Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Alcione Ludgério Marcelino

Estudando sobre os números racionais no ensino fundamental

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Alcione Ludgério Marcelino

ESTUDANDO SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

M298e
2018

Marcelino, Alcione Ludgerio, 1960-
Estudando sobre os números racionais no ensino fundamental / Alcione Ludgerio Marcelino. - Florestal, MG, 2018.
vii, 50f : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.
Orientador: Mehran Sabeti.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.49-50.

1. Números racionais. 2. Matemática (Ensino fundamental). I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

512.7

Alcione Ludgério Marcelino

ESTUDANDO SOBRE OS NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Aprovada: 29 de junho de 2018.

Danielle Franco Nicolau Lara

Luis Alberto D'Afonseca

Rodrigo Geraldo do Couto

Mehran Sabeti
(Orientador)

Agradecimentos

A Deus e a Nossa Senhora, por estarem sempre me guiando, iluminando meus passos nessa trajetória.

Ao professor Mehran, pela generosidade de me acolher como orientador, sempre paciente e disponível para me auxiliar nas minhas dúvidas e indagações.

À professora Elisângela que, na nossa breve convivência, mostrou-se uma pessoa íntegra e profissional, possibilitando-me crescimento ético e de cidadania.

À minha filha Letícia, amiga e parceira desde o seu nascimento.

Aos meus colegas de mestrado, pela amizade, pelos ensinamentos, pela troca de conhecimentos e pela convivência.

Resumo

MARCELINO, Alcione Ludgério, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, junho de 2018. **Estudando sobre os números racionais no ensino fundamental**. Orientador: Mehran Sabeti.

O Ensino da Matemática, de acordo com a realidade brasileira, requer uma atenção especial aos conteúdos básicos. Segundo Boulos (2001), "[...]a compreensão de determinadas disciplinas fica prejudicada pela falta de conhecimentos básicos[...]". Considerando essa ideia, buscou-se, neste trabalho, abordar o estudo dos números racionais no ensino fundamental, destacando, numa linguagem simples, a definição, as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão e suas propriedades. Para tanto, o trabalho foi organizado e elaborado em etapas: aplicação de um questionário-diagnóstico a alunos do 5º ano; apresentação dos resultados obtidos; promoção de oficina de números racionais, por meio do *software* Geogebra; análise dos resultados da oficina; entrevistas semi-estruturadas com professores de Matemática e sua análise; exposição da abordagem do conjunto dos números racionais em seis livros didáticos e as considerações finais.

Abstract

MARCELINO, Alcione Ludgério, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, June, 2018. **Studying about rational numbers in elementary school.**. Adviser: Mehran Sabeti.

The teaching of mathematics, according to the Brazilian reality, requires special attention to the basic contents. According to Boulos (2001) , "[...]the comprehension of certain disciplines is hindered by the lack of basic knowledge[...]". Considering this idea, this work seeks to approach the study of rational numbers in elementary school, highlighting, in a simple language, the definition of the rational numbers, adding, subtracting, multiplying, dividing and their proprieties. The work has been developed through the stages: an application of a diagnostic-questionnaire on 5th grade students; study of the results; a Workshop of rational numbers, utilizing the Geogebra software; analysis of the results after the application of the workshop; a simple interview with math teachers, about teaching of rational numbers; exposition of the way in which the set of rational numbers is presented in learning books; and final considerations.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O ensino-aprendizagem da matemática no ensino fundamental tem revelado a dificuldade do estudante em entender conceitos necessários ao aprendizado das frações, especificamente nas operações básicas de soma, subtração, multiplicação e divisão. Com o objetivo de realizar uma abordagem que favoreça ao aluno a apropriação de tal conhecimento, propomos um estudo sobre o ensino dos números racionais. A apresentação das noções introdutórias é administrada de modo a tornar a sua compreensão pelo aluno o mais simples possível. A utilização automática de algoritmos para resolução de problemas de divisão com frações é um exemplo de mecanismo da transferência de conteúdo. Dessa forma, incorre-se no risco de favorecer uma assimilação superficial dos conteúdos. Com base na experiência da pesquisadora, observa-se, por exemplo, que em uma simples soma de frações, muitas vezes não é aplicada a classe de equivalência [17], reduzindo os denominadores a um denominador comum. Verifica-se que é recorrente que os discentes, ao realizar operações com frações, somem numerador com numerador e denominador com denominador.

No Ensino Fundamental, dissemina-se a ideia de que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais, sem abordar o fato de que os elementos do conjunto dos números racionais são classes de equivalência de pares de inteiros, conforme afirma Cesar Milies (2006)[17],

$$\text{para } (a,b),(c,d) \quad \epsilon \quad Z \times Z^*$$

$$\text{Se} \quad ad = bc \quad \Longleftrightarrow \quad (a,b) \sim (c,d)$$

A matemática, conforme *Ubiratan D'Ambrosio* no livro Educação matemática da teoria à prática–11ª edição – 2004, comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas em suas experiências mais simples como contar, comparar e operar quantidades. Nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade. Também é um instrumental importante nas diferentes áreas do conhecimento por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza, como às ciências sociais, e por estar presente na composição musical, na coreografia, na arte e nos esportes. Essa potencialidade do conhecimento matemático deve ser explorada, da forma mais ampla possível, no ensino fundamental. Para tanto, é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana, em atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção do conhecimento em outras áreas.

Para evidenciar que existem falhas na compreensão do sistema de números racionais, será realizado um levantamento, por meio de aplicação de um diagnóstico, tendo como público-alvo alunos do ensino fundamental. Inclui-se também, nesse projeto, a análise de livros didáticos para posterior apresentação de propostas metodológicas e uma troca de ideias com professores do ensino fundamental e médio sobre a utilização das frações na apresentação de um novo conteúdo, a dificuldade apresentada pelo aluno, quais os pré-requisitos necessários para a aquisição do conhecimento referente às operações com frações e também que tipo de ferramenta utiliza, no dia a dia, na sala de aula. Sobre a oficina apresentada, foi utilizado o *software* Geogebra, que possibilitou promover, de forma diferente, a apresentação do conteúdo sobre operações com frações. Os Parâmetros Curriculares sugerem [16] alguns objetivos para o ensino fundamental, como: utilização de diferentes linguagens verbal, matemática, como meio de expressão e comunicação das ideias. Ainda sugere, ao docente, utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para aquisição e construção do conhecimento.

Para abordar todas essas questões e apresentar o trabalho realizado, esta dissertação está disposta em seis capítulos. No segundo, encontram-se as leis e parâmetros que regem o ensino da matemática na educação e são apresentados e analisados os livros didáticos escolhidos para a investigação. No terceiro capítulo, está exposta a teoria dos números racionais. No quarto capítulo, são apresentadas as operações com números racionais e suas propriedades. No quinto capítulo, a pesquisadora apresenta e analisa os diagnósticos aplicados e relata a oficina ministrada, além de apresentar os seus resultados. No sexto capítulo estão as considerações finais desta pesquisa. Há, ainda, no apêndice, algumas sugestões de atividades com os números racionais para a educação básica.

2

O ensino dos números racionais no ensino fundamental

2.1 Parâmetros curriculares

2.1.1 O que são parâmetros curriculares

Os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN) [16] é um documento elaborado pelo governo federal e constitui um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o país. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual.

2.1.2 Objetivos

Os objetivos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais concretizam as intenções educativas em termos de capacidades que devem ser desenvolvidas pelos alunos ao longo da escolaridade.

Objetivo Geral do Ensino Fundamental: utilizar diferentes linguagens — verbal, matemática, gráfica, plástica, corporal — como meio para expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções da cultura. Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de [16]

- compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia a dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;

- posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;

- conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais, como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
- perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
- conhecer e cuidar do próprio corpo, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- utilizar as diferentes linguagens — verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade, formulando problemas e tratando de resolvê-los, utilizando, para isso, o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Objetivo Geral do Ensino de Matemática: analisar informações relevantes do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre elas, fazendo uso do conhecimento matemático para interpretá-las e avaliá-las criticamente.

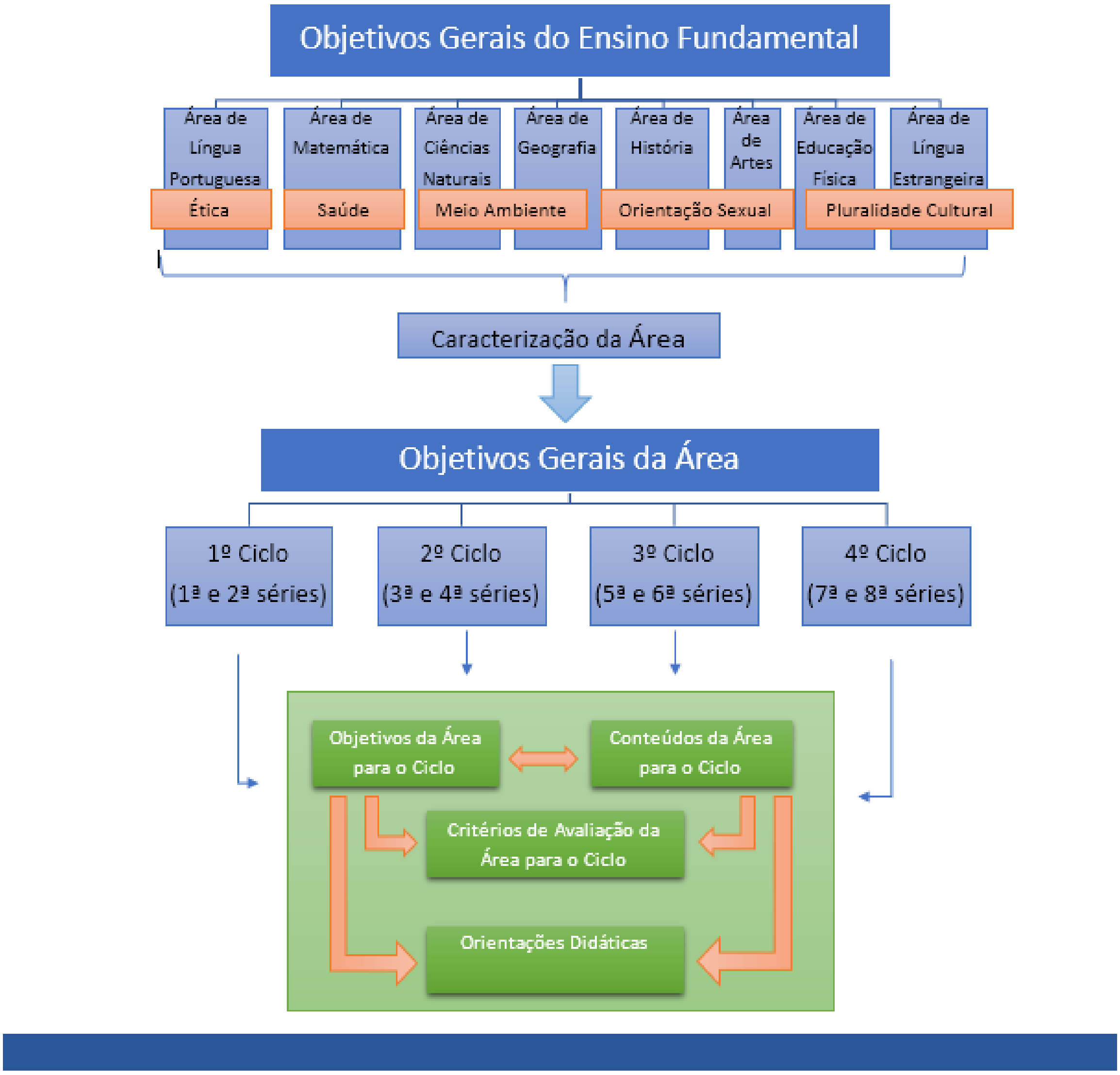


Figura 2.1: Estrutura dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental

Observa-se que a proposta apresentada não é de todo assimilada pelos docentes. A matemática moderna, movimento de renovação curricular no ensino da matemática [22], época em que a *Teoria dos Conjuntos* foi introduzida no ensino da Matemática. O conteúdo *Teoria dos conjuntos*, atualmente, é desenvolvido pela ênfase na apresentação de símbolos. Os Parâmetros sugerem que o ensino ocorra por meio da resolução de problemas matemáticos. Entretanto, na prática, muitas vezes isso é aplicado como uma mera resolução de uma lista de problemas, cujo desenvolvimento depende basicamente da escolha de técnicas ou formas memorizadas pelos alunos. Tal prática não colabora para o desenvolvimento na habilidade de resolução de problemas. Conforme os Parâmetros Curriculares para a Resolução de Problemas, é necessário que o aluno [16]

- Elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);

- Compare seus resultados com os de outros alunos;
- Valide o procedimento.

No terceiro ciclo, no qual os alunos variam entre 11 e 12 anos, é enfatizado o estudo dos Números Racionais, na representação decimal e fracionária com relevância no significado da relação partes de um todo, quociente, razão, etc. É importante ressaltar que a resolução de situação-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada neste ciclo (e menos ainda no quarto), não possibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados, seja para a adição, subtração, multiplicação, divisão ou para a potenciação, radiciação.

2.2 Base Nacional Comum Curricular – BNCC

A Base Nacional Comum Curricular, aprovada em 15 de dezembro de 2017, é um documento normativo, que determina os conhecimentos essenciais que todos os alunos da Educação Básica devem aprender, ano a ano, independentemente do lugar onde moram ou estudam.

Sua função é definir os conhecimentos essenciais para a Educação Básica, garantindo que todos os alunos tenham a mesma oportunidade de aprender o que é fundamental. A BNCC estabelece as diretrizes para elaboração dos currículos das redes municipais, estaduais e federal de ensino. A base orienta tanto escolas públicas quanto particulares [15].

2.2.1 Competências específicas de matemática para o ensino fundamental

Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e sócio emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. De acordo com o dicionário Aurélio, competência significa capacidade, aptidão e de acordo com a BNCC [15] as competências são:

1. Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes.

2. Estabelecer relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, e comunicá-las por meio de representações adequadas.

3. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos, presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las, crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

4. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Agir, individual ou cooperativamente, com autonomia, responsabilidade e flexibilidade, no desenvolvimento e/ou discussão de projetos, que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

7. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

8. Sentir-se seguro da própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

9. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

A BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

As unidades temáticas propostas pela BNCC são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. A unidade Números é apresentada nos quadros a seguir.

Objetos de Conhecimento referente à unidade Números nas séries iniciais.

Matemática do 1º ano	* Contagem de Rotina * Contagem Ascendente e Descendente * Quantificação de elementos de uma coleção * Leitura, Escrita e Comparação * Reta Numérica * Fatos fundamentais da Adição * Composição e Decomposição de Números Naturais * Problemas com Adição e Subtração
Matemática do 2º Ano	* Leitura, Escrita, Comparação de Números Naturais de três ordens * Composição e Decomposição de Números Naturais até 1000 * Construção dos fatos fundamentais da Adição e Subtração * Problemas com Adição, Subtração e Multiplicação, envolvendo dobro, triplo, metade
Matemática do 3º Ano	* Leitura, Escrita, Ordenação de Números Naturais de quatro ordens * Composição e Decomposição de Números Naturais * Fatos fundamentais da Adição, Subtração, Multiplicação * Reta Numérica * Problemas com Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão * Significado da metade, terça, quarta, quinta e décima parte

Matemática do 4º Ano	* Leitura, Escrita, Ordenação de cinco ordens * Composição e Decomposição de Números Naturais * Propriedades das operações estudadas * Problemas com Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão envolvendo proporcionalidade * Números Racionais: Fração unitária do tipo um terço, um meio e um quarto * Representação decimal dos números racionais
Matemática do 5º Ano	* Leitura, Escrita, Ordenação de Números Naturais até 6 ordens * Números Racionais: forma decimal e representação na Reta Numérica * Representação fracionária dos Números Racionais * Comparação e Ordenação de Números Racionais, utilizando a noção de Equivalência * Problemas de Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de Números Racionais * Problemas de Contagem

Objetos de Conhecimento referente a unidade Números das séries finais do ensino fundamental.

Matemática do 6º Ano	* Leitura, Escrita e Comparação de Números Racionais na forma decimal * Operações com números Naturais * Múltiplos e Divisores, Números primos e compostos * Frações equivalentes, Comparação, Adição e Subtração de frações * Operações com números racionais * Cálculo de porcentagem sem uso de regra de três

Matemática do 7º Ano	* Múltiplos e Divisores de Números Naturais * Porcentagem: Acréscimos e Decréscimos * Números Inteiros: História, Usos, Ordenação e Reta Numérica * Fração e seus significados * Números Racionais: representação fracionária e decimal
Matemática do 8º Ano	* Notação Científica * Potenciação e Radiciação * O Princípio Multiplicativo de Contagem * Porcentagem * Dízimas periódicas: fração geratriz
Matemática do 9º Ano	* Números reais e números irracionais * Potência com expoentes negativos e fracionários * Números reais: Notação científica e problemas * Porcentagem: Problemas

De acordo com o ano de escolarização e as unidades temáticas, a BNCC tem como finalidade desenvolver no aluno competências fundamentais, como o raciocínio, comunicação e argumentação. Especificamente, referente à unidade **Números**, a expectativa é a de que o aluno possa resolver problemas com números naturais e racionais envolvendo operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação; tenha desenvoltura na escrita, leitura e ordenação dos números; consiga estimar resultados, reconheça a existência dos números irracionais e reais, entre outros. Para o desenvolvimento dessas competências, é necessário sensibilizar o professor para a prática docente. Além disso, é necessário que a exposição do conteúdo nos livros didáticos seja mais clara e detalhada. Os livros analisados neste trabalho apresentaram didática a contento desta expectativa, e são considerados, aqui, bons exemplares.

2.3 Análise de livros didáticos

A seguir, são apresentadas as análises dos seis livros didáticos utilizados nesta investigação. Nesse grupo, encontram-se exemplares de edições recentes e outras do século XX.

2.3.1 Saber matemático 5 – 1ª edição – 2013

Este livro [8] foi escolhido por ser utilizado em grande escala nas escolas particulares de Belo Horizonte. A ideia de fração é apresentada por meio de dobradura. O estudo de frações ocorre a partir do Capítulo 2 e é retomado nos capítulos seguintes, de acordo com os autores *"Os números racionais, nesta coleção, serão abordados ao longo do ano todo, fizemos essa opção por saber que o aprendizado deste campo numérico nem sempre é simples para o aluno."*

A ideia de fração como divisão (1 dividido por 2 é igual a 0,5), ou como razão (2 em cada 10 pessoas preferem arroz com feijão no almoço), raramente é trabalhada antes do 6º ano. Na coleção, de acordo com os autores Katia Cristina, Maria Ignez e Vlademir, *o conceito de fração assume aspectos diferentes quando aplicado a todos discretos (fração de quantidades, tendo como referência balas, bombons, bolinhas, etc), ou a todos contínuos (tendo como referência os alimentos, como pizza, chocolate, bolo, etc)* [8].

Exemplo de aplicação do conceito de fração todos discretos,apresentado pelos autores:

> Determinar $1/2$ de um conjunto contendo 10 balas. Neste caso, basta dividir as 10 balas em 2 subgrupos, e cada grupo deverá ter a mesma quantidade de balas.

Exemplo de aplicação do conceito de fração todos contínuos,apresentado pelos autores:

> Se quisermos pegar $1/2$ de uma pizza (ideia de um todo), devemos cortá-la em 2 partes de mesmo tamanho e tomar uma dessas partes.

Os autores observam que, na fração denominada pelos autores como "todos discretos", também conhecida como fração de quantidade, a repartição se dá por contagem de unidades. Já para todos contínuos, a repartição se dá por decomposição em partes de mesma medida. Trabalha-se com frações equivalentes e operações de soma e subtração de números decimais. Os números decimais são apresentados logo após a apresentação das frações.

2.3.2 Matemática para o ginásio – 2ª edição – 1969

Este livro [9] foi escolhido por ter sua publicação no ano de 1969, momento em que se discutia o movimento da matemática moderna [22]. O conceito de número racional é desenvolvido pela noção de fração, no qual, por exemplo, 15 dividido por 3, representado pela fração $15/3$ é um número inteiro, porém 10 dividido por 3, representado pela fração $10/3$ não representa um número inteiro, mas é um numeral, de uma espécie de número, o chamado número *racional*.

Sobre a equivalência de frações, os autores Lydia, Adolfo e Pedro [9] definem que frações equivalentes são numerais diferentes que representam a mesma quantidade.

Para os autores, citados,

$$\frac{3}{4} \sim \frac{6}{8} \qquad \left(\frac{3}{4} \text{ é equivalente a } \frac{6}{8}\right)$$

mas a igualdade:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

indica que os numerais que representam os números racionais citados atendem a condição de que $3 \cdot 8 = 6 \cdot 4$, da mesma forma que $^1/_2 = ^2/_4 = 0{,}5$.

Nesse livro, a definição de número racional se dá da seguinte forma:

> Seja F o conjunto de todos os símbolos da forma $\dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros e b $\neq 0$, isto é, o conjunto de todas as frações.

Alguns elementos de F são: $^1/_2$, $^3/_4$, $^0/_{25}$, $^{1000}/_3$, etc.

Os autores define sobre F a relação R da seguinte maneira [9]

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in R \text{ se, e somente se } a \cdot d = b \cdot c$$

2.3.3 Matemática: Método Moderno 2ª edição – 1971

O livro [19] foi escolhido por se destinar aos alunos do curso médio e às jovens que se preparavam para ensinar as crianças do curso primário - denominado, na época, curso Normal. Para Morandi, *"Chama-se fração a um número representado por um par ordenado de números inteiros a e b e indicado pelo símbolo (a,b) ou comumente* $^a/_b$*, para* $b \neq 0$. *Vulgarmente entende-se por fração uma ou mais partes iguais de um inteiro"* [19].

O conteúdo é desenvolvido com a introdução de um texto para leitura; apresentação de equivalência em que se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ e, necessariamente, $a \cdot d = b \cdot c$ e em seguida simplificação e operações. Um dado relevante é a definição de número racional:

> *Qualquer fração indica uma divisão. Toda divisão passa a ser exata. Assim,* $8 : 3$ *tem quociente exato que é* $\frac{8}{3}$ e assim define: *Número racional é todo número que pode ser escrito na forma de fração* $\frac{p}{q}$ *, sendo p e q números inteiros quaisquer, com* $q \neq 0$.

2.3.4 Matemática Bianchini 6 – 8ª edição – 2016

O livro [1] foi escolhido por ser utilizado em várias escolas do estado de Minas Gerais. Nele, o estudo sobre frações é apresentado após o conteúdo de números naturais e em três capítulos distintos, a saber.

Capítulo 5 - Números racionais na forma de fração

O capítulo apresenta a noção de número racional e a fração que o representa para em seguida, apresentar a seguinte definição:

> *Todo número que pode ser representado na forma de fração* $^a/_b$*, em que a e b são números naturais, com* $b \neq 0$ *é um número racional.*

Apresenta a leitura, escrita, forma percentual, a fração como razão, frações equivalentes, comparação.

Capítulo 6 - Operações com números racionais na forma de fração

A soma e a subtração são apresentadas efetuando a redução a um denominador comum. A multiplicação é mostrada por meio de desenhos, levando o aluno a perceber a regra prática, ou seja, o produto de frações é uma fração em que o numerador é o produto dos numeradores e o denominador, o produto dos denominadores. A divisão é tratada da seguinte forma

> *O quociente de um número escrito na forma de fração por outro diferente de zero, obtido multiplicando o primeiro pelo inverso do segundo.*

Capítulo 7 - Números racionais na forma decimal e operações

Neste capítulo, os números com vírgula são apresentados como números na forma decimal, reforçando a leitura, a escrita e a comparação. Após o ensino de localização dos números racionais na forma de fração e forma decimal na reta numérica, o capítulo se resume ao ensino das operações de números racionais na forma decimal. Esse é um exemplo de exercício da página 218, do livro Matemática 6:

> Na construção de tanques-rede para a criação de peixes, Lúcio usa dois fios de alumínio nas laterais. Para isso , ele comprou 12,6 metros desse fio e o dividiu em 10 pedaços iguais.
>
> a) Qual é o comprimento de cada pedaço do fio?
>
> b) Se em cada tanque ele usa dois desses pedaços, quantos metros serão usados em 12 tanques?

2.3.5 Matemática compreensão e prática – 6 – 4ª edição – 2017

Este livro [4] foi escolhido por ser de dois autores muito aclamados pela educação básica de matemática: Ênio Silveira e Cláudio Marques. É uma obra muito adotada por escolas particulares de Minas Gerais.

O estudo das frações é apresentado após conteúdo dos números naturais e é definido como

> *Dois números naturais a e b, com $b \neq 0$, quando escritos na forma $^{a}/_{b}$, representam uma fração, na qual: b(denominador) indica a quantidade de partes iguais em que o inteiro foi dividido, a(numerador) indica a quantidade de partes do inteiro que foram consideradas.*

A BNCC sugere que primeiro seja trabalhado o significado de fração e, em seguida, equivalência e comparação. Tudo isso foi verificado no livro analisado. Somente após os tópicos citados, o autor trabalha a soma e subtração de fração e, caso os denominadores sejam diferentes, ensina a encontrar frações equivalentes às frações dadas para, em seguida, adicionar ou subtrair. A multiplicação é apresentada com desenhos, nos quais ocorre a justaposição, levando o aluno a compreender a regra prática. Já a divisão é desenvolvida trabalhando com o inverso, conforme os autores,“

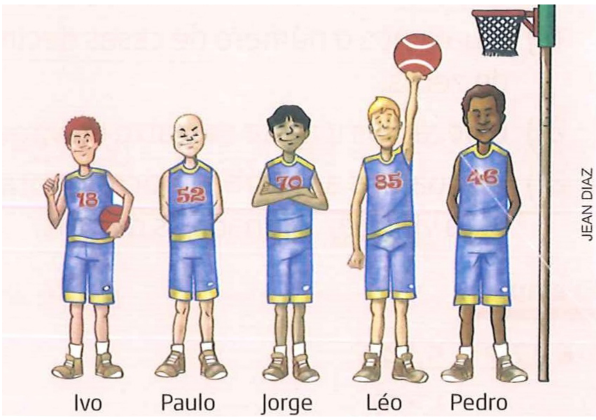


Figura 2.2: Abordagem da comparação dos números decimais

o inverso de uma fração é quando o produto de duas frações é igual a 1*, dizemos que essas frações são inversas uma da outra"* [4].

O estudo dos números decimais é tratado em outro capítulo, após o estudo das frações, com ênfase na leitura, escrita, comparação e operações.

Esse é um exemplo de exercício da página 199, do livro Matemática Compreensão e prática

> Os jogadores de um time de basquete têm estas alturas: 2,04 metros; 1,83 metro; 2,13 metros; 1,79 metro e 2 metros. Observe a Figura 2.2 e indique a altura correspondente a cada jogador.

2.3.6 Matemática Bianchini 7 – 8 ª edição – 2016

Este material didático foi escolhido para compor esta pesquisa porque é o material utilizado há cinco anos por esta pesquisadora. Desta forma, ela conhece o livro profundamente, e as observações feitas ao longo de todo esse tempo também colaboraram para aguçar as questões que originaram esta investigação.

O item Múltiplos e Divisores é tratado no livro do 6º ano. O estudo de porcentagem é apresentado como capítulo final. O conceito de Porcentagem é apresentado como uma fração com denominador igual a 100.

Na Figura 2.3, encontra-se a porcentagem de pessoas entrevistadas e o que elas responderam sobre o uso de rádio no Brasil.

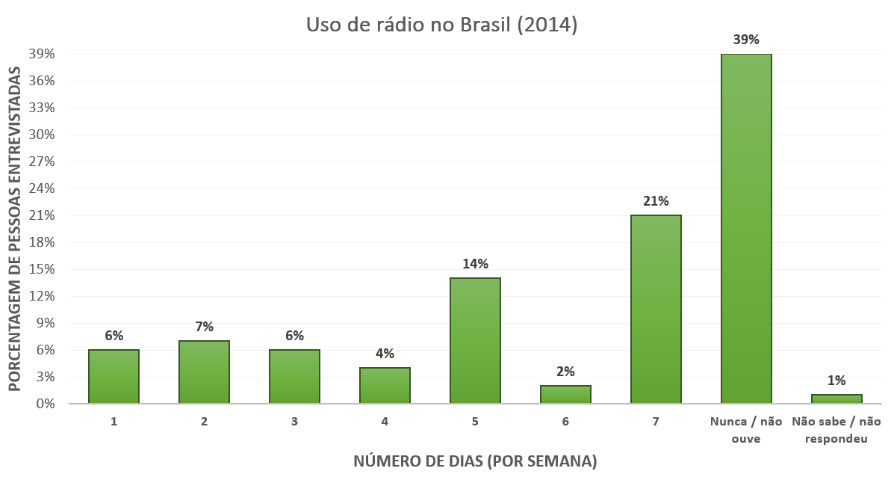


Figura 2.3: Gráfico estatístico

O cálculo de acréscimos e decréscimos é desenvolvido com a utilização de regra de três. Veja exemplo:

A pista de pouso e decolagem de um aeroporto tinha 3 240 m. Seu comprimento foi aumentado em 15% pois passou a operar voos internacionais, que utilizam aviões maiores

Resolução:

Porcentagem	Metros
100	3240
115	x

$$100x = 115 \cdot 3240$$
$$x = 3725m.$$

Antes de apresentar o conteúdo de frações, o autor apresenta o conteúdo "Números Inteiros" dispostos nas seguintes etapas.

1. A necessidade dos números inteiros
2. Representação na reta numérica
3. Valor absoluto ou módulo
4. Números opostos ou simétricos
5. Comparação de números inteiros
6. Operações com números inteiros

Conforme a BNCC, a apresentação do conteúdo dos números inteiros favorece a habilidade transcrita a seguir.[15]

> Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvem adição e subtração. Resolver e elaborar problemas que envolvem operações com números inteiros.

Sobre os Números Racionais, a definição é dada da seguinte forma:

Todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, é um número racional.

A BNCC sugere comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

As operações de soma e subtração com números racionais são tratadas utilizando a redução de mesmo denominador. Trabalha-se também a forma decimal.

A multiplicação e a divisão são operadas usando a regra prática.

O exemplo a seguir encontra-se na página 79 do livro Matemática 7.

Determine o valor de cada letra do esquema abaixo

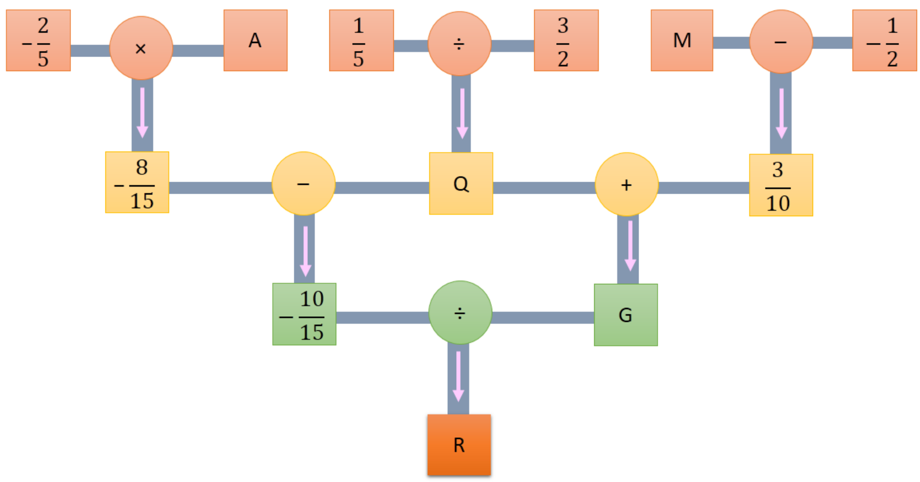


Figura 2.4: Esquema de aplicação das operações com frações

O autor apresenta como gabarito da questão os resultados a seguir:

$$A = \frac{4}{3}, \qquad M = -\frac{1}{5}, \qquad Q = \frac{2}{15}, \qquad G = \frac{13}{30} \text{ e } \qquad R = -\frac{20}{13}$$

2.3.7 Matemática 7– Compreensão e prática – 2ª edição – 2013

Livro adotado atualmente pela pesquisadora. A porcentagem, apresentada como razão centesimal, é tratada nos capítulos finais. O valor incorporado ao número inicial, no livro, é chamado de "aumento" e, o decréscimo, de "redução". Ainda nesse capítulo, são apresentados os juros compostos que, segundo a BNCC, deve ser estudado no nono ano. Utiliza-se a razão $^a/_b$, com $b \neq 0$ para cálculo de porcentagem, acréscimo e decréscimo.

Como exemplo podemos citar o exercício a seguir

Milton comprou uma filmadora digital por R\$2500,00 e deseja revendê-la com lucro de 15%. Por quanto deverá revendê-la?

Solução:

$$\begin{aligned} 115\% \cdot 2500 &= \frac{115}{100} \cdot 2500 \\ &= 1{,}15 \cdot 2500 \\ &= 2875 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Com relação aos números inteiros, a ordem de apresentação é

1. Números inteiros
2. Representação geométrica
3. Números opostos e Módulo de um número inteiro
4. Operações com números inteiros
5. Propriedades
6. Expressões numéricas

Sequência sugerida pela BNCC [15].

O conteúdo dos Números Racionais é definido como o conjunto formado por todos os números fracionários negativos, pelos números fracionários positivos e pelo zero, representado pela letra $\mathbb{Q}$ que vem da palavra *quociente*. A definição do conjunto $\mathbb{Q}$ em notação de conjuntos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

As operações são apresentadas na forma fracionária e decimal simultaneamente. A soma e subtração são desenvolvidas pela redução ao mesmo denominador; a multiplicação e a divisão são tratadas utilizando algoritmos.

As propriedades referentes à multiplicação e adição são apresentadas no capítulo dos Inteiros e no capítulo dos Racionais por meio de exercícios.

Os exercícios estão organizados em nível de dificuldade crescente. Alguns abordam o cálculo mental, o raciocínio lógico e trabalhos com calculadora.

2.4 Considerações sobre os livros didáticos

Os livros escritos no século passado baseavam-se na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Tinham como objetivo diminuir a defasagem do currículo e o progresso científico com enfoque na questão da linguagem matemática e sua formalização. Já nos livros de edição atual, a formalização existe, mas de uma forma mais suave, tendo como regra geral uma introdução com problemas contextualizados, em seguida a exposição do conteúdo com apresentação de exemplos e exercícios com nível de dificuldade crescente. O material didático atual apresenta problemas matemáticos que abordam cálculo mental e raciocínio lógico.

3

Teoria dos números racionais

Nesse capítulo, vamos apresentar os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e por fim o conjunto dos números racionais.

3.1 Relações de equivalência

De acordo com Marília Centurión *Se dois conjuntos finitos têm a mesma quantidade de elementos, mesmo que esses elementos sejam diferentes, dizemos que os conjuntos são* ***equivalentes ou equipotentes.***

Relação binária entre dois conjuntos A e B é qualquer subconjunto de $A \times B$. Dado a correspondência do subconjunto $A \times A$, num conjunto A, a relação binária R, diz uma **relação de equivalência** se ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

Segundo César Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho [17], dado um par de elementos a, b de A, tem-se que se: $a\ R\ b$, então vale $b\ R\ a$. A relação é simétrica. Finalmente, uma relação é transitiva se, para toda terna de elementos a, b, c de A, tal que $a\ R\ b$ e $b\ R\ c$, tem-se $a\ R\ c$. Em símbolos, uma relação binária num conjunto A, que indicaremos por $\equiv$.

(i) $a \equiv a$.(Reflexiva)

(ii) $a \equiv b$ implica $b \equiv a$ (Simetria)

(iii) $a \equiv b$ e $b \equiv c$ implica $a \equiv c$ (Transitividade)

Satisfazendo a relação de equivalência.

3.2 Números naturais

Os números naturais, foram se formando lentamente, pela prática diária da contagem. Como, por exemplo, medir a distância entre duas cidades, ordenar pessoas numa fila, codificar objetos, etc. Números que expressem resultado de tais contagens são chamados de números naturais. Giuseppe Peano, no limiar do século XX, enumerou as regras

1. Todo número natural tem um único sucessor;

2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

3. Existe um único número natural, chamado *zero* e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro;

4. Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $0 \epsilon X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$. As afirmações acima são conhecidas como *os axiomas de Peano* [10].

Escrevendo os números naturais em ordem crescente, obtemos a sequência: 0,1,2,3,4,5,6,... Ela forma o conjunto dos números naturais, cuja representação é ℕ=0,1,2,3,4,5,6,... Verifica-se que todo número natural possui um sucessor. Como exemplo, o número um é o sucessor do número dois, 2 é o sucessor do número três, e assim sucessivamente. Além disso, o número natural, com exceção do zero, possui um antecessor, ou seja, um número **n**. Representamos como seu sucessor o número **n+1** e o seu antecessor como **n-1**.

Propriedades Operatórias

Sejam a, b e c $\in \mathbb{N}$, temos que:

1. **Fechamento em relação à adição e à multiplicação:**

$$a + b \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad a \cdot b \in \mathbb{N}$$

2. **Comutativa em relação à adição e à multiplicação:**

$$a + b = b + a \qquad \text{e} \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

3. **Associativa em relação à adição e à multiplicação:**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \text{e} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b).c$$

4. **Elemento neutro:**

   O número zero é o elemento neutro da adição

   O número um é o elemento neutro da multiplicação

5. **Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

3.3 Números inteiros

Os números naturais não eram suficientes para representar todas as situações do cotidiano. Como por exemplo a medição de temperaturas abaixo de zero. Dessa necessidade, surgiu a ideia dos números inteiros positivos e negativos, pois os números naturais indicam valores positivos. Subtração do tipo 5 - 9 não era possível apenas no conjunto $\mathbb{N}$, pois até então não existia o número negativo. O número negativo já era discutido pelos hindus, usados para representar dívidas.

Alguns historiadores acreditam que foram problemas relacionados com o uso do dinheiro que levaram pessoas a interpretar o número negativo como perda. A partir do século XVI, os números negativos passaram a fazer parte dos conceitos matemáticos. O conjunto dos números inteiros é composto por números inteiros positivo, inteiros negativos e pelo zero. Utiliza-se o símbolo $\mathbb{Z}$ para representação.

$\mathbb{Z}$ = {...-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4,...} , onde

$+1, +2, +3,$... são os números inteiros positivos.

$-1, -2. -3,$... são os números inteiros negativos.

o zero é considerado um número inteiro nem positivo nem negativo.

Propriedades Operatórias

Propriedades da adição

1. **Propriedade comutativa**

   Em uma adição, a ordem das parcelas não altera a soma.

   Sejam

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \quad \text{temos} \quad a + b = b + a$$

2. **Propriedade associativa**

   Em uma adição com mais de duas parcelas,podemos associá-las de diferentes modos, sem alterar a soma.

   Sejam

   $$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } c \in \mathbb{Z} \text{ temos que } (a + b) + c = a + (b + c)$$

3. **Existência do elemento neutro**

   O zero é o elemento neutro da adição, ou seja $a + 0 = 0$

4. **Existência do elemento oposto**

   Todo número não nulo, possui um elemento oposto ou simétrico.

   Seja $a \in \mathbb{Z}$ temos que o oposto de a é igual a $-a$

   A soma de um número inteiro com o seu oposto é igual a zero, $a + (-a) = 0$.

5. **Propriedade do fechamento**

   A soma de dois números inteiros é um número inteiro.

   Sejam

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}, \text{ temos } a + b \in \mathbb{Z}$$

Propriedades da multiplicação

1. **Propriedade comutativa**

   Em uma multiplicação, a ordem dos fatores não altera o produto.

   Sejam

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ temos que } a \cdot b = b \cdot a$$

2. **Propriedade associativa**

   Em um produto de números inteiros, podemos associá-los de formas diferentes sem alterar o produto.

   Sejam

   $$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } c \in \mathbb{Z} \text{ temos que } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. **Existência do elemento neutro**

   O número $+1$ é o elemento neutro da multiplicação. Seja $a \in \mathbb{Z}$ temos que:

   $$a \cdot (+1) = (+1) \cdot a = a$$

4. **Propriedade distributiva**

   O produto de um número inteiro por uma adição pode ser obtido multiplicando o número por cada termo da adição e, em seguida, adicionando os produtos obtidos.

   Sejam

   $$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } c \in \mathbb{Z}, \text{ temos que: } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

5. **Propriedade do fechamento**

   O produto de números inteiros é um número inteiro.

   Sejam:

   $$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, \text{ temos que } a \cdot b \in \mathbb{Z}.$$

3.3.1 O conceito de fração

Conforme artigo de Maria Manuela e Maria da Conceição [5], a ênfase nos procedimentos e algoritmos para operar com os números racionais tem sido apontada como um dos principais motivos das dificuldades das crianças em aprenderem e aplicarem os conceitos racionais. As autoras sugerem as seguintes representações dos números racionais, a saber:

- *A fração como medida*

  A análise da seguinte pergunta: quantas vezes um comprimento cabe no outro, ou, quantas vezes um peso cabe dentro do outro e outras indagações como essas, cujos elementos encontram-se na mesma unidade. Todas essas operações são consideradas, pela autora, operações de medição.

  Exemplo: A representação de frações na reta numérica. Ao marcar o número 3 na reta, determinamos o ponto que está a 3 unidades de distância do ponto 0. Da mesma forma que, ao marcar a fração $\frac{2}{3}$, determinamos o ponto que está a $\frac{2}{3}$ unidades de distância do ponto 0.

- *A fração como quociente ou como divisão indicada*

  A associação da fração como quociente é aquela em que a divisão surge como uma estratégia para se resolver um problema com a ideia de partilha.

  Exemplo : Dividir três bolos para 4 pessoas. Nessa situação, espera-se que o aluno entenda a fração $\frac{3}{4}$ como um número, da mesma forma se a pergunta pedisse para dividir oito bolos para 4 pessoas.

- *A fração como razão*

  Uma razão é a expressão da relação entre os elementos de um par ordenado de números, quantidades ou grandezas. Portanto, a fração, quando associada a uma razão, expressa um índice comparativo.

  Exemplo : Se um atleta converteu 28 arremessos em 35 lances, e outro atleta converteu 30 em 40 lances livres, o primeiro atleta estará melhor classificado, pois seu índice foi $\frac{4}{5}$ (quatro conversões a cada 5 arremessos), enquanto o outro atleta teve índice igual a $\frac{3}{4}$ (três conversões a cada 4 arremessos).

Ao dividir em partes iguais de uma grandeza, considerada como um todo, cada uma das partes é uma unidade fracionária. Uma ou mais unidades fracionárias reunidas constituem uma fração. Assim, considerando como um todo a unidade u dividindo–a, em 5 partes iguais, cada uma dessas partes corresponde à unidade fracionária um quinto de u: $^1/_5$. O número que fica acima do traço é o numerador, e o número abaixo é chamado de denominador.

O símbolo $^a/_b$ chama-se uma fração de numerador a e denominador b.

Na Figura 3.1, temos a fração $^2/_5$ de diversas formas:

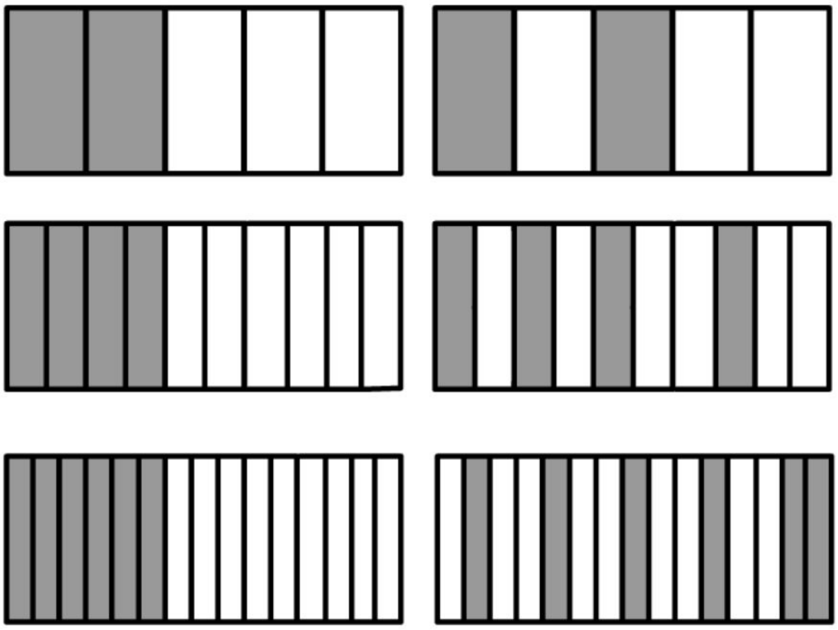


Figura 3.1: Representação da fração $\frac{2}{5}$

3.3.2 As frações no sistema de numeração no Antigo Egito

Os egípcios usavam um conceito que, para nós, equivale às frações unitárias, da forma $^1/_n$. Por exemplo, expressar $^4/_7$ como uma soma de frações com numerador 1, de acordo com os autores Tatiana Roque e João Boscon P. de Carvalho[3].

> Em primeiro lugar, é necessário saber qual a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{4}{7}$.
>
> Inverta $\frac{4}{7}$ obtendo $\frac{7}{4}$;
>
> Tome o menor inteiro maior que a fração obtida $(1 < \frac{7}{4} < 2)$;
>
> Assim
>
> $\frac{1}{2} < \frac{4}{7}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{4}{7}$;
>
> Subtraia $^1/_2$ da fração original
>
> $$\frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$$
>
> Temos agora uma representação da fração $^4/_7$ em soma de frações unitárias
>
> $$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}.$$

Caso não encontre numerador igual a 1, deve-se repetir o processo até a obtenção do numerador 1.

3.3.3 O conceito de razão

De acordo com Bianchini, "A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, é o quociente entre eles, isto é, $^a/_b$".

Segundo o livro V dos Elementos de Euclides,

> **Definição V.3**
> "Uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo".
> **Definição V.4**
> "Diz-se que duas grandezas possuem uma razão entre elas se essas grandezas, quando multiplicadas, puderem ser ultrapassadas mutuamente".

A definição V.3 informa que o conceito de razão é aplicado a grandezas homogêneas. Ou seja, importa observar a natureza da grandeza, não podendo haver razão entre um comprimento e uma área. A definição V.4 fornece um critério operatório para determinar se duas grandezas a e b possuam uma razão entre elas, é preciso que haja ao menos um par de inteiros m e n tal que $ma > b$ e $nb > a$.

3.4 Os números racionais

A necessidade de novos números foi sentida desde muito cedo na história da matemática. Os egípcios já empregavam frações, embora possuíssem apenas para aquelas que têm numerador 1. As outras eram expressas como soma de frações. A solução de equação do tipo $bx = a$, com $b \neq 0$, indica-se pela fração $^a/_b$, e um número dessa forma chama-se um número racional a partir da noção de inteiros. Uma mesma fração pode ser escrita de diversas formas. Assim, por exemplo:

$$\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{pois} \qquad \frac{3}{6} = \frac{1.3}{2.3} \qquad \text{e} \qquad \frac{4}{8} = \frac{1.4}{2.4}$$

Significa que um mesmo número racional pode ser representado por diversos pares de números. Indicando por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto de todos os inteiros exceto o número zero, temos a relação $\mathbb{Z} \times \ \mathbb{Z}^*$ definindo o conjunto:

$$\mathbb{Z} \times \ \mathbb{Z}^* = \{(a,b)/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Definimos o **Conjunto dos números racionais**, $\mathbb{Q}$, como o conjunto das frações $\frac{a}{b}$ definidas pela classe de equivalência

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/(x,y) \equiv (a,b)\}$$

Na qual a é o numerador e b é o denominador.

3.4.1 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Dados dois elementos (a, b) e (c, d) do conjunto

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ diremos que$(a, b) \equiv (c, d)$ se e somente se $ad = bc$.

Proposição:
A relação acima é uma relação de equivalência
Demonstração

(i) Para todo par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que $(a,b) = (a,b)$, já que $ab = ba$

(ii) Sejam agora (a, b),(c,d) pares tais que $(a,b) \equiv (c,d)$. Temos, então, que $ad = bc$, donde também $cb = da$. Da última igualdade e da definição acima, vem que $(c,d) \equiv (a,b)$.

(iii) Sejam agora $(a, b), (c, d)$ e (e, f) pares tais que $(a, b) \equiv (c,d)$ e $(c,d) \equiv (e,f)$. Então, temos que $ad = bc$ e $cf = dc$.

Multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b, obtemos:

$$adf = bcf$$

$$bcf = bde$$

logo : $adf = bde$.

Como $d \neq 0$, podemos cancelar e obter $af = be$, o que implica que $(a, b) \equiv (e,f)$, como queríamos demonstrar.

Temos, assim a classe de equivalência.

Nesse capítulo, forem definidos os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. No próximo capítulo serão discutidas as operações em $\mathbb{Q}$.

4

Operações com números racionais

Nesse capítulo, vamos apresentar as operações com números racionais. A seguir, encontra-se um breve relato do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan [24], que ensina a matemática por meio da ficção, apresentando suspense e aventuras.

> Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista. Encontramos, perto de um antigo caravançara meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:
>
> - Não pode ser!
>
> - Isto é um roubo!
>
> - Não aceito!
>
> O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.
>
> - Somos irmãos - esclareceu o mais velho - e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte.
>
> Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio!
>
> Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?
>
> - É muito simples - atalhou o “homem que calculava ”.
>
> - Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe! Nesse ponto, procurei intervir na questão:
>
> - Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem se ficássemos sem o camelo?
>
> - Não te preocupes com o resultado, ó bagdali! - replicou-me em voz baixa Beremiz.

- Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás, no fim, a que conclusão quero chegar. Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvidas em entregar-lhe o meu belo Jamal, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

- Vou, meus amigos - disse ele, dirigindo-se aos três irmãos - , fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

- Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão! E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

- E tu, Hamed Namire, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais moço:

- E tu, jovem Namir, segundo a vontade de teu pai, devias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado! E concluiu com a maior segurança e serenidade:

- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir - partilha em que todos três saíram lucrando - couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado $(18 + 12 + 4)$ de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram , portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao bagdali meu amigo e companheiro; o outro cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

- Sois inteligente, ó estrangeiro! - exclamou o mais velho dos três irmãos.

- Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz - “ o homem que calculava” - tomou logo posse de um dos mais belos jamales do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

-Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro!

Tenho já um outro, especialmente para mim! E continuamos a nossa jornada para Bagdá.

Pode-se observar que, conforme o relato, haveria uma sobra, uma vez que

$$17\frac{1}{2} + 11\frac{2}{3} + 3\frac{8}{9} = 33\frac{1}{18}$$

e

$$35 - 33\frac{1}{18} = \frac{35}{18} = 1\frac{17}{18}.$$

como

$$\frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \text{ e } \frac{1}{18} \text{ de 35 é igual a } \frac{35}{18}$$

A fração $\frac{35}{18}$ é igual a $1\frac{17}{18}$

Assim, feita a partilha, haveria uma sobra de $1\frac{17}{18}$ e, com isso, Beremiz distribuiu os $\frac{17}{18}$ aos três herdeiros e ficou com a parte inteira da fração excedente.

4.1 Soma de números racionais

De acordo com Jamil Ferreira [7]:

Sejam α e β elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos a soma de α e β da seguinte forma: escrevendo $\alpha = \frac{a}{b}$ para algum par $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e $\beta = \frac{c}{d}$ para algum par $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, com b,d $\neq 0$. Definimos $\alpha + \beta$ como sendo o racional:

$$\alpha + \beta = \frac{ad + bc}{bd}$$

(a) Representação da fração $\frac{1}{4}$

(b) Representação da fração $\frac{3}{5}$

(c) Representação da fração $\frac{17}{20}$

Figura 4.1: Representação gráfica da soma de frações

A soma é apresentada para alunos do ensino fundamental da seguinte forma, por exemplo, para desenvolver a soma $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$ seguimos os passos:

1. $\frac{1}{4}$ do retângulo todo é a parte destacada da Figura 4.1a.

2. A fração $\frac{3}{5}$ representada no retângulo da Figura 4.1b.

3. Sobrepondo os retângulos, obtemos a Figura 4.1c, que representa o resultado.

A mesma operação é desenvolvida, utilizando equivalência:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20}$$

Como

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20} \qquad \text{e} \qquad \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

obtemos

$$\frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$

Dados dois ou mais números naturais diferentes de zero, denomina-se **mínimo múltiplo comum (mmc)** desses números o menor dos seus múltiplos comuns diferentes de zero [4].

O mmc de 4 e 5 = 20, então a mesma operação é efetuada da seguinte forma :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5+12}{20} = \frac{17}{20}$$

.

4.1.1 Propriedades da adição

Considere os números inteiros a, b, c, d, e, f tal que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d} \in Q$, com $b \neq 0$, $d \neq 0$ e $f \neq 0$.

1. **Propriedade Comutativa**

   Sejam os números racionais

   $$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d}, \text{ temos que: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

   Demonstração

   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

   $$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc+ad}{bd}$$

   Observe que os resultados obtidos são iguais

2. **Propriedade Associativa**

   Sejam os números racionais

   $$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ e } \frac{e}{f}, \text{ temos:}$$

   $$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$$

   Demonstração

   $$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{cf+de}{df}\right) = \frac{adf+bcf+bde}{dfb}$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f} = \left(\frac{ad+bc}{bd}\right)+\frac{e}{f} = \frac{adf+bcf+ebd}{bdf}$$

Observe que os resultados obtidos são iguais, demonstrando a propriedade.

3. **Elemento neutro da adição**

   O elemento neutro é o zero, tal que $\forall\ \beta \in Q$, temos

   $$0+\beta = \beta + 0$$

   Demonstração

   Seja $\beta = \frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ temos

   $$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{0}{1}+\frac{a}{b}$$

   efetuando a soma,obtemos:

   $$\frac{a+0}{b}=\frac{0+a}{b}=\frac{a}{b}$$

4. **Elemento oposto**

   O número racional $\dfrac{a}{b}$ possui como elemento oposto o número $\dfrac{-a}{b}$.

   Demonstração

   Considere os números racionais $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{-a}{b}$ tal que:$\dfrac{a}{b}+\dfrac{-a}{b}=\dfrac{0}{b}$.

   O número racional $\frac{-a}{b}$ é o oposto aditivo e é indicado por $-\frac{a}{b}$.

4.2 Subtração de números racionais

A subtração de dois números racionais é definida como a soma do primeiro com o oposto do segundo, ou seja:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}.$$

4.2.1 Propriedades da subtração

Para: $\alpha = \dfrac{a}{b}, \beta = \dfrac{c}{d}$ e $\gamma = \dfrac{e}{f} \in \mathbb{Q},$ com b, de $f \neq 0$

são válidas as seguintes propriedades:

a) $\alpha = -(-\alpha)$

Demonstração

$$\text{Seja } \alpha = \frac{a}{b} \text{ , temos } \frac{a}{b} = -\left(-\frac{a}{b}\right) \text{ logo } \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

.

b) $-\alpha + \beta = \beta + (-\alpha)$

Demonstração

$$\text{Seja } \alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d} \text{ temos:}$$

$$-\alpha + \beta = -\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{-ad + bc}{bd}$$
$$\beta + (-\alpha) = \frac{c}{d} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{cb - ad}{db}$$

Observe que os dois membros são iguais

c) $\alpha - (-\beta) = -(-\alpha - \beta)$

Demonstração

$$\text{Seja } \alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d} \text{ temos:}$$

$$\alpha - (-\beta) = \frac{a}{b} - \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$-(-\alpha - \beta) = -\left(-\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Observe que os dois membros são iguais.

d) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$

Demonstração

$$\text{Seja } \alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d} \text{ temos}$$

$$\alpha - (-\beta) = \frac{a}{b} - \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\alpha + \beta = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Observe que os dois membros são iguais.

e) $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$

Demonstração

$$\text{Seja } \alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d} \text{ e } \gamma = \frac{e}{f} \text{ temos}$$

$$\alpha - (\beta + \gamma) = \frac{a}{b} - \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} - \left(\frac{cf + ed}{df}\right) = \frac{adf - bcf - bed}{bdf}$$

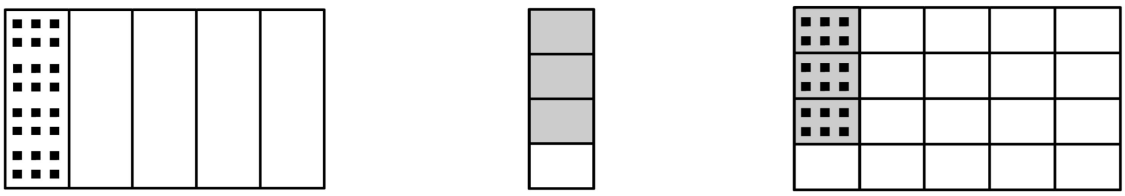
$$\alpha - \beta - \gamma = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{adf - cbf - ebd}{bdf}$$

Observe que os resultados são iguais.

4.3 Multiplicação de números racionais

De acordo com Jamil Ferreira [7]: " Sejam α e β elementos de $\mathbb{Q}$

O produto de α por β será o racional $\alpha\beta$, obtido da seguinte forma: escrevendo $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$, definimos o produto $\alpha\beta$ como $\frac{ac}{bd}$".



(a) Representação da fração $\frac{1}{5}$

(b) Representação da fração $\frac{3}{4}$

(c) Representação da fração $\frac{3}{20}$

Figura 4.2: Representação gráfica do produto de frações

No ensino fundamental, a multiplicação é apresentada também da seguinte forma:

1. Suponha, como exemplo, a operação: $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$
2. Podemos pensar assim : $\frac{1}{5}$ do retângulo todo é a parte destacada da Figura 4.2a.
3. A representação $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{5}$ representada pela Figura 4.2b.

   Sobrepondo as representações, encontramos:
4. A Figura 4.2c representa o resultado obtido.

De uma forma mais simples, a multiplicação é obtida multiplicando numerador com numerador e denominador com denominador.

4.4 Divisão de números racionais

A divisão de um número racional $\frac{a}{b}$ por outro número racional $\frac{c}{d}$ com b e d diferente de zero, é definida em multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, como verificamos a seguir

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

A divisão $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}$ é também representada por: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

4.5 Propriedades da multiplicação

1. **Comutativa**

   Seja $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$

   Então calculamos

$$\alpha\beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\beta\alpha = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}$$

   Observa-se que os resultados são iguais.

2. **Associativa** Sejam os números racionais

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \text{ e } \frac{e}{f}, \text{ com b, d e f } \neq 0$$

   temos

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$$

   Demonstração:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{ce}{df}\right) = \frac{ace}{dfb}$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{eac}{bdf}$$

   Observe que os resultados obtidos são iguais.

3. **Elemento Neutro**

   O elemento neutro é o número, tal que $\forall\ \beta \in Z$, temos

$$1.\beta = \beta.1$$

   Demonstração

   Seja $\beta = \frac{a}{b}$, temos :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b}, \text{ pois}$$

$$\frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$$

4. **Elemento inverso**

   Todo número racional $\beta \neq$ de *zero* existe um único elemento que indicaremos de inverso de β e representamos por β^{-1}, tal que $\beta.\beta^{-1} = 1$.

Demonstração

$$\text{Seja } \beta = \frac{a}{b} \text{ e } \beta^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}}, \text{ tal que } \beta \cdot \beta^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

5. **Propriedade distributiva em relação à adição**

Sejam os números racionais $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$, temos:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

Demonstração

Calculando o primeiro membro da igualdade tem:os

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{cf + ed}{df} \right) = \frac{acf + aed}{bdf}$$

e calculando o segundo obtemos:

$$\frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{acf + aed}{bdf}$$

Observe que os resultados obtidos são iguais.

4.6 Potenciação de números racionais

Definimos a potenciação de um número racional como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdots \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{com } b \neq 0.$$

4.6.1 Propriedades da potenciação

Seja $\beta = \frac{a}{b}$ com b $\neq 0$, temos:

1. **Multiplicação de potências de mesma base**

$$\beta^n \cdot \beta^m = (\beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{n \text{ fatores}} \cdot (\beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{m \text{ fatores}} = \beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta_{(m+n) \text{ fatores}} = \beta^{m+n}$$

logo

$$\beta^n \cdot \beta^m = \beta^{m+n}$$

2. **Divisão de potências de mesma base**

Quando desejamos dividir duas potencias de mesma base β^n e β^m, podemos considerar três casos. O primeiro é quando $n > m$ e nesse caso temos

$$\frac{\beta^n}{\beta^m} = \frac{(\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{n \text{ fatores}}}{(\beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{m \text{ fatores}}}$$

simplificando essa expressão obtemos

$$\frac{\beta^n}{\beta^m} = (\beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{(n-m) \text{ fatores}} = \beta^{n-m}$$

O segundo é quando $n < m$ e nesse caso temos

$$\frac{\beta^n}{\beta^m} = \frac{(\beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{n \text{ fatores}}}{(\beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{m \text{ fatores}}}$$

simplificando, obtemos

$$\frac{1}{(\beta \cdot \beta \cdot \ldots \beta)_{(n-m) \text{ fatores}}} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-m} = \beta^{m-n}$$

O terceiro é quando $n = m$ e nesse caso temos

$$\frac{\beta^n}{\beta^m} = \beta^{n-m} = \beta^0 \text{ pois n = m, logo } \beta^0 = 1 \text{ com } \beta \neq 0$$

3. **Potência de outra potência**

$$(\beta^n)^m = (\beta^n \cdot \beta^n \cdot \ldots \beta^n)_{m \text{ fatores}} = \beta^{n+n+n+\cdots+n}_{(m \text{ parcelas})} = \beta^{n \cdot m} = (\beta^n)^m = (\beta^{m)^n} = \beta^{m \cdot n}.$$

4. **Produto de potências de mesmo expoente**

Sejam $\beta = \dfrac{a}{b}$ e $\alpha = \dfrac{c}{d}$ com b e d $\neq 0$.

$\beta^n.\alpha^n = (\beta.\beta....\beta)_{n \text{ fatores}}.(\alpha.\alpha....\alpha)_{n \text{ fatores}} = (\beta\alpha.\beta\alpha....\beta\alpha)_{n \text{ fatores}\beta\alpha}$

logo

$$\beta^n \cdot \alpha^n = (\beta\alpha)^n.$$

Observe que

$$\frac{\beta^n}{\alpha^n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n .\text{Com } \alpha \neq 0.$$

5 Diagnósticos

Antes de elaborar e ministrar a oficina de fração, entendeu-se que era necessário identificar o conhecimento dos alunos sobre o conteúdo de frações. Para tanto, foi elaborado um questionário para ser respondido pelos estudantes que participariam das oficinas. Esse material foi elaborado em parceria com a orientadora inicial desta pesquisa. A intenção era desenvolver um questionário simples, que não entediasse os alunos cuja faixa etária é entre 10 e 11 anos. Ademais, era necessário que o material percebesse o conhecimento básico dos discentes no assunto frações. O questionário foi aplicado no segundo semestre letivo, no mês de setembro, com a presença da professora regente, e durou cerca de 50 minutos.

5.1 Questionário aplicado

O questionário foi dividido em duas partes:

• A primeira parte foi elaborada para avaliar o grau de entendimento sobre o conceito das frações, como também conhecer a intimidade do aluno, aplicando questões que o levem a identificar afirmativas falsas e verdadeiras (V- verdadeiro ou F- falso).

• A segunda parte tem como objetivo a avaliação do grau de entendimento sobre as operações básicas de frações, utilizando também a tipologia V(verdadeiro) ou F (falso), incluindo a justificativa de cada alternativa selecionada.

Diagnóstico

Parte 1

(a)Sua idade:

(b) Há quantos anos conhece o conceito de fração:

• Assinale, com um x, a utilização das frações no seu dia a dia.

( ) Nunca ( ) Quase sempre ( ) Sempre

1- A fração $\frac{2}{3}$ indica que estamos tomando duas partes de um todo dividido em três partes

( ) Verdadeiro ( ) Falso

2- Na fração $\frac{8}{11}$, o numerador é igual a 11
( ) Verdadeiro ( ) Falso

3- A fração $\frac{19}{15}$ pode ser escrita como $1\frac{4}{15}$.
( ) Verdadeiro ( ) Falso

4- Podemos afirmar que $\frac{6}{8}$ é equivalente a $\frac{42}{56}$
( ) Verdadeiro ( ) Falso

5- O número 0,301 é a forma decimal da fração $\dfrac{301}{100}$
( ) Verdadeiro ( ) Falso

Parte 2
Operações com frações
. A operação $\frac{3}{5}+\frac{1}{6}=\frac{4}{11}$ está correta?
( ) Verdadeiro ( ) Falso

Justificativa:

. A operação $\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}= \frac{1}{10}$ está correta?
( ) Verdadeiro ( ) Falso

Justificativa:

Resultado do diagnóstico aplicado aos alunos do quinto ano do Ensino Fundamental, com idade entre 10 e 11 anos, da Parte 1

Questões	Acertos	Erros	Porcentagem
Questão 1	23	2	66
Questão 2	23	2	66
Questão 3	20	5	57
Questão 4	25	0	100
Questão 5			

A questão 5 não apresenta dados,pois os alunos não conheciam a forma decimal.

Seguem algumas observações sobre o questionário aplicado

1. - Participaram da pesquisa 25 alunos do ensino fundamental 1 de uma escola particular, na cidade de Sabará.

2. - Os alunos, na época, ainda não conheciam a divisão e nem a forma decimal das frações, razão pelo qual a questão 5 não apresenta dados.

3. - Nas questões abertas, as quais necessitavam de uma justificativa, observa-se:

Questão 1

Sete alunos marcaram o “falso” e justificaram com o argumento de que os denominadores são diferentes, mas não resolveram a soma.

Nove alunos marcaram o item “falso” e justificaram com o argumento de que a soma só é possível se os denominadores forem iguais. Eles fizeram referência a frações equivalentes.

Sete alunos marcaram “falso”, fizeram corretamente a soma, trabalhando com frações equivalentes e chegaram ao resultado corretamente.

Dois alunos marcaram verdadeiro.

Questão 2

Doze alunos disseram que $\frac{3}{10}$ é diferente de $\frac{1}{10}$

Um aluno fez corretamente a operação e marcou “verdadeiro”. Três alunos fizeram a equivalência das frações e não efetuaram a multiplicação.

Dois alunos falaram da equivalência para efetuar a multiplicação e não desenvolveram mais nada.

Dois alunos disseram que, para efetuar a multiplicação, temos que inverter a segunda.

Três alunos escreveram o processo da multiplicação, mas não a desenvolveram.

Dois alunos não entenderam a pergunta.

Verifica-se que o conhecimento com as operações envolvendo frações não é de todo assimilado pelos estudantes, uma vez que apenas sete do total de participantes conseguiram chegar ao resultado esperado. Foi observada, em diversos momentos, a questão de denominadores diferentes na soma, mas o mesmo argumento de equivalência foi despercebido no resultado da multiplicação. Os alunos conhecem a equivalência, mas não há segurança em que momento utilizar. Talvez a necessidade de apresentar novo conteúdo sem a fixação do atual favoreça a dificuldade na compreensão.

5.2 Oficina aplicada

Oficina de números racionais

Soma, subtração, multiplicação e divisão

A oficina foi aplicada aos alunos do 5º ano do ensino fundamental 1, com o objetivo de possibilitar o domínio de conteúdos matemáticos.

Objetivo específico: Efetuar a soma, subtração, multiplicação e divisão de números racionais.

Caro(a) Aluno(a)

Com o objetivo de ratificar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de frações já estudadas, vamos utilizar o *software* Geogebra para validar as operações.

Para tal, acesse a atividade desenvolvida com a utilização do software geogebra [11]

Teremos a tela:

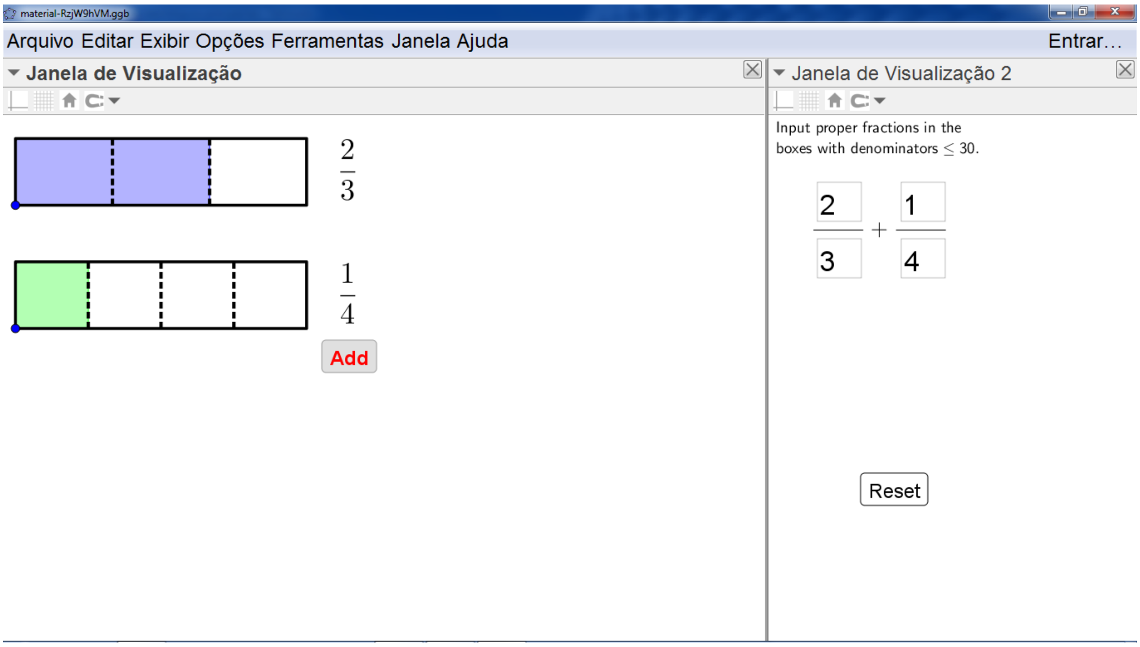


Figura 5.1: Aplicativo para o ensino de adição de frações - GeoGebra

Depois de manusear a operação no site, indique o resultado das somas a seguir:
a) $\frac{3}{8} + \frac{5}{6}$
b) $\frac{2}{7} + \frac{3}{4}$
Acesse a atividade desenvolvida com a utilização do software geogebra [12]:
Teremos a tela:

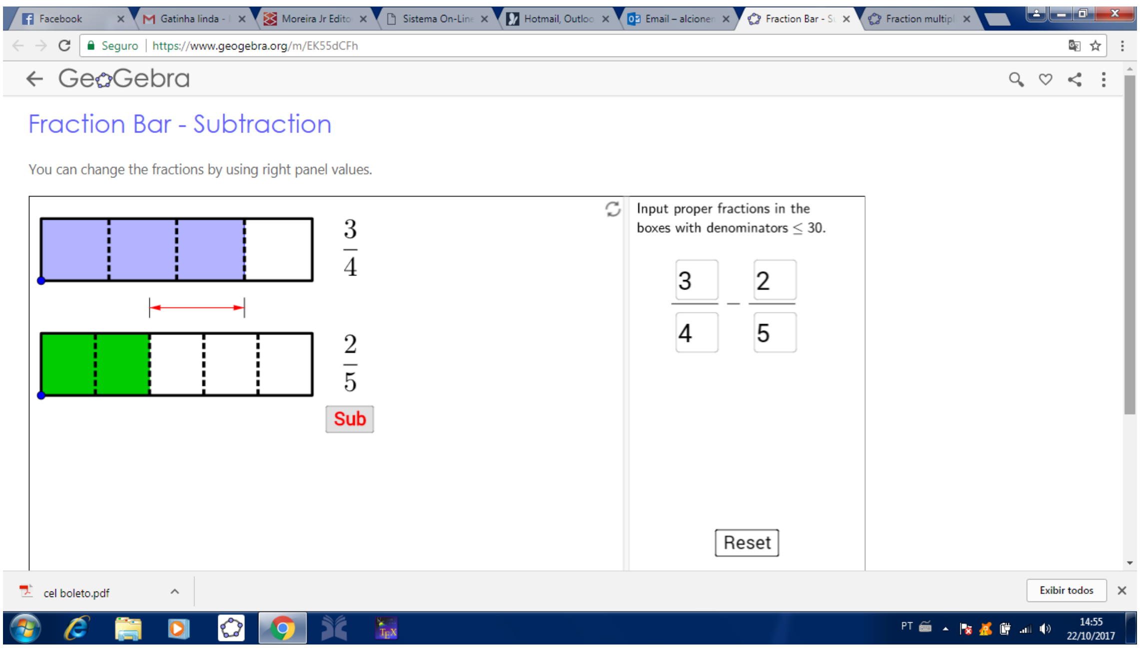


Figura 5.2: Aplicativo para o ensino de subtração de frações - GeoGebra

Depois de manusear a subtração no site, efetue:
a) $\frac{5}{6}$ - $\frac{3}{8}$
b) $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$

Acesse a atividade desenvolvida com a utilização do software geogebra [14]: Teremos a tela:

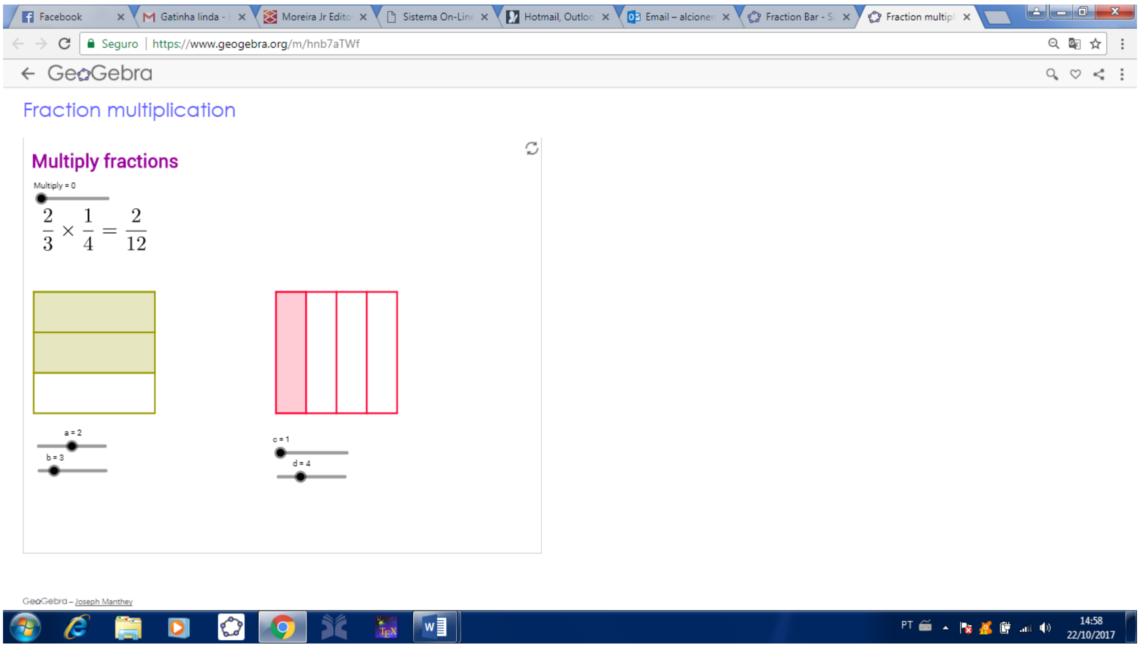


Figura 5.3: Aplicativo para o ensino de multiplicação de frações - GeoGebra

Depois de manusear a multiplicação no site, efetue:
a)$\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{8}$
b)$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$
Acesse a atividade desenvolvida com a utilização do software geogebra [13] Teremos a tela:

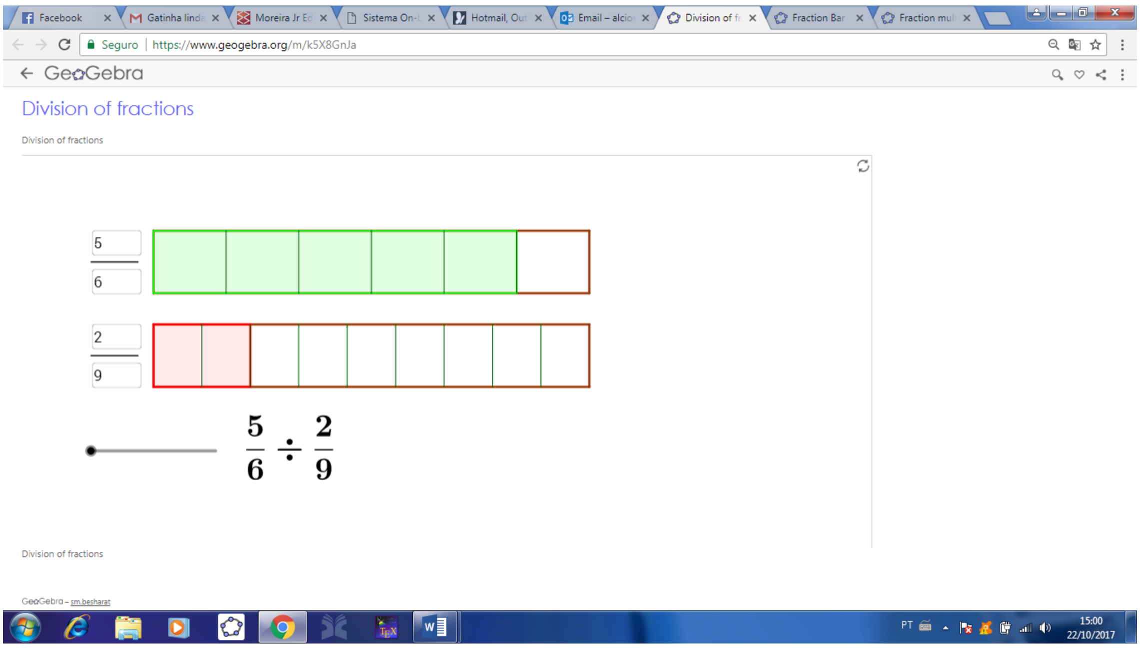


Figura 5.4: Aplicativo para o ensino de divisão de frações - GeoGebra

Depois de manusear com a divisão, efetue:

$\frac{5}{8} : \frac{3}{8}$
Responda:
A oficina possibilitou a fixação das operações com frações?
( ) Sim ( ) Não

5.2.1 Resultado da oficina aplicada

Participaram 19 alunos do total dos 25 citados no diagnóstico, com idade entre 10 e 11 anos do ensino fundamental de uma escola particular, na cidade de Sabará, durante uma aula de 50 minutos. Dos alunos que participaram, 9 alunos acertaram todas as questões, 2 alunos erraram a operação de divisão, dois alunos erraram todas as questões e seis não conseguiram terminar a atividade.

Sobre a pergunta : "A oficina possibilitou a fixação das operações com frações?" Foram obtidas as seguintes respostas:

- Gostei do programa, pois facilita as operações;
- Ajudou a rever as operações e fixar as operações;
- Quanto mais faço, melhor eu fico;
- Achei pouco tempo para resolver as operações, gostaria que repetisse em duas aulas;

Com relação à oficina, foi observado que os alunos não têm familiaridade com o uso de *software* na aquisição do conhecimento, referente aos conteúdos propostos da disciplina Matemática.

O tempo dedicado à apresentação e ensino da utilização do *software* foi curto para que alguns alunos tivessem dificuldade em finalizar a atividade. Isso está relacionado ao letramento digital dos jovens em estudo. Em outras realidades, o tempo talvez fosse suficiente. Também deve-se registrar que a escola pesquisada, localizada na cidade de Sabará, iniciou sua atividade pedagógica em 1984, oferece curso nos ensinos fundamental I, fundamental II e ensino médio. Possui 1 laboratório de informática, com 20 computadores novos e conectados à internet, as salas de aula são equipadas com multimídia. A escola é franqueada a uma famosa e respeitada rede de ensino cuja matriz se encontra em Belo Horizonte, razão pela qual adota apostilas. Os alunos em questão têm uma aula semanal de Informática, onde o professor enfatiza como usar o computador e 5 aulas de matemática ministrada por uma professora regente com curso de Normal Superior. A escola é assessorada pelo Sistema de Ensino Bernoulli. A maioria dos alunos, optou por trabalhar com número misto, estratégia não percebida no diagnóstico.

6 Considerações finais

Esta investigação evidenciou a dificuldade dos alunos com o conteúdo de frações. As entrevistas realizadas com os professores das séries finais do ensino fundamental e do ensino médio, em novembro de 2017, apontaram que, para eles, o problema está no conceito e na resolução das operações com frações. Uma das questões apontadas pelos professores é que a ideia de fração não é totalmente absorvida pelos alunos. O significado de partes de um todo não é trabalhada a exaustão, seja na representação abstrata ou na forma concreta. Falta, por parte de alguns, paciência, criatividade e sensibilidade. A falta de compreensão com relação às classes de equivalência, por parte dos docentes das séries iniciais, é outro fator dificultador. O professor deveria, de forma simples, apresentar ao aluno que frações escritas de formas diferentes representam o mesmo pedaço. Na maioria das vezes, o ensino ocorre utilizando barras de chocolate, o que pode ocasionar uma falsa assimilação, pois dá a ideia equivocada de que, para dividirmos um todo pela metade, teremos um resultado correto. Entretanto, isso não é verdade, visto que, por exemplo, se dividirmos uma cédula de dois reais pela metade, não teremos cada pedaço valendo um real. É importante salientar que, para que a aprendizagem aconteça referente às frações, o aluno deve apresentar alguns pré-requisitos, como o conhecimento dos números naturais e suas operações.

A BNCC, no que se refere à unidade **Números**, apresenta a expectativa de que o aluno possa resolver problemas com números naturais e racionais, envolvendo operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Além disso, também espera que o estudante tenha desenvoltura na escrita, leitura e ordenação dos números. Saiba estimar resultados, entre outros. Nesse contexto, observa-se que crianças no 1º ciclo conseguem ler e escrever frações do tipo $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, entre outras, o que não representa a aprendizagem e interpretação das frações.

Esta investigação, em todas as suas etapas, evidenciou que as frações são apresentadas em blocos separados, que não se interagem, dificultando ao aluno perceber que, além da cardinalidade, é importante ressaltar aspectos relevantes, como a de cálculo. A apresentação dos números racionais na forma fracionária e na forma decimal deveria ser simultânea, possibilitando a compreensão de que ambos representam a mesma quantidade.

Esta pesquisadora considera, após o trabalho realizado, que o ensino das frações deve ser tratado em todas as séries, pois alunos do ensino médio apresentam dificuldades nas operações com frações, evidenciando que a assimilação não foi suficiente.

Também se defende alteração com relação à forma de apresentação do conteúdo nos livros didáticos, se possível, considerando o contexto social e cultural no qual o aluno está inserido. Também deve ser observado que a aquisição do conhecimento é desenvolvida de formas diferentes. Este trabalho conclui que, para que a aprendizagem aconteça, é necessário instituir critérios para seleção e organização dos conteúdos, tendo como princípio básico a integração entre objetivos, conteúdos e métodos de ensino.

A Matemática Moderna teve como causa do seu fracasso a alteração dos conteúdos sem uma adequada reformulação de objetivos e de métodos. Se, antes, o tratamento dos conteúdos era feito em compartimentos estanques e desenvolvido numa sucessão linear, sugere-se que, atualmente, uma abordagem com conexões seja favorecida, tendo como foco a resolução de problemas.

Recomenda-se, para o ensino da Matemática, em especial, para o estudo das frações:

1. direcionamento do ensino para aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão;

2. importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;

3. exploração da matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e detectados nas várias disciplinas;

4. necessidade de levar os alunos a compreenderem a importância do uso de tecnologia e a acompanharem sua permanente renovação.

Na análise dos livros didáticos, nas edições mais recentes, percebe-se que a linguagem é mais acessível à compreensão do aluno. Termos técnicos são menos utilizados, como por exemplo, definição de numeração, numeral e número. Vale observar que os autores do livro " Matemática para o Ginásio"definem

> *Numeração*: o estudo de como utilizar um mínimo de palavras e um mínimo possível de símbolos para representar os números;
> *Numeral*: símbolos ou combinações dos símbolos;
> *Número*: é a ideia.

Vale salientar que os alunos aprendem de formas diferentes, razão pela qual o conteúdo deve ser abordado em várias frentes, como, por exemplo: quadro, computador, material concreto, etc.

Esta pesquisa também considera que alguns outros fatores dificultadores devem ser considerados, como, por exemplo: a má remuneração dos professores, falta de respeito da sociedade com relação à educação, o desinteresse do aluno, a sua faixa etária e a quantidade excessiva de conteúdos .

Esta pesquisadora destaca, em tempo, a importância de que o conteúdo não seja fragmentado, o ensino e a aplicação de frações deve ser retornado em todas as séries, como também o trabalho em paralelo dos conteúdos, em destaque os números racionais, utilizando ferramentas como softwares (Cabri, Khan Academy, Internet, Class Room, Geogebra, etc), dobradura, material concreto, etc.

Esta pesquisa evidencia a necessidade do conteúdo frações ser retomado no ensino fundamental e no médio. Além disso, também se considera que ele deve ser relacionado, sempre que possível, a outros conteúdos, sendo enfatizado em vários contextos. Com relação ao ensino fundamental, é importante incentivar o aluno a pesquisar como eles utilizam as frações no seu cotidiano. Como, por exemplo, ao analisar resultados obtidos em avaliações, quando se pode estudar a nota alcançada em estrutura fracional de acertos sobre erros. A questão sobre fração equivalente deve ser explorada sistematicamente na aplicabilidade, percebendo a importância do porquê de transformar os denominadores para que não se transforme numa reprodução mecanizada. Foi observado que, algumas vezes, o discente aplica em qualquer situação, como, por exemplo, na multiplicação de frações, situação observada no diagnóstico aplicado por esta pesquisadora.

A

Apêndice

A seguir, são apresentadas sugestões de atividades envolvendo os números racionais. Exercícios que não necessitam de tecnologia e que poderão auxiliar no ensino do conteúdo. É importante salientar a necessidade da disponibilidade do professor, como também da aceitação por parte do aluno.

A.1 Atividade 1

Sugestão para alunos do 5º e 6º ano

Atividade FRAC- SOMA 235

A origem do FRAC-SOMA 235 de acordo com [6] observa-se duas versões. A primeira é que esse recurso foi elaborado pelo grupo pedagógico do Estado do Rio de Janeiro- G-RIO, esse grupo era formado por professores universitários e do ensino básico de Matemática. A seguida versão é que, nas primeiras décadas do século XX, inúmeras expedições, compostas por representantes de museus norte-americanos e do Instituto Francês de Arqueologia Oriental do Cairo, visitaram sítios arqueológicos do Egito Antigo. Em dessas expedições, Howard Carter, em 1922, localizou uma espécie de quebra - cabeça que a nobreza usaria de passatempo. Esse material foi adaptado ao que conhecemos por FRAC-SOMA 235.

A atividade foi selecionada por favorecer um momento lúdico, em que o aluno constrói seu próprio material, além de possibilitar a ratificação do conteúdo unidades de medida. È sugerida para crianças na faixa etária de 9 a 10 anos, ou seja, quinta série do ensino fundamental.

Atividade: Construção do FRAC SOMA 235

São barras de mesmo tamanho, 60 centímetros, que são dividas em peças congruentes, com divisores múltiplos de 2, 3 e 5. São as seguintes peças

- 1 barra branca de 60 cm (é a unidade)
- 2 peças vermelhas de 30 cm (unidade dividida em 2 partes)
- 3 peças amarelas de 20 cm (unidade dividida em 3 partes)
- 4 peças vermelhas de 15 cm (unidade dividida em 4 partes)

- 5 peças azuis de 12 cm (unidade dividida em 5 partes)
- 6 peças laranja de 10 cm (unidade divida em 6 partes)
- 8 peças vermelhas de 7,5 cm (unidade dividida em 8 partes)
- 9 peças amarelas de aproximadamente 6,67 cm (unidade dividida em 9 partes)
- 10 peças roxas de 6 cm (unidade dividida em 10 partes)
- 12 peças laranja de 5 cm (unidade dividida em 12 partes)
- 15 peças verdes de 4 cm (unidade dividida em 15 partes)
- 16 peças vermelhas de 3,75 cm (unidade dividida em 16 partes)
- 18 peças laranja de aproximadamente 3,33 cm (unidade dividida em 18 partes)
- 20 peças roxas de 3 cm (unidade dividida em 20 partes)
- 24 peças laranja de 2,5 cm (unidade dividida em 24 partes)
- 27 partes amarela de aproximadamente 2,22 cm (unidade dividida em 27 partes)
- 30 peças pretas de 2 cm (unidade dividida em 30 peças).

Após a construção do FRAC SOMA 235,sugere-se trabalhar com equivalência de frações, além da soma e subtração de fração.

Como por exemplo: Qual o resultado $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?

Através do FRAC SOMA, levar o aluno ao entendimento que $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ e que $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ e como consequência operar $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ é o mesmo que somar $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$.

A.2 Atividade 2

Esta atividade é sugerida para alunos do 7º e 8º ano, com idade entre 12 e 14 anos, por entender a maturidade do aluno com o manuseio de instrumentos geométricos.

Divisão de um segmento em partes de mesma medida

Como todo número racional pode ser associado a um ponto da reta numérica. Vamos dividir um segmento em sete partes congruentes e localizar as frações do tipo $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$, etc neste segmento.

• Inicialmente, trace uma semirreta com origem A, conforme figura abaixo. Nessa semirreta, a partir de A e com uma mesma abertura do compasso, marque sete segmentos consecutivos.

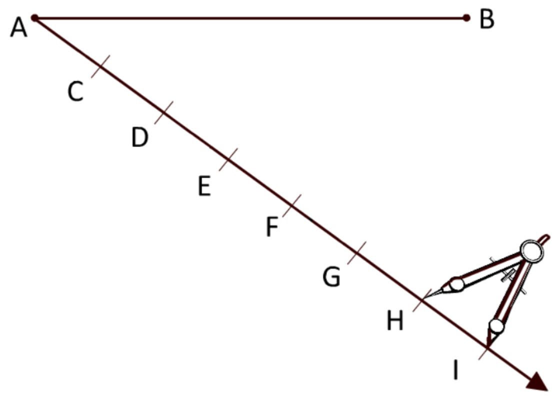


Figura A.1: Uso de régua e compasso para divisão de segmentos

• Trace a reta BI e as retas paralelas, que passam pelos pontos C, D, E, F, G e H, determinando os pontos C', D', E', F',G' e H'.Essas paralelas podem ser traçadas fazendo esquadro escorregar junto à régua.

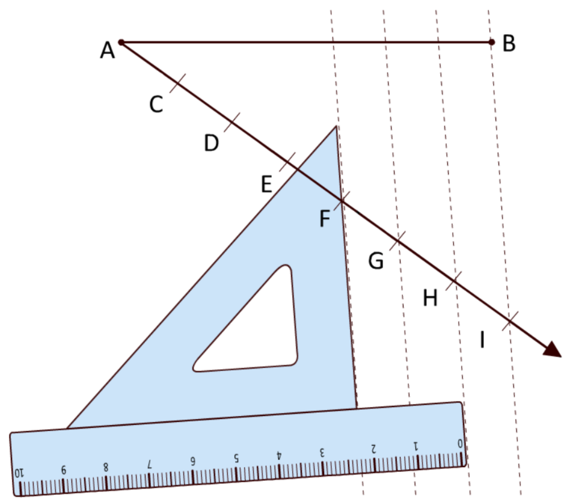


Figura A.2: Uso de régua e compasso para divisão de segmentos

Os pontos C', D', E', F',G' e H' dividem o segmento AB em sete partes de mesma medida.

Figura A.3: Uso de régua e compasso para divisão de segmentos

A.3 Atividade 3

Atividade utilizando dobradura

É sugerida para alunos do $5^{\underline{o}}$ e $6^{\underline{o}}$ ano, na faixa etária de 10 a 12 anos. A recomendação é em função de não apresentar nenhum custos para o professor ou aluno, além de favorecer a coordenação motora e aceitação dos alunos nos trabalhos que envolvam origami.

Uma pequena amostra de uma aula envolvendo frações e origami, feita com base no Livro : Matemática e Origami - Trabalhando Frações (Professora Eliane Moreira da Costa).

De acordo com a professora Eliane [18] com uma folha, devemos:

Figura 1 : Dobrar a folha através da justaposição de lados(lado com lado),obtendo as marcas (malhas) correspondendo a quatro quadrados.

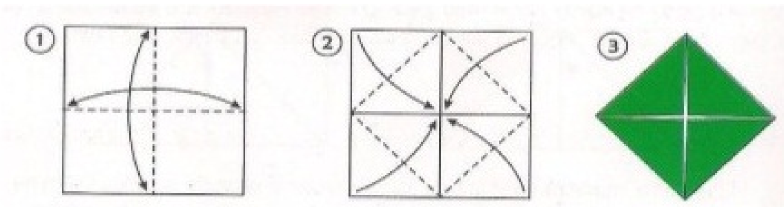


Figura A.4: Origami e fração

Figura 2 : Unir cada ponta ao centro,formando assim quatro triângulos.

A partir daí podemos trabalhar com as seguintes frações: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ e $\frac{4}{4}$ que equivale ao inteiro. Ou seja, $\frac{4}{4}$ que é igual a 1 inteiro.

Bibliografia

[1] Bianchini, Edwaldo: *Matemática*. Editora Moderna, 1991.

[2] Boulos, Paulo: *Pré-calculo*. Pearson Makron Books, 2001.

[3] Carvalho, Tatiane Roque e João Bosco P. de: *Tópicos de História da Matemática*. 2012.

[4] Cláudio Marques ‘Ênio Silveira e: *Matemática-Compreensão e prática*. 2017.

[5] David, Maria Manuela Martins Soares e Fonseca Maria da Conceição Ferreira Reis: *Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária*. 1997.

[6] Educação Matemática, Sociedade Brasileria de: *Frac Soma 235*, 2015. Acessado em 15/12/2017.

[7] Ferreira, Jamil: *A Construção dos Números*. SBM, 2013.

[8] Kátia Cristina Smole, Maria Ignez Diniz e Vlademir Marim: *Saber Matemática*. 2013.

[9] Lamparelli, Lydia Condé ; Canton, Adolfo Walter P.;Moretin Pedro Alberto e Indian Dalva Fontes: *Matemática para o Ginásio*. 1969.

[10] Lima, Elon Lages: *Números e Funções Reais*. 2014.

[11] Manthey, Josef: *Ferramenta para adição de fração*. https://www.geogebra.org/m/GceeVgnb, Acessado em 15/10/2017.

[12] Manthey, Josef: *Ferramenta para subtração de fração*. https://www.geogebra.org/m/EK55dCFh, Acessado em 15/10/2017.

[13] Manthey, Josef: *Ferramenta para divisão de fração*, 2017. https://www.geobra.org/m/K5X8GnJa, Acessado em 15/10/2017.

[14] Manthey, Joseph: *Ferramenta para multiplicação de fração*, 2017. https://www.geogebra.org/m/hnb7aTWf, Acessado em 15/10/2017.

[15] MEC: *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, 2017. http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=78231-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-1&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192, Acessado em 05/01/2018.

[16] MEC: *Parametros Curriculares no Ensino Fundamental*, 2017. http://portal.mec.gov.br/pnaes/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12657-parametros-curriculares-nacionais, Acessado em 05/01/2018.

[17] Milles, César Polcino e Coelho Sonia Pitta: *Números- Uma introdução à Matemática*. Editora Universidade de São Paulo, 2006.

[18] Moraes, Thais: *Origami e frações*, 2010. Acessado em 15/12/2017.

[19] Morandi, Henrique: *Matemática:Método Moderno*. 1971.

[20] Niven, Ivan: *Números: Racionais e Irracionais*. SBM, 2012.

[21] Oliveira, José Plínio de: *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 2011.

[22] Revista Diálogo Educacional, v.5, n.16 2005: *Revista Educacional*, 2005. Acessado em junho de 2018.

[23] Slideshare: *O uso de dobradura no ensino das frações.* Acessado em 15/12/2017.

[24] Tahan, Malba: *O Homem que calculava.* Record, 2000.

[25] Ávila, Geraldo: *Introdução à Análise Matemática.* Editora Edgard Blucher Ltda, 1999.