



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Divisibilidade e Congruência em Somatórios

Raul Rodrigues dos Santos

Goiânia

2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: RAUL RODRIGUES DOS SANTOS

Título do trabalho: DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA EM SOMATÓRIOS

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: ____ / ____ / ____

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

Raul Rodrigues dos Santos

Divisibilidade e Congruência em Somatórios

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientadora: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.

Goiânia

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Santos, Raul Rodrigues dos
DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA EM SOMATÓRIOS [manuscrito]
/ Raul Rodrigues dos Santos. - 2018.
65 f.

Orientador: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.
Trabalho de Conclusão de Curso Stricto Sensu (Stricto Sensu) -
Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística
(IME), PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em
Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia,
2018.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Congruência. 2. Divisibilidade. 3. Somatório. I. Lima, Lidiane
dos Santos Monteiro, orient. II. Título.

CDU 51

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Raul Rodrigues dos Santos graduou-se em Matemática pela Faculdade Anhanguera, Especialista em Educação e Cidadania na Diversidade pela Universidade de Brasília - UnB e, atualmente, é Professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal.



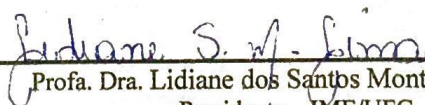
Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional – PROFMAT/UFG

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.
Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

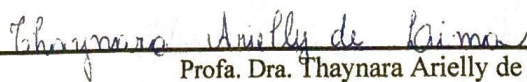


PROFMAT

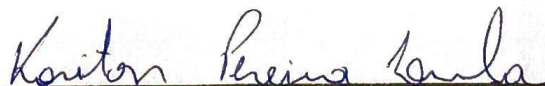
Ata da reunião da banca examinadora da defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do aluno Raul Rodrigues dos Santos - Aos vinte e sete dias do mês de julho do ano de dois mil e dezoito, às 10:00 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro de Lima – Orientador, Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima e o Prof. Dr. Kariton Pereira Lula, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no auditório do IME, procederem a avaliação da defesa intitulada “**Divisibilidade e Congruência em Somatórios**”, em nível de mestrado, área de concentração Matemática do Ensino Básico, de autoria de Raul Rodrigues dos Santos, discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo presidente da banca, Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro de Lima, que fez a apresentação formal dos membros da banca. A seguir, a palavra foi concedida ao autor do TCC que, em 30 minutos, procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se à avaliação da defesa. Tendo em vista o que consta na Resolução nº. 1403/2016 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta os Programas de Pós-Graduação da UFG, e procedidas as correções recomendadas, o Trabalho foi **APROVADO** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração Matemática do Ensino Básico pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega, na secretaria do IME, da versão definitiva do trabalho, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 12:00 horas, a presidência da mesa encerrou a sessão e, para constar, eu, Sóstenes Soares Gomes, secretário do PROFMAT/UFG, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada, segue assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.



Profª. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro de Lima
Presidente – IME/UFG



Profª. Dra. Thaynara Arielly de Lima
Membro – IME/UFG



Prof. Dr. Kariton Pereira Lula
Membro – IFG/INHUMAS

Este trabalho é dedicado à minha família, aos professores que fizeram parte do processo de ensino-aprendizagem, aos companheiros de trabalho e a todos amigos de estudo da Universidade Federal de Tocantins (UFT), da Universidade de Brasília (UNB) e da Universidade Federal de Goiás (UFG).

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores da UFT, UNB e UFG que contribuíram e aprimoraram a minha fundamentação teórica como professor de matemática, em especial, à minha orientadora Dra. Lidiane Santos que se dedicou no auxílio à concretização deste trabalho, me dando conselhos, contribuições e orientações.

Agradeço a todos os colegas do PROFMAT, em especial, aos colegas André, Benino, Luciano, Marcelo e Rodrigo, que de alguma forma compartilharam e contribuíram para que este sonho pudesse ser realizado.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa em criar o programa PROFMAT que proporciona a vários professores e professoras a oportunidade de se qualificarem.

E por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

Resumo

Esta dissertação apresentará uma proposta de ensino de Aritmética, partindo dos anos iniciais da Educação Básica até o Ensino Superior. O leitor encontrará neste trabalho os seguintes conteúdos: Tópicos da História da Matemática, Progressões Aritméticas, Divisibilidade, Congruência e Somatórios. Nas seções, teremos exemplos resolvidos e atividades propostas a serem solucionados pelo leitor. Temos dois objetivos nesta pesquisa, o primeiro é apresentar uma proposta que interrelaciona conteúdos matemáticos da Aritmética, conhecendo algumas curiosidades históricas e demonstrando Teoremas, Proposições, Corolários, resolvendo exemplos e questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). E o segundo é, propor dois Teoremas e dois Corolários de divisibilidade e congruência. Os teoremas, definições, corolários, demonstrações e etc., desta pesquisa bibliográfica, foram, em grande parte, baseados em autores consagrados como [12], [14], [16], [17], [18], [19], [20], [22] e [23].

Palavras-chave: Congruência, Divisibilidade, Somatório.

Abstract

This dissertation will present a proposal of Arithmetic teaching, starting from the initial years of Education to Higher Education. The reader will find in this work the following contents: Topics of the History of Mathematics, Arithmetic Progressions, Divisibility, Congruence and Summaries. In the sections, we will have examples solved and proposed activities to be solved by the reader. We have two objectives in this research, the first one is to present a proposal that interrelates mathematical contents of Arithmetic, knowing some historical curiosities and demonstrating Theorems, Propositions, Corollaries, solving examples and questions of the Brazilian Games of Mathematics of the Public Schools (OBMEP). And the second is to propose two Theorems and two Corollaries of divisibility and congruence. The theorems, definitions, corollaries, demonstrations and etc. of this bibliographical research were, to a large extent, based on established authors as [12], [14], [16], [17], [18], [19], [20], [22] e [23].

Keywords: Congruence, Divisibility, Summation.

Lista de Figuras

1	Evolução histórica dos algarismos indo-arábicos	16
2	OBMEP 2016 - 2ª Fase	21
3	OBMEP 2012 - Banco de Questões	47
4	Tabela para solução	48
5	Números Triangulares e Quadrangulares	60

Sumário

1	Um breve relato da história dos números	15
1.1	A invenção dos números	15
1.2	Axiomas de Peano	16
1.3	Princípio da Indução Matemática	17
2	Progressão Aritmética	25
2.1	Eventos Periódicos	25
2.2	Termo Geral da P.A.	26
2.3	A Soma de Gauss	28
2.4	Soma dos Termos de uma P.A.	29
3	Divisibilidade com Inteiros	33
3.1	Relação de Divisibilidade	33
3.2	Divisão Euclidiana	40
4	Congruência	42
4.1	Congruência Modular	42
4.2	Propriedades Operacionais	44
5	Somatórios	50
5.1	Definição e Proposições	50
6	Divisibilidade e Congruência em Somatórios	57
6.1	Teoremas e Corolários	57
7	Considerações Finais	63

Introdução

Esta pesquisa surgiu durante o Curso de Verão do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT em janeiro de 2016. Nas aulas de Resolução de Problemas foi notado que poderia existir uma relação entre Progressões Aritméticas, Divisibilidade, Congruências e Somatórios. Desde então, o autor vem realizando algumas pesquisas, com o intuito de desenvolver um raciocínio que parte dos conteúdos da Educação Básica até o Ensino Superior.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's [4], afirmam que "É fundamental não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo". Sendo assim, o presente trabalho pretende contribuir com uma pesquisa que poderá ser um desafio na aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior. Esta dissertação tem dois objetivos, o primeiro é apresentar uma proposta que interrelaciona conteúdos matemáticos da Aritmética, conhecendo algumas curiosidades históricas e demonstrando teoremas, proposições, corolários, resolvendo exemplos e questões da OBMEP. E o segundo é, propor dois Teoremas e dois Corolários de divisibilidade e congruência.

Segundo [4], "o estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania". Com isso, o trabalho científico em pauta, busca linear os conteúdos desenvolvidos desde a Educação Básica até o Ensino Superior, exemplificando que o conhecimento matemático é como a construção de um muro [21], edificada de tijolo em tijolo.

O leitor encontrará nas próximas páginas, o resultado de uma pesquisa que começa com introdução a teoria dos números até teoremas e corolários que interrelacionam progressão aritmética, somatórios, congruência e divisibilidade. Foram usadas situações-problemas do cotidiano dos educandos da Educação Básica, com o intuito de informar, explorar e ensinar os conteúdos propostos, além de demonstrações, exemplos, exercícios e apresentações de curiosidades do mundo da matemática.

Os Teoremas, Definições, Corolários, etc., foram, em grande parte, baseados em autores consagrados como [12], [14], [16], [17] [18], [19], [20], [22] e [23].

O Trabalho é dividido em 6 (seis) Seções. Na primeira seção abordaremos um pouco da história da matemática, fazendo um breve relato da invenção dos números e depois

apresentaremos os Axiomas de Peano, enfatizando o Princípio da Indução Matemática. Na Seção seguinte, apresentaremos a definição e aplicações da Progressão Aritmética e algumas das formas de se fazer a soma dos seus termos. Na terceira, quarta e quinta seções apresentaremos alguns conceitos, teoremas, propriedades e definições importantes para o desenvolvimento deste estudo, começando por introduzir os conteúdos de divisibilidade, congruências e somatórios, respectivamente, aos quais servirão como alicerce para a sexta e última seção, onde apresentaremos teoremas e corolários que se conectam com todas as seções anteriores.

1 Um breve relato da história dos números

Nesta Seção faremos um breve relato da invenção dos números, passando pelos Axiomas de Peano e finalizando no Princípio da Indução Matemática - P.I.M. Teremos como fundamentação teórica os livros [2], [11], [13], [14], [18], [19], [20] e [23].

1.1 A invenção dos números

Contar um, dois, três, aparenta ser algo tão natural quanto dormir, chorar, beber, e assim por diante. Para [14], o uso dos algarismos 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 nos parece em geral tão evidente que chegamos quase a considerá-lo como uma aptidão inata do ser humano. Contudo, não foi tão simples e rápido convencionar uma ordem, um padrão de escrita e uma definição para os números.

Para [14], a invenção dos números, apesar de ser um fato importante em diversos momentos da história da humanidade, ocorreu de forma anônima e fragmentada. Esta não é, assim, uma história abstrata e linear, como imagina às vezes, e erradamente, a história da matemática: uma sucessão impecável de conceitos encadeados uns aos outros. Sendo assim, a invenção dos números resulta de um produto de acordos coletivos, logo não se pode atribuir esses acordos a uma única pessoa.

Mas o que são os números? O autor [18] define os números como entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza.

De acordo com [2], os números ou algarismos¹ que usamos para escrever nossas quantidades foram criados por matemáticos da Índia. "(...) Esses números foram aperfeiçoados posteriormente pelos árabes. Por isso recebem o nome de indo-arábicos".

Veja na Figura 1, a evolução da escrita dos algarismos indo-arábicos.

¹Al-Khowarizmi (780-850 d.C) é o nome de um dos matemáticos árabes que auxiliaram na divulgação e aperfeiçoamento da descoberta dos hindus, é por isso que os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 são também chamados algarismos.

Datas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XIV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XV	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Por volta de 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Figura 1: Evolução histórica dos algarismos indo-arábicos

Observa-se que, passaram mais de 4 séculos para obtermos um padrão dos algarismos indo-arábicos que usamos atualmente.

1.2 Axiomas de Peano

Nesta subseção, estudaremos os quatro Axiomas de Peano, que definem critérios para ordenar os naturais e fundamenta o Princípio da Indução Matemática. Teremos como base as referências [12], [13], [14], [19], [20] e [21].

Seguindo a evolução histórica numérica, a ordem entre os números foi baseada na ideia de sucessão. Giuseppe Peano² (1858-1932) propôs axiomas que dariam sustentação para o entendimento do conjunto dos Números Naturais - \mathbb{N} , para as operações entre os números naturais e para os Princípios da Boa Ordenação e da Indução Matemática.

²Giuseppe Peano foi um matemático italiano, autor de dezenas de livros e artigos, foi o fundador da lógica simbólica e o centro de seus interesses foram os fundamentos da matemática e o desenvolvimento de uma linguagem lógica formal.

Os quatro Axiomas de Peano são:

- i) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
- ii) Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.
- iii) Existe um único número natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.
- iv) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

Este último Axioma de Peano, se destaca dentre os outros, pois fundamenta o Princípio da Indução Matemática - P.I.M. O autor [21], de forma bem didática, facilita o entendimento desse princípio o explicando da seguinte forma, "imagine uma fila com infinitos dominós, um atrás do outro. Suponha que eles estejam distribuídos de tal modo que, uma vez que um dominó cai, o seu sucessor na fila também cai. O que acontece quando derrubamos o primeiro dominó?".

Apesar da simplicidade da pergunta acima, ela traz em sua essência toda a ideia da Indução Matemática.

1.3 Princípio da Indução Matemática

O quarto Axioma de Peano também é conhecido como Princípio da Indução Matemática - P.I.M. Esse método é exclusivo dos números naturais, ou seja, não se aplica aos racionais e muito menos ao reais.

Entende-se que o estudo deste princípio é muito importante para a formação do estudante do Ensino Médio. De acordo com [5]:

Todas as competências são objeto de todas as séries, de forma que não há uma ordem cronológica entre elas, mas se pode promover uma progressão do trabalho, ao longo das três séries, em termos dos níveis de elaboração de cada um dos temas estruturadores do ensino, crescendo a partir de percepções mais concretas ou imediatas em direção a conceituações mais gerais e abstratas, que usem instrumentos mais sofisticados e que permitam sínteses e visões mais complexas. (BRASIL, 2006, p. 133)

O ensino do Princípio da Indução Matemática vai ao encontro do que está proposto nos PCN's do Ensino Médio, sendo uma importante ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio abstrato e muito útil nas demonstrações algébricas de indução ou recorrências.

Enunciando sob a forma de propriedades, o P.I.M. se formula assim:

Propriedade 1.3.1.

Seja $P(n)$ uma sentença aberta tal que

- i) $P(1)$ é válida;
- ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n + 1)$, onde $n + 1$ é o sucessor de n .

Então $P(n)$ é válida para qualquer que seja o número natural n .

Exemplo 1.3.1.

Consideremos o problema de obter uma expressão para a soma $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Calculando a soma para os primeiros valores naturais de n , obtemos os exemplos:

$$P(1): 1 = 1$$

$$P(2): 1 + 2 = 3$$

$$P(3): 1 + 2 + 3 = 6$$

$$P(4): 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Observa-se que a apresentação acima não serve como demonstração, apenas como esclarecimento didático para a soma dos primeiros n naturais.

Conjecturando a igualdade $P(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$.

Usaremos o P.I.M. para demonstrar a validade ou não de $P(n)$.

- i) Verificar a validade de $P(1)$. Isto já foi feito acima, ambos os lados iguais a 1
- ii) Agora, verificaremos se a validade de $P(k)$, para um valor arbitrário de k , implica na validade de $P(k + 1)$.

Admitindo por hipótese de indução que $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ para um certo k , devemos mostrar que $P(k+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Para tal, somamos o novo termo $(k+1)$ a ambos os membros de $1 + 2 + 3 + \dots + k$ e $\frac{k(k+1)}{2}$. Obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a validade de $P(n)$ para um valor arbitrário de k implica em sua validade para $k+1$. Logo, pelo P.I.M., $P(n)$, ou seja, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n^2 + n)}{2}$, é válida.

■

Exemplo 1.3.2.

A soma dos n primeiros números ímpares³ é igual a n^2 ?

Temos que:

$$P(1) : 1 = 1^2$$

$$P(2) : 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$P(3) : 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

Observando $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ é natural conjecturar que $P(n)$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Com isso, usaremos o P.I.M., para demonstrar a sua validade.

- i) Para $P(1)$ já foi verificado a validade.
- ii) Agora, verificaremos a validade de $P(n)$. Admitindo por hipótese de indução que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ para um certo n . Verificaremos a validade $P(n + 1) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Para tal, somamos o novo termo $(2n + 1)$ a ambos os membros da hipótese de indução. Obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + n + (2n - 1) + (2n + 1) &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Portanto, a validade de $P(n)$ para um valor arbitrário de n implica em sua validade para $n + 1$. Logo, pelo P.I.M., $P(n)$, ou seja, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, é válida. ■

³Um número natural n é dito par se existir um número natural k , de modo que $n = 2k$. E ímpar, se $n = 2k - 1$, com $k \geq 1$.

Exemplo 1.3.3.

(OBMEP 2016 - 2ª FASE) Uma figura é construída por fileiras horizontais de quadrados 1×1 , dispostos lado a lado, sem sobreposição e sem espaçamento. Cada fileira, com exceção da primeira, está encostada inteiramente na fileira de baixo. A primeira fileira possui um número ímpar de quadrados e cada uma das demais possui dois quadrados a menos do que a fileira imediatamente abaixo. A última fileira sempre contém um único quadrado.

Abaixo, vemos uma figura na qual a primeira fileira contém 11 quadrados.

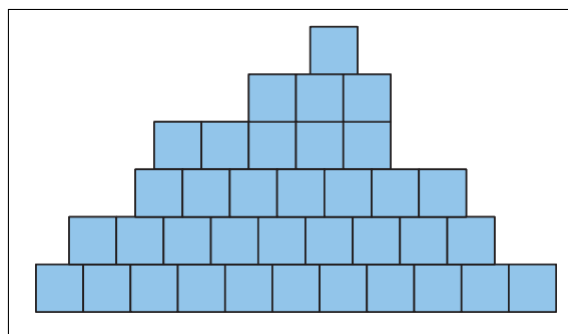


Figura 2: OBMEP 2016 - 2ª Fase

Mostre que, independentemente do número de quadrados da primeira fileira, o número total de quadrados de uma figura é o quadrado de um número natural.

Solução: Observamos que todo número natural ímpar é da forma $2n - 1$ para algum n natural; por exemplo, $1 = 2 \cdot 1 - 1$, $3 = 2 \cdot 2 - 1$, $5 = 2 \cdot 3 - 1$, e assim por diante. Desse modo, 1 é o primeiro número ímpar, 3 é o segundo, 5 o terceiro e, em geral, o n -ésimo número ímpar é $2n - 1$.

O número de quadrados de uma figura de base com $2n - 1$ quadrados é a soma de todos os números ímpares de 1 até $2n - 1$. As primeiras somas desse tipo são

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e é natural conjecturar que o número de quadradinhos de uma figura de base com $2n - 1$ quadradinho é n^2 , isto é, que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

E como já foi mostrado no exemplo 1.3.2, segue que, por indução, a afirmativa é verdadeira para todo n natural. ■

Exemplo 1.3.4.

Verifique a desigualdade $n^2 \leq 2^n$, para $n \geq 4$.

- i) Para $P(4)$ é válido, pois $16 \leq 16$.
- ii) Admitindo por hipótese de indução que $n^2 \leq 2^n$, para um certo $n \geq 4$.

Verificaremos a validade de $P(n + 1)$: $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$, para $n \geq 4$.

Sabe-se que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + 2n + 1$. E pela hipótese de indução, temos que $2n + 1 < 2^n$, para $n \geq 4$.

Juntando as desigualdades, obtemos $(n + 1)^2 < 2^n + 2n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Daí, por transitividade e para um valor arbitrário de $n \geq 4$ que implica na validade de $(n + 1)$, ou seja, $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Logo pelo P.I.M., $P(n)$, ou seja, $n^2 \leq 2^n$, para $n \geq 4$, é válida. ■

Exemplo 1.3.5.

Esta demonstração também é conhecida como a Desigualdade de Bernoulli.

$$(1 + h)^n \geq 1 + n \cdot h \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ se } h > 0.$$

- i) Verificar se a proposição é válida para o primeiro termo, $n=1$.

$$\begin{aligned} (1 + h)^1 &\geq 1 + 1 \cdot h \\ 1 + h &\geq 1 + h \end{aligned}$$

ii) Supor que a desigualdade seja válida para $n = k$, ou seja, $(1 + h)^k \geq 1 + k \cdot h$, será a nossa Hipótese de Indução.

Mostrar que a desigualdade seja válida para $n = k + 1$, ou seja,

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1) \cdot h.$$

Partindo da Hipótese de Indução, temos:

$$(1 + h)^k \geq 1 + k \cdot h.$$

Multiplicando $(1 + h)$ em ambos os membros da desigualdade temos;

$$(1 + h) \cdot (1 + h)^k \geq (1 + k \cdot h) \cdot (1 + h)$$

Obs: A desigualdade não inverte, pois $(1 + h)$ é positivo.

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + k \cdot h + h + k \cdot h^2 \text{ e como } k \in \mathbb{N} \text{ e } h^2 > 0$$

Logo,

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + k \cdot h + h + k \cdot h^2 \geq 1 + (k + 1) \cdot h.$$

Portanto, por transitividade, a proposição também é verdadeira para $n = k + 1$, e pelo Princípio da Indução Matemática, a Desigualdade de Bernolulli é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

■

Atividades Propostas

Exercício 1.1.

Demonstre, por indução:

$$\text{a) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{b) } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$\text{c) } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\text{d) } n! > 2^n, \text{ se } n \geq 4$$

$$\text{e) } n! > 3^n, \text{ se } n \geq 7$$

2 Progressão Aritmética

Nesta Seção estudaremos um tipo de sequência explicada na Educação básica, chamada de progressão aritmética. Teremos como fundamentação teórica as referências [3], [6], [9], [12], [13] e [16].

2.1 Eventos Periódicos

Encontramos frequentemente eventos que ocorrem em variações iguais em intervalo de tempo, como por exemplo: copa do mundo de futebol, eleições brasileiras, olimpíadas, ciclos lunares, estações do ano e etc.

A Copa do Mundo de Futebol é exemplo de uma competição internacional que ocorre periodicamente. Sua primeira edição foi disputada no Uruguai, em Montevideu, no ano de 1930. A segunda e a terceira edição ocorreram nos anos de 1934 e 1938, tendo a Itália e a França como sede, respectivamente. Contudo, devido a 2ª Guerra Mundial, não houve competição em 1942 e 1946.

A Copa de 1950 foi o retorno da competição, o Brasil foi escolhido como sede, favorecido pela proposta da construção do Estádio do Maracanã, tendo como capacidade 200 mil pessoas, era o maior do mundo na época.

Desde então, a Copa do Mundo de Futebol ocorre periodicamente a cada 4 anos. Como mostra a Tabela 1.

Ano	Sede	Campeão
1930	Uruguai	Uruguai
1934	Itália	Itália
1938	França	Itália
1950	Brasil	Uruguai
1954	Suíça	Alemanha
1958	Suécia	Brasil
⋮	⋮	⋮
2014	Brasil	Alemanha

Tabela 1

Definição 2.1.1.

Uma Progressão Aritmética - P.A. é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r .

Exemplo 2.1.1.

As sequências $(2, 4, 6, 8, \dots)$ e $(15, 12, 9, 6, \dots)$ são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 2 e -3.

2.2 Termo Geral da P.A.

Em uma Progressão Aritmética (a_1, a_2, a_3, \dots) , para avançar um termo, basta soma a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante.

Assim, $a_5 = a_1 + 4r$, pois passar de a_1 para a_5 , avançamos 4 termos.

De modo geral,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

pois, ao passar de a_1 para a_n , avançamos $(n - 1)$ termos.

Exemplo 2.2.1.

Com base na Tabela 1, das edições da Copa do Mundo, determine o termo geral que expresse a ordem das copas, após a 2ª Guerra Mundial.

Solução:

Considerando que a primeira copa após a guerra foi em 1950, temos que $a_1 = 1950$ e como a periodicidade da copa do mundo é de 4 em 4 anos, segue que $r = 4$.

Logo o termo geral da ordem das Copas do Mundo, a contar de 1950 será:

$$a_n = 1950 + (n - 1) \cdot 4 = 1946 + 4n$$

Exemplo 2.2.2.

O preço de uma moto em seu primeiro ano de uso é de R\$ 20.000,00 e diminui R\$ 1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço dessa moto em seu quarto ano de uso?

Solução:

Chamamos o preço com n anos de uso de a_n , temos $a_1 = 20.000$ e queremos calcular a_4 . Como a desvalorização anual é constante, a_n é uma progressão aritmética.

Logo,

$$\begin{aligned}a_4 = a_1 + 3r &= 20.000 + 3 \cdot (-1.000) \\ &= 20.000 - 3000 \\ &= 17.000\end{aligned}$$

Sendo assim, o preço da moto em seu quarto ano será de R\$ 17.000,00.

Exemplo 2.2.3.

O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. A contar do ano de 2018, quantas vezes ele visitará a Terra até o ano de 2746? Sabendo que em 2746 o cometa passará próximo a Terra.

Solução:

Como é periódica a passagem deste cometa, podemos afirmar que a razão da nossa progressão será 76, admitindo que a próxima visita será em 2062. Temos o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}2746 &= 2062 + (n - 1)76 \\ 2746 &= 2062 + 76n - 76 \\ 760 &= 76n \\ 10 &= n\end{aligned}$$

Logo, o cometa Halley passará pelo planeta Terra 10 vezes até o ano de 2746.



2.3 A Soma de Gauss

A história desta fórmula começa na Alemanha, por volta de 1785, na escola de Braunschweig. Conta-se que o professor Büttner resolveu manter ocupados seus alunos de uma classe de ensino fundamental e propôs que eles calculassem a soma de todos os inteiros de 1 a 100. Aparentemente, ele esperava que eles passassem bastante tempo resolvendo tal exercício. E para a surpresa de todos, em poucos minutos um aluno de aproximadamente 8 anos deu a resposta correta. O professor conferiu os cálculos e verificou que esse garoto, chamado Carl Gauss havia acertado. Pediu-lhe então que explicasse como havia feito as contas de forma tão rápida. Gauss prontamente mostrou sua ideia. Ele observou que, ao somarmos o primeiro número da sequência com o último, obtemos o resultado de 101, e que, ao somarmos o segundo número com o penúltimo, também obtemos 101 como resultado e assim por diante. Vejamos o esquema abaixo para melhor compreensão:

$$1 + 2 + 3 + \dots + \underbrace{50 + 51}_{101} + \dots + 98 + 99 + 100$$

101

Pela ilustração acima, podemos ver que cada número irá se associar a outro que está em posição oposta a si. A soma de 1 com 100, de 2 com 99, de 3 com 98, e assim por diante, é sempre igual a 101. Repetindo esse processo, chegará o momento em que somaremos os números centrais da sequência e encontraremos que $50 + 51 = 101$.

Assim sendo, em vez de somarmos os cem números da sequência, somaremos os resultados obtidos, ou seja, com 50 parcelas de $101 + 101 + 101 + \dots + 101$.

Como na soma desejada o número 101 aparece 50 vezes, basta multiplicar 101 por 50, obtendo o resultado de 5050. Portanto, por meio dessa ideia, Gauss conseguiu calcular rapidamente a soma de todos os números entre 1 e 100. E isso Gauss fez em pouco tempo e sem dificuldades, um prenúncio das grandes contribuições desse gênio.

2.4 Soma dos Termos de uma P.A.

Dada a P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, que possui n termos, observe que o primeiro termo é a_1 , o segundo é a_2 , \dots , o penúltimo é a_{n-1} e o último é a_n . Representando a soma desses termos por S_n , teremos a seguinte expressão:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

daí, teremos

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots$$

logo, pela Soma de Gauus

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots$$

Como sempre somamos dois termos da P.A. de n termos, teremos $\frac{n}{2}$ parcela iguais a $(a_1 + a_n)$, o que nos leva à fórmula da soma dos termos de uma P.A. finita:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Uma outra forma para determinar a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma P.A. Vejamos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Em vez de somar os termos do mesmo modo que Gauss, reescreveremos a soma como outra soma de termos de P.A. logo abaixo dessa, de modo que o último termo fique abaixo do primeiro, o penúltimo fique abaixo do segundo e assim por diante.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

+

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Com isso, teremos,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que, se somarmos as duas expressões, teremos o dobro da mesma soma que Gauss fez. Mantendo o mesmo pensamento de Gauss, os resultados dessas somas entre parênteses serão iguais aos do primeiro termo somado ao último. Podemos substituir, portanto, todos os termos por (a_n+a_1) .

Observe:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Para finalizar, observe que a soma que obtivemos aqui é diferente da soma que Gauss obteve, pois possui exatamente os n termos que a P.A. possui. A soma de Gauss possuía apenas metade, pois ele somou os termos de uma mesma P.A. A soma que desenvolvemos, contudo, engloba todos termos, porque duplicamos cada termo antes de somá-los. Desse modo, podemos trocar toda a soma acima pela multiplicação por n , que é o número inicial de termos. Assim, resolvendo a equação, teremos a fórmula pretendida:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

■

Exemplo 2.4.1.

Dada a P.A. $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, calcule a soma dos seus 50 primeiros termos. Para calcular essa soma, é necessário conhecer o último termo dessa P.A. Para tanto, usaremos a fórmula do termo geral de uma P.A.

$$\begin{aligned} a_{50} &= 2 + (50 - 1) \cdot 2 \\ &= 2 + 49 \cdot 2 \\ &= 2 + 98 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Agora, usando a fórmula para soma dos n primeiros termos de uma P.A., teremos,

$$\begin{aligned} S_{50} &= (2 + 100) \cdot \frac{50}{2} \\ &= 102 \cdot 25 \\ &= 2550 \end{aligned}$$



Atividades Propostas

Exercício 2.1.

Responda os itens a seguir.

- a) Com o intuito de construir um jogo novo, foram colocados sobre um tabuleiro de xadrez grãos de arroz da seguinte maneira: na primeira casa, foram colocados 5 grãos; na segunda, 10; na terceira, 15; e assim por diante. Quantos grãos de arroz foram usados nesse tabuleiro?
- b) Quanto é a soma de todos os números naturais ímpares de 3 algarismos?
- c) A expressão $S_n = n^2 - 3n$, para qualquer n inteiro positivo, representa a soma dos n primeiros termos de uma P.A. Qual é a razão desta P.A.?
- d) Calcule o valor de x na igualdade $x + 2x + \dots + 20x = 6300$, sabendo que os termos do 1º membro estão em P.A.
- e) Um jardim tem uma torneira e dez roseiras dispostas em linha reta. A torneira dista 50 m da primeira roseira e cada roseira dista 2 m da seguinte. Um jardineiro, para regar as roseiras, enche um balde na torneira e despeja seu conteúdo na primeira. Volta à torneira e repete a operação para cada roseira seguinte. Determine a metragem que ele terá andado após regar a última roseira e voltar à torneira para deixar o balde.

3 Divisibilidade com Inteiros

Nesta Seção estudaremos algumas propriedades e demonstrações das divisões nos inteiros e da Divisão Euclidiana. Teremos como fundamentação teórica as referências [7], [9], [10], [11], [13] e [20].

3.1 Relação de Divisibilidade

No conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, podemos relacionar dois elementos através da relação de divisibilidade.

Como a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é possível, expressamos esta possibilidade através da definição abaixo.

Definição 3.1.1.

Dados dois número inteiros a e b , diremos que a divide b , escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Neste caso, diremos também que a é um divisor de b , ou um a é um *fator* de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a .

Observe que a notação $a|b$ não representa nenhuma operação em \mathbb{Z} , nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade a existência de um inteiro c , tal que $b = c \cdot a$.

A negação dessa sentença é representada por $a \nmid b$, significando que inexistente número inteiro c tal que $b = c \cdot a$. Portanto, temos que $0 \nmid a$ se $a \neq 0$.

Exemplo 3.1.1.

$7|21$, pois $21 = 7 \cdot 3$. Por outro lado, $5 \nmid 9$, pois considerando o conjunto $M = 5m$, com $m \in \mathbb{Z}$; $M = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$, dos múltiplos de 5, vemos que 9 não pertence ao mesmo.

Proposição 3.1.

Considere os números naturais a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$. Temos:

i) $1|a$;

Demonstração

De fato, $1|a$ pois $a = 1 \cdot a$ para todo inteiro a . ■

ii) $a|a$;

Demonstração

De fato, $a|a$ pois $a = 1 \cdot a$. ■

iii) $a|0$;

Demonstração

De fato, $a|0$ pois $0 = a \cdot 0$. ■

iv) Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;

Demonstração

Se a é divisor de b , então existe um número inteiro q , tal que $b = a \cdot q$. Da mesma forma, se b é divisor de c , então existe um inteiro q_1 , tal que $c = b \cdot q_1$.

Logo, $c = b \cdot q_1 \Rightarrow c = a \cdot q \cdot q_1 \Rightarrow c = a \cdot (q \cdot q_1)$. Ou seja, a é divisor de c . ■

v) Sejam a, b, c e d , números inteiros, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, então, se $a|b$ e $c|d$, então $(a \cdot c) | (b \cdot d)$;

Demonstração

Se a divide b , então existe um número inteiro q , tal que $b = a \cdot q$.

Da mesma forma, se c divide d , então existe um número inteiro q_1 , tal que $d = c \cdot q_1$.

Temos que:

$$b \cdot d = (a \cdot q) \cdot (c \cdot q_1) = (a \cdot c) \cdot (q \cdot q_1).$$

Ou seja, $(a \cdot c)$ é um fator de $(b \cdot d)$, demonstrando a proposição. ■

vi) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b \pm c$;

Demonstração

Se $a|b$ e $a|c$, então existem q_1 e q_2 inteiros tais que:

$$b = a \cdot q_1 \text{ e } c = a \cdot q_2.$$

Somando as duas equações temos:

$$b + c = a \cdot (q_1 + q_2).$$

Portanto, $a|b + c$.

De maneira análoga, demonstra-se a subtração. ■

vii) Se $a|b$, então $a|b \cdot c$;

Demonstração

Se $a|b$ então existe um número inteiro q , tal que, $b = a \cdot q$.

Multiplicando a equação por um inteiro c , temos que, $b \cdot c = a \cdot (q \cdot c)$.

Portanto, $a|b \cdot c$. ■

viii) Se $a|b$ e $a|c$, então $a|m \cdot b + n \cdot c$, quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Se $a|b$ e $a|c$ temos pelo item anterior que $a|b \cdot m$ e $a|c \cdot n$ para quaisquer inteiros m e n . Logo, pelo item (vi), segue que $a|b \cdot m + c \cdot n$. ■

ix) Sejam a e b inteiros, ambos diferentes de zero, tem-se que se $a|b$, então $|a| \leq |b|$.

Demonstração

Se $a|b$ com $b \neq 0$, então existe um inteiro $q \neq 0$ tal que $b = a \cdot q$.

Logo: $|b| = |a| \cdot |q|$, como $b \neq 0$, temos $q \neq 0$, logo $1 \leq |q|$ e, conseqüentemente, $|a| \leq |a| \cdot |q| = |b|$.

■

x) Se $b|a$ e $a|b$, então $a = \pm b$;

Demonstração

Suponhamos que $a|b$ e que $b|a$. Se $a = 0$ ou $b = 0$, temos que $a = b = 0$.

No caso $a, b \neq 0$ temos pelo item (ix) que $|a| \leq |b|$ e $|b| \leq |a|$.

Logo, $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$.

■

xi) Se $a|1$, então $a = \pm 1$;

Demonstração

Suponhamos que $a|1$. Do item (i) temos que $1|a$ para todo inteiro a .

Logo pelo item anterior segue que $a = \pm 1$.

■

xii) $a|b \Leftrightarrow -a|b \Leftrightarrow a|-b \Leftrightarrow -a|-b$.

Demonstração

$$\begin{aligned} a|b &\Leftrightarrow b = a \cdot q, \quad q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow b = (-a) \cdot (-q), \quad -q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -b = a \cdot (-q), \quad -q \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow -b = (-a) \cdot q, \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.1.2.

$1|23$, pois $23 = 1 \cdot 23$

Exemplo 3.1.3.

$7|7$, pois $7 = 1 \cdot 7$.

Exemplo 3.1.4.

$5|0$, pois $0 = 5 \cdot 0$.

Exemplo 3.1.5.

$2|8$ e $8|40$, temos que, $8 = 4 \cdot 2$ e $40 = 5 \cdot 8$, daí $40 = 5 \cdot (4 \cdot 2) = (5 \cdot 4) \cdot 2$.
Logo $2|40$.

Exemplo 3.1.6.

$3|15$ e $2|12$, temos que $15 = 5 \cdot 3$ e $12 = 6 \cdot 2$.
Portanto, $15 \cdot 12 = (5 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 5)$.
Logo, $3 \cdot 2|12 \cdot 15$

Exemplo 3.1.7.

$7|14$ e $7|21$, com isso temos que $14 = 7 \cdot 2$ e $21 = 7 \cdot 3$.
Somando as duas equações resulta que $14 + 21 = 7 \cdot (2 + 3)$.
Portanto, $7|14 + 21$.

Exemplo 3.1.8.

$2|6$, com isso temos que $6 = 2 \cdot 3$. Multiplicando a equação por um inteiro k , temos que, $6 \cdot k = (2 \cdot 3) \cdot k = 2 \cdot (3 \cdot k)$.
Portanto, $2|6 \cdot k$.

Exemplo 3.1.9.

$7|14$ e $7|21$, pelo item (v) sabe-se ainda que $7|14 \cdot m$ e $7|21 \cdot n$. Daí, pelo item (vi), segue que $7|(14 \cdot m) + (21 \cdot n)$, $\forall m$ e n inteiros.

Atividades Propostas

Exercício 3.1.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $c \neq 0$. Mostre que:

- a) $a|b$ e $b|a$ se, e somente se $|a| = |b|$.
- b) $ac|bc$ se, e somente se, $a|b$.

Exercício 3.2.

- a) Mostre que $6|n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- b) Mostre que o produto de quatro números inteiros consecutivos, quaisquer, é sempre múltiplo de 24.

Exercício 3.3.

- a) Demonstre, por indução, que $a - b|a^n - b^n$.

3.2 Divisão Euclidiana

Teorema 3.1.

Dados $a \in \mathbb{Z}_+^*$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Existem dois únicos inteiros q e r tais que $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r < b$, onde b é o maior número, tal que $b \cdot q \leq a \leq b \cdot (q + 1)$.

Demonstração

Temos duas situações possíveis, ou a é múltiplo de b ou a está situado entre dois múltiplos $b \cdot q$ e $b \cdot (q + 1)$, para algum $q \in \mathbb{Z}$.

Se a é múltiplo de b , $a = b \cdot k$, temos $q = k$ e $r = 0$.

Caso a não seja múltiplo de b , é fato que teremos,

$$b \cdot q < a < b \cdot (q + 1).$$

Nesta desigualdade podemos subtrair $b \cdot q$ de todos os membros, tendo assim,

$$0 < \underbrace{a - (b \cdot q)}_r < b.$$

Tomemos,

$$a - (b \cdot q) = r \Rightarrow a = (b \cdot q) + r, \text{ com } 0 < r < b.$$

Segue que, quando $r = 0$, a é múltiplo de b .

Para provar a unicidade de q e r , suponhamos que existam outros inteiros r_0 e q_0 tais que,

$$a = b \cdot q_0 + r_0, \text{ com } 0 \leq r_0 < b.$$

Desta forma temos que,

$$a = b \cdot q + r = b \cdot q_0 + r_0 \Rightarrow (r - r_0) = (q - q_0) \cdot b.$$

Percebemos assim, que $(r - r_0)$ é um múltiplo de b e como $-b < r - r_0 < b$, o único valor possível é

$$r - r_0 = 0 \Rightarrow r = r_0.$$

Desta forma, $q = q_0$, provando assim, a unicidade.



Exemplo 3.2.1.

Desenvolva a Divisão Euclidiana de 12 por 4.

Solução:

Temos que, $12 = 4 \cdot 3 + 0$. Assim, 12 é múltiplo de 4.



Exemplo 3.2.2.

Desenvolva a Divisão Euclidiana de 31 por 5.

Solução:

Desse modo, temos que, $31 = 5 \cdot 6 + 1$ e $0 < 1 < 5$.

Assim, temos que o resto e o quociente da divisão 31 por 5, são 1 e 6 respectivamente.



Exemplo 3.2.3.

Calcule a Divisão Euclidiana de -25 por 3.

Solução:

Desse modo, temos que, $-25 = 3 \cdot (-9) + 2$ e $0 < 2 < 3$.

Assim, temos que o resto e o quociente da divisão -25 por 3, são 2 e -9 respectivamente.



4 Congruência

Nesta Seção estudaremos a definição, as proposições, as propriedades e as demonstrações de um conteúdo fundamental para a Teoria dos Números. Teremos como fundamentação teórica as referências [1], [8], [9], [10], [11], [13], [15] e [22].

4.1 Congruência Modular

A Congruência Modular é uma ferramenta que pode auxiliar muito no desenvolvimento do pensamento aritmético e algébrico de nossos alunos. É um tema gerador de excelentes oportunidades de contextualização, pois apresenta a realização de operações aritméticas de uma forma diferente da utilizada normalmente pelos alunos [1].

Para [8], a congruência modular é um conceito muito importante e que está relacionado com divisibilidade e os restos de uma divisão de números inteiros. Sendo um importante conteúdo da Teoria dos Números, ao qual tem diversas aplicações em nosso dia a dia, como por exemplo: códigos de barras, CPF, criptografias, calendários e fenômenos periódicos.

Definição 4.1.1.

Dados $m, a, b \in \mathbb{Z}$. Diremos que a e b são congruentes módulo m , quando o resto das Divisões Euclidianas de a e b por m forem os mesmos. Denotaremos que a é congruente a b módulo m da seguinte forma: $a \equiv b \pmod{m}$.

Proposição 4.1.

Considere $a, b \in \mathbb{Z}$. Temos $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m|a - b$.

Demonstração

(\Rightarrow) Suponha que $a \equiv b \pmod{m}$

Pela definição 4.1.1, afirmamos que $a = qm + r$ e $b = q_1m + r$, sendo $0 < r < m$ e com $q, q_1 \in \mathbb{Z}$.

Segue então que: $a - b = (q_1 - q)m \implies m|a - b$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $m|a - b$.

Logo, existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $a - b = mq$.

Daí,

$$b = a + mq.$$

Sejam r e q_1 o resto e o quociente da divisão euclidiana de b por m , isto é:

$$b = mq_1 + r, \text{ com } 0 < r < m$$

Sendo assim, temos que: $a + mq = mq_1 + r$.

Logo, $a = m(q_1 - q) + r$, com $0 < r < m$.

Portanto r também é o resto da divisão euclidiana de a por m . ■

Exemplo 4.1.1.

$17 \equiv 5 \pmod{2}$, já que os restos da divisão de 17 e de 5 por 2 são iguais a 1. ■

Quando a relação $a \equiv b \pmod{m}$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes módulo m . Para estas situações denotaremos da seguinte forma $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Uma outra observação a ser feita, é que se torna desinteressante calcular o resto da divisão de um número inteiro por 1, pois será sempre nulo, portanto considere $m \neq 1$.

Para continuarmos nosso estudo sobre congruências apresentaremos algumas propriedades:

Propriedade 4.1.1.

Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que

- i) $a \equiv a \pmod{m}$.
- ii) $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$.
- iii) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

Demonstração

- i) Como $m|0$, então $m|a - a$, o que nos diz que $a \equiv a \pmod{m}$.

ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, temos que $m|a - b$, logo $a - b = mq$. Multiplicando essa última igualdade toda por (-1) , temos que $(-a + b) = m \cdot (-q)$, o que implica em $b \equiv a \pmod{m}$.

iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então existe inteiros q e q_1 tais que:

$$a - b = mq \text{ e } b - c = mq_1$$

Somando membro a membro as duas igualdades anteriores, temos:

$$(a - b) + (b - c) = mq + mq_1 \implies a - c = m(q + q_1).$$

Logo,

$$m|a - c \implies a \equiv c \pmod{m}.$$

■

Exemplo 4.1.2.

$$7 \equiv 7 \pmod{5} \Leftrightarrow 5|(7 - 7) \Leftrightarrow 5|0.$$

■

Exemplo 4.1.3.

$$3 \equiv 5 \pmod{2} \text{ e } 5 \equiv 3 \pmod{2} \Leftrightarrow 2|(3 - 5) \text{ e } 2|(5 - 3) \Leftrightarrow 2|-2 \text{ e } 2|2.$$

■

Exemplo 4.1.4.

$15 \equiv 3 \pmod{4}$ e $3 \equiv 7 \pmod{4} \Leftrightarrow 4|(15 - 3)$ e $4|(3 - 7) \Rightarrow 4|12$ e $4|-4$.
Disso, segue que $15 \equiv 7 \pmod{4}$.

■

4.2 Propriedades Operacionais

Baseando-se na relação equivalência existente na congruência modular, algumas propriedades operacionais podem ser utilizadas na resolução de problemas, na elaboração de algoritmos e na fundamentação de novos teoremas. Vejamos:

Propriedade 4.2.1.

- i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.
- iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.
- iv) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, para todo n .
- v) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $n|m$, então $a \equiv b \pmod{n}$.

Demonstração

- i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então existem inteiros q e q_1 tais que:

$$a - b = mq \text{ e } c - d = mq_1.$$

Somando membro a membro as duas igualdades anteriores, temos:

$$(a - b) + (c - d) = mq + mq_1 \Rightarrow (a + c) - (b + d) = m(q + q_1).$$

Logo, resulta que:

$$m \mid (a + c) - (b + d) \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

■

- ii) A demonstração é análoga ao item (i).

■

iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, temos que $a - b = mq$, somando e subtraindo c no primeiro membro da igualdade, temos:

$$a - b + c - c = mq \Rightarrow (a + c) - (b + c) = mq.$$

Assim temos que:

$$a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

■

- iv) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m|a - b$. Sabemos que:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Como $m|a - b$, então $m|a^n - b^n$. Assim, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

■

v) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m|a - b$. Como $n | m \Rightarrow n | a - b$. Logo, $a \equiv b \pmod{n}$.

■

Baseando-se nas propriedades operacionais modular, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.2.1.

Temos que: $8 \equiv 3 \pmod{5}$ e $7 \equiv 2 \pmod{5}$, pois $5 | (8 - 3)$ e $5 | (7 - 2)$. Pelo item (ii) da Propriedade 4.2.1, podemos afirmar que $56 \equiv 6 \pmod{5}$. E pelo item (iii) concluímos que $(56 - 6) \equiv (6 - 6) \pmod{5}$, ou seja $50 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 5 | 50$, pelo item (v).

■

Exemplo 4.2.2.

Observa-se que $9 \equiv -1 \pmod{10} \Leftrightarrow 10 | 10$.

Multiplicando por 2 ambos os lados da congruência, segue que, $18 \equiv -2 \pmod{10}$. Com isso, pelo item (iv) da Propriedade 4.2.1, a congruência continua verdadeira.

Contudo a recíproca nem sempre será verdadeira, pois $27 \equiv 18 \pmod{3}$, porém ao dividir por 9, temos que $3 \not\equiv 2 \pmod{3}$.

■

Exemplo 4.2.3.

Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho" conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a duas voltas e meia. Considerando que a cada volta o atleta voltou a posição inicial, qual o verdadeiro ângulo do atleta em relação a posição inicial após essa façanha?

Solução:

Como um giro completo é de 360° , temos que

$$720 \equiv 0 \pmod{360} \text{ e } 900 = 720 + 180.$$

Segue que

$$720 + 180 \equiv 180 \pmod{360}$$

Ou seja

$$900 \equiv 180 \pmod{360}.$$

Logo a posição final do "mineirinho" era de 180° em relação inicial.



Exemplo 4.2.4.

(OBMEP-2012 Banco de questões): Estefânia tem cinco cartas marcadas com as letras A,B,C,D e E empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha.

A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas.

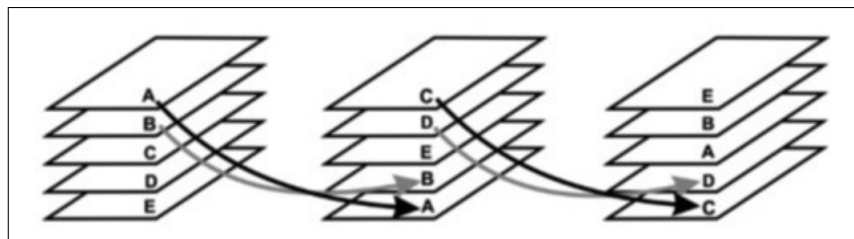


Figura 3: OBMEP 2012 - Banco de Questões

Se Estefânia embaralha as cartas 74 vezes qual carta estará no topo da pilha?

Solução:

Observe na tabela a seguir o o que acontece nas 6 primeiras embaralhadas de Estefânia.

Posição inicial	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
A	C	E	A	C	E	A
B	D	B	D	B	D	B
C	E	A	C	E	A	C
D	B	D	B	D	B	D
E	A	C	E	A	C	E

Figura 4: Tabela para solução

Segue daí, que a cada 6 embaralhadas as cartas voltam a posição inicial, ou seja, o embaralhamento torna-se periódico de período 6, basta então encontrar o resto da divisão de 74 por 6, o que é equivalente a

$$74 = 6 \cdot 12 + 2 \equiv 2 \pmod{6}$$

Logo é a carta E que estará no topo.



Exemplo 4.2.5.

Primeiro de janeiro de 2017 foi em um domingo, desejamos saber quando cairá um outro dia qualquer deste mesmo ano. Com base na tabela abaixo que representa os primeiros dias do mês de janeiro de 2017. Determine o dia da semana que caiu 10 de abril de 2017.

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Solução:

Primeiro precisamos ver quantos dias existem de 1 de janeiro até 10 de abril.

Vejamos:

$$\begin{aligned} \textit{Janeiro} &= 31 \textit{ dias} \\ \textit{Fevereiro} &= 28 \textit{ dias} \\ \textit{Marco} &= 31 \textit{ dias} \\ \textit{Abril} &= 10 \textit{ dias} \\ \mathbf{10 \textit{ de Abril}} &= \mathbf{100^\circ \textit{ dia deste ano}} \end{aligned}$$

Verificamos aqui que estamos diante de um caso de congruência, módulo 7, pois temos 7 dias na semana.

Agora, é como se tivéssemos em uma fila ordenada de 100 dias e desejando saber, na congruência de módulo 7, qual o correspondente ao centésimo dia deste ano.

Temos que $100 = 98 + 2$, sendo assim $100 = 98 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

Logo, o 100º dia é congruente a 2, módulo 7. Como o dia 2 de janeiro foi em uma segunda, o dia 10 de abril também será e, é claro, que todas as demais segundas-feiras deste ano foram representadas por números congruentes ao 2, módulo 7.

5 Somatórios

Nesta Seção estudaremos a definição, algumas proposições, demonstrações e exemplos de Somatórios. Teremos como fundamentação teórica as referências [1], [8], [9], [10], [11], [12], [15], [19], [20], [22] e [23],

5.1 Definição e Proposições

Definição 5.1.1.

Seja (a_n) uma sequência de elementos de um conjunto A dotado de operações de adição, definimos o somatório dos seus n primeiros termos como sendo

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Proposição 5.1.

Sejam (a_i) , (b_i) duas sequências de elementos do conjunto A e seja $c \in A$. Então,

$$\text{i) } \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i;$$

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i;$$

$$\text{iii) } \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1;$$

$$\text{iv) } \sum_{i=1}^n c = n \cdot c.$$

Demonstração

i) A soma $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ significa que ao somar os n primeiros termos da nova sequência (c_n) , onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se $c_n = a_n + b_n$. Provemos o resultado por indução sobre n .

Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^1 (a_i + b_i) = a_1 + b_1 = \sum_{i=1}^1 a_i + \sum_{i=1}^1 b_i,$$

verifica-se que para $n = 1$ a fórmula é válida.

Por hipótese de indução, admita que a fórmula é válida para algum número natural k . Então temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (a_i + b_i) &= \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) + (a_{k+1} + b_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=1}^k b_i + (a_{k+1} + b_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} + \sum_{i=1}^k b_i + b_{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k+1} b_i\end{aligned}$$

Mostrando assim, que a fórmula é válida para $k + 1$, para todo $k = n$, e pelo Princípio da Indução, temos que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

ii) Usando a definição de somatórios, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n c \cdot a_i &= c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \cdots + c \cdot a_n \\ &= c \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= c \cdot \sum_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$
■

iii) Provaremos esta fórmula por indução sobre n .

Para $n = 1$, temos que

$$\sum_{i=1}^1 (a_{i+1} - a_i) = a_2 - a_1,$$

o que mostra a validade da fórmula para $n = 1$.

Por hipótese de indução, admita que a fórmula seja válida para um natural n .

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) + (a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= a_{n+1} - a_1 + a_{n+2} - a_{n+1} \\ &= a_{n+2} - a_1 \end{aligned}$$

mostrando que a fórmula é válida para $n + 1$ e, portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

iv) O somatório $\sum_{i=1}^n c$ representa a soma de n parcelas iguais a c , e, portanto, é igual a $n \cdot c$. ■

Vejamos agora, alguns exemplos de como podemos usar o somatório.

Exemplo 5.1.1.

Verificaremos a igualdade $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$

$$P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

Provaremos por indução em n , temos que

$$P(1) : 1^2 = \frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

é verdadeira para $n = 1$.

Admita que, para algum $n \in \mathbb{N}$ se tenha que $P(n)$ é verdadeira. Somando $(n + 1)^2$ a ambos os lados da igualdade de $P(n)$, temos

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n + 1)^2 &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) + 6(n + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot [n(2n + 1) + 6(n + 1)]}{6} \\ &= \frac{(n + 1) \cdot [(n + 1) + 1][2(n + 1) + 1]}{6} \end{aligned}$$

sendo assim, temos a validade para $P(n + 1)$.

Logo, pelo Princípio da Indução, a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.1.2.

Verificaremos o resultado da soma dos termos de S_n , sendo que

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n + 1).$$

Com a notação de somatórios, reescrevemos S_n como

$$S_n = \sum_{i=1}^n i \cdot (i + 1).$$

Aplicando o item (i) da proposição 5.1, temos que

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{i=1}^n i \cdot (i + 1) &= \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \\
&= (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n),
\end{aligned}$$

Conforme os exemplos 5.1.1 e 1.3.1, temos que

$$S_n = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n + 1) \cdot (n + 2)}{3}$$

■

Exemplo 5.1.3.

Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos? Esse problema foi proposto e resolvido por Jacob Steiner⁴. Para resolver esse problema, também conhecido como problema da Pizza de Steiner vamos utilizar o item (iii) da Proposição 5.1.

Partindo do pressuposto que a expressão do termo geral do problema da Pizza de Steiner⁵, pode ser representado pela sequência por recorrência:

$$p_{n+1} = p_n + n + 1, \quad p_1 = 2.$$

Esta expressão pode ser reescrita do seguinte modo:

$$p_{n+1} - p_n = n + 1.$$

Tornando somatórios em ambos os lados, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (i + 1)$$

De acordo com o item (i) da propriedade 5.1, o segundo membro pode ser dividido em duas somatórias. Vejamos

⁴Jacob Steiner (1796 - 1983) - Geômetra alemão.

⁵Nas páginas 23 a 24 do No livro [19], o leitor poderá aprofundar os estudos sobre o exemplo da Pizza de Steiner

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) = \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1$$

O primeiro membro da igualdade acima é uma soma telescópica e vale $p_n - p_1$, e nas duas parcelas do segundo membro usaremos o exemplo 1.3.1 e o item (iv) da propriedade 5.1, respectivamente. Daí, teremos

$$p_n - p_1 = \frac{(n-1) \cdot (n)}{2} + (n-1)$$

Portanto, temos que

$$p_n = \frac{(n-1) \cdot (n)}{2} + n - 1 + 2 = \frac{(n) \cdot (n+1)}{2} + 1$$

■

Atividades Propostas

Exercício 5.1.

Determine o valor de:

a) $\sum_{i=1}^5 6;$

b) $\sum_{i=1}^{10} 3i;$

c) $\sum_{i=1}^{21} 5 + 2i;$

d) $\sum_{i=1}^7 9 - 3i;$

e) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i},$ para n natural $\geq 1;$

6 Divisibilidade e Congruência em Somatórios

Nesta Seção relacionaremos todos os conteúdos apresentados nesta dissertação, como por exemplo: progressão aritmética, divisibilidade, congruências e somatórios. Neste contexto iremos propor dois teoremas e dois corolários⁶, por fim, apresentaremos alguns exemplos e exercícios. Como fundamentação teórica, usaremos todas as referências apresentadas nesta pesquisa.

6.1 Teoremas e Corolários

As afirmações abaixo foram desenvolvidas a partir da observação da Soma de Gauss (Seção 2.3) e também a partir de progressões aritméticas com razão e primeiro termo iguais a 1.

Teorema 6.1.

Todo n ímpar ≥ 1 , divide a soma dos seus antecessores naturais.

Antes da demonstração deste teorema, faremos um exemplo numérico, com $n = 7$. Sendo assim, temos que

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

Daí, $7 \mid 21$, logo 7 é um caso particular válido.

Uma outra forma de analisar este exemplo, é somando o primeiro termo ao último, o segundo com o penúltimo e assim por diante, vejamos

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + \underbrace{3 + 4}_{7} + 5 + 6 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{7} \\ \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{7} \end{array}$$

Notamos que essa soma, também pode ser representado como $7 \cdot q$. Neste caso, em particular, $q = 3$.

Partindo para notação de somatórias, temos que

⁶Foram feitas algumas pesquisas sobre a originalidade desses teoremas e corolários, até a publicação desse trabalho não encontramos em livros e/ou artigos.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{i=1}^6 i = \sum_{i=1}^{7-1} i$$

Logo, $7 \mid \sum_{i=1}^{7-1} i$ e pela Proposição 4.1 concluímos que $\sum_{i=1}^{7-1} i \equiv 0 \pmod{7}$.

Não temos a intenção de considerar esse caso particular como demonstração, o mesmo possibilita exemplificar e instiga a curiosidade do estudante.

Com base no que foi apresentado nas Seções 2 e 3, segue a demonstração do Teorema 6.1.

Demonstração

Dado um número n , ímpar, temos que a soma dos seus antecessores naturais será dado por $1 + 2 + \dots + (n - 1)$. E pelo exemplo 1.3.1, temos

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)(n)}{2}.$$

Logo $n \mid \frac{(n - 1)(n)}{2}$, e como n é ímpar, $(n - 1)$ será divisível por 2.

■

Corolário 6.1.1.

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv 0 \pmod{n}, \text{ para } n \text{ ímpar } \geq 1.$$

Demonstração

Pelo Teorema 6.1, temos que $n \mid \frac{(n - 1)(n)}{2}$ e pela Proposição 4.1, afirmamos que $n \mid \frac{(n - 1)(n)}{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i \equiv 0 \pmod{n}$.

■

Antes de irmos para o próximo Teorema, fica a pergunta, podemos afirmar que no Teorema 6.1 e no Corolário 6.1.1 serão válidos com n par? A resposta será não. Vejamos:

Teorema 6.2.

Todo n par ≥ 2 , divide a diferença da soma dos seus antecessores naturais com sua própria metade.

De forma análoga ao que foi apresentado no Teorema 6.1, verificaremos com $n = 6$.

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) - \frac{6}{2} = 12$$

Como $6 \mid 12$, temos que 6 é um caso particular válido.

Analisando de outra forma, pelo mesmo raciocínio da soma de Gauss, ou seja, somando o primeiro termo ao último, o segundo com o penúltimo e assim por diante. Temos

$$\underbrace{1 + 2 + \textcircled{3} + 4 + 5}_{6}$$

Vemos que existe um termo central que não é divisível por 6, sendo justamente a metade de 6, daí podemos conjecturar que sempre teremos um termo central sendo a metade de n , neste caso $\frac{6}{2} = 3$.

Demonstração

Como n é par ≥ 2 , considere que $n = 2q$, com $q \in \mathbb{N}$.

Com base no que foi apresentado no exemplo 1.3.1, segue que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n - 1) - \frac{n}{2} &= 1 + 2 + \cdots + (2q - 1) - \frac{2q}{2} \\ &= \frac{(2q - 1) \cdot (2q)}{2} - \frac{2q}{2} \\ &= (2q - 1) \cdot q - q \\ &= q \cdot (2q - 2) \\ &= 2q \cdot (q - 1) \\ &= n \cdot (q - 1) \end{aligned}$$

Logo $n \mid 1 + 2 + \cdots + (n - 1) - \frac{n}{2} = n \cdot (q - 1)$, para todo n par ≥ 2 , com $q \in \mathbb{N}$.

■

Corolário 6.1.2.

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}, \text{ para } n \text{ par } \geq 2.$$

Demonstração

Pelo Teorema 6.2 e de forma análoga a demonstração do Corolário 6.1.1. Temos que,

$$\begin{aligned} n|1 + 2 + \dots + (n - 1) - \frac{n}{2} &= n \mid \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{n}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{n}{2} &\equiv 0 \pmod{n} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i &\equiv \frac{n}{2} \pmod{n}. \end{aligned}$$

Logo, $\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$, para todo n par ≥ 2 .

■

Exemplo 6.1.1.

O número triangular T_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots, n - 1, n$. O número quadrangular Q_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 3, 5, 7, \dots, (2n - 3), (2n - 1)$. A Figura 5 justifica essa denominação.

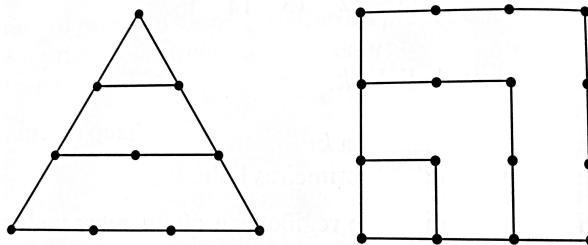


Figura 5: Números Triangulares e Quadrangulares

- a) Determine quando T_n será divisível por $(n + 1)$.
- b) Determine quando Q_n será divisível por n .

Solução

a) Os números triangulares representam a soma dos n primeiros termos naturais, e que podem ser representado pelo somatório $\sum_{i=1}^n i$.

Pelo Exemplo (1.3.1), temos que $\sum_{i=1}^n i = (n+1) \cdot \frac{n}{2}$

Logo, os números triangulares T_n serão divisíveis por $n+1$, apenas quando n for par. ■

Solução

b) Os números quadrangulares representam a soma dos n primeiros ímpares, podemos representar pelo somatório $\sum_{i=0}^{n-1} 2i+1$.

Daí, pelas Proposições 5.1 temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} 2i+1 &= \sum_{i=0}^{n-1} 2i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Logo, os números quadrangulares Q_n sempre será divisível por $n \in \mathbb{N}$. ■

Atividades Propostas

Exercício 6.1.

a) Demonstre que $\sum_{i=1}^n i \equiv 0 \pmod{n}$, para n ímpar ≥ 1 .

b) Demonstre que $\sum_{i=1}^n i \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}$, para n par ≥ 2 .

Exercício 6.2.

Tao (2013, p. 33 apud Hajós et al., 1963, p. 74). Demonstre que, para qualquer inteiro não-negativo n , o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5 se e só se n não for divisível por 4.

Exercício 6.3.

Tao (2013, p. 35 apud Shklarshy et al., 1962, p. 14). Sejam k e n números naturais, com k ímpar. Mostre que a soma $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ é divisível por $1 + 2 + \cdots + n$.

7 Considerações Finais

Após a realização desta pesquisa, nota-se a importância da continuidade dos estudos do profissional do magistério, visto o poder que existe ao se aprofundar nos conteúdos a serem lecionados, em especial o professor de matemática, disciplina a qual aterroriza a maioria dos estudantes.

Torna-se indispensável ressaltar, que esse aprofundamento impacta diretamente na qualidade da aula do professor da educação básica, devido ao aumento da capacidade de interrelacionar os diversos conteúdos matemáticos adquiridos em um mestrado profissional.

Acredita-se que o estabelecimento de relação, partindo dos conteúdos da Educação Básica até os do Ensino Superior, tornam a exploração dos conhecimentos matemáticos mais dinâmicos e atrativo, pois, abordados de forma isolada, podem representar para o estudante, algo sem utilidade à sua formação escolar.

Espera-se que os Teoremas 6.1 e 6.2 e Corolários 6.1.1 e 6.1.2 impulsionem outros estudantes a se aprofundarem em aplicações relativas a essas divisibilidades e congruências.

Referências

- [1] BARBOSA, JOSÉ HÉLIO JÚNIOR. *Congruências Modulares: Construindo um conceito e as suas aplicações no ensino médio*. Universidade Federal de Sergipe. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São Cristóvão, 2013.
- [2] BARROSO, PATRÍCIA MESQUITA. *Pesquisa interativa: nova proposta de estudo: matemática e informática*, São Paulo: DCL, 2004.
- [3] BOYER, CARL BENJAMIN; *História da Matemática*, 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974. Único.
- [4] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática*, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997.
- [5] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *PCN+ Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*, PCN + Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acessado em: maio de 2018.
- [6] DANTE, LUIZ ROBERTO. *Matemática : Contexto e aplicações / Vol.1*, São Paulo : Ática, 2010.
- [7] DANTE, LUIZ ROBERTO. *Projeto Teláris: matemática : ensino fundamental 2*, São Paulo : Ática, 2015.
- [8] DE SÁ, ILYDIO PEREIRA. *Aritmética Modular e algumas de suas aplicações*, Sítio Magia da Matemática. Disponível em: <http://www.magiadamatematica.com/diversos/eventos/20-congruencia.pdf>. Acessado em: dezembro de 2017.
- [9] FRANCO, TÂNIA REGINA RODRIGUES. *Divisibilidade e Congruências: Aplicações no Ensino Fundamental II*, Universidade Federal de Goiás. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Jataí, 2016.
- [10] GOES, ANTÔNIO MACIEL. *Aritmética: Divisibilidade, Congruência e Números Primos - Uma proposta para o Ensino Médio*. Universidade Federal do Tocantins. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Palmas, 2015.

- [11] HEFEZ, ABRAMO. *Aritmética*, Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [12] HEFEZ, ABRAMO. *Indução Matemática*. Portal da Matemática - OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf> . Acessado em: janeiro de 2018.
- [13] HEFEZ , ABRAMO. *Iniciação à Aritmética*. Portal da Matemática - OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf> Acessado em: janeiro de 2018.
- [14] IFRAH, GEORGES. *Os números: história de uma grande invenção*, Tradução de Stella Maria de Freitas Senra. - 11. ed. - São Paulo: O Globo, 2005.
- [15] JURKIEWICZ , SAMUEL. *Aritmética modular e os códigos de identificação do cotidiano*. Portal da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br>. Acessado em: abril de 2018.
- [16] LEAL, ADRIANO CARLOS. *Aprofundando o estudo de sequências e progressões no ensino médio*, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017.
- [17] LIMA, E. L. ET AL. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. SBM, 2007.
- [18] LIMA, ELON LAGES. *Números e Funções Reais*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [19] MORGADO, A.C; CARVALHO, A.C.P. *Matemática Discreta*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [20] OLIVERIA, K.I.M; FERNÁNDEZ, A.J.C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [21] SIMÕES, MÁRCIO. *A matemática, um tijolo por vez*, Revista Cálculo: Matemática para Todos, edição 19, agosto de 2012, p. 6.
- [22] SHINE, CARLOS YUZO. *21 Aulas de Matemática Olímpica*, Rio de Janeiro: SBM, 2009.
- [23] TAO, TERENCE. *Como resolver problemas matemáticos - uma perspectiva pessoal*, Tradução de Paulo Ventura - Rio de Janeiro: SBM, 2013.