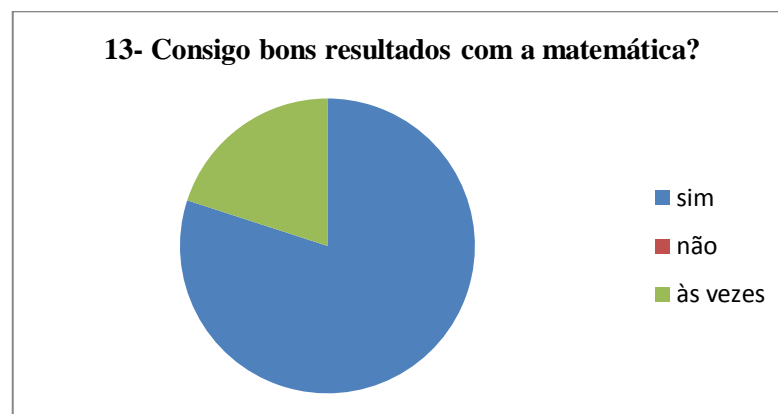


Figura 70 – Resposta à pergunta número 13.

Percebe-se mais uma vez a boa relação da turma com a disciplina.

“As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas?” é a pergunta 14. 93,33% ou 14 responderam que “sim” e apenas 1 ou 6,67% que “não” (Figura 71).

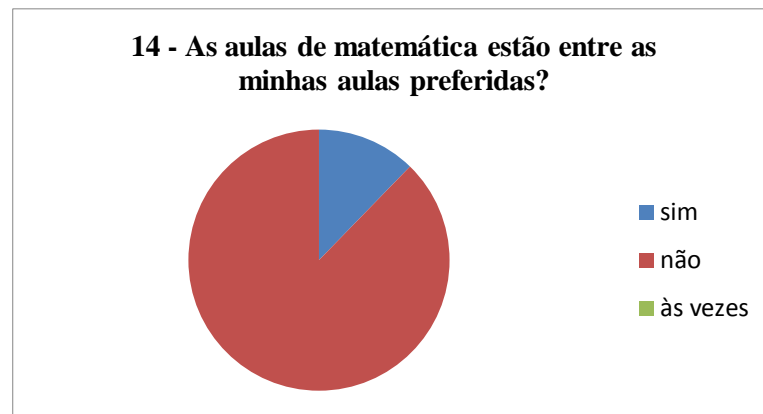


Figura 71 – Resposta à pergunta número 14.

Conclui-se de maneira clara que os alunos gostam de matemática, e como já se verificou em perguntas anteriores, a boa relação com a matéria está relacionada à compreensão e aplicabilidade do conteúdo. Portanto, a mesma porcentagem de alunos que tem a matemática como aula preferida, consegue perceber a presença dela fora da vida escolar. Ou seja, 93,33 ou 14 estudantes responderam que “sim” quando perguntados: “Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola?”. Essa é a pergunta 15. E 6,67% ou 1 deles disse que “às vezes” (Figura 72).

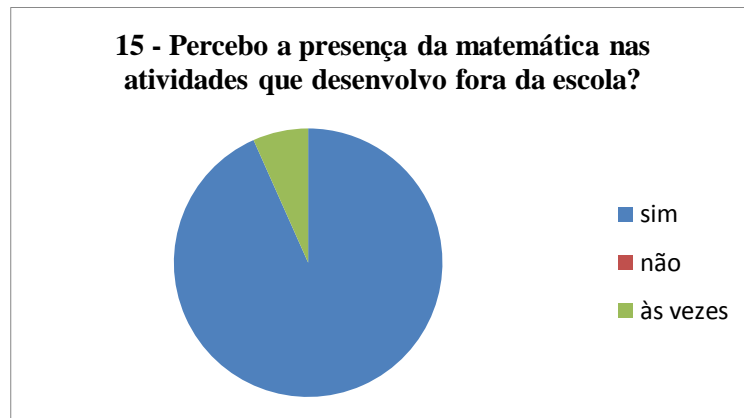


Figura 72– Resposta à pergunta número 15.

Com este questionário, pretende-se avaliar a relação da turma com a matemática, onde observa-se a turma se interessa pelo ensino da disciplina, a relaciona com atividades do seu cotidiano, conseguem bons resultados e gosta da matemática. Portanto, pode-se dizer que é uma turma diferenciada em relação a essa disciplina.

Como já dito, a pesquisa foi realizado no Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais, unidade Barbacena, que é uma escola pública também diferenciada, pois é voltada para filhos de militares da polícia e bombeiros e é possível verificar um melhor nível de aprendizagem em comparação com a maioria das escolas públicas do Estado de Minas

Gerais. Um dos fatores que justifica isso pode ser a disciplina, respeito e comprometimento dos alunos em função do regimento estabelecido na escola.

A escolha dessa turma para a participação na pesquisa se deu a partir da experiência deste autor, que leciona para estes alunos e observa a boa aceitação dos alunos quanto à matemática.

Diante dos bons resultados dessa turma em relação à aprendizagem da matemática e considerando o tema parametrização de curvas importante na formação dos discentes, apresento a seguir uma proposta do ensino de cônicas parametrizadas para uma turma do 3º ano do ensino médio.

4.2 Aula proposta

“A parametrização das cônicas” foi o tema trabalhado na aula ministrada para a turma de 15 alunos do 3º ano do ensino médio. O objetivo era explicar aos alunos a utilidade de se parametrizar uma circunferência e uma elipse e como parametrizá-las, mostrando algumas aplicações no cotidiano, além de incluir a primeira Lei de Kepler. Esses assuntos, geralmente, não são tratados no ensino médio de forma clara e objetiva.

Para explanar sobre o tema, algumas das questões de destaque da aula foram: Para que parametrizar? Qual a sua utilidade? Como é esboçar um gráfico de uma equação parametrizada?

As seguintes situações problemas foram utilizadas para as reflexões iniciais da aula:

- 1) Toda cônica pode ser representada por uma função $y = f(x)$?
- 2) Como determinar a posição de um planeta, usando a equação da elipse?
- 3) Por que Parametrizar?

Imagine um corpo móvel, uma formiga, por exemplo, que se move por esta curva como mostra a Figura 73.

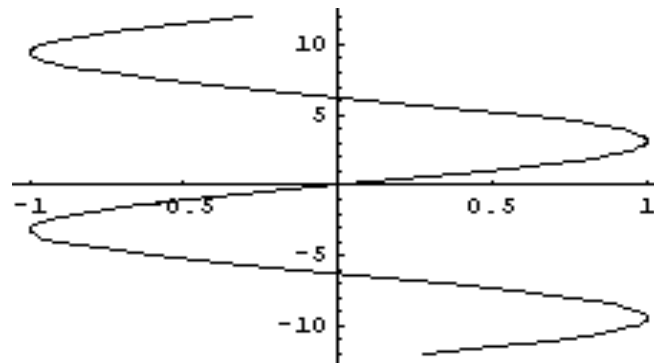


Figura 73 - Curva que descreve a trajetória de uma formiga.
 Fonte: <http://www.dydx.com.br/minicursos/mathematica/curso.html>

Essa curva poderia ser representada por uma função $y = f(x)$?

Observe que quando se traça uma reta vertical sobre uma curva, a reta corta a curva em mais de um ponto. Entretanto, para ser uma função $y = f(x)$, a reta vertical só poderá cortar a curva em um único ponto segundo o “teste da reta vertical”. Então, devido à necessidade de estudar o comportamento de curvas que não são funções vem a ideia de parametrização de curvas.

Parametrizar é deixar as coordenadas x e y em função de um parâmetro t , por exemplo, o qual pode indicar alguma grandeza física como o tempo.

De um modo geral, se uma partícula se desloca sobre uma curva C do plano, de um ponto $A(x_0, y_0)$ até um ponto $B(x_1, y_1)$, ela pode ter sua posição determinada em cada instante t por duas funções do tempo $x(t)$ e $y(t)$, ditas funções paramétricas.

Em casos mais gerais, o parâmetro t não representa, necessariamente, o tempo e, de fato, seria possível usar qualquer outra letra para representá-lo. Mas em muitas aplicações físicas envolvendo curvas parametrizadas, o parâmetro denota o tempo e, portanto, pode-se interpretar o ponto $(x, y) = [f(t), g(t)]$ como a posição de uma partícula no tempo t .

Outras experiências físicas como a trajetória de um objeto móvel (um automóvel viajando numa estrada, um projétil lançado por um canhão, um satélite em órbita terrestre) descreve uma curva no plano que pode ser representada por uma equação cartesiana, isto é, uma equação envolvendo as variáveis x e y . No entanto, uma equação deste tipo sozinha não basta para descrever completamente o movimento do objeto: ela não fornece a velocidade desenvolvida pelo automóvel durante o trajeto ou o instante em que o satélite passa sobre um determinado ponto do seu percurso.

4.2.1 Parametrização de uma circunferência

Considere-se a equação de uma circunferência de centro $C(0,0)$ na origem e raio R , $x^2 + y^2 = R^2$, como mostrado na Figura 74.

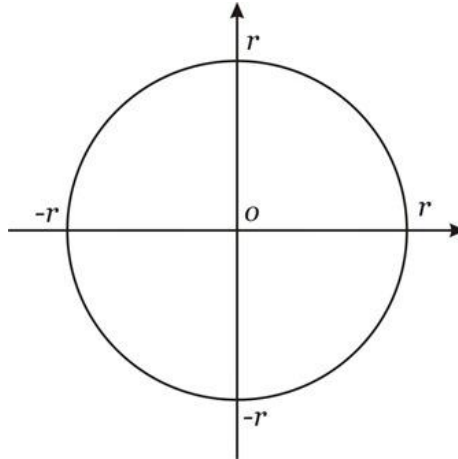


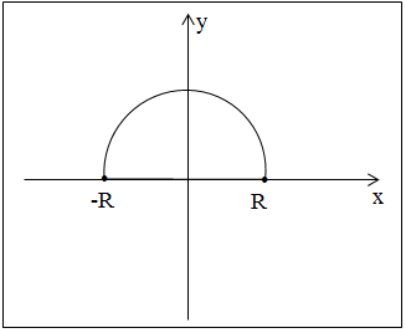
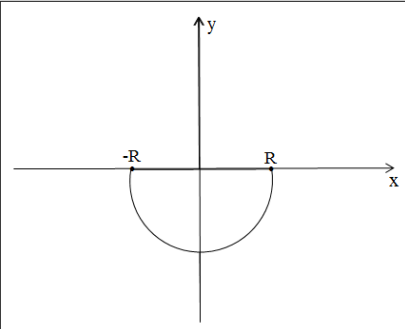
Figura 74. Circunferência de centro na origem e raio r .
Fonte: KILHIAN, 2009.

Isolando y da equação da circunferência, tem-se a relação:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x^2} \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}, x \in [-R, R]$$

Nesse caso, f , tem duas leis de correspondência e não é uma função. Entretanto, cada lei de correspondência é uma função como pode ser mostrado no Quadro 1.

Quadro 1 – Esboço do gráfico das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$

Função	Equação da função	Gráfico da função
$f_1(x)$	$f_1(x) = \sqrt{R^2 - X^2}, x \in [-R, R]$	
$f_2(x)$	$f_2(x) = -\sqrt{R^2 - X^2}, x \in [-R, R]$	

Devido a representação do gráfico em partes, o esboço do gráfico com $f(x)$ dificulta a representação da curva.

4.2.2 Parametrização da circunferência em coordenadas polares

Observe o triângulo retângulo inserido numa circunferência na Figura 75

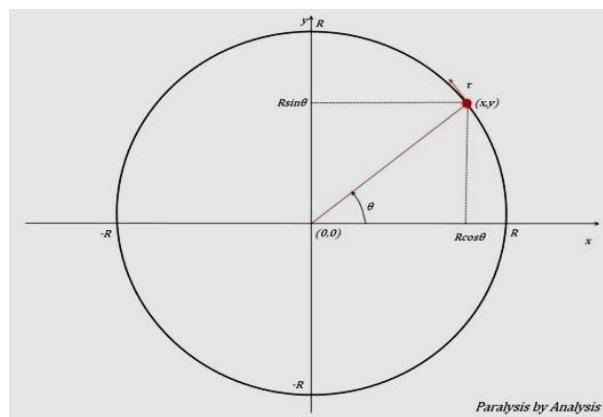


Figura 75 - Triângulo retângulo formado por um ponto qualquer (x, y) e um ângulo θ .

Fonte: PARALYSIS BY ANALYSIS, 2012⁶.

Do triângulo retângulo acima se tem: $\text{sen}(\theta) = \frac{y}{R}$, $\text{cos}(\theta) = \frac{x}{R}$.

Isolando x e y em função de θ , tem-se a seguinte parametrização da circunferência de raio R, centralizada na origem:

$$\begin{cases} x = R\cos(\theta) \\ y = R\text{sen}(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(\theta) = R\cos(\theta) \\ y(\theta) = R\text{sen}(\theta) \end{cases}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Assim, se consegue saber as coordenadas x e y em função do parâmetro θ .

A maneira de exemplo do gráfico das equações paramétricas da circunferência, pode-se fornecer valores a θ e obter pontos (x, y) conforme a Tabela 1:

Tabela 1 – Obtenção dos pontos A, B, C, D e E, a partir de valores escolhidos para θ

θ	x	y	Pontos
0	R	0	A(R, 0)
$\frac{\pi}{2}$	0	R	B(0, R)
π	-R	0	C(-R, 0)
$\frac{3\pi}{2}$	0	-R	D(0, -R)
2π	R	0	E(R, 0)

Então, marca-se os pontos A, B, C, D e E, no plano (Figura 76):

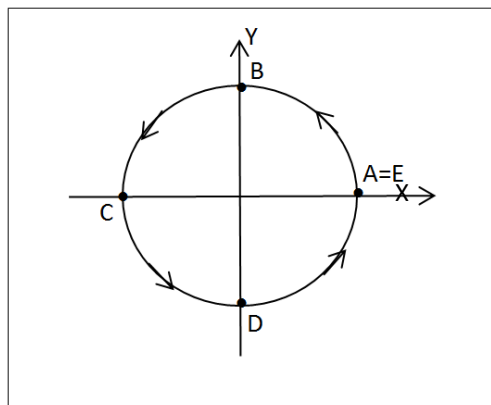


Figura 76 - Circunferência com os pontos A, B, C, D e E, mostrando o sentido da trajetória da curva.

⁶ Blog Paralysis by Analysis. Disponível em: <<https://paralysisbyanalysis52.wordpress.com/2012/05/02/curiosidade-ii-o-comprimento-de-uma-circunferencia/>>. Acesso em: 23 maio 2018.

Observa-se que, à medida que θ é crescente, o sentido da curva é anti-horário (Figura 76).

Outra parametrização da circunferência é:

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos(\theta) \\ y(\theta) = r\sin(\theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

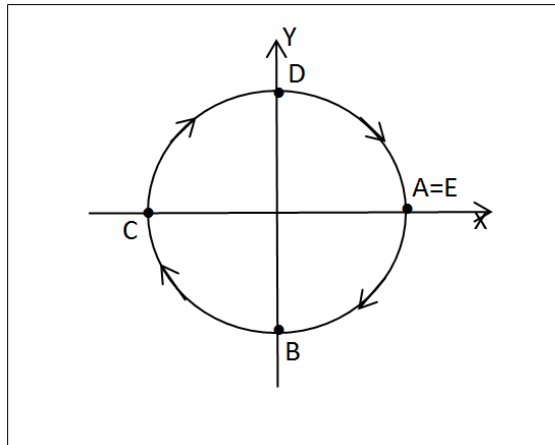


Figura 77 - Circunferência com os pontos A,B,C,D e E, mostrando que muda o sentido da trajetória.

Observa-se que, à medida que θ é crescente, o sentido da curva é horário (Figura 77).

4.2.3 Parametrização da elipse

Considere uma elipse de centro na origem como mostra a Figura 78:

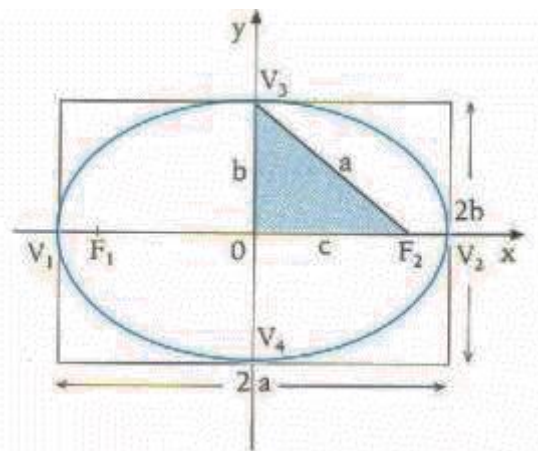


Figura 78 - Elipse de centro na origem.

Fonte: PONTO⁷, 2012.

Onde:

- F_1 e F_2 são focos;
- O é o centro;
- V_1V_2 formam o eixo maior;
- V_3V_4 formam o eixo menor;
- $2c$ é a distância focal;
- $2a$ é a medida do eixo maior;
- $2b$ é a medida do eixo menor;
- c é a excentricidade.

Seja $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a elipse de centro na origem e seja $C: \alpha^2 + \beta^2 = 1$ a circunferência de centro na origem e raio = 1. Logo, $\alpha = \frac{x}{a}$ e $\beta = \frac{y}{b}$.

Da parametrização da circunferência, tem-se:

$$\alpha = \cos(\theta) \rightarrow \frac{x}{a} = \cos(\theta)$$

$$\beta = \sin(\theta) \rightarrow \frac{y}{b} = \sin(\theta)$$

Logo, tem-se a seguinte parametrização da elipse ε :

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos(\theta) \\ y(\theta) = b\sin(\theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para fornecer pontos do gráfico da elipse, a partir da parametrização da mesma, dão-se valores a θ como mostra a Tabela 2:

Tabela 2 – Obtenção dos pontos A, B, C, D e E, a partir de valores escolhidos para θ

θ	X	Y	Pontos
0	a	0	A(a, 0)
$\frac{\pi}{2}$	0	b	B(0, b)
π	-a	0	C(-a, 0)
$\frac{3\pi}{2}$	0	-b	D(0, -b)
2π	a	0	E(a, 0)

⁷ Blog Ponto. Disponível em: <<http://pontomdsst.blogspot.com.br/>>. Acesso em: 25 maio 2018.

Marcando os pontos da Tabela 2 no plano tem-se:

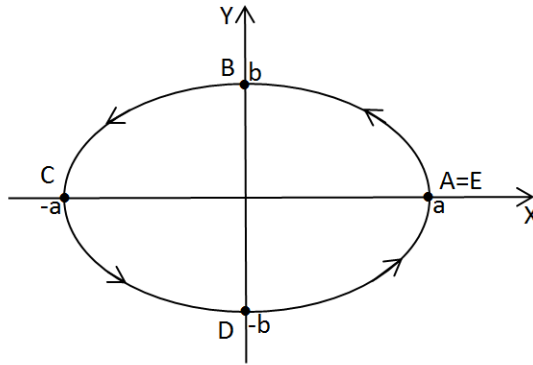


Figura 79 - Elipse com os pontos A,B,C,D e E, mostrando o sentido anti-horário.

A parametrização da elipse gera o sentido anti-horário da curva (Figura 79). Entretanto, pode-se ter uma parametrização que gera o sentido horário, Figura 80:

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos(\theta) \\ y(\theta) = b\sin(\theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

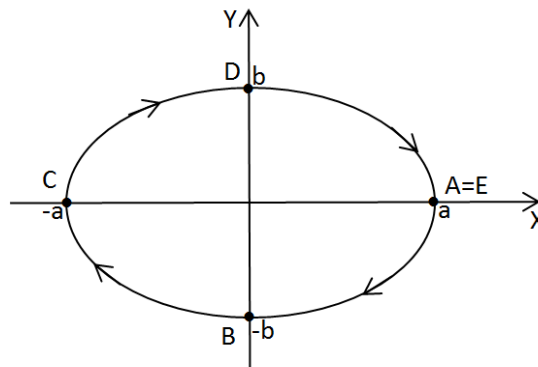


Figura 80 - Elipse com os pontos A,B,C,D e E, mostrando que muda o sentido horário.

4.2.4 Aplicações

Primeira lei de Kepler das órbitas elípticas. O planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos.

Na Figura 81 observam-se os elementos da Primeira Lei de Kepler.

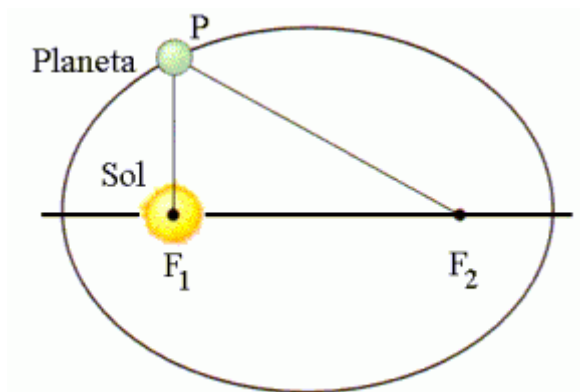


Figura 81 - Trajetória elíptica de um planeta P em torno do sol.
Fonte: MUNDIM, 1997.

Ensina-se, no nível médio, que as órbitas dos planetas do sistema solar são regidas pelas três leis de Kepler, das quais a primeira afirma que: “a órbita de qualquer planeta do sistema solar é elíptica, com o Sol em um de seus focos”.

Os livros tradicionais de Física mostram elipses representativas das órbitas (na maioria das vezes com excentricidades exageradas) e apresentam tabelas com dados astronômicos relativos aos planetas, mas não determinam as equações dessas elipses. Por outro lado, em Matemática, no estudo das cônicas, o aluno se depara com a elipse, aprende sua equação e propriedades como a excentricidade etc., sem que, em geral, lhe seja mencionada alguma aplicação. A partir daí surgiu a ideia de mostrar a utilidade das elipses no estudo das órbitas dos planetas, com o uso de dados astronômicos e escolhas apropriadas de fatores de escala.

O objetivo desta parte da aula é, então, obter a equação cartesiana da órbita de um planeta em função do seu **afélio** (o ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol) e do seu **periélio** (o ponto da órbita em que ele está mais próximo do Sol).

As distâncias entre o Sol e os afélios e periélios dos planetas do sistema solar são facilmente encontradas em livros de Astronomia ou em sites adequados da internet.

1º) Criando um sistema cartesiano no plano orbital

No plano orbital do planeta (plano que contém a sua órbita), imagina-se, com o auxílio da Figura 82, um eixo x passando pelos dois focos da elipse: um o Sol, S , e o outro o pequeno ponto à direita. O eixo y é perpendicular ao x e passa pelo Sol, que é o único elemento “fixo” do sistema.

A Figura 82 também mostra o planeta (de símbolo ☿) no seu afélio e periélio, sendo A e P , respectivamente, a distância do afélio e do periélio ao Sol.

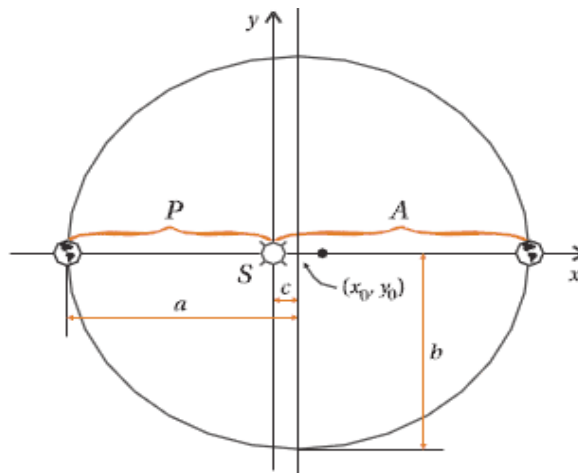


Figura 82 - Planeta (simbolizado por ☿) no seu afélio e periélio.
Fonte: ESQUEF; RIBEIRO, 2012.

2º) Obtendo a posição do planeta em função de A e P

Partindo da equação da elipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, em que a é a metade do eixo maior, b é a metade do eixo menor e x_0 e y_0 são as coordenadas do centro da elipse no sistema cartesiano. A distância entre os focos vale $2c$. Nesse caso, $x_0 = c$ e $y_0 = 0$. Então, a equação da elipse fica:

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (61)$$

Da figura 82, tem-se $A + P = 2a$ e $P + 2c = A$, o que permite obter a e c em função de A e P :

$$a = \frac{A+P}{2} \quad \text{e} \quad c = \frac{A-P}{2}$$

Substituindo esses valores de a e c na relação conhecida entre a , b e c , que é $a^2 = b^2 + c^2$, obtém-se b em função de A e P :

$$\left(\frac{A+P}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{A-P}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad b^2 = \frac{1}{4}[(A+P)^2 - (A-P)^2] = \frac{1}{4}2A \cdot 2P = A \cdot P$$

A equação (61) da elipse pode, então, ser escrita em função de A e P como:

$$\frac{\left(x - \frac{A-P}{2}\right)^2}{\left(\frac{A+P}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{A \cdot P} = 1 \quad (62)$$

A excentricidade $e = \frac{c}{a}$ da elipse é dada por

$$e = \frac{\frac{A - P}{2}}{\frac{A + P}{2}} = \frac{A - P}{A + P} \quad (63)$$

A tabela 3 mostra, em Unidade Astronômica (U.A.)⁸, as medidas de A, as medidas de P e as excentricidades e, dos planetas, calculadas através da relação acima.

Tabela 3 – Medidas de A, P e e dos planetas usando a relação (63)

Planeta	A (U.A.)	P (U.A.)	e
Mercúrio (Me)	0,46670	0,30750	0,20563
Vênus (V)	0,72823	0,71834	0,00677
Terra (T)	1,01671	0,98329	0,01671
Marte (M)	1,66599	1,38133	0,09341
Júpiter (J)	5,45517	4,95156	0,04839
Saturno (S)	10,05351	9,02063	0,05413
Urano (U)	20,09647	18,28606	0,04717
Netuno (N)	30,32713	29,81080	0,00859

Fonte: ESQUEF; RIBEIRO, 2012.

Analisando inicialmente as excentricidades das órbitas. Sabe-se que a excentricidade e de uma elipse é tal que $0 < e < 1$; para $e = 0$, a elipse se degenera em uma circunferência e, para $e = 1$, em um segmento de reta. Se e se aproxima de zero, então A se aproxima de P e a equação (62) tende a equação da circunferência: $x^2 + y^2 = R^2$, com $R^2 \cong A^2 \cong P^2$.

Observando as excentricidades na tabela 3, vê-se que, com exceção de Mercúrio, elas estão na ordem dos centésimos ou dos milésimos, ou seja, todas bem próximas do zero. Conclui-se, então, que as elipses das órbitas dos planetas têm formas parecidas com circunferências.

3º) Plotagem das órbitas elípticas

⁸ Unidade Astronômica (U.A.) é uma medida de distância utilizada em Astronomia. A unidade astronômica é definida como a distância média entre a Terra e o Sol. Uma U.A. equivale a 149.597.870,7 km.

O programa de computador usado na plotagem das órbitas foi o GeoGebra⁹, utilizando o modo implícito com entradas do tipo T: $4(x-at/2+pt/2)^2/(at+pt)^2+y^2/(at*pt) = 1$ $\{pt \leq x \leq at\}$ onde T foi o identificador da função para a Terra, at e pt parâmetros que receberam os valores das distâncias ao Sol do afélio e periélio da Terra.

O GeoGebra exige que os valores dos parâmetros da função sejam informados previamente na janela de entrada. A fórmula principal pode ser copiada para a caixa de entrada e, em seguida, atualizar os parâmetros para a órbita correspondente.

As equações usadas para gerar as órbitas foram obtidas substituindo os valores de A e P dos respectivos planetas na equação (62). A Tabela 4 mostra as equações orbitais obtidas dos oito planetas do sistema solar.

Tabela 4 - equações orbitais obtidas dos oito planetas do sistema solar

Planeta	Equação orbital
Mercúrio (Me)	$6.67264x^2 + 6.96701y^2 - 1.06195x = 0.95775$
Vênus (V)	$1.91126x^2 + 1.91135y^2 - 0.01871x = 0.99995$
Terra (T)	$1.00000x^2 + 1.00028y^2 - 0.03342x = 0.99972$
Marte (M)	$0.86150x^2 + 0.86908y^2 - 0.24523x = 1.98255$
Júpiter (J)	$0.07387x^2 + 0.07404y^2 - 0.03720x = 1.99532$
Saturno (S)	$0.02199x^2 + 0.02205y^2 - 0.02271x = 1.99414$
Urano (U)	$0.00543x^2 + 0.00544y^2 - 0.00983x = 1.99555$
Netuno (N)	$0.00221x^2 + 0.00221y^2 - 0.00114x = 1.99985$

Fonte: ESQUEF; RIBEIRO, 2012.

A figura 83, a seguir, é uma cópia da tela do GeoGebra e mostra as órbitas plotadas e a posição do Sol. Os eixos cartesianos foram “escondidos” e as órbitas foram traçadas, para maior facilidade, em um mesmo plano, embora se saiba que os planos orbitais dos planetas não são coincidentes.

⁹ Programa disponível em: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

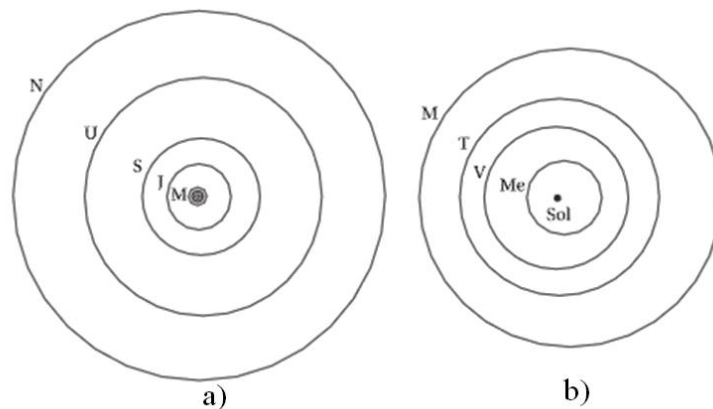


Figura 83 - Órbitas plotadas e a posição do Sol.
 a) escala: 3 mm = 1 U.A.
 b) escala: 3 cm = 1 U.A.
 Fonte: ESQUEF; RIBEIRO, 2012.

Observa-se que na órbita de Mercúrio (Me), o Sol aparece bem mais deslocado do centro da elipse do que na da Terra ou na de Vênus. Isso porque a excentricidade de Mercúrio é cerca de 12 vezes maior do que a da Terra e cerca de 30 vezes maior do que a de Vênus. Também é possível observar que a equação da órbita de Netuno, com os coeficientes representados com precisão de 5 casas decimais, corresponde à equação de uma circunferência de equação:

$$\left(x - \frac{0,00114}{2 \times 0,00221}\right)^2 + y^2 = R^2,$$

Sendo,

$$R = \frac{\sqrt{(-0,00114)^2 - 4 \times 0,00221 \times (-1,99985)}}{2 \times 0,00221} = 30,08282$$

Resultado bem próximo do valor do raio médio de Netuno.

4.2.5 Exemplos envolvendo equações paramétricas

Exemplo 23¹⁰: Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas:

$$x = t^2 - 2t \text{ e } y = t + 1.$$

¹⁰ O exercício foi retirado de UFRJ. Universidade Federal de Juiz de Fora. Departamento de Matemática. Curvas no plano e parametrizações. 2003. Disponível em: <<http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/parametriza1.html>>. Acesso em: 27 jun. 2018.

Solução:

Para cada valor de t , obtém-se um ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ que pertence à curva que pretende-se traçar. Por exemplo, se $t = 0$, então $x = 0$ e $y = 1$. Assim, determina-se o ponto $(0,1)$ que pertence à curva. Para traçar o gráfico da curva, é preciso marcar no plano cartesiano vários pontos (x, y) determinados por diversos valores do parâmetro e uni-los de modo a obter a curva em questão.

Fazendo uma tabela para os valores de t , e a partir dos pontos obtidos, esboça-se a curva determinada pelas equações $x = t^2 - 2t$ e $y = t + 1$. (Figura 84).

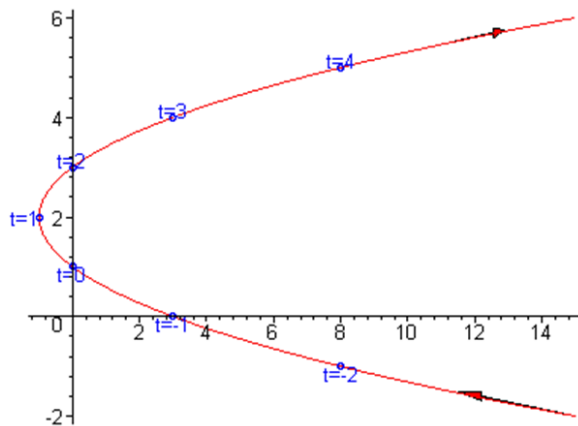


Figura 84 – Esboço da curva do exercício 1
Fonte: UFRJ, 2003.

Completando a tabela corretamente e traçando a curva, obteve-se um gráfico como mostrado na Figura 84. Uma partícula cuja posição é dada por equações paramétricas se move ao longo da curva na direção do crescimento do parâmetro t , como é indicado pelas setas.

Note que os pontos consecutivos marcados na curva aparecem em intervalos de tempo iguais, mas não a distâncias iguais. Isso ocorre porque a partícula desacelera e então acelera quando t aumenta.

A partir do gráfico obtido, parece que a curva traçada é uma parábola.

Exemplo 24: Eliminando o parâmetro t da equação paramétrica dada no exercício 1, obtenha a equação cartesiana da curva e, desse modo, comprove que a curva em questão é realmente uma parábola.

Solução:

Isolando t em uma das equações e substituir na outra, chega-se na equação cartesiana $x = y^2 - 4y + 3$, que é a equação de uma parábola.

Completando quadrados, tem-se uma parábola $(y - 2)^2 = x + 1$, parábola com vértice $(-1, 2)$.

Conclusões:

- 1) Fazer o gráfico com a equação cartesiana $x = y^2 - 4y + 3$ é complicado, pois teria que separá-la em duas funções, respeitando os respectivos domínios, já que essa equação não pode ser representada por uma função $f(x)$.
- 2) Parametrizar a equação ou fazer o gráfico por meio de uma tabela na equação já parametrizada facilita o esboço do gráfico, além de ser precisa com relação a um corpo móvel, por exemplo, mostrando a sua posição, em coordenadas (x, y) , a cada instante t .
- 3) O tema parametrização de cônicas permite a interdisciplinaridade entre os conteúdos de matemática e física.

Referências

SIMÕES, George. **Cálculo com geometria analítica**, v. 2. São Paulo: Mc Graw Hill, 1985.

ESQUEF, Paulo Antonio; RIBEIRO, Sérgio Armando. **Elipse e as órbitas dos planetas**. v. 77, 2012. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/77/7.html>>. Acesso em: 26 maio 2018.

UFRJ. Universidade Federal de Juiz de Fora. Departamento de Matemática. Curvas no plano e parametrizações. 2003. Disponível em: <<http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/parametriza1.html>>. Acesso em: 27 jun. 2018.

4.3 As impressões dos alunos após a aula

Após a aula sobre “A parametrização das cônicas”, os alunos responderam um questionário específico sobre o assunto. Foram 13 perguntas cujas respostas mostram o entendimento e a opinião dos estudantes em relação ao tema.

Na primeira pergunta, observa-se que o assunto parametrização das cônicas era totalmente novo para os alunos. Todos os 15 entrevistados (100%) responderam que nunca tinham ouvido falar de parametrizações (Figura 85).

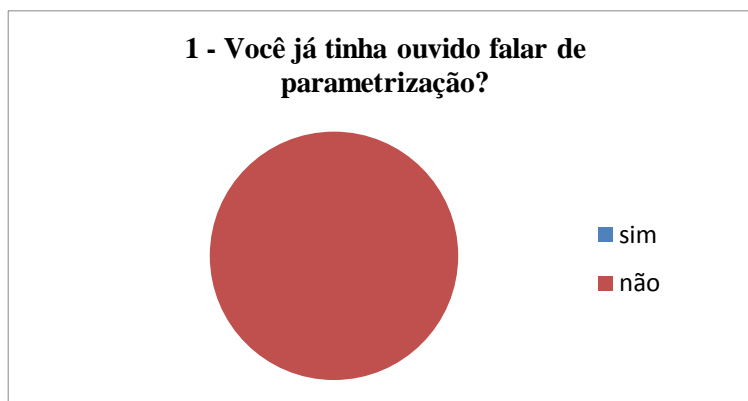


Figura 85 – Respostas da pergunta número 1.

Eles nunca terem ouvido falar de parametrizações pode ser explicado pelo fato de o assunto não se encontrar disponível nos livros didáticos que eles utilizam ou já utilizaram durante os três anos do ensino médio e a matéria também nunca ter sido ensinada por outro professor durante esse período.

Ao serem perguntados sobre a compreensão do assunto através das explicações feitas durante a aula, pergunta 2, 13 deles, ou 86,67%, garantem que compreenderam. Dois responderam que “um pouco” e nenhum respondeu não ter entendido (Figura 86).

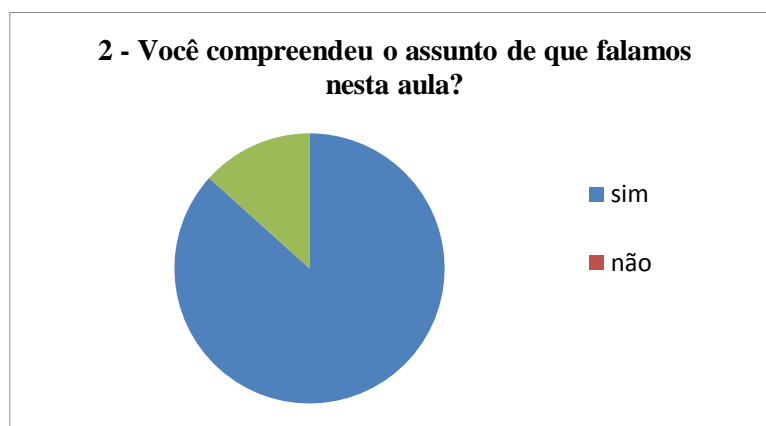


Figura 86 – Respostas da pergunta 2.

Essas respostas mostram que o assunto é possível de ser compreendidos nesse nível do ensino. Porém, o ideal é que o professor tenha mais tempo para tratar de parametrizações de cônicas. Neste estudo, foi realizada somente uma aula, possivelmente, com mais aulas, a compreensão chegasse a 100% no caso da turma estudada.

As respostas para a pergunta número 3 confirmam o bom entendimento dos alunos sobre o assunto da aula. Ao serem perguntados: Para que serve a parametrização de uma cônica? Os alunos foram coerentes quanto a utilização prática da parametrização de uma cônica. É possível verificar que quase todas as respostas como, por exemplo, “Facilita a

compreensão e a localização de pontos específicos de uma cônica” (Aluno E). “Através de um parâmetro, este variável, é possível, por exemplo, calcular a localização de um corpo” (Aluno F). “Serve para reescrever uma equação em função de um parâmetro” (Aluno G). “Descrever a trajetória de uma partícula” (Aluno H)

As perguntas 4 e 5 se complementam. Conforme a figura 87, na 4, 100% dos estudantes afirmaram que consideram importante o estudo de parametrização de cônicas, mostrando entendimento sobre assunto tratado na aula.

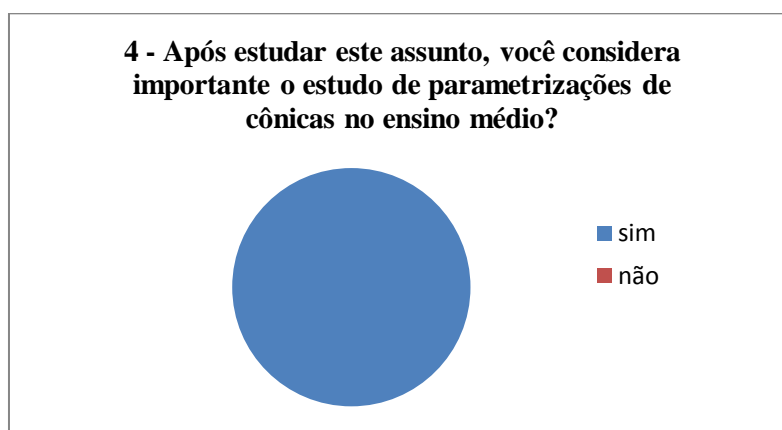


Figura 87 – Respostas da pergunta 4.

Essa importância dada por eles se justifica pelo fato de eles entenderem a utilidade desse estudo, conforme se verifica nas respostas da pergunta número 5: O que você entendia como utilidade do gráfico de cônicas antes de trabalharmos os conteúdos propostos? “Não via utilidade nenhuma” (Aluno I). “Não entendia a utilidade antes” (Aluno J). “Usava apenas para fazer os exercícios proposto pelo livro didático” (Aluno K). “Apenas para saber o esboço de cada cônica” (Aluno L). Observa-se que os alunos - que não haviam estudado parametrizações de cônica, mas já haviam estudado cônicas - simplesmente decoravam o esboço de cada uma das cônicas. Ao se depararem com uma atividade que pedia para fazer o gráfico de uma cônica, os alunos o faziam de forma “mecânica”, sem entender nenhuma utilidade para tal gráfico.

Na pergunta 6, os estudantes responderam sobre a necessidade de maior exploração da utilidade de cônicas parametrizadas. 100% dos alunos acreditam que a escola e o professor poderiam explorar a utilidade do assunto (Figura 88).

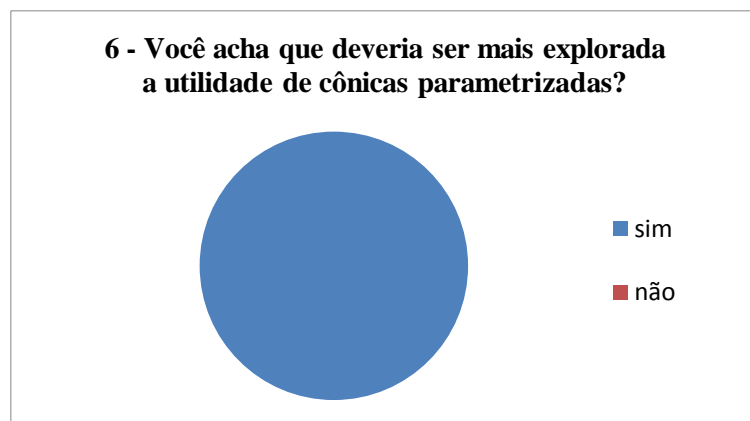


Figura 88 – Respostas para a pergunta 6.

Essas respostas mostram como, de fato, a utilidade facilita o entendimento, tornando a matéria mais atraente.

Ainda no início da aula, abordou-se o esboço de uma curva por meio de função $y = f(x)$. Por isso, a pergunta número 7 pretendia verificar o entendimento dos alunos em relação a isso, já que nem sempre esse esboço é viável, criando uma situação que exige entendimento e reflexão (Figura 89).

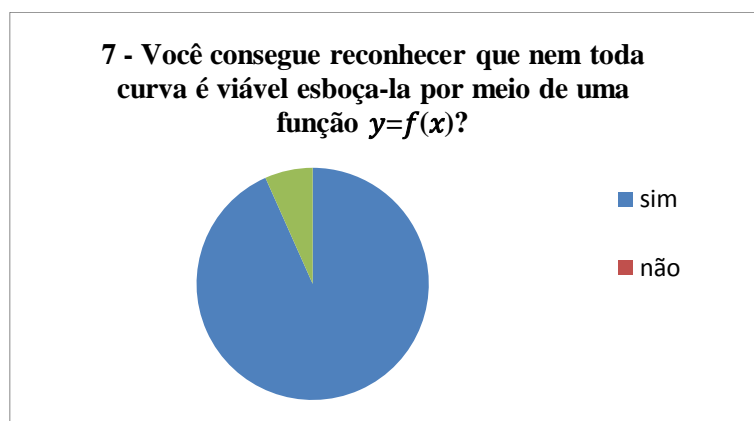


Figura 89 – Respostas para a pergunta 7.

Observa-se que a grande maioria conseguiu reconhecer que nem toda curva é possível de ser esboçada por meio de uma função $y = f(x)$.

Após a aula, 100% dos alunos perceberam a importância da definição e interpretação gráfica da parametrização (Figura 90).



Figura 90 – Respostas para a pergunta 8.

Eles viram a utilidade da parametrização, como se parametrizam algumas cônicas, sua importância e o que pode representar a parametrização para o esboço de uma curva, em particular as cônicas.

Na pergunta 9, 93,33% dos alunos, 14 deles, responderam serem capazes de interpretar o gráfico de uma elipse ou circunferência. Apenas 1 deles respondeu “às vezes” (Figura 91).

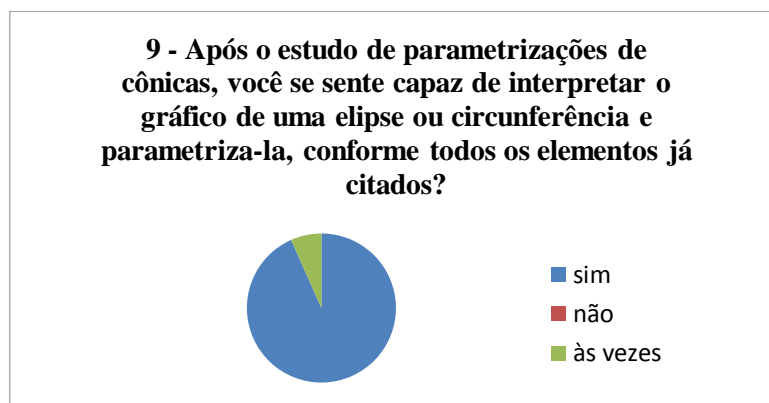


Figura 91 – Respostas para a pergunta 9.

Os resultados dessa pergunta mostram que além de perceberem a importância, pode-se dizer que os alunos, após a aula, eram capazes de interpretar o gráfico de uma elipse ou circunferência e parametrizá-la.

Na pergunta 10, observa-se que a turma entendeu o assunto, compreendendo o gráfico. 100% deles afirmaram que se sentiam incapazes disso antes da aula (Figura 92).

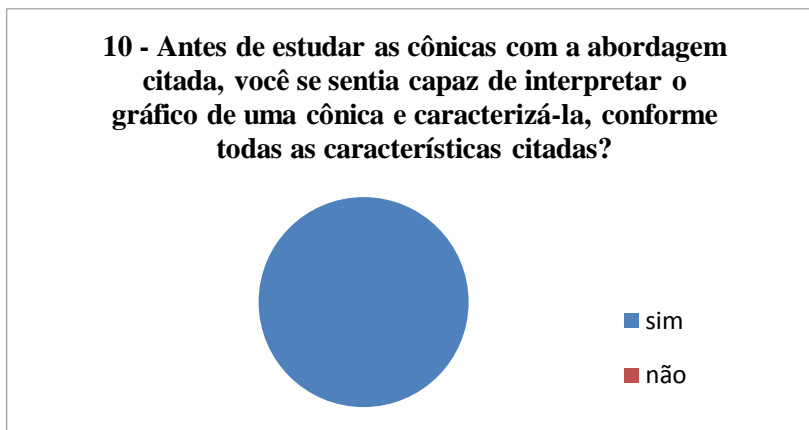


Figura 92: Respostas da pergunta 10.

A pergunta 11 foi “Tendo como referência os diversos conteúdos trabalhados no ensino médio, faça um pequeno comentário especificamente sobre a parametrização de cônicas que trabalhamos em sala. (Tome como referência o interesse desse assunto comparado com os outros)”. As respostas da pergunta número 11 mostram, segundo a opinião dos alunos, que a parametrização de cônicas reforça o conteúdo não só de matemática, mas também da física trabalhada no ensino médio. Algumas das respostas que mostram isso foram: “Acredito que a parametrização seja importante para ajudar em determinados conceitos de localização” (Aluno M). “Tendo em vista as aplicações, é um assunto muito interessante para ser trabalhado no ensino médio”. (Aluno N). “A parametrização também é importante no conteúdo de Física, onde utilizamos parâmetros para descrever a trajetória de um projétil, por exemplo” (Aluno O). “A parametrização deveria ser abordada no ensino médio, não somente em matemática” (Aluno B).

Na pergunta 12, “No ensino de física, você aprende a localizar um planeta?”, 100% deles responderam que “não” (Figura 93).

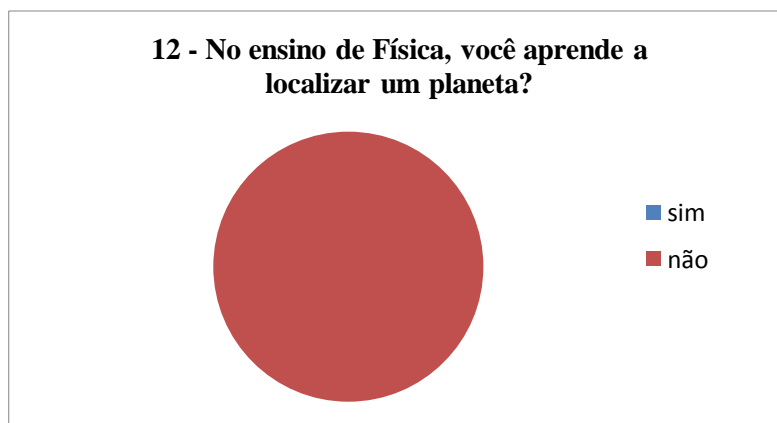


Figura 93 – Respostas para a pergunta 12.

As parametrizações não são uteis apenas para cônicas, mas podem ser utilizadas em física, por exemplo, na localização dos planetas, uma aplicação prática que contribui para tornar a aula mais interessante.

Na pergunta que mede o aprendizado dos alunos segundo a própria opinião deles, a maioria deles se diz satisfeita com a aprendizagem a partir da aula dada. 73,33% ou 11 deles deram a nota máxima, ou seja, muito satisfatório para o próprio aprendizado. E 26,67% ou 4, deram nota 2. O resultado mostra que a aprendizagem foi satisfatória na quase totalidade dos entrevistados (Figura 94).

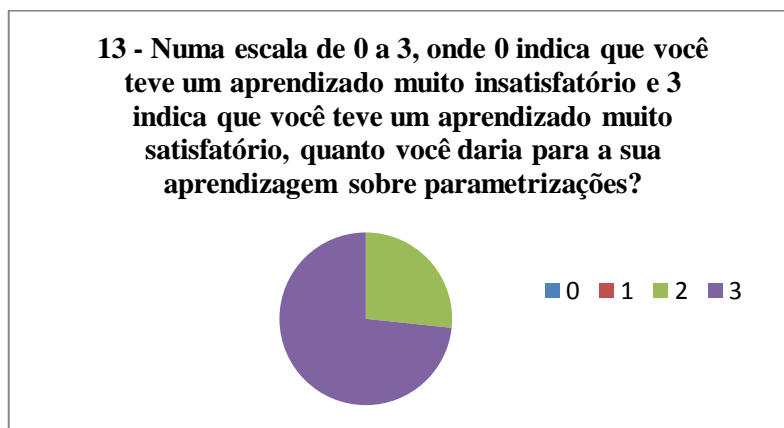


Figura 94 – Respostas para a pergunta 13.

Fazendo uma análise dos resultados da pesquisa, fica evidente o quão seria importante a compreensão de parametrização de curvas, em particular a das cônicas no ensino médio e sua aplicação prática dentro da vida escolar e fora dela. Os alunos se interessam muito mais pela matemática quando esta se mostra aplicável no dia-a-dia. Sem as relações práticas, o ensino torna-se mecânico e o interesse dos alunos fica comprometido.

Acredita-se que, mesmo em outras escolas onde o perfil do aluno seja diferente da escola pesquisada, seria possível um bom resultado com o ensino de cônicas parametrizadas. A depender da forma como o professor aborde o conteúdo, de preferência com aplicações do cotidiano do aluno, a parametrização torna-se uma “ferramenta” importante de ensino, propiciando aulas mais atrativas e atingindo um ensino mais efetivo.

5 A OPINIÃO DE PROFESSORES

Este capítulo dedica-se a análise da opinião de cinco professores que lecionam ou já lecionaram no 3º ano do ensino médio, sobre o tema Parametrização das cônicas e sua inserção no conteúdo a ser ministrado no 3º ano do ensino médio.

De início, os professores responderam a um questionário que buscava levantar de maneira geral se eles conheciam o assunto e o como veem a recepção dos alunos em relação ao mesmo (APÊNDICE B).

Em seguida, responderam a um segundo questionário voltado exclusivamente para questões relacionadas à aula ministrada, já que o roteiro da aula ministrada para os alunos foi enviado para os professores juntos com os dois questionários através do e-mail (APÊNDICE C).

5.1 O perfil profissional dos professores entrevistados

Para preservar a identidade dos professores entrevistados, eles serão nomeados através das letras do alfabeto.

Antes dos dados e sua análise, é interessante observar o perfil profissionais dos cinco professores que participaram desta pesquisa.

O professor A possui licenciatura plena em matemática, é formado há 30 anos, tem pós-graduação em Docência Superior e está cursando mestrado em matemática. Ele leciona para o ensino médio há 30 anos em escola pública. O professor B possui licenciatura plena em matemática, é formado há 20 anos, tem mestrado em Educação. Ele leciona para o ensino médio há 23 anos em escola pública. O professor C possui licenciatura plena em matemática, é formado há 44 anos, tem mestrado em matemática e leciona para o ensino médio há 25 anos em escola pública. O professor D possui licenciatura plena em matemática, é formado há 28 anos, tem mestrado em matemática, leciona para o ensino médio há 26 anos em escola pública. O professor E possui licenciatura plena em matemática, é formado há 15 anos, tem pós-graduação em Matemática e Estatística. Ele leciona para o ensino médio há 13 anos em escola pública.

5.2 Perguntas, resultados e opiniões dos professores pesquisados

Com o objetivo de verificar o conhecimento dos professores pesquisados sobre a inserção do conteúdo de parametrização de cônicas no 3º ano do ensino médio, elaborou-se um questionário com 12 perguntas (APÊNDICE B).

As respostas da primeira pergunta, “1 - Com relação à parametrização de cônicas, você já conhecia?”, demonstram de maneira clara que o assunto é pouco conhecido, já que não é conhecido pelo total de professores entrevistados: três ou 60% responderam que já conhecia o assunto e 2 ou 40% responderam que não (Figura 95).

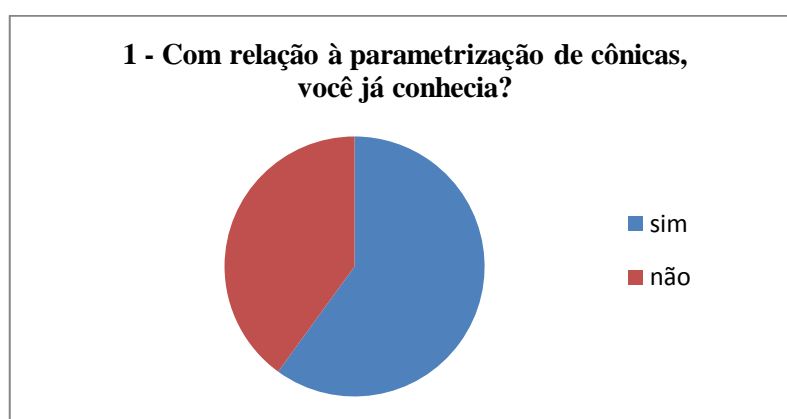


Figura 95 – Respostas à pergunta número 1.

Ao serem perguntados se já viram a parametrização em algum livro didático do ensino médio, 100% deles afirmaram que não (Figura 96). Considerando que os professores têm entre 13 e 30 anos de experiência em sala de aula, lecionando para o ensino médio, observa-se que o assunto realmente não faz parte de qualquer discussão nos livros didáticos utilizados por eles.

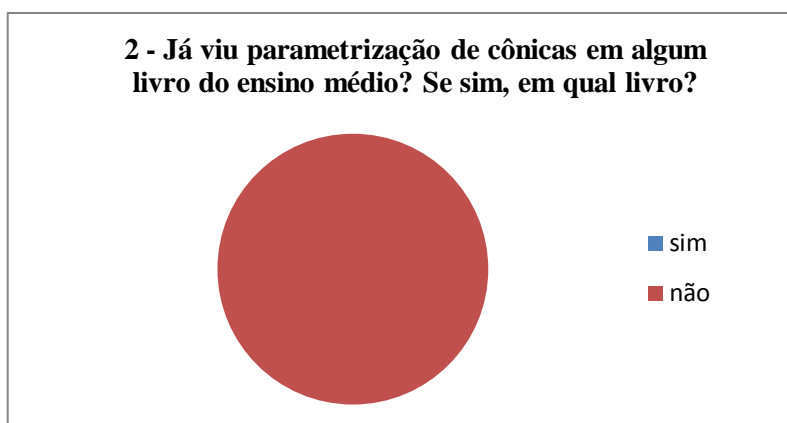


Figura 96 – Respostas à pergunta número 2.

“Com relação ao plano de aula sobre parametrização de cônicas, você acha interessante ser ensinada no ensino médio?” Essa pergunta número 3 demonstra a opinião unanime dos entrevistados quanto à inserção do tema no conteúdo programático de matemática do 3º ano do ensino médio. 100% deles responderam “sim” para essa pergunta (Figura 97).

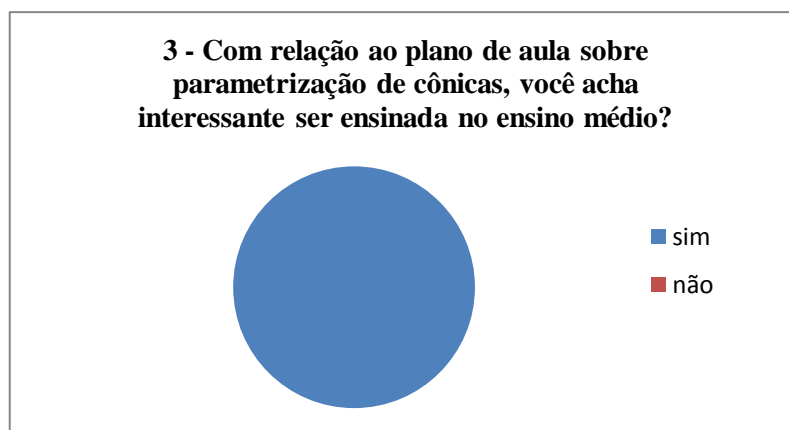


Figura 97 – Respostas à pergunta número 3.

100% dos entrevistados também acreditam no interesse do aluno quanto a esse conteúdo. E ao justificarem, na pergunta número 4, por que acreditam, abordam a aplicabilidade e interdisciplinaridade do assunto como motivação para o interesse dos estudantes. “Sim. Os alunos se interessam mais por assuntos que estejam contextualizados e que tenham alguma aplicação no cotidiano” (PROFESSOR A).

Sim. Geralmente este conteúdo fica relegado a segundo plano atualmente, tendo em vista a avaliação pretendida pelo ENEM. Entretanto, este conteúdo tem uma interdisciplinaridade com a Física que pode ser bem trabalhado em sala de aula, trazendo maior compreensão para os alunos de ambos os conhecimentos bem como agregar a estas duas disciplinas maior interesse no assunto (PROFESSOR B).

“Sim, pois enriquece o conteúdo quanto a aplicabilidade” (PROFESSOR C). “Sim. Penso que é uma maneira criativa de associar o conteúdo matemático com outros conteúdos, tornando o ensino de cônicas mais interessante” (PROFESSOR D). “Sim. Mostra aos alunos uma nova maneira de interpretar uma cônica” (PROFESSOR E).

Nas respostas da pergunta número 5, “Na sua opinião, por que você acha que parametrização de cônicas não é ensinada no ensino médio?”, observam-se justificativas variadas, mas a questão do tempo e a falta de domínio sobre o assunto por parte do professor chamam a atenção nas respostas.

Talvez por ser um assunto que exija do aluno um pouco mais de conhecimento de física, já que as mais importantes aplicações estejam ligadas a esse conteúdo e talvez por ser um conteúdo bastante complexo, se julgue que alunos e até mesmo alguns de nós professores não estejamos preparados para trabalhá-los. Daí sua ausência nos livros didáticos (PROFESSOR A)

Entendo que existem diversos motivos para isso, mas listo apenas três: primeiramente pela falta de preparo e pelo desconhecimento dos docentes para trabalhar dessa forma esse assunto; também porque o assunto cônicas há muito vem sendo deixado de lado, desejado por aqueles que se preparam para concursos militares que ainda cobram esse assunto, diferentemente do ENEM, por exemplo; e também porque demanda um preparo de uma aula conjunta com um professor de física (não é uma exigência, mas nem todo professor de matemática tem uma formação nesse assunto) para que o assunto possa ser melhor explorado não ficando exclusivamente como uma alegoria para posteriormente encontrar uma fórmula que já vem pronta nos livros, mas para ir além da matematização de um assunto podendo proporcionar ao aluno um conhecimento mais amplo (PROFESSOR B)

Vale destacar que os dois professores (A e B) destacam a relação com a física para justificar a dificuldade do tema. Ressalta-se ainda a colocação do Professor B, ao lembrar o fato de que a parametrização das cônicas não ser assunto cobrado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) para justificar a não abordagem da escola e dos livros didáticos sobre o assunto.

As outras respostas são: “Talvez por falta de tempo” (PROFESSOR C). “Acredito que seja por falta de criatividade dos autores. Não penso que seja por grau de dificuldade, uma vez que a forma paramétrica de retas é um conteúdo trabalhado com alunos do ensino médio” (PROFESSOR D). “Por falta de conhecimento sobre o assunto pelos professores” (PROFESSOR E).

Quando perguntados sobre a dificuldade dos alunos diante do tema, pergunta 6, 100% dos professores acreditam que eles não teriam qualquer dificuldade. Ao justificar sua resposta, os professores destacam a motivação dos alunos para as aplicações práticas, a abordagem do professor, bem como os conteúdos exigidos para a compreensão da matéria, conteúdos que condizem com o ensino médio. “Não. Se for abordado da maneira como foi proposto no plano de aula sobre parametrização de cônicas, suponho que eles achariam interessante e não apresentaria dificuldade” (PROFESSOR A) “Creio que isso dependeria muito da abordagem proposta pelo professor e sua total integração com o assunto e as possibilidades futuras que advém da aplicação deste” (PROFESSOR B). “Não. Pelo contrário, ficariam motivados em conhecer as aplicações das cônicas parametrizadas” (PROFESSOR C). “Não vejo que este conteúdo apresente grau de dificuldade maior que os demais ensinados

no terceiro ano do ensino médio. O aluno que mostrar dificuldade em aprender parametrização das cônicas, vai mostrar dificuldade em aprender outros conteúdos também” (PROFESSOR D). “Não. Os conhecimentos matemáticos exigidos para se aprender parametrização de cônicas são conhecimentos de ensino médio” (PROFESSOR E).

Com as respostas da pergunta 7, “Como você se sente, em termos de conhecimentos específicos da área, quanto a estar habilitado para ensinar conteúdos de Cônicas Parametrizadas a partir do que estudou na sua formação de graduação ou pós-graduação? Explique por favor”, observa-se que os professores não se sentem “muito preparados”, conforme Figura 98, para abordar o conteúdo de parametrização de cônicas para os alunos. Entre os entrevistados, dois se sentem preparados e três pouco preparados.

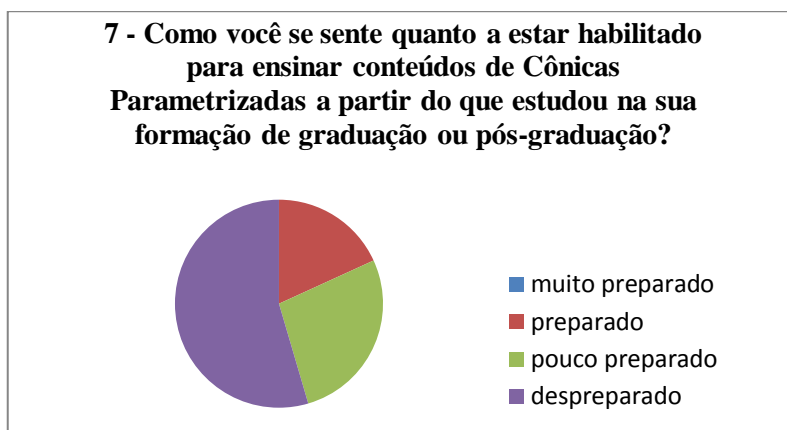


Figura 98 – Respostas da primeira parte da pergunta 7.

Porém, ao justificarem-se, os professores demonstram que o assunto foi visto em cursos de pós-graduação e que não teriam dificuldades em se preparem para essa abordagem, apenas por não tratarem desse assunto nas aulas atualmente, eles precisariam se dedicar a estudá-lo e pesquisá-lo para um melhor domínio. “Estudei esse conteúdo (parametrização e aplicações) apenas na pós-graduação (mestrado), para ministrá-lo precisaria me preparar mais, estudar e pesquisar” (PROFESSOR A). “Já trabalhei com o assunto de cônicas, mas nunca propus uma abordagem semelhante” (PROFESSOR B). “Só vi este conteúdo no Curso de Mestrado. Precisaria me preparar de forma melhor” (PROFESSOR C). “A razão é simples: nunca ter trabalhado com este conteúdo em sala de aula. Entretanto, a preparação de professores para trabalhar com o mesmo não demanda muito esforço” (PROFESSOR D). “Nunca trabalhei com parametrização, tenho que estudar bastante sobre o assunto” (PROFESSOR E).

“Caso aborde ou já tenha abordado o conteúdo de Cônicas, qual material didático utiliza? (Livro didático, quadro e giz, aulas com auxílio de computadores, etc....)”. Para a pergunta 8, o livro didático foi citado em todas as respostas e alguns sugeriram outros materiais como computador e sólidos geométricos, além dos tradicionais: quadro e giz. “Quando lecionei “Cônicas” usava o livro didático, quadro e giz, sólidos geométricos (cone) com os cortes que geram as cônicas e algum texto complementar que citava a aplicação” (PROFESSOR A). “Livro didático, quadro e giz” (PROFESSOR B). “Livro didático, quadro e pincel e aulas através do computador” (PROFESSOR C). “Livro didático, um tabuleiro que me auxilia mostrar as cônicas e seus elementos, quadro e pincel e o uso de multimídia” (PROFESSOR D). “Livro didático, giz e computador” (PROFESSOR E).

A pergunta número 9, “Quais as dificuldades observadas no ensino de tópicos de Cônicas, caso aborde ou já tenha abordado esse conteúdo?”, mostra que quando o assunto é cônicas, os professores não relatam dificuldades, mas destacam a abordagem e o pouco tempo para ministrar o conteúdo. “Já abordei o tema quando lecionei na rede estadual, então, a forma muito teórica abordada pelo livro didático e a falta de tempo na carga horária reservada a esse conteúdo, não permite se explorá-lo muito nas suas aplicações e contextualizações” (PROFESSOR A). “Da forma tradicional que pude abordar este conteúdo, não percebi dificuldades, entretanto o contexto para o qual minhas aulas estavam inseridas foi muito específico, pois voltavam-se para uma preparação para estudos futuros de Cálculo com Geometria Analítica” (PROFESSOR B). “Não vejo dificuldade” (PROFESSOR C). “Não vejo dificuldades maiores que as apresentadas em outros conteúdos” (PROFESSOR D). “O pouco tempo para se trabalhar esse assunto de forma mais detalhada” (PROFESSOR E).

Já que em se tratando de cônicas a abordagem teórica do livro didático e a falta de tempo foram registradas pelos professores, em se tratando da abordagem da parametrização de cônicas, essas situações devem ser refletidas, a fim de que o conteúdo seja apresentado de maneira motivacional e esclarecida para os estudantes.

A relação da parametrização de cônicas com o cotidiano é, fator que atrai a atenção dos estudantes, é observada por todos os entrevistados, como mostra as respostas da pergunta 10, “Você acha que faz parte desse conteúdo (parametrização de cônicas) uma abordagem com situações do cotidiano? Como?”. Os cinco responderam que “sim”.(Figura 99).

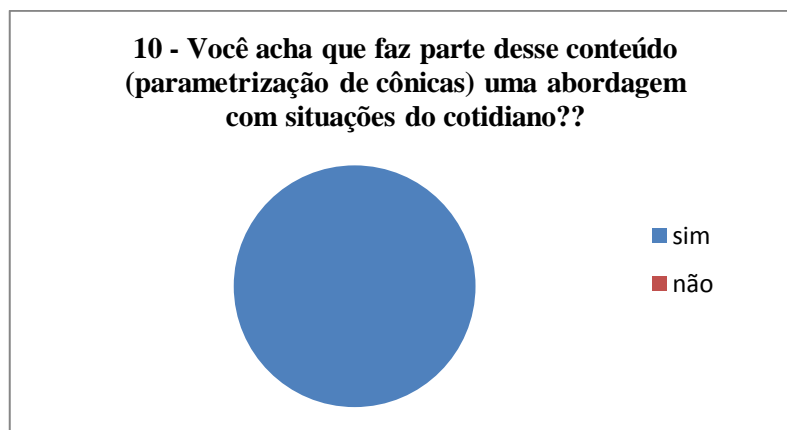


Figura 99 – Respostas da primeira parte da pergunta 10.

Segundo os entrevistados, a relação do conteúdo com questões práticas se deve à interdisciplinaridade dele com a física. “Mostrando aos alunos suas aplicações na ciência: física e astronomia,..., assuntos que chamam a atenção e despertam o gosto do aluno e propondo atividades relacionadas ao assunto” (PROFESSOR A). “Com o auxílio da física, por exemplo” (PROFESSOR B). “Como na Física, por exemplo” (PROFESSOR C). “Tecendo comentários na apresentação do conteúdo” (PROFESSOR D). “Mostrando a localização de um planeta, por exemplo” (PROFESSOR E).

Nas respostas da pergunta 11, “11 - Você considera satisfatória a abordagem que você faz para ensinar cônicas no ensino médio em relação à aprendizagem dos alunos?”, observa-se a opinião dos entrevistados sobre a aprendizagem dos alunos sobre cônicas nas suas próprias aulas. Dois, ou 40%, acham que conseguem sucesso no aprendizado dos alunos e três acham que “não”, conforme Figura 100.

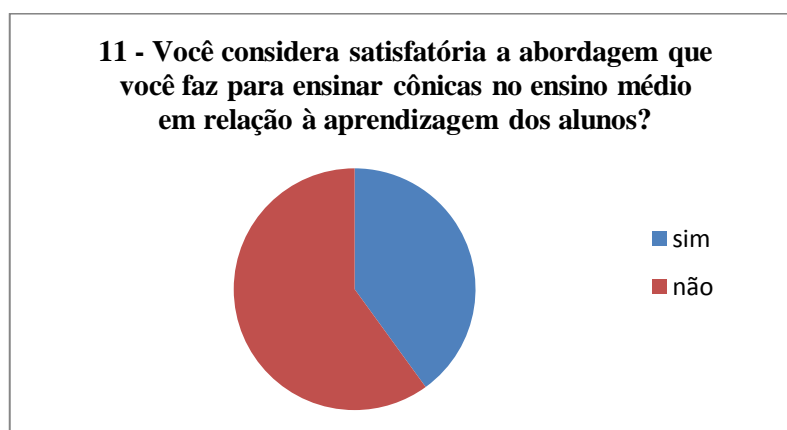


Figura 100 – Respostas à pergunta número 11.

A pergunta 12 teve 100% de respostas “não”, ou seja, os entrevistados são unânimes ao afirmarem que os alunos não têm dificuldades na aprendizagem desse tema, conforme Figura 101.

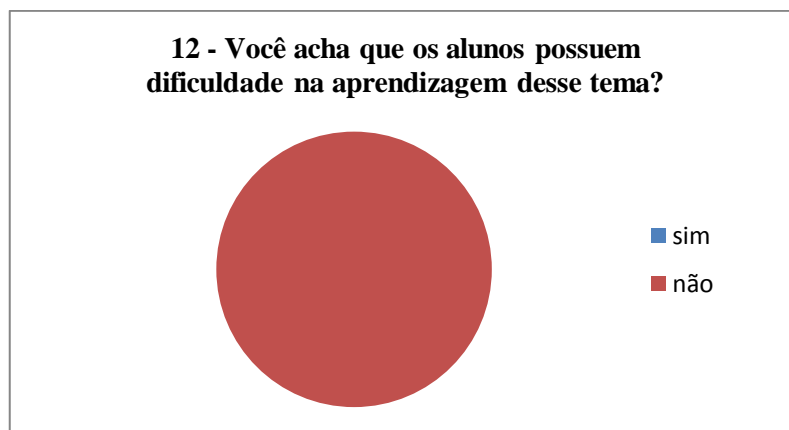


Figura 101 – Resposta da primeira parte da pergunta 12.

Os entrevistados justificam suas respostas: “Quando lecionei cônicas, era dado de maneira muito superficial, explorando mais as fórmulas e apenas citando as aplicações. Não se ensinava parametrização. Os alunos não tinham dificuldades” (PROFESSOR A). “Quando esse assunto é apresentado para os alunos, eles já têm uma bagagem muito boa de Geometria Analítica (e funções) o que proporciona um melhor entendimento do conteúdo” (PROFESSOR B). “Não acho. Eles, no início, apresentam certa resistência, mas, à medida que as aulas ocorrem, eles passam a dominar o conteúdo” (PROFESSOR C). “Os alunos que apresentam dificuldade neste conteúdo apresentam também em outros. O problema não é o conteúdo” (PROFESSOR D). “Não, pois a matéria em questão não apresenta cálculos complexos” (PROFESSOR E). As respostas variaram muito, porém verifica-se que, segundo os professores, o assunto envolvendo cônicas não é complicado para ser abordado entre os alunos do ensino médio, seja pelas noções nos anos anteriores ou pela simplicidade do próprio conteúdo.

No final desse primeiro questionário dos professores, verifica-se que a maioria não conhecia a parametrização de cônicas, até porque nenhum dos professores pesquisados viram parametrização de cônicas em livros didáticos, mas todos concordam que seria um assunto interessante a ser ensinado no ensino médio, pois devido a aplicabilidade de parametrização de cônicas, os alunos ficariam mais motivados em aprender e que seria uma nova maneira de interpretar as cônicas.

Os entrevistados acreditam que um dos motivos para que o assunto parametrização de cônicas não ser ensinado no ensino médio, mais especificamente no 3º ano, seriam a falta de preparo dos próprios professores e por falta de tempo, devido ao excesso de conteúdos no 3º ano do ensino médio. Porém, todos os professores pesquisados acham que os alunos não teriam dificuldades de entender o assunto, pois este não apresenta um grau de

dificuldade maior do que os outros conteúdos do ensino médio. Também porque, segundo os professores pesquisados, no geral os alunos não têm dificuldades de aprender cônicas, apesar de que nos livros didáticos este assunto apareça de forma muito teórica.

5.3 Opinião dos professores sobre a aula de parametrização de cônicas

Nessa seção analisam-se as respostas dos cinco professores sobre a aula proposta neste estudo (disponível na seção 4.2). O objetivo é refletir sobre a abordagem que para este estudo foi trabalhada em uma aula de aproximadamente duas horas e meia. Esse segundo questionário foi composto por sete perguntas. Observa-se que algumas perguntas não foram respondidas pelos professores D e E.

A pergunta 1, “1 - O que você achou sobre a sequência dos conteúdos apresentados nesta aula? Justifique. Observa-se que, no geral, os professores acharam interessante, adequada e de fácil entendimento para os alunos. “Achei interessante pois complementa a teoria ministrada de forma muito prática. Acredito que isto motivará os alunos que atualmente são muito voltados para a informática” (PROFESSOR A). “Achei a sequência adequada, com boa graduação do grau de dificuldade e analogias com assunto real extremamente interessante, despertando, inclusive, a curiosidade daquele aluno com afinidade ao estudo do nosso sistema solar” (PROFESSOR B). “Uma forma interessante, para os alunos, de aprender a parametrização das cônicas, pois foi apresentada de maneira contextualizada, usando sua aplicação na física. Geralmente os alunos se interessam bastante pela aplicação e contextualização dos conteúdos ensinados em Matemática” (PROFESSOR C). “Uma sequência fácil dos alunos entenderem, e com as aplicações, achei muito boa” (PROFESSOR E). O professor D não respondeu essa pergunta.

Conforme relatado, a aula proposta por este estudo foi ministrada em um horário de 45 minutos. E com a pergunta número 2, “2 - Quantas aulas você acha que gastaria para ensinar esse conteúdo?”, observa-se, na opinião dos professores a necessidade de em média quatro horas. “Eu não tenho experiência desta parte prática, mas acredito que poderiam ser necessários de dois a quatro tempos de aula, dependendo do perfil da turma de discentes” (PROFESSOR A). “Três ou quatro aulas, acho que seriam suficientes para ensinar o conteúdo e explorar as aplicações” (PROFESSOR B). “De quatro a seis aulas, aproximadamente” (PROFESSOR C). “Dependendo do nível de conhecimento da turma, umas quatro aulas” (PROFESSOR E). O professor D também não respondeu essa pergunta.

As respostas da pergunta número 3, “3- Em sua opinião, qual é a importância dessa aula para os alunos do ensino médio? Esta aula, pode ser considerada como básica para as aulas de cálculo e geometria no ensino superior?”, demonstram que na opinião dos professores, a aula ministrada neste estudo contribui para a aprendizagem de outros conteúdos mais complexos que podem ser exigidos sobretudo no ensino superior das áreas de exatas.

Cada vez mais percebemos que os alunos que procuram a área de exatas apresentam certa defasagem da teoria necessária para a base do cálculo ministrado no Curso Superior. Hoje é comum os alunos terem a disciplina Pre-cálculo, que tem a finalidade de suprir possíveis deficiências que possam comprometer o bom andamento do curso. Acredito que este procedimento sugerido possa auxiliar no processo (PROFESSOR A).

“Notando a importância desse conteúdo e aprendendo-o, desde o Ensino Médio, os alunos não terão dificuldades em trabalhar com ele em Cálculo e Geometria no Ensino Superior” (PROFESSOR B).

Assim como podemos explorar a ideia de limite quando trabalhamos funções exponenciais, por exemplo, trabalhar este conteúdo permite, da mesma forma, mostrar ao aluno conteúdos que serão apresentados no ensino superior. Vejo dois bons resultados nisso: o primeiro é o despertar a curiosidade com conteúdos de curso superior mesmo com o aluno no ensino médio, e o segundo é reforçar que a matemática ensinada até o ensino médio é a base necessária para que ele siga o curso superior sem muito sofrimento, que não há uma matemática fragmentada, como muitas vezes um jovem até o nível médio pensa (PROFESSOR C).

Os professores D e E não responderam esta pergunta.

Na pergunta 4, verifica-se a confirmação do que os professores já comentaram em outras respostas. Ao serem perguntados “4- Em sua opinião, os exemplos de cônicas parametrizadas devem conter aplicações práticas? Justifique”, todos afirmaram que “sim”.

“Sim, pois despertam mais o interesse no assunto para os alunos” (PROFESSOR A). “Sim, pois vendo aplicações no cotidiano, aumenta o interesse na aprendizagem” (PROFESSOR B). “Claro, quanto mais colocarmos a matemática no dia-a-dia mais os alunos se interessarão pelo assunto” (PROFESSOR C). “Sim, as aplicações devem fazer parte do ensino” (PROFESSOR D). “Sim, essa é uma ideia para a parametrização de cônicas, tornar as aulas mais interessantes” (PROFESSOR E).

Nas respostas da pergunta 5, “5- Você conhece outras aplicações, além das leis de Kepler que poderiam ser tratadas em sala de aula?”, vê-se a relação da matemática e da física quando se trata de parametrização de cônicas: “Talvez em física” (PROFESSOR A). “Poderia

ser a trajetória de uma partícula, por exemplo” (PROFESSOR B). “Trajetória e movimento de corpos” (PROFESSOR C).

Os professores D e E não responderam esta pergunta.

Na pergunta 6, os professores eram incitados a dar sugestões do uso do computador na aprendizagem dos alunos. As respostas a pergunta “6- Dê sua sugestão de como o uso do computador poderia contribuir como apoio didático para esse assunto” foram todas no sentido de que o computador é uma ferramenta importante para a compreensão do conteúdo. “É notório que o computador, usado com critério e com seriedade por parte dos alunos é um grande aliado para o processo de ensino e aprendizagem. E nesta parte sugerida, principalmente, fica evidente que o uso do computador pelos alunos facilitaria o andamento das aulas” (PROFESSOR A). “O PCN sugere que se faça uso da informática para ensinar os conteúdos de Matemática e nesse, em especial, o uso do computador para a construção dos gráficos e até do GeoGebra será um apoio didático de grande importância e interesse para os alunos do Ensino Médio” (PROFESSOR B). Além do Excel, tentaria usar um software para desenhar gráficos (GeoGebra, por exemplo), associado ao desenvolvimento das equações parametrizadas (PROFESSOR C). Construir os gráficos das cônicas parametrizadas usando o GeoGebra talvez (PROFESSOR E).

O professor D não respondeu esta pergunta.

As sugestões para melhorar a aula proposta era a expectativa da pergunta número 7, “7- Dê sua(s) sugestão(ões) para melhorar essa aula proposta”. Porém, os professores não acharam que havia algo a acrescentar na proposta, conforme observa-se nas respostas: “Pelo fato de nunca ter trabalhado as cônicas no Ensino Médio na forma parametrizada, julgo que não há o que acrescentar à aula proposta, a sequência em que foi elaborada, em minha opinião, é a ideal e atinge perfeitamente o objetivo que foi proposto (PROFESSOR B). “Não saberia sugerir algo diferente. Observei o desenrolar da aula e achei interessante e adequado” (PROFESSOR C). “Não, acho que a aula proposta está adequada para o 3º ano do ensino médio” (PROFESSOR E). O professor D não respondeu esta pergunta.

6 CONCLUSÃO

Em um primeiro momento, quando me foi sugerido, pelo meu orientador, o tema “Curvas parametrizadas em coordenadas cartesianas e polares: uma proposta no ensino médio”, apesar de já ter visto o assunto no curso do mestrado, achei que não caberia trabalhar parametrização de curvas no ensino médio, talvez o maior motivo disto fosse de nunca ter visto o assunto sendo abordado em nenhum livro didático.

Com os conhecimentos adquiridos no mestrado sobre curvas parametrizadas, na disciplina de geometria analítica, e estudando sobre o assunto para fazer minha dissertação, fui tomando gosto e pude perceber que é um tema muito interessante para ser ensinado aos alunos, principalmente na parte de cônicas, pois mostra aos discentes uma nova maneira de representá-las, por exemplo, mostrando que o esboço de uma curva pode ser interpretado como sendo a trajetória de um corpo móvel, onde podemos localiza-lo em qualquer instante do tempo. Essa nova forma de olhar os gráficos de funções se apresenta, para alguns casos, como sendo mais intuitivo, e não simplesmente fazendo o esboço de curvas de forma “mecanizada”, onde os alunos não veem sentido para tal esboço, sem nenhuma aplicabilidade no dia-a-dia. Por outro lado, o contato dos discentes com o conteúdo abordado nesta dissertação, possibilitará uma melhor compreensão destes tópicos nas disciplinas de cálculo e/ou geometria analítica em cursos superiores.

Na prática, comprovei que realmente é uma maneira interessante de se ensinar cônicas, quando realizei a aula proposta, que está registrada no capítulo 4, em que obtive um excelente retorno dos alunos, pois observei um interesse maior por parte dos mesmos. Estes, aprenderam uma outra forma de se analisar as cônicas, onde viram algumas aplicações das mesmas, aumentando a curiosidade pelo assunto, como pode ser visto nas respostas do questionário aplicado aos alunos sobre a aula proposta.

Então, procurando fazer uma investigação mais profunda, e visando a melhoria da aula proposta, apresentei a mesma aula dada aos alunos à professores experientes que trabalham ou já trabalharam com cônicas no 3º ano do ensino médio, para saber o que achavam do assunto e conhecer suas opiniões sobre a aula proposta. Observou-se que, alguns professores, somente conheceram sobre cônicas parametrizadas em cursos de especialização e/ou mestrado, mas que também nunca haviam visto este tema em livros didáticos e que nunca trabalharam o assunto com seus alunos. Suas opiniões foram muito importantes, pois gostaram do assunto e avaliaram como sendo positivo seu aprendizado no 3º ano do ensino

médio, principalmente porque torna a aula mais interessante pelas aplicações no dia-a-dia. Além disso, ainda sugeriram o uso de recursos computacionais para complementação do conteúdo, e também afirmaram que o tema pode ser estudado de maneira a promover a interdisciplinaridade com a Física, por exemplo.

A ideia principal deste trabalho foi propor para os colegas professores do ensino médio, especialmente aqueles que lecionam no 3º ano, uma maneira diferente de ensinar cônicas, a qual se apresenta como sendo mais eficaz, mais contextualizada e mais interessante na compreensão destes assuntos por parte dos discentes. A aula proposta foi desenvolvida para passar os conteúdos estudados de uma maneira didática e com um grau de dificuldade compatível para o ensino médio. Entretanto, esta aula pode ser aperfeiçoada tanto no seu conteúdo, organização dos temas apresentados, problemas tratados, recurso computacionais utilizados, entre outros assuntos. Assim, recomenda-se ao leitor interessado em aplicar esta aula, numa turma de ensino médio, a de adaptar seu conteúdo segundo sua realidade escolar e o tempo disponível para a abordagem do tema.

Acredito que o grande desafio da educação, em especial o ensino de matemática, é atrair o interesse dos alunos, buscando mostrar a matemática como necessária para seu cotidiano. Assim, a parametrização das cônicas se mostra uma ferramenta muito útil para que isso aconteça. Por último, essa dissertação pretende deixar sua contribuição para que este tema seja, de fato, abordado nos livros didáticos que tratam do assunto no ensino médio.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, C. C. de. **O ensino da matemática para o cotidiano**. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Medianeira, 2013. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4286/1/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)**. 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>>. Acesso em: 10 mar. 2018.

COLLI, E. **A tautócona**. 2010. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/tautocrona.pdf>>. Acesso em: 11 jan. 2018

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, Brasília, SBEM. Ano II. v. 2. n. 2, 1989. p. 15-19. Disponível em: <http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2018.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017. Coleção Profmat.

ESQUEF, P. A.; RIBEIRO, S. A. P. Elipse e as órbitas dos planetas. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 77, 2012. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/77/7.html>>. Acesso em 26 maio 2018.

KILHIAN, K. **A equação da hipérbole**. 2011. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2011/05/equacao-da-hiperbole.html>>. Acesso em: 7 abr. 2018.

KILHIAN, K. 2009. **Demonstração da fórmula do volume da esfera**. Disponível em: <www.obaricentrodamente.com/2009/06/demonstracao-formula-volume-de-esfera.html>. Acesso em 23 maio 2018

MUNDIM, K. **Movimento circular uniforme**. [2000]. Disponível em: <<http://ensinoadistancia.pro.br/ead/Fisica-1/aula-4/aula-4.html>>. Acesso em 25 maio 2018.

PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, p. 17-34, v. 3, dez. 2014.

Disponível em:

<<http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v03a03-aspectos-historicos-sobre-cicloide.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2018.

ROCHA, H. B. L. da. **As leis de Kepler**. Dissertação [Mestrado profissional em Matemática] - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de São João del Rei. 2013.

SIMÕES, G. **Cálculo com geometria analítica**, v. 2. São Paulo: Mc Graw Hill, 1985.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 2, 7. ed. Tradução de EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

UFRJ. Universidade Federal de Juiz de Fora. Departamento de Matemática. **Curvas no plano e parametrizações**. 2003. Disponível em:

<<http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/parametriza1.html>>. Acesso em: 27 jun. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS

PERGUNTAS GERAIS:

1. Consigo perceber a presença da Matemática no meu cotidiano?

2. Consigo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos da Matemática?

3. Fico curioso em saber a resolução das atividades propostas pelo professor?

4. Fico frustrado(a) ao não conseguir resolver determinado problema proposto?

5. Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassaram, eu tento de novo?

6. Sinto-me desafiado em realizar as atividades propostas?

7. Tenho muita dificuldade para entender Matemática?

8. Matemática é “chata”? Por que?

9. Aprender Matemática é um prazer?

10. Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas?

11. Tenho menos problemas com Matemática do que com as outras disciplinas?

12. Consigo bons resultados em Matemática?

13. As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas?

14. Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola?

15. Consigo relacionar conhecimentos de outras disciplinas com conhecimentos da Matemática?

PERGUNTAS SOBRE A AULA PRÁTICA:

16. Você já tinha ouvido falar de parametrizações?

17. Você compreendeu o assunto de que falamos nesta aula?

18. Para que serve a parametrização de uma cônica?

19. Após estudar este assunto, você considera importante o estudo de parametrizações de cônicas no ensino médio?

20. O que você entendia como Utilidade do gráfico de cônicas antes de trabalharmos os conteúdos propostos?

21. Você acha que deveria ser mais explorada a utilidade no cotidiano de cônicas?

22. Você consegue reconhecer que nem toda curva é viável esboçá-la por meio de uma função $y = f(x)$?

23. Considerou importante a definição de parametrização, como qual a interpretação gráfica?

24. Após o estudo de parametrizações, conforme discriminado acima, você se sente capaz de interpretar o gráfico de uma Elipse ou circunferência e parametrizá-la, conforme todos os elementos já citados?

25. Antes de estudar cônicas com a abordagem citada, você se sentia capaz de interpretar o gráfico de uma cônica e caracterizá-la, conforme todas as características já citadas?

26. Tendo como referência os diversos conteúdos trabalhados em Matemática no Ensino Médio, faça um pequeno comentário especificamente sobre a parametrização de cônicas que trabalhamos em sala. (Tome como referência o interesse desse assunto comparado com os outros).

27. No ensino de física, você aprende a localizar um planeta?

28. Numa escala de 0 a 3, onde 0 indica que você teve um aprendizado muito insatisfatório e 3 indica que você teve um aprendizado muito satisfatório, quanto você daria para sua aprendizagem sobre parametrizações?

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO GERAL PARA PROFESSORES

QUESTIONÁRIO DESTINADO A PROFESSORES

Caro professor, este questionário é parte de uma pesquisa cujo objetivo é estudar a abordagem do conteúdo de cônicas e cônicas parametrizadas na disciplina de Matemática, ministrada pelos professores do Ensino Médio de escolas do município de Barbacena, Minas Gerais, bem como investigar as percepções desses professores com relação a esse conteúdo e compreender as dificuldades relacionadas a este tema. Sua contribuição será muito importante. Asseguro que sua identidade será preservada e que os dados coletados serão para uso exclusivo na pesquisa.

Prof.: Luiz Fernando Brunelli Ribas, luizfernandoribas@yahoo.com.br, (32) 98455-4150

Data de preenchimento do questionário: ____/____/201__

1. Nome: _____

2. Escola: _____

3. Sexo: __ Masculino __ Feminino

4. Idade (anos): _____

5. Grau de escolaridade: (Por favor, coloque marcação e preencha todos que for possível de acordo com sua formação)

___ Ensino Médio (Antigo 2º Grau) ou ___ Curso Normal (Magistério)

___ Ensino superior licenciatura ___ Plena ___ Curta em _____

Tempo, em anos, de formado: _____

___ Pós- Graduação: () especialização () mestrado () doutorado em _____

Tempo de conclusão, em anos, do curso de Pós-Graduação: _____

6. Séries em que leciona Matemática (nesta escola):

7. Quantidade de Escolas que trabalha por segmento de ensino:

Ensino Fundamental (Anos Iniciais) _____

Ensino Fundamental (Anos Finais) _____

Ensino Médio _____

Ensino Superior _____

8. Tempo de Docência (anos):

Ensino Fundamental (Anos Iniciais) _____

Ensino Fundamental (Anos Finais) _____

Ensino Médio _____

Ensino Superior _____

9. Com relação à parametrização de cônicas, você já conhecia?

10. Já viu parametrização de cônicas em algum livro de ensino médio? Se sim, em qual livro?

11. Com relação ao plano de aula sobre parametrização de cônicas, você acha interessante ser ensinada no ensino médio?

12. Você acredita que os alunos achariam interessante esse conteúdo? Explique.

13. Na sua opinião, por que você acha que parametrização de cônicas não é ensinada no ensino médio?

14. Você acha que os alunos teriam dificuldades de aprender estes conteúdo? Explique.

15. Como você se sente, em termos de conhecimentos específicos da área, quanto a estar habilitado para ensinar conteúdos de Cônicas Parametrizadas a partir do que estudou na sua formação de graduação ou pós-graduação?

() Muito preparado () Preparado () Pouco preparado () Despreparado

Explique-me, por favor.

16. Caso aborde ou já tenha abordado o conteúdo de Cônicas, qual material didático utiliza? (Livro didático, quadro e giz, aulas com auxílio de computadores, etc....)

17. Quais as dificuldades observadas no ensino de tópicos de Cônicas, caso aborde ou já tenha abordado esse conteúdo?

18. Você acha que faz parte desse conteúdo (parametrização de cônicas) uma abordagem com situações do cotidiano?

___ Sim ___ Não. Como? _____

19. Você considera satisfatória a abordagem que você faz para ensinar cônicas no ensino médio em relação a para aprendizagem dos alunos?

Sim Não

20. Você acha que os alunos possuem dificuldade na aprendizagem desse tema?

Sim Não Porquê?

APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO PARA OS PROFESSORES, ESPECÍFICO SOBRE A
AULA PROPOSTA NESTE ESTUDO

**QUESTIONÁRIO DESTINADO A PROFESSORES SOBRE A AULA PROPOSTA DO
CAPÍTULO 4**

Caro professor, este questionário faz parte de uma pesquisa relacionada com tema de minha dissertação cujo objetivo é estudar a abordagem do conteúdo de cônicas parametrizadas na disciplina de Matemática, ministrada pelos professores do Ensino Médio, bem como investigar as percepções desses professores com relação a esse conteúdo e compreender as dificuldades relacionadas a este tema. Sua contribuição será muito importante. *Esclareço que sua identidade será preservada e que os dados coletados serão utilizados para uso exclusivo na pesquisa.*

Prof.: Luiz Fernando Brunelli Ribas,

luizfernandoribas@yahoo.com.br,

(32) 98455-4150

1. O que você achou sobre a sequência dos conteúdos apresentados nesta aula? Justifique.

2. Quantas aulas você acha que gastaria para ensinar esse conteúdo?

3. Em sua opinião, qual é a importância dessa aula para os alunos do ensino médio? Esta aula, pode ser considerada como básica para as aulas de cálculo e geometria no ensino superior?

4. Em sua opinião, os exemplos de cônicas parametrizadas devem conter aplicações práticas? Justifique.

5. Você conhece outras aplicações, além das leis de Kepler que poderiam ser tratadas em sala de aula?

6. Dê sua sugestão de como o uso do computador poderia contribuir como apoio didático para esse assunto _____

7. Dê sua(s) sugestão(ões) para melhorar essa aula proposta.
