

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

CASSIANO HENRIQUE MONTEIRO CORRÊA RAMOS

**GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA APLICADAS NA TOPOGRAFIA: UMA
ALTERNATIVA PARA A INTERDISCIPLINARIDADE E A CONTEXTUALIZAÇÃO**

CURITIBA

2018

CASSIANO HENRIQUE MONTEIRO CORRÊA RAMOS

**GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA APLICADAS NA TOPOGRAFIA: UMA
ALTERNATIVA PARA A INTERDISCIPLINARIDADE E A CONTEXTUALIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientador: Márcio Rostirolla Adames

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

R175g
2018

Ramos, Cassiano Henrique Monteiro Corrêa
Geometria e trigonometria aplicadas na topografia : uma
alternativa para a interdisciplinaridade e a contextualização /
Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos.-- 2018.
146 p.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.

Texto em português com resumo em inglês.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional, Curitiba, 2018.

Bibliografia: p. 145-146.

1. Topografia - Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Geometria.
3. Trigonometria. 4. Abordagem interdisciplinar do conhecimento
na educação. 5. Livros didáticos - Avaliação. 6. Teodolitos. 7.
Prática de ensino. 8. Matemática - Dissertações. I. Adames,
Márcio Rostirolla, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 52

A Dissertação de Mestrado intitulada “Geometria e Trigonometria Aplicadas na Topografia: uma alternativa para a interdisciplinaridade e a contextualização”, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos, no dia 31 de agosto de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Márcio Rostirolla Adames - Presidente – UTFPR
Prof(a). Dr(a). Andrés David Báez Sánchez – UTFPR
Prof(a). Dr(a). Moisés dos Santos Ceconello - UFMT

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 31 de agosto de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

A Deus, o grande arquiteto que guia nossas vidas, sempre no caminho do que nos é justo.

A minha mãe e pai, tias e tios, meus amados irmãos e sobrinhos que sempre torcem por meu sucesso em tudo que faço.

A minha esposa Suzana da Natividade que sempre me incentivou, cobriu minhas falhas enquanto me dediquei aos difíceis estudos desse curso, obrigado pela companheira fiel que sempre foi, te amo muito.

A meus filhos Augusto Henrique e Jéssica Jussara, pelos quais eu luto todo dia para um futuro melhor, para que eles possam viver num mundo mais igual.

Aos muitos amigos e irmãos que a vida me proporcionou Brasil afora, por vocês muitas vezes acreditarem em mim mais que eu mesmo, valeu pela força.

Aos meus amigos do curso PROFMAT-UTFPR, que essa amizade nunca se acabe, e obrigado por dedicarem dos vossos raros tempos para me ajudarem nas dificuldades que tive, a generosidade e companheirismo de vocês me fez chegar aqui.

A João Eugênio e Felipe, torço para que possam um dia realizar esse sonho do mestrado, obrigado pela companhia nas viagens cansativas e perigosas de Registro à Curitiba e nos estudos aos finais de semana.

Ao professor Silvio Luiz Castelhana Firmino pela coautoria do projeto do teodolito didático, e ao amigo Leonardo Sarmenho Satto pela capa do Manual de uso do teodolito na matemática, muito obrigado pela parceria e ajuda.

A todos os professores da UTFPR que ministraram disciplinas para nossa turma, com certeza parte dessa conquista é de vocês também.

Ao meu orientador Márcio Rostirolla Adames pela orientação, em cada dica e cobrança que me fez crescer muito na busca do conhecimento. Espero que esse projeto esteja à altura do que o senhor desejava quando me propôs esse desafio.

À CAPES pelo apoio financeiro, através de bolsa de estudos, fundamental para que eu pudesse custear as despesas durante esse curso.

*Se não houver frutos, valeu a beleza das flores;
se não houver flores, valeu a sombra das folhas;
se não houver folhas, valeu a intenção da semente.*
(HENFIL)

RESUMO

RAMOS, Cassiano Henrique Monteiro Corrêa. GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA APLICADAS NA TOPOGRAFIA: UMA ALTERNATIVA PARA A INTERDISCIPLINARIDADE E A CONTEXTUALIZAÇÃO. 146 pg. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

O presente trabalho objetiva introduzir os conteúdos matemáticos do 1º ano do ensino médio de maneira interdisciplinar, relacionando-os a temas da topografia. O primeiro capítulo apresenta alguns conceitos fundamentais da Topografia e diversos instrumentos históricos utilizados para medições topográficas. O segundo capítulo inicia com uma análise de livros didáticos do primeiro ano do ensino médio e das aplicações topográficas contidas neles, e segue descrevendo os conteúdos de geometria e trigonometria junto com muitas aplicações na Topografia. Por fim, o terceiro capítulo traz alguns procedimentos fundamentais da Topografia, que não cabem em um único conteúdo matemático, buscando justificá-los matematicamente. O trabalho procura trazer, em todos os conteúdos apresentados, as demonstrações mais pertinentes, exemplos e aplicações, oferecendo ao professor e aos alunos uma alternativa de contextualização na Topografia para a matemática apresentada. Pretende-se, com isso, mostrar que a geometria e trigonometria, às vezes desinteressantes e sem sentido para os alunos, podem resolver problemas em situações reais, que são úteis e interessantes. Paralelamente ao trabalho, foram desenvolvidos um teodolito didático para impressão 3D, disponível gratuitamente na internet, e um Manual de Uso do Teodolito nas Aulas de Matemática.

Palavras-chave: Topografia. Matemática. Teodolito.

ABSTRACT

RAMOS, Cassiano Henrique Monteiro Corrêa. GEOMETRY AND TRIGONOMETRY APPLIED TO TOPOGRAPHY: AN ALTERNATIVE TO INTERDISCIPLINARITY AND CONTEXTUALIZATION. 146 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

The present work aims to introduce the mathematical contents of the first year of high school in an interdisciplinary way, relating them to topics of topography. The first chapter presents some fundamental concepts of Topography and several historical instruments used for topographic measurements. The second chapter begins with an analysis of first-year high school textbooks and the topographical applications contained in them, and continues to describe the contents of geometry and trigonometry along with many applications in Topography. Finally, the third chapter presents some fundamental procedures of Topography, which do not fit into a single mathematical content, seeking to justify them mathematically. The work aims to bring the most relevant demonstrations, examples and applications in all contents presented, offering the teacher and the students an alternative for contextualization in the Topography for the presented mathematics. It is intended, with this, to show that geometry and trigonometry, sometimes uninteresting and meaningless to students, can solve problems in real situations, which are useful and interesting. In addition to the work, a didactic theodolite for 3D printing, available free on the Internet, and a Handbook of Theodolite Use in Mathematics Classrooms were developed.

Keywords: Topography. Mathematics. Theodolite.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Exemplos de Rumo | 29 |
| Figura 2 – Esquema do Ângulo Nadiral e Zenital | 30 |
| Figura 3 – Esticadores de corda, túmulo de Menna (século XIV a.c.) | 34 |
| Figura 4 – Prumo ótico | 34 |
| Figura 5 – Agrimensor usando o gnômon | 35 |
| Figura 6 – Bússola Magnética | 35 |
| Figura 7 – Groma romana | 36 |
| Figura 8 – Visadas perpendiculares com a Groma | 36 |
| Figura 9 – Esquema de uma dioptra do século I d.c. | 37 |
| Figura 10 – Dioptra usada para nivelamento e ângulos verticais e horizontais | 37 |
| Figura 11 – Esquema de um chorobate | 38 |
| Figura 12 – Agrimensores romanos utilizando o chorobate | 38 |
| Figura 13 – Quadrante de madeira | 39 |
| Figura 14 – Astrolábio iraniano | 39 |
| Figura 15 – Balestilha | 40 |
| Figura 16 – Balestilha no Regimento de navegacion(1552) de Pedro Medina | 40 |
| Figura 17 – Eixos e círculos de um Teodolito | 41 |
| Figura 18 – Teodolito exposto em Madri - Espanha | 41 |
| Figura 19 – Nível Topográfico | 42 |
| Figura 20 – Teodolito manual e eletrônico | 42 |
| Figura 21 – Estação Total e prisma refletor | 43 |
| Figura 22 – Satélites na órbita da terra para GPS e recepção de sinal | 44 |
| Figura 23 – GPS topográfico chinês | 44 |
| Figura 24 – Capa do livro Matemática Aula por Aula - Vol. 1 | 47 |
| Figura 25 – Capa do livro Matemática Contexto & aplicações, 1ª ed. - Vol. 1 | 48 |
| Figura 26 – Capa do livro Matemática Contexto & aplicações, 2ª ed. - Vol. 1 | 49 |
| Figura 27 – Capa do livro Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia - Vol. 1 | 50 |
| Figura 28 – Capa do livro Conexões com a matemática - Vol. 1 | 51 |
| Figura 29 – Capa do livro Matemática - Vol. 1 | 52 |
| Figura 30 – Capa do livro Topografia aplicada à Engenharia Civil- vol. 1 | 53 |
| Figura 31 – Ilustração de um mapa adaptado com escala | 55 |
| Figura 32 – Congruência LAAo | 57 |
| Figura 33 – Ângulos correspondentes - Observação 2.5 | 57 |
| Figura 34 – Segmentos correspondentes | 58 |
| Figura 35 – Feixe de retas paralelas | 58 |
| Figura 36 – Feixe de retas paralelas | 59 |

| | |
|---|----|
| Figura 37 – Demonstração do Teorema 2.8 - (I) | 60 |
| Figura 38 – Demonstração do Teorema 2.8 - (II) | 61 |
| Figura 39 – Loteamento Vila Planalto | 61 |
| Figura 40 – Vila Caiçara | 62 |
| Figura 41 – Segmentos consecutivos | 63 |
| Figura 42 – Segmentos colineares | 64 |
| Figura 43 – Polígonos | 64 |
| Figura 44 – Polígonos semelhantes | 65 |
| Figura 45 – Polígonos não semelhantes | 65 |
| Figura 46 – Polígonos semelhantes | 66 |
| Figura 47 – Desenho de um terreno em escala 1:500 | 67 |
| Figura 48 – Desenho de um terreno em escala 1:250 | 68 |
| Figura 49 – Ângulos internos de um triângulo | 69 |
| Figura 50 – Teorema Fundamental da Proporcionalidade | 70 |
| Figura 51 – Triângulos semelhantes | 70 |
| Figura 52 – Triângulos semelhantes | 71 |
| Figura 53 – Caso LAL - Proposição 2.17 | 71 |
| Figura 54 – Demonstração semelhança de triângulos caso LAL | 72 |
| Figura 55 – Demonstração da Proposição 2.18 | 73 |
| Figura 56 – Ilustração da Aplicação em Topografia 2.19 | 74 |
| Figura 57 – Ilustração da Aplicação em Topografia 2.20 | 75 |
| Figura 58 – Resolução da Aplicação em Topografia 2.20 | 75 |
| Figura 59 – Aplicação em Topografia 2.21 | 77 |
| Figura 60 – Triângulo Retângulo utilizando corda de 12 nós | 79 |
| Figura 61 – Triângulo Retângulo - Características | 79 |
| Figura 62 – Demonstração do Teorema de Pitágoras | 80 |
| Figura 63 – Triângulo retângulo ABC | 81 |
| Figura 64 – Definição de Seno, cosseno e tangente | 83 |
| Figura 65 – Triângulo Retângulo $\triangle ABC$ | 84 |
| Figura 66 – Ilustração do Exemplo 2.24 | 85 |
| Figura 67 – Ilustração do Exemplo 2.25 | 86 |
| Figura 68 – Ilustração do Exemplo 2.26 | 86 |
| Figura 69 – Ilustração da Aplicação em Topografia 2.27 | 87 |
| Figura 70 – Relação entre Seno, cosseno e tangente | 88 |
| Figura 71 – Seno, cosseno e tangente de 45° | 91 |
| Figura 72 – Seno, cosseno e tangente de 30° e 60° | 92 |
| Figura 73 – Lei do cosseno para triângulos acutângulos | 94 |
| Figura 74 – Lei do cosseno para triângulos retângulos | 95 |
| Figura 75 – Lei do cosseno para triângulos obtusângulos | 96 |

| | |
|--|-----|
| Figura 76 – Medida de distância com obstáculo visual | 98 |
| Figura 77 – Lei do seno para triângulos acutângulos | 99 |
| Figura 78 – Lei do seno para triângulos retângulos | 100 |
| Figura 79 – Lei do seno para triângulos obtusângulos | 101 |
| Figura 80 – Triângulo qualquer referente a Aplicação na Topografia 2.34 | 103 |
| Figura 81 – Área de triângulo acutângulo | 104 |
| Figura 82 – Medição Topográfica por irradiação | 106 |
| Figura 83 – Demonstração Teorema de Heron | 108 |
| Figura 84 – Cálculo de Área de um triângulo sem o uso de ângulos | 111 |
| Figura 85 – Poligonal dividida em triângulos | 111 |
| Figura 86 – Aplicação prática da Fórmula de Gauss | 113 |
| Figura 87 – Ilustração de um polígono de 5 lados | 114 |
| Figura 88 – Leitura simples de um ângulo | 116 |
| Figura 89 – Esquema de um teodolito | 117 |
| Figura 90 – Caminhamento no sentido horário | 118 |
| Figura 91 – Caminhamento no sentido anti-horário | 118 |
| Figura 92 – Tabela parcial de um nivelamento geométrico | 119 |
| Figura 93 – Segmento \overline{AB} no plano cartesiano | 122 |
| Figura 94 – Planilha de cálculo de coordenadas parciais | 123 |
| Figura 95 – Tabela de coordenadas parciais | 123 |
| Figura 96 – Projeção do Erro de Fechamento Linear no plano cartesiano | 125 |
| Figura 97 – Coordenadas Retangulares | 126 |
| Figura 98 – Alinhamento \overline{AB} no plano cartesiano | 127 |
| Figura 99 – Alinhamentos \overline{AB} e \overline{BC} no plano cartesiano | 128 |
| Figura 100 – Plano cartesiano de centro A e segmento \overline{AB} | 129 |
| Figura 101 – Leitura com Nível Óptico | 130 |
| Figura 102 – Ilustração de uma Leitura com Nível Óptico | 131 |
| Figura 103 – Ilustração de uma Leitura com Teodolito Didático | 133 |
| Figura 104 – Distância horizontal (DH) e diferença de nível (DN) entre dois pontos | 135 |
| Figura 105 – Leitura estadimétrica num plano inclinado | 136 |
| Figura 106 – Tabela de levantamento altimétrico | 139 |
| Figura 107 – Tabela de levantamento altimétrico após os cálculos | 140 |
| Figura 108 – Triangularização de uma leitura pelo método das rampas | 141 |
| Figura 109 – Terreno inclinado - Inclinação e declividade | 142 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---------|---|
| AA | Ângulo, Ângulo |
| a.c. | Antes de Cristo |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| d.c. | Depois de Cristo |
| ed. | Edição |
| IFSP | Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo |
| LAAo | Lado, Ângulo, Ângulo oposto |
| LAL | Lado, Ângulo, Lado |
| LLL | Lado, Lado, Lado |
| PCNEM | Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio |
| pg | Página |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| TFP | Teorema Fundamental da Proporcionalidade |
| UFG | Universidade Federal de Goiás |
| UFPB | Universidade Federal da Paraíba |
| UNIMAR | Universidade de Marília |
| UTFPR | Universidade Tecnológica Federal do Paraná |
| Vol. | Volume |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---------------------|---|
| α | Letra grega alpha minúscula |
| β | Letra grega beta minúscula |
| δ | Letra grega delta minúscula |
| γ | Letra grega gamma minúscula |
| π | Constante matemática irracional pi |
| \mathbb{N} | Conjunto dos Naturais |
| \in | Símbolo matemático de Pertence |
| \cap | Símbolo matemático de Intersecção |
| Δ | Letra grega delta maiúscula, também representa um triângulo |
| $\hat{}$ | Representa um ângulo |
| \sphericalangle | Representação alternativa de ângulo |
| \sphericalcap | Referente a medida de um ângulo |
| Σ | Somatório |
| $//$ | Paralelos |
| \equiv | Congruência |
| \sim | Semelhança |
| \simeq | Aproximadamente |
| \neq | Diferente |
| \cdot | Multiplicação |
| \overline{AB} | Representa o segmento de A até B |
| $d(A, B)$ | Distância de A até B, quando se referir ao valor pode ser escrito apenas AB |
| \arctan | Arco Tangente |
| sen | Seno |
| cos | Cosseno |
| tan | Tangente |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| | INTRODUÇÃO | 23 |
| 1 | TOPOGRAFIA | 27 |
| 1.1 | Definição de Topografia | 27 |
| 1.2 | Grandezas da Topografia | 28 |
| 1.2.1 | Grandezas angulares | 28 |
| 1.2.1.1 | Ângulos azimutais | 28 |
| 1.2.1.2 | Ângulos zenitais | 29 |
| 1.2.2 | Grandezas lineares | 30 |
| 1.3 | Divisões da Topografia | 30 |
| 1.3.1 | Topometria | 31 |
| 1.3.1.1 | Planimetria | 31 |
| 1.3.1.2 | Altimetria | 31 |
| 1.3.2 | Topologia | 32 |
| 1.3.3 | Taqueometria | 32 |
| 1.3.4 | Fotogrametria | 32 |
| 1.3.5 | Goniometria | 32 |
| 1.4 | Medição indireta de distâncias | 32 |
| 1.5 | Importantes instrumentos da Topografia ao longo da história | 33 |
| 2 | GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA - 1º ANO DO ENSINO MÉDIO | 47 |
| 2.1 | Abordagem histórica e didática dos livros consultados | 47 |
| 2.2 | Escala | 53 |
| 2.3 | Teorema de Tales | 56 |
| 2.4 | Semelhança | 63 |
| 2.4.1 | Conceito de semelhança | 63 |
| 2.4.2 | Semelhança de polígonos | 63 |
| 2.4.3 | Semelhança de triângulos | 69 |
| 2.5 | Triângulo Retângulo | 78 |
| 2.5.1 | Teorema de Pitágoras | 79 |
| 2.5.2 | Relações métricas do Triângulo Retângulo | 81 |
| 2.6 | Relações trigonométricas no Triângulo Retângulo | 83 |
| 2.6.1 | Definição de seno, cosseno e tangente | 83 |
| 2.6.2 | Relações entre seno, cosseno e tangente | 88 |
| 2.6.3 | Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60° | 90 |
| 2.6.4 | Seno e cosseno de ângulos obtusos | 93 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.6.5 | Lei dos cossenos | 94 |
| 2.6.6 | Lei dos senos | 99 |
| 2.7 | Cálculo de áreas | 103 |
| 2.7.1 | Área de um triângulo qualquer | 104 |
| 2.7.2 | Área de um triângulo sem o uso dos ângulos | 108 |
| 2.7.3 | Fórmula da área de Gauss | 112 |
| 3 | A MATEMÁTICA NO LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO | 115 |
| 3.1 | Procedimentos na Planimetria e Altimetria | 115 |
| 3.1.1 | Leitura simples de um ângulo | 115 |
| 3.1.2 | Poligonal fechada | 117 |
| 3.1.3 | Nivelamento Geométrico | 119 |
| 3.1.3.1 | Referência de nível - RN | 119 |
| 3.1.3.2 | Altura do instrumento | 119 |
| 3.1.3.3 | Visada de ré | 120 |
| 3.1.3.4 | Visada de vante | 120 |
| 3.2 | Sequência de cálculos de uma poligonal regular | 120 |
| 3.2.1 | Erro de fechamento angular | 121 |
| 3.2.2 | Coordenadas parciais | 121 |
| 3.2.3 | Erro de fechamento linear absoluto | 123 |
| 3.2.4 | Cálculo da área do polígono | 125 |
| 3.3 | Coordenadas retangulares | 125 |
| 3.4 | Distância entre dois pontos dados por coordenadas | 128 |
| 3.5 | Distâncias para terrenos planos | 130 |
| 3.5.1 | Distância horizontal em terrenos planos - Nível ótico | 131 |
| 3.5.2 | Distância horizontal em terrenos planos - Teodolito didático | 133 |
| 3.6 | Distâncias para terrenos inclinados | 134 |
| 3.7 | Inclinação do terreno e declividade | 141 |
| 4 | CONCLUSÃO | 143 |
| | REFERÊNCIAS | 145 |

INTRODUÇÃO

Segundo o PCNEM, a disciplina de Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, ocupa uma posição singular junto às outras disciplinas como linguagem, e continua:

No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações (PCNEM, 2018, pg. 09).

Ainda no PCNEM, é evidente como um dos principais objetivos, a busca de interdisciplinaridade e contextualização dos conteúdos. Uma definição de interdisciplinaridade é dada por Assmann:

Enfoque científico e pedagógico que se caracteriza por buscar algo mais do que mera justaposição das contribuições de diversas disciplinas sobre um mesmo assunto, e se esforça por estabelecer um diálogo enriquecedor entre especialistas de diversas áreas científicas sobre uma determinada temática. Aplicam-se problemas, atividades e projetos que ultrapassam a capacidade de uma só área disciplinar. O conceito expressa a consciência dessa limitação das disciplinas específicas, mas não transforma isso necessariamente num questionamento epistemológico mais radical, como o faz a transdisciplinaridade (ASSMANN, 1998, pg. 162).

Segundo (FOGAÇA, 2016, Acesso em: 28 mai. 2018), "...a contextualização é o ato de vincular o conhecimento à sua origem e à sua aplicação", e segue dizendo que o ensino deve levar em conta o cotidiano e a realidade de cada região, e ainda quais serão suas prováveis áreas de atuação profissional.

O foco principal desse trabalho é uma possibilidade de trabalhar, em sala-de-aula e atividades práticas, a interdisciplinaridade e a contextualização no âmbito da Topografia, que através de seu levantamento planimétrico e altimétrico utiliza fórmulas advindas da trigonometria e que são, por vezes, ignoradas pelos professores do ensino médio. Explicitamos no trabalho que ao calcular a distância horizontal, a distância vertical, preencher as coordenadas parciais, e utilizar outros procedimentos da topografia os alunos estão utilizando a trigonometria do triângulo retângulo estudado no primeiro ano do ensino médio brasileiro.

O trabalho é composto de pesquisas da história da Topografia, uma análise de livros e materiais didáticos utilizados pelos professores de Matemática e Topografia, além da experiência

do autor como professor de Matemática e Topografia no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus Registro.

Procuramos fazer nesse trabalho uma reunião coesa do conteúdo e das aplicações na topografia envolvendo os temas de Teorema de Tales, Semelhança de triângulos e Trigonometria do triângulo retângulo, restrito ao primeiro ano do ensino médio, tendo o cuidado de demonstrar as principais proposições e teoremas aplicados aos alunos. Nosso propósito é que o texto possa servir como referência para o professor de Matemática interessado em apresentar conteúdos da geometria ressaltando os usos e interpretações da Topografia.

O primeiro capítulo desse trabalho é voltado à Topografia, no qual apresentamos conceitos, métodos e instrumentos necessários à boa compreensão desse trabalho, visto que é voltado para professores de Matemática que, ocasionalmente, possam desconhecer sobre a Topografia enquanto ciência. Incluímos também uma pesquisa histórica de alguns equipamentos topográficos e sua evolução, procurando descrevê-los, explicar sua utilidade e a participação de alguns cientistas no desenvolvimento ou utilização desses equipamentos.

O segundo capítulo desse trabalho é voltado à Geometria e Trigonometria do primeiro ano do ensino médio, onde fizemos inicialmente uma breve abordagem histórica e analisamos os conteúdos dos livros consultados referentes aos temas desse trabalho. No capítulo demonstramos alguns teoremas, proposições e propriedades utilizados nas aplicações de topografia, buscando fazê-lo de maneira formal e compreensiva ao leitor. Os conteúdos abordados nesse capítulo são escala, teorema de Tales, semelhança, triângulo retângulo, relações trigonométricas do triângulo retângulo e cálculo de áreas. Achamos importante também colocar a demonstração da Fórmula de Heron e da Fórmula de Gauss, ambas para o cálculo de áreas sem o uso de ângulos, pouco vistos nos livros consultados. Também contextualizamos no conteúdo de Topografia o uso da lei dos cossenos e lei dos senos.

O terceiro capítulo trata de mostrar, em um levantamento topográfico, onde os conteúdos matemáticos estudados nesse trabalho são realmente aplicados. Para isso faz-se necessário apresentar alguns conceitos e explicações de procedimentos da planimetria e altimetria. O primeiro procedimento da Topografia detalhado nesse capítulo é a sequência de cálculos de uma poligonal fechada para a planimetria, nele é mostrada a ampla utilização da matemática do ensino médio no preenchimento das várias tabelas pelo topógrafo. Em seguida explicamos a aplicação da geometria e da trigonometria no cálculo de coordenadas retangulares e na distância entre dois pontos dados por coordenadas. Por fim, apresentamos vários métodos para cálculo de distâncias em terrenos planos e inclinados, nos quais a trigonometria e geometria foram amplamente utilizadas para obterem-se as variadas fórmulas hoje utilizadas pelos técnicos e engenheiros na Topografia.

Fizemos, paralelo a esse trabalho, o projeto de um teodolito didático para que as escolas, com a crescente popularização das impressoras 3D, possam construir essa ferramenta didática para aperfeiçoamento do processo ensino-aprendizagem, onde o aluno poderá ver na prática, a

utilização da trigonometria na resolução de problemas topográficos.

Ainda, paralelo a esse trabalho, desenvolvemos um *Manual de uso do teodolito na matemática*, que visa ser uma ferramenta de apoio pedagógico aos professores de matemática, especialmente do primeiro ano do ensino médio. Esse manual busca oferecer aos professores alguns procedimentos práticos que podem ser feitos com os alunos, utilizando um teodolito didático, proporcionando uma vivência prática e real da utilização da matemática na Topografia. E contém, de uma maneira mais didática e menos formal, conceitos e definições de Geometria e Trigonometria visto nesse trabalho. Também faz parte do manual vários exemplos, aplicações na Topografia e questões de concursos e vestibulares que envolvem os conteúdos abordados.

Finalmente, cabe citar que é desejo nosso, ao fazer esse trabalho, que a matemática cada vez mais saia da teoria dos livros e passe à prática da vida dos alunos do ensino médio brasileiro.

1 TOPOGRAFIA

A Topografia é uma ciência que estuda todas as características presentes na superfície de um território, como o relevo e outros fatores próprios de determinada região. A topografia é alinhada a cartografia (estudo dos mapas), e nasceu com a necessidade que as pessoas tinham de especificar as condições e estrutura dos caminhos descritos nas cartas geográficas da época. Embora tenha se aprimorado a partir do século XVII é possível ver rastros de medições topográficas a 4 mil anos atrás.

Procuramos definir e mostrar algumas divisões da Topografia como ciência, mas também fazer uma descrição histórica da Topografia como ferramenta de auxílio da matemática à evolução humana e na resolução de seus problemas.

1.1 DEFINIÇÃO DE TOPOGRAFIA

Uma definição de Topografia é dada por Borges:

A Topografia [do grego *topos* (lugar) e *graphein* (descrever)] é a ciência aplicada cujo objetivo é representar, no papel, a configuração de uma porção de terreno com as benfeitorias que estão em sua superfície. Ela permite a representação, em planta, dos limites de uma propriedade, dos detalhes que estão em seu interior (cercas, construções, campos cultivados e benfeitorias em geral, córregos, vales, espigões, etc.)(BORGES, 2013, pg. 11).

Essa definição faz parecer que a Topografia é uma ciência moderna, mas estudos e evidências históricas mostram que, de fato, a arte de medir é de milhares de anos atrás, como um ramo importante da agrimensura. Segundo Corrêa afirma:

Desde as mais antigas civilizações, monumentos gigantescos, templos sagrados, pirâmides, teatros, anfiteatros, aquedutos ou pontes foram construídos. Em torno destas obras magistrais podemos imaginar as operações topográficas necessárias ao arquiteto, para estabelecer os planos que permitiriam a realização prática da obra. Estabelecer as direções, medir as distâncias, estimar as alturas, mas também delimitar as parcelas dos terrenos, traçar as estradas e caminhos, construir canais para irrigação ou mesmo transporte de água, foram muitas das aplicações da agrimensura (CORRÊA, 2009, pg. 1).

Uma outra abordagem da Topografia e sua relação histórica com a evolução do homem é dado por Araújo:

O verdadeiro nascimento da topografia veio da necessidade de o homem ter conhecimento do meio em que vive. Este desenvolvimento ocorreu desde os primeiros mapas elaborados por civilizações antigas, que tinham o intuito de representar o local onde deveriam caçar ou para onde se deslocar e mais adiante com a navegação, as guerras, ou seja, próprio instinto de sobrevivência do ser humano o levou a expansão da topografia (ARAÚJO, 2009, pg. 1).

É importante ressaltar que a Topografia é apenas uma das ciências responsáveis por descrever as medidas, e Pastana faz bem esse esclarecimento:

No nosso dia a dia, deparamos frequentemente com situações nas quais é necessário determinar as posições relativas de pontos sobre a superfície, bem como suas representações através de plantas, mapas, cartas ou perfis. Primeiramente, é importante o conhecimento do significado da palavra Mensuração. Etimologicamente, Mensuração é de origem latina, da palavra *mensuratione*. Segundo o dicionário do Aurélio, a palavra Mensuração significa o ato de medir ou de mensurar. Mensuração terá um sentido amplo, onde designará a área de conhecimento humano que agrupa as ciências e as técnicas de medições, do tratamento e da representação dos valores medidos (PASTANA, 2010, pg. 1).

Pastana(2010) descreve a Geodésia, Topografia, Cartografia, Hidrografia e a Fotogrametria como as principais ciências e técnicas que fazem parte da Mensuração, embora sua apostila, que será utilizada nesse trabalho, trata principalmente da Topografia.

1.2 GRANDEZAS DA TOPOGRAFIA

Sobre o uso e aplicação da Topografia, Pastana(2010) descreve que o uso e a aplicação da Topografia nos diferentes ramos de atividades têm sido incrementados, dentre outras razões, pela modernização do instrumental pertinente, aliada à introdução da informática nas medições e nos cálculos de praxe. As grandezas medidas num levantamento topográfico podem ser:

- angulares
- lineares

1.2.1 GRANDEZAS ANGULARES

As grandezas angulares são ângulos azimutais (ou horizontais) e ângulos zenitais (ou verticais).

1.2.1.1 ÂNGULOS AZIMUTAIS

Os ângulos azimutais, ou horizontais, são utilizados nos levantamentos planimétricos. Segundo Borges:

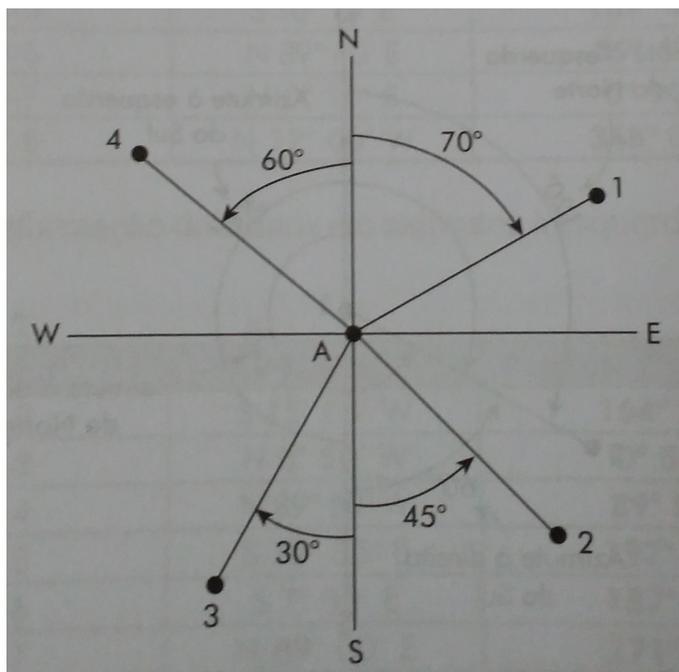
Azimute de uma linha é o ângulo que essa linha faz com a direção norte-sul, medido a partir do norte ou do sul, para a direita ou para a esquerda, e variando de 0° a 360° ou 400grd (BORGES, 2013, pg. 48).

Segundo Borges(2013) e Pastana(2010), quando não for expressamente afirmado o contrário, adota-se como padrão sempre o azimute partindo do Norte e no sentido horário (para a direita).

Alguns aparelhos topográficos utilizam em suas medidas o rumo em vez do azimute, para os levantamentos planimétricos. Assim Borges define o rumo:

Rumo de uma linha é o ângulo horizontal entre a direção norte-sul e a linha, medido a partir do norte ou do sul na direção da linha, porém, não ultrapassando 90° ou 100 grados(Figura 1) (BORGES, 2013, pg. 47).

Figura 1 – Exemplos de Rumo



Fonte: (BORGES, 2013, pg. 47)

Na Figura 1 temos os seguinte rumos:

| | |
|---|-----------------------------|
| $R - 1 = N 70^\circ E$ ou $70^\circ NE$ | (lê-se 70° nordeste) |
| $R - 2 = S 45^\circ E$ ou $45^\circ SE$ | (lê-se 45° sudeste) |
| $R - 3 = S 30^\circ W$ ou $30^\circ SW$ | (lê-se 30° sudoeste) |
| $R - 4 = N 60^\circ W$ ou $60^\circ NW$ | (lê-se 60° noroeste) |

Pastana(2010) e Borges(2013) abordam maneiras de converter rumos em azimutes, e vice versa.

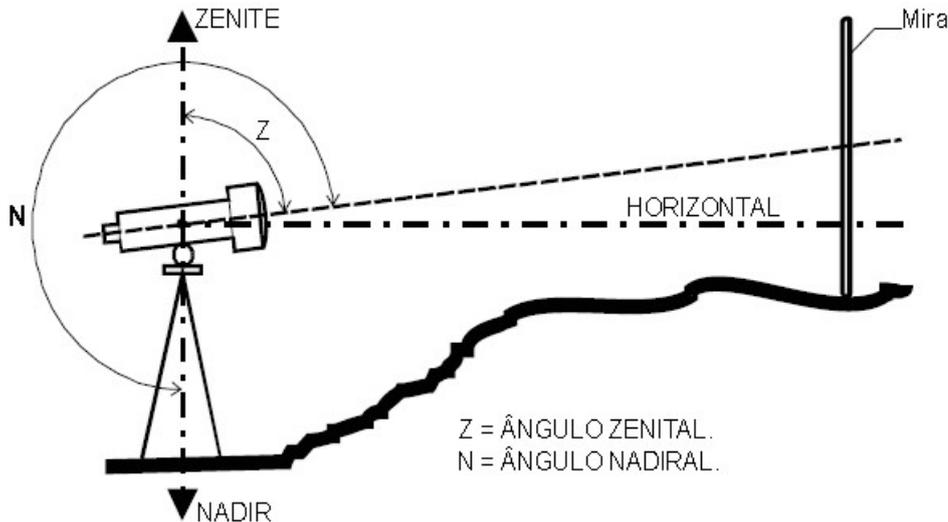
1.2.1.2 ÂNGULOS ZENITAIS

Segundo Pastana(2010) os ângulos zenitais, também chamados de ângulos verticais, são os ângulos perpendiculares ao plano topográfico.

Os ângulos verticais, conforme ilustra a Figura 2, podem ser:

- ZENITAL - Origem no zênite;
- NADIRAL - Origem no nadir.

Figura 2 – Esquema do Ângulo Nadiral e Zenital



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 11)

Segundo Pastana(2010), atualmente os fabricantes de teodolitos estão produzindo somente teodolitos com ângulos verticais zenitais, isto é, a origem do ângulo vertical é no zênite.

1.2.2 GRANDEZAS LINEARES

As principais grandezas lineares, segundo Pastana(2010), são as distâncias horizontais e a diferença de nível, o cálculo dessas distâncias é aplicação direta das razões trigonométricas, conforme veremos nos capítulos posteriores.

1.3 DIVISÕES DA TOPOGRAFIA

Segundo Pastana(2010), a Topografia tem cinco divisões principais:

| | | |
|----------------------------|---|-----------------------------|
| TOPOMETRIA | { | Planimetria ou Placometria |
| | | Altimetria ou Hipsometria |
| TOPOLOGIA OU GEOMORFOGENIA | | |
| TAQUEOMETRIA | | |
| FOTOGRAMETRIA | { | Terrestre ou Fototopografia |
| | | Aérea ou Aerofotogrametria |
| GONIOMETRIA | | |

1.3.1 TOPOMETRIA

Segundo Pastana(2010), a topometria encarrega-se, da medida das grandezas lineares e angulares, quer seja no plano horizontal ou no plano vertical, objetivando definir o posicionamento relativo dos pontos topográficos. Por sua vez, a topometria se divide em: planimetria e altimetria.

1.3.1.1 PLANIMETRIA

Essa divisão da topografia trata de representar as medidas num plano cartográfico dos ângulos e medidas horizontais. Segundo Borges explica:

Na *planimetria* são medidas as grandezas sobre um plano horizontal. Essas grandezas são as distâncias e os ângulos, portanto, as *distâncias horizontais* e os *ângulos horizontais*. Para representá-las, temos de fazê-lo por meio de uma vista de cima, e elas aparecerão projetadas sobre um mesmo plano horizontal. Essa representação chama-se *planta*, portanto, a planimetria está representada na planta (BORGES, 2013, pg. 11).

Conforme veremos no capítulo seguinte, das medições no terreno à transcrição reduzida e detalhada na planta cartográfica, muita matemática é empregada, especialmente conceitos de trigonometria, foco deste trabalho.

A apostila de Pastana descreve todos os passos de um levantamento planimétrico, e veremos que muitos desses cálculos são aplicações da trigonometria do triângulo retângulo, e faremos nesse trabalho a dedução de algumas dessas fórmulas, a medida que abordarmos os conteúdos do ensino médio na ordem utilizada em alguns livros didáticos brasileiros.

1.3.1.2 ALTIMETRIA

Como a geografia da Terra não é plana, faz-se necessário descrever os desníveis e representá-los, a parte da topografia que faz isso é a Altimetria. Segundo Borges:

Pela *altimetria*, fazemos as medições das distâncias e dos ângulos verticais que, na planta, não podem ser representados (exceção feita às *curvas de nível*, que serão vistas mais adiante). Por essa razão, a altimetria usa como representação a *vista lateral*, ou *perfil*, ou *corte*, ou *elevação*; os detalhes da altimetria são representados sobre um plano vertical (BORGES, 2013, pg. 12).

A operação topográfica que visa o levantamento de dados altimétricos é o nivelamento.

Como o foco desse trabalho é a matemática do ensino médio, especificamente a geometria e trigonometria do triângulo retângulo estudada no primeiro ano, e devido ser um tema bem amplo a ser abordado, esse trabalho terá muito pouco da altimetria. É importante ressaltar que, assim como a planimetria, os cálculos matemáticos para representação altimétrica são muito interessantes e poderiam ser base de um estudo detalhado.

1.3.2 TOPOLOGIA

Segundo Pastana(2010), a Topologia (ou Geomofogenia) é um complemento indispensável à Topometria, tem por objetivo o estudo das formas exteriores do terreno (relevo) e as leis que regem a sua formação e suas modificações através dos tempos. Ainda segundo o autor, a principal aplicação da Topologia dar-se-á na representação cartográfica do terreno pelas curvas de nível, que são as interseções obtidas por planos eqüidistantes, paralelos com o terreno a representar.

1.3.3 TAQUEOMETRIA

Segundo Pastana(2010), a Taqueometria tem por finalidade o levantamento de pontos do terreno, pela resolução de triângulos retângulos, dando origem às plantas cotadas ou com curvas de nível, é a junção dos levantamentos topométricos, ou seja, é o levantamento Planialtimétrico. É muito utilizado em terrenos altamente acidentados, por exemplo: morros, montanhas, vales, etc., sobre o qual oferece reais vantagens em relação aos métodos topométricos, já que os levantamentos são realizados com maior rapidez e economia.

A taqueometria, do grego “takhys” (rápido), “metren” (medição), é a parte da topografia que trata das medidas indiretas das distâncias horizontais e verticais e utiliza geralmente, equipamentos eletrônicos ou de alta precisão e velocidade, é baseada, principalmente, segundo Pastana, na resolução de triângulos isósceles ou retângulos.

1.3.4 FOTOGRAMETRIA

A Fotogrametria Terrestre é, segundo Pastana(2010), a que é realizada por fototeodolitos (fotogrâmetros), instalados convenientemente em pontos do terreno que fornecem fotografias orientadas (fotogramas), que permitem levantar com precisão suficiente os detalhes do terreno.

A Aerofotogrametria é o método de levantamento utilizado para grandes glebas de Terra, pode ser por satélites acopladas em aviões, fornecendo fotografias orientadas da superfície da Terra, que podem ser de dois tipos: eixos verticais e inclinados.

1.3.5 GONIOMETRIA

É a parte da topografia que trata da medição do ângulo azimutal (horizontal) e do ângulo vertical (perpendicular ao plano topográfico), já visto anteriormente.

1.4 MEDIÇÃO INDIRETA DE DISTÂNCIAS

Segundo Pastana(2010) define:

O processo de medida é indireto quando a distância é obtida em função da medida de outras grandezas, não havendo, portanto, necessidade de percorrer a distância (PASTANA, 2010, 65).

A medida indireta das distâncias é baseada, entre outros métodos, na resolução de triângulos isósceles ou retângulos, e a utiliza a taqueometria, compreende uma série de operações que constituem um processo rápido e econômico para a obtenção indireta da distância horizontal e diferença de nível.

1.5 IMPORTANTES INSTRUMENTOS DA TOPOGRAFIA AO LONGO DA HISTÓRIA

Corrêa(2008) busca contar a história da topografia através dos instrumentos utilizados desde os primeiros relatos da Topografia até os instrumentos mais modernos, e outro artigo de Corrêa(2009) procura contar a história da agrimensura através de alguns instrumentos, baseado especificamente na agrimensura dos antigos egípcios, gregos e com enfoque principal na agrimensura romana.

Diversos textos na internet também tratam do assunto, como uma publicação de Abrahão(2010) que mostra a evolução dessa ciência, desde o prumo óptico de 2600 a.c até os moderníssimos sistemas de “Varrimento Laser Tridimensional” atuais.

Um texto livre sobre a evolução do teodolito pode ser encontrada numa publicação de Olienik(2014) e mostra a construção desse importante instrumento e os avanços em sua tecnologia.

Alguns *sites* da internet, como a Wikipedia, contém descrições de muitos destes instrumentos topográficos, histórias acerca de sua origem e evolução, além de importantes matemáticos que o utilizaram.

Procuramos então, baseado nos trabalhos acima citados, mostrar a evolução da Agrimensura e Topografia através de alguns instrumentos utilizados para medir e descrever as distâncias no decorrer da história da humanidade:

- **Corda.** A Figura 3 é de esticadores de corda da antiguidade, essa gravura é encontrada no túmulo de Menna, construído no século XIV a.c., mostrando o quão antiga é essa técnica da agrimensura.

Segundo Corrêa, no antigo Egito, por volta do ano 1000 a.c., o faraó Sesóstris distribuiu algumas terras às margens do rio Nilo para alguns agricultores privilegiados. Porém, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor quando as águas baixavam. Os responsáveis por essa marcação eram os agrimensores, que também eram chamados de estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. A construção de pirâmides de base quadrada é uma das muitas aplicações do conhecimento geométrico dos antigos egípcios através do método conhecido como “cantos retos” utilizado pelos “esticadores de corda”. Também baseado nesse princípio, os egípcios utilizavam mosaicos, que frequentemente aparecem em paredes das construções

do Egito antigo. Embora por volta de 2000 a.c. os babilônios que habitavam a Mesopotâmia, onde hoje é o Iraque, já tivessem conhecimento empírico desse método, a formalização desse conhecimento, entretanto, só ocorreu com os gregos no século VI a.c., quando chegaram à expressão algébrica conhecida, válida para qualquer triângulo retângulo, que é conhecida como teorema de Pitágoras.

Figura 3 – Esticadores de corda, túmulo de Menna (século XIV a.c.)



Fonte: (CORRÊA, 2008, pg. 1)

- **Prumo ótico.** A Figura 4 mostra um prumo ótico. Um objeto pesado pendurado sobre uma corda para garantir a verticalidade da medida, aproveitando-se da força de gravidade da Terra. Esse é um dos instrumentos topográficos mais antigos que se conhece, e que ainda é utilizado nos dias atuais, embora com outros materiais.

O prumo também serviu como componente de vários outros equipamentos antigos, como o quadrante e a chorobate, conforme veremos adiante.

Alguns equipamentos topográficos, como os teodolitos convencionais, ainda usam o prumo ótico para localizar o aparelho bem em cima do ponto topográfico.

Figura 4 – Prumo ótico

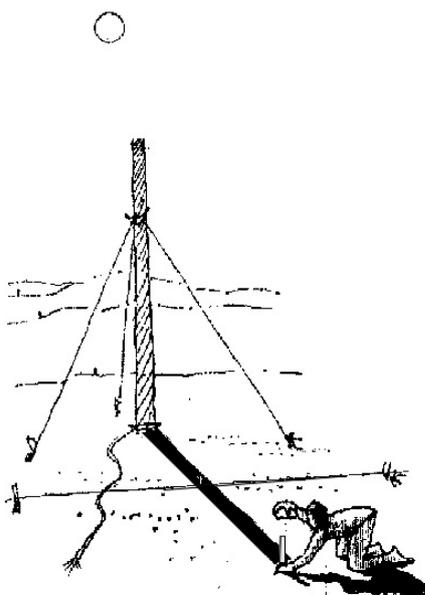


Fonte: (ABRAHÃO, 2010, Acesso em: 31 mar. 2018)

- **Gnômon.** A wikipedia define o gnômon como "a parte do relógio solar que possibilita a projeção da sombra". A Figura 5 mostra um agrimensor utilizando um gnômon para se basear na direção que deseja. O gnômon é considerado por estudiosos como o primeiro

instrumento utilizado para indicar a hora do dia, e data aproximadamente de 3500 a.c. Um dos matemáticos que utilizou-o foi Anaximandro de Mileto (610-546 a.c.), que se baseou em alguma referência dos babilônios ou egípcios. Entre outros usuários antigos também encontramos Metón (460 a.c.), que determinou a direção do Norte, e Eratóstenes(276-194 a.c.), que calculou a circunferência da Terra.

Figura 5 – Agrimensor usando o gnômon



Fonte: (CORRÊA, 2008, pg. 2)

- **Bússola magnética.** É um dos instrumentos mais importantes na história da medição. A primeira bússola é atribuída aos Chineses durante a dinastia QIN (221 – 206 a.c.), e empregaram ímãs naturais (um minério composto de óxido de ferro que se alinha numa direção norte – Sul) para construir as suas placas de leitura de sinas. A Figura 6 mostra uma bússola magnética, e a topografia ainda precisa muito desse instrumento para seus trabalhos, pois o rumo e o azimute são fundamentais para o levantamento planimétrico, e eles necessitam de localização dos pontos cardeais.

Figura 6 – Bússola Magnética



Fonte: (ABRAHÃO, 2010, Acesso em: 31 mar. 2018)

- **Groma.** Este instrumento é o símbolo do agrimensor, este era também chamado de "gromaticus". A groma é um esquadro óptico ou esquadro de agrimensor que divide o espaço em quatro quadrantes e serve para o traçado de linhas retas e ângulos retos. A parte superior do instrumento é formada por uma cruz de 4 braços perpendiculares de dimensões iguais que servem de esquadro de direção; em cada um dos braços é suspenso um fio à prumo chamado perpendicular. A Figura 7 é de uma groma romana.

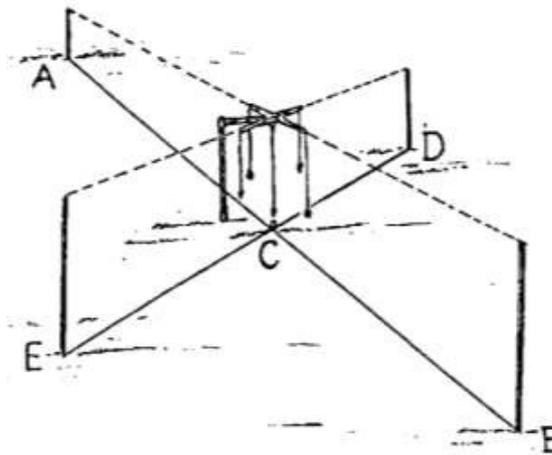
Figura 7 – Groma romana



Fonte: (CORRÊA, 2008, pg. 4)

A groma foi um dos primeiros instrumentos de topografia dos romanos, mas há relatos de que pode ter sido utilizado pelos egípcios na construção da pirâmide de Gizé. O comprimento dos lados da base da pirâmide tem um erro de menos de 20cm entre seus lados mais curto e mais longo, mostrando a precisão desse instrumento. A Figura 8 mostra como a Groma permite a visualização de retas perpendiculares.

Figura 8 – Visadas perpendiculares com a Groma

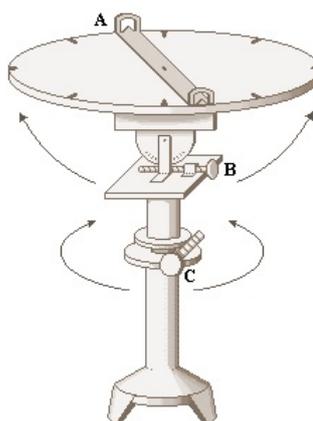


Fonte: (ABRAHÃO, 2010, Acesso em: 31 mar. 2018)

- **Dioptra.** Os primeiros relatos sobre esse instrumento ligam a Heron de Alexandria (10-80 d.c.), um dos maiores engenheiros da história antiga e um grande sábio da matemática aplicada. É um instrumento de medida angular através de operações de visadas goniométricas

horizontais. A dioptra era um tubo de observação ou, alternativamente, uma haste com visão em ambas as extremidades, presa a um suporte. Se equipado com transferidor, ele poderia ser usado para medir ângulos. Heron propôs a junção de um segundo disco vertical para a medida dos ângulos verticais fazendo deste instrumento o ancestral do teodolito. A Figura 9 ilustra o dioptra da época de Heron de Alexandria.

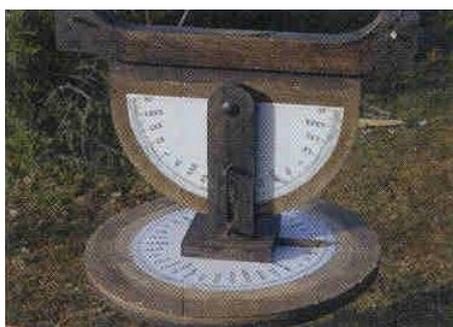
Figura 9 – Esquema de uma dioptra do século I d.c.



Fonte: (CORRÊA, 2009, pg. 8)

A dioptra podia servir para o nivelamento de terrenos, agrimensura, implantação de aquedutos ou na implantação de túneis e mais tarde, na astronomia. Os astrônomos gregos usaram a dioptra para medir as posições das estrelas. Tanto Euclides quanto Geminus nomeiam a dioptra em seus trabalhos astronômicos. A dioptra é uma versão mais precisa do groma. a Figura 10 mostra uma versão de Dioptra, que servia para a medida de ângulos e do nivelamento, tinham seu princípio em um tubo em forma de "U" com água, e que servia para nivelar uma plataforma, podendo ainda medir os ângulos horizontais e verticais. Especula-se porém que a dioptra poderia ter sido usado para construir o túnel de Eupalino, uma das maiores realizações da engenharia da antiguidade, um túnel de 1036 metros de comprimento, escavado na ilha grega de Samos através de Monte Castro, no século VI a.c., durante o governo do tirano Polycrates.

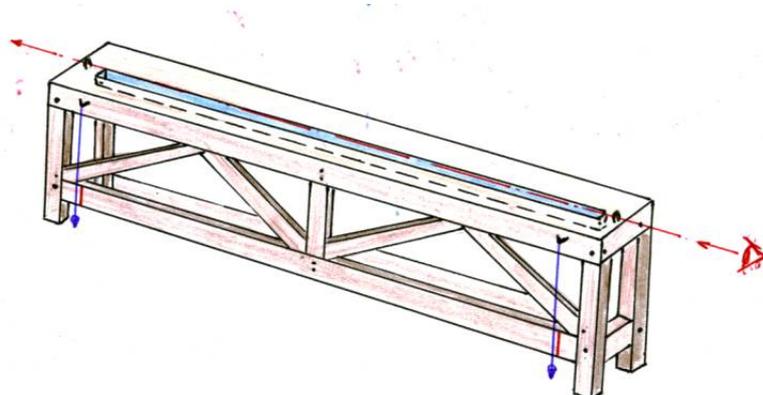
Figura 10 – Dioptra usada para nivelamento e ângulos verticais e horizontais



Fonte: (CORRÊA, 2008, pg. 2)

- **Chorobate.** O "chorobates" ou primeira aproximação de um nível, era uma régua horizontal com sapatas nas quatro pontas, na parte superior da régua havia um sulco aonde se vertia água para usá-la como nível e nas extremidades desta régua são colocadas duas peças de mesmas dimensões que são reunidas em forma de braço de esquadro, possui também dois fios de prumo presos em cada canto da régua. Estes fios de prumo, quando o equipamento estiver pronto para as medidas, garantem a perpendicularidade das linhas traçadas, fazendo ver que o instrumento está bem nivelado. Uma das únicas referências do uso e modelo do chorobate é feita pelo engenheiro romano Marcos Vitruvius Polião (século I a.c.), que deixou como legado a obra "De Architectura". A Figura 11 mostra o esquema do princípio de um chorobate.

Figura 11 – Esquema de um chorobate



Fonte: (WIKIPEDIA, 2016, Acesso em: 02 abr. 2018)

A utilização do chorobate é bastante antiga, este tipo de instrumento é tão antigo como os aquedutos. A construção de um aqueduto implica necessariamente numa pendente regular, nem tão forte nem tão fraca, para que tenha um escoamento desde a fonte até o ponto de chegada: um instrumento que permita a medida da diferença de nível entre pontos se faz necessário. Os mais antigos aquedutos têm mais de 3000 anos: sob o reinado de Salomão, a cidade de Jerusalém era provida de um aqueduto, assim também a cidade de Nínive (690 a.c.). A Figura 12 ilustra romanos utilizando o chorobate na agrimensura.

Figura 12 – Agrimensores romanos utilizando o chorobate



Fonte: (CORRÊA, 2009, pg. 11)

- **Quadrante.** Ptolomeu, no ano 150 a.c., descreveu o quadrante, aplicando-o nas observações astronômicas. O quadrante é na sua forma mais rudimentar, e tal como o nome indica, um instrumento que consiste num quarto de círculo graduado ao qual está fixo um fio de prumo, e a sua função é a medição da altura, que é a distância angular de um objeto em relação ao horizonte. A Figura 13 mostra o Quadrante, que permitia determinar a distância entre o ponto de partida e o lugar onde a embarcação se encontrava, baseado na altura da Estrela Polar. Para ângulos verticais, as réguas de Ptolomeu foram utilizadas até a Idade Média.

Figura 13 – Quadrante de madeira



Fonte: (CORRÊA, 2008, pg. 3)

- **Astrolábio.** O astrolábio é um instrumento naval antigo, usado para medir a altura dos astros acima do horizonte. Era formado por um disco de latão graduado na sua borda, um anel de suspensão e uma mediclina (espécie de ponteiro). O astrolábio é o resultado prático de várias teorias matemáticas desenvolvidas por célebres estudiosos antigos: Euclides, Ptolomeu, Hiparco de Niceia e Hipátia de Alexandria. Era usado para determinar a posição dos astros no céu e foi por muito tempo utilizado como instrumento para a navegação marítima com base na determinação da posição das estrelas no céu. Mais tarde, foi simplificado e substituído pelo sextante (instrumento astronômico usado para determinar a latitude). Também era utilizado para resolver problemas geométricos, como calcular a altura de um edifício ou a profundidade de um poço. Mais tarde, os árabes apoiando-se nos conhecimentos dos gregos e romanos, usaram astrolábios divididos em 5 minutos de arco. A Figura 14 mostra a réplica de um astrolábio iraniano.

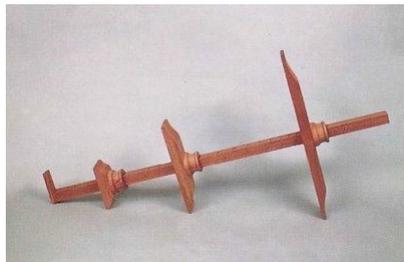
Figura 14 – Astrolábio iraniano



Fonte: (WIKIPEDIA, 2014, Acesso em: 02 abr. 2018a)

- **Balestilha.** Segundo Corrêa, no ano de 1300, através de Levi Ben Gerson (1288-1344 d.c), se conhece um mecanismo para a medida indireta da distância, mediante o movimento de uma barra perpendicular (balestilha) a outra principal graduada, que proporcionava assim os ângulos paraláticos. A balestilha é um instrumento complementar da esfera armilar, formado por "virote" e "soalha", utilizado para medir a altura em graus que une o horizonte ao astro e dessa forma determinar os azimutes, antes e depois de sua passagem meridiana. A Figura 15 é de uma balestilha.

Figura 15 – Balestilha



Fonte: (CORRÊA, 2008, pg. 5)

A versão do instrumento na Figura 16 é própria para ser usada em alto mar, através de observações da altura do Sol na identificação da latitude do navio. Teria sido o primeiro instrumento desta época a trazer o astro ao horizonte do mar, mesmo tendo aparecido depois do astrolábio e do quadrante. Foi dos instrumentos náuticos mais utilizados durante os descobrimentos portugueses.

Figura 16 – Balestilha no Regimento de navegacion(1552) de Pedro Medina



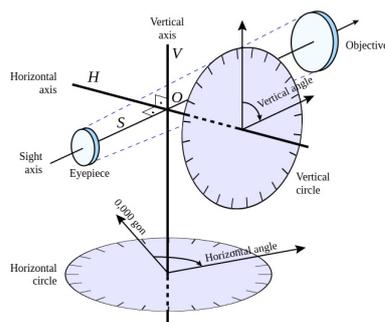
Libro tercero de la altura
del Norte.

Fonte: (WIKIPEDIA, 2014, Acesso em: 02 abr. 2018b)

- **Teodolito.** O teodolito é um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais, aplicado em diversos setores como na navegação, na construção civil, na

agricultura e na meteorologia. Basicamente é um telescópio com movimentos graduados na vertical e na horizontal, e montado sobre um tripé e estando perfeitamente nivelado e com seu centro óptico acima do ponto de referência, que na topografia, é comumente chamado de ponto topográfico. A Figura 17 ilustra os eixos e círculos que compõem a estrutura principal de um teodolito.

Figura 17 – Eixos e círculos de um Teodolito



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018, Acesso em: 02 abr. 2018)

O teodolito é resultado de aprimoramento de instrumentos de topografia milenares, como a groma e a dioptra. No ano de 1571, Leonard Digges construiu o que seria um teodolito primitivo do qual chamou de "theodolitus". era um instrumento com um círculo dividido e um quadrado com uma bússola no centro sem o telescópio. O primeiro teodolito foi feito por Jonathan Sisson em 1720, com quatro parafusos niveladores. Em 1835, Ignácio Porro inventou o taquímetro auto-redutor, um instrumento que tinha todos os componentes do teodolito, mas com um dispositivo ótico. A invenção do teodolito tinha o objetivo de substituir o círculo de borda. Conforme o telescópio, o mesmo instrumento que permitia a medição de distância, elevação e direção, reduzindo significativamente o tempo usado para um levantamento topográfico e aumentando a precisão. Em 1838, o engenheiro inglês William John Macquorn Rankine desenvolveu a integração de todos os dispositivos do teodolito, melhorando significativamente no trabalho nas edificações. Após 1950, adicionaram processos de automatização e adotaram medidas eletrônicas. Além disso, foram desenvolvidos novos instrumentos baseados no teodolito, como a estação total. A Figura 18 é de um teodolito exposto no Museu Geomineral de Madrid.

Figura 18 – Teodolito exposto em Madri - Espanha



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018, Acesso em: 02 abr. 2018)

- **Nível Topográfico.** Também é conhecido como nível ótico. É um aparelho que consta de uma luneta telescópica com um ou dois níveis de bolha, sendo este conjunto instalado sobre um tripé. A característica principal do nível topográfico é o fato do mesmo possuir movimento de giro somente em torno de seu eixo principal, ou seja, não permite alteração do ângulo vertical. Esse instrumento tem a finalidade de medição de desníveis entre pontos que estão a distintas alturas ou trasladar a cota de um ponto conhecido a outro desconhecido. Também é possível o cálculo aproximado de distância através dos fios estadimétricos de sua luneta. Para sua utilização faz necessário como acessório uma régua ou mira graduada. Atualmente existe também o nível topográfico laser, que utiliza *lasers* para marcações e medições de níveis e alinhamento de pontos de forma rápida e precisa. A Figura 19 é de um nível topográfico convencional.

Figura 19 – Nível Topográfico



Fonte: (ABRAHÃO, 2010, Acesso em: 31 mar. 2018)

- **Teodolito Eletrônico.** O teodolito eletrônico é um equipamento mais leve e fácil para transportar do que os teodolitos antigos, além de realizar medições mais precisas e possuir um dispositivo com ótica de alto rendimento e facilidade de utilização. Pode ser utilizado acoplado a outros equipamentos de medição como o distanciômetro eletrônico ou trena eletrônica. É um instrumento especificamente utilizado para a medição de ângulos horizontais e verticais e pode ser utilizado pela engenharia em medições de grandes obras como, barragens, hidrelétricas, pontes, medição industrial, exploração de minérios, além de ser aplicado em levantamentos topográficos e geodésicos. A Figura 20 mostra dois teodolitos, à esquerda um teodolito do século XIX e à direita um teodolito eletrônico da marca ZEISS.

Figura 20 – Teodolito manual e eletrônico



Fonte: (MAST, 2010, Acesso em: 02 abr. 2018)

- **Estação Total.** A estação total é um dos equipamentos mais modernos utilizado na medida de ângulos e distâncias. Esse instrumento é uma junção do teodolito eletrônico digital com o distanciômetro eletrônico. A estação total associada ao prisma refletor é capaz de medir distâncias de 500 a 20.000 metros, dependendo da quantidade de prismas utilizados para a reflexão do sinal e das condições atmosféricas. Estes equipamentos proporcionaram aos técnicos, além da velocidade e exatidão consideravelmente potencionados, o manuseamento de dados numéricos que podem ser automaticamente transmitidos para uma unidade de recolhimento de dados eletrônicos, ou por transferência direta para computadores. As estações totais são usadas em qualquer tipo de levantamento topográfico ou geodésico. A Figura 21 mostra uma estação total e um prisma refletor. Alguns modelos de estação total são robotizados e é o operador quem segura o prisma refletor e controla a máquina via controle remoto, a partir do ponto observado. Esse tipo de equipamento é usado principalmente em trabalhos de monitoramento de obras, medição de deformações e deslocamentos de terras.

Figura 21 – Estação Total e prisma refletor



Fonte: (MAST, 2010, Acesso em: 02 abr. 2018)

- **GPS(Sistema de Posicionamento Global).** Este sistema revolucionário de posicionamento foi concebido inicialmente restrito ao uso militar, mas depois essa utilização foi universalizada com a avanço da tecnologia, hoje muitos dos aparelhos celulares possuem o sistema de GPS. Cada aparelho recebe os sinais emitidos por alguns satélites (de um total de 24 que compõem o sistema) e calcula sua posição baseada na posição dos satélites e comparando a hora interna do aparelho com a hora transmitida por cada satélite. Segundo Rousseau, esses 24 satélites são distribuídos por 6 planos orbitais, de forma que existem pelo menos 4 satélites em cada plano equidistantes entre si.

Os satélites transportam até quatro relógios atômicos de césio e rubídio que são atualizados periodicamente a partir de uma estação terrestre no Colorado. Os satélites transmitem sinais de temporização e dados de posição. Um receptor GPS, que pode ser um pequeno dispositivo de mão, decodifica os sinais de temporização de vários dos satélites, interpretando os tempos de chegada em termos de latitude, longitude e altitude, com uma incerteza que pode ser de apenas 10 metros (HYPERPHYSICS, 2018, Acesso em: 22 abr. 2018).

A Figura 22 mostra a disposição dos satélites nos 6 planos orbitais e a triangularização necessária para informação do posicionamento pelo GPS.

Figura 22 – Satélites na órbita da terra para GPS e recepção de sinal



Fonte: (HYPERPHYSICS, 2018, Acesso em: 22 abr. 2018)

O GPS tem no entanto as suas limitações e segundo Rousseau:

Antes de maio de 2000, o Departamento de Defesa, intencionalmente, introduzia imprecisões nos sinais dos satélites de modo a reduzir a precisão do sistema para 100 metros (ROUSSEAU, 2015, pg. 4).

O funcionamento detalhado do GPS, cálculos dos erros e muitas informações sobre o GPS estão no livro da coleção PROFMAT de (ROUSSEAU, 2015), indicado para quem interessar aprofundar o estudo sobre esse tema.

Os receptores (GPS) surgiram inicialmente no mercado com custos elevados, verificando-se a sua gradual redução com a entrada no mercado de novos fabricantes. Estes receptores estão igualmente condicionados por fatores de bloqueio de sinal devendo dispor de uma considerável abrangência de céu aberto. Isto significa que o sistema é inútil dentro em espaços confinados, onde existam barreiras naturais (cúpulas de árvore, montanhas, vales cavados, etc) bem como perto das construções ou as superfícies verticais devidas a um efeito denominado de multi-trajeto. O GPS é muito ligado às tarefas de navegação terrestre e marítima. Esta tecnologia permitiu nas áreas profissionais a determinação de pontos notáveis sobre a terra com um considerável rigor planimétrico (de ordem centimétrica), sendo o posicionamento altimétrico menos preciso. O termo GPS (Global Positioning System) evoluiu recentemente para GNSS (Global Navigation Satellite System). A Figura 23 é de um GPS topográfico comercial.

Figura 23 – GPS topográfico chinês



Fonte: (ABRAHÃO, 2010, Acesso em: 31 mar. 2018)

Muitos outros instrumentos históricos de topografia são descritos e detalhados em (CORRÊA, 2008) e (CORRÊA, 2009), como a corrente de agrimensor, prancheta, taquímetro auto-reductor, clisímetro e esquadro duplo.

2 GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA - 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

2.1 ABORDAGEM HISTÓRICA E DIDÁTICA DOS LIVROS CONSULTADOS

A maioria dos livros de ensino médio fazem referência à história da matemática, embora nem todas as histórias relatadas sejam fatos históricos, mas apenas possibilidades. Faremos a seguir uma breve análise dos livros consultados para esse trabalho, no que diz respeito à abordagem histórica e aos conteúdos de geometria e trigonometria:

- **Matemática Aula por Aula.** O livro de Silva & Barreto(2005) faz uma abordagem histórica sobre a importância da trigonometria na astronomia, agrimensura e navegação. Os conteúdos do livro são as razões trigonométricas, teorema de Pitágoras e o seno, cosseno e tangente de 30° , 45° e 60° . Aborda os conteúdos de trigonometria sem nenhuma demonstração e/ou dedução das fórmulas, e não teve portanto nenhum exemplo ou atividade selecionada para esse trabalho.

Figura 24 – Capa do livro Matemática Aula por Aula - Vol. 1



Fonte: (SILVA C.X.; BARRETO, 2005)

- **Matemática Contexto & Aplicações (1ª ed.)** O livro de Dante(2010) em sua primeira edição faz uma abordagem histórica sobre a importância da trigonometria na astronomia, citando principalmente Hiparco de Nicéia. Faz posteriormente uma abordagem sobre a trigonometria, inclusive citando sua influência na Geometria e na Análise Matemática, assim como suas aplicações na Física, Engenharia, Música e Topografia.

Mais adiante discorre sobre as versões do nome seno e por fim faz uma contextualização da aplicação da trigonometria na busca de aviões desaparecidos. Os conteúdos referentes à trigonometria são detalhados, começa explicando índice e ângulo de subida, os relaciona e a partir daí explica a idéia de tangente, seno e cosseno, para somente depois defini-los.

Explica as relações trigonométricas, inclusive com algumas relações pouco vistas e estudadas pelos alunos do ensino médio:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2.\operatorname{sen} \alpha.\cos \alpha \quad (\text{para } 0^\circ < \alpha < 45^\circ)$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (\text{para } 0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Outra aplicação que consta apenas em Dante(2010) é a projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um eixo e sua aplicação na resolução de problemas. Muitas fórmulas com demonstrações e bastante exercícios e exemplos, alguns deles utilizados nesse trabalho.

Na Geometria, Dante(2010) também faz uma abordagem histórica da importância do estudo das propriedades das figuras geométricas e cita como exemplo a beleza do estilo enxaimel das construções de algumas casas no Brasil e na Europa.

Nos conteúdos segue a mesma linha de detalhes nas demonstrações de fórmulas e propriedades, sempre procurando demonstrá-las e/ou deduzí-las. Aborda os triângulos e polígonos na questão da congruência, e no triângulo mostra o teorema fundamental da semelhança e os casos de semelhança, estendendo depois aos polígonos. Cita o uso de semelhança de triângulos para medir distâncias inacessíveis e as relações métricas do triângulo retângulo. Mais a frente aborda também, no estudo das áreas, a fórmula de Heron, embora sem demonstração nesse caso; além da fórmula geral da área do triângulo e da fórmula da área do triângulo equilátero.

Por ser um livro bem detalhado e extenso, de aproximadamente 500 páginas, foi resumido na segunda edição.

Figura 25 – Capa do livro Matemática Contexto & aplicações, 1ª ed. - Vol. 1



Fonte: (DANTE, 2010)

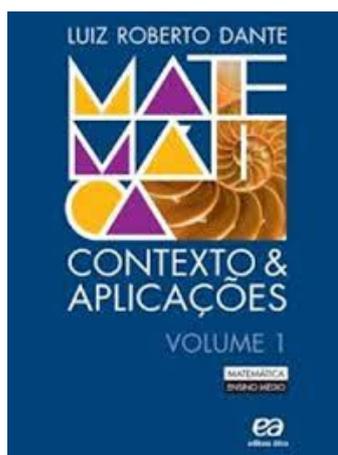
- **Matemática Contexto & Aplicações (2ª ed.)** O livro de Dante(2013) em sua segunda edição traz um esquema mais próximo dos outros livros consultados, inclusive na sequência metodológica, abordando primeiro a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras, para depois estudar a trigonometria do triângulo retângulo. A abordagem histórica também

cita a importância de Hiparco de Nicéia para a trigonometria, assim como o trabalho *Almagesto* de Ptolomeu, mas explora a migração e evolução desses estudos para outros povos no decorrer da história, passando pelos árabes, hindus e cita uma obra do alemão Johann Muller (1436-1476), *De triangulis*.

Os conteúdos também são reduzidos em relação à primeira edição, partindo do teorema de Tales para semelhança de triângulos e polígonos. No triângulo retângulo mostra suas relações métricas, o teorema de Pitágoras e depois aborda suas relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente). Relaciona seno, cosseno e tangente entre si e mostra os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30° , 45° e 60°).

Tem vários exemplos e aplicações dos conteúdos abordados, embora bem menos que a primeira edição, por isso mesmo essa edição tem 200 páginas a menos que a outra edição. A maioria das fórmulas são deduzidas e/ou demonstradas detalhadamente como na primeira edição, sendo portanto bem utilizado nesse trabalho.

Figura 26 – Capa do livro Matemática Contexto & aplicações, 2ª ed. - Vol. 1



Fonte: (DANTE, 2013)

- **Matemática Ciência, Linguagem e tecnologia** O livro de Ribeiro(2010) faz uma referência histórica sobre as pirâmides do Egito, seus mistérios, localização e a forma como foram construídas. E conta a história de Tales de Mileto, o teorema a ele atribuído e sua utilização em várias ciências como Matemática, Física e Engenharia. Mais a frente conta a história do teorema de Pitágoras e ilustra sua demonstração por vários povos. Faz uma contextualização sobre a inclinação das telas das TVs.

O conteúdo parte das retas paralelas, teorema de Tales, semelhança de figuras, polígonos e em especial o triângulo. No triângulo retângulo aborda as relações métricas e o teorema de Pitágoras. No aspecto visual as figuras e demonstrações são bem feitas e de fácil leitura. As relações trigonométricas são detalhadas e demonstradas, e tem conteúdos adicionais em relação aos outros livros consultados, relações de seno e cosseno de ângulos obtusos, lei dos senos, lei dos cossenos e uma fórmula de cálculo de áreas de triângulos baseado na lei dos senos.

Todos os conteúdos com demonstração e exemplos, sendo portanto muito utilizado nesse trabalho.

Figura 27 – Capa do livro Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia - Vol. 1



Fonte: (RIBEIRO, 2010)

- **Conexões com a Matemática** O livro de Barroso(2010) faz uma referência histórica primeiramente sobre o grego Erastótenes(276-194 a.c.) e seus estudos e cálculos para distâncias inacessíveis, tendo o cuidado de localizar a região geográfica onde viveu. Parte daí para a importância da semelhança de figuras, exemplificando os mapas, com enfoque especial no estudo de escala. Sempre procura fazer uma contextualização histórica com os conteúdos, por exemplo ao estudar o teorema de Pitágoras conta sua utilização nas cordas do esquadro egípcio e cita, inclusive, o Último Teorema de Fermat ($x^n + y^n = z^n$), problema que intrigou muitos matemáticos dos últimos séculos.

Já ao estudar a trigonometria do triângulo retângulo, a autora faz referência ao trabalho de Aristarco de Samos (310-230 a.c.) que fez uma relação entre as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, utilizando o triângulo retângulo. Faz por fim uma contextualização da modelagem matemática na construção dos diferentes tipos de telha, em relação à declividade e superfície do telhado.

O conteúdo aborda o conceito e utilização da escala ainda na parte de contextualização, para depois mostrar o teorema de Tales. Importante citar que o livro tem o cuidado de mostrar a propriedade de segmentos correspondentes e o teorema fundamental da proporcionalidade antes de demonstrar o teorema de Tales.

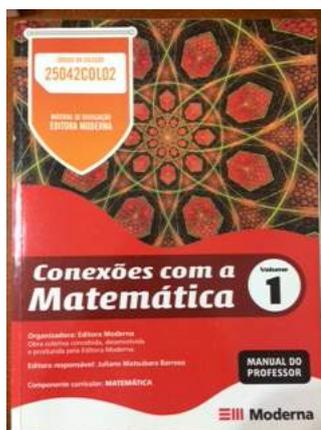
Da mesma forma, ele começa com algumas propriedades e conceitos necessários para depois abordar a semelhança de polígonos e triângulos. No teorema de Pitágoras ele faz três demonstrações diferentes: a mais clássica, dos quadrados, uma utilizando trapézios e outra através da semelhança de triângulos, sendo que essas duas últimas maneiras foram abordadas nesse trabalho.

No triângulo retângulo também fez demonstrações das definições de seno, cosseno e tangente, a relação entre esses valores em ângulos agudos e os valores do seno, cosseno e

tangente de 30° , 45° e 60° . A autora procurou em todas as demonstrações utilizar como base a semelhança de triângulos, metodologia que também foi seguida nesse trabalho.

Finalmente é importante destacar os exemplos de aplicação das razões trigonométricas do triângulo retângulo no cotidiano e na Astronomia, Topografia e Construção civil, e inclusive ensinando como utilizar a calculadora na determinação dessas razões trigonométricas. Um destaque também sobre o livro de Barroso(2010) são as observações nas laterais das páginas, sempre procurando esclarecer as dúvidas do leitor.

Figura 28 – Capa do livro Conexões com a matemática - Vol. 1



Fonte: (BARROSO, 2010)

- **Matemática** O livro de Paiva(2009) aborda de uma maneira resumida o triângulo e proporcionalidade, ainda no início do livro, antes de entrar no conteúdo de funções, diferente de todos os outros livros consultados, que faziam esse estudo no final do volume 1 (primeiro ano do ensino médio).

O livro de Paiva(2009) faz porém uma contextualização desse conteúdo com a Topografia, no cálculo da largura de um rio. Aborda a Geometria e cita as controversas possíveis origens desse ramo da matemática e, segundo o autor, como certeza apenas o marco que foi o trabalho *Os elementos* de Euclides de Alexandria no século III a.c., dando origem à Geometria Euclidiana. Posteriormente faz uma contextualização da Geometria com a arte, com foco no estudo e utilização do ponto de fuga e da construção da perspectiva.

Como o capítulo do livro trata da geometria, inicia com os polígonos e suas classificações para depois entrar na abordagem do triângulo. No triângulo ele classifica, mostra seus elementos principais (altura, bissetriz, mediana e mediatriz), mostra a soma interna dos ângulos de um triângulo e o teorema do ângulo externo do triângulo e as propriedades dos triângulos isósceles, equilátero e retângulo. Depois passa ao teorema de Tales, semelhança de figuras planas e triângulos, apresenta os casos de semelhança e faz uma demonstração bem simples de razão de semelhança. Segundo o autor:

Nenhuma outra proposição matemática possui tantas demonstrações quanto o teorema de Pitágoras. Em 1940, o professor norte-americano

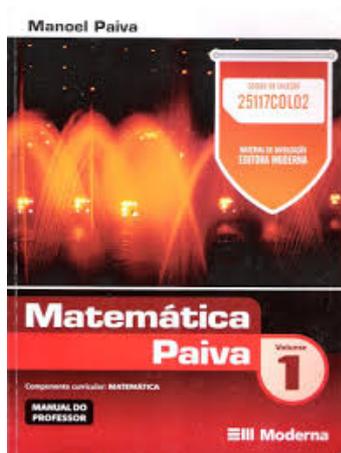
Elisha Scott Loomis publicou, em seu livro *The Pythagorean Proposition*, 367 demonstrações diferentes desse teorema (PAIVA, 2009).

O autor demonstra o teorema de Pitágoras por semelhança e pela composição de quatro triângulos retângulos congruentes, além do cálculo da medida da diagonal do quadrado e a altura de um triângulo equilátero. Por não ser o objeto específico desse trabalho essa demonstração que utiliza quatro triângulos congruentes não foi descrita, mas cabe o destaque para consulta de quem se interessar.

Embora os conteúdos abordados pelo autor fossem relevantes, foram abordados, na maioria das vezes, de maneira simplória e com pouca formalidade nas demonstrações.

Os exemplos foram poucos utilizados nesse trabalho mas deram sugestões de temas e propriedades que poderiam ser incluídos, como por exemplo, que os elementos do triângulo mantêm as mesmas relações de proporcionalidades em triângulos semelhantes. No trabalho foram demonstradas essas características para a bissetriz e a altura.

Figura 29 – Capa do livro Matemática - Vol. 1



Fonte: (PAIVA, 2009)

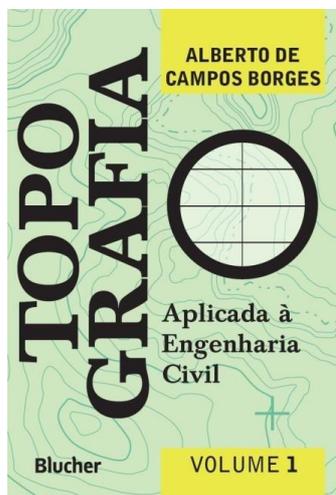
- **Topografia aplicada à Engenharia Civil.** O livro de Borges(2013) é muito utilizado nos cursos de Engenharia Civil e na formulação de apostilas para a disciplina de Topografia nos cursos de Engenharia Civil e Técnico em Edificações. Ele aborda de maneira detalhada e didática os conceitos, equipamentos e medições da Topografia básica. É importante ressaltar também que ele dedica parte do livro a conceitos que deveriam ser aprendidos no ensino médio, como Rumos e Azimutes.

Outra questão importante desse livro é que ele detalha passo-a-passo o levantamento planimétrico, o cálculo de áreas e o nivelamento geométrico, explicando em alguns casos, inclusive, a dedução da fórmula. Por essa característica resolvemos adotar esse livro como base para esse trabalho, nos assuntos de Topografia.

Um último item importante a abordar do livro de Borges(2013) é que o autor, além do método que segue, fornece informações e métodos alternativos para que o leitor possa, se

achar conveniente, estudar e executar de forma distinta, mostrando que o conhecimento é adquirido das mais diversas maneiras.

Figura 30 – Capa do livro Topografia aplicada à Engenharia Civil- vol. 1



Fonte: (BORGES, 2013)

- Em complemento ao livro de Borges(2013) foi utilizado a apostila de Pastana, utilizada pela Faculdade de Engenharia, Arquitetura e Tecnologia da UNIMAR (Marília-SP). O autor dessa apostila utiliza em algumas demonstrações figuras de mais fácil entendimento, embora no raciocínio e método se assemelhe bastante à Borges.

Conforme verificamos, os livros didáticos de matemática consultados têm muita diferença na abordagem histórica e conteúdos de acordo com o autor, isso causa mais ainda uma diferença de aprendizado nos alunos do ensino médio brasileiro nesse tema tão importante da matemática que é o estudo da Geometria.

2.2 ESCALA

Sempre que trabalhamos com mapas ou desenhos de imagens sempre temos o uso da escala.

Existem diversas definições diferentes de escala, como a de Ferreira:

sf. **1.** Linha graduada, dividida em partes iguais, que indica a relação de dimensões ou distâncias marcadas sobre um plano com as dimensões ou distâncias reais. **2.** Porto ou lugar de parada de qualquer meio de transporte, entre o local de partida e o de chegada. *Mús.* **3.** Disposição esquemática de notas que se sucedem em ordem ascendente ou descendente. (FERREIRA, 2004, pg. 361)

Ferreira(2004) cita que existem vários tipos de escalas para determinar a intensidade de fenômenos físicos, como as escalas de temperatura Celsius, Kelvin e Fahrenheit.

Utilizaremos outra definição de escala mais apropriada ao uso na Topografia, denominada escala cartográfica.

A escala cartográfica é um importante elemento presente nos mapas, sendo utilizada para representar a relação de proporção entre a área real e a sua representação. É a escala que indica o quanto um determinado espaço geográfico foi reduzido para “caber” no local em que ele foi confeccionado em forma de material gráfico. (ESCOLA, 2017, Acesso em: 14 mar. 2018)

A importância da escala nos diversos ramos da Topografia também é abordada por Borges, que cita:

Nas plantas, para a planimetria, e nos perfis, para a altimetria, necessitamos usar uma escala para reduzir as medidas reais a valores que caibam no papel para a representação. Essa escala é a representação entre dois valores, o real e o do desenho. (BORGES, 2013, pg. 12)

Normalmente, as escalas cartográficas estão representadas em forma de fração, sendo que o numerador indica o valor do plano e o denominador o valor do tamanho real.

Por exemplo, 1:50 significa que 1 cm no mapa é equivalente a 50 cm na área real.

Existem três principais tipos de escalas cartográficas:

- Escala natural (quando o tamanho real é igual ao representado no plano gráfico. Esta escala é representada numericamente como 1:1);
- Escala reduzida (quando o tamanho real é maior do que a área representada. Esta escala costuma ser usada em mapas de territórios ou plantas de habitações. 1:10.000 ou 1:3.000.000);
- Escala ampliada (quando o tamanho gráfico é maior do que o real. É usada para mostrar detalhes mínimos de determinada área, principalmente de espaços de tamanhos reduzidos. 50:1 ou 400:1, por exemplo).

Exemplo 2.1. [(BORGES, 2013, pg. 12)] Calcular o comprimento de 324 m em escala 1:500

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} \text{reduzido} & \text{real} \\ 1 & 500 \\ d & 324 \end{array}$$

$$500d = 1 \cdot 324 \quad \implies \quad d = \frac{324}{500} = 0,648m = 64,8cm.$$



Aplicação na Topografia 2.2. (BORGES, 2013, pg. 13) Medindo-se uma figura retangular sobre uma planta em escala 1 : 200, obtiveram-se lados de 12cm e 5cm. Qual a superfície do terreno que o retângulo representa?

Resolução:

Como a escala é de 1 : 200, para o lado de 12cm temos

| planta | real |
|--------|------|
| 1 | 200 |
| 12 | l |

$$l = 200 \cdot 12 = 2400cm = 24m$$

Analogamente, para o lado de 5cm temos

| planta | real |
|--------|------|
| 1 | 200 |
| 5 | c |

$$c = 200 \cdot 5 = 1000cm = 10m$$

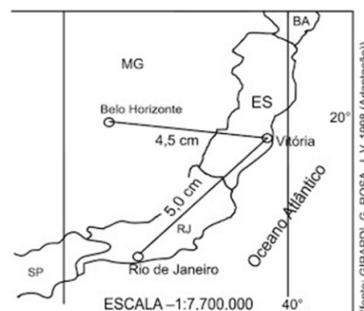
Logo, a área real será

$$A = l \cdot c = 24m \cdot 10m = 240m^2$$



Aplicação na Topografia 2.3. Na Figura 31, a distância entre Belo Horizonte e Vitória foi de 4,5 cm e de Vitória ao Rio de Janeiro de 5 cm. O tamanho real dessa distância é feita usando uma regra de três simples, conforme abaixo:

Figura 31 – Ilustração de um mapa adaptado com escala



(GEOGRAFALANDO, 2017, Acesso em: 22 dez. 2017)

Resolução:

Distância de Belo Horizonte a Vitória

| | |
|------|-----------|
| mapa | real |
| 1 | 7.700.000 |
| 4,5 | d |

$$d = 7.700.000 \cdot 4,5$$

$$d = 34.650.000\text{cm} = 346.500\text{m} = 346,5\text{km}$$

Distância de Vitória ao Rio de Janeiro

| | |
|------|-----------|
| mapa | real |
| 1 | 7.700.000 |
| 5 | D |

$$d = 7.700.000 \cdot 5$$

$$d = 38.500.000\text{cm} = 385.000\text{m} = 385\text{km}$$

⊗

2.3 TEOREMA DE TALES

Para demonstrar o Teorema de Tales utilizaremos o raciocínio descrito por Ribeiro(2010), e para isso precisaremos relembrar um caso de congruência, o conceito de ângulos e segmentos correspondentes que veremos nas observações a seguir e, logo após, demonstrar um resultado auxiliar.

Observação 2.4 (Congruência de Triângulos pelo caso LAAo). *Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, conforme mostra a Figura 32:*

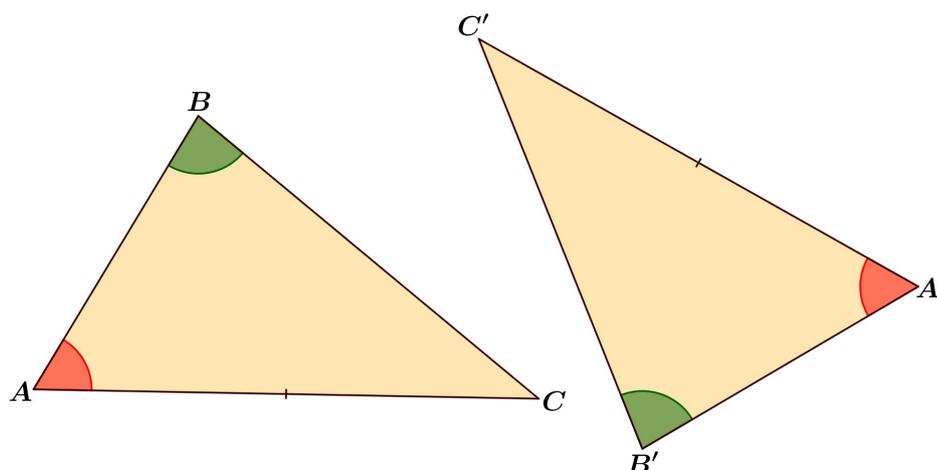
Se, comparando $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \end{array} \right.$$

então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

E dizemos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso Lado, Ângulo, Ângulo oposto, ou simplesmente, LAAo.

Figura 32 – Congruência LAAo

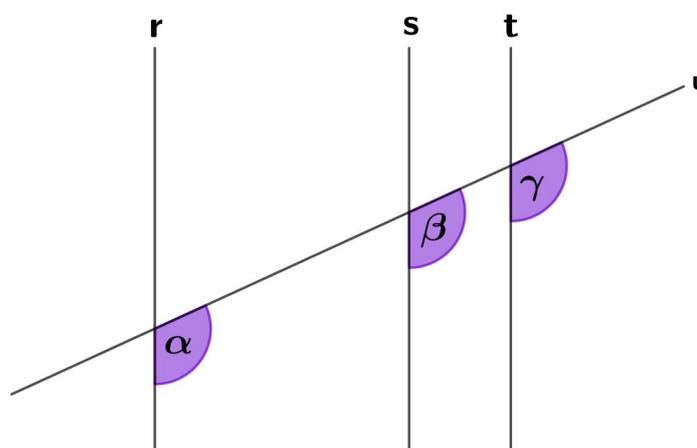


Fonte: Autoria própria

Observação 2.5. Uma reta transversal a um feixe de retas paralelas determina sobre elas ângulos correspondentes congruentes.

Na Figura 33 temos as retas r , s e t , paralelas entre si, e uma transversal u , logo $\alpha = \beta = \gamma$.

Figura 33 – Ângulos correspondentes - Observação 2.5

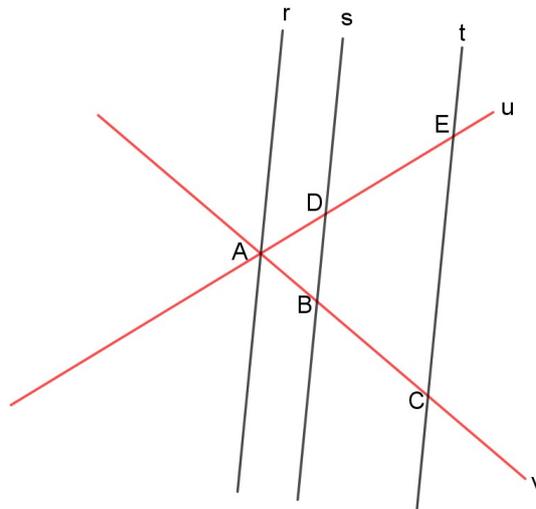


Fonte: Autoria própria

Observação 2.6. Dizemos que dois segmentos das transversais são correspondentes quando seus extremos pertencem às mesmas retas paralelas. Na Figura 34 os segmentos \overline{AB} e \overline{AD} são correspondentes, pois seus extremos pertencem às mesmas retas paralelas r e s ; de modo análogo são correspondentes \overline{AC} e \overline{AE} , \overline{BC} e \overline{DE} .

Essa observação serve para todas as transversais que cortam as mesmas paralelas.

Figura 34 – Segmentos correspondentes



Fonte: Autoria própria

Proposição 2.7. Quando um feixe de retas paralelas divide uma reta transversal em segmentos congruentes, dividirá também outra reta transversal qualquer em segmentos congruentes.

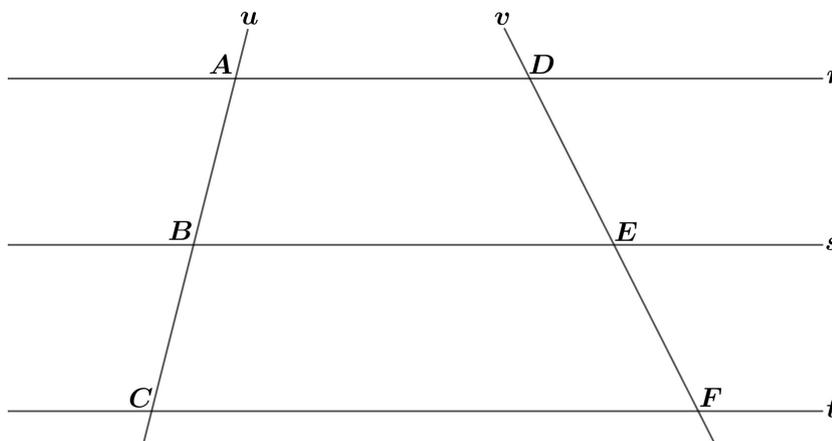
Demonstração. Sejam três retas paralelas, r , s e t , de forma que a distância entre r e s seja a mesma distância entre s e t . Além disso, sejam u e v duas retas transversais às retas r , s e t , todas pertencentes a um mesmo plano π .

Considere ainda os pontos A , B , C , D , E e F , todos pertencentes ao plano π , tais que:

$$A = u \cap r, B = u \cap s, C = u \cap t, D = v \cap r, E = v \cap s, F = v \cap t$$

conforme Figura 35.

Figura 35 – Feixe de retas paralelas



Fonte: Autoria própria

Note que:

$$\begin{cases} \{A, B, C\} \in u \\ d(r, s) = d(s, t) \end{cases} \implies \overline{AB} \equiv \overline{BC}.$$

Agora vamos mostrar que

$$\text{Se } \overline{AB} \equiv \overline{BC}, \text{ então } \overline{DE} \equiv \overline{EF}.$$

Partindo de D , traça-se um segmento paralelo a u e tem-se um ponto X na intersecção desse segmento com a reta s .

Analogamente, partindo de E , traça-se um segmento paralelo a u e tem-se um ponto Y na intersecção desse segmento com a reta t .

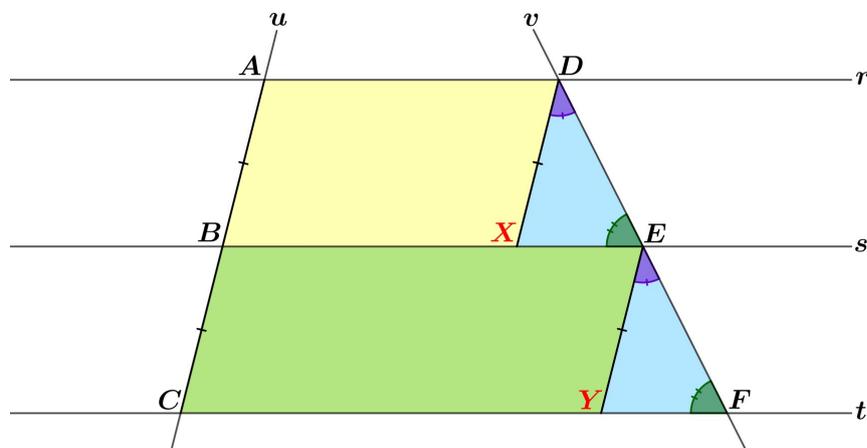
Note que $ABXD$ é um paralelogramo, assim como $BCYE$.

Dessa forma $\overline{AB} \equiv \overline{DX}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EY}$.

Como $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$, então $\overline{DX} \equiv \overline{EY}$.

Como $\{A, B, C\} \in u$ e $\overline{AB} \parallel \overline{DX}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{EY}$, então $\overline{DX} \parallel \overline{EY}$, conforme Figura 36.

Figura 36 – Feixe de retas paralelas



Fonte: Autoria própria

Observando os triângulos $\triangle DXE$ e $\triangle EYF$ temos:

$$\begin{cases} \overline{DX} \equiv \overline{EY} \\ X\hat{D}E \equiv Y\hat{E}F & \text{(Observação 2.5)} \\ X\hat{E}D \equiv Y\hat{F}E & \text{(Observação 2.5)} \end{cases}$$

Pelo caso LAAo $\triangle DXE \equiv \triangle EYF$. Dessa forma $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$, que é o que queríamos demonstrar. \square

Essa proposição pode ser estendida para qualquer quantidade de retas transversais.

Agora demonstraremos o teorema de Tales, e utilizaremos como referência uma demonstração no trabalho de conclusão de (FERREIRA, 2017) do PROFMAT, que aborda justamente como o Teorema de Tales é apresentado no livros didáticos, e sugere essa demonstração.

Outra ressalva importante é que faremos a demonstração apenas para segmentos comensuráveis, pois é o que utilizamos na Topografia, mas para quem interessar a demonstração do teorema de Tales para segmentos incomensuráveis, o capítulo 5 do trabalho de (FERREIRA, 2017) traz essa demonstração.

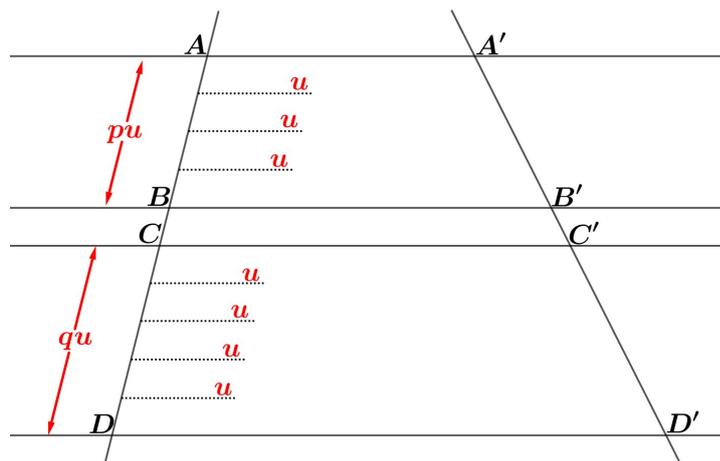
Teorema 2.8 (Teorema de Tales). *Se um feixe de retas paralelas corta duas transversais quaisquer, então a razão entre as medidas de dois segmentos obtidos em uma das transversais é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra transversal.*

Demonstração. Considere \overline{AB} e \overline{CD} dois segmentos comensuráveis de uma transversal e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra transversal. Vamos provar que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Por tratar-se de segmentos comensuráveis, existe um segmento u que é submúltiplo de \overline{AB} e \overline{CD} , ou seja, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $AB = p \cdot u$ e $CD = q \cdot u$, conforme Figura 37.

Figura 37 – Demonstração do Teorema 2.8 - (I)



Fonte: Autoria própria

Daí segue:

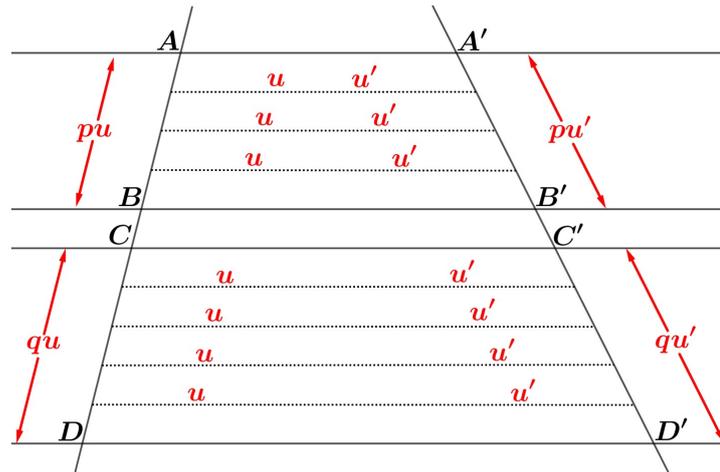
$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u} = \frac{p}{q} \quad (\text{I})$$

Observe que, pela Proposição 2.7, as paralelas pelos pontos de divisão dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} dividem os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ em segmentos iguais de comprimentos u' .

Conduzindo o feixe de retas pelos pontos de divisão \overline{AB} e \overline{CD} e aplicando a Proposição 2.7, conforme Figura 38, temos $A'B' = p \cdot u'$ e $C'D' = q \cdot u'$, logo:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot u'}{q \cdot u'} = \frac{p}{q} \quad (\text{II})$$

Figura 38 – Demonstração do Teorema 2.8 - (II)



Fonte: Autoria própria

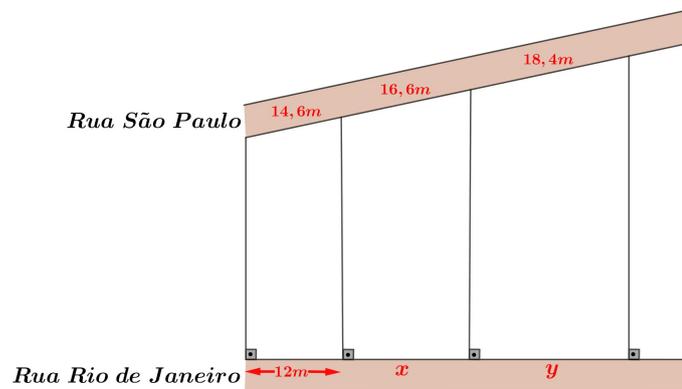
De (I) e (II) vem que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

□

Aplicação na Topografia 2.9. Observe a planta de um loteamento na Vila Planalto.

Figura 39 – Loteamento Vila Planalto



Fonte: Autoria própria

Quais as medidas das frentes dos lotes, representados por x e y respectivamente, em relação à Rua Rio de Janeiro?

Resolução:

Esse problema pode ser resolvido usando-se o Teorema de Tales, admitindo os limites laterais dos lotes como retas paralelas e as frentes (Rua Rio de Janeiro) e fundo (Rua São Paulo) como transversais. Sendo assim:

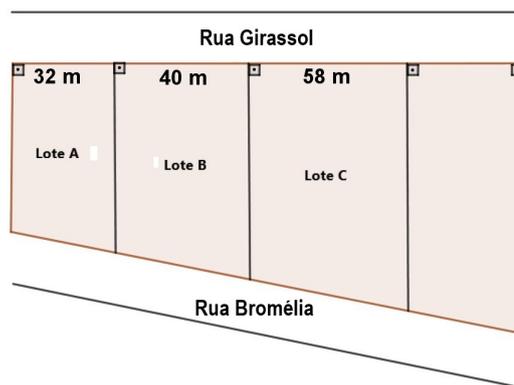
$$\frac{12}{x} = \frac{14,6}{16,6} \implies 14,6x = 199,2 \implies x \simeq 13,7m$$

$$\frac{12}{y} = \frac{14,6}{18,4} \implies 14,6y = 220,8 \implies y \simeq 15,1m$$

⊗

Aplicação na Topografia 2.10. Três lotes (A, B e C) tem frente para a Rua Bromélia e fundo para a Rua Girassol, como na Figura 40. As divisas laterais são perpendiculares à Rua Girassol. Sabendo que a frente dos 03 lotes na Rua Bromélia medem somados 195 m, qual a medida da frente de cada um dos terrenos dessa rua?

Figura 40 – Vila Caiçara



Fonte: Autoria própria

Resolução:

Como as retas que contém as divisas laterais são perpendiculares à reta da rua Girassol, elas formam um feixe de paralelas e podemos aplicar o Teorema de Tales.

Sabemos que a medida dos fundos dos 03 lotes é $32m + 40m + 58m = 130m$ e que a medida da frente dos 03 lotes é $195m$.

Denotando a frente do lote A por x , temos

$$\frac{195}{130} = \frac{x}{32} \implies 130x = 6240 \implies x = 48m.$$

Denotando a frente do lote B por y , temos

$$\frac{195}{130} = \frac{y}{40} \implies 130y = 7800 \implies y = 60m.$$

Denotando a frente do lote C por z , temos

$$\frac{195}{130} = \frac{z}{58} \implies 130z = 11310 \implies z = 87m.$$

2.4 SEMELHANÇA

2.4.1 CONCEITO DE SEMELHANÇA

Sempre que analisamos objetos, fazemos intuitivamente a relação de semelhança, e Barroso(2010) faz a comparação entre prédio e maquete para exemplificar esse conceito.

Se, em uma maquete de um prédio e no próprio prédio, todos os ângulos correspondentes forem congruentes (tiverem medidas iguais) e se as medidas de cada par de comprimentos correspondentes apresentarem a mesma razão, dizemos que a maquete e o prédio são semelhantes. (BARROSO, 2010, pg. 294)

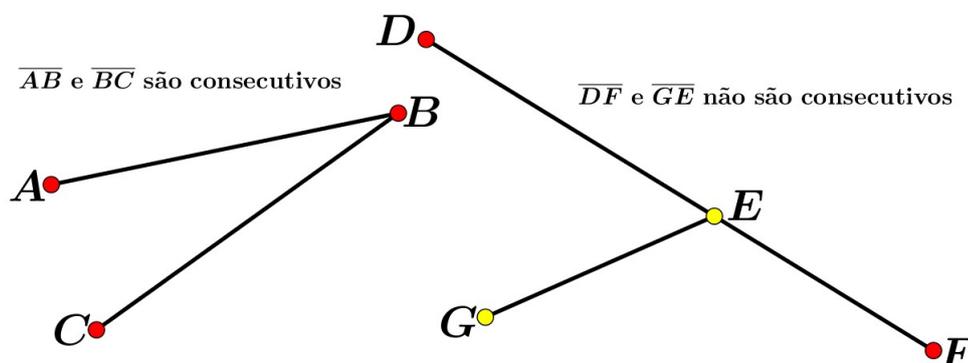
Em seguida a autora faz a comparação de três imagens para exemplificar a semelhança ou não entre as figuras, deixando claro que a semelhança está na preservação da forma das imagens. Os mesmos exemplos são citados por Ribeiro(2010), comparando fotografias e depois a relação maquete/construção. A partir desse conceito intuitivo ambos os autores introduzem o estudo da semelhança de polígonos e depois, especificamente, de triângulos.

2.4.2 SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

Para trabalhar semelhança de polígonos são necessários relembrar alguns conceitos de geometria plana citados por Barroso(2010), que listamos abaixo:

- Dois segmentos são **consecutivos** somente se tem uma extremidade em comum, conforme Figura 41.

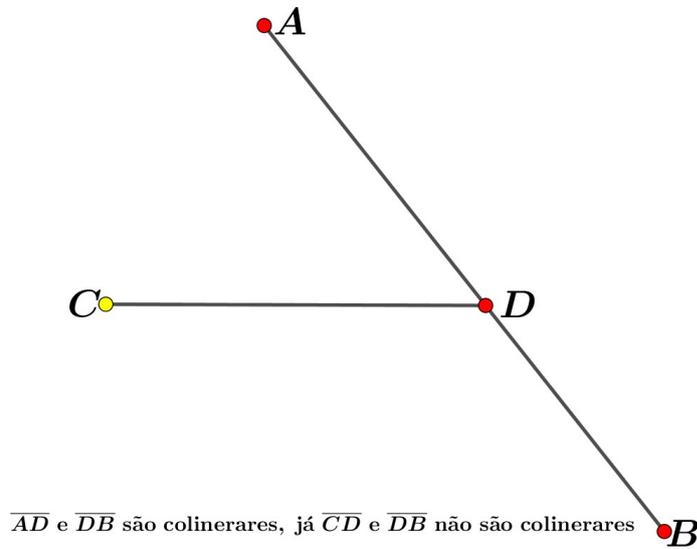
Figura 41 – Segmentos consecutivos



Fonte: Autoria própria

- Dois segmentos são **colineares** somente se estão contidos em uma mesma reta, conforme Figura 42.

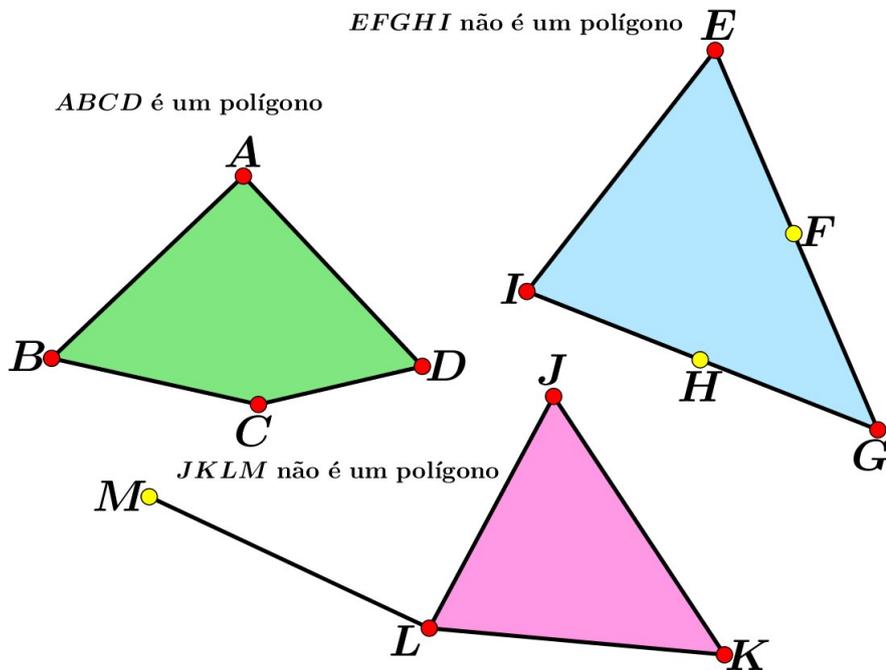
Figura 42 – Segmentos colineares



Fonte: Autoria própria

- **Polígono** é uma linha fechada formada apenas por segmentos de reta simultaneamente consecutivos e não colineares, conforme Figura 43.

Figura 43 – Polígonos



Fonte: Autoria própria

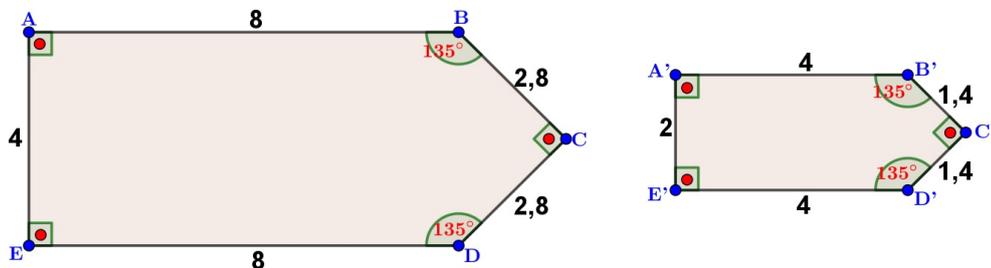
Proposição 2.11. *Dois polígonos são ditos semelhantes quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes possuem medidas proporcionais.*

A razão entre a medida dos lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é chamada **razão de semelhança**. Quando a razão de semelhança de dois ou mais polígonos é 1 os polígonos são **congruentes**.

Na Figura 44 temos exemplo de dois polígonos semelhantes, pois tem todos os ângulos internos correspondentes congruentes ($\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$ e $\widehat{E} \equiv \widehat{E'}$) e lados correspondentes proporcionais. Nesse caso a razão de semelhança do polígono $ABCDE$ em relação ao polígono $A'B'C'D'E'$ será:

$$\frac{AB}{A'B'} \equiv \frac{BC}{B'C'} \equiv \frac{CD}{C'D'} \equiv \frac{DE}{D'E'} \equiv \frac{EA}{E'A'} = 2$$

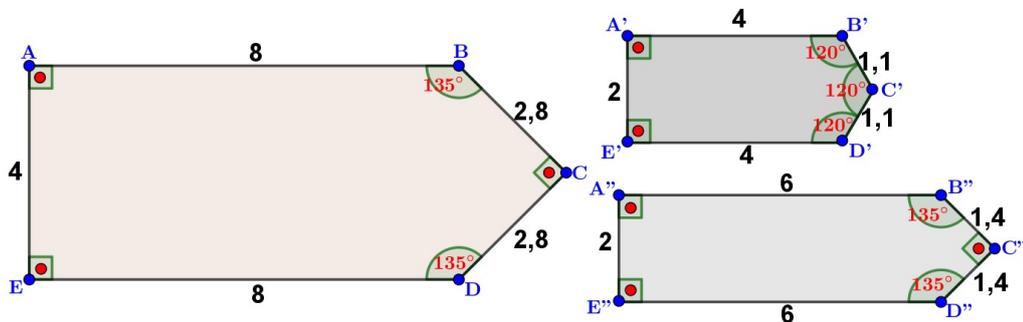
Figura 44 – Polígonos semelhantes



Fonte: Autoria própria

Na Figura 45 temos exemplo de três polígonos, que embora parecidos, não são semelhantes, pois diferem nos ângulos internos correspondentes, pois $\widehat{B} \neq \widehat{B'}$, $\widehat{C} \neq \widehat{C'}$ e $\widehat{D} \neq \widehat{D'}$ e nos lados correspondentes, pois $\frac{BC}{B'C'} \equiv \frac{CD}{C'D'} \simeq 2,54$, $\frac{AB}{A'B''} \equiv \frac{DE}{D''E''} \simeq 1,33$, as demais relações correspondentes são 2.

Figura 45 – Polígonos não semelhantes



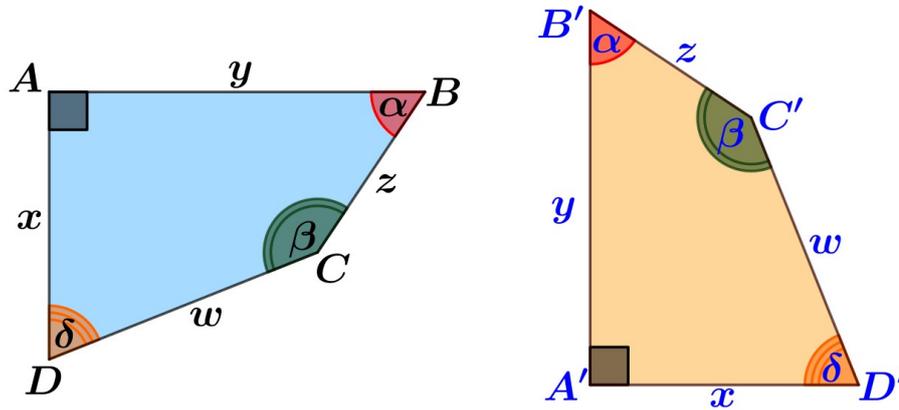
Fonte: Autoria própria

Na Figura 46 temos exemplo de dois polígonos semelhantes, pois tem todos os ângulos internos correspondentes ($\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ e $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$) congruentes e lados correspondentes proporcionais. Nesse caso os polígonos são congruentes pois a razão de semelhança do

polígono $ABCD$ em relação ao polígono $A'B'C'D'$ será:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = 1$$

Figura 46 – Polígonos semelhantes



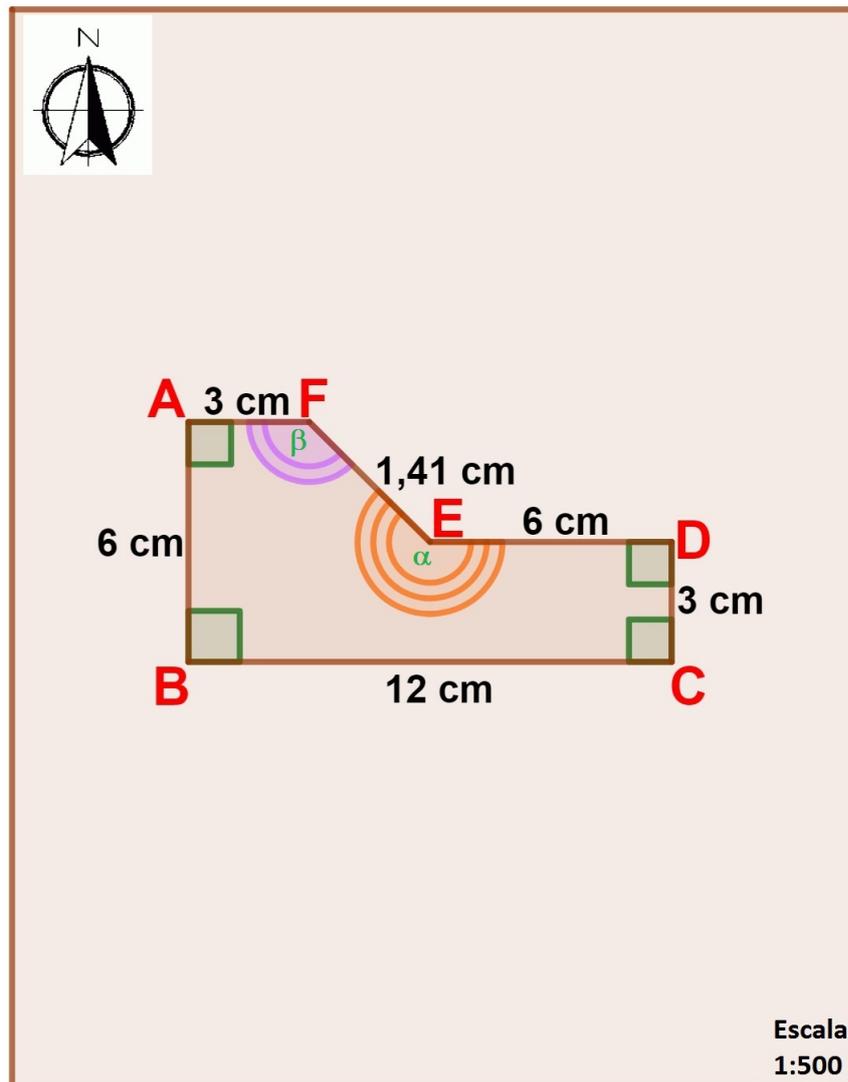
Fonte: Autoria própria

Aplicação na Topografia 2.12. Um cliente procurou um técnico para que ele resolvesse um problema, ele tinha recebido um desenho de seu terreno mas estava muito pequeno, ele queria ampliar o desenho sem mexer no formato do terreno. O desenho que ele levou estava num papel A_4 e numa escala de 1 : 500. As medidas do terreno original foram convertidos em escala, da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = 30m \text{ (tamanho real)} = 6cm \text{ (escala 1:500)} \\ BC = 60m \text{ (tamanho real)} = 12cm \text{ (escala 1:500)} \\ CD = 15m \text{ (tamanho real)} = 3cm \text{ (escala 1:500)} \\ DE = 30m \text{ (tamanho real)} = 6cm \text{ (escala 1:500)} \\ EF = 7,05m \text{ (tamanho real)} = 1,41cm \text{ (escala 1:500)} \\ FA = 15m \text{ (tamanho real)} = 3cm \text{ (escala 1:500)} \\ \angle FAB = \angle ABC = \angle BCE = \angle CDE = 90^\circ \\ \angle DEF = \alpha \\ \angle EFA = \beta \end{array} \right.$$

A Figura 47 ilustra o desenho do cliente.

Figura 47 – Desenho de um terreno em escala 1:500



Fonte: Autoria própria

Resolução:

O técnico ao receber o desenho verificou que as dimensões do papel A_4 (aproximadamente 21cm x 27cm) não permitia duplicar o tamanho com o papel na mesma orientação, pois o lado BC (maior lado do desenho) que media 12cm , quando duplicado não caberia nos 21cm da largura do papel A_4 .

Mas rapidamente ele mudou a orientação do papel e percebeu que o lado BC duplicado daria 24cm e caberia nos 27cm da folha. Todas as outras medidas caberiam nas duas orientações. Por fim ele desenhou o mesmo mapa em escala $1 : 250$, portanto com o dobro do tamanho, e manteve os mesmos ângulos internos, mantendo assim a semelhança das figuras. As novas

medidas do desenho ficaram da seguinte forma:

$$AB = 30m \text{ (tamanho real)} = 12cm \text{ (escala 1:250)}$$

$$BC = 60m \text{ (tamanho real)} = 24cm \text{ (escala 1:250)}$$

$$CD = 15m \text{ (tamanho real)} = 6cm \text{ (escala 1:250)}$$

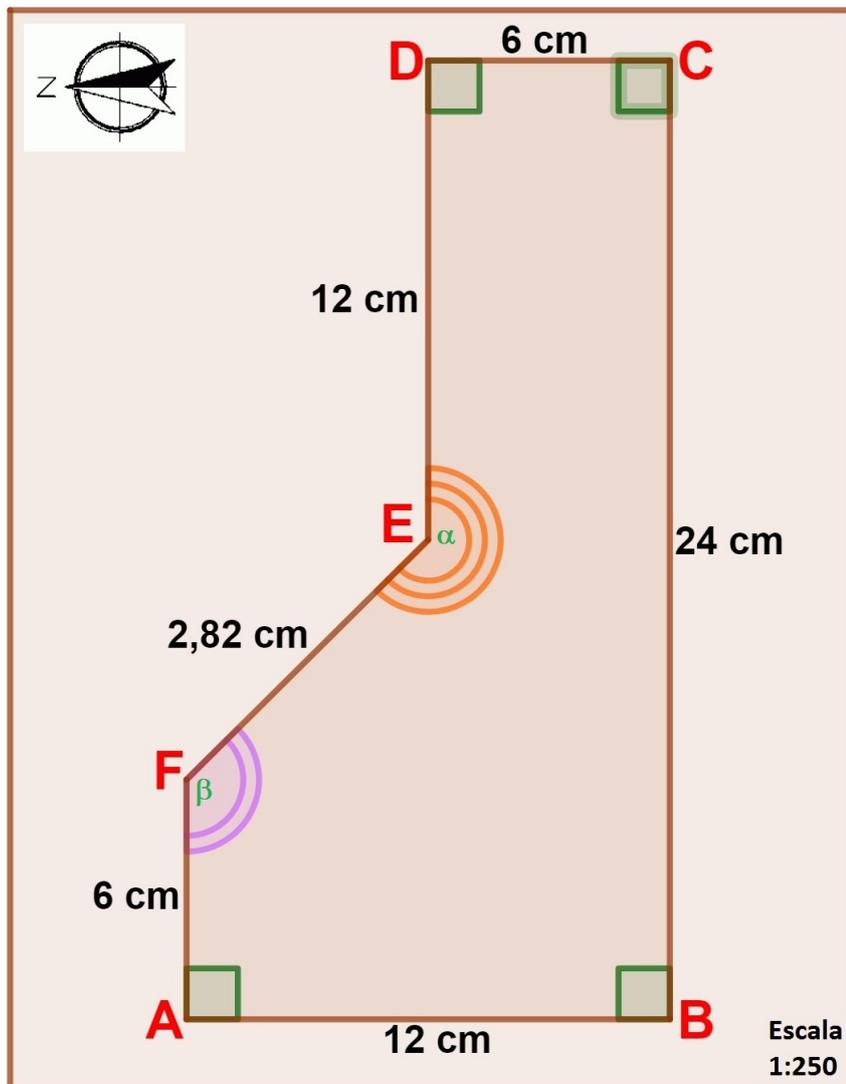
$$DE = 30m \text{ (tamanho real)} = 12cm \text{ (escala 1:250)}$$

$$EF = 7,05m \text{ (tamanho real)} = 2,82cm \text{ (escala 1:250)}$$

$$FA = 15m \text{ (tamanho real)} = 6cm \text{ (escala 1:250)}$$

Esse segundo mapa está desenhado na figura 48. Note que a orientação do terreno em relação ao Norte magnético foi mantida no segundo desenho.

Figura 48 – Desenho de um terreno em escala 1:250



Fonte: Autoria própria

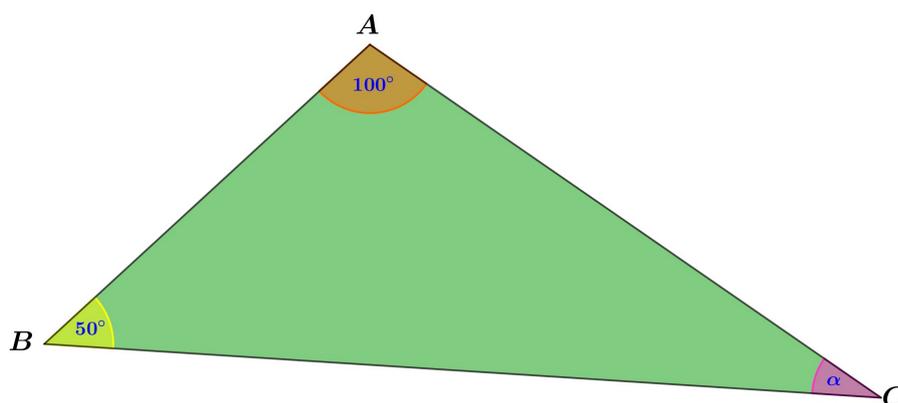
2.4.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Como os triângulos são um tipo particular de polígono, para que dois ou mais triângulos sejam semelhantes basta satisfazer as condições da Proposição 2.11, ou seja, terem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Para verificar a semelhança de dois triângulos porém, não é necessário a verificação de todas essas medidas, segundo Barroso(2010) o triângulo é um polígono especial, pois, verificada apenas umas das condições acima, automaticamente a outra também ocorre, ou seja, para que dois triângulos sejam semelhantes basta que os lados correspondentes sejam proporcionais ou dois ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

É necessário para as demonstrações a seguir, recordar alguns conceitos e proposições, os quais apresentamos sem demonstração:

Proposição 2.13. *A soma dos ângulos internos de um triângulo sempre dão 180° .*

Figura 49 – Ângulos internos de um triângulo



Fonte: Autoria própria

Pela Proposição 2.13, e observando a Figura 49 temos que:

$$\begin{cases} \angle CAB = 100^\circ \\ \angle ABC = 50^\circ \\ \angle BCA = \alpha \end{cases}$$

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ \implies \alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Portanto, dois ângulos correspondentes congruentes já implicam que o terceiro par de ângulos correspondentes serão congruentes.

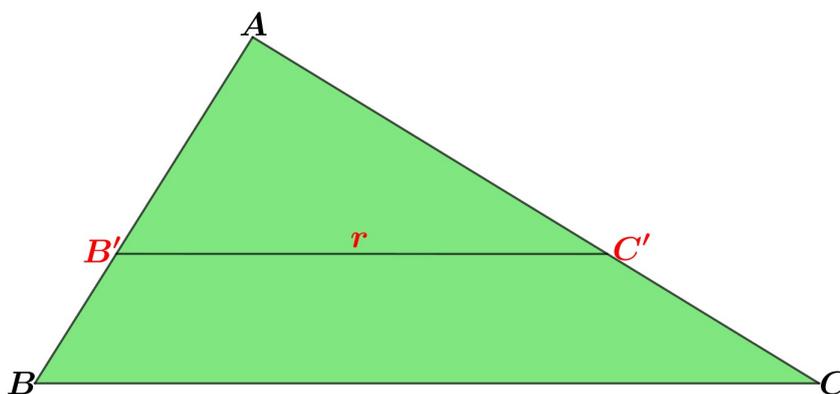
Teorema 2.14 (Teorema Fundamental da proporcionalidade). *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e r uma reta que intercepta os segmentos AB e AC em pontos distintos B' e C' , respectivamente.*

Então

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

se, e somente se, r é paralela à reta que contém BC .

Figura 50 – Teorema Fundamental da Proporcionalidade

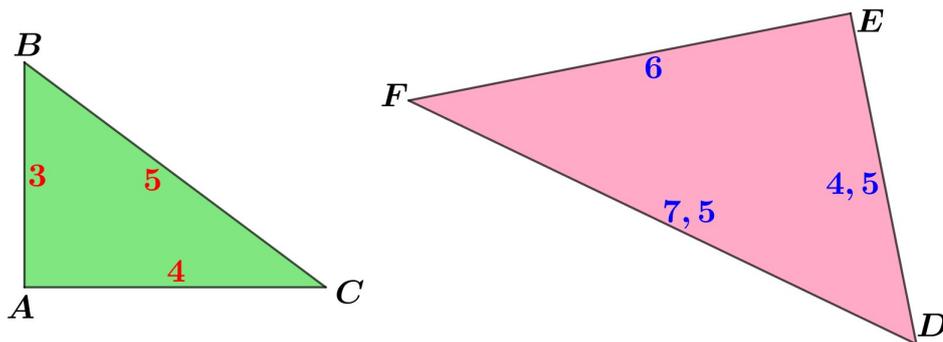


Fonte: Autoria própria

Exemplo 2.15. Na Figura 51 temos dois triângulos semelhantes pois os lados correspondentes são proporcionais, (LLL).

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EF} = \frac{CB}{FD} \implies \frac{3}{4,5} = \frac{4}{6} = \frac{5}{7,5} = 0,666\dots$$

Figura 51 – Triângulos semelhantes

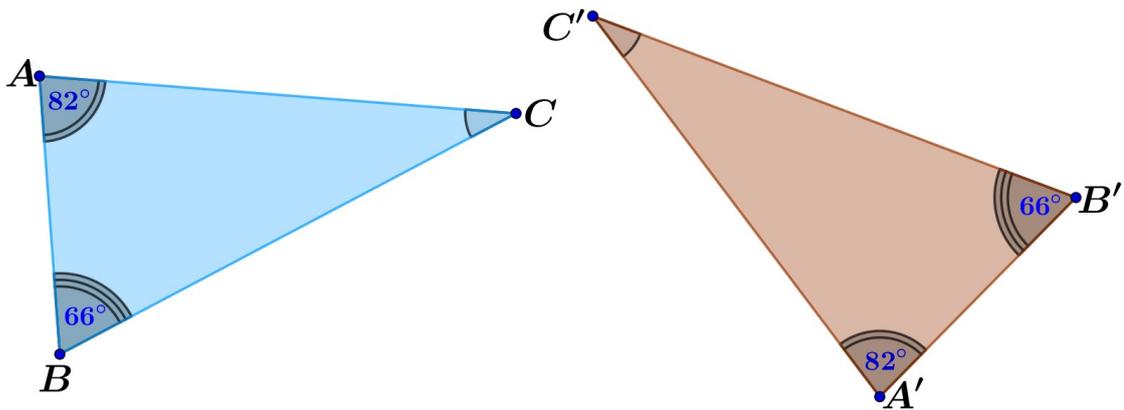


Fonte: Autoria própria

Exemplo 2.16. Na Figura 52 temos dois triângulos semelhantes pois os ângulos correspondentes são congruentes. Note que, para ambos os casos, pela Proposição 2.13, o terceiro ângulo é o mesmo, esse caso é conhecido como (AA).

$$C = C' = 32^\circ$$

Figura 52 – Triângulos semelhantes

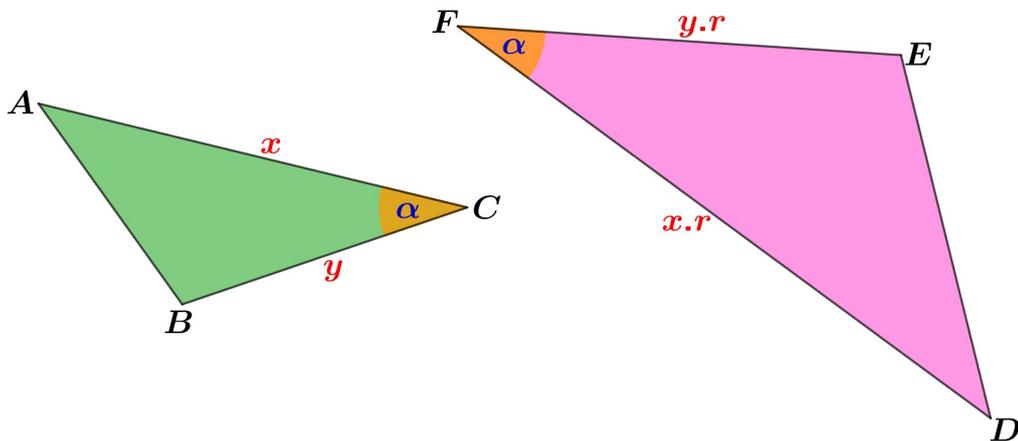


Fonte: Autoria própria

Outro caso de semelhança de triângulos é o caso LAL. Mostraremos esse caso de semelhança utilizando o teorema de Tales.

Proposição 2.17 (Caso LAL de semelhança de triângulos). *Quando dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e o ângulo entre eles congruentes, esses triângulos são semelhantes.*

Figura 53 – Caso LAL - Proposição 2.17



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Consideremos o triângulo ABC tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} AC = x \\ BC = y \\ \angle ACB = \alpha \end{array} \right. \quad (\triangle ABC)$$

E, consideremos ainda, o triângulo DEF , de forma que:

$$\begin{cases} DF = x \cdot r \\ EF = y \cdot r \\ \angle DFE = \alpha \end{cases} \quad (\triangle DEF)$$

Sem perda de generalidade, assumimos que a constante de proporcionalidade $r > 1$. Mostraremos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

No $\triangle DEF$, partindo do vértice \widehat{F} , traçamos sobre \overline{FD} um segmento de mesmo tamanho de \overline{CA} , obtemos um ponto A' .

Analogamente, traçamos sobre \overline{FE} um segmento de mesmo tamanho de \overline{CB} , obtemos um ponto B' .

Note que

$$\frac{FD}{FA'} = \frac{x \cdot r}{x} = r \qquad \frac{FE}{FB'} = \frac{y \cdot r}{y} = r$$

Pelo teorema 2.14 temos que $\overline{A'B'} \parallel \overline{DE}$.

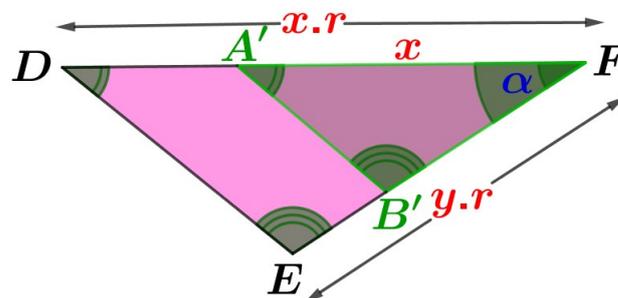
Pela observação 2.5 temos que $\widehat{FA'B'} \equiv \widehat{FDE}$ e, analogamente, $\widehat{FB'A'} \equiv \widehat{FED}$.

Logo, $\triangle FA'B' \sim \triangle FDE$

Pelo caso LAL de congruência temos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'F$

Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ □

Figura 54 – Demonstração semelhança de triângulos caso LAL



Fonte: Autoria própria

Proposição 2.18. *Em dois triângulos semelhantes, traçando a bissetriz por vértices correspondentes, os triângulos resultantes também são semelhantes com seus triângulos correspondentes. Da mesma forma, se traçarmos a altura de vértices correspondentes, os triângulos resultantes também são semelhantes.*

Demonstração. 1º caso: Sejam dois triângulos semelhantes $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ tais que $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$, conforme Figura 55.

A partir do vértice A traçamos uma bissetriz e chamaremos de A' o pé da bissetriz no segmento \overline{BC} e $\alpha = \angle BAA'$. Analogamente, a partir do vértice D traçamos uma bissetriz e chamaremos de D' o pé da bissetriz no segmento \overline{EF} e $\beta = \angle EDD'$, conforme Figura 55.

Note que

$$\begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{E} \text{ (por hipótese)} \\ \alpha \equiv \beta \text{ (por definição de bissetriz)} \end{cases}$$

Pelo exemplo 2.16 temos que $\triangle AA'B \sim \triangle DD'E$.

Analogamente, temos que $\triangle AA'C \sim \triangle DD'F$.

2º caso Agora, a partir do vértice B traçamos a altura do $\triangle ABC$ relativo à base \overline{AC} e chamaremos de B' o pé da altura. Analogamente, a partir do vértice E traçamos a altura do $\triangle DEF$ relativo à base \overline{DF} e chamaremos de E' o pé da altura, conforme Figura 55.

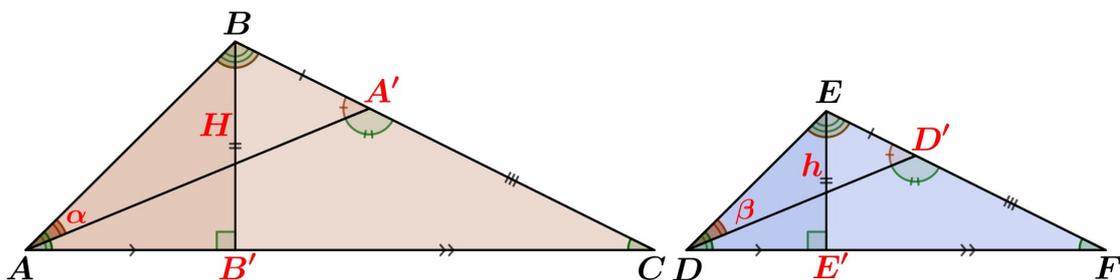
Note que, nos $\triangle AB'B$ e $\triangle DE'E$

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \text{ (por hipótese)} \\ \angle AB'B \equiv \angle DE'E = 90^\circ \text{ (por definição de altura)} \end{cases}$$

Pelo exemplo 2.16 temos que $\triangle AB'B \sim \triangle DE'E$.

Analogamente, temos que $\triangle BB'C \sim \triangle EE'F$. □

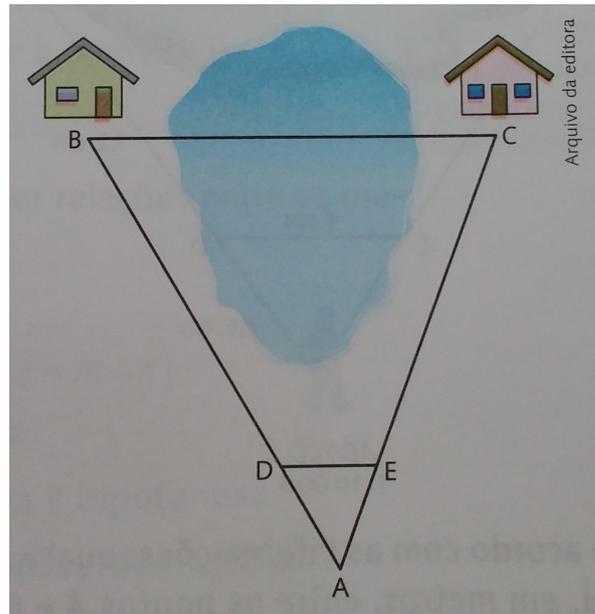
Figura 55 – Demonstração da Proposição 2.18



Fonte: Autoria própria

Aplicação na Topografia 2.19. (RIBEIRO, 2010, pg. 317) Duas casas, B e C são separadas por um lago. São tomados como referência três pontos A , D e E , de tal forma que $DE = 30\text{m}$, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AB = 156\text{m}$ e $AD = 36\text{m}$. Determine a distância, em linha reta, entre as duas casas.

Figura 56 – Ilustração da Aplicação em Topografia 2.19



Fonte: (RIBEIRO, 2010) página 317

Resolução:

Do enunciado temos

$$\left\{ \begin{array}{l} DE = 30m \\ AB = 156m \\ AD = 36m \\ \overline{DE} // \overline{BC} \end{array} \right.$$

Note que

$$\overline{DE} // \overline{BC} \implies \triangle ADE \sim \triangle ABC \quad (\text{Proposição 2.14})$$

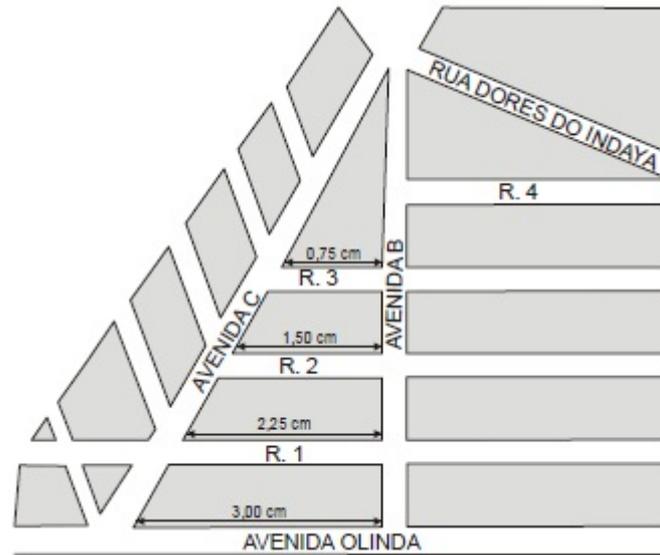
Logo, pela semelhança de triângulos

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \implies \frac{36}{156} = \frac{30}{BC} \implies BC = \frac{4680}{36} = 130m.$$

⊗

Aplicação na Topografia 2.20. (UFG-GO, 2007, pg. 6) O desenho abaixo, construído na escala 1 : 7000, representa parte do bairro Água Branca em Goiânia. As ruas R.1, R.2 e R.3 são paralelas à Av. Olinda. O comprimento da Av. B, da esquina com a Av. Olinda até a esquina com a Rua Dores do Indaya, é de 350m.

Figura 57 – Ilustração da Aplicação em Topografia 2.20



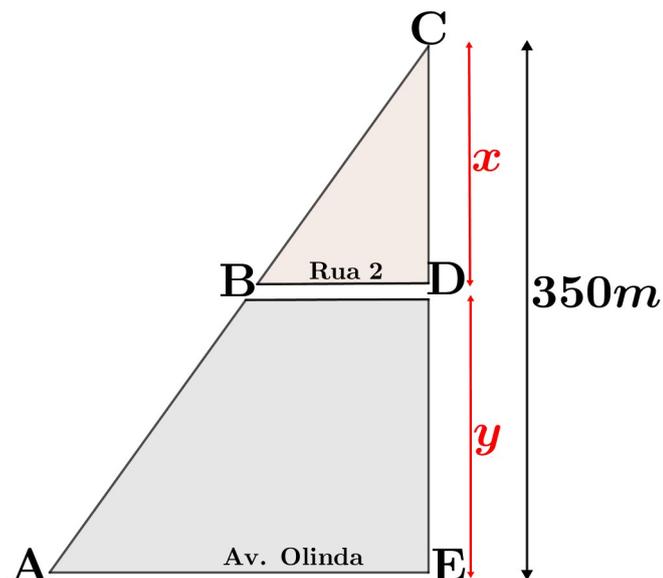
Fonte: (UFG-GO, 2007, pg. 7)

Considerando-se que cada rua mede 7m de largura, calcule quantos metros um pedestre caminhará na Av. B, partindo da esquina com Av. Olinda, até a esquina com a rua R.2, sem atravessá-las.

Resolução:

Note que, utilizando a Av. C, e Av. B, partindo do cruzamento com a Rua Dores do Indaya, até a Av. Olinda formam um triângulo. Note ainda que, utilizando a Av. C, e Av. B, partindo do cruzamento com a Rua Dores do Indaya, até a R.2 formam outro triângulo, conforme Figura 58.

Figura 58 – Resolução da Aplicação em Topografia 2.20



Fonte: Autoria própria

Pela Figura 58, e utilizando a escala 1 : 7000, do enunciado, temos:

| | |
|--------|------|
| figura | real |
| 1 | 7000 |
| 1,5 | BD |

$$BD = 10500cm = 105m$$

Analogamente temos

| | |
|--------|------|
| figura | real |
| 1 | 7000 |
| 3 | AE |

$$AE = 21000cm = 210m$$

Note que

$$\overline{AE} // \overline{BD} \implies \triangle ACE \sim \triangle BCD \quad (\text{Proposição 2.14})$$

Logo, pela semelhança de triângulos

$$\frac{BD}{AE} = \frac{CD}{CE} \implies \frac{105}{210} = \frac{x}{350} \implies x = \frac{36750}{210} = 175m.$$

Como a rua mede 7m de largura (pelo enunciado), a distância percorrida da Av. Olinda à Rua 2 será:

$$y = 350m - x - 7m = 350m - 175m - 7m = 168m.$$

⊗

Aplicação na Topografia 2.21. *Um técnico com bons conhecimentos em Topografia e Matemática foi chamado para resolver um problema. Um produtor precisava calcular a maior distância de um lago que atravessava sua propriedade, mas não dispunha de aparelhos topográficos, apenas trena e balizas. Como o técnico poderia calcular essa distância aproximada?*

Resolução:

O técnico respondeu que calcularia isso, e que precisaria apenas de 3 balizas, 5 piquetes e a trena, além de um ajudante.

Primeiramente ele fixou dois piquetes nos pontos extremos do lago na propriedade consultada, e os chamou de pontos *A* e *B*. A partir daí ele procurou um ponto dentro da propriedade que avistasse os dois pontos e fosse possível calcular a distância com o uso da trena, e que

permitisse também estender por mais uns metros sem obstáculo, e nomeou esse terceiro ponto de C . Ao medir as distâncias entre os pontos B e C obteve $35m$, e repetindo o procedimento entre os pontos A e C obteve $56m$.

Em seguida o técnico fez o seguinte procedimento:

- alinhado à reta \overline{AC} ele mediu mais $8m$ e marcou o ponto D ;
- da mesma forma, alinhado à reta \overline{BC} ele mediu mais $5m$ e marcou o ponto E .

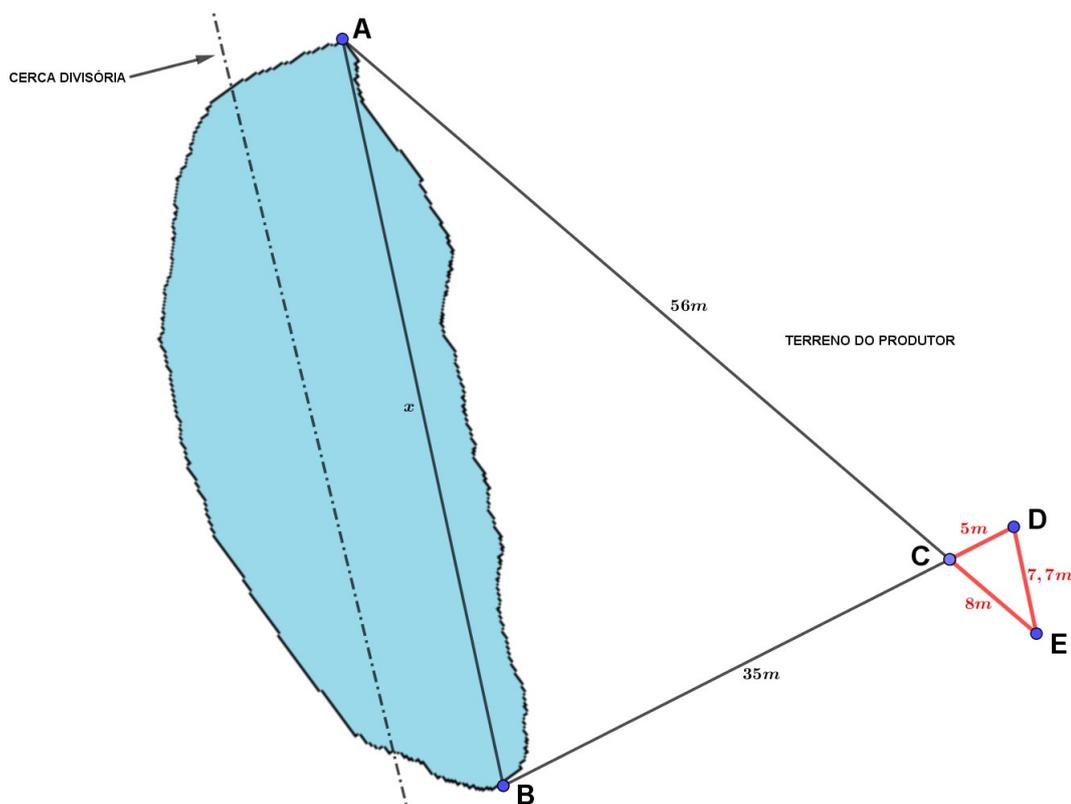
E justificou ao curioso proprietário que utilizou a escala $7 : 1$ para reduzir as medidas, pois $7 \cdot 8 = 56$ e $7 \cdot 5 = 35$.

Finalmente, o técnico fez uma última medida, entre os pontos D e E e obteve $7,7m$. Após uma simples conta na calculadora respondeu ao proprietário que a distância procurada era de aproximadamente $54m$.

O proprietário espantado pediu que o técnico explicasse como resolveu isso. O técnico pediu uma folha e uma régua.

Ao desenhar o esboço das medidas, o técnico obteve dois triângulos semelhantes, conforme Figura 59, e fez os seguintes cálculos para justificar a afirmação:

Figura 59 – Aplicação em Topografia 2.21



Fonte: Autoria própria

Explicou ao proprietário que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ eram semelhantes, com escala 7 : 1, ou razão de semelhança igual a 7.

De fato, conforme Figura 59, verifiquemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AC}{CE} = 7 \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{ECD} \quad (\text{opostos pelo vértice}) \implies \triangle ACB \equiv \triangle ECD \quad (\text{Caso LAL}) \\ \frac{AC}{CE} = 7 \end{array} \right.$$

Logo, pela semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE} = \frac{x}{DE} \implies \frac{35}{5} = \frac{56}{8} = \frac{x}{7,7}$$

Daí segue que

$$\frac{35}{5} = \frac{x}{7,7} \implies 5x = 269,5 \implies x = 53,9m \simeq 54m$$

Outra solução era pela aplicação direta de escala, como no Exemplo 2.1, sendo assim:

$$\begin{array}{c|c} \triangle ECD & \triangle ACB \text{ (Lago)} \\ \hline 1 & 7 \\ 7,7 & x \end{array}$$

$$1 \cdot x = 7,7 \cdot 7 \implies x = 53,9m \simeq 54m$$

⊗

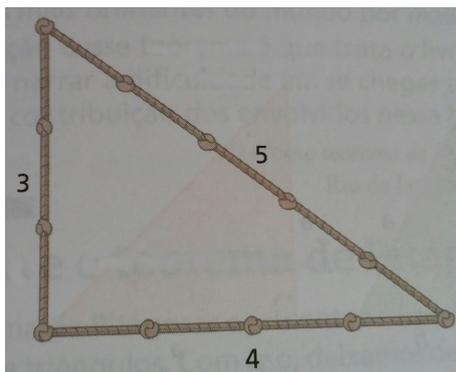
2.5 TRIÂNGULO RETÂNGULO

Abordaremos agora um tipo muito particular e especial de triângulo, o *Triângulo Retângulo*. Barroso(2010) motiva o estudo dos triângulos retângulos da seguinte forma:

Os triângulos retângulos têm grande importância na nossa vida, pois aparecem nas construções, nos trabalhos de topografia e agrimensura, nas situações em que é preciso calcular distâncias inacessíveis, etc. Embora sejam figuras simples, o estudo das relações entre seus elementos pode ser bastante útil (BARROSO, 2010, pg. 301).

Barroso(2010) cita a utilização pelos egípcios do triângulo de 12 nós para achar ângulos retos. Tal mecanismo era bem simples pois utilizava apenas uma constante fixa, a distância entre os nós. Em um corda dava-se 12 nós com espaçamentos iguais e fechada (início e fim no mesmo nó). A partir daí esticava-se em três partes, com distância entre eles de 3, 4 e 5 nós, respectivamente. O vértice formado pelos lados que distavam 3 e 4 nós, formavam um ângulo reto (90°), e esse triângulo era um triângulo retângulo, conforme a Figura 60 exemplifica.

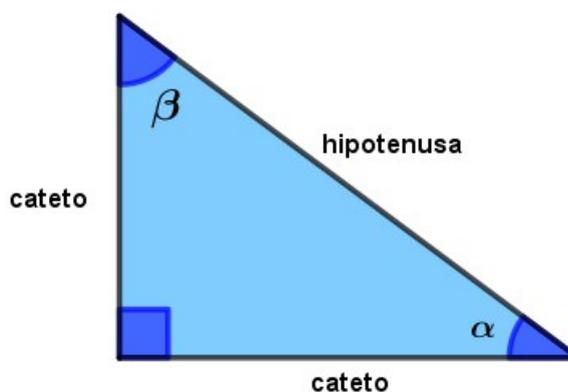
Figura 60 – Triângulo Retângulo utilizando corda de 12 nós



Fonte: (BARROSO, 2010)

Em um triângulo retângulo, o maior lado é a hipotenusa, e esta é sempre oposta ao ângulo reto. Os outros dois lados, que são perpendiculares entre si, são os catetos. Um triângulo retângulo é sempre formado por um ângulo reto e dois ângulos agudos complementares. Na Figura 61, que exemplifica um triângulo retângulo, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Figura 61 – Triângulo Retângulo - Características



Fonte: Autoria própria

Tempos depois, os gregos estudaram uma relação importante nesse triângulo 3, 4, 5, onde $3^2 + 4^2 = 5^2$. Essa relação em particular, encontrada em vários outros triângulos retângulos, é chamada de **relação pitagórica**. Esse nome foi dado porque foi estudada por gregos da escola de Pitágoras, ainda que existam indicações históricas de que o teorema era conhecido anteriormente.

2.5.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

Abordaremos agora um dos teoremas mais conhecidos pelos alunos do ensino médio brasileiro, pois é um dos poucos conteúdos que constam em praticamente todos os livros didáticos consultados, com exceção de (DANTE, 2013).

Ribeiro(2010) mostra um exemplo onde operários da construção civil para verificarem se os cantos da parede estão com 90° marcam um ponto a 30cm numa parede e 40cm na outra, após isso medem a distância entre os pontos:

- se a distância for 50cm o ângulo em questão é 90° ;
- se a distância for superior a 50cm o ângulo em questão é maior que 90° ;
- se a distância for inferior a 50cm o ângulo em questão é menor que 90° ;

Essa é outra utilização empírica da relação pitagórica, base do Teorema de Pitágoras.

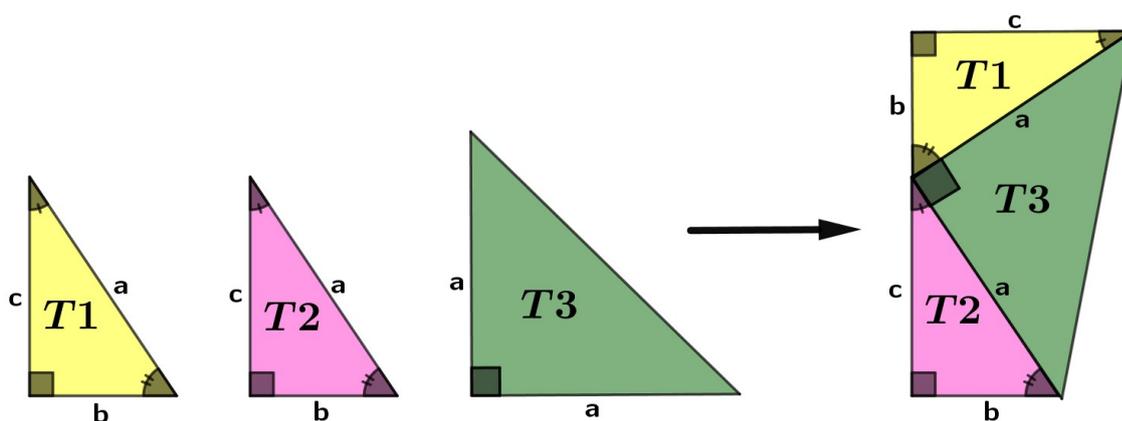
Teorema 2.22 (Teorema de Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa*

Demonstração. Vamos considerar três triângulos com as medidas abaixo:

- $T1 \rightarrow$ retângulo de catetos de medida b e c e hipotenusa a ;
- $T2 \rightarrow$ retângulo de catetos de medida b e c e hipotenusa a ;
- $T3 \rightarrow$ retângulo isósceles de catetos de medida a .

Juntamos os três triângulos de forma que as hipotenusas de $T1$ e $T2$ se juntem aos catetos do $T3$, conforme Figura 62.

Figura 62 – Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autoria própria

Note que o ângulo entre o cateto de $T1$ de comprimento b e o cateto de $T2$ de comprimento c é raso e a figura formada é, portanto, um trapézio de base menor $B_{min} = b$, base maior $B_{mai} = c$ e altura $h_T = b + c$.

A área do trapézio formado é:

$$A_T = \frac{B_{min} + B_{mai}}{2} \cdot h_T = \frac{b+c}{2} \cdot (b+c) \quad (\text{I})$$

Sabemos também que a área desse trapézio pode ser calculada através da soma das áreas dos triângulos:

$$A_T = (A_{T1} + A_{T2} + A_{T3}) = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II) temos

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = bc + \frac{a^2}{2} &\iff \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2} \\ \iff \frac{b^2 + c^2}{2} + bc = bc + \frac{a^2}{2} &\iff b^2 + c^2 = a^2 \end{aligned}$$

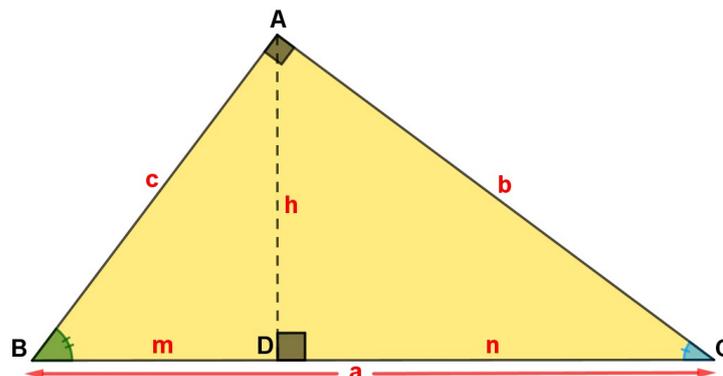
□

2.5.2 RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Note que na demonstração do Teorema de Pitágoras (Teorema 2.22) não foi utilizada a semelhança de triângulos. Agora deduzimos várias relações muito utilizadas nas resoluções de problemas no triângulo retângulo e, em particular, chegaremos a outra demonstração do Teorema de Pitágoras.

Consideremos um triângulo ABC , retângulo em A , e a altura do vértice A em relação ao segmento \overline{BC} , chamaremos de D o pé da altura. No $\triangle ABC$, conforme Figura 63 temos:

Figura 63 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autoria própria

$$\left\{ \begin{array}{l} BC : \text{hipotenusa} = a \\ AB : \text{cateto} = c \\ AC : \text{cateto} = b \\ BD : \text{projecção do cateto } \overline{AB} \text{ sobre a hipotenusa} = m \\ CD : \text{projecção do cateto } \overline{AC} \text{ sobre a hipotenusa} = n \\ AD : \text{altura relativa à hipotenusa} = h \end{array} \right.$$

Consideremos agora o triângulo ADC , retângulo em D , conforme Figura 63

Note que, pelo caso (AA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAC \equiv \angle ADC = 90^\circ \\ \widehat{BCA} \equiv \widehat{DCA} \end{array} \right. \implies \Delta ABC \sim \Delta DAC$$

Analogamente, consideremos o triângulo ADB , retângulo em D , conforme Figura 63

Note que, pelo caso (AA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAC \equiv \angle ADB = 90^\circ \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD} \end{array} \right. \implies \Delta ABC \sim \Delta DBA$$

Pela propriedade de transitividade temos que $\Delta ABC \sim \Delta DAC \sim \Delta DBA$.

Da semelhança entre ΔABC e ΔDBA , seque que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \implies \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \implies c^2 = am \quad (\text{I})$$

Da semelhança entre ΔABC e ΔDAC , seque que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{AC} \implies \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \implies ah = bc \quad (\text{II})$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \implies \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \implies b^2 = an \quad (\text{III})$$

Da semelhança entre ΔDBA e ΔDAC , seque que:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \implies \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \implies h^2 = mn \quad (\text{IV})$$

$$\frac{BA}{AC} = \frac{DA}{DC} \implies \frac{c}{b} = \frac{h}{n} \implies bh = cn \quad (\text{V})$$

$$\frac{BA}{AC} = \frac{DB}{DA} \implies \frac{c}{b} = \frac{m}{h} \implies ch = bm \quad (\text{VI})$$

Somando, membro a membro, as equações (I) e (III):

$$c^2 + b^2 = am + an \implies b^2 + c^2 = a(m + n) \implies b^2 + c^2 = a^2 \quad (\text{relação de Pitágoras})$$

Além da relação pitagórica (Teorema de Pitágoras), as relações (I), (II), (III), (IV), (V) e (VI) também são muito utilizadas nas resoluções de problemas envolvendo o triângulo retângulo.

2.6 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Na Seção 2.5.2 desse trabalho vimos as relações métricas do triângulo retângulo, ou seja, as relações que obtemos quando utilizamos as medidas dos lados do triângulo retângulo. Agora veremos as relações trigonométricas, ou seja, aquelas que envolvem as medidas dos lados e dos ângulos internos do triângulo retângulo.

2.6.1 DEFINIÇÃO DE SENO, COSSENO E TANGENTE

Definiremos agora seno, cosseno e tangente, conforme (DANTE, 2013) e mostraremos a utilidade dessas relações utilizando a semelhança de triângulos.

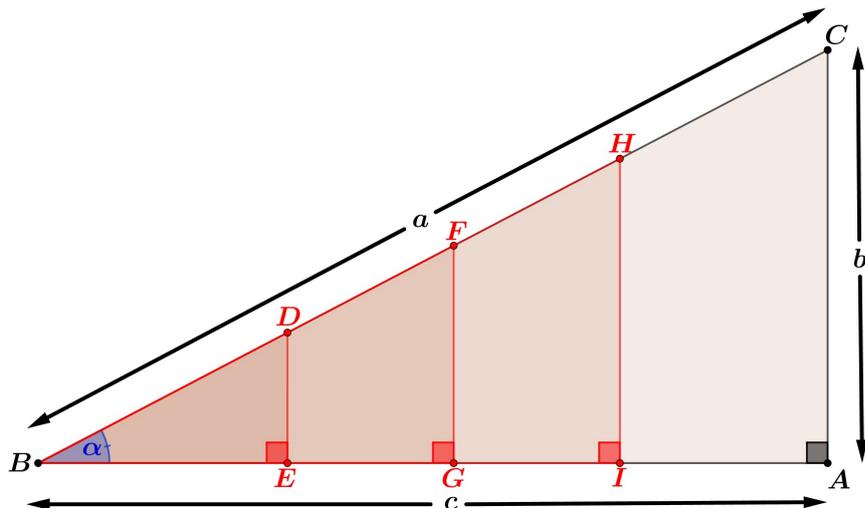
Para visualizarmos essas relações utilizaremos um triângulo ABC acutângulo, onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAC = 90^\circ \quad (\text{ângulo reto}) \\ a = BC = \text{hipotenusa} \\ b = AC = \text{cateto oposto ao ângulo } \widehat{ABC} \\ c = AB = \text{cateto adjacente ao ângulo } \widehat{ABC} \end{array} \right.$$

Consideremos $\alpha = \angle ABC$ e, na semirreta \overline{BC} colocaremos 3 pontos D , F e H distintos, de forma que, sem perda de generalidade, $\overline{BD} \subset \overline{BF} \subset \overline{BH} \subset \overline{BC}$.

Pelos pontos D , F e H tracemos perpendiculares em relação à semirreta \overline{BA} e chamaremos esses pés de perpendiculares de E , G e I , respectivamente, conforme Figura 64.

Figura 64 – Definição de Seno, cosseno e tangente



Fonte: Autoria própria

Note que

$$\triangle BAC \sim \triangle BED \sim \triangle BGF \sim \triangle BIH$$

(Caso AA)

Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{DE}{BD} = \frac{FG}{BF} = \frac{HI}{BH} = \frac{CA}{BC} = k \quad (k = \text{constante})$$

Essa relação depende apenas do ângulo α , independente do tamanho do triângulo retângulo no qual α é um dos ângulos agudos.

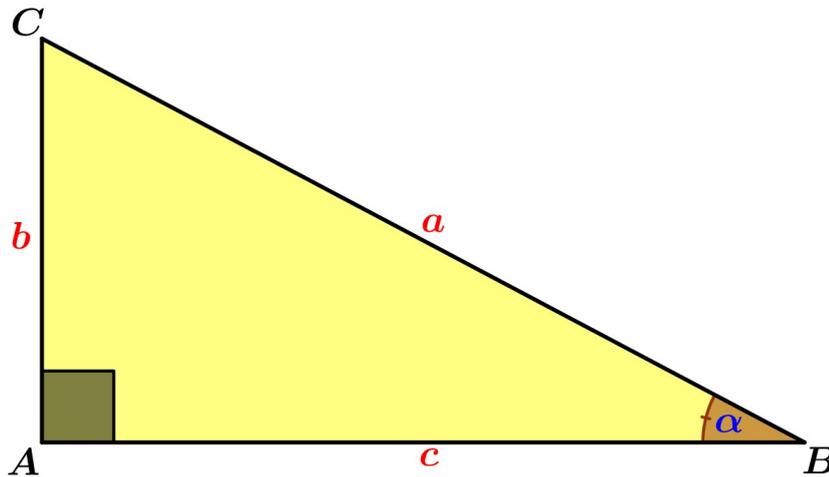
Analogamente, da semelhança de triângulos acima, podemos escrever:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BG}{BF} = \frac{BI}{BH} = \frac{BA}{BC} = z \quad (z = \text{constante})$$

$$\frac{DE}{BE} = \frac{FG}{BG} = \frac{HI}{BI} = \frac{CA}{BA} = w \quad (w = \text{constante})$$

Isso nos motiva a definir:

Figura 65 – Triângulo Retângulo $\triangle ABC$



Fonte: Autoria própria

Definição 2.23 (Razões trigonométricas). Chamamos de **seno de** α à proporção entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa em um triângulo retângulo e denotamos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a} \quad (0 < \alpha < 90^\circ)$$

Chamamos de **coosseno de** α à proporção entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa em um triângulo retângulo e denotamos:

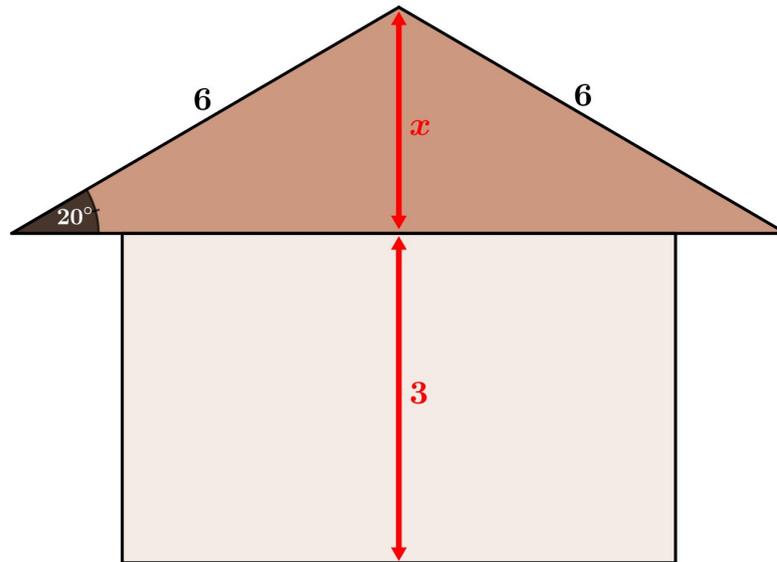
$$\text{cos } \alpha = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a} \quad (0 < \alpha < 90^\circ)$$

Chamamos de **tangente de** α à proporção entre o cateto oposto ao ângulo α e o cateto adjacente ao mesmo ângulo em um triângulo retângulo e denotamos:

$$\text{tan } \alpha = \frac{CA}{BA} = \frac{b}{c} \quad (0 < \alpha < 90^\circ)$$

Exemplo 2.24. (DANTE, 2010, pg. 382) Na construção de um telhado foram usadas telhas francesas e o "caimento" do telhado é de 20° em relação ao plano horizontal. Sabendo que, em cada lado da casa, foram construídos $6m$ de telhado e que, até a laje do teto, a casa tem $3m$ de altura, determine a que altura se encontra o ponto mais alto do telhado dessa casa. (Dados: $\text{sen } 20^\circ = 0,34$; $\text{cos } 20^\circ = 0,94$; $\text{tan } 20^\circ = 0,36$).

Figura 66 – Ilustração do Exemplo 2.24



Fonte: Autoria própria

Resolução:

Aplicando a definição de seno no telhado temos:

$$\text{sen } 20^\circ = \frac{x}{6} \implies 0,34 = \frac{x}{6} \implies x = 2,04$$

$$x + 3 = 2,04 + 3 = 5,04$$

Portanto o ponto mais alto do telhado da casa será a $5,04$ metros de altura do solo.

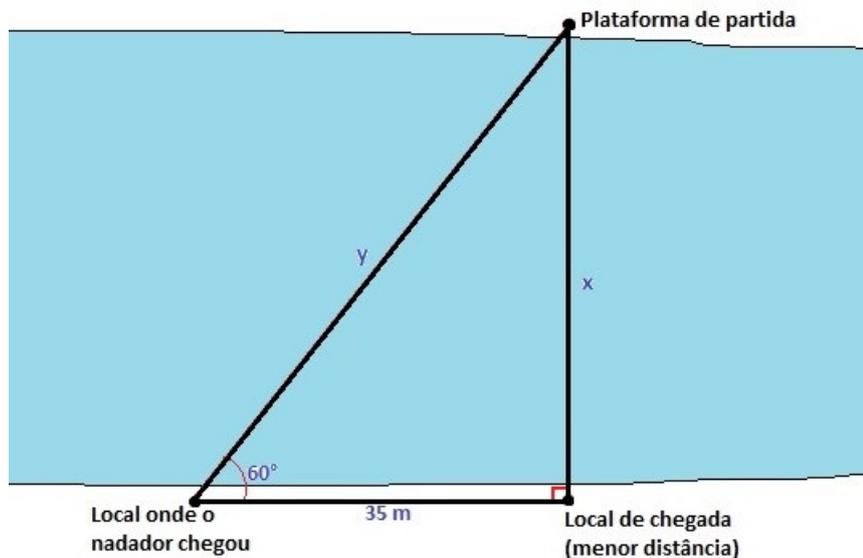
⊗

Exemplo 2.25. Um nadador saltou de uma plataforma e queria atravessar um rio na menor distância possível, porém, devido à correnteza ele chegou 35 metros depois de onde gostaria. Ao chegar no outro lado, ele avistou a plataforma de partida sob um ângulo de 60° da margem onde está. Em linha reta qual a distância de onde partiu o nadador até onde ele chegou? E qual seria a menor distância?

Resolução:

Aplicando as definições de cosseno e tangente temos:

Figura 67 – Ilustração do Exemplo 2.25



Fonte: Autoria própria

$$\cos 60^\circ = \frac{35}{y} \implies \frac{1}{2} = \frac{35}{y} \implies y = 70$$

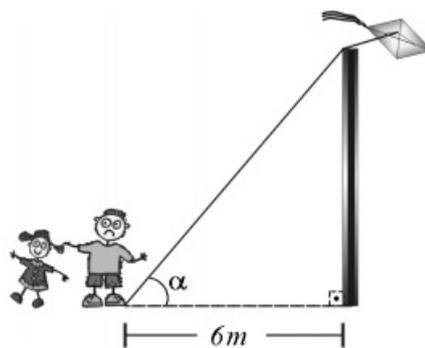
$$\tan 60^\circ = \frac{x}{35} \implies \sqrt{3} = \frac{x}{35} \implies x = 35\sqrt{3} \simeq 60,6$$

Portanto a menor distância é aproximadamente 60,6 metros mas ele nadou 70 metros.

⊗

Exemplo 2.26. (UFPB, 2003, questão 27) Ao empinar uma pipa, João percebeu que estava a uma distância de 6 m do poste onde a pipa engalhou. Maria notou que a tangente do ângulo α formado entre a linha da pipa e a rua era $\frac{3}{4}$, como mostra a Figura 2.26.

Figura 68 – Ilustração do Exemplo 2.26



Fonte: (UFPB, 2003, questão 27)

Resolução:

Aplicando a definição de tangente no telhado temos:

$$\tan \alpha = \frac{x}{6} \implies \frac{3}{4} = \frac{x}{6} \implies 4x = 18 \implies x = 4,5$$

Portanto a altura da pipa é de 4,5 metros.

⊗

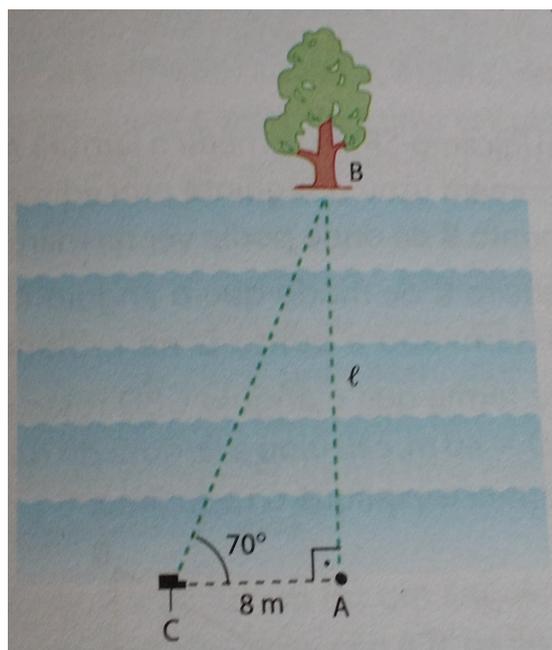
Uma utilização comum das definições de seno, cosseno e tangente é para a medição de alturas inacessíveis. A seguir um exemplo retirado de Dante(2010).

Aplicação na Topografia 2.27. *Queremos saber a largura l de um rio sem atravessá-lo. Para isso adotamos o seguinte processo:*

- marcamos dois pontos, **A** (uma estaca) e **B** (uma árvore), um em cada margem;
- marcamos um ponto **C**, distante 8 m de **A**, onde fixamos aparelho para medir ângulos (teodolito), de tal modo que o ângulo no ponto **A** seja reto;
- obtemos $\angle ACB = 70^\circ$.

Nessas condições, qual a largura l do rio? (Dados: $\sin 70^\circ = 0,94$; $\cos 70^\circ = 0,34$ e $\tan 70^\circ = 2,75$.)

Figura 69 – Ilustração da Aplicação em Topografia 2.27



Fonte: (DANTE, 2010, pg. 381)

Resolução:

Aplicando a definição de tangente temos:

$$\tan 70^\circ = \frac{l}{8} \implies 2,75 = \frac{l}{8} \implies l = 22$$

Portanto a largura do rio é de 22 metros.

⊗

2.6.2 RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO E TANGENTE

Demonstraremos a seguir, usando as definições de seno, cosseno e tangente, algumas relações muito utilizadas para resolução de problemas.

Proposição 2.28. *Seja um triângulo $\triangle ABC$ onde:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAC = 90^\circ \\ a = BC = \text{hipotenusa} \\ b = AC = \text{cateto oposto ao ângulo } \widehat{ABC} \text{ e adjacente ao ângulo } \widehat{ACB} \\ c = AB = \text{cateto oposto ao ângulo } \widehat{ACB} \text{ e adjacente ao ângulo } \widehat{ABC} \end{array} \right.$$

Vamos demonstrar as seguintes relações que envolvem seno, cosseno e tangente:

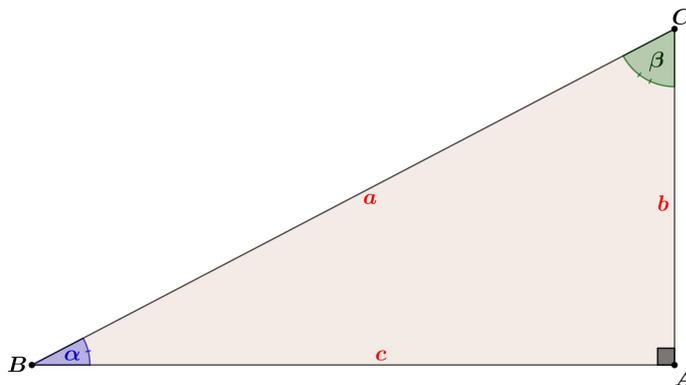
$$I. \text{sen } \alpha = \text{cos } \beta = \text{cos } (90^\circ - \alpha)$$

$$II. \text{cos } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen } (90^\circ - \alpha)$$

$$III. \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$IV. \text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Figura 70 – Relação entre Seno, cosseno e tangente



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Consideremos $\alpha = \angle ABC$ e $\beta = \angle ACB$ os ângulos agudos de $\triangle ABC$, conforme Figura 70.

Da Seção 2.6 temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \\ \text{cos } \alpha = \frac{c}{a} \\ \text{tan } \alpha = \frac{b}{c} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \beta = \frac{c}{a} \\ \text{cos } \beta = \frac{b}{a} \\ \text{tan } \beta = \frac{c}{b} \end{array} \right.$$

Note que, pela Proposição 2.13, α e β são complementares, pois $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$.

Podemos, portanto, escrever β em função de α , assim:

$$\beta = 90^\circ - \alpha \quad (*)$$

Observe que $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e $\text{cos } \beta = \frac{b}{a}$, logo $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$.

Substituindo (*) nessa última igualdade temos:

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta = \text{cos } (90^\circ - \alpha) \quad (\text{I})$$

Observe ainda que $\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$ e $\text{sen } \beta = \frac{c}{a}$, logo $\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$.

Substituindo (*) nessa última igualdade temos:

$$\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen } (90^\circ - \alpha) \quad (\text{II})$$

A terceira relação que iremos demonstrar diz que:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Da definição de seno e cosseno temos que $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e $\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$.

Substituindo $\text{sen } \alpha$ e $\text{cos } \alpha$ no primeiro membro da igualdade $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \quad (**)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$ temos

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (***)$$

Substituindo (***) em (**) temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \quad (\text{III})$$

Podemos pegar a relação $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e escrevermos b em função de $\text{sen } \alpha$, assim:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \quad \implies \quad b = a \cdot \text{sen } \alpha \quad (****)$$

Analogamente, em $\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$ podemos escrever c em função de $\text{cos } \alpha$, ou seja:

$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a} \quad \implies \quad c = a \cdot \text{cos } \alpha \quad (*****)$$

Por fim, substituímos em $\text{tan } \alpha = \frac{b}{c}$ os valores de (****) e (*****) temos:

$$\text{tan } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{a \cdot \text{sen } \alpha}{a \cdot \text{cos } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Portanto

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (IV)$$

□

2.6.3 SENO, COSSENO E TANGENTE DE 30° , 45° E 60°

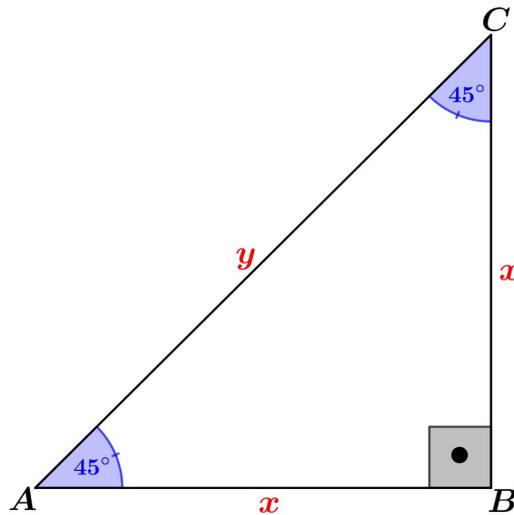
Utilizaremos as definições de seno, cosseno e tangente, semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras para calcularmos os valores dos senos, cossenos e tangentes de 30° , 45° e 60° .

Exemplo 2.29. *Num triângulo retângulo isósceles qualquer, devemos mostrar que:*

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{tg } 45^\circ = 1.$$

Demonstração. Dado um triângulo retângulo isósceles ABC , cujo ângulo reto é \widehat{ABC} . Denotaremos de x os catetos (\overline{AB} e \overline{BC}) e de y a hipotenusa (\overline{AC}) do $\triangle ABC$, conforme Figura 71.

Note que os ângulos $C\widehat{A}B$ e $B\widehat{C}A$ são congruentes e, como juntos devem somar 90° , devem medir cada um 45° . Devemos calcular, baseado no $\triangle ABC$ acima, os valores do $\text{sen } 45^\circ$, $\text{cos } 45^\circ$ e $\text{tan } 45^\circ$.

Figura 71 – Seno, cosseno e tangente de 45° 

Fonte: Autoria própria

Seja o $\triangle ABC$ acima enunciado (Figura 71), e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$y^2 = x^2 + x^2 \quad \implies \quad y = x\sqrt{2}$$

Com o valor de y acima e, pelas definições de seno, cosseno e tangente aplicadas no $\triangle ABC$ temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } 45^\circ = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{cos } 45^\circ = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tan } 45^\circ = \frac{x}{x} = 1 \end{array} \right.$$

□

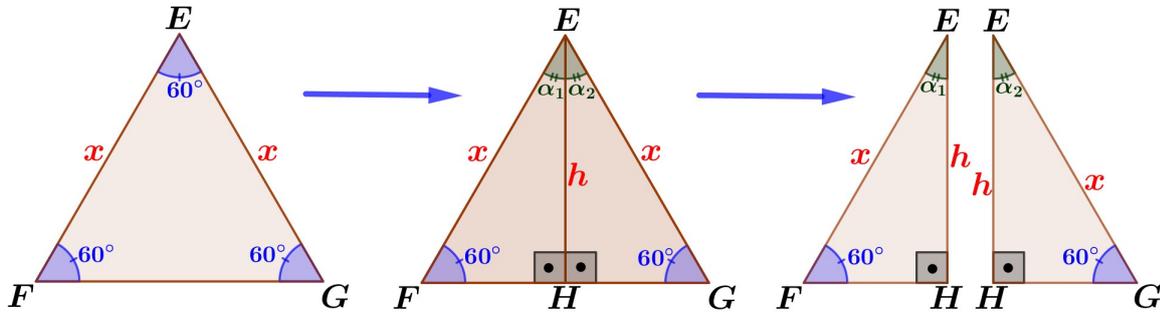
Exemplo 2.30. Num triângulo equilátero qualquer, se seccionado pela altura de qualquer um dos vértices, dos triângulos resultantes, devemos mostrar que:

$$\begin{array}{l} \text{I. } \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ e } \text{tan } 60^\circ = \sqrt{3} \\ \text{II. } \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \text{tan } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}$$

Demonstração. Seja o triângulo equilátero EFG dividido pela sua altura EH , onde H é o pé da altura no segmento \overline{FG} . Temos portanto dois triângulos $\triangle EFH$ e $\triangle EGH$.

Chamaremos de x os catetos do $\triangle EFG$ e h a altura desse triângulo, que corresponde ao segmento \overline{EH} , e chamaremos ainda, de α_1 e α_2 os ângulos resultantes da divisão de \widehat{E} pela altura h , conforme Figura 72.

Figura 72 – Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°



Fonte: Autoria própria

Analisando $\triangle EFH$ e $\triangle EGH$ podemos verificar que:

$$\begin{cases} \angle EHF \equiv \angle EHG = 90^\circ \\ \angle EFH \equiv \angle EGH = 60^\circ \end{cases} \implies \triangle EFH \sim \triangle EGH \quad (\text{Caso AA})$$

Calculando a razão entre as medidas dos lados correspondentes conhecidos (razão de semelhança) temos:

$$\frac{x}{x} = \frac{h}{h} = 1 \implies \triangle EFH \equiv \triangle EGH \quad (*)$$

Da congruência de triângulos acima (*) temos $\overline{FH} \equiv \overline{GH}$, e daí segue que:

$$\overline{FH} + \overline{GH} = x \implies \overline{FH} + \overline{FH} = x \implies \overline{FH} = \overline{GH} = \frac{x}{2}$$

Ainda da congruência de triângulos (*) temos $\widehat{FEH} \equiv \widehat{GEH}$, ou seja, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, logo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 60^\circ \implies \alpha_1 + \alpha_1 = 60^\circ \implies 2\alpha_1 = 60^\circ \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$$

Aplicando o teorema de Pitágoras num dos triângulos congruentes, no caso $\triangle EFH$, temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \implies x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2 \implies h^2 = \frac{3x^2}{4} \implies h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Com o valor de h acima e, pelas definições de seno, cosseno e tangente aplicadas no $\triangle EFH$ temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } 60^\circ = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{cos } 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \\ \text{tan } 60^\circ = \frac{h}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3} \end{array} \right. \quad (\text{I})$$

Sabemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$, a conforme vimos na Subseção 2.6.2 podemos concluir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{cos } 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{tan } 30^\circ = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{cos } 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right. \quad (\text{II})$$

□

2.6.4 SENO E COSSENO DE ÂNGULOS OBTUSOS

Até o momento estudamos as relações e razões envolvendo o triângulo retângulo, formado por um ângulo reto e dois ângulos agudos, mas as vezes faz-se necessário calcular o seno e cosseno de um ângulo obtuso, nesse caso, conforme (RIBEIRO, 2010, pg. 348) temos as seguintes relações:

- o seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplemento;

$$\text{sen } \beta = \text{sen } (180^\circ - \beta) \quad (\text{I})$$

- o cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno do suplemento

$$\text{cos } \beta = -\text{cos } (180^\circ - \beta) \quad (\text{II})$$

Ribeiro(2010) ainda faz referência ao seno e cosseno de 90° , como:

$$\text{sen } 90^\circ = 1$$

$$\text{cos } 90^\circ = 0$$

2.6.5 LEI DOS COSSENOS

Veremos agora algumas relações mais genéricas dos triângulos, não especificamente para os triângulos retângulos, que podem ser úteis para resolver problemas e situações cotidianas. A primeira delas é a Lei dos cossenos. Usaremos as definições e demonstração de Ribeiro(2010), e demonstraremos elas para os triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulo.

Proposição 2.31 (Lei dos cossenos). *Em todo triângulo, o quadrado da medida de um dos lados é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, subtraído o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.*

Demonstração. Precisaremos dividir a demonstração em dois casos: para triângulos acutângulos e para triângulos obtusângulos. Para triângulos retângulos a lei dos cossenos reduz-se ao teorema de pitágoras.

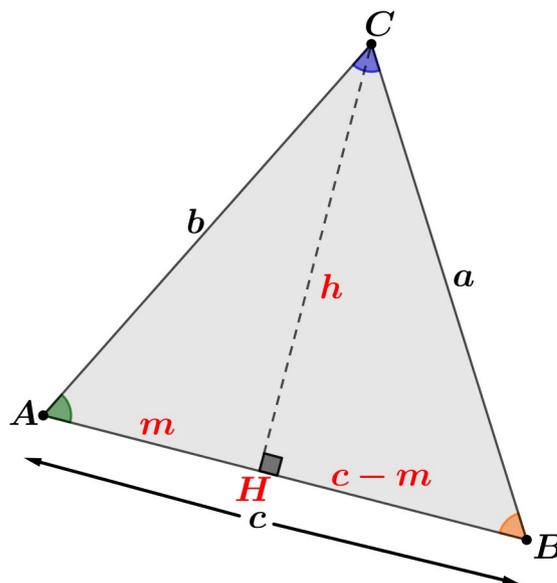
Seja o triângulo acutângulo $\triangle ABC$, onde:

$$\begin{cases} c = AB \\ b = AC \\ a = BC \end{cases}$$

Iremos demonstrar a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.

Agora traçaremos a altura relativa ao lado \overline{AB} e chamaremos de H o pé da altura, e temos então dois triângulos retângulos, $\triangle AHC$ e $\triangle BHC$, e temos as medidas $h = CH$, $m = AH$ e $c - m = BH$, conforme Figura 73.

Figura 73 – Lei do cosseno para triângulos acutângulos



Fonte: Autoria própria

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BHC$ temos:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2 \implies a^2 = h^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \quad (\text{I})$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle AHC$ temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \implies h^2 = b^2 - m^2 \quad (\text{II})$$

Da definição de cosseno no $\triangle AHC$ temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{b} \implies m = b \cdot \cos \hat{A} \quad (\text{III})$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$a^2 = \underbrace{b^2 - m^2}_{h^2} + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m$$

Aplicando (III) na equação acima temos:

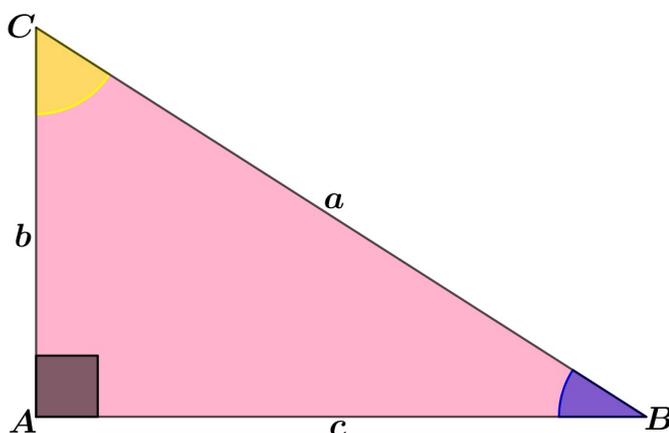
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot \underbrace{b \cdot \cos \hat{A}}_m \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

De maneira análoga, no $\triangle ABC$ poderíamos demonstrar as relações:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} \end{cases}$$

Agora devemos mostrar que essa mesma relação é válida para triângulos retângulos e triângulos obtusângulos.

Figura 74 – Lei do cosseno para triângulos retângulos



Fonte: Autoria própria

Seja o triângulo retângulo $\triangle ABC$, reto em \hat{A} conforme Figura 74, onde temos:

$$\begin{cases} c = AB \\ b = AC \\ a = BC \\ \angle BAC = 90^\circ \end{cases}$$

Como $\cos 90^\circ = 0$, podemos dizer que:

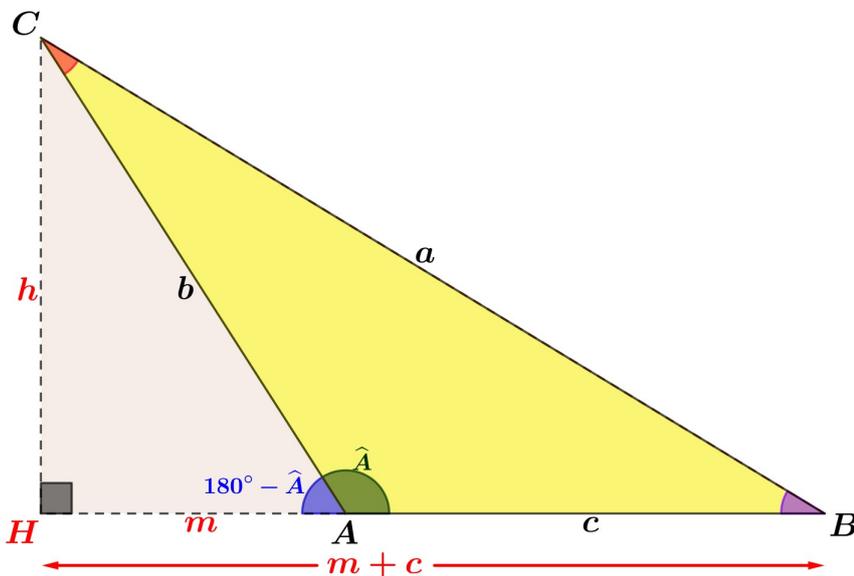
$$0 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos \hat{A}}_{\cos 90^\circ} \quad (\text{IV})$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle ABC$, e aplicando (IV) temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 + 0 \implies a^2 = b^2 + c^2 \underbrace{-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}}_{+0}$$

Portanto a lei dos cossenos é válida para os triângulos retângulos.

Figura 75 – Lei do cosseno para triângulos obtusângulos



Fonte: Autoria própria

Seja o triângulo obtusângulo $\triangle ABC$, obtuso em \hat{A} .

A partir de C traçamos a altura relativa à \overline{AB} e chamaremos de H o pé da altura. temos dois triângulos retângulos $\triangle AHC$ e $\triangle BHC$, ambos retos em H , e conforme Figura 75, as

seguintes medidas:

$$\begin{aligned}
 c &= AB \\
 b &= AC \\
 a &= BC \\
 h &= CH \\
 m &= AH \\
 m + c &= BH \\
 \angle HAC &= 180^\circ - \hat{A}
 \end{aligned}
 \tag{Subseção 2.6.4}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle BHC$ temos:

$$a^2 = h^2 + (m + c)^2 \implies a^2 = h^2 + m^2 + 2 \cdot m \cdot c + c^2 \tag{V}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle AHC$ temos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \implies h^2 = b^2 - m^2 \tag{VI}$$

Segue imediatamente da equação (II) da Subseção 2.6.4:

$$\cos (180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$$

Pela definição de cosseno, no $\triangle AHC$ temos:

$$\cos (180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{b} \implies m = b \cdot \underbrace{\cos (180^\circ - \hat{A})}_{-\cos \hat{A}} \implies m = -b \cdot \cos \hat{A} \tag{VII}$$

Substituindo (VI) em (V) temos:

$$a^2 = \underbrace{b^2 - m^2}_{h^2} + m^2 + 2 \cdot m \cdot c + c^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m$$

Aplicando (VII) na equação acima temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot \underbrace{(-b \cdot \cos \hat{A})}_m \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Assim como na demonstração para triângulos acutângulos, para triângulos retângulos e obtusângulos é análoga a demonstração das relações:

$$\begin{cases}
 b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \\
 c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}
 \end{cases}$$

□

Aplicação na Topografia 2.32. Um técnico foi chamado para resolver um problema. Desejava-se medir a distância entre dois pontos A e B , o problema é que um prédio entre eles impedia a medida direta dessa distância.

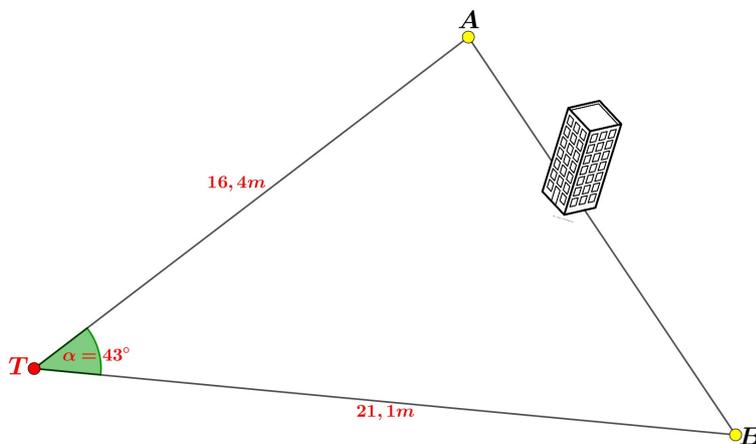
Resolução:

A solução adotada pelo técnico foi utilizar a lei dos cossenos para medir essa distância. O procedimento do técnico foi o seguinte:

1. Posicionou o teodolito em um ponto T de onde pudesse avistar, sem obstáculos, os pontos A e B ;
2. Em seguida ele mediu, com uma trena, a distância $TA = 16,4m$;
3. Ele zerou o teodolito no ponto A e girou até localizar o ponto B , obtendo um ângulo $\alpha = 43^\circ$;
4. Finalmente, ele mediu a a distância $TB = 21,1m$.

A Figura 76 ilustra as informações levantadas pelo técnico.

Figura 76 – Medida de distância com obstáculo visual



Fonte: Autoria própria

Feito essas medidas ele aplicou a lei dos cossenos para obter a distância AB . Para isso considerou $a = AB$, $b = TA$ e $c = TB$.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha = 16,4^2 + 21,1^2 - 2 \cdot 16,4 \cdot 21,1 \cdot \cos 43^\circ \\ &= 268,96 + 445,21 - 506,1553 = 208,0147 \implies \\ a &= \sqrt{208,0147} \simeq 14,42 \end{aligned}$$

Portanto, a distância entre os pontos A e B é de 14,42 metros.

2.6.6 LEI DOS SENOS

A lei dos senos é uma relação simples e direta entre os lados do triângulo e os senos dos respectivos ângulos, e é, muitas vezes, utilizadas na solução de problemas.

Proposição 2.33 (Lei dos senos). *Num triângulo qualquer (Figura 2.11), o quociente da divisão de um lado pelo seno do ângulo oposto a este lado é igual ao quociente da divisão de qualquer dos outros dois lados pelos respectivos senos dos ângulos opostos.*

Usaremos a demonstração baseado em Ribeiro(2010), e demonstraremos para os triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulo.

Demonstração. Seja o triângulo acutângulo ABC , onde:

$$\begin{cases} c = AB \\ b = AC \\ a = BC \end{cases}$$

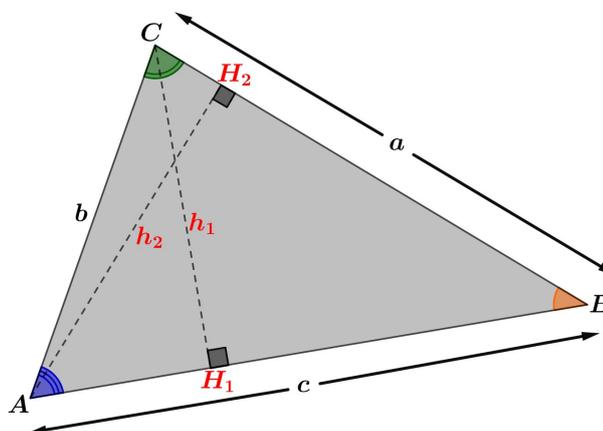
Iremos demonstrar a relação:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Agora traçaremos a altura relativa aos lados \overline{AB} e \overline{BC} e chamaremos de H_1 e H_2 os pés das alturas, respectivamente.

Temos então quatro triângulos retângulos, $\triangle AH_1C$, $\triangle BH_1C$, $\triangle AH_2C$ e $\triangle BH_2A$, e temos as medidas $h_1 = \overline{CH_1}$ e $h_2 = \overline{AH_2}$, conforme Figura 77.

Figura 77 – Lei do seno para triângulos acutângulos



Fonte: Autoria própria

Pela definição de seno, aplicando nos $\triangle AH_1C$ e $\triangle BH_1C$ temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h_1}{b} \implies h_1 = b \cdot \text{sen } \hat{A}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h_1}{a} \implies h_1 = a \cdot \text{sen } \hat{B}$$

Igualando as duas equações acima em h_1 temos:

$$a \cdot \text{sen } \hat{B} = b \cdot \text{sen } \hat{A} \implies \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \quad (\text{I})$$

Analogamente, pela definição de seno, aplicando nos $\triangle AH_2C$ e $\triangle BH_2A$ temos:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h_2}{b} \implies h_2 = b \cdot \text{sen } \hat{C}$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h_2}{c} \implies h_2 = c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

Igualando as duas equações acima em h_2 temos:

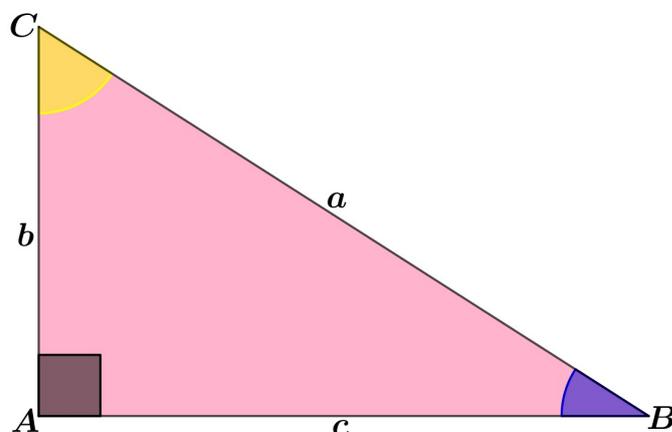
$$b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B} \implies \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad (\text{II})$$

Aplicando a propriedade de transitividade em (I) e (II) temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Agora devemos mostrar que essa mesma relação é válida para triângulos retângulos e triângulos obtusângulos.

Figura 78 – Lei do seno para triângulos retângulos



Fonte: Autoria própria

Seja o triângulo retângulo ABC , reto em \hat{A} conforme Figura 78, onde temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} c = AB \\ b = AC \\ a = BC \\ \angle BAC = 90^\circ \end{array} \right.$$

Como $\widehat{A} = \widehat{90^\circ} = 1$, e aplicando a definição de seno no $\triangle ABC$ temos que:

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{B} = \frac{b}{a} \implies a = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \implies \frac{a}{1} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \implies \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \quad (\text{III})$$

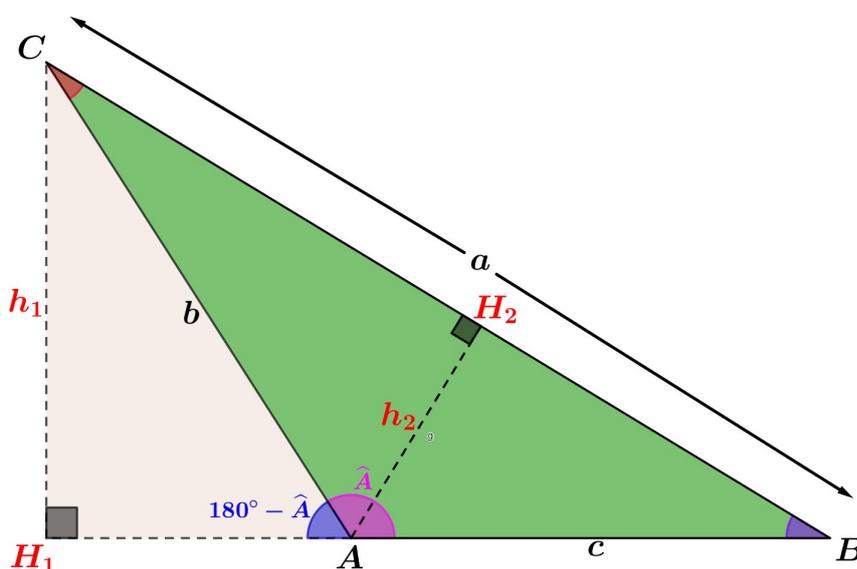
$$\widehat{\text{sen}} \widehat{C} = \frac{c}{a} \implies a = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} \implies \frac{a}{1} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} \implies \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} \quad (\text{IV})$$

Aplicando a propriedade de transitividade em (III) e (IV) temos:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}$$

Portanto a lei dos senos é válida para os triângulos retângulos.

Figura 79 – Lei do seno para triângulos obtusângulos



Fonte: Autoria própria

Seja o triângulo obtusângulo ABC , obtuso em \widehat{A} .

A partir de C traçamos a altura relativa à \overline{AB} e chamaremos de H_1 o pé da altura e, analogamente, a partir de A traçamos a altura relativa à \overline{BC} e chamaremos de H_2 o pé da altura. Temos quatro triângulos retângulos $\triangle AH_2B$, $\triangle AH_2C$, $\triangle CH_1A$ e $\triangle CH_1B$, retos em H_1 e H_2 ,

e conforme a Figura 79, as seguintes medidas:

$$\begin{aligned}
 c &= AB \\
 b &= AC \\
 a &= BC \\
 h_1 &= CH \\
 h_2 &= AH_2 \\
 \angle H_1AC &= 180^\circ - \angle BAC
 \end{aligned}
 \tag{Subseção 2.6.4}$$

Segue imediatamente da equação (I) da Subseção 2.6.4:

$$\text{sen } (180^\circ - \angle BAC) = \text{sen } \hat{A}$$

Pela definição de seno, nos $\triangle CH_1A$ e $\triangle CH_1B$ temos:

$$\begin{aligned}
 \text{sen } (180^\circ - \angle BAC) &= \frac{h_1}{b} \implies h_1 = b \cdot \underbrace{\text{sen } (180^\circ - \angle BAC)}_{\text{sen } \hat{A}} = b \cdot \text{sen } \hat{A} \\
 \text{sen } \hat{B} &= \frac{h_1}{a} \implies h_1 = a \cdot \text{sen } \hat{B}
 \end{aligned}$$

Igualando as duas equações acima em h_1 temos:

$$a \cdot \text{sen } \hat{B} = b \cdot \text{sen } \hat{A} \implies \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \tag{V}$$

Analogamente, pela definição de seno, aplicando nos $\triangle AH_2C$ e $\triangle BH_2A$ temos:

$$\begin{aligned}
 \text{sen } \hat{C} &= \frac{h_2}{b} \implies h_2 = b \cdot \text{sen } \hat{C} \\
 \text{sen } \hat{B} &= \frac{h_2}{c} \implies h_2 = c \cdot \text{sen } \hat{B}
 \end{aligned}$$

Igualando as duas equações acima em h_2 temos:

$$b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B} \implies \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \tag{VI}$$

Aplicando a propriedade de transitividade em (V) e (VI) temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

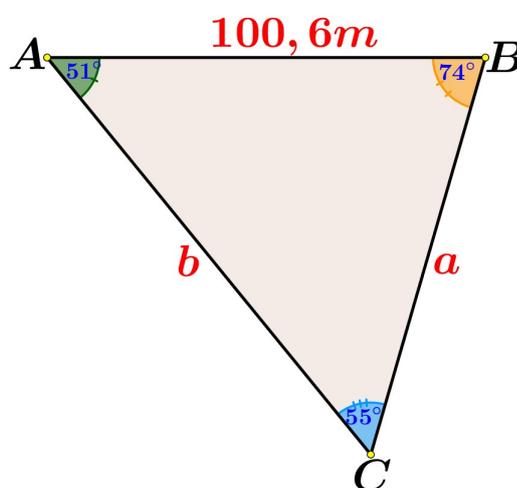
□

Aplicação na Topografia 2.34. Na observação de um triângulo que servirá de apoio para um levantamento, obtiveram-se os seguintes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = 51^\circ \\ \hat{B} = 74^\circ \\ \hat{C} = 55^\circ \\ AB = 100,6m \end{array} \right.$$

Com base nessas informações, calcule os comprimentos dos lados \overline{BC} e \overline{AC} .

Figura 80 – Triângulo qualquer referente a Aplicação na Topografia 2.34



Fonte: Autoria própria

Resolução:

Tomando $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, conforme Figura 80, e aplicando a lei dos senos no $\triangle ABC$ temos:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \implies \frac{a}{\sin 51^\circ} = \frac{b}{\sin 74^\circ} = \frac{100,6}{\sin 55^\circ} \implies \frac{a}{0,777} = \frac{b}{0,961} = \frac{100,6}{0,819}$$

Resolvendo dois a dois, de forma conveniente, acharemos os valores de a e b . Segue que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{0,777} = \frac{100,6}{0,819} &\implies 0,819a = 100,6 \cdot 0,777 \implies a = \frac{78,1662}{0,819} \simeq 95,44 \\ \frac{b}{0,961} = \frac{100,6}{0,819} &\implies 0,819b = 100,6 \cdot 0,961 \implies b = \frac{96,6766}{0,819} \simeq 118,04 \end{aligned}$$

⊗

2.7 CÁLCULO DE ÁREAS

Para o cálculo de área dos polígonos veremos três métodos:

- área de um triângulo qualquer (utiliza a definição de seno);
- área de um triângulo sem o uso dos ângulos (Fórmula de Heron);
- área pela Fórmula de Gauss (métodos das laçadas).

2.7.1 ÁREA DE UM TRIÂNGULO QUALQUER

Através do seno é possível o cálculo da área de qualquer triângulo, e essa fórmula é bem prática e útil quando não é possível determinar a base e altura do triângulo.

Proposição 2.35. *A área de qualquer triângulo é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo por eles formado.*

Demonstração. Seja o triângulo ABC , onde:

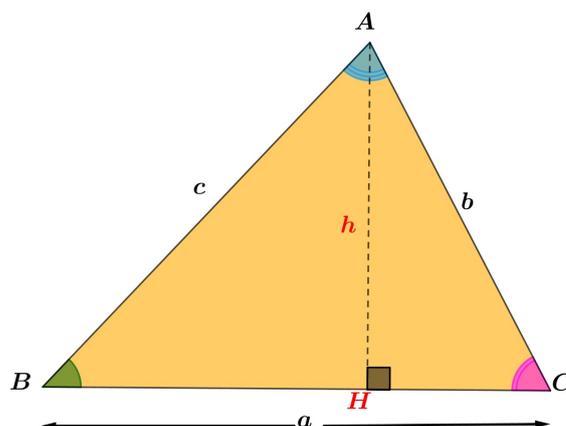
$$\begin{cases} c = AB \\ b = AC \\ a = BC \end{cases}$$

Vamos mostrar que podemos, no triângulo $\triangle ABC$, obter a área (S) através das fórmulas:

$$\begin{cases} S = \frac{a \cdot b \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{C}}{2} \\ S = \frac{a \cdot c \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{B}}{2} \\ S = \frac{b \cdot c \cdot \widehat{\text{sen}} \hat{A}}{2} \end{cases}$$

Faremos a demonstração para o caso de $\triangle ABC$ ser um triângulo acutângulo.

Figura 81 – Área de triângulo acutângulo



Fonte: Autoria própria

Seja o triângulo acutângulo ABC , e traçando a partir de A a altura relativa ao segmento \overline{BC} e denominando o pé da altura de H e distância \overline{AH} de h , conforme Figura 81.

Note que temos dois triângulos retângulos $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$.

A área total do triângulo (S) é dada por:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad (\text{I})$$

Pela definição de seno aplicado no $\triangle AHC$ temos:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \text{sen } \hat{C} \quad (\text{II})$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$S = \frac{a \cdot (b \cdot \text{sen } \hat{C})}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}}{2}$$

De forma análoga é feita a demonstração para $S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}$ e $S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$. \square

Um dos métodos de medição de polígonos utilizados em pequenas áreas e que não possuam muitos obstáculos é o **Levantamento Topográfico por Irradiação**. Consiste em escolher um ponto interno ou externo aos limites do polígono a ser medido e a partir dele fazer medidas de distâncias aos vértices do polígono e ângulos entre esses vértices. Para representação na planta o ideal é que o ângulo entre os vértices seja o Azimute, mas isso requer um instrumento que posicione o norte magnético. Para o exemplo a seguir utilizaremos o ângulo entre os vértices, desprezando o azimute.

Aplicação na Topografia 2.36. *Um proprietário solicita a um técnico que calcule o perímetro de sua propriedade e sua área. Como o técnico não dispõe de aparelhos sofisticados e as condições do terreno permitem, ele resolve pela rapidez utilizar o método de levantamento por irradiação. Ele posiciona o teodolito num ponto P dentro do terreno e numera os vértices do polígono de forma crescente (P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5). Após isso, com a ajuda do proprietário manuseando a régua graduada faz as seguintes medidas:*

$$d(P, P_1) = d_1 = 6,5m$$

$$d(P, P_2) = d_2 = 5,3m$$

$$d(P, P_3) = d_3 = 9,0m$$

$$d(P, P_4) = d_4 = 7,2m$$

$$d(P, P_5) = d_5 = 10,3m$$

Calcula também os ângulos entre cada um dos pontos (P_1 , P_2 , P_3 , P_4 e P_5), tendo como vértice o teodolito no ponto P , e obtém:

$$\angle P_1PP_2 = 60,2^\circ$$

$$\angle P_2PP_3 = 23,2^\circ$$

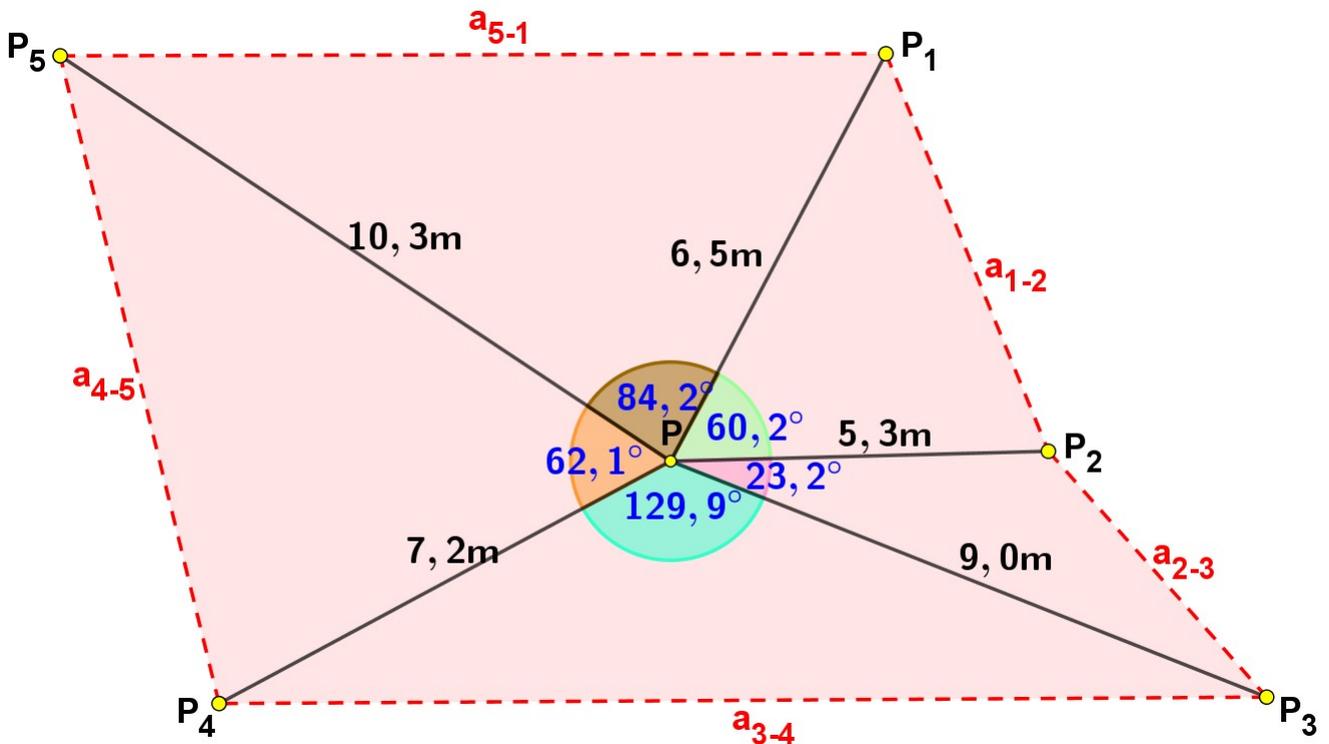
$$\angle P_3PP_4 = 129,9^\circ$$

$$\angle P_4PP_5 = 62,1^\circ$$

$$\angle P_5PP_1 = 84,2^\circ$$

A Figura 82 ilustra as medidas e ângulos levantados pelo técnico.

Figura 82 – Medição Topográfica por irradiação



Fonte: Autoria própria

Após um tempo calculando o técnico mostra o resultado ao proprietário, onde, segundo o técnico afirma, o perímetro é de 46,32 metros e a área é de aproximadamente 33,30 metros quadrados.

Explique o cálculo feito pelo técnico para resolver esse problema utilizando o método de levantamento por irradiação. Para isso utilize a lei dos cossenos e a Proposição 2.35).

Resolução:

Note que o polígono (Figura 82) foi dividido em vários triângulos, e em cada triângulo ele

conhece dois lados e o ângulos entre eles, condição suficiente e necessária para aplicar a lei dos cossenos e o cálculo de áreas utilizando a lei dos senos.

Para calcular as medidas das laterais do polígono o técnico utiliza a lei dos cossenos nos triângulos, da seguinte forma:

$$a_{i-j}^2 = d_i^2 + d_j^2 - 2 \cdot d_i \cdot d_j \cdot \cos P_i \hat{P} P_j \quad (i \in 1, 2, 3, 4), j = i + 1 \text{ ou } i = 5, j = 1.$$

Os resultados das medidas laterais (em metros) foi:

$$\begin{aligned} a_{1-2}^2 &= d_1^2 + d_2^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos P_1 \hat{P} P_2 \\ &= 6,5^2 + 5,3^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 5,3 \cdot \cos 60,2^\circ = 42,25 + 28,09 - 34,24 = 36,1 \implies \end{aligned}$$

$$a_{1-2} = \sqrt{36,1} \simeq 6,01$$

$$\begin{aligned} a_{2-3}^2 &= d_2^2 + d_3^2 - 2 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \cos P_2 \hat{P} P_3 \\ &= 5,3^2 + 9^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot 9 \cdot \cos 23,2^\circ = 28,09 + 81 - 87,69 = 21,04 \implies \end{aligned}$$

$$a_{2-3} = \sqrt{21,04} \simeq 4,59$$

$$\begin{aligned} a_{3-4}^2 &= d_3^2 + d_4^2 - 2 \cdot d_3 \cdot d_4 \cdot \cos P_3 \hat{P} P_4 \\ &= 9^2 + 7,2^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7,2 \cdot \cos 129,9^\circ = 81 + 51,84 + 83,13 = 215,97 \implies \end{aligned}$$

$$a_{3-4} = \sqrt{215,97} \simeq 14,70$$

$$\begin{aligned} a_{4-5}^2 &= d_4^2 + d_5^2 - 2 \cdot d_4 \cdot d_5 \cdot \cos P_4 \hat{P} P_5 \\ &= 7,2^2 + 10,3^2 - 2 \cdot 7,2 \cdot 10,3 \cdot \cos 62,1^\circ = 51,84 + 106,09 - 69,40 = 88,53 \implies \end{aligned}$$

$$a_{4-5} = \sqrt{88,53} \simeq 9,41$$

$$\begin{aligned} a_{5-1}^2 &= d_5^2 + d_1^2 - 2 \cdot d_5 \cdot d_1 \cdot \cos P_5 \hat{P} P_1 \\ &= 10,3^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 10,3 \cdot 6,5 \cdot \cos 84,2^\circ = 106,09 + 42,25 - 13,53 = 134,81 \implies \end{aligned}$$

$$a_{5-1} = \sqrt{134,81} \simeq 11,61$$

Com essas informações ele calculou o perímetro (2p) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2p &= a_{1-2} + a_{2-3} + a_{3-4} + a_{4-5} + a_{5-1} \\ &= 6,01 + 4,59 + 14,70 + 9,41 + 11,61 = 46,32m \end{aligned}$$

Para calcular a área do polígono ele calculou a área dos triângulos separadamente aplicando a fórmula que utiliza a definição de seno, da seguinte forma:

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$$

Aplicando essa fórmula nos 5 triângulos do polígono temos:

$$S_1 = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sen P_1 \hat{P} P_2}{2} = \frac{6,5 \cdot 5,3 \cdot \sen 60,2^\circ}{2} = \frac{29,894}{2} \simeq 14,95m^2$$

$$S_2 = \frac{d_2 \cdot d_3 \cdot \sen P_2 \hat{P} P_3}{2} = \frac{5,3 \cdot 9 \cdot \sen 23,2^\circ}{2} = \frac{18,791}{2} \simeq 9,40m^2$$

$$S_3 = \frac{d_3 \cdot d_4 \cdot \sen P_3 \hat{P} P_4}{2} = \frac{9 \cdot 7,2 \cdot \sen 129,9^\circ}{2} = \frac{49,712}{2} \simeq 24,86m^2$$

$$S_4 = \frac{d_4 \cdot d_5 \cdot \sen P_4 \hat{P} P_5}{2} = \frac{7,2 \cdot 10,3 \cdot \sen 62,1^\circ}{2} = \frac{65,54}{2} \simeq 32,77m^2$$

$$S_5 = \frac{d_5 \cdot d_1 \cdot \sen P_5 \hat{P} P_1}{2} = \frac{10,3 \cdot 6,5 \cdot \sen 84,2^\circ}{2} = \frac{66,607}{2} \simeq 33,30m^2$$

Com essas informações ele calculou a área total da figura (S) da seguinte forma:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 14,95 + 9,40 + 24,86 + 32,77 + 33,30 = 115,28m^2$$

⊗

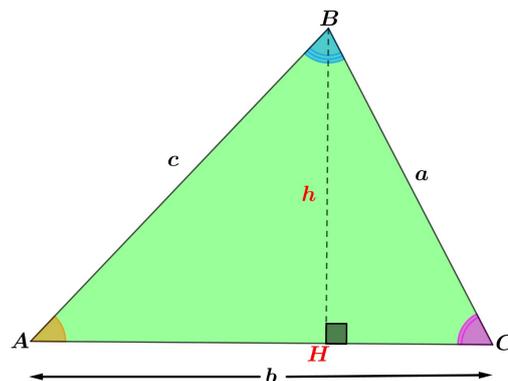
2.7.2 ÁREA DE UM TRIÂNGULO SEM O USO DOS ÂNGULOS

Fazendo um estudo mais aprofundado na trigonometria é possível calcular a área de um triângulo qualquer quando desconhecemos seus ângulos, fazendo uso apenas das medidas dos lados do triângulo, para isso usamos a **Fórmula de Heron**. Faremos a demonstração conforme (TUTORBRASIL, 2018, acesso em: 28 mar. 2018).

Teorema 2.37. *Seja um triângulo com medidas dos lados iguais a a , b e c , com semi-perímetro igual a p e de área igual a S , então*

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Figura 83 – Demonstração Teorema de Heron



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Seja o triângulo $\triangle ABC$, conforme figura 83, onde:

$$\begin{cases} c = AB \\ b = AC \\ a = BC \end{cases}$$

A partir de A a altura relativa ao segmento \overline{BC} e denominando o pé da altura de H e $AH = h$. Note que temos dois triângulos retângulos $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$.

Aplicando o teorema de Pitágoras e a definição de cosseno no $\triangle AHB$ temos:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (AH)^2 \implies (AH)^2 = c^2 - h^2 \implies AH = \sqrt{c^2 - h^2} \\ \cos \hat{A} &= \frac{AH}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c} \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Agora, no $\triangle ABC$, aplicamos a lei dos cossenos relativo ao ângulo \hat{A} :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Substituindo o valor de (I) temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c}}_{\cos \hat{A}} = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2}$$

Agora isolaremos o termo h^2 na equação acima:

$$\begin{aligned} 2 \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - h^2} &= b^2 + c^2 - a^2 \implies \sqrt{c^2 - h^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \\ \implies c^2 - h^2 &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2 \implies h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Aplicando a fórmula da área de um triângulo no $\triangle ABC$ e elevando ao quadrado temos:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \implies S^2 = \frac{b^2 \cdot h^2}{4} \quad (\text{III})$$

Substituindo (II) em (III) temos:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{b^2 \cdot \left[c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2 \right]}{4} = \frac{b^2 \cdot c^2 - b^2 \cdot \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}}{4} \\ &= \frac{b^2 \cdot c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4}}{4} = \frac{4 \cdot b^2 \cdot c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4} \\ &= \frac{4 \cdot b^2 \cdot c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16} \end{aligned} \quad (\text{IV})$$

Sabemos da diferença de dois quadrados que:

$$(x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x + y)$$

Aplicando a diferença de dois quadrados em (IV) temos:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{[2bc - (b^2 + c^2 - a^2)] \cdot [2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]}{16} \\ &= \frac{[-(b^2 - 2bc + c^2) + a^2] \cdot [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2]}{16} \\ &= \frac{[a^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - a^2]}{16} \end{aligned} \quad (\text{V})$$

Note que, no numerador de (V) temos duas diferenças de dois quadrados, logo:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{[(a - (b - c)) \cdot (a + b - c)] \cdot [(b + c) - a] \cdot (b + c + a)}{16} \\ &= \frac{[(a - b + c) \cdot (a + b - c)] \cdot [(b + c - a) \cdot (b + c + a)]}{16} \\ &= \frac{(a - b + c)}{2} \cdot \frac{(a + b - c)}{2} \cdot \frac{(b + c - a)}{2} \cdot \frac{(b + c + a)}{2} \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

Denotaremos o semiperímetro de p e sabemos portanto que:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

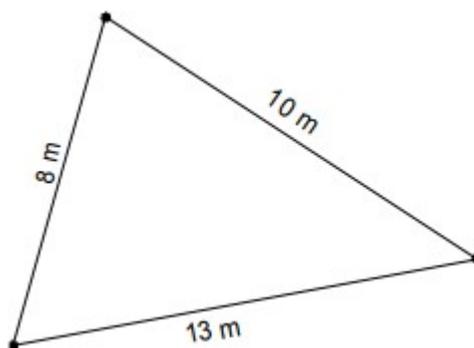
Trabalharemos a equação (VI) de forma que possamos substituir por p , sendo assim:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{(a + b + c - 2b)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - 2c)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - 2a)}{2} \cdot \frac{(a + b + c)}{2} \\ &= \left(\frac{a + b + c}{2} - b \right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - c \right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} - a \right) \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} \right) \\ &= (p - b) \cdot (p - c) \cdot (p - a) \cdot p \implies \\ S &= \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \end{aligned}$$

□

Aplicação na Topografia 2.38. Calcule a área do terreno cuja forma e dimensões estão representadas pela Figura 84.

Figura 84 – Cálculo de Área de um triângulo sem o uso de ângulos



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 25)

Resolução:

Como não consta ângulos na figura aplicaremos a Fórmula de Heron, que calcula a área utilizando apenas as medidas dos lados do triângulo, sendo assim:

$$a = 8m, b = 10m \text{ e } c = 13m$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{8 + 10 + 13}{2} = \frac{31}{2} = 15,5m$$

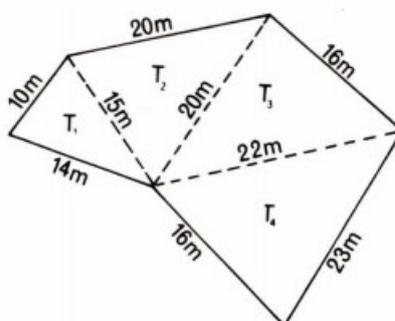
$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{15,5 \cdot (15,5 - 8) \cdot (15,5 - 10) \cdot (15,5 - 13)}$$

$$= \sqrt{15,5 \cdot 7,5 \cdot 5,5 \cdot 2,5} = \sqrt{1598,44} \simeq 39,98m^2.$$

⊗

Aplicação na Topografia 2.39. Para o terreno representado pela figura 85 calcule a área.

Figura 85 – Poligonal dividida em triângulos



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 25)

Resolução:

Como não consta ângulos na figura aplicaremos a Fórmula de Heron, que calcula a área utilizando apenas as medidas dos lados do triângulo, sendo assim, para cada um dos triângulos que

o perímetro foi dividido chamaremos de a_i, b_i e c_i os lados do triângulo e calcularemos o semiperímetro (p_i) e a área ((T_i)), onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sendo assim:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 14m, b_1 = 10m \text{ e } c_1 = 15m \\
 p_1 &= \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} = \frac{14 + 10 + 15}{2} = \frac{39}{2} = 19,5m \\
 S(T_1) &= \sqrt{p_1 \cdot (p_1 - a_1) \cdot (p_1 - b_1) \cdot (p_1 - c_1)} \\
 &= \sqrt{19,5 \cdot (19,5 - 14) \cdot (19,5 - 10) \cdot (19,5 - 15)} \\
 &= \sqrt{19,5 \cdot 5,5 \cdot 9,5 \cdot 4,5} = \sqrt{4584,94} \simeq 67,71m^2 \\
 a_2 &= 15m, b_2 = 20m \text{ e } c_2 = 20m \\
 p_2 &= \frac{a_2 + b_2 + c_2}{2} = \frac{15 + 20 + 20}{2} = \frac{55}{2} = 27,5m \\
 S(T_2) &= \sqrt{p_2 \cdot (p_2 - a_2) \cdot (p_2 - b_2) \cdot (p_2 - c_2)} \\
 &= \sqrt{27,5 \cdot (27,5 - 15) \cdot (27,5 - 20) \cdot (27,5 - 20)} \\
 &= \sqrt{27,5 \cdot 12,5 \cdot 7,5 \cdot 7,5} = \sqrt{19335,94} \simeq 139,05m^2 \\
 a_3 &= 20m, b_3 = 16m \text{ e } c_3 = 22m \\
 p_3 &= \frac{a_3 + b_3 + c_3}{2} = \frac{20 + 16 + 22}{2} = \frac{58}{2} = 29m \\
 S(T_3) &= \sqrt{p_3 \cdot (p_3 - a_3) \cdot (p_3 - b_3) \cdot (p_3 - c_3)} \\
 &= \sqrt{29 \cdot (29 - 20) \cdot (29 - 16) \cdot (29 - 22)} \\
 &= \sqrt{29 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 7} = \sqrt{23751} \simeq 154,11m^2 \\
 a_4 &= 22m, b_4 = 23m \text{ e } c_4 = 16m \\
 p_4 &= \frac{a_4 + b_4 + c_4}{2} = \frac{22 + 23 + 16}{2} = \frac{61}{2} = 30,5m \\
 S(T_4) &= \sqrt{p_4 \cdot (p_4 - a_4) \cdot (p_4 - b_4) \cdot (p_4 - c_4)} \\
 &= \sqrt{30,5 \cdot (30,5 - 22) \cdot (30,5 - 23) \cdot (30,5 - 16)} \\
 &= \sqrt{30,5 \cdot 8,5 \cdot 7,5 \cdot 14,5} = \sqrt{28193,44} \simeq 167,91m^2
 \end{aligned}$$

Feito esses cálculos, a área total do polígono será:

$$S = S(T_1) + S(T_2) + S(T_3) + S(T_4) = 67,71 + 139,05 + 154,11 + 167,91 = 528,78m^2$$

⊗

2.7.3 FÓRMULA DA ÁREA DE GAUSS

Uma outra forma de calcular áreas sem o uso dos ângulos é a **Fórmula da área de Gauss**, também conhecida como **Fórmula das laçadas** ou **Algoritmo das laçadas**. Esse método permite calcular as áreas dos polígonos utilizando apenas suas coordenadas cartesianas.

A fórmula da área de Gauss é:

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

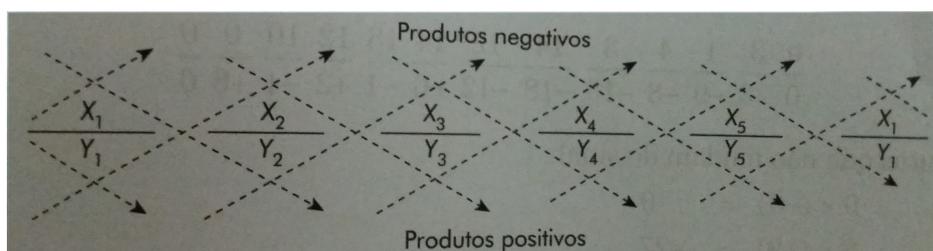
$$= \frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_{n-1} y_n + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \dots - x_n y_{n-1} - x_1 y_n|$$

onde:

- A é a área do polígono;
- n é o número de lados do polígono e
- $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ são as coordenadas dos vértices do polígono.

Essa fórmula é encontrada em livros de engenharia, em Borges(2013) aparece uma explicação prática, conforme Figura 86, da fórmula da área de Gauss para um polígono de 5 pontos.

Figura 86 – Aplicação prática da Fórmula de Gauss



Fonte: (BORGES, 2013)

A fórmula da área de Gauss não será demonstrada nesse trabalho, mas (WIKIPEDIA, 2018, Acesso em: 29 mar. 2018) cita que a fórmula de Gauss é um caso particular do Teorema de Green, que é demonstrado por uso de integrais. Há uma outra demonstração em (PASTANA, 2010, pg. 103), que utiliza as áreas dos pontos desse polígono no plano cartesiano.

Exemplo 2.40. Calcule a área do polígono T definido pelos vértices $(3,4)$, $(5,11)$, $(12,8)$, $(9,5)$ e $(5,6)$, ilustrados na Figura 87.

Resolução:

Colocamos os pontos do polígono da Figura 87 na forma:

$$(x_1, y_1) = (3, 4)$$

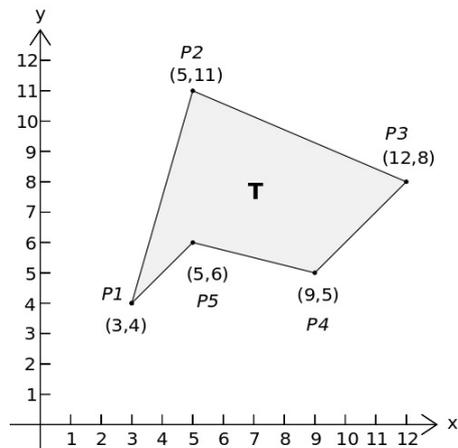
$$(x_2, y_2) = (5, 11)$$

$$(x_3, y_3) = (12, 8)$$

$$(x_4, y_4) = (9, 5)$$

$$(x_5, y_5) = (5, 6)$$

Figura 87 – Ilustração de um polígono de 5 lados



Fonte: (WIKIPEDIA, 2018, Acesso em: 29 mar. 2018)

Aplicando a Fórmula da área de Gauss faremos:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \cdot |(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_5y_4 + x_1y_5)| \\
 &= \frac{|(3 \cdot 11 + 5 \cdot 8 + 12 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + 5 \cdot 4) - (5 \cdot 4 + 12 \cdot 11 + 9 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6)|}{2} \\
 &= \frac{|(33 + 40 + 60 + 54 + 20) - (20 + 132 + 72 + 25 + 18)|}{2} = \frac{|207 - 267|}{2} = \frac{60}{2} = 30
 \end{aligned}$$

Portanto a área do polígono T é 30 u, pois não sabemos a unidade da medida.

⊗

3 A MATEMÁTICA NO LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO

No capítulo anterior foram aplicados conceitos e proposições matemáticos para resolver problemas da topografia, contudo para o topógrafo experiente muitos dos cuidados necessários nas técnicas foram deixados de lado. Além disso algumas técnicas fundamentais não foram apresentadas. Esse capítulo apresenta tais cuidados e técnicas buscando justificá-los matematicamente, tendo em vista que são apresentadas muitas vezes sem justificativas como procedimentos topográficos.

3.1 PROCEDIMENTOS NA PLANIMETRIA E ALTIMETRIA

Trataremos nessa seção de levantamentos planimétricos (medidas de ângulos horizontais e distâncias entre pontos) e altimétricos (cotas e desníveis).

Antes dessas aplicações iremos definir, segundo Pastana(2010), alguns procedimentos.

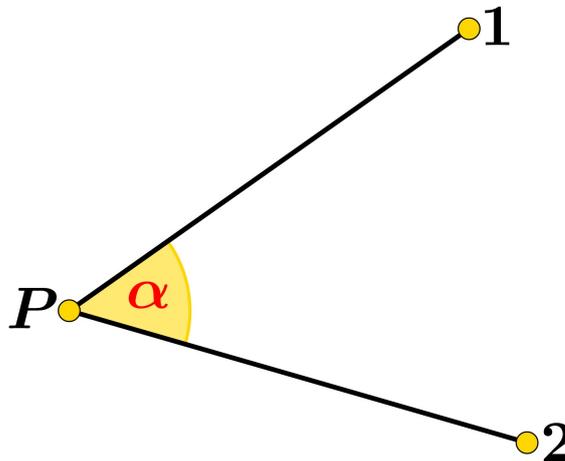
3.1.1 LEITURA SIMPLES DE UM ÂNGULO

Pastana lista o procedimento para a leitura simples de um ângulo entre dois alinhamentos ($P - 1$ e $P - 2$), conforme Figura 88:

1. Instalar e nivelar o teodolito no ponto P ;
2. Soltar os parafusos dos movimentos da alidade e do limbo;
3. Acertar, aproximadamente, o zero do vernier e o do limbo horizontal e fixar o parafuso de movimento do limbo;
4. Acertar, exatamente, zero a zero, usando o parafuso micrométrico do movimento do limbo;
5. Girar a alidade, visar o ponto 1 (visada à ré) com o auxílio da alça de mira e fixar o movimento da alidade;
6. Fazer a colimação perfeita do ponto 1 com o parafuso micrométrico do movimento da alidade;
7. Soltar os parafusos de movimento do limbo e da alidade e visar o ponto 2, com a alça de mira;
8. Fixar o parafuso do movimento da alidade e fazer a colimação perfeita do ponto 2 com o auxílio do parafuso micrométrico;

9. Fixar o parafuso do movimento do limbo e fazer a leitura do ângulo α . A realização da medida de ângulos horizontais é sempre feita no sentido horário, ou seja, da esquerda para a direita.

Figura 88 – Leitura simples de um ângulo



Fonte: Autoria própria

Na Figura 89 (PASTANA, 2010, pg. 71) descreve o esquema de um teodolito padrão repetidor com os parafusos de ajustes com as seguintes funções:

- LIMBO : Parte do teodolito onde se efetua a medição dos ângulos horizontais e verticais.
- ALIDADE : Dispositivo giratório e suporte dos elementos de visualização. Gira em torno de um eixo vertical.
- LUNETAS: Constituída por ocular, objetiva e retículos.
- EIXOS : Os eixos do teodolito são: horizontal, vertical, focalizante e são perpendiculares entre si.
- PARAFUSOS CALANTES: Para centralizar as bolhas de ar dos níveis, para que o eixo principal do aparelho coincida com a vertical do local.
- PARAFUSOS DE FIXAÇÃO : Fixa o movimento em torno dos eixos.
- NONIOS OU VERNIERS : Possuem escalas para leituras mais precisas.
- PARAFUSOS DE FOCALIZAÇÃO: Para a focalização precisa dos pontos.
- NÍVEIS DE BOLHA : Servem para indicar a verticalidade do aparelho.
- TRIPÉ : Três pernas de altura regulável para apoio do teodolito.
- BÚSSOLA: Indicação do Norte Magnético.

Figura 89 – Esquema de um teodolito

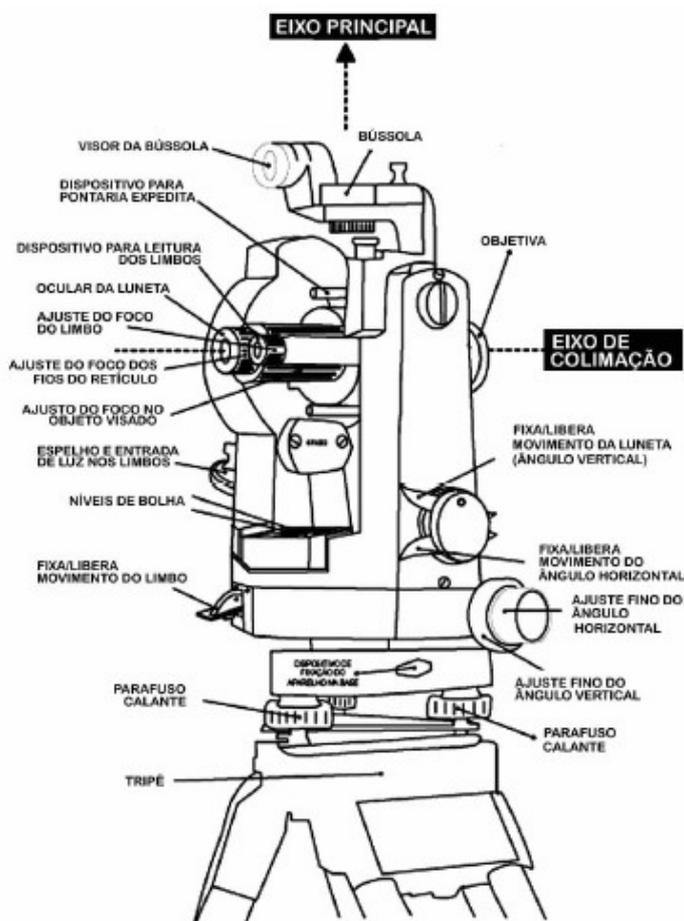


Figura 6.1 - Esquema de um Teodolito
 (Adaptado de Baitelli/Weschenfelder - Topografia Aplicada à Agronomia)

Fonte: (PASTANA, 2010, pg.72)

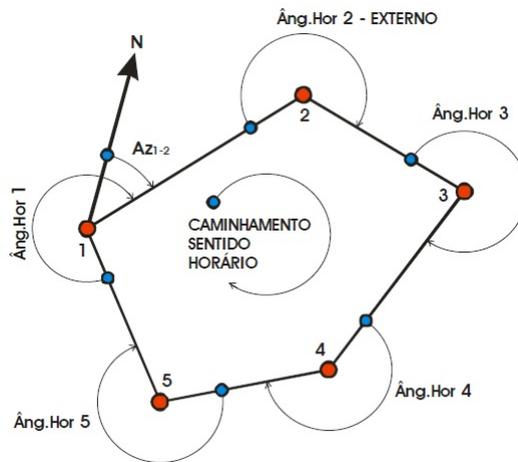
3.1.2 POLIGONAL FECHADA

Segundo (PASTANA, 2010, pg. 81) define, Poligonal é um conjunto de alinhamentos consecutivos constituído de ângulos e distâncias. E poligonal fechada é aquela em que o ponto de partida coincide com o de chegada, podendo estar a partida apoiada ou não. Partida apoiada, segundo o autor, quer dizer um alinhamento em que se conhece a sua medida e/ou orientação, com precisão. Nessa poligonal há condições de se verificar o rigor/precisão das medidas angulares e lineares, ou seja, podem-se determinar os erros cometidos e compará-los com erros admissíveis (tolerância). Para Caminhamento no Sentido Horário, tem-se as medições dos ângulos externos (à direita), conforme Figura 90, e no sentido anti horário tem-se as medições dos ângulos internos (à esquerda), Figura 91.

Para o caminhamento no sentido horário o somatório dos ângulos externos é dado pela fórmula:

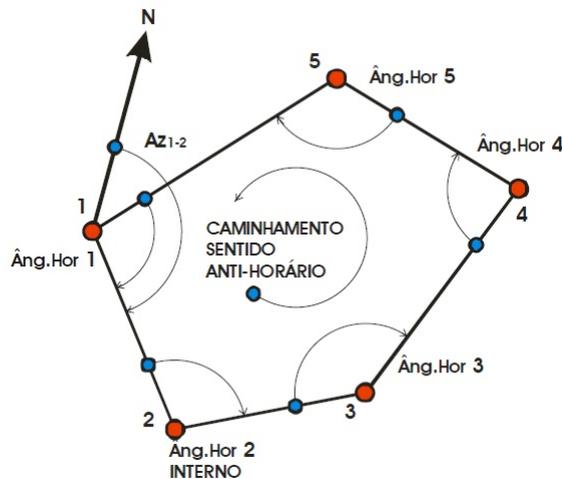
$$\sum \angle_{\text{externos}} = (n + 2) \cdot 180^\circ$$

Figura 90 – Caminhamento no sentido horário



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 81)

Figura 91 – Caminhamento no sentido anti-horário



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 82)

Para o caminhamento no sentido anti-horário o somatório dos ângulos internos é dado pela fórmula:

$$\sum \angle_{internos} = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Para ambas as fórmulas acima n corresponde ao número de vértices ou lados do polígono.

A diferença entre o somatório de ângulos (externos e/ou internos) acima descritos e o somatório dos ângulos medidos em campo devem ser corrigidas através de procedimentos específicos.

3.1.3 NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

Um método de levantamento de desníveis é o Nivelamento Geométrico, que Pastana descreve como um levantamento altimétrico com o objetivo básico de determinar **cotas** ou **altitudes** de pontos sobre uma superfície qualquer. E define:

Quando as distâncias verticais são referidas à superfície média dos mares (nível verdadeiro) são chamadas de ALTITUDES. Se forem referidas à superfície de nível arbitrária, acima ou abaixo do Nível Médio das Marés (N.M.M), são chamadas de COTAS (nível aparente) (PASTANA, 2010, pg. 134).

A Figura 92 mostra uma tabela parcial de um nivelamento geométrico, e para um melhor entendimento faremos breve explicação sobre os itens dessa tabela.

Figura 92 – Tabela parcial de um nivelamento geométrico

| PONTO | VISADA À RÉ | ALTURA DO INSTRUMENTO | VISADA A VANTE | | COTA (m) | DISTÂNCIA AO RN |
|--------------------|--------------|-----------------------|----------------|--------------|--------------------|-----------------|
| | | | INTERM. | MUDANÇA | | |
| NIVELAMENTO | | | | | | |
| A | | | | | RN = 10,000 | 0,00 |
| (I) | 1,820 | 11,820 | | | | |
| B | | | 3,725 | | 8,095 | 20,00 |
| C | | | | 3,749 | 8,071 | 40,00 |
| (II) | 0,833 | 8,904 | | | | |
| D | | | 2,501 | | 6,403 | 60,00 |
| E | | | 2,034 | | 6,870 | 80,00 |
| F | | | 3,686 | | 5,218 | 100,00 |
| G | | | | 3,990 | 4,914 | 120,00 |
| SOMA | 2,653 | | | 7,739 | | |

Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 142)

3.1.3.1 REFERÊNCIA DE NÍVEL - RN

Referência de nível é um ponto onde sua cota (ou altitude) é conhecida. A partir dela são calculadas todas as demais cotas do nivelamento geométrico através de distâncias conhecidas e visadas a ré e vante. Conforme a definição acima de Pastana(2010) a Cota RN pode ser uma altitude real ou um valor arbitrário qualquer.

3.1.3.2 ALTURA DO INSTRUMENTO

Segundo Pastana(2010) Altura do Instrumento (AI) ou Plano de Colimação (PC) é a distância vertical entre dois (2) planos horizontais: o de cota zero (base do ponto) e o plano do aparelho, isto é, altura do instrumento(AI) é a cota do aparelho. Observar, portanto, que não é a altura do próprio aparelho (tripé), e sim a cota da sua linha de vista (Plano de Colimação).

Da Figura 92 a altura do instrumento é calculado por:

$$AI = COTA_{RN} + VISADA_{RÉ}$$

3.1.3.3 VISADA DE RÉ

Segundo Pastana(2010) e (2013), a visada à ré pode ser feita para frente, para trás, ou para os lados, portanto não é a direção da visada que faz com que ela seja a ré, e sim sua finalidade. Visada a ré é aquela que é feita para um ponto de cota ou altitude conhecida, com a finalidade de determinarmos a Cota do Plano de Colimação (PC) ou Altura do Instrumento (AI). A primeira visada a ré é sempre no ponto onde está a $COTA_{RN}$.

3.1.3.4 VISADA DE VANTE

Segundo Pastana(2010) e Borges(2013), a visada de vante também não depende da direção e sim do seu objetivo. Por isto, chamamos visada a vante àquela que é feita com o intuito de se determinar a cota do ponto onde está a mira. As visadas à vante podem ser de mudança ou intermediária:

- **VISADA À VANTE INTERMEDIÁRIA:** Assim como a visada a vante de mudança, serve para a determinação da cota do ponto onde está a mira; a diferença é que, na visada à vante intermediária, o ponto não receberá uma visada à ré. Afeta apenas a cota do ponto visado;
- **VISADA À VANTE DE MUDANÇA:** A visada à vante de mudança vem a receber posteriormente uma visada à ré, ou seja, indica que por algum motivo o instrumento mudou de posição. A diferenciação é que a visada à vante de mudança influencia a cota final. Após a vante de mudança faz-se necessário nova visada à ré sobre o mesmo ponto, para as leituras de vante posteriores, pois a altura do instrumento provavelmente mudou na nova instalação do aparelho.

3.2 SEQUÊNCIA DE CÁLCULOS DE UMA POLIGONAL REGULAR

Pastana(2010) reserva um capítulo inteiro para a demonstração da seqüência de cálculos de uma poligonal regular pelo método do caminhamento. A partir do levantamento de campo, composto dos ângulos à direita (sentido horário, azimute (magnético ou verdadeiro) da linha inicial e distância entre os pontos, descreve-se os passos necessários para a compensação da planilha. Segundo o autor, os passos necessários são:

1. Determinação do Erro de fechamento angular (Efa);
2. Determinação dos azimutes;
3. Preenchimento da tabela de campo;
4. Cálculo das coordenadas parciais (x,y);
5. Cálculo do erro de fechamento linear absoluto (Ef);

6. Cálculo do erro de fechamento linear relativo (M);
7. Distribuição do erro de fechamento linear;
8. Determinações dos pontos mais a oeste (W) e mais ao sul (S);
9. Determinação das coordenadas totais;
10. Cálculo da área do polígono;
11. Memorial descritivo.

Muitos desses passos utilizam a geometria e trigonometria do triângulo retângulo visto nesse trabalho, conforme mostraremos a seguir.

3.2.1 ERRO DE FECHAMENTO ANGULAR

Nessa etapa do levantamento planimétrico é verificado se os ângulos foram corretamente medidos. Se o erro de fechamento angular for acima do permitido é necessária nova leitura.

3.2.2 COORDENADAS PARCIAIS

Em (BORGES, 2013, pg. 80) uma aplicação direta das definições de seno e cosseno é no cálculo de coordenadas parciais (abscissas parciais e ordenadas parciais) através do comprimento calculado e do rumo da medida.

Proposição 3.1. *Seja $\overline{AB} = l$ o lado de um polígono medido. Devemos demonstrar a fórmula das coordenadas parciais $(x_{AB}; y_{AB})$:*

$$x_{AB} = l \cdot \text{sen } \alpha$$

$$y_{AB} = l \cdot \text{cos } \alpha$$

onde α é o rumo da medida do lado do polígono, x_{AB} é a abscissa parcial e y_{AB} a ordenada parcial que queremos encontrar.

Demonstração. Fazemos passar por A as linhas norte-sul e leste-oeste, formando um plano cartesiano de centro A . Chamaremos de α o ângulo de um rumo referente ao segmento \overline{AB} em relação ao eixo norte-sul. A orientação do rumo é fundamental para posicionar o quadrante desse segmento, assim descrito:

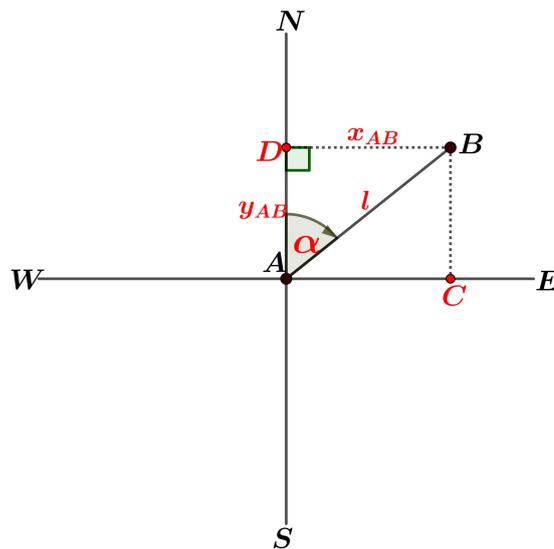
$$\left\{ \begin{array}{l} NE \implies (1^\circ \text{ quadrante}) \\ NW \implies (2^\circ \text{ quadrante}) \\ SW \implies (3^\circ \text{ quadrante}) \\ NE \implies (4^\circ \text{ quadrante}) \end{array} \right.$$

No plano cartesiano formado pelas retas norte-sul e leste-oeste chamaremos de C o ponto formado pela projeção ortogonal de B no eixo leste-oeste e de D o ponto formado pela projeção ortogonal de B no eixo norte-sul.

Sem perda de generalidade para os demais quadrantes, adotemos \overline{AB} na orientação NE , ou seja, no primeiro quadrante, e conforme Figura 93 temos dois triângulos congruentes (pelo caso LLL) $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$:

$$\begin{cases} x_{AB} = \overline{DB} = \overline{AC} \\ y_{AB} = \overline{CB} = \overline{AD} \\ l = \overline{AB} \quad (\text{comum}) \end{cases}$$

Figura 93 – Segmento \overline{AB} no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria

Aplicando a definição de seno e cosseno no $\triangle ABD$, e tendo $\alpha = \angle DAB$ temos:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{x_{AB}}{l} \implies x_{AB} = l \cdot \text{sen } \alpha \\ \text{cos } \alpha &= \frac{y_{AB}}{l} \implies y_{AB} = l \cdot \text{cos } \alpha \end{aligned}$$

□

A Figura 94 mostra uma planilha de cálculo de coordenadas parciais que utiliza as fórmulas da demonstração acima para obtenção das coordenadas de X (E e W) e de Y (N e S).

A última linha da tabela, que contém as diferenças ($E_x = 0,28$ e $E_y = 0,24$) referem-se ao Erro de fechamento linear absoluto, que trataremos logo a seguir.

Figura 94 – Planilha de cálculo de coordenadas parciais

Tabela 10.1 Planilha de cálculo para obtenção de coordenadas por funções naturais

| Linha | Rumo | Comprimento | Seno do rumo | Co-seno do rumo | Coordenadas parciais | | | |
|-------|-------------|---------------------|--------------|-----------------|----------------------|--------|--------------|--------|
| | | | | | x* | | y* | |
| | | | | | E | W | N | S |
| 1-2 | S 75° 20' W | 58,08 | 0,96742 | 0,25320 | | 56,19 | | 14,71 |
| 2-3 | S 49° 50' W | 51,54 | 0,76417 | 0,64501 | | 39,39 | | 33,24 |
| 3-4 | S 21° 00' E | 48,95 | 0,35837 | 0,93358 | 17,54 | | | 45,70 |
| 4-5 | S 69° 30' E | 51,75 | 0,93667 | 0,35021 | 48,48 | | | 18,12 |
| 5-6 | N 41° 40' E | 82,61 | 0,66480 | 0,74703 | 54,92 | | 61,71 | |
| 6-1 | N 26° 30' W | 56,20 | 0,44620 | 0,89493 | | 25,08 | 50,30 | |
| | | $\Sigma l = 349,13$ | | soma: | 120,94 | 120,66 | 112,01 | 111,77 |
| | | | | diferença: | $e_x = 0,28$ | | $e_y = 0,24$ | |

*Observação: os valores de x e y são colocados nas colunas E ou W e N ou S em função das letras do rumo

Fonte: (BORGES, 2013, pg. 81)

3.2.3 ERRO DE FECHAMENTO LINEAR ABSOLUTO

Num levantamento planimétrico, após o cálculo de todas as coordenadas parciais geralmente ocorre um erro de fechamento linear, ou seja, o polígono não começa e termina no mesmo lugar. Esse erro precisa ser calculado para ser corrigido.

A Figura 95 mostra uma tabela de levantamento planimétrico, onde conforme podemos verificar que o somatório das coordenadas do leste (E) difere do oeste (W) no eixo X, e tal diferença também ocorre nas coordenadas norte (N) e sul (S) do eixo Y.

Figura 95 – Tabela de coordenadas parciais

| LINHA | AZIMUTE | DISTÂNCIA | COORDENADAS PARCIAIS | | | |
|-------------|--------------|-----------------|----------------------|------------------|------------------|------------------|
| | | | X | | Y | |
| | | | E(+) | W(-) | N(+) | S(-) |
| 1-2 | 40° 10' 00" | 878,10 | 566,386 | | 671,019 | |
| 2-3 | 71° 58' 40" | 439,60 | 418,032 | | 136,006 | |
| 3-4 | 326° 41' 20" | 702,65 | | 385,885 | 587,205 | |
| 4-5 | 344° 52' 30" | 385,75 | | 100,652 | 372,387 | |
| 5-6 | 225° 42' 10" | 607,90 | | 435,090 | | 424,546 |
| 6-7 | 215° 31' 30" | 611,95 | | 355,579 | | 498,043 |
| 7-1 | 160° 50' 40" | 894,50 | 293,516 | | | 844,973 |
| SOMA | | 4.520,45 | 1.277,934 | 1.277,206 | 1.766,617 | 1.767,562 |

Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 97)

A diferença dos somatórios de leste e oeste no eixo X é denominada **erro em X**, e seu valor é dado por:

$$e_x = \left| \sum E - \sum W \right|$$

Analogamente, a diferença dos somatórios de norte e sul no eixo Y é denominada **erro**

em Y , e seu valor é dado por:

$$ey = \left| \sum N - \sum S \right|$$

O erro linear absoluto (Ef) é dado pela fórmula:

$$Ef = \sqrt{ex^2 + ey^2}$$

Veremos agora que a fórmula do Erro linear absoluto é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras.

Proposição 3.2. *Dado uma tabela de coordenadas parciais de um levantamento planimétrico de um polígono fechado. Toda vez que o somatório das coordenadas de X ($\sum E$ e $\sum W$) e/ou o somatório das coordenadas de Y ($\sum N$ e $\sum S$) diferirem, o Erro linear absoluto (Ef) é dado pela fórmula:*

$$Ef = \sqrt{ex^2 + ey^2}$$

onde ex é a diferença em X e ey é a diferença em Y .

Demonstração. Tomamos um plano cartesiano onde o centro desse plano é o ponto inicial I de um levantamento planimétrico descrito na tabela de coordenadas parciais.

O total de deslocamentos para a direita do polígono é dado pelo valor $\sum E$ da tabela de coordenadas parciais, e para a esquerda $\sum W$ (relativo ao eixo X), para cima $\sum N$ e para baixo $\sum S$ (relativo ao eixo Y) desse plano cartesiano.

Como vimos anteriormente, uma poligonal fechada tem início e fim no mesmo ponto topográfico, ou seja, os deslocamentos a leste e oeste devem ser iguais, assim como para o norte e sul.

Tomando ex como o erro em X , onde $ex = |\sum E - \sum W|$ e, analogamente, tomando ey como o erro em Y , onde $ey = |\sum N - \sum S|$, temos um ponto $I'(ex;ey)$ como final desse polígono fechado.

Toda vez que $I'(ex;ey) = I(0;0)$ temos um levantamento topográfico perfeito, ou seja, os ângulos e medidas do polígono foram medidos com precisão e fecharam sem necessidade de correção.

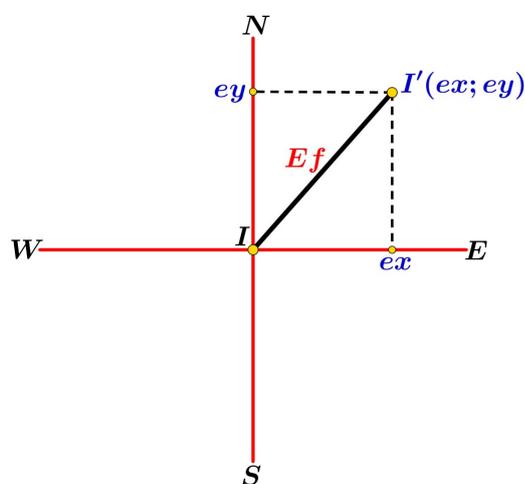
Caso isso não ocorra, ou seja, $I'(ex;ey) \neq I(0;0)$, temos um Erro linear absoluto (Ef), que precisará ser corrigido posteriormente para as coordenadas corrigidas.

O Erro linear absoluto é a distância entre os ponto I' e I , do plano cartesiano.

Note, pela Figura 96, que temos dois triângulos retângulos $\triangle IeyI'$ e $\triangle IexI'$, ambos com hipotenusa $Ef = \overline{II'}$.

Em ambos os triângulos temos catetos de medidas ex e ey .

Figura 96 – Projeção do Erro de Fechamento Linear no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria

Aplicando o teorema de pitágoras em qualquer um dos dois triângulos temos:

$$Ef^2 = ex^2 + ey^2 \implies Ef = \sqrt{ex^2 + ey^2}$$

□

3.2.4 CÁLCULO DA ÁREA DO POLÍGONO

Para o cálculo da área do polígono do levantamento planimétrico, por já ter todas as coordenadas dos pontos devidamente corrigidas, Pastana(2010) utiliza a Fórmula da área de Gauss, visto na Seção 2.7.3 do capítulo anterior.

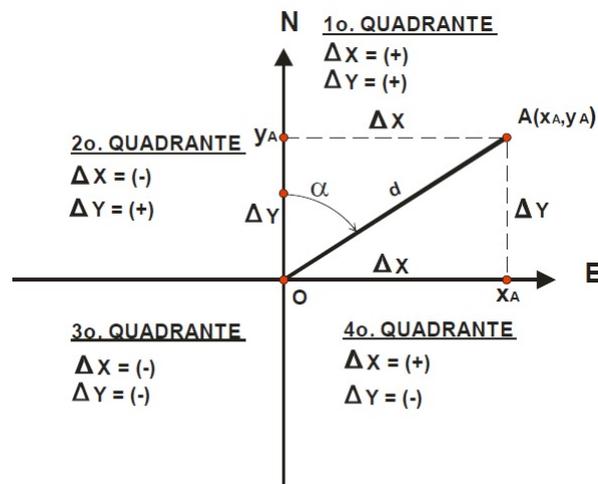
3.3 COORDENADAS RETANGULARES

Segundo Pastana(2010)(2010), se tivermos um sistema cartesiano (eixos perpendiculares num plano), qualquer ponto $A (X_A; Y_A)$ do plano é determinado pelas suas projeções X_A e Y_A sobre os eixos, sendo X_A a projeção no eixo das abscissas e Y_A a projeção no eixo das ordenadas.

A origem O divide ambos os eixos em dois segmentos; e os eixos dividem o plano em quatro (4) quadrantes, conforme Figura 97.

Veremos a seguir uma demonstração da fórmula de coordenadas retangulares, que nada mais são que a representação dos valores do deslocamento (ΔX e ΔY) de um ponto qualquer em relação à origem, dado um ângulo e uma distância.

Figura 97 – Coordenadas Retangulares



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 84)

Proposição 3.3. *Seja um ponto $A(X_A; Y_A)$ disposto num plano cartesiano de centro $O(0; 0)$, onde $(X_A; Y_A) \neq (0; 0)$; e um ângulo azimutal (rumo ou azimute) α de \overline{OA} em relação ao eixo \overline{OY} ; e ainda a distância $OA = d$. Chamando X_A a projeção de A no eixo das abscissas e Y_A a projeção de A no eixo das ordenadas, e analogamente, ΔX a distância horizontal de X_A à origem e ΔY a distância vertical de Y_A à origem. Vamos mostrar a fórmula para as coordenadas $(\Delta X_{O-A}$ e $\Delta Y_{O-A})$, conforme Figura 97.*

Demonstração. Dada as condições iniciais, analisando o triângulo retângulo $\Delta OY_A A$, reto em Y_A , e aplicando as definições de seno e cosseno em α temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\Delta X_{O-A}}{d} \implies \Delta X_{O-A} = d \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\Delta Y_{O-A}}{d} \implies \Delta Y_{O-A} = d \cdot \operatorname{cos} \alpha \quad (\text{II})$$

□

Para o levantamento topográfico, onde é feito a medição de vários alinhamentos, esse cálculo das coordenadas dos pontos é feito de maneira sequencial. E admite-se o primeiro ponto como a origem do plano cartesiano e faz o procedimento acima para todos os alinhamentos, mas em cada alinhamento é imaginado um plano cartesiano com centro no primeiro ponto do alinhamento. Veremos a seguir um exemplo para melhor entendimento.

Exemplo 3.4. Em um levantamento topográfico é feito a medida de dois alinhamentos (AB e

BC). Devemos calcular as coordenadas dos pontos B e C , dados os azimutes e distâncias abaixo:

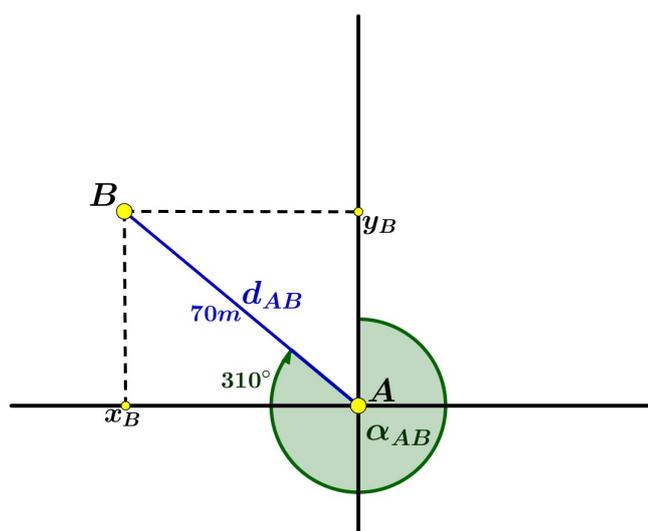
$$\begin{cases} Az_{AB} = 310^\circ \\ Az_{BC} = 70^\circ \\ d_{AB} = 70m \\ d_{BC} = 115m \end{cases}$$

Resolução:

Para os cálculos das coordenadas B e C adotamos a origem do plano cartesiano em A , logo suas coordenadas são $(0;0)$.

Calcularemos inicialmente as coordenadas de B ($X_B;Y_B$). Para isso temos $\alpha = \alpha_{AB} = Az_{AB}$, $d = d_{AB}$ e $\Delta X_{A-B} = X_B - X_A$. A Figura 98 ilustra o alinhamento AB no plano cartesiano.

Figura 98 – Alinhamento \overline{AB} no plano cartesiano



Fonte: Autoria própria

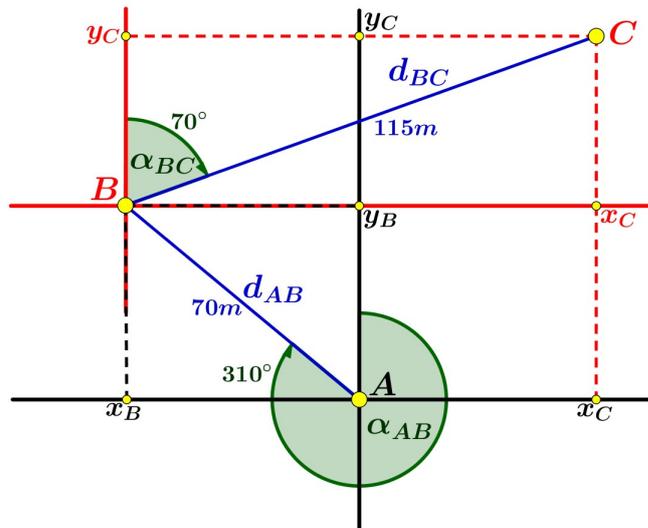
Usaremos a fórmula da coordenada (ΔX_{A-B}) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta X_{A-B} &= d_{AB} \cdot \text{sen } \alpha_{AB} \implies X_B - X_A = d_{AB} \cdot \text{sen } \alpha_{AB} \implies \\ X_B &= X_A + d_{AB} \cdot \text{sen } \alpha_{AB} = 0 + 70 \cdot \text{sen } (310^\circ) \simeq 70 \cdot (-0,76604) \simeq -53,62 \end{aligned}$$

Analogamente, para a fórmula da coordenada (ΔY_{A-B}) temos:

$$\begin{aligned} \Delta Y_{A-B} &= d_{AB} \cdot \text{cos } \alpha_{AB} \implies Y_B - Y_A = d_{AB} \cdot \text{cos } \alpha_{AB} \implies \\ Y_B &= Y_A + d_{AB} \cdot \text{cos } \alpha_{AB} = 0 + 70 \cdot \text{cos } (310^\circ) \simeq 70 \cdot (0,64279) \simeq 45,00 \end{aligned}$$

Para os cálculos das coordenadas de C ($X_C;Y_C$) colocaremos um plano cartesiano auxiliar de centro B e $\alpha = \alpha_{BC} = Az_{BC}$, $d = d_{BC}$ e $\Delta X_{B-C} = X_C - X_B$. A Figura 99 ilustra os alinhamentos AB e BC no plano cartesiano.

Figura 99 – Alinhamentos \overline{AB} e \overline{BC} no plano cartesiano

Fonte: Autoria própria

Usaremos a fórmula da coordenada (ΔX_{B-C}) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Delta X_{B-C} &= d_{BC} \cdot \text{sen } \alpha_{BC} \implies X_C - X_B = d_{BC} \cdot \text{sen } \alpha_{BC} \implies \\ X_C &= X_B + d_{BC} \cdot \text{sen } \alpha_{BC} = -53,62 + 115 \cdot \text{sen } (70^\circ) \simeq -53,62 + 115 \cdot 0,93969 \\ &\simeq -53,62 + 108,06 \simeq 54,44\end{aligned}$$

Analogamente, para a fórmula da coordenada (ΔY_{B-C}) temos:

$$\begin{aligned}\Delta Y_{B-C} &= d_{BC} \cdot \text{cos } \alpha_{BC} \implies Y_C - Y_B = d_{BC} \cdot \text{cos } \alpha_{BC} \implies \\ Y_C &= Y_B + d_{BC} \cdot \text{cos } \alpha_{BC} = 45 + 115 \cdot \text{cos } (70^\circ) \simeq 45 + 115 \cdot 0,34202 \\ &\simeq 45 + 39,33 \simeq 84,33\end{aligned}$$

⊗

3.4 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DADOS POR COORDENADAS

Na Topografia podemos encontrar novamente as aplicações da Lei dos senos e Lei dos cossenos no cálculo de distância entre dois pontos usando as coordenadas, conforme descreve (PASTANA, 2010, pg. 88). Vamos demonstrar essas fórmulas utilizando um rumo na direção NE , podendo essa demonstração ser generalizada para qualquer outra direção.

Proposição 3.5. Dado dois pontos pontos ($A = (x_A, y_A)$) e ($B = (x_B, y_B)$), além do rumo α formado por \overline{AB} (direção NE), vamos mostrar que a distância entre os dois pontos (d_{AB}) pode

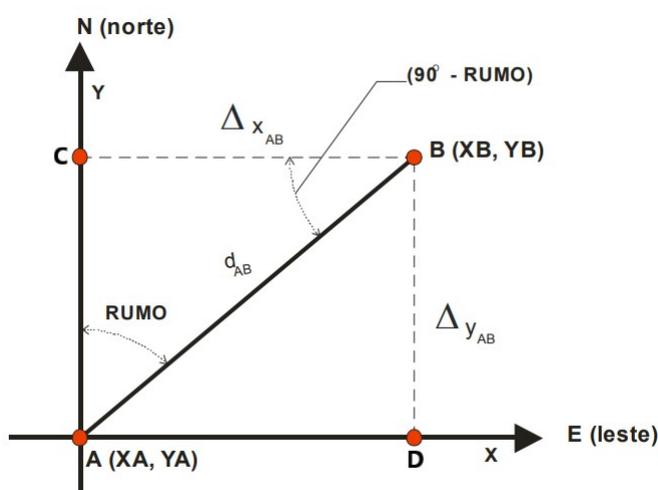
ser calculada das seguintes formas:

$$\frac{d_{AB}}{1} = \frac{\Delta X_{AB}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\Delta Y_{AB}}{(\text{sen } 90^\circ - \alpha)}$$

$$d_{AB} = \sqrt{\Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2}$$

Demonstração. Tomando um plano cartesiano com centro em A , chamaremos de C a projeção ortogonal de B no eixo AY (ordenadas) e de D a projeção ortogonal de B no eixo AX (abscissas). Temos ainda $\Delta X_{AB} = \overline{CB}$ e $\Delta Y_{AB} = \overline{DB} = \overline{AC}$ é, conforme mostra a Figura 100.

Figura 100 – Plano cartesiano de centro A e segmento \overline{AB}



Fonte: Autoria própria

Note que $\triangle ACB$ é um triângulo retângulo e pela Proposição 2.13 temos:

$$\begin{cases} \angle ACB = 90^\circ \\ \angle CAB = \alpha \end{cases} \implies \angle ABC = 90^\circ - \alpha$$

Temos ainda $\text{sen } \widehat{ACB} = \text{sen } 90^\circ = 1$ e $\text{cos } \widehat{ACB} = \text{cos } 90^\circ = 0$.

Aplicando a lei dos senos no $\triangle ABC$ temos:

$$\frac{d_{AB}}{1} = \frac{\Delta X_{AB}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\Delta Y_{AB}}{(\text{sen } 90^\circ - \alpha)} \quad (\text{I})$$

Aplicando a lei dos cossenos no $\triangle ABC$ temos:

$$d_{AB}^2 = \Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2 - \underbrace{2 \cdot X_{AB} \cdot X_{AB} \cdot 0}_0 = \Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{\Delta X_{AB}^2 + \Delta Y_{AB}^2} \quad (\text{II})$$

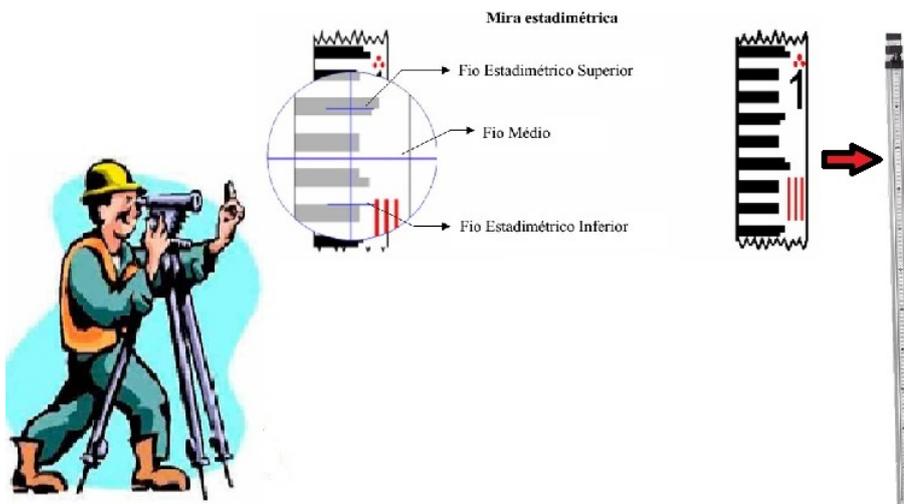
□

3.5 DISTÂNCIAS PARA TERRENOS PLANOS

Vejam a situação a seguir:

Aplicação na Topografia 3.6. *Numa atividade de Topografia em um terreno plano, utilizando o Nível Óptico (Figura 101), um técnico após nivelar o aparelho, faz as medidas as seguintes medidas dos fios estadimétricos: $FS = 2,785m$, $FM = 2,732m$ e $FI = 2,679m$.*

Figura 101 – Leitura com Nível Óptico



Fonte: Autoria própria

Qual a distância do Nível ótico até a régua?

Resolução:

Sabendo que a distância para terrenos planos com nível ótico pode ser calculada pela fórmula:

$$d = (FS - FI) \cdot k,$$

onde:

d = Distância do Nível Ótico ao ponto final

FS = Fio Estadimétrico Superior

FI = Fio Estadimétrico Inferior

k = Constante do aparelho fornecida pela fábrica (geralmente 100)

O técnico após fazer as medições executou o cálculo abaixo:

$$d = (FS - FI) \cdot k = (2,785 - 2,679) \cdot 100 = 0,106 \cdot 100 = 10,6m$$

3.5.1 DISTÂNCIA HORIZONTAL EM TERRENOS PLANOS - NÍVEL ÓTICO

O que o técnico em edificações que executa o cálculo anterior muitas vezes não sabe é que essa fórmula da Topografia utiliza a semelhança de triângulos para resolver esse problema, conforme demonstraremos a seguir.

Proposição 3.7 (Distância horizontal para terrenos planos - DH). *A Figura 102 ilustra o funcionamento do ponto de vista ótico da leitura de uma medida através do nível ótico.*

Temos um nível ótico estacionado no ponto P e a régua graduada no ponto Q, e o objetivo é calcular a distância horizontal (DH) entre eles.

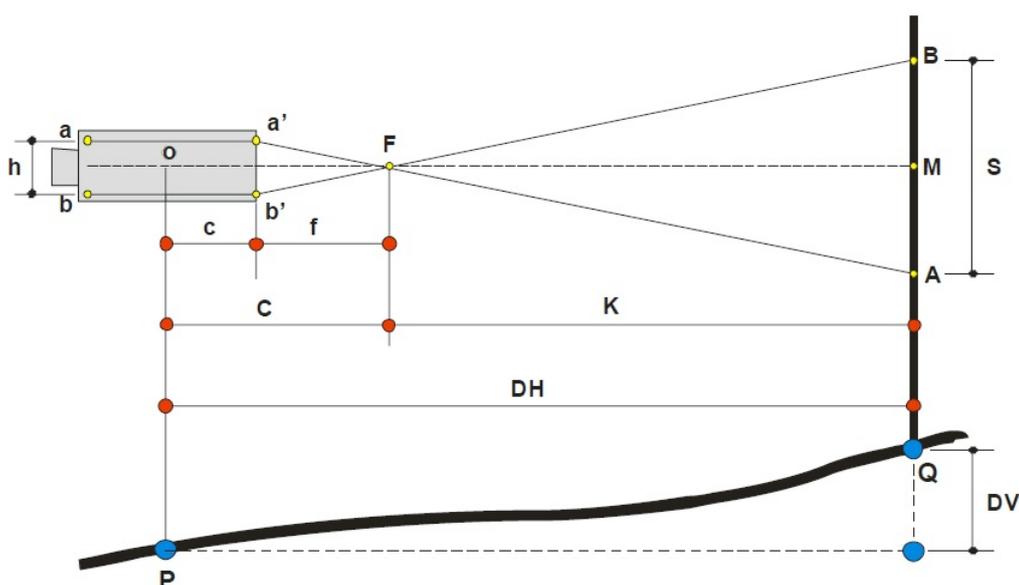
Do ponto P visa-se o ponto Q com o nível ótico devidamente instalado e nivelado, ou seja, com a luneta na posição horizontal. Procedese a leitura dos fios estadimétricos inferior (A), médio (M) e superior (B).

A distância horizontal entre os pontos será deduzida da relação existente entre os triângulos $\Delta a'b'F$ e ΔBAF , que são semelhantes e opostos pelo vértice F.

Tal afirmação dar-se-á se, e somente se, $\overline{a'b'} \parallel \overline{BA}$, para isso a régua graduada precisa estar totalmente na vertical.

Devemos mostrar que $DH = (100 \cdot S) + C$

Figura 102 – Ilustração de uma Leitura com Nível Ótico



Fonte: (PASTANA, 2010, PG. 152)

Demonstração. Da Figura 102 temos:

f = distância focal da objetiva

F = foco exterior à objetiva

c = distância do centro óptico do aparelho à objetiva

$C = c + f$ = constante de Reichembach

K = distância do foco à régua graduada

$S = AB = B - A$ = diferença entre as leituras do Fio Superior e Inferior

a' = limite superior da objetiva

b' = limite inferior da objetiva

$h = a' - b'$ = distância entre os limites da objetiva

Pela Proposição 2.18 temos que:

$$\frac{f}{h} = \frac{K}{S} \implies K = \frac{f \cdot S}{h} \quad (I)$$

Temos ainda, fornecido pelo fabricante do nível óptico, a seguinte relação:

$$h = \frac{f}{100}$$

Substituindo essa relação em (I) temos:

$$K = \frac{f \cdot S}{\frac{f}{100}} = \frac{f \cdot S}{1} \cdot \frac{100}{f} = 100 \cdot S$$

A distância horizontal é dada pela fórmula:

$$DH = K + C = (100 \cdot S) + C$$

Geralmente desprezamos o valor de C e nesse caso $DH = K$, logo

$$DH = (100 \cdot S)$$

□

Nem sempre é desejável desprezar esse valor, segundo Garcia a constante C é conhecida como constante de Reichenbach e assume valor $0cm$ para equipamentos com lunetas analíticas e valores que variam de $25cm$ a $50cm$ para equipamentos com lunetas aláticas.

Uma explicação bem detalhada, inclusive com demonstração e cálculos do porque desprezar o valor de C é feito por Borges(2013), que também detalha a demonstração anterior e explica que na verdade são duas constantes de Reichembach:

$$\frac{f}{h} = 100 \implies h = \frac{f}{100} \quad (\text{constante multiplicativa})$$

$$C = f + c = 0 \quad (\text{constante aditiva})$$

Como já foi explicado anteriormente, o valor de 100 (constante multiplicativa) e 0 (constante aditiva) é fornecido pelo fabricante do equipamento.

3.5.2 DISTÂNCIA HORIZONTAL EM TERRENOS PLANOS - TEODOLITO DIDÁTICO

Com o teodolito didático, que não utiliza lentes objetivas côncavas, o cálculo da distância é feito de maneira diferente, mas também utilizando semelhança de triângulos.

Proposição 3.8 (Distância horizontal com o teodolito didático - DH). *A Figura 103 ilustra o funcionamento ótico da leitura de uma medida através do teodolito didático.*

Temos então o teodolito didático estacionado no ponto P e a régua graduada no ponto Q, e o objetivo é calcular a distância horizontal (DH) entre eles. Do ponto P visa-se o ponto Q com o teodolito didático devidamente instalado e nivelado, ou seja, com a luneta na posição horizontal. Procede-se a leitura dos fios estadimétricos inferior (A), e superior (B).

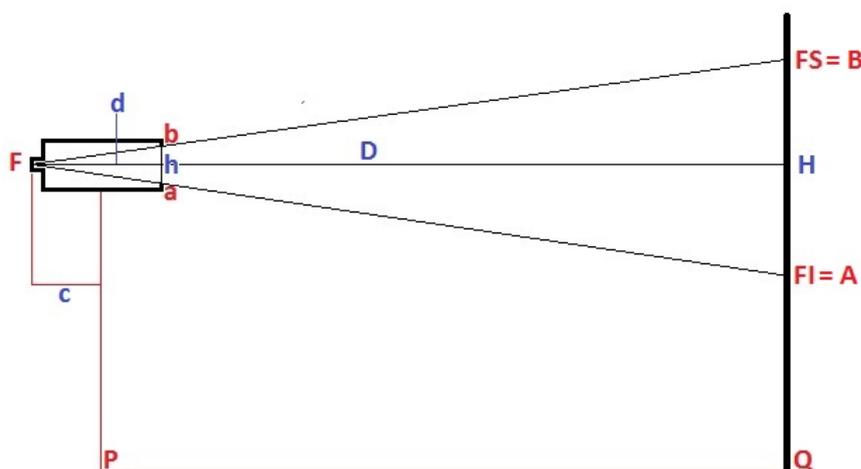
A distância horizontal entre os pontos será deduzida da relação existente entre os triângulos ΔbaF e ΔBAF , que são semelhantes pelo teorema 2.14 (TFP).

Tal afirmação dar-se-á se, e somente se, $\overline{ba} // \overline{BA}$, para isso a régua graduada precisa estar totalmente na vertical.

Devemos mostrar que

$$DH = (k \cdot H) - c$$

Figura 103 – Ilustração de uma Leitura com Teodolito Didático



Fonte: Autoria própria

Demonstração. Da Figura 103 temos:

F = foco na lente do olho do usuário

c = distância do centro do aparelho (ponto P) ao foco F

d = distância do foco à lente objetiva do teodolito

D = distância do foco à régua graduada

$H = AB = B - A$ = diferença entre as leituras do Fio Superior e Inferior

b = limite superior da objetiva

a = limite inferior da objetiva

$h = b - a$ = distância entre os limites da objetiva

Pela Proposição 2.18 temos que:

$$\frac{d}{h} = \frac{D}{H} \implies D \cdot h = d \cdot H \implies D = \frac{d \cdot H}{h} = \frac{d}{h} \cdot H$$

Note que d e h são constantes, tomaremos então $k = \frac{d}{h}$, daí segue:

$$D = k \cdot H$$

Para uma melhor aproximação da distância horizontal temos que tirar de D a distância do foco (F) até o ponto topográfico (P), e nesse caso, $DH = D - c$, portanto:

$$DH = (k \cdot H) - c$$

□

3.6 DISTÂNCIAS PARA TERRENOS INCLINADOS

Em terrenos com desnível podem ser realizados levantamentos planimétricos e altimétricos, e dependendo do equipamento e/ou situação várias fórmulas e procedimentos podem ser utilizados. A seguir veremos as deduções de algumas dessas fórmulas utilizando trigonometria do triângulo retângulo e geometria.

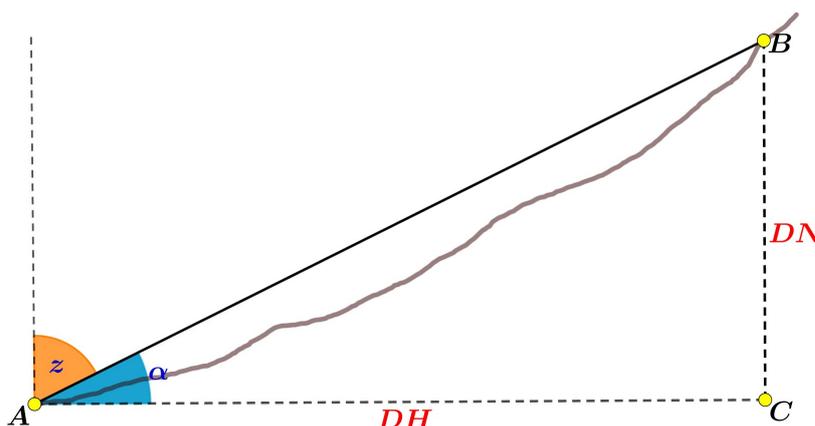
Proposição 3.9 (Distância Horizontal e Diferença de Nível). *Dado uma distância inclinada \overline{AB} e um ângulo zenital z , mostraremos a fórmula da distância horizontal (DH) e diferença de nível (DN) entre A e B.*

Demonstração. Denominando por C o centro de um plano cartesiano tal que o ponto A esteja no eixo das abcissas e o ponto B no eixo das ordenadas, temos assim um triângulo retângulo ($\triangle ACB$) reto em \hat{C} .

Como o ângulo zenital(z) é complementar ao ângulo horizontal(α), conforme a Figura 104, temos:

$$\alpha + z = 90^\circ \implies \alpha = 90^\circ - z.$$

Figura 104 – Distância horizontal (DH) e diferença de nível (DN) entre dois pontos



Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 7)

Aplicando a definição de seno e cosseno em $\triangle ACB$ temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{DN}{AB} \implies DN = \overline{AB} \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha &= \frac{DH}{AB} \implies DH = \overline{AB} \cdot \operatorname{cos} \alpha \end{aligned}$$

□

Na aplicação em Topografia 3.6 vimos a fórmula para cálculo da distância horizontal com o nível ótico, cabe ressaltar que essa fórmula é utilizada para terrenos planos. Para determinar a distância horizontal em visadas inclinadas, ou seja, em terrenos com declividade as fórmulas são:

$$\begin{aligned} DH &= 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha && (\hat{\text{Ângulo em relação à horizontal}}) \\ DH &= 100 \cdot S \cdot \operatorname{sen}^2 z && (\hat{\text{Ângulo em relação ao zênite}}) \end{aligned}$$

Proposição 3.10. *Temos um teodolito estacionado no ponto P e a régua graduada no ponto Q, em uma visada ascendente de um plano inclinado, e o objetivo é calcular a distância horizontal (DH) entre eles. Do ponto P visa-se o ponto Q com o teodolito devidamente instalado e nivelado. Procede-se a leitura dos fios estadimétricos inferior (A'), e superior (B), conforme a Figura 105. Para o cálculo utilizando a fórmula $DH = 100 \cdot s$ (Aplicação em Topografia 3.6) a régua deveria ser paralela ao segmento $\overline{AB'}$, como essa inclinação é difícil de maneira manual temos de chegar em uma fórmula que utilize as medidas da régua vertical ($A'B = S$).*

Demonstração. Numa visada ascendente o ângulo zenital é sempre menor que 90° . Dessa forma temos que:

$$z + \alpha = 90^\circ \implies \alpha = 90^\circ - z.$$

Se a visada fosse descendente ($z > 90^\circ$) teríamos:

$$90^\circ + \alpha = z \implies \alpha = z - 90^\circ.$$

Pela Aplicação em Topografia 3.6 e fazendo nesse caso a distância inclinada (DI) assumir o valor calculado na fórmula e $S' = B' - A$ temos:

$$DI = C \cdot S' \implies DI = 100 \cdot S' \quad (*)$$

Note que $\triangle BB'M$ é retângulo em $\widehat{B'}$ e da mesma forma $\triangle A'AM$ é retângulo em $\widehat{A'}$. Note ainda que o ângulo de inclinação α em relação à horizontal é congruente à inclinação de AB' em relação à vertical ($\overline{A'B}$). Dessa forma $\angle BMB' = \angle A'MA = \alpha$.

Aplicando a definição de cosseno nos triângulos $\triangle BB'M$ e $\triangle AA'M$ temos:

$$\cos \alpha = \frac{MB'}{MB} \implies MB' = MB \cdot \cos \alpha \quad (\triangle BB'M)$$

$$\cos \alpha = \frac{MA}{MA'} \implies MA = MA' \cdot \cos \alpha \quad (\triangle AA'M)$$

Observando a Figura 105 temos que $S' = AB'$ e $S = A'B$, daí segue:

$$S' = MA + MB' = MA' \cdot \cos \alpha + MB \cdot \cos \alpha = (MA' + MB) \cdot \cos \alpha = S \cdot \cos \alpha \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*) temos:

$$DI = C \cdot S' = 100 \cdot S \cdot \cos \alpha \quad (***)$$

Observando a Figura 105 vemos que o triângulo retângulo $\triangle oNM$ é reto em \widehat{N} , e aplicando a definição de cosseno temos:

$$\cos \alpha = \frac{oN}{oM} \implies \cos \alpha = \frac{DH}{DI} \implies DH = DI \cdot \cos \alpha$$

Substituindo (***) na equação acima temos:

$$DH = 100 \cdot S \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha \quad (I)$$

Observando a Figura 105 é fácil verificar que $\angle oMN = z$, e pelas relações entre seno e cosseno temos:

$$\cos \alpha = \text{sen} (90^\circ - \alpha) = \text{sen } z$$

Substituindo esse último valor em (I) temos:

$$DH = 100 \cdot S \cdot \text{sen}^2 z \quad (\text{II})$$

□

Também é possível, utilizando a mesma figura da demonstração anterior deduzir a fórmula de cálculo de distância vertical para visadas inclinadas, que segundo (PASTANA, 2010, pg. 155) é:

$$DV = 50 \cdot S \cdot \text{sen} 2\alpha$$

Antes de demonstrá-la precisamos de um valor auxiliar que mostraremos na observação a seguir.

Observação 3.11. *Temos da trigonometria que $\text{sen}(a + b) = \text{sen} a \cdot \cos b + \text{sen} b \cdot \cos a$.*

Tomando $a = b = \alpha$ temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha + \alpha) &= \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \implies \text{sen} 2\alpha = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \\ \implies \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{\text{sen} 2\alpha}{2} \end{aligned}$$

Proposição 3.12. *A Figura 105 ilustra a leitura de uma medida num plano inclinado. Utilizaremos os valores que acharmos convenientes para a demonstração, além dos resultados da Proposição 3.10. Vamos mostrar que a distância vertical (DV), também chamada diferença de nível entre os pontos P e Q é dado pela fórmula:*

$$DV = 50 \cdot S \cdot \text{sen} 2\alpha$$

onde $S = A'B$ e α é o complementar do ângulo zenital(z) lido.

Demonstração. Pela Figura 105 e aplicando a definição de tangente no ΔoNM temos:

$$\tan \alpha = \frac{MN}{oN} \implies \tan \alpha = \frac{DV}{DH} \implies DV = DH \cdot \tan \alpha$$

Substituindo o valor de DH da Aplicação na Topografia 3.10 temos:

$$DV = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha$$

Pela relação (IV) da Subseção 2.6.2 temos $\tan \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, substituindo na equação acima temos:

$$DV = 100 \cdot S \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 100 \cdot S \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

Pela Observação 3.11 e substituindo na equação acima temos:

$$DV = 100 \cdot S \cdot \frac{\text{sen} 2\alpha}{2} = 50 \cdot S \cdot \text{sen} 2\alpha$$

□

Exemplo 3.13. Com os elementos da planilha abaixo (Figura 106) calcule as distâncias horizontais (DH), distância vertical (DV) e cotas dos pontos.

Figura 106 – Tabela de levantamento altimétrico

| Estaca | Ponto Visado | Leitura do Círc. Hor. | Leituras de mira | | | Ângulo Zenital (Z) | DH | DV | Cota |
|--------|--------------|-----------------------|------------------|-------|-------|--------------------|----|----|--------|
| | | | LI | LM | LS | | | | |
| A/1,75 | | | | | | | | | 50,000 |
| | 1 | | 1,100 | 1,745 | 2,390 | 97° 47' | | | |
| | 2 | | 1,000 | 1,740 | 2,480 | 101° 25' | | | |
| | 3 | | 0,700 | 1,615 | 2,530 | 81° 27' | | | |
| | 4 | | 1,000 | 1,805 | 2,610 | 84° 23' | | | |

Fonte: (PASTANA, 2010, pg. 158)

Para os cálculos da cota usa-se a fórmula:

$$Cota_i = Cota_{i-1} + AI + DV + LM$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} Cota_i : \text{cota a calcular} \\ Cota_{i-1} : \text{cota anterior} \\ AI : \text{altura do instrumento} \end{array} \right.$$

Para o exercício temos Cota inicial ($Cota_0$) = 50,00 e $AI = 1,75m$.

Resolução:

Para o cálculo da distância horizontal (DH) e distância vertical (DV) usaremos as fórmulas:

$$DH = 100 \cdot S \cdot \text{sen}^2 Z$$

$$DV = 50 \cdot S \cdot \text{sen} 2Z$$

onde $S = LS - LI$

Para o Ponto visado 1 os cálculos e resultados foram:

$$DH = 100 \cdot (2,390 - 1,100) \cdot \text{sen}^2 (97^\circ 47') \simeq 126,63$$

$$DV = 50 \cdot (2,390 - 1,100) \cdot \text{sen} 2(97^\circ 47') \simeq -17,31$$

$$Cota_1 = 50,000 + 1,75 + (-17,31) + 1,745 = 36,185$$

Para o Ponto visado 2 os cálculos e resultados foram:

$$DH = 100 \cdot (2,480 - 1,000) \cdot \text{sen}^2 (101^\circ 25') \simeq 142,20$$

$$DV = 50 \cdot (2,480 - 1,000) \cdot \text{sen} 2(101^\circ 25') \simeq -28,72$$

$$Cota_2 = 36,185 + 1,75 + (-28,72) + 1,740 = 10,955$$

Para o Ponto visado 3 os cálculos e resultados foram:

$$DH = 100 \cdot (2,530 - 0,700) \cdot \text{sen}^2(81^\circ 27') \simeq 178,96$$

$$DV = 50 \cdot (2,530 - 0,700) \cdot \text{sen} 2(81^\circ 27') \simeq 26,90$$

$$Cota_3 = 10,955 + 1,75 + 26,90 + 1,615 = 41,220$$

Para o Ponto visado 4 os cálculos e resultados foram:

$$DH = 100 \cdot (2,610 - 1,000) \cdot \text{sen}^2(84^\circ 23') \simeq 159,46$$

$$DV = 50 \cdot (2,610 - 1,000) \cdot \text{sen} 2(84^\circ 23') \simeq 15,68$$

$$Cota_4 = 41,220 + 1,75 + 15,68 + 1,805 = 60,455$$

Figura 107 – Tabela de levantamento altimétrico após os cálculos

| Estaca | Ponto Visado | Leitura do Círc. Hor. | Leituras de mira | | | Ângulo Zenital (Z) | DH | DV | Cota |
|--------|--------------|-----------------------|------------------|-------|-------|--------------------|--------|--------|--------|
| | | | LI | LM | LS | | | | |
| A/1,75 | | | | | | | | | 50,000 |
| | 1 | | 1,100 | 1,745 | 2,390 | 97° 47' | 126,63 | -17,31 | 36,185 |
| | 2 | | 1,000 | 1,740 | 2,480 | 101° 25' | 142,20 | -28,72 | 10,955 |
| | 3 | | 0,700 | 1,615 | 2,530 | 81° 27' | 178,96 | 26,90 | 41,220 |
| | 4 | | 1,000 | 1,805 | 2,610 | 84° 23' | 159,46 | 15,68 | 60,455 |

Fonte: adaptação de (PASTANA, 2010, pg. 158)



Em (BORGES, 2013, pg. 24) tem um método para o cálculo de distâncias horizontais em terrenos inclinados denominado Método das rampas. E descreve o procedimento:

Proposição 3.14 (MÉTODO DAS RAMPAS). *O teodolito com centro ótico em A visa para uma régua graduada (mira), colocada em B com duas inclinações da luneta, α_1 e α_2 ; estes ângulos são medidos, junto com as leituras l_1 e l_2 , na mira.*

A distância horizontal (H) é obtida pela seguinte fórmula:

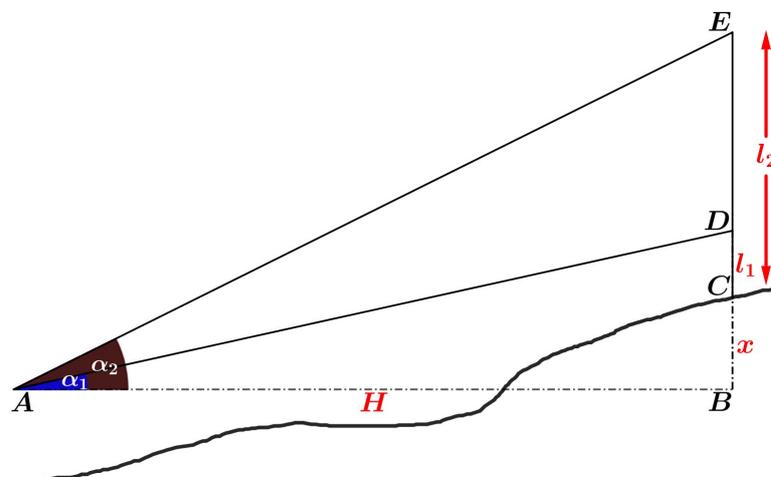
$$H = \frac{l_2 - l_1}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}$$

Demonstração. Chamaremos de D a posição da leitura l_1 na régua e E a posição da leitura l_2 na régua.

Seja r uma reta vertical que contém os pontos D e E da régua. Chamaremos de B a projeção ortogonal de A sobre a reta r .

Note que a declividade do terreno não permite que a régua encoste em B , chamaremos de C o ponto que a régua encosta no solo, sendo assim, conforme a Figura 108 temos:

Figura 108 – Triangularização de uma leitura pelo método das rampas



Fonte: Autoria própria

$$\left\{ \begin{array}{l} x = BC \\ l_1 = CD \\ l_2 = CE \\ H = AB \\ \angle BAD = \alpha_1 \\ \angle BAE = \alpha_2 \end{array} \right.$$

Aplicando a definição de tangente em α_1 e α_2 temos:

$$\tan \alpha_1 = \frac{(x + l_1)}{H} \implies x + l_1 = H \cdot \tan \alpha_1 \implies x = H \cdot \tan \alpha_1 - l_1 \quad (\text{I})$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{(x + l_2)}{H} \implies x + l_2 = H \cdot \tan \alpha_2 \implies x = H \cdot \tan \alpha_2 - l_2 \quad (\text{II})$$

Igualando (II) e (I) temos:

$$\begin{aligned} H \cdot \tan \alpha_2 - l_2 &= H \cdot \tan \alpha_1 - l_1 \implies H \cdot \tan \alpha_2 - H \cdot \tan \alpha_1 = l_2 - l_1 \\ \implies H \cdot (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) &= l_2 - l_1 \implies H = \frac{l_2 - l_1}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \end{aligned}$$

□

3.7 INCLINAÇÃO DO TERRENO E DECLIVIDADE

Uma aplicação das relações trigonométricas na altimetria é o cálculo de inclinação de um terreno e o percentual de declividade. Esse cálculo é muito importante para cálculos de caimento de telhados, rampas de acessibilidade, irrigação de plantações, entre outros usos da topografia.

Proposição 3.15. Dada uma distância horizontal (DH) e distância vertical (DV) entre os dois pontos de um alinhamento \overline{AB} , conforme Figura 109, podemos calcular a inclinação (em graus) e declividade (em percentual) desse alinhamento através das fórmulas:

$$\text{Inclinação} = \hat{A} = \alpha \quad (^\circ)$$

$$\text{Declividade} = \tan \alpha \cdot 100 \quad (\%)$$

Demonstração. Tendo os pontos de um alinhamento inclinado \overline{AB} e um ponto C como a projeção ortogonal de B na reta horizontal que contém o ponto A temos um triângulo retângulo $\triangle ACB$, reto em \hat{C} , conforme Figura 109.

No triângulo $\triangle ACB$ temos $DV = BC$ e $DH = AC$.

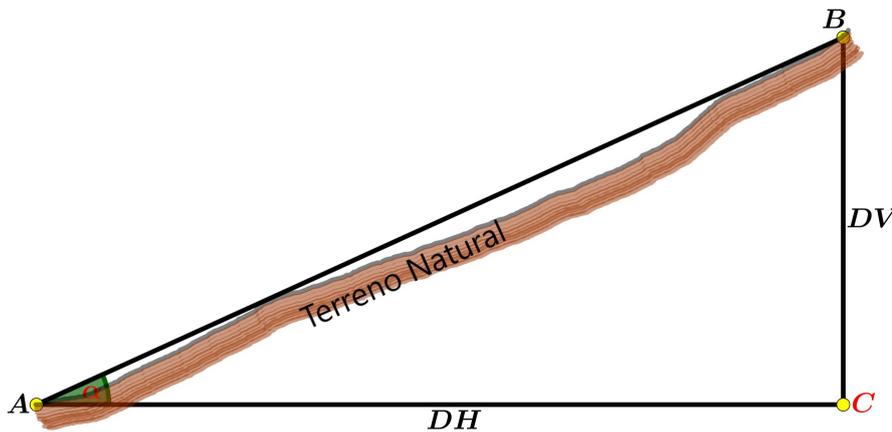
Como a inclinação é o ângulo do alinhamento AB em relação à horizontal e a declividade (D) é o percentual dessa inclinação, ambos podem ser deduzidos diretamente da definição de tangente em $\triangle ACB$, logo:

$$\tan \alpha = \frac{DV}{DH} \implies \alpha = \arctan \frac{DV}{DH} \quad (\text{I})$$

$$D = \tan \alpha \cdot 100 = \frac{DV}{DH} \cdot 100 \quad (\text{II})$$

□

Figura 109 – Terreno inclinado - Inclinação e declividade



Fonte: Autoria própria

4 CONCLUSÃO

A idéia original do trabalho seria partir da Topografia para o estudo da matemática do ensino médio, mas como envolve conteúdos diversos em cada fórmula percebemos que ficaria mais didático e absorvível se partíssemos da matemática para a topografia. Escolhemos então a trigonometria e geometria do primeiro ano do ensino médio como base do conteúdo abordado nessa dissertação.

No decorrer do trabalho investigamos muitas aplicações da topografia oriundas da necessidade de medir grandes distâncias e foi possível perceber a evolução da humanidade através das grandes obras arquitetônicas da antiguidade, das aventuras da navegação, das construções modernas e na resolução dos mais variados problemas da sociedade em cada época, e os conhecimentos topográficos foram muito aplicados para encontrar a solução.

Outra observação importante é que os equipamentos utilizados na topografia evoluíram muito, dos esticadores de corda no Egito antigo aos teodolitos eletrônicos e estações totais do século XXI. Porém, muitos dos equipamentos modernos ainda utilizam esses conceitos primitivos para seu funcionamento: o nível e o prumo, por exemplo, ainda são comuns em vários desses instrumentos. E nos softwares modernos que nos economizam milhares de cálculos, tem por trás dessa tecnologia a mesma geometria e trigonometria abordadas no trabalho. O conhecimento sobre esses conceitos é necessário também para poder utilizar os equipamentos, executar medidas de forma correta e interpretar os resultados obtidos, observando se são possíveis.

A Topografia, que é uma ciência importante nas atividades agrárias e de engenharia, é toda fundamentada em conceitos matemáticos. E se torna portanto uma oportunidade de contextualizar e propiciar a interação do aluno com a ciência. Na sala-de-aula, costumeiramente, o professor é indagado por alunos desmotivados e desinteressados por conteúdos como seno, cosseno e tangente: *“professor, para que aprender isso se não vou usar?”*. Esse trabalho buscou propor aos professores motivarem seus alunos a entender e aplicar esses conteúdos na prática, e dar uma resposta à pergunta anterior.

O manual do uso do Teodolito na matemática é um complemento importante a esse trabalho, pois é fruto de muita pesquisa e estudo na criação de materiais que buscaram mostrar aos alunos que a trigonometria e geometria do primeiro ano do ensino médio é muito aplicado em concursos e vestibulares e na solução de problemas cotidianos. Uma árvore, o prédio da escola, a rua e um rio passam a ser, então, um objeto da sala-de-aula, e o cálculo de alturas e distâncias uma prática divertida e interessante.

O teodolito didático é um projeto embrionário do autor com outros professores, que com o advento da impressora 3D, buscam proporcionar uma ferramenta didática poderosa nesse processo de formação do conhecimento pelo aluno. A internet disponibiliza muitos teodolitos,

dos mais diversos preços e utilidades, e a grande contribuição desse modelo é pensar numa base horizontal plana para fixação desse teodolito, inclusive com nível e parafusos calantes, permitindo aproximar da realidade do levantamento planimétrico da topografia, que utiliza medidas em escala sobre um terreno plano.

Durante a elaboração deste trabalho, foram feitas consultas a diversos livros didáticos, para observar como os conteúdos trabalhados aqui são apresentados. Muitos trazem os conteúdos desassociados de aplicações reais, embora a maioria traga situações problema e questões de provas e concursos. Muitos outros trazem parte da história matemática para introduzirem conteúdos mas, em geral, uma explicação da utilização real ou antiga, do conteúdo em si, é pouco abordada. Em raras situações são propostas atividades práticas envolvendo os alunos para que possam aplicar e discutir os conteúdos estudados na prática, formando assim, em cada um deles, através da vivência, o seu aprendizado.

Para que um determinado objeto se torne objeto de conhecimento é imprescindível que o aluno esteja mobilizado para conhecê-lo. É preciso que o aluno tenha mobilidade para tal, tendo a intenção de conhecer esse objeto desconhecido (VASCONCELOS, 1999).

REFERÊNCIAS

- ABRAHÃO, R. **A evolução da topografia através dos tempos**. Disponível em: <http://geoeasy.com.br/blog/?p=1202>, 2010, Acesso em: 31 mar. 2018.
- ARAÚJO, C. A. S. **Apostila – Topografia Prática**. Caçapava do Sul: UNIPAMPA - Campus Caçapava do Sul, 2009.
- ASSMANN, H. **Reencantar a educação: rumo à sociedade aprendente**. Petrópolis-RJ: Vozes, 1998.
- BARROSO, J. M. **CONEXÕES COM A MATEMÁTICA**. São Paulo: Moderna, 2010. v. 1.
- BORGES, A. d. C. **TOPOGRAFIA Aplicada à Engenharia Civil**. São Paulo: Blucher, 2013. v. 1.
- CORRÊA, I. C. S. **Instrumentos de Topografia. Recordando sua história**. Porto Alegre: Departamento de Geodésia – IG/UFRGS, 2008.
- CORRÊA, I. C. S. **A história da Agrimensura**. Porto Alegre: Departamento de Geodésia – IG/UFRGS, 2009.
- DANTE, L. R. **MATEMÁTICA: Contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010. v. 1.
- DANTE, L. R. **MATEMÁTICA: Contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2013. v. 1.
- ESCOLA, B. **Escala1**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/escalas.htm>, 2017, Acesso em: 14 mar. 2018.
- FERREIRA, A. B. d. H. **Miniaurélio: o minidicionário da língua portuguesa**. Curitiba: Positivo, 2004.
- FERREIRA, L. d. S. **Como o Teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Santa Cruz**. Ilhéus:, 2017.
- FOGAÇA, J. **CONTEXTUALIZAÇÃO**. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/trabalho-docente/contextualizacao.htm>, 2016, Acesso em: 28 mai. 2018.
- GEOGRAFALANDO. **Escala**. Disponível em: <http://geografalando.blogspot.com.br/2013/03/escalas-geografica-exercicios-de.html>, 2017, Acesso em: 22 dez. 2017.
- HYPERPHYSICS. **gps**. Disponível em: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/gps.html>, 2018, Acesso em: 22 abr. 2018.
- MAST, M. d. A. e. C. A. **Teodolito: Atualidade**. Disponível em: http://site.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito_atualidade.html, 2010, Acesso em: 02 abr. 2018.
- PAIVA, M. **MATEMÁTICA**. São Paulo: Moderna, 2009. v. 1.

PASTANA, C. E. T. **Topografia I e II: Anotações de aula**. Marília: UNIMAR - Faculdade de Engenharia, Arquitetura e Tecnologia, 2010.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. domínio público, 2018.

RIBEIRO, J. **MATEMÁTICA: Ciência, linguagem e tecnologia**. São Paulo: Scipione, 2010. v. 1.

ROUSSEAU, C. **MATEMÁTICA E ATUALIDADE - COLEÇÃO PROFMAT**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. v. 1.

SILVA C.X.; BARRETO, B. **MATEMÁTICA: Aula por Aula**. São Paulo: FTD, 2005. v. 1.

TUTORBRASIL. **Teorema de Herão**. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=547>, 2018, acesso em: 28 mar. 2018.

UFG-GO. **Prova da Segunda Etapa - PS2007, questão 23**. domínio público, 2007.

UFPB. **Prova da 2ª série do ensino médio, questão 27**. domínio público, 2003.

VASCONCELOS, C. d. S. **Construção do conhecimento em sala de aula**. São Paulo: Libertad, 1999.

WIKIPEDIA. **Astrolábio**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Astrolábio>, 2014, Acesso em: 02 abr. 2018.

WIKIPEDIA. **Balestilha**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Balestilha>, 2014, Acesso em: 02 abr. 2018.

WIKIPEDIA. **Chorobate**. Disponível em: <https://es.wikipedia.org/wiki/Chorobate>, 2016, Acesso em: 02 abr. 2018.

WIKIPEDIA. **Teodolito**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teodolito>, 2018, Acesso em: 02 abr. 2018.

WIKIPEDIA. **Fórmula da área de Gauss**. Disponível em: https://es.wikipedia.org/wiki/Fórmula_del_Área_de_Gauss, 2018, Acesso em: 29 mar. 2018.