**COLÉGIO PEDRO II**

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Fernando Vicente da Costa

# **COMBINATÓRIA:** Uma proposta para o sexto ano do ensino fundamental

Rio de Janeiro
2018

Fernando Vicente da Costa

**COMBINATÓRIA:** Uma proposta para o sexto ano do ensino fundamental

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do

Orientadora: Prof(a). Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro
2018

**COLÉGIO PEDRO II**
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA**
**BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER**
**CATALOGAÇÃO NA FONTE**

C837 Costa, Fernando Vicente da
Combinatória: uma proposta para o sexto ano do ensino fundamental / Fernando Vicente da Costa. – Rio de Janeiro, 2018.
78 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Marilis Bahr Karam Venceslau.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Resolução de problemas. 4. Ensino fundamental. I. Venceslau, Marilis Bahr Karam. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Fernando Vicente da Costa

**COMBINATÓRIA:** Uma proposta para o sexto ano do ensino fundamental

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

_________________________________________

Orientadora: Dra. Marilis Bahr Karam Venceslau
Colégio Pedro II

_________________________________________

Dra. Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Colégio Pedro II

_________________________________________

Dr. Vinícius Leal do Forte
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
2018

## AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível. Principalmente por ter me dado paciência e forças para superar todas e qualquer dificuldade. Bendito seja o nome do Senhor.

Aos meus pais, João e Joselita pela educação, ensinamentos, conselhos e pelo incentivo que nunca faltou e apoio constante.

À minha noiva Gleice que esteve ao meu lado sempre me motivando e não medindo esforços para que eu chegasse a essa nova etapa da minha vida.

Ao meu irmão Maxwell que é meu grande amigo sempre ao meu lado, me aconselhando com muito carinho e apoio.

À minha cunhada Mariane e meu sobrinho Max pelo carinho e incentivo.

A todos os membros da Primeira Igreja Batista em Austin que me ajudaram em orações e me ajudaram a ser o que eu sou.

Aos meus amigos que me ajudaram diretamente ou indiretamente na conclusão desse curso.

À professora Marilis, minha orientadora, por seus ensinamentos, confiança e paciência nas respectivas supervisões deste trabalho, sempre com carinho.

A todos os professores do PROFMAT pelo conhecimento transmitido ao longo do curso, sempre com muita dedicação e paciência que contribuiu muito para a minha formação.

A todos os meus colegas de turma, sempre estavam dispostos a me ajudar, ensinando e incentivando em todos os momentos.

A Deus toda a honra e toda a glória.

# RESUMO


COSTA, Fernando Vicente da. **Combinatória:** Uma proposta para o sexto ano da ensino fundamental. 2018. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

O estudo da Análise Combinatória é um conteúdo importante para o ensino de Matemática e restrito ao Ensino Médio. Esse é um dos motivos pelos quais os alunos do Ensino Médio têm demonstrado grandes dificuldades no seu aprendizado. Este trabalho apresenta uma proposta para que esse conteúdo seja agregado ao sexto ano do Ensino Fundamental de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), por meio do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), sem a utilização de fórmulas. Somente com o uso desta ferramenta estruturada e fundamentada o aluno será capaz de se apropriar desse saber de forma adequada. Serão ainda salientados alguns aspectos importantes sobre o conhecimento prévio de cada aluno e propostas atividades para consolidar o aprendizado deste tema. A metodologia utilizada será a Resolução de Problemas que é um instrumento muito útil e eficiente no ensino da Matemática. Uma importante contribuição desse trabalho é refletir sobre a possibilidade de uma abordagem mais ampla de Análise Combinatória que possibilite ao estudante a construção de seu conhecimento sobre o assunto de forma mais criativa e autônoma.



**Palavras-chave:** Análise Combinatória. Ensino Fundamental. Resolução de Problemas.

## ABSTRACT

COSTA, Fernando Vicente da. **Combinatória:** Uma proposta para o sexto ano da ensino fundamental. 2018. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

The study of combinatorial analysis is one of the most fascinating contents of Mathematics, although it is being presented mechanically through the excessive use of formulas. This is one of the reasons that high school students have shown great difficulties in their learning. This research presents a proposal for this content to be added to the sixth year of primary education according to the National Curricular Parameters (NCP), through the Fundamental Principle of Counting (PFC), without the use of formulas. Only with the use of this structured and reasoned tool, the students will be able to have this acknowledgment appropriately. It will also highlight some important aspects about the previous acknowledgment of each student and proposed activities to consolidate the learning of this topic. In the last chapter, a selection of problems of the Brazilian Mathematical Olympiads will be presented. The methodology used will be Problem Solving which is a very useful and efficient instrument about the teaching of Mathematics. In this way, the teacher can enrich more the educational practice in the classroom, stimulating the creativity and providing a more pleasant learning to the student.



**Keywords:** Combinatorial Analysis. Elementary School. Problem Solving.

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Em uma sala há quatro cadeiras. De quantas maneiras distintas quatro pessoas podem sentar-se nestas cadeiras? Uma criança foi a uma papelaria com sua mãe para comprar um caderno. Nessa papelaria há cadernos em dois formatos: grandes e pequenos; e com três tipos de folha: quadriculada, pautada e sem pauta. Quantas são as maneiras distintas para ela escolher seu caderno? Em uma escola do Ensino Fundamental, haverá um campeonato de xadrez onde participarão os alunos das turmas de oitavo e nono anos. Cada turma terá dois participantes. Se em uma das turmas há 10 alunos que jogam xadrez, de quantas maneiras distintas pode-se escolher dois alunos para representar esta turma? Problemas desses tipos fazem parte do cotidiano de qualquer pessoa desde sua infância e para resolvê-los devem-se empregar conceitos que permitam contar certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem necessariamente enumerar seus elementos. Tais conceitos são as permutações, arranjos e combinações e fazem parte da Análise Combinatória. Esses tipos de problemas exigem raciocínio lógico e muita criatividade para serem solucionados (MORGADO et al, 2006).

O conteúdo de Análise Combinatória tratado na Educação Básica está concentrado no segundo ano do Ensino Médio. E, baseando-se na experiência profissional e no discurso de professores de Matemática trata-se de um conteúdo de difícil compreensão para os alunos do Ensino Médio, embora os problemas de contagem necessitem, para sua resolução, basicamente das quatro operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Além disso, muitos professores do ensino básico consideram a Combinatória e a Probabilidade assuntos difíceis, pois, se é que foram assuntos abordados na formação desses professores, isto geralmente se deu de uma maneira complexa e formal (LOPES, 2004).

Além do mais, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p.19) os conteúdos não devem ser tratados numa rígida sucessão linear e nem em compartimentos estanques. Ao invés disso, deve-se abordar os conteúdos de forma a favorecer e a destacar as conexões que o aluno possa fazer entre a Matemática e as demais disciplinas, entre ela e o seu cotidiano, e as conexões que possam ser estabelecidas entre os diferentes assuntos da Matemática.

Considerando-se o exposto, então por que não tratar o assunto Combinatória de uma forma mais natural para o educando? Por que não abordar este assunto paulatinamente, iniciando o seu ensino no Ensino Fundamental, tratando de situações-problema que façam parte do cotidiano do aluno, com a progressão ano a ano do assunto, e aprofundando-o no Ensino Médio?

Portanto, o objetivo deste trabalho é propor aos professores uma abordagem deste conteúdo para o sexto ano do Ensino Fundamental. Mas, por que inserir a Análise Combinatória no sexto ano do Ensino Fundamental?

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), elencou uma série de habilidades que os alunos precisam desenvolver no Ensino Fundamental, entre elas: a habilidade de resolver problemas simples de contagem que necessitem do princípio multiplicativo para a sua resolução, como obter o número de agrupamentos possíveis dispondo cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. Esta habilidade está descrita na Unidade Temática Números para o quinto ano.

A BNCC (2018) propõe também que haja a progressão ano a ano do assunto – esta progressão é baseada na complexidade das situações- problema propostas e no entendimento e emprego de novas ferramentas, necessitando-se de da execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas para resolvê-las. Porém, o princípio multiplicativo aparece novamente somente na Unidade Temática Probabilidade e Estatística, no oitavo ano, como ferramenta para o cálculo da probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral.

Por outro lado, o princípio multiplicativo envolve apenas a operação de multiplicação –assunto amplamente tratado no sexto ano – e é a base da Análise Combinatória. Isso permite que sejam introduzidas situações-problemas envolvendo outros tipos de agrupamentos tais como: permutações, arranjos e combinações cujas resoluções utilizem apenas o raciocínio lógico matemático e o princípio multiplicativo. Nesses casos, para facilitar o entendimento do indivíduo a fim de que este descubra um procedimento de resolução, pode-se empregar uma tabela ou um diagrama de árvore que assegure a identificação de todos os casos possíveis.

O diagrama de árvores é uma ferramenta útil para organizar e visualizar os resultados possíveis em uma sequência de decisões. Para cada resultado possível na primeira decisão, desenha-se um segmento de reta. Então, para cada resultado possível na segunda decisão faz-se o mesmo. E assim, sucessivamente, se houver mais decisões a serem tomadas. Quando empregado na resolução de um problema combinatório, chama-se tal diagrama de árvore de possibilidades. A fim de ilustração, considere-se o seguinte problema: Joana quer ir ao parque aquático amanhã. O ingresso que ela comprou dá direito a ir em três brinquedos diferentes dos seis brinquedos existentes no parque. O tobogã é seu brinquedo favorito. Como este brinquedo é um dos mais procurados, será o primeiro brinquedo no qual ela irá. Se considerar-se a ordem de escolha, de quantas maneiras diferentes, Joana poderá programar o seu passeio no parque? Observe que só há uma possibilidade para a primeira escolha, visto que Joana quer ir primeiro no tobogã. Chame o tobogã de brinquedo número 1, e os demais brinquedos de números 2, 3, 4, 5, e 6. Então para construir o primeiro nível da árvore de possibilidades, traça-se um segmento de reta e no fim deste, coloca-se o número 1, representando o tobogã. Para a segunda escolha, já que não poderá repetir a ida ao tobogã, ela poderá escolher ir em qualquer brinquedo de números: 2, 3, 4, 5 ou 6. Então, para construir o segundo nível da árvore, traça-se cinco segmentos de reta partindo do número 1 e, no fim do primeiro destes segmentos coloca-se o número 2. No fim do segundo segmento, o número 3, e assim, sucessivamente, até que no fim do último segmento coloca-se o número 6. Para a terceira escolha, dado que não se pode repetir algum brinquedo já escolhido nas etapas anteriores, Joana terá 4 possibilidades de escolha. Assim, para construir o terceiro nível da árvore de possibilidades, procede-se da seguinte maneira: de cada número no segundo nível da árvore traçam-se quatro segmentos, e em cada um destes segmentos escreve-se os números que ainda não foram escolhidos nas duas etapas anteriores. Portanto, teríamos, os seguintes resultados possíveis: (1, 2, 3), ( 1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 2), ( 1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 2), ( 1, 4, 3), (1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 2), ( 1, 5, 3), (1, 5, 4), (1, 4, 6), (1, 6, 2), ( 1, 6, 3), (1, 6, 4), (1, 6, 5). Donde se conclui que Joana tem 20 maneiras distintas de programar o seu passeio ao parque aquático.

Baseando-se nisso, o estudo da Análise Combinatória no sexto ano permitirá o educando desenvolver o pensamento combinatório em situações problemas do seu cotidiano, estimulando a criatividade, e desenvolvendo a leitura e interpretação de texto (LOPES, 2004) de maneira que haja uma progressão ano e ano do assunto a fim de que, ao chegar ao Ensino Médio, este indivíduo já tenha amadurecido esse conhecimento, superando alguns obstáculos que são tão comuns ao estudo desse assunto nesse nível.

Este trabalho está baseado em uma revisão bibliográfica e organizado em quatro capítulos como se segue. No capítulo dois, “Números Naturais”, evidenciam-se algumas questões sobre os números naturais, como um conhecimento prévio, para que haja um desenvolvimento progressivo no que se diz respeito à Análise Combinatória. No capítulo três, “Resolução de Problemas”, tal assunto é apresentado de um ponto de vista didático sob a perspectiva de Polya (1995). Serão consideradas algumas peculiaridades para que o indivíduo tenha um suporte contextualizado e a sua experiência seja um dos caminhos a contribuir para o avanço de seu aprendizado. No capítulo quatro, “Análise Combinatória”, trataremos dos conceitos básicos da Análise Combinatória como o princípio multiplicativo, permutações e combinações. No capítulo cinco, serão propostas atividades explorando situações do cotidiano, como combinações de sucos e sanduíches, modos diferentes de se vestir, problemas de acordo com a faixa etária e ao nível cognitivo do educando. E, finalmente, nas considerações finais, será feita a análise do trabalho desenvolvido.

# 2 NÚMEROS NATURAIS

De acordo com Andrini (2012), os registros nos mostram que os povos pré-históricos, antes mesmo de possuir uma linguagem, faziam contagens com marcações em cavernas. O homem levou centenas de anos para chegar à ideia de número que é conhecida hoje. Para contar a quantidade de alunos que estão na sala de aula, ou saber a quantidade de pares de sapatos que há em casa, é simples, mas nem sempre foi assim. Os pastores tinham a necessidade de fazer essa apuração no final de cada dia, para ter um controle sobre a quantidade, com a finalidade de saber se nenhum de seus animais havia se perdido. Eles faziam um pareamento de cada ovelha a uma pedra e desse jeito, conseguiam fazer uma associação para a efetiva contagem. Mas isso, somente era viável para pequenos rebanhos, com o passar do tempo, o homem se deparou com a necessidade de registrar rebanhos bem maiores, e isso passou a ser uma grande dificuldade, pois precisavam usar pedras, o corpo, rabiscos, entalhes e desenhos para essa conta. Por esse motivo, eles começaram a usar símbolos, com o objetivo de facilitar esse trabalho. Nos dias atuais os números são usados para contar, medir, ordenar, identificar e muito mais.

## 2.1 Axiomas de Peano

Segundo Lima (1997), o conjunto dos números naturais possuem as seguintes características:

1. Existe uma função injetiva $f : N \longrightarrow N$. A imagem de $f(n)$ de cada número natural $n \in N$ chama-se o sucessor de $n$.
2. Existe um único número natural $1 \in N$ tal que $1 \neq f(n)$ para todo $n \in N$.
3. Se um conjunto $X \subset N$ é tal que $1 \in X$ e $f(X) \subset X$ ( isto é, $n \in X \Longrightarrow f(n) \in X$) então $X = N$.

Abaixo está uma outra forma de reescrever as três afirmações.

1) Todo número natural possui um único sucessor, que ainda é um número natural; números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
2) Existe um único natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
3) Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Essas três propriedades são chamadas de **Axiomas de Peano**. A propriedade (3), é conhecida como o Axioma de Indução. É um importante método que fornece um modo de garantir que um dado subconjunto *X* de *N* inclui, todos os elementos de *N*.

O Axioma de Indução pode ser reescrito da seguinte maneira:

Seja $P(n)$ uma propriedade relacionada ao conjunto dos números naturais $n$. Suponha que:

i) $P(1)$ é valida.
ii) Para todo $n \in N$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é valida para todo $n \in N$.

Considere-se o exemplo abaixo (LIMA, 2014, p.37), a fim de ilustrar o Princípio de Indução.

*Exemplo.* Prove, por indução, que

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*Demonstração.* O primeiro passo, é fazer a verificação da propriedade (i), isto é, verificar se $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

$$P(1) = \frac{1.(1+1)\,.\,(2.1+1)}{6} = \frac{1.2\,.\,3}{6} = \frac{6}{6} = 1\ .$$

Logo, $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

O segundo passo, é supor a validez de $P(n)$ , hipótese de indução, e demonstrar que $P(n+1)$ é valida também, ou seja, supõe-se que:

$$P(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

é valida para todo $n$, e deve-se demonstrar que :

$$P(n+1) = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

De fato, por hipótese de indução obtém-se :

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Portanto, a validez de $P(n)$ para qualquer valor de $n$ implica na validez de $P(n+1)$. Logo, pelo Axioma de Indução ou Princípio de Indução, tem-se que:

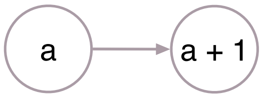
$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

é válida para todo $n \in N$.

## 2.2 Adição dos Números Naturais

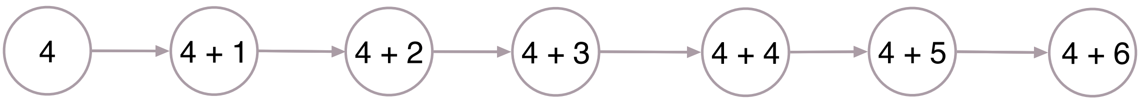
De acordo com Hefez (2015), a adição ou soma de dois números naturais está relacionada à ideia de juntar, acrescentar, ou unir quantidades de elementos.

Dado qualquer número natural $a$, como todo número natural tem um sucessor, representar-se-a o seu sucessor por $a + 1$.




Sejam dois números naturais 4 e 6. Podemos deslocar 4 de 6 posições para a direita, obtendo um número que será denotado por $4 + 6$.

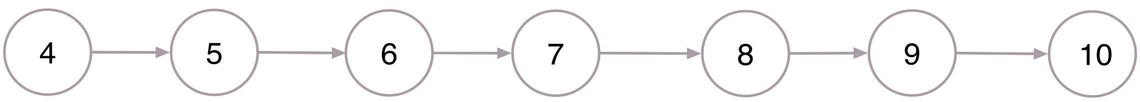
Figura 1 - Adição dos números 4 e 6




Fonte: O autor, 2018.

Como $4 + 1$é o sucessor de 4, logo $4 + 1 = 5$, então pode-se reescrever a sequência acima da seguirem maneira:

Figura 2 - Resultado da adição dos números 4 e 6




Fonte: O autor, 2018.

Essa operação será chamada de adição dos números 4 e 6, e usar-se-á o símbolo $4 + 6 = 10$, onde o número dez é o resultado chamado de soma ( Figura 4) e os números 4 e 6 são chamados de parcelas da adição. A adição de quaisquer números naturais será comutativa, isto é, a ordem das parcelas não vai alterar o resultado da adição, ou seja, a soma.

De acordo com Morgado *et al* (2014), pode-se definir a adição de $a + b$ por recorrência de duas formas como descrito a seguir.

**Definição 2.1.** Sejam $a, b \in N$ .

i) $a + 1$ é o sucessor de $a$.

ii) $a + (b + 1)$ é definido como sucessor de $a + b$, portanto tem-se que

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Pelo Princípio de Indução a soma $a + b$ está definida para quaisquer $a, b \in N$.

**Propriedades da Adição**

i) **Associatividade da Adição:** Para quaisquer $a, b, c \in N$, tem-se que :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

*Demonstração.* Para demonstrar a propriedade acima, usar-se-á o Princípio de Indução.

Fixa-se de modo arbitrário $a, b \in N$. e demonstrar-se-á que para todo $c \in N$, tem-se que

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Para $c = 1$, tem-se, pela Definição 2.1:

$$a + \left(b + 1\right) = \left(a + b\right) + 1.$$

Supondo-se que a igualdade seja válida para $c$, demosntrar-se-á que é valida para $c + 1$. Assim, pela Definição 2.1, tem-se que:

$$a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c) + 1).$$

Pelo Princípio de Indução, tem-se que:

$$(a + (b + c) + 1) = ((a + b) + c) + 1.$$

Pela Definição 2.1 obtém-se:

$$((a + b) + c) + 1 = (a + b) + (c + 1).$$

Portanto, conclui-se que

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

é válida para quaisquer números $a, b, c \in N$.

ii) **Comutatividade da Adição:** Para quaisquer $a, b \in N$, tem-se que :

$$a + b = b + a.$$

*Demonstração.* Fixa-se de modo aleatório $a \in N$. Pelo Princípio de Indução, o objetivo é mostrar que $a + b = b + a$ para qualquer $b \in N$.

Tem-se que verificar a veracidade para $b = 1$.

Pela igualdade $a + 1 = 1 + a$. Somando 1 em ambos os lados da igualdade, tem-se:

$$a + 1 + 1 = 1 + a + 1.$$

Pela associatividade da adição,

$$(a + 1) + 1 = (1 + a) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Logo, tem-se que $a + 1 = 1 + a$ para todo $a \in N$.

A hipótese de indução diz que:

$$a + b = b + a .$$

Somando 1 em ambos os lados, obtém-se que:

$$(a + b) + 1 = (b + a) + 1.$$

Pela associatividade da adição:

$$a + (b + 1) = (b + a) + 1 \; .$$

Aplicando as propriedades comutativa e associativa, obtém-se:

$$a + \left(b + 1\right) = \left(b + a\right) + 1 = 1 + \left(a + b\right) = (1 + a) + b = (a + 1) + b \, .$$

Portanto, para quaisquer $a, b \in N$, tem-se que :

$$a + b = b + a \; .$$

iii) **Lei do corte para a Adição:** Se $a, b, c \in N$, tem-se que:

$$a + c = b + c \text{ então } a = b.$$

*Demonstração.* Para $c = 1$, tem-se que $a + 1 = b + 1$, logo segue-se que $a = b$, pelo axioma de Peano. Logo a lei do corte da adição vale para $c = 1$.
Considerando que a proposição seja válida para $c \in N$, tem-se que mostrar que a lei do corte da adição é válida para $c + 1$.
Então, tem-se que:

$$a + (c + 1) = b + (c + 1) \, .$$

Pela associatividade da Adição:

$$(a + c) + 1 = (b + c) + 1.$$

Cortando 1 de ambos os membros:

$$a + c = b + c \, .$$

Pela hipótese de indução, conclui-se que:

$$a = b.$$

Logo, tem-se que:

$$a + (c + 1) = b + (c + 1) \Rightarrow a = b.$$

Portanto, a lei do corte para a Adição é válida.

## 2.3 Subtração dos Números Naturais

Quando se fala em subtração vem logo ao pensamento algumas perguntas tais como: Quanto resta? Quanto tenho a mais? Quanto falta? Isto porque a subtração é a operação de separar uma parte de um todo, tirar, eliminar, baixar, reduzir ou cortar algo.

Dados dois números naturais p e q tais que q ≤ p, o número de deslocamentos para a direita partindo de q para atingir p será representado por p − q e chamado de diferença entre p e q. A subtração é a operação inversa da adição.

**Exemplo.** Qual é o número que somado com 23 resulta em 50? Neste exemplo, tem-se que pensar no caminho inverso da adição, ao invés de somar 23 ao número desconhecido, deve-se fazer a diferença entre o resultado da soma que é igual a 50 e o número 23. Portanto, o número que somado com o 23, resulta em 50 é o 27, pois 50 – 23 = 27.

## 2.4 Multiplicação de Números Naturais

A multiplicação é uma soma com parcelas iguais. Tomar múltiplos define uma operação nos números naturais, $a x b$, que se lê: a vezes b, representando o múltiplo a vezes b do número b. Assim, o número $a x b$ será chamado o produto de a por b e denotado por $ab$ ou $a \,.\, b$ quando não houver risco de confusão (HEFEZ, 2015).

Quando se multiplica um número qualquer $a \in N$ por 1, não se alterar, ou seja, $a \, . \, 1 = a$, portanto 1 é chamado elemento neutro da multiplicação.

**Propriedades da Multiplicação:**

i) **Distributividade:** Para quaisquer $a, b, c \in N$, tem-se que :

$$a \, . \, (b + c) = a \, . \, b + a \, . \, c$$

*Demonstração.* Fixa-se de modo aleatório $a, b \in N$, pelo princípio de Indução, mostrar-se-á que é a igualdade acima é válida para todo $c \in N$.
Primeiramente, mostrar-se-á que essa igualdade é válida para $c = 1$.
Pela definição de multiplicação:

$$a \, . \, \left(b + 1\right) = a \, . \, b + a \, . \, 1 = a \, . \, b + a \, .$$

Supondo-se que $a \, . \, (b + c) = a \, . \, b + a \, . \, c$ seja verdadeira para quaisquer $a, b, c \in N$, tem-se que verificar a validez para $c + 1$.
Pela associatividade da Adição, tem-se:

$$a \, . \, [b + (c + 1)] = a \, . \, [(b + c) + 1]$$

mas, pela definição da multiplicação:

$$a \, . \, [(b + c) + 1] = a \, . \, (b + c) + a.$$

Assim, pela hipótese de indução, obtém-se:

$$a \, . \, (b + c) + a = (a \, . \, b + a \, . \, c) + a$$

Aplicando a associatividade da adição, tem-se:

$$(a\,.\,b + a\,.\,c) + a = a\,.\,b + (a\,.\,c + a)\,.$$

E ainda, pela definição da multiplicação, tem-se:

$$a\,.\,b + (a\,.\,c + a) = a\,.\,b + a\,.\,(c + 1)$$

Portanto, tem-se que

$$a\,.\,[b + (c + 1)] = a\,.\,b + a\,.\,(c + 1).$$

E , pelo Princípio de Indução,

$$a\,.\,(b + c) = a\,.\,b + a\,.\,c$$

é válido para quaisquer $a, b, c \in N$.

iv) **Comutatividade da Multiplicação:** Para quaisquer $a, b \in N$, tem-se que :

$$a\,.\,b = b\,.\,a.$$

*Demonstração.* Fixa-se de modo aleatório $a \in N$, pelo princípio de Indução, mostrar-se-á que se tem $a\,.\,b = b\,.\,a$ para qualquer $b \in N$.

Para $b = 1$, tem-se que $a\,.\,1 = 1.a$ para qualquer $a \in N$. Como $a\,.\,1 = a$, mostrar-se-á por indução que $1.a = a$.

Para $a = 1$, tem-se que: $1.1 = 1$, pela definição da multiplicação.

Tem-se que mostrar a igualdade é válida para $a + 1$. De fato,

$$1.(a + 1) = 1.a + 1 = a + 1,$$

pela definição multiplicação.

Supõe-se que é válida a igualdade $a \,.\, b = b \,.\, a$, e provar-se-á que

$$a \,.\, (b+1) = (b+1) \,.\, a \,.$$

Pela definição da multiplicação, tem-se que:

$$a \,.\, (b+1) = a \,.\, b + a.$$

Pela hipótese de indução, tem-se que:

$$a \,.\, b + a = b \,.\, a + a.$$

Pela distributividade, tem-se que:

$$b \,.\, a + a = (b+1) \,.\, a.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, para quaisquer $a, b \in N$, tem-se que: $a \,.\, b = b \,.\, a$ .

## 2.5 Relação de Ordem dos Números Naturais

Os números naturais obedecem uma ordem, como será discutido a seguir.

**Definição 2.2.** Dados os números $a, b \in N$, diz que $a$ é menor do que $b$, e escreve-se $a < b$, isto significa que existe um número $k \in N$ tal que $a + k = b$.

A definição acima, permite ter uma precisão fundamental sobre a ordem dos números naturais.

A relação de ordem tem as seguintes propriedades: Sejam $a, b, k \in N$.

i) Propriedade da Transitividade: Se $a < b$ e $b < k$ então $a < k$.

*Demonstração.* Se $a < b$ e $b < k$ pela hipótese, então existem $c, d \in N$ tais que:

$$b = a + c \text{ e } k = b + d\,.$$

Então, tem-se que:

$$k = (a + c) + d\,.$$

Pela propriedade associativa da adição:

$$k = a + \left(c + d\right).$$

Então, conclui-se que $a < k$.

ii) Propriedade de Tricotomia: Só vale uma, e somente uma das alternativas: $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.

*Demonstração.* Se $a = b$ e $a < b$, então existe $k \in N$ tal que:

$$b = a + k\,.$$

Por hipótese, tem-se que $a = b$, isto implica que:

$$b = b + k\,.$$

Soma-se 1 em ambos os lados:

$$b + 1 = b + k + 1.$$

A lei do corte da adição, implica que:

$$1 = k + 1.$$

O que é um absurdo, pois 1 não é o sucessor de $k$.

Se $a < b$ e $b < a$, então existem $k, p \in N$ tais que:

$$b = a + k \text{ e } a = b + p\,.$$

Então tem-se que:

$$b = b + p + k.$$

Soma-se 1 em ambos os lados:

$$b + 1 = b + p + k + 1.$$

Pela lei do corte da Adição, tem-se que:

$$1 = p + k + 1.$$

O que é um absurdo, pois 1 não é o sucessor de $p + k$.

Se $a = b$ e $b < a$, então existe $k \in N$ tal que:

$$a = b + k\,.$$

Por hipótese, tem-se que $a = b$, isto implica que:

$$a = a + k\,.$$

Soma-se 1 em ambos os lados, tem-se que:

$$a + 1 = a + k + 1.$$

Pela lei do corte da Adição, tem-se que:

$$1 = k + 1.$$

O que é um absurdo, pois 1 não é o sucessor de $k$.

Portanto, só vale uma, e somente uma das alternativas: $a = b$, $a < b$ ou $b < a$.

iii) Propriedade da Monotonicidade: Se $a < b$ então, para qualquer $k \in N$, tem-se que:

$$a + k < b + k \text{ e } a \, . \, k < b \, . \, k.$$

*Demonstração.* Se $a < b$ pela hipótese, isto significa que existe $c \in N$ tal que: $b = a + c$. Somando-se $k$ em ambos os lados da igualdade tem-se que:

$$b + k = a + c + k \text{ isto implica que } a + k < b + k.$$

Como tem-se que $b = a + c$, multiplicando $k$ em ambos os lados tem-se que:

$$b \, . \, k = (a + c) \, . \, k = a \, . \, k + c \, . \, k.$$

Logo, como $a < b$ então tem-se que $a \, . \, k < b \, . \, k$ .
Portanto, se $a < b$ então, tem-se $a + k < b + k$ e $a \, . \, k < b \, . \, k$ para qualquer $k \in N$.

**2.5 Múltiplos**

Dado um número natural qualquer "$k$", considere-se os múltiplos de $k$:

$$0xk = 0,\ 1xk = k\ ,\ 2xk = k + k = 2k\ ,\ 3xk = k + k + k = 3k, \ldots,$$

obtendo assim uma sequência

$$0, k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, 7k, 8k, 9k, \ldots$$

**Exemplo**. Escreva os dez primeiros múltiplos dos números 3 e 7.
Os múltiplos de 3 são:

$$0x3,\ 1x3,\ 2x3,\ 3x3,\ 4x3,\ 5x3,\ 6x3,\ 7x3,\ 8x3,\ 9x3,$$

dando a seguinte sequência de números

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Os múltiplos de 7 são:

$$0x7,\ 1x7,\ 2x7,\ 3x7,\ 4x7,\ 5x7,\ 6x7,\ 7x7,\ 8x7,\ 9x7,$$

dando a seguinte sequência de números

0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63.

**Múltiplos Comuns**

É um conceito importante determinar quais são os múltiplos comuns entre dois números. Por exemplo, se considerar a sequência dos múltiplos de 3 são:

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45,...

e a sequência dos múltiplos de 7 são:

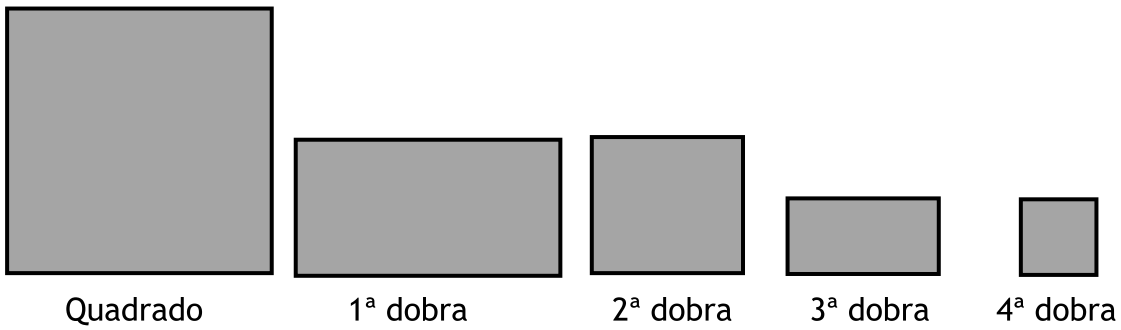
0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63,70,…

Assim, pode-se observar que a sequência dos números que são múltiplos de 3 e de 7 ao mesmo tempo é: 0, 21, 42,... Ao analisar a sequência dos múltiplos comuns de 3 e 7 observa-se que forma uma sequência de múltiplos de 21, sendo o menor múltiplo comum não nulo.

**Definição 2.3.** O menor múltiplo comum não nulo de dois números naturais não nulos $p$ e $q$ é denotado por $mmc(p, q)$ e será chamado de mínimo múltiplo comum entre $p$ e $q$, ou somente mmc entre $p$ e $q$.

## 2.6 Potenciação

Desenhe um quadrado em uma folha de papel e ,depois, recorte-o. Em seguida, dobre o quadrado ao meio, sem desdobrar a folha, dobre-o ao meio pelo maior lado e repita quatro vez essa operação, como ilustrado na Figura 3. Após ter dobrado o quadrado, desdobre-o. As marcas das dobras no quadrado indicam as divisões que foram feitas. Em quantas partes foi dividido o quadrado?




A cada dobra do quadrado percebe-se que dobra o número de partes, então o número de partes desse quadrado é:

- Depois da primeira dobra: 2 partes
- Depois da segunda dobra: $2x2 = 4$ partes
- Depois da terceira Dobra: $2x2x2 = 8$ partes
- Depois da quarta dobra: $2x2x2x2 = 16$ partes

Portanto, o quadrado ficou dividido em 16 partes.

A multiplicação de números naturais em que todos os fatores são iguais é chamada de potenciação e pode ser escrita de forma simplificada: $2x2x2x2 = 2^4$, (lê-se: dois elevado à quarta potência), onde 2 é chamado de base e 4 é chamado de expoente, e percebe-se que o número de vezes que a base é repetida na multiplicação é igual ao expoente.

Então, tem-se:

$$2^4 = 2x2x2x2 = 16$$

sendo o 2 chamado de base; 4, de expoente; e 16, de potência.

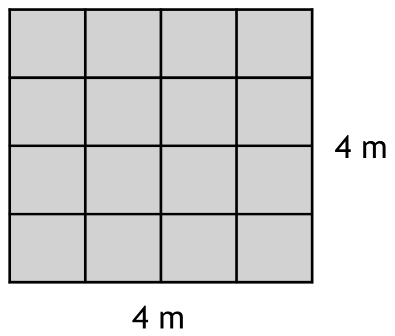
**Observações**

1) Quando o expoente igual a 2 diz-se que a base está elevada ao quadrado. Por exemplo: $4^2 = 16$, ou seja, quatro ao quadrado é 16.

Essa expressão, ao quadrado, vem da ideia de área.

**Exemplo**. Qual é a área de um quadrado de lado igual a 4 metros?

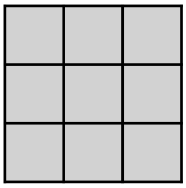
Na figura a seguir, foi possível dividir o quadrado em 16 quadrados menores com o lado medindo 1 metro. Assim, pode-se dizer que 16 é igual a $4^2$ ou também que 16 é o quadrado de 4 ou ainda que 16 é um quadrado perfeito.

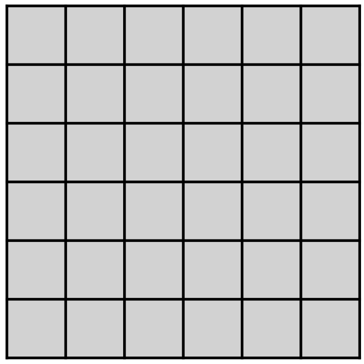



**Definição 2.4.** Diz-se que um número é um quadrado perfeito se é o quadrado de um número natural elevado ao quadrado é um quadrado perfeito.

**Exemplo**. Abaixo estão exibidos alguns números que são quadrados perfeitos.

$3^2 = 9$ $6^2 = 36$





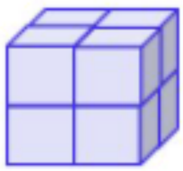
Portanto, tem-se que:

- se 9 é o quadrado de 3 então 9 é um quadrado perfeito,
- se 36 é o quadrado de 6 então 36 é um quadrado perfeito.

2) Quando o expoente é igual a 3 diz-se que a base está elevada ao cubo. Por exemplo, $2^3 = 8$, ou seja, dois ao cubo é 8.

Essa expressão, ao cubo, vem da ideia de volume do cubo.

**Exemplo**. Qual é o volume do cubo de aresta igual a 2 metros?



O cubo acima é formado por 8 cubos de aresta igual a 1 metro. Por esse motivo 8 é igual a $2^3$.

3) Quando o expoente é igual a 0, por definição, tem-se que todo número natural não nulo elevado a zero é igual a 1.

**Exemplo.**

$4^0 = 1$ e $1387^0 = 1$.

4) Quando o expoente é igual a 1: Todo número natural elevado a 1 é igual ao mesmo número.

**Exemplo.**
$8^1 = 8; 0^1 = 0; 57^1 = 57$

## 2.7 Divisibilidade

No dia a dia sempre aparecem situações nos quais quer-se saber se a divisão é exata ou não é exata.

**Exemplo**. Uma mãe possui 4 filhos, ela só tem 21 bombons para dividir entre seus filhos. Tem como dividir igualmente a quantidade de bombons entre os filhos, de modo que cada um fique com quantidades inteiras de bombons sem sobrar nenhum bombom?
Observe a sequência dos múltiplos de 4.

$$0x4 = 0,\ 1x4 = 4,\ 2x4 = 8,\ 3x4 = 12,\ 4x4 = 16,\ 5x4 = 20,\ 6x4 = 24, \ldots$$

Na sequência dos múltiplos de 4 percebe-se que não aparece o números 21. Logo a divisão dos 21 bombons entre os quatros filhos será de 5 bombons para cada filho e restará 1 bombom. Portanto, a mãe não poderá dividir a quantidade de bombons entre os filhos, pois restou 1 bombom.

**Definição 2.5.** Diz-se que o número natural $d$ divide o número natural $s$, o que se representa por $d\,|\,s$, se existe um número natural $k$ tal que $s = k \,.\, d$. Diz-se então que $s$ é um múltiplo de $d$.

**Definição 2.6.** Segundo Fomin (2012), a definição do resto de uma divisão é apresentada da seguinte maneira:

Dividir um número $a \in N$ pelo $b \in N$ com $a \geq b$ e um resto $r \in N$, significa representar $a$ como:

$$a = k \,.\, b + r, \text{ onde } k \in N \text{ e } 0 \leq r < b.$$

Chama-se o número *r* de resto da divisão de *a* por *b*.

**Definição 2.7.** Um número natural é divisível por outro número natural, exceto o zero, se a divisão entre eles é exata, ou seja, tem resto zero.

**Critérios de divisibilidade**

Existem certos padrões que podem ser percebidos e assim estabelecer certos critérios de divisibilidade. Portanto, pode-se perceber se um número é divisível por outro sem a necessidade de efetuar a divisão.

> Este assunto pode não ser tão divertido quanto alguns outros, mas contém uma quantidade de material teórico importante. Tente introduzir brincadeiras em seus encontros. Mesmo problemas bem rotineiros como fatoração de inteiros podem levar a competição. (FOMIN, 2012, p. 21)

**Divisão por 2**

Todo número par é divisível por 2. Os números pares são aqueles em que os algarismos das unidades são 0, 2, 4, 6 ou 8.

**Exemplo.** Quais números abaixo são divisíveis por 2?

a) 23 b) 56 c) 245 d)345667879 e) 4323460989670

Como 23, 245 e 345667879 terminam com 3 5 e 9 que são números ímpares, logo esses números não são divisíveis por 2.

Os números 56 e 4323460989670 são pares, pois terminam com números pares 6 e 0, logo são divisíveis por 2.

**Divisão por 3**

Se a soma dos números dos algarismos de um número natural é divisível por 3 então esse número é divisível por 3.

**Exemplo.** O número 345567 é divisível por 3?

Para responder essa pergunta, basta somar os algarismos do número 345567.

$$3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 = 30$$

Como 30 é divisível por 3, logo 345567 também é divisível por 3.

**Divisão por 5**

Todo número natural é divisível por 5 quando o algarismo das unidades é zero ou 5.

**Exemplo**. 345672 não é divisível por 5, pois o algarismo das unidades é igual a 2.

**Divisão por 10**

Todo número natural é divisível por 10 quando o algarismo das unidades é igual a zero.

**Exemplo.** Quais dos números abaixo é divisível por 10?

a) 12 b) 4234 c) 2345 d) 1980

Observando os quatro números acima e vê-se que somente o 1980 tem como algarismo das unidades o número zero, portanto somente o número 1980 é divisível por 10.

## 2.8 Números Primos

**Definição 2.8.** Um número natural diferente de 0 e de 1 é chamado de número primo se possuir apenas dois divisores: o número 1 e ele próprio. Se um número não é primo, então ele é chamado de número composto.

Assim, de acordo com a definição acima, os números 2, 3, 5, 7, 11 e 13 são chamados de números primos, pois só possuem dois divisores enquanto 4, 9, 15 e 49 são números compostos, por serem também múltiplos, respectivamente, de 2, 3, 5 e 7. De fato,

$$4 = 2x2;\ 9 = 3x3;\ 15 = 3x5;\ 49 = 7x7.$$

**Exemplo.** Decompor o número 20 em fatores primos

A decomposição do número 20 em fatores primos é $2x2x5 = 2^2x5$, também é chamado de fatoração de 20.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & \underline{5} \\ 1 & 2x2x5 = 20 \end{array}$$

# 3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: SUA IMPORTÂNCIA E ESTRATÉGIAS

Neste capítulo, será discutida a importância e algumas estratégias sobre a resolução de problemas no processo de ensino aprendizagem. “Crianças gostam de pensar e, quando lhes são fornecidos meios para estimular seu raciocínio, surgem oportunidades para desenvolver o seu potencial.” (SAMPAIO, 2011, p. 52)

## 3.1 A Resolução de Problemas e a Sua Relevância no Ensino da Matemática.

É evidente que os métodos de ensino são extremamente indispensáveis para o processo de ensino da matemática. Porém, não cabe aprender somente os conceitos, fórmulas e resultados, mas também se utilizar de estratégias significativas propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Observa-se, no entanto, que existem elementos imprescindíveis para um bom resultado no objeto de estudo. Componentes esses que se não estiverem organizados e estruturados podem refletir de maneira desfavorável.

> Assim, por exemplo, a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas - ainda bastante desconhecida da grande maioria - quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos (BRASIL, 1997, p. 22).

Considerando a proposta dos PCNs, no ensino da Matemática, cabe ao profissional de educação compreender a proposta de ensino e entender qual a sua representação como condição básica no processo de entendimento na estrutura cognitiva de cada aluno. No entanto, é apropriado valorizar as experiências anteriores de cada um e contextualiza-las para que possam garantir um bom desempenho nas atividades propostas. É necessária uma prática desafiadora, que transforme e aumente o raciocínio lógico, a habilidade, criatividade, e independência, para que ele possa lidar com quaisquer situações e dificuldades. Muito mais do que uma simples operação abstrata, mas deve iniciar e desafiar o sujeito para que ele busque os seus próprios meios para solucioná-los.

## 3.2 A Habilidade Imprescindível de Resolver Problemas

O grande objetivo da resolução de problemas é desenvolver o potencial do aluno. Portanto, se faz necessário, elaborar atividades com enunciados estruturados que buscam criar uma consciência linguística. Para o momento, cabe ao professor propor problemas interessantes que possam desafiar o aluno, estimulá-lo a pensar produtivamente, ensiná-lo a lidar com situações novas que vão aparecendo no seu dia a dia. É importante que apresente algo motivador adequado a seu conhecimento, para tornar a aula mais interessante e com desafios fazendo com que o aluno queira resolvê-lo.

> O professor de Matemática tem uma grande oportunidade em mãos. Se preenche seu tempo apenas ensinando algoritmos, perde a oportunidade pois mata o interesse dos alunos e bloqueia seu desenvolvimento intelectual. Se, por outro lado, provoca-lhes a curiosidade através de problemas proporcionais a seu conhecimento e os acompanha com questões estimulantes, estará lhes oferecendo o desejo e os meios para o desenvolvimento de um pensamento independente. (POLYA, 1997, p.35)

De acordo com Polya (1997), o educador necessita estimular o aluno, mas não com termos técnicos, complicados e uma linguagem matemática excessivamente formal que dificulta o entendimento. Resolver problema não é se limitar apenas na enunciação da questão ou até mesmo nos resultados, contudo, deve-se assimilar o que foi apresentado. O problema deve ser claro, organizado, para que ele fique bem entendido. Eles precisam ter condições de sozinhos examinarem diversos aspectos dos problemas.

Deste modo, cabe lembrar que um dos preceitos primordiais para esse desempenho favorável é a participação do mediador. Para que se possa aprimorar a qualidade desse trabalho, é necessária a interação. Não como um modelo antigo de ensino na qual se transferia o saber e depositava no outro de forma bancária. Espera-se que modestamente haja um diálogo e se obtenha uma troca que favoreça ambos os lados.

É válido destacar que, o planejamento do docente deve delinear rumos antes, durante e depois da aula. Sua análise deve ter um olhar crítico e considerar os pontos positivos e negativos no momento das atividades. Não se deve desprezar o erro, pois é uma maneira de entender como o aluno está pensando, e assim fazer as intervenções certas. Fazendo-os repensar e até mesmo modificar as suas etapas para chegar a solução.

> Quantas vezes o aluno erra na sua resposta sem que a professora note que ele estava de fato pensando, muitas vezes, até pensando bem. Não devemos supor que as respostas erradas indica que a criança não estava pensando. Precisamos conhecer como a criança está pensando. O que a leva chegar a conclusões diferentes das nossas? Como ela está representando as ideias na cabeça dela? (CARRAHER, 2002, p. 18)

## 3.3 O Aluno no Processo de Ensino e Aprendizagem.

Compreender o significado daquilo na qual foi transferido, representa uma condição básica para o processo seguinte. A forma efetiva desse modo possibilita ao aluno alternativas diversas para que ele possa receber, apreender e expor o que aprendeu. De modo geral, esses procedimentos são padronizados e quase sempre não podem ser rompidos com um pensar diferente. Tudo isso, gera um mecanismo de impossibilidades que minimiza a capacidade do outro. O professor deve proporcionar um entendimento ao educando dando suporte suficiente para que ele entenda e aplique de maneira que reconheça os desafios e se posicione de modo ativo, tendo suas objeções precisas quanto ao problema. Com isso, automaticamente se aguçará para que esse ensino se reforce e seja parte como um todo criando uma independência.

Um problema matemático pode ser o início de uma atividade significativa para que o indivíduo tenha a oportunidade de desenvolver o seu conhecimento. De forma que construa a definição e os conceitos, a partir disso o aluno desenvolve habilidades de criar estratégias encontrando a solução do problema. Conforme o PCN, a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para o ensino, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Para solucionar a questão o aluno deve entender, compreender e identificar quais são os dados do problema e o que ele está pedindo. Assim, ele poderá traçar um plano a partir das informações fornecidas, fazendo uma análise da solução encontrada. Por isso, é muito importante que o aprendiz entenda o problema a fim de conseguir elaborar uma estratégia para resolvê-lo. Por outro lado, o professor precisa escolher os problemas que serão apresentados, de modo que estes estejam de acordo com a faixa etária de cada criança. Essas atividades devem despertar o interesse e estimular a curiosidade de cada um, e isso, tem que ser apresentado de forma natural. Segundo Polya (1997), o aluno deverá encarar cinco passos desse problema.

**1. Familiarizar-se com o problema**

O aluno deve começar pelo enunciado, compreendendo o problema como um todo. Esclarecendo os pontos nos quais são primordiais e gravando o objetivo claramente. Assim, o ele vai estimular a sua memória recordando de pontos relevantes.

**2. Fazer o aperfeiçoamento da compreensão**

Retornar ao enunciado quando este não estiver claro na sua mente e os objetivos não forem assimilados. Em seguida, identificar e isolar as partes importantes, não se esquecendo, sempre, de considerar uma a uma.

**3. Procurar ideias proveitosas**

Examinar as partes principais do problema, especulando-o de diferentes meios. É de suma importância que o indivíduo busque o seus conhecimentos adquiridos anteriormente, para que as ideias o ajudem na resolução do problema.

**4. Executar um plano**

Com as suas ideias sólidas, a criança deve detalhar todas as operações que são viáveis, fazendo a correção de cada passo, usando o raciocínio formal ou pela sua intuição. Fazendo a diferença entre os passos grandes e pequenos, se o problema possuir uma dificuldade maior, ele poderá dividi-lo em partes maiores ou em vários pequenos, facilitando a resolução do problema. A vantagem de fazer esse procedimento é ter a certeza de que cada passo estará correto e fora de qualquer dúvida.

**5. Fazer uma retrospectiva**

Ao começar pela resolução é necessário que examine os detalhes da solução. Considerando a resolução por diferentes maneiras, devem-se analisar os conhecimentos anteriores que foram utilizados. Fazendo isso, o aluno pode descobrir se existe, ou não, outras maneiras para solucionar a questão. É sempre importante usar em outros problemas, métodos que os levaram a essa resolução.

Cabe ao educador direcionar o aluno, dessa maneira ele irá compreender se existem mais de um jeito para resolver um problema matemático, não bastando, só apresentar a solução final. Ele deve observar as várias resoluções e comparar fazendo um debate sobre os resultados encontrados e as variadas formas de resoluções. Ao discutirem essas diferentes resoluções, é apropriado que exponham as ideias, técnicas e recursos que usaram para solucionar o problema.

E como o estudo realizado neste capítulo se aplica à Análise Combinatória?

Segundo Morgado *et al* (2006), de modo geral na Matemática, a Análise Combinatória refere-se ao fato de contar, classificar, demonstrar a existência desses subconjuntos de elementos. Mas a Análise Combinatória vai muito mais além do que combinações, arranjos e permutações.

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos da desta parte da Matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para a sua solução. (MORGADO, 2006, p. 2)

O estudo da Combinatória permite desenvolver o cognitivo do aluno com o uso de ferramentas e técnicas que se encontram em diversas áreas do conhecimento científico. De fato, é possível fazer essas aplicações no nosso dia a dia, através de jogos, de como uma pessoa escolhe sua roupa para ir em uma festa, os modos como escolhem um lanche numa lanchonete e etc. Com isso, possibilita a criação de diversas situações-problemas que podem ser questionadas através da construção, conjecturas e discussão de ideias, para desenvolver a capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam a importância do ensino da Análise Combinatória na formação dos alunos, para desenvolver habilidades e o raciocínio lógico.

> Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas; resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão. (BRASIL, 1997, P. 65)

O assunto Combinatória vem ganhando espaço e importância nas séries iniciais do ensino fundamental, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático que serve para aprimorar o desenvolvimento cognitivo[1] do aluno. Aprimorando a habilidade de analisar informações de um dado problema e fazer previsões daquilo que é possível ou não de acontecer, com isso, ele consegue aplicar a Matemática em situações do seu cotidiano.

Morgado et al. (2014), cita três estratégias para que o aluno possa resolver os problemas de Análise Combinatória:

**1) Postura**

O aluno deve se colocar dentro da história do problema, para que consiga visualizar as decisões ou os caminhos a seguir.

---

[1] O desenvolvimento cognitivo é um campo de estudo da neurociência e psicologia focada no desenvolvimento de uma criança em termos de processamento de informações, recursos conceituais, habilidade perceptiva, a aprendizagem de línguas, e outros aspectos do desenvolvimento do cérebro em relação ao ponto de vista de um adulto. Em outras palavras, o desenvolvimento cognitivo é o processo do surgimento da capacidade de pensar e compreender. Uma grande parte desse estudo tem partido da visão de mundo na qual criança possui. Jean Piaget propôs quatro períodos gerais de desenvolvimento cognitivo: sensório-motor, pré-operacional, operacional-concreto e operacional-formal. A enciclopédia livre, WIKIPÉDIA. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Desenvolvimento_cognitivo> acessado em 11 de outubro de 2017.

**2) Divisão**

Dividir em etapas as decisões a serem tomadas, com isso, cada período pode ser resolvido e entendido com mais facilidade.

**3) Não adiar as dificuldades**

Não fugir dos pequenos problemas porque eles se tornam imensos. Isso é aplicado na Matemática e em todas as áreas, pois uma situação-problema tem que ser encarada de frente, analisando-se as decisões para buscar a solução do problema.

Problemas de contagem podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos. Este trabalho, por seu caráter introdutório e visando a estimular o raciocínio lógico do aluno, utilizará apenas as quatro operações da aritmética e os princípios aditivo e multiplicativo na resolução desses problemas.

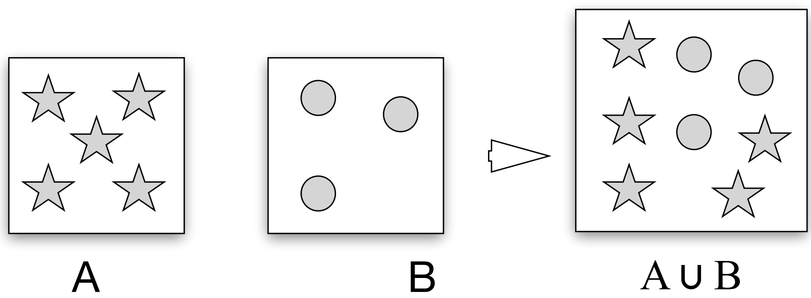
# 4 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Segundo Julianelli *et al* (2009), a Análise Combinatória é uma parte da Matemática a tem como o objetivo, estudar a formação dos agrupamentos, a partir de um determinado conjunto, sendo esses elementos a condições pré determinadas.

## 4.1 Princípio Aditivo

O Princípio Aditivo da contagem realiza a união dos elementos de dois ou mais conjuntos. O Princípio Aditivo tem a sua origem na teoria dos conjuntos, que estuda as propriedades que estabelecem as relações entre os próprios conjuntos e entre os elementos dos conjuntos, conforme mostra a Figura 4.

Figura 4 - União de dois conjuntos




Fonte: O autor, 2018.

A Figura acima, ilustra a união de dois conjuntos ou a adição do conjunto A com o conjunto B, isto é o Princípio Aditivo.

**DEFINIÇÃO 4.1.** Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

**PROBLEMA 1.** A mãe de Carlos ofereceu a ele 2 livros de história da Matemática, 4 livros de Ciências e 3 livros de Geografia e pediu-lhe para escolher apenas um único livro. De quantas maneiras Carlos poderá realizar essa escolha?

**Resolução.** Considere os três conjuntos de livros:

- conjunto dos livros de Matemática M = { M1, M2 }.
- conjunto dos livros de Ciências C = {C1, C2, C3, C4}.
- conjunto dos livros de Geografia G = {G1, G2, G3}.

Carlos terá que escolher apenas um livro dentre os três conjuntos, como têm-se 2 elementos no conjuntos M, 4 em C e 3 em G, portanto ao todo Carlos terá:

2 + 4 + 3 = 9 opções de escolhas.

**PROBLEMA 2.** Maria possui 7 blusas pretas, 3 blusas vermelhas, 4 blusas marrons e 2 blusas brancas. De quantas maneiras diferentes Maria poderá escolher apenas uma blusa?

**Resolução.** Considerem-se quatros conjuntos:

- Blusas pretas $P = \{ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$
- Blusas vermelhas $V = \{ V1, V_2, V_3\}$
- Blusas marrons $M = \{ M_1, M_2, M_3, M_4 \}$
- Blusas brancas $B = \{ B_1, B_2 \}$

Maria poderá escolher uma blusa dentre os quatros conjuntos: 7 pretas ou 3 vermelhas ou 4 marrons ou 2 brancas. Portanto, ela terá 7 + 3 + 4 + 2 = 16 maneiras diferentes de escolher uma blusa.

## 4.2 O Princípio Multiplicativo

Problemas de contagem podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos.

Observe a situação a seguir.

**PROBLEMA 3.** Uma lanchonete tem 3 tamanhos de copo de suco (pequeno, médio e grande) e 5 sabores de suco (laranja, abacaxi, uva, maracujá e limão). Quantas são as possibilidades para um cliente pedir seu suco?

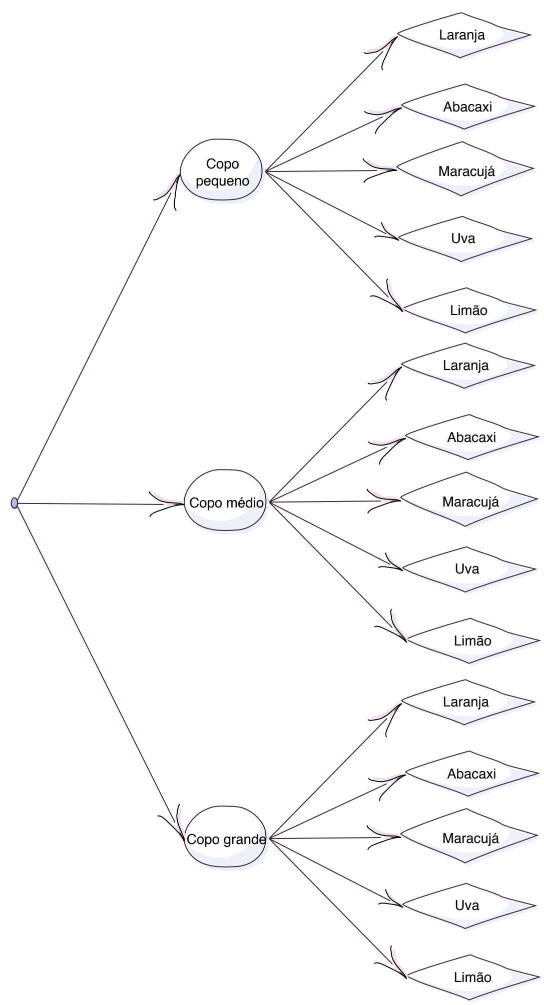
**Resolução.** Para a resolução deste problema, o aluno terá que imaginar todas as possibilidades que o cliente poderá pedir o seu suco.

O cliente tem que escolher o tamanho do copo de suco e o sabor do suco, portanto ele terá:

- ➢ 3 tamanhos de copo de suco ( pequeno, médio e grande);
- ➢ 5 sabores de suco (laranja, abacaxi, uva, maracujá e limão).

A Figura 5, abaixo, ilustra a árvore de possibilidades com todos os resultados distintos possíveis para se escolher um copo de suco

Figura 5 - Possibilidades de escolha do suco




Fonte: O autor, 2018.

Portanto, observando que existem 3 possibilidades de se escolher um tamanho de copo, e para cada copo, existem 5 possibilidades de escolher um tipo de suco, o cliente poderá concluir que ele terá $3x5 = 15$ possibilidades de escolha.

Logo, o cliente poderá pedir o suco de 15 possibilidades diferentes.

Observe que para resolver o problema acima separou-se as decisões a serem tomadas em duas decisões mais simples, cada uma delas correspondendo a uma escolha a ser feita.

Essas tomadas de decisões foram representadas por uma árvore de possibilidades. Isso ilustra o Princípio Multiplicativo.

**Definição 4.2.** Princípio Multiplicativo ou o Princípio Fundamental da Contagem diz que se há p modos de tomar a decisão $D_1$ e, tomada a decisão $D_1$, há q modos de tomar a decisão $D_2$, então o números de modos de tomar sucessivamente as decisões $D_1$ e $D_2$ é $p.q$ possibilidades.

**PROBLEMA 4 (CANGURU 2017 - PROVA E).**[2] Num zoológico há uma girafa, um elefante, um leão e uma tartaruga, cada qual no seu lugar. Suzana pretende ir ao zoológico e ver somente dois desses animais. Ela não quer começar sua visita pelo leão. De quantas formas diferentes ela pode planejar seu passeio no zoológico?

**Resolução.** Neste zoológico existem quatro animais, de modo que Suzana pretende visitar apenas dois desses animais, neste caso ela terá que fazer duas escolhas:

Visitar o primeiro animal, onde ela não quer começar visitando o leão, portanto terá 3 possibilidades de visitação (girafa, elefante e tartaruga);

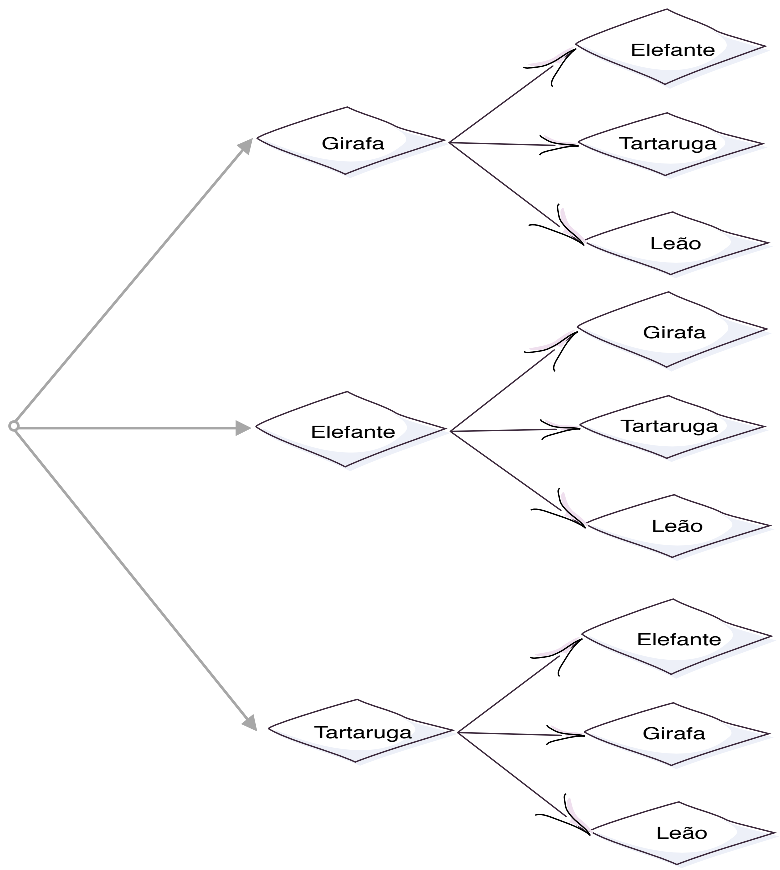
Visitar o segundo animal, neste caso ela não poderá repetir o animal da primeira visita, mas poderá visitar o leão, assim, se terá um total de 3 animais.

---

[2] Questões retiradas do site CANGURU DE MATEMÁTICA. Disponível em:<https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/index.php/provas-anteriores> acessado em 13 de novembro de 2017.

A Figura 6,  a seguir, ilustra todas as 9 possibilidades diferentes que Suzana poderá planejar o seu passeio no zoológico.

Figura 6 - Árvore de possibilidades de planejar o passeio no zoológico




Fonte: O autor, 2018.

Pode-se obter o mesmo resultado, sem necessidade de enumerar todas as possibilidades, usando -se o Princípio Multiplicativo. Assim, tem-se: 3 x 3 = 9 maneiras diferentes de planejar o seu passeio.

**4.3 Extensão do Princípio Multiplicativo**

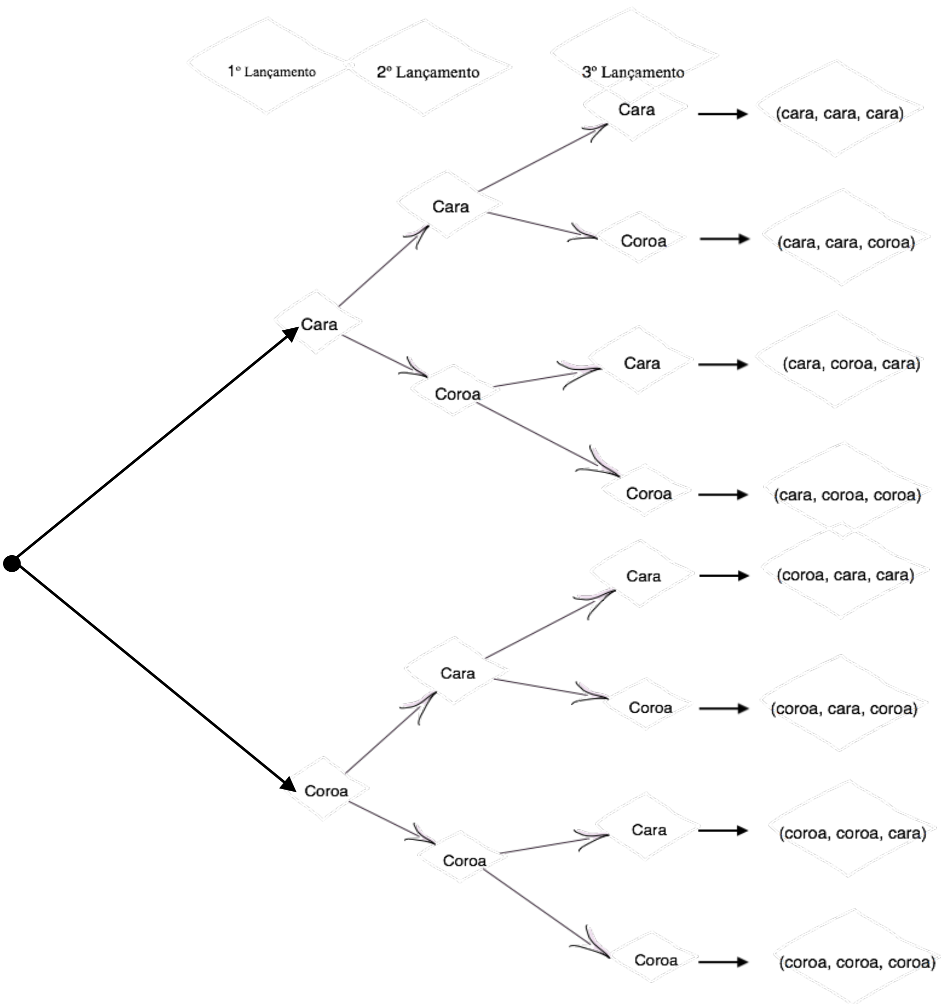
O Princípio Multiplicativo pode ser estendido quando forem realizadas mais de duas escolhas diferentes”  (JULIANELLI, 2009, p.6).

Observe o Problema 5 a seguir.

**PROBLEMA 5.** Uma moeda é lançado três vezes sucessivamente, de quantas maneiras isso poderá acontecer?

**Resolução.** Observe a árvore de possibilidades do lançamento de três moedas na Figura 8 abaixo.

Figura 7 - Árvore de possibilidades no lançamento de três moedas




Fonte: O autor, 2018.

No lançamento de uma moeda somente dois resultados podem acontecer (cara ou coroa), como são três lançamentos consecutivos, então, pelo Princípio Fundamental da Contagem, tem-se: 2 x 2 x 2 = 8 maneiras diferentes.

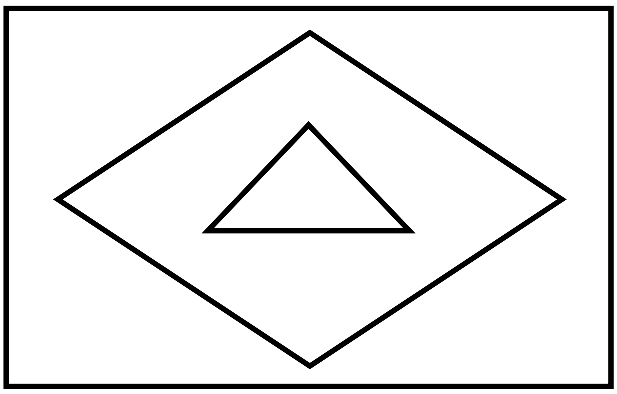
O raciocínio acima mostra que o Princípio Multiplicativo pode ser aplicado em diversas etapas, não somente com duas: basta multiplicar cada número de possibilidades em cada etapa para encontrar o número total de possibilidades, se o número de possibilidades em cada etapa não depender das decisões tomadas anteriormente.

Logo, o Princípio Multiplicativo pode ser aplicado de uma forma mais abrangente da seguinte maneira:

**Definição 4.3.** Se há $x_1$ maneiras diferentes de tomada da decisão $D_1$ e, tomada a decisão $D_1$, há $x_2$ maneiras diferentes de tomar a decisão $D_2$ e, tomada a decisão $D_2$, há $x_3$ maneiras diferentes de tomar a decisão $D_3$, acontecendo de maneiras sucessivas até uma decisão $D_n$ tiver $x_n$ maneiras diferentes, então pelo Princípio Fundamental da Contagem tem-se: $x_1 . x_2 . x_3 . . . x_n$ maneiras diferentes.

**PROBLEMA 6.** De quantas maneiras diferentes pode-se pintar a bandeira abaixo utilizando 3 cores (azul, verde e amarelo), de modo que partes adjacentes não tenham a mesma cor?

Figura 6 - Bandeira



Fonte: O autor, 2018.

**Resolução.** Neste problema, têm-se três cores (azul, verde e amarelo) e três regiões para pintar (retângulo, losango e triângulo). Observe que as partes adjacentes não podem ter a mesma cor, isto significa que o retângulo e o losango não podem ser pintados da mesma cor ou losango e o triângulo. Sendo assim, para ajudar na resolução deste problema tem-se que dividi-lo da seguinte forma:

- Escolha da cor para pintar o retângulo: Para pintar o retângulo Tem-se 3 possibilidades.
- Escolha da cor para pintar o losango: Neste caso, tem-se que ter em mente que o retângulo e o losango não podem ter a mesma cor, com isso resta 2 possibilidades.
- Escolha da cor para pintar o triângulo: Por fim, tem-se que o losango e o triângulo não podem ser pintados da mesma cor, mas o triângulo pode ser pintado da mesma cor que o retângulo, com isso resta 2 possibilidades.

Portanto, usando o Princípio Multiplicativo, tem-se: $3x2x2 = 3x2^2 = 12$ modos diferentes de pintar a bandeira.

**PROBLEMA 7 (OBMEP 21015 - 1ª FASE).**[3] Maria faz uma lista de todos os números de dois algarismos usando somente os algarismos que aparecem no número 2015. Por exemplo, os números 20 e 22 estão na lista de Maria, mas 02 não. Quantos números diferentes há nessa lista?

**Resolução.** O problema diz que os números devem possuir dois algarismos, então esses números não podem começar com o algarismo 0 na casa das dezenas, igual ao exemplo dado 02. Portanto, tem-se somente 3 possibilidades para a casa das dezenas (1, 2 ou 5) e quatro possibilidades para a casa das unidades (0, 1, 2 ou 5), pelo Princípio Multiplicativo, tem-se:

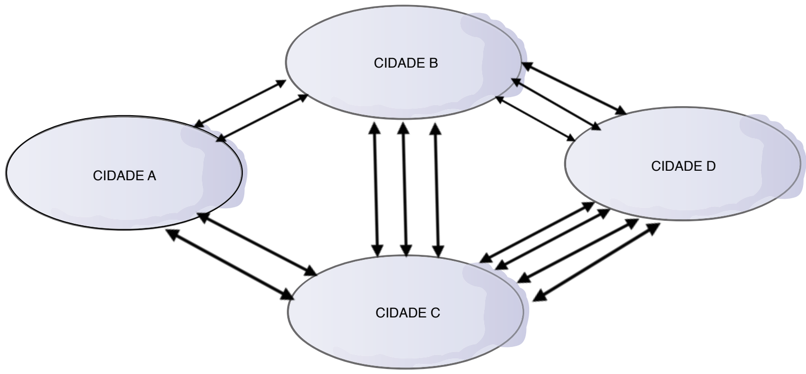
Casa das Dezenas x Casas das Unidades = $3x4$ = 12 números de dois algarismos

Logo, neste caso, haverá 12 números de dois algarismos diferentes que Maria listou (10, 11, 12, 15, 20, 21, 22, 25, 50, 51, 52 e 55).

[3] Questões retiradas do site da OBMEP acessado em 12 de novembro de 2017. (http://www.obmep.org.br).

**PROBLEMA 8.** A figura abaixo representam as estradas que ligam as cidades **A**, **B**, **C** e **D**. De quantas formas distintas é possível ir da cidade **A** para a cidade **D**, sem passar mais de uma vez pela mesma cidade?

Figura 7 - Estradas que ligam as cidades




Fonte: O autor, 2018.

**Resolução.** Para descobrir de quantas maneiras pode-se ir da cidade A para cidade D, tem-se que perceber que o viajante pode escolher quatro trajetos diferentes (Passando pela cidade B, Passando pela cidade C, Passando pela cidade B e depois pela cidade C, Passando pela cidade C e depois pela cidade B):

- Passando pela cidade B - Como existem 2 estradas de A pra B e 3 estradas de B pra D, usando o Princípio Multiplicativo, tem-se: 2 x 3 = 6 maneiras diferentes.
- Passando pela cidade C - Como existem 2 estradas de A pra C e 4 estradas de C pra D, usando o Princípio Multiplicativo, tem-se: 2 x 4 = 8 maneiras diferentes.
- Passando pela cidade B e depois pela cidade C - Como existem 2 estradas de A pra B, 3 estradas de B pra C e 4 estradas de C para D, e usando o Princípio Multiplicativo, tem-se: 2 x 3 x 4 = 24 maneiras diferentes.
- Passando pela cidade C e depois pela cidade B - Como existem 2 estradas de A pra C, 3 estradas de C pra B e 3 estradas de B para D, e usando o Princípio Multiplicativo, tem-se: 2 x 3 x 3 = 18 maneiras diferentes.

Pelo Princípio Aditivo tem-se um total de 6 + 8 + 24 + 18 = 56 maneiras diferentes se ir da cidade A para cidade D.

### 4.4 Permutação Simples

De acordo com Michaelis (2004), a permutação é a mudança de posição, ou a troca, ou a substituição de um elemento por outro.

Os agrupamentos que podem ser formados com uma quantidade definida de elementos, de modo que cada agrupamento formado se diferencie dos demais apenas pela ordem dos seus elementos são chamados de permutações.

**Definição 4.4.** Dados $n$ elementos distintos, ou objetos,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

o número de permutações, representado por $P_n$, é calculado pelo Princípio Fundamental da Contagem como:

$$P_n = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\quad \ldots \quad .2.1$$

**Fatorial de um número**

**Definição 4.5.** Segundo Goulart (2003), o fatorial de um número natural é o produto dos números naturais de 1 até $n$.

$$n! = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,.\quad \ldots \quad .2.1$$

Por exemplo:

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 120$

$4! = 4.3.2.1 = 24$

Por definição, tem-se que:

$1! = 1$

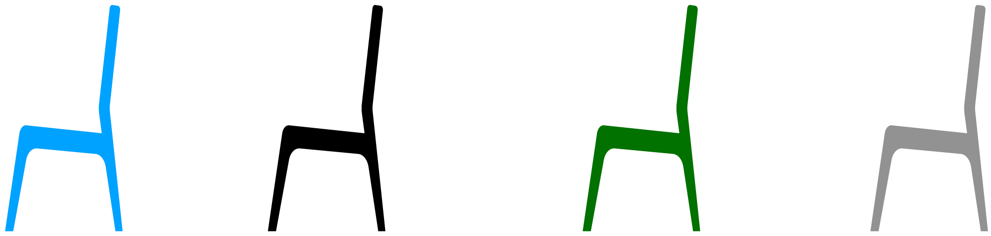
$0! = 1$

Portanto, tem-se que a Permutação de $n$ elementos distintos é:

$$P_n = n! \text{ para todo } n \in N.$$

**PROBLEMA 9.** De quantas maneiras diferentes 4 pessoas podem se sentar em quatro lugares diferentes?

Figura 8 - Quatro cadeiras para se sentar



Fonte: O autor, 2018.

**Resolução.** Na figura acima, mostra quatro cadeiras (azul, preta, verde e cinza), e cada cadeira vai ser ocupada por uma pessoa, então tem-se que calcular de quantas maneiras diferentes essas pessoas podem se sentar nessas cadeiras.

Como tem-se 4 pessoas e 4 cadeiras, estabelece-se uma ordem de escolha:

- Primeira pessoa a escolher possui 4 cadeiras
- Segunda pessoa a escolher possui 3 cadeiras
- Terceira pessoa possui 2 cadeiras
- Quarta pessoa possui apenas 1 cadeira

Aplicando o Princípio Multiplicativo, tem-se $4x3x2x1 = 24$ maneiras diferentes dessas quatro pessoas se sentarem. Abaixo listam-se todas essas possibilidades:

- começando com a cadeira azul APVC, APCV, AVPC, AVCP, ACPV, ACVP;
- começando com a cadeira preta PAVC, PACV, PVAC, PVCA, PCAV, PCVA;
- começando com a cadeira verde VAPC, VACP, VPAC, VPCA, VCAP, VCPA;
- começando com a cadeira cinza CAPV, CAVP, CPAV, CPVA, CVAP, CVPA.

**PROBLEMA 10.** Quantos ANAGRAMAS[4] podemos formar com a palavra PERDÃO?

**Resolução.** A palavra perdão possui 6 letras, todas diferentes, com isso pode-se usar a definição de permutação para resolver essa questão.

Pelo Princípio Multiplicativo:

Escolha da primeira letra - tem-se 6 possibilidades

Escolha da segunda letra - tem-se 5  possibilidades

Escolha da terceira letra - tem-se 4 possibilidades

Escolha da quarta letra - tem-se 3 possibilidades

Escolha da quinta letra - tem-se 2 possibilidades

Escolha da sexta letra – tem-se 1 possibilidade

Então, tem-se $6x5x4x3x2x1 = 720$ anagramas.

**PROBLEMA 11.** A Super Liga de Voleibol será decidida em um quadrangular final envolvendo as seguintes seleções: Brasil, Itália, Estados Unidos e França. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado?

**Resolução.** Pode-se resolver esse problema simplesmente usando o Princípio Multiplicativo, portanto, observa-se que existem três posições:

- Primeiro Colocação - Para ocupar a primeira posição tem-se 4 seleções;
- Segundo Colocação - Para a segunda tem-se 3, pois o time que estiver em primeiro lugar não poderá ocupar a segunda colocação ao mesmo tempo;
- Terceiro Colocação - Para o terceiro lugar só tem-se  2 seleções;

Assim, pelo o Principio Multiplicativo, tem-se: $4x3x2x1 = 24$ maneiras diferentes de formar o pódio.

---

[4] Anagrama é a transposição de letras de uma  palavra para formar outra palavra diferente.

**PROBLEMA 12.** De quantos maneiras diferentes 7 homens e 7 mulheres podem se sentar em 7 bancos de dois lugares, de modo que em cada banco fiquem apenas um homem e uma mulher?

**Resolução.** A primeira mulher terá 14 lugares para se sentar, a segunda terá 12, a terceira t10, a quarta 8, a quinta 6, a sexta 4, a sétima 2 lugares. Sendo assim, as mulheres terão: $12x10x8x6x4x2 = 46080$ maneiras diferentes das mulheres se sentarem.

Por outro lado, os homens terão sete lugares para se sentarem, logo tem-se que:

$P_7 = 7! = 5040$ maneiras diferentes de se sentarem.

Pelo Principio multiplicativo, obtém-se que:

$46080x5040 = 323243200$ maneiras diferentes que em cada banco fiquem apenas um homem e uma mulher.

**PROBLEMA 13:** De quantos podemos formar uma fila com 8 pessoas de modo que duas pessoas determinadas não fiquem juntas?

**Resolução.** Como a fila será composta de 8 pessoas, assim para determinar total de filas que podemos formar de modo que duas pessoas não fiquem juntas, tem-se que terminar o total de filas sem restrição menos o número de filas em que essas duas pessoas estão juntas.

Total de filas com as 8 pessoas sem restrição.

$P_8 = 8! = 40320$ maneiras distintas.

Total de filas com duas pessoas juntas.

$2.P_7 = 2.7! = 10080$ maneiras distintas.

Logo, tem-se:

$40320 - 10080 = 30240$ filas que duas pessoas determinadas não estão juntas.

## 4.5 Arranjo Simples

**Definição 4.6.** De acordo com Chavante *et al* (2016), o número de maneiras de organizar $p$ elementos de um conjunto de $n$ elementos, com $p \leq n$ é chamado de Arranjo Simples de $n$ elementos tomados $p$ a $p$.

E denota-se por $A_{n,p}$ a quantidade desse arranjo.

Sejam $n, p \in N$, com $p \leq n$, o número de Arranjos simples de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ será:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**PROBLEMA 14 ( Morgado et al., p.23, 2006).** O conjunto $A$ possui 4 elementos e o conjunto $B$ possui 7 elementos.

a) Quantas são as funções $f : A \to B$ ?

**Resolução.** Cada elemento do conjunto $A$ deve está associado a sua imagem no conjunto $B$. Existem 7 possibilidades de escolha para o primeiro elemento de $A$, 7 para o segundo, 7 para o terceiro e 7.

Pelo Princípio Multiplicativo, existe:

$$7x7x7x7 = 2401 \text{ funções} f : A \to B.$$

b) Quantas são as funções injetoras $f : A \to B$?

**Resolução.** Nesta caso, a função é injetora, cada elemento do conjunto $A$ deve estar associado a uma imagem diferente em $B$, portanto há um arranjo simples de 7 elementos de 4 $B$ tomados 4 a 4 elementos em $A$.

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 7.6.5.4 = 840 \text{ funções injetoras } f : A \to B.$$

## 4.6 Permutação Com Elementos Repetidos

Agora, tem-se que calcular o número de permutações com $n$ elementos quando pelo menos um deles se repetem.

**Exemplo.** Quantos anagramas podemos formar com a palavra VOO?

Começando pela letra **V**

Tem-se um único anagrama: **VOO**

Começando pela letra **O**

Tem-se duas possibilidades: **OVO** e **OOV**

Portanto, pode-se formar 3 anagramas com a palavra VOO.

**Definição 4.7.** De acordo com Morgado *et al* (2006), dados $n$ objetos dos quais $\alpha$ são iguais a $a$, $\beta$ são iguais a $b$, ..., $\lambda$ são iguais a $l$, de modo que $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$, o número de Permutações com repetição é dado por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ \ldots,\lambda}=\frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$$

**PROBLEMA 15.** Quantos são os anagramas da palavra PARALELEPÍPEDO que começam com vogal?

**Resolução.** A palavra é formada por 4 vogais diferentes (A, E, I, O), para descobrir o número de permutações tem-se que dividir:

Começando com a letra A: Tem-se três P's e três E's

$$P_{13}^{3,3}=\frac{13!}{3!.3!}=\frac{6227020800}{6.6}=172972800$$

Começando com a letra E: Tem-se três P's e 2 E's

$$P_{13}^{3,2}=\frac{13!}{3!.2!}=\frac{6227020800}{6.4}=259459200$$

Começando com a letra I: Tem-se três P's, dois A's e três E's

$$P_{13}^{3,2,3} = \frac{13!}{3!.2!} = \frac{6227020800}{6.4.6} = 43243200$$

Começando com a letra O: Tem-se três P's, dois A's e três E's

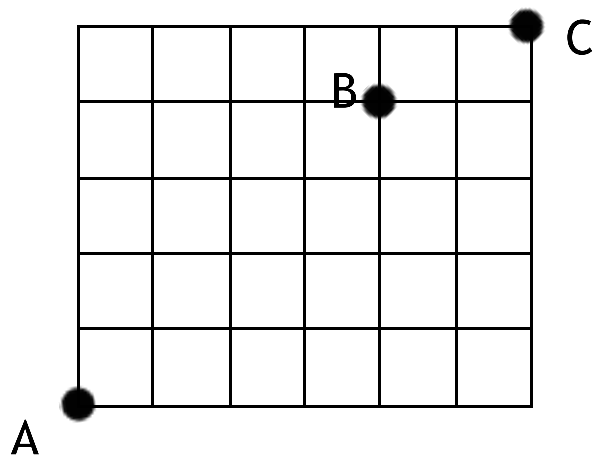
$$P_{13}^{3,2,3} = \frac{13!}{3!.2!} = \frac{6227020800}{6.4.6} = 43243200$$

Pelo Principio Aditivo tem-se:

$$172972800 + 259459200 + 43243200 + 43243200 = 518918400$$

anagramas começando com vogal.

**PROBLEMA 16 (Morgado et al, p. 51, 2006).** A figura abaixo, representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste.




a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

**Resolução.** Para determinar o número de trajetos distintos que ligam os pontos A e B, deve-se perceber que existem o viajante deve dar cinco vezes para cima e seis vezes para a direita, sendo um total de 11 passos. Logo, temos uma permutação de 11 elementos com a repetição de 5 passos para cima e 6 passos para direito.

$$P_{11}^{5,6} = \frac{11!}{5!.6!} = \frac{11.10.9.8.7.6!}{5!.6!} = \frac{55440}{120} = 462$$

Portanto, temos 462 trajetos ligando o ponto A ao ponto B.

b) Quantos desses trajetos passam não passam por C?

**Resolução.** Para ir de A para B passando por C, tem-se que considerar os trajetos:

- A para C - 4 passos pra cima e 2 para a direita, num total de 6 passos.

$$P_{8}^{4,4} = \frac{8!}{4!.4!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!.4!} = \frac{1680}{24} = 70 \text{ trajetos diferentes.}$$

- C para B - 1 passo pra cima e 2 para a direita, num total de 3 passos.

$$P_{3}^{1,2} = \frac{3!}{1!.2!} = \frac{3.2!}{1.2!} = 3 \text{ trajetos diferentes.}$$

Pelo Princípio multiplicativo, obtém-se $70x3 = 210$ trajetos que passam por C.

Portanto, como existem um total de 462 trajetos de A para B e 210 trajetos que passam por C. Logo, tem-se que existem $462 - 210 = 252$ trajetos que não passam pelo ponto C.

### 4.7 Permutações Circulares

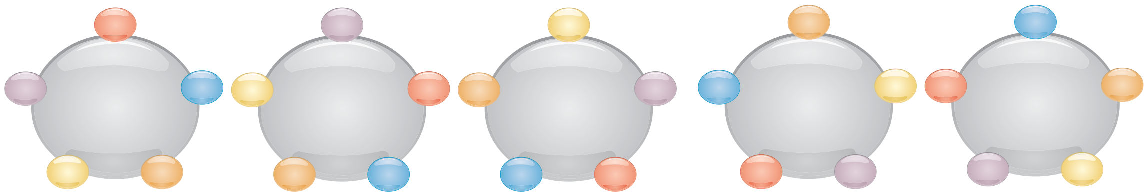
**Definição 4.8.** Segundo Morgado *et al.* (2006), a quantidade de maneiras distintas que se pode organizar $n$ elementos diferentes em torno de um círculo é chamado de Permutação Circular, e pode ser representado por $(PC)_n$.

$$(PC)_n = (n-1)!$$

**PROBLEMA 17.** De quantas maneiras podemos colocar 5 crianças para brincar de roda?

**Resolução.** A figura abaixo mostra uma formação de uma roda, com as 5 crianças, onde a ordem das crianças não está sendo trocada, somente há a rotação.

Figura 9 - Crianças brincando de roda



Fonte: O autor, 2018.

Portanto, quando há a rotação sem a troca da ordem das crianças, não há um novo agrupamento.

Logo, para descobrir o número de maneiras de colocar 5 crianças em uma roda será:

$$(PC)_5 = (5-1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24 \text{ maneiras diferentes.}$$

**PROBLEMA 18.** Em uma família de 8 pessoas composta por:

- Um pai
- Uma mãe
- Seis filhos.

De quantos modos diferentes essa família poderá se sentar em torno de uma mesa redonda de maneira que o pai e a mãe não fiquem juntos?

**Resolução.** Neste problema existe uma restrição, no qual o pai e mãe não devem ficar juntos. Para facilitar o a resolução, tem-se que calcular o total de modos que esta família poderá se sentar sem a restrição, e diminuir pelo número de maneiras que os pais estão sentados juntos, pois pode-se que colocar o pai e mãe como uma pessoa só, passamos a ter somente 7 pessoas.

O total de maneiras que a família poderá se sentar a mesa: Permutação Circular de 8 pessoas será:

$(PC)_8 = (8-1)! = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ maneiras diferentes.

O total de maneiras que a família poderá se sentir a mesa, com o pai e a mãe juntos: Permutação Circular de 7 pessoas, sendo que devemos levar em consideração a ordem dos pais, pois quando se muda a ordem do pai com a mãe irá ocasionar em um novo agrupamento. Portanto, tem-se que multiplicar o número das Permutações por 2.

$2.(PC)_7 = 2.(7-1)! = 6! = 2.6.5.4.3.2.1 = 1440$ maneiras diferentes

Logo, o número de possibilidades desta família sentar-se ao redor da mesa com pai e mãe não sentando juntos será:

$5040 - 1440 = 3600$ maneiras diferentes.

### 4.8 Contando Grupos - Combinação Simples

Os problemas anteriores tratava-se de agrupamentos no qual a ordem de seus elementos eram levados em consideração, isto significa, ao trocar um elemento de lugar com outro de mesmo agrupamento, ocasionava-se em um novo agrupamento. No entanto, existem problemas de contagem em que a ordem de seus elementos ao serem trocados de lugar, não altera o agrupamento. Observe a seguinte situação, para identificar esse tipo de agrupamento.

**Exemplo.** Se há quatro alunos (Pedro, Tiago, Maria e Sara), e quer-se formar duplas entre esses alunos. De quantas maneiras diferentes essas duplas podem ser formadas? Neste problema, observa-se que a dupla (Pedro e Tiago) e (Tiago e Pedro) é a mesma dupla, pois, mesmo se alterar a ordem, a dupla vai ser a mesma. Assim, tem-se que retirar as duplas iguais.

$$\{\text{Pedro e Tiago}\} = \{\text{Tiago e Pedro}\}$$
$$\{\text{Pedro e Maria}\} = \{\text{Maria e Pedro}\}$$
$$\{\text{Pedro e Sara}\} = \{\text{Sara e Pedro}\}$$
$$\{\text{Tiago e Maria}\} = \{\text{Maria e Tiago}\}$$
$$\{\text{Tiago e Sara}\} = \{\text{Sara e Tiago}\}$$
$$\{\text{Maria e Sara}\} = \{\text{Sara e Maria}\}$$

Portanto, portanto poderá ser formada somente 6 duplas distintas.

**Definição 4.9.** Segundo Chavante *et al* (2016), chama-se de Combinação Simples o agrupamento de $p$ elementos diferentes escolhidos do conjunto de $n$ elementos, com $p \leq n$, no qual a diferença de um agrupamento para outro é dada somente pelos seus elementos, e não pela ordem que se encontram.

Sejam $n, p \in N$, com $p \leq n$, o número de Combinações Simples de $n$ elementos tomados $p$ a $p$ será:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$$

Também existem outras notações para denotar a Combinação Simples:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$$

ou

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$$

Observe outro exemplo a seguir.

**Exemplo.** Pedro quer fazer uma salada de frutas, e ele tem 5 frutas diferentes (banana, morango, uva, abacaxi e laranja) pra escolher, mas Pedro quer usar somente 3 frutas dentre essas 5 frutas. De quantas maneiras diferentes Pedro poderá formar essa salada de frutas?

**Resolução.** Para resolver esse problema, primeiros nomeiam-se as frutas como: **B** - banana; **M** - morango; **U** - uva; **A** - abacaxi; **L** - laranja.

É importante saber que ao escolher três frutas, a ordem de escolhas das frutas não fará diferença nos elementos dos grupos formados, de modo que **BMU** e **MUB** correspondem à mesma salada de frutas. Escrevendo todas as possibilidades de escolha das saladas de frutas tem-se:

**BMU, BMA, BML, BUA, BUL, BAL, MUA, MUL, MAL e UAL.**

Assim, Pedro poderá escolher 10 saladas de frutas diferentes.

Observe que nos dois exemplos anteriores formamos grupos ou conjuntos de elementos onde a ordem dos elementos não importa. Neste caso, tem-se que lembrar sempre de retirar as repetições.

**PROBLEMA 19.** Num grupo de 7 pessoas, quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas?

**Resolução.** Observe que as comissões correspondem a escolha de 4 pessoas dentre as 10 pessoas do grupo e não existe distinção entre a ordem de escolhas das pessoas.

Usando o Princípio Fundamental da Contagem, tem-se que escolher as pessoas que irão integrar essa comissão uma a uma:

Para o primeiro integrante - 7 pessoas

Para o segundo integrante - 6 pessoas

Para o terceiro integrante - 5 pessoas

Para o quarto integrante - 4 pessoas

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, tem-se que $7x6x5x4 = 840$ comissões. Mas como a ordem dos integrantes da comissão não importa, tem-se que cada comissão está multiplicada pelo número de permutações das quatro pessoas, logo $4x3x2x1 = 24$ é o número de permutações das 4 pessoas.

Então, para determinar os números de comissões tem-se que dividir 840 por 24. Logo, podem ser formadas 35 comissões distintas.

Outra maneira de solucionar é entender que as comissões correspondem a Combinação Simples de 7 pessoas sendo escolhidas 4 a 4.

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4!\,.\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,.\,3!} = \frac{7.6\,.\,5.4!}{4!\,.\,3!} = \frac{7.6\,.\,5}{3.2\,.\,1} = \frac{210}{6} = 35 \text{ comissões com 4 pessoas.}$$

Assim, conclui-se pelo exercício anterior, para resolver problemas de combinações, ou seja, agrupamentos no qual a ordem de seus elementos não importa, tem-se que descobrir o número de combinações simples, porém é necessário destacar que cada uma das combinações pode ter sido contada mais de uma vez. Como por exemplo, num grupo de 8 pessoas deseja-se formar comissões com 3 pessoas, logo tem-se $8x7x6 = 336$ maneiras, porém, se trocar a ordem das pessoas que pertencem a mesma comissão, ela continua sendo o mesma. Então, é necessário tirar o número de permutações das pessoas que fazem parte da mesma comissão $3x2x1 = 6$, Com isso, tem-se:

$$\frac{8x7x6}{3x2x1} = \frac{336}{3x2x1} = 56 \text{ comissões de 3 pessoas que se pode formar num grupo de 8 pessoas.}$$

**PROBLEMA 20.** Durante uma cerimônia de formatura, cada um dos 20 formandos cumprimentou uma única vez (com um aperto de mãos) cada um de seus colegas e cada um dos 4 professores presentes à cerimônia. Além disso, cada um dos quatro professores também cumprimentou cada um de seus colegas uma única vez. Responda:

a) Quantos apertos de mãos foram dados somente entre os alunos?

**Resolução.** Neste caso, só valerá o aperto de mãos entre os alunos, e tem-se que pensar que o aperto de mãos entre duas pessoas só poderá ser contado uma única vez, isto é, por exemplo, o aluno A apertando a mão do aluno B será o mesmo do aluno B apertando a mão do aluno A,

Cada um dos 20 alunos apertará a mão de 19 alunos diferentes, portanto pelo princípio Multiplicativo, tem-se que: $20x19 = 380$, mas como, neste caso, a ordem dos elementos nos grupos não fará diferença, precisa-se dividir 380 por dois, pois cada aperto de mão está sendo contado duas vez.

Portanto, tem-se:

$$\frac{20.19}{2} = \frac{380}{2} = 190 \text{ apertos de mãos entre os alunos.}$$

b) Quantos apertos de mãos foram dados somente entre os professores?

**Resolução.** Como foi visto no item (a), tem-se somente 4 professores.

Portanto, para determinar o número de aperto de mãos entre os professores, tem-se que:

$$\frac{4.3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ apertos de mãos entre os professores.}$$

c) Quantos apertos de mãos foram dados somente entre os alunos e professores?

**Resolução.** Como existem 20 alunos e 4 professores tem-se:

$$\frac{20.4}{2}=\frac{80}{2}=40 \text{ apertos de mãos entre alunos e professores.}$$

d) Quantos apertos de mãos foram dados durante essa cerimônia?

**Resolução.** Para determinar o número total de aperto de mãos, será considerado:

O número de aperto de mãos somente entre alunos: 190 apertos de mãos.

O número de aperto de mãos somente entre professores: 6 apertos de mãos.

O número de aperto de mãos somente entre alunos e professores: 40 apertos de mãos.

Portanto, pelo Princípio Aditivo tem-se um total de $190+6+40=236$ apertos de mãos.

**PROBLEMA 21.** Em uma empresa há 6 gerentes, 7 administradores e 20 vendedores. Quantas comissões podemos formar com 2 diretores, 3 administradores e 5 vendedores?

**Resolução.** Para resolver este problema, tem-se que considerar a escolha de 2 gerentes de 6 possíveis, 3 administradores de 7 e 5 vendedores de 20. Como a ordem dos componentes de cada agrupamento não importa, logo usar-se-á Combinação Simples para:

➢ Escolher 2 gerentes: Combinação de 6 gerentes tomados 2 a 2.

$$C_{6,2}=\frac{6!}{2!\,.\,(6-2)!}=\frac{6!}{2!\,.\,4!}=\frac{6.5\,.\,4!}{2!\,.\,4!}=\frac{6.5}{2.1}=\frac{30}{2}=15 \text{ possibilidades de escolha.}$$

➢ Escolha de 3 administradores: Combinação Simples de 7 administradores tomados 3 a 3.

$$C_{7,3}=\frac{7!}{3!\,.\,(7-3)!}=\frac{7!}{3!\,.\,4!}=\frac{7.6\,.\,5.4!}{3!\,.\,4!}=\frac{7.6\,.\,5}{3.2\,.\,1}=\frac{210}{6}=35 \text{ possibilidades de escolha.}$$

➢ Escolha de 5 vendedores: Combinação Simples de 20 vendedores tomados 5 a 5.

$$C_{20,5}=\frac{20!}{5!\,.\,(20-5)!}=\frac{20!}{5!\,.\,15!}=\frac{20.19\,.\,18.17\,.\,16.15!}{5!\,.\,15!}=\frac{20.19\,.\,18.17\,.\,16}{5.4\,.\,3.2\,.\,1}=\frac{1860480}{120}=15504$$

possibilidades de escolha.

Pelo Princípio Multiplicativo, tem-se que:

$$15x35x15504 = 8139600 \text{ comissões que podemos formar.}$$

**PROBLEMA 23.** De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em dois grupos de 5?
**Resolução.** O primeiro grupo será escolhido da seguinte maneira:
Combinação simples de 10 elementos tomados 5 a 5.

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!.(10-2)!} = \frac{10!}{5!.5!} = \frac{30240}{120} = 252 \text{ maneiras diferentes .}$$

Para a formação do segundo grupo será apenas uma possibilidade, pois como restaram 5 pessoas para formar um grupo de cinco pessoas.

Embora, ao considerar uma divisão sendo primeiro grupo{a, b, c, d, e} e o segundo grupo {f, g, h, i, j} será a mesma divisão do primeiro sendo {f, g, h, i, j} e o segundo {a, b, c, d, e}, sendo assim, a cada divisão foi contada duas vezes.

Portanto, para determinar o número de grupos será necessário que dividir por 2.

$$\frac{C_{10,5} \cdot 1}{2} = \frac{252}{2} = 126 \text{ grupos de 5 pessoas.}$$

# 5 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, serão apresentadas propostas de atividades para serem aplicadas em turmas do sexto ano do Ensino Fundamental. Elas apresentam uma abordagem da Análise Combinatória onde, neste estágio inicial, pretende-se que o aluno utilize o diagrama de possibilidades e o principio multiplicativo para resolver as atividades sem fazer uso das fórmulas para contar os números de permutações ou combinações de determinados agrupamentos. .

As atividades foram elaboradas de acordo com o nível cognitivo dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Nas atividades que se seguem considera-se o “tempo previsto”, para cada módulo, uma aula de 50 minutos.

Cada grupo de atividade foi separada de acordo com os tipos de agrupamentos, para que o aluno entenda a diferença entre eles.

As atividades propostas foram elaboradas tendo como referencial teórico o material contidos em Chavantes e Prestes (2016), Morgado et al. (2006), Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Canguru de Matemática Brasil e Fomin et al. (2012).

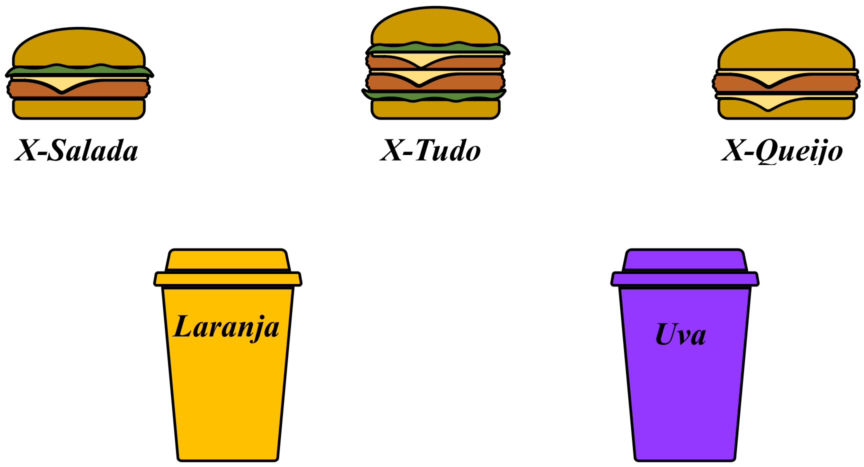
Atividade I

Objetivo Geral: Examinar e explorar as noções de Combinatória.

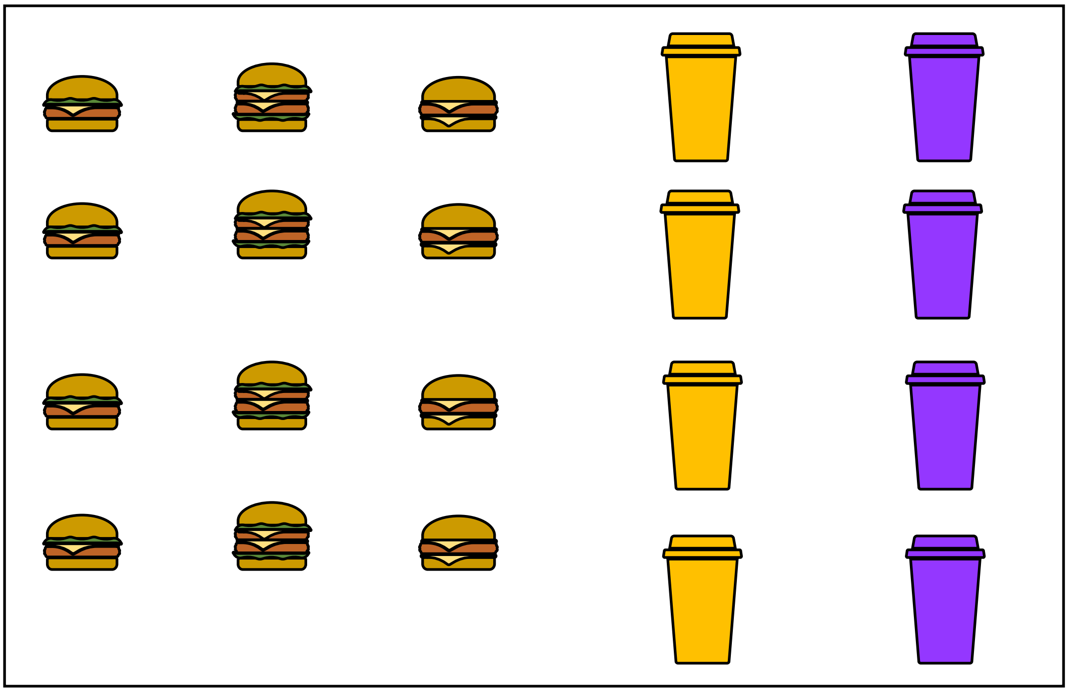
Objetivo Específico: Inserir a noção do Princípio Multiplicativo.

Material Utilizado:  Caneta, Lápis, borracha, cola, lápis de cor e uma folha de papel A4.

**Atividade 1.** João foi a uma lanchonete para fazer um lanche. Chegando lá observou que existiam somente 2 sabores de suco (laranja e uva)  e 3 tipos de hambúrgueres (X-Salada, X-Tudo e X-Queijo). Ele quer pedir um suco e um hambúrguer. De quantas maneiras diferentes João poderá  pedir um suco e um hambúrguer?




Primeiro, será distribuída para os alunos,  uma folha com as figuras  de hambúrgueres e sucos,  que serão recortadas e coladas com o objetivo de formar todas as  maneiras de escolha de um lanche. Utilizando em cada escolha um hambúrguer e um suco.



A quantidade de figuras foi colocada de modo proposital, para que o aluno observe se tem a necessidade de utilizar todas as opções ou se esse número não é suficiente para a realização de tarefa.

A quantidade de hambúrgueres e de suco foi escolhida de modo que os alunos consigam montar as escolhas de lanches. É provável que os alunos resolvam esta questão utilizando todas as possibilidades , realizando a colagem de todas as possibilidades.

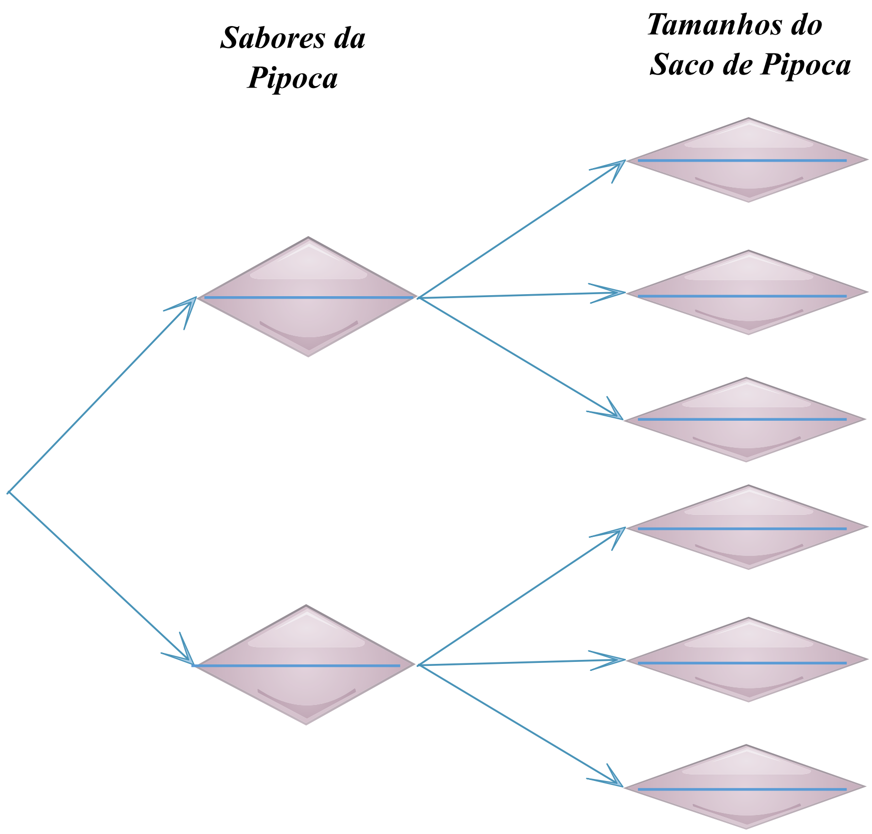
**Atividade 2.** Joana foi ao cinema assistir ao novo filme dos Vingadores. Ela quer comprar um saco de pipocas e um refrigerante, para consumir durante a exibição do filme. Na bomboniere do cinema existem as seguintes opções:

- ➢ Pipocas: doce ou salgada.

  Tamanhos dos sacos de pipocas: pequeno, médio ou grande
- ➢ Refrigerante: Coca Cola, Guaraná ou Fanta-Uva

  Tamanhos dos copos: 200 ml, 350 ml, 500 ml ou 700 ml

a) Faça o diagrama de árvore para a escolha do sabor e do tamanho do saco de pipocas preenchendo a figura abaixo.




b) De quantas maneiras diferentes João poderá pedir um saco de pipocas?

c) Faça o diagrama de árvore para a escolha do sabor e do tamanho de um refrigerante, da mesma maneira que você fez para determinar o número de maneiras diferentes de se escolher o sabor e o tamanho do saco de pipocas.

d) De quantas maneiras diferentes João poderá pedir um copo de refrigerantes?

e) De quantas maneiras diferentes João poderá fazer o pedido de um saco de pipocas e um copo de refrigerante?

**Atividade 3.** Pedro foi convidado para duas festas neste fim de semana, uma no sábado e outra no domingo. Ele irá às duas festas, vestindo uma camisa no sábado e outra no domingo escolhidas entres as suas 5 camisas novas de cores: preta, branca, azul, verde e cinza. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher duas camisas para ir à essas festas, sabendo que ele não irá repetir a mesma camisa?

**PROBLEMA 4 (CANGURU 2017 - PROVA E).** Num zoológico há uma girafa, um elefante, um leão e uma tartaruga, cada qual no seu lugar. Suzana pretende ir ao zoológico e ver somente dois desses animais. Ela não quer começar sua visita pelo leão. De quantas formas diferentes ela pode planejar seu passeio no zoológico?

Atividade II

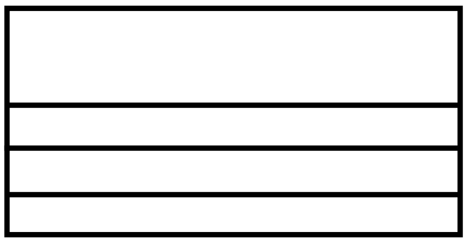
Objetivo Geral: Examinar e explorar as noções de Combinatória.

Objetivo Específico: Inserir a noção do Princípio Multiplicativo.

Material Utilizado: Caneta, Lápis e borracha.

**Atividade 1.** Quantos números naturais de quatros algarismo diferentes podem ser formados?

**Atividade 2.** João tem 4 cores (azul, vermelho, preto e amarelo) para colorir a bandeira abaixo. De quantos modos diferentes ela poderá colorir esta bandeira, de maneira que os retângulos adjacentes (vizinhos) recebam cores diferentes e cada retângulo seja colorida de uma cor?



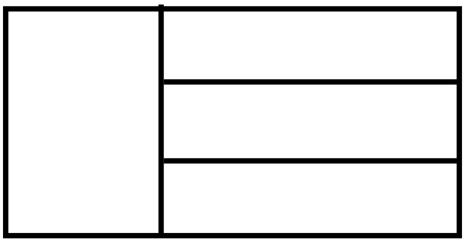
**Atividade 3 (OBMEP 2011 - 2ª FASE).** Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como os da figura, marcando um X em cada linha.


a) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?

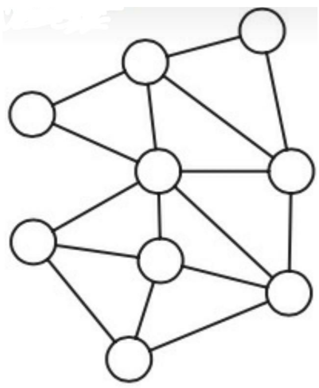
b) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?

**Atividade 4.** Qual é o total de números de 3 algarismos, que começa com um algarismo par e termina com um algarismo primo que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 e 9?

**Atividade 5 (QUADRANTE - CHAVANTE, PRESTES, 2016, p.15).** Tendo 5 cores disponíveis para colorir a bandeira a seguir, determine a quantidade de maneiras diferentes que essa bandeira pode ser colorida, de modo que retângulos adjacentes (vizinhos) recebam cores diferentes e cada retângulo seja colorido com uma cor.



**Atividade 6 (OBMEP 2012 - 1ª FASE):** De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



Atividade III

Objetivo Geral: Examinar e explorar as noções de Combinatória.

Objetivo Específico: Inserir a noção de permutação.

Material Utilizado: Caneta, Lápis e borracha.

**Atividade 1.** Participaram 20 pilotos do GP Brasil de Fórmula 1 de 2017. De quantas maneiras diferentes poderá formar o pódio com os três primeiros colocados, sabendo que 4 pilotos não conseguiram completar a prova?

**Atividade 2.** De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em seis cadeiras que estão em uma fila?

**Atividade 3.** Participaram 20 pilotos do GP Brasil de Fórmula 1 de 2017. De quantas maneiras diferentes poderá formar o pódio com os três primeiros colocados, sabendo que 4 pilotos não conseguiram completar a prova?

**Atividade 4.** Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

**Atividade 5.** Quantos anagramas da palavra ALUNOS começam com vogal e terminam com consoante?

**Atividade 6.** Nove pessoas querem formar uma fila para comprar ingressos num teatro, sabendo que neste grupo existe um casal que vai ficar juntos. De quantas maneiras distintas eles podem formar esta fila?

Atividade IV

Objetivo Geral: Examinar e explorar as noções de Combinatória.

Objetivo Específico: Inserir noções de combinatória.

Material Utilizado: Caneta, Lápis e borracha.

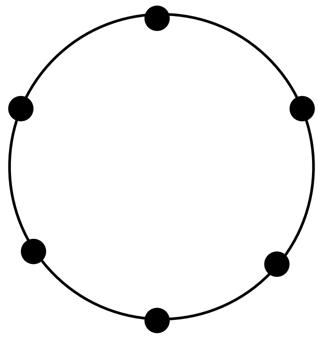
**Atividade 1.** Mônica foi à sorveteria do Seu João, para tomar um saboroso sorvete. Chegando lá, ela observou que havia somente 4 sabores diferentes: coco, morango, chocolate e baunilha. De quantas maneiras diferentes Mônica poderá pedir um soverte com duas bolas de sabores diferentes?

**Atividade 2.** Numa sala de aula há 20 alunos, a professora de Matemática pediu aos alunos que fizessem duplas para realizar uma atividade. De quantas maneiras diferentes os alunos poderão formar essas duplas?

**Atividade 3.** Estão participando de um campeonato de futebol 20 times, no qual cada time jogará ida uma única vez com os outros participantes. Quantos jogos distintos serão necessários para o campeonato?

**Atividade 4.** Numa sala de aula há 15 alunos. Quantas grupos distintos de 3 pessoas pode-se formar?

**Atividade 5.** Em uma circunferência foram marcados 6 pontos, conforme a figura abaixo.



Responda:

a) Quantos triângulos diferentes podemos formar ligando os pontos?

b) Quantos quadriláteros diferentes podemos formar ligando os pontos?

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma razão paras se iniciar o estudo da Análise Combinatória nas turmas do sexto ano do ensino fundamental é facilitar o entendimento da matéria quando for estudada de forma mais aprofundada no Ensino Médio, e também os alunos irão consolidar o estudo dos números naturais, utilizando suas propriedades e operações para a resolução dos problemas propostos. Também vale destacar que é de muito valor o progresso oral e escrito entre alunos e professores para que conceitos sejam incorporados. Dessa forma, a construção desse conhecimento não é quebrada, mas é encadeada por experiências anteriores.

A segunda, está associada ao projeto que é promovido dentro das escolas, pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBMEP). Esta tem como objetivo divulgar e estimular o ensino da Matemática, procurando por aqueles que mais se destacam dentro da disciplina e incentivando-os para o ingresso na área científica. Visto que foi observado que as provas dos anos 2011 até 2017 reuniam questões referentes à Análise Combinatória , introduzir este assunto aos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental vai permitir-lhes desenvolver o raciocínio e habilidades necessários para resolver problemas combinatórios que já fazem parte do seu cotidiano, além de prepará-los para participar de olimpíadas de matemática. Então é importante que os alunos tenham o devido desenvolvimento cognitivo, aprimorando as suas habilidades na resolução de problemas e o seu conhecimento matemático.

É importante salientar que o educador tem um papel de extrema relevância na construção da estrutura cognitiva do aprendiz. É ele quem direciona com seu discurso dando suporte na execução das atividades. Porém, o eixo principal é mostrar a possibilidade de usar a resolução de problemas como uma metodologia no ensino da Análise Combinatória aplicando apenas o princípio multiplicativo, sem a a utilização de fórmulas que normalmente são usadas de forma mecânica. Pois eles acabam usando essas técnicas sem ao menos saber o sentido que elas possuem. Sendo assim, o educador deve proporcionar fatos referentes ao seu cotidiano que desperte um interesse que os desafie. No entanto, sempre será preciso uma avaliação dos erros que os alunos apresentarem, de modo que se compreenda a linha de raciocínio que eles têm utilizado.

É possível concluir que os alunos devem atribuir um problema de combinatória a sua prática de vida sem mesmo precisar fazer o uso de ferramentas de fórmulas, entendendo que há uma importância muito maior no seu desenvolvimento cognitivo e raciocínio lógico do que um simples resultado. É necessário que aproxime a matemática do indivíduo de forma natural, para que ele se torne um cidadão com qualificação.

Para o trabalho futuro, por haver indisponibilidade de tempo, esse conteúdo será aplicado aos alunos de uma escola municipal, e avaliado para entender na prática quais foram os pontos positivos e os pontos negativos, para poder refletir e assim promover um melhor aprendizado.

**REFERÊNCIAS**

BALESTRI, Rodrigo Dias. **Matemática:** Interações e Tecnologia - Volume 2. 2ª ed, São Paulo: Editora Leya, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasilia: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em: 12 de Jan. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.>. Acesso em: 15 Ago. 2017.

CARVALHO, Paulo. **Métodos de contagem e probabilidade.** 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA e OBMEP, 2015.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante:** Matemática volume 2. 1ª ed. São Paulo: Editora SM, 2016.

COSTA, Elisângela. **Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do ensino médio.** 2013. 108 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2013.

DANTE. Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática.** 12ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2007.

______. **Didática da resolução de problemas de matemática:** 1º a 5º séries para estudantes do curso de magistério e professores do 1º grau. 4ª ed. São Paulo: Editora Ática, 1994.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática:** Representação e construção em geometria. 1ª ed, Porto Alegre: Editora ARTMED, 1999.

FERNANDEZ, Cosme. **O ensino de análise combinatória através da resolução de problemas.** 2016. 87 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA, Mossoró, Rio grande do Norte, 2016.

FOMIN, Dimitri, et al. **Círculos matemáticos:** A experiência russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no ensino médio:** Volume II. 3ª ed. São Paulo: Editora Scipione, 2008.

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à aritmética.** 1ª ed. Rio de Janeiro: IMPA e OBMEP, 2015.

IEZZI, Gelson; DOLCE, et al. **Matemática:** ciência e aplicações - volume 2. 9ª ed, São Paulo: Editora Saraiva, 2017.

IMENES, Luiz M.; LELLIS Marcelo. **Matemática:** sexto ano. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

JULIANELLI, José.; et al. **Curso de análise combinatória e probabilidade:** Aprendendo com a resolução de problemas. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

KLUTH, Verilda S.; ANASTACIO, MARIA Q. A. **Filosofia de educação matemática:** debates e confluências. 1ª ed, São Paulo: Editora Centauro, 2009.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar:** traduzido por hygino h. domingues olga corpo. 6ª reimpr. São Paulo: Editora Atual, 1997.

LOPES, Maria L. M. L. **Historias para introduzir noções de combinatória e probabilidade.** Instituto de Matemática - UFRJ - Projeto Fundão. Rio de Janeiro, 2004.

MICHAELIS: Moderno Dicionário da Língua Portuguesa. 1. ed. São Paulo: Melhoramentos, 2004.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta.** 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2014.

MORGADO, A.C.; et al. **Análise combinatória e probabilidade.** 9ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** Um novo aspecto do método matemático - Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpr. Rio de Janeiro: Editora Interciência LTDA, 1995.

RIOS, Dermival Ribeiro. **O grande dicionário unificado da língua portuguesa.** 8ª ed. São Paulo: Editora DCL, 2009.

SAMPAIO, Simaia. **Dificuldades de aprendizagem:** A psicopedagogia na relação sujeito, família e escola. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora WAK, 2009.