Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov

Carlos Eduardo Vitória da Silva

Goiânia

2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Carlos Eduardo Vitória da Silva
E-mail:	professorkadu@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[x]Sim [ ] Não
Vínculo empregatício do autor	Bolsista
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Sigla: CAPES
País:	Brasil — UF: GO — CNPJ: 0889834/0001-08
Título:	Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov
Palavras-chave:	Álgebra Linear, aplicações, Cadeias de Markov
Título em outra língua:	Applications of linear algebra in Markov chains
Palavras-chave em outra língua:	Linear algebra, applications, Markov chains
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	(11/04/2013)
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Orientador (a):	Dr. Jesus Carlos da Mota
E-mail:	jesusdamota@gmail.com
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Carlos Eduardo V. da Silva

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 30 / 04 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Carlos Eduardo Vitória da Silva

Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

S586a
Silva, Carlos Eduardo Vitória da.
Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov [manuscrito] / Carlos Eduardo Vitória da Silva. - 2013.
39 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.

1. Álgebra linear. 2. Markov, Processos de. I. Título.

CDU: 512.5:519.217.1

Carlos Eduardo Vitória da Silva

Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 11 de abril de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB/

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Carlos Eduardo Vitória da Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Salgado de Oliveira. É professor há onze anos, sendo que neste período atuou como professor do ensino fundamental e médio, é concursado desde 2006 da Secretaria de Educação do Estado de Goiás.

Dedico este trabalho à minha esposa Michelly Menezes Pereira Vitória e meus filhos Laura, Isaque e Estevão.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar a oportunidade, força e persistência para cursar este Mestrado.

Agradeço a minha esposa Michelly por me apoiar, por aguentar estes 2 anos, abdicando de muitos sonhos e projetos para que este fosse um sonho que ela sonhasse comigo. Obrigado amor, te amo.

Aos meus familiares pelo apoio.

Ao meu orientador, por aguentar todos os erros com muita paciência e me orientar nesta escrita e trabalho.

Aos amigos que fiz neste curso.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

A teoria da álgebra linear e particularmente matrizes e sistemas lineares são tópicos de matemática que podem ser aplicados não só dentro da própria matemática, mas também em várias outras áreas do conhecimento humano, como física, química, biologia, todas as engenharias, psicologia, economia, transporte, administração, estatística e probabilidade, etc.

As Cadeias de Markov são usadas para resolver certos problemas dentro da teoria das probabilidades. As aplicações das Cadeias de Markov nesses problemas, dependem diretamente da teoria das matrizes e sistemas lineares.

Neste trabalho usamos as técnicas das Cadeias de Markov para resolver três problemas de probabilidades, em três áreas distintas. Um na área da genética, outro na área da psicologia e o outro na área de transporte de massa em um sistema de trânsito. Todo o trabalho é desenvolvido com a intenção de que um estudante do ensino médio possa ler e entender as soluções dos três problemas apresentados.

Palavras-chave

Álgebra Linear, Aplicações, Cadeias de Markov.

Abstract

The theory of linear algebra and matrices and systems particularly are linear math topics that can be applied not only within mathematics itself, but also in various other areas of human knowledge, such as physics, chemistry, biology, all engineering, psychology, economy, transportation, administration, statistics and probability, etc...

The Markov chains are used to solve certain problems in the theory of probability. Applications of Markov chains in these problems, depend directly on the theory of matrices and linear systems.

In this work we use the techniques of Markov Chains to solve three problems of probability, in three distinct areas. One in genetics, other in psychology and the other in the area of mass transit in a transit system. All work is developed with the intention that a high school student can read and understand the solutions of three problems presented.

Keywords

Linear algebra, applications, Markov Chains.

Sumário

1 Introdução

Uma das dificuldades no ensino aprendizagem da matemática no ensino básico é a pouca motivação para estudar conceitos, definições e resultados de teoria matemática. Portanto, é necessário que o professor, além de conhecer a teoria, conheça também alguns exemplos de problemas práticos que possam motivar o aluno a sentir a importância da teoria que está sendo estudada.

A teoria das matrizes e dos sistemas lineares são tópicos de álgebra linear estudados no ensino médio. O objetivo deste trabalho é mostrar a importância destes tópicos em alguns exemplos de aplicações práticas, usando as chamadas Cadeias de Markov, ver [1, 3, 4]. Os tópicos são desenvolvidos com a intenção de que um estudante do ensino médio possa ler e entender todo o trabalho.

Não vamos fazer aqui um estudo completo da teoria de matrizes e de sistemas lineares e nem das Cadeias de Markov, vamos apenas descrever os tópicos necessários para o entendimento dos exemplos.

Além desta introdução e das considerações finais este trabalho é divido em mais três seções. Na Seção 2 apresentamos de modo elementar alguns tópicos de matrizes e de sistemas lineares. Estes tópicos poderiam ser considerados conhecidos, mas destacamo-os para efeito de complementação do trabalho. O estudo das Cadeias de Markov depende ainda do conceito de probabilidade, que é apresentado também nesta Seção 2.

No início da Seção 3 apresentamos um breve histórico sobre o matemático Andrei A. Markov, e em seguida, apresentamos alguns dos principais resultados de sua teoria, as Cadeias de Markov. De um modo simples, pode-se dizer que as Cadeias de Markov podem ser usadas para prever a probabilidade de um certo fenômeno ocorrer num tempo futuro, conhecendo-se o estado inicial do fenômeno. Neste sentido, as Cadeias de Markov podem ser usadas para resolver problemas envolvendo probabilidades nas mais variadas áreas do conhecimento. Na Seção 4 apresentamos três exemplos, um na área de genética, outro na área de psicologia e o outro na área de transportes.

Finalmente, na Seção 5 são apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 Tópicos de Álgebra Linear e Probabilidade

Nesta seção são abordados alguns tópicos da álgebra linear, especialmente tópicos elementares de matrizes e sistemas lineares, e o conceito de probabilidade. Estes tópicos são necessários para o entendimento das Cadeias de Markov. Aqui, seguimos como referências os livros [1, 2, 3, 5].

2.1 Matrizes e Sistemas Lineares

Definição 1. *Uma matriz real A de ordem $m \times n$ é uma tabela de mn números reais organizados em m linhas e n colunas na forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Quando $n = m$ a matriz A é dita quadrada de ordem n. Os elementos a_{ij}, onde $i = j$ formam a diagonal principal e os elementos onde $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária.

Numa forma compacta a matriz A pode ser representada por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, ou ainda se a ordem estiver subentendida $A = [a_{ij}]$. Os a_{ij}, i = 1, 2, ...,m e j = 1, 2, ..., n são as entradas ou componentes de A.

Temos alguns tipos de *matrizes especiais*, seja pelo número de linhas ou colunas, ou ainda pela natureza de suas entradas.

Matriz Linha: é uma matriz com apenas uma linha.

Matriz Coluna: é uma matriz com apenas uma coluna.

Matriz Nula: é uma matriz que possui as entradas nulas.

Matriz Diagonal: é uma matriz quadrada onde os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos.

Matriz identidade de ordem n (I_n): é toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Operações entre Matrizes

Definição 2. *Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.*

Definição 3. *Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, define-se $A+B$ como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.*

Definição 4. *Define-se a multiplicação de um escalar (número real) α por uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ como sendo uma matriz $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.*

Definição 5. *Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, define-se a diferença $A - B$ como a matriz $A + (-1)B$.*

Propriedades da Multiplicação por Escalar

Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem e α e β reais a multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades.

$M_1:\ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$

$M_2:\ \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$

$M_3:\ (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$

$M_4:\ 1A = A.$

Definição 6. *Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, define-se produto AB como a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Note que o produto AB, por definição, somente está definido quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Propriedades do Produto O produto de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:

P_1 : Associatividade: $(AB)C = A(BC)$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e $C = [c_{ks}]_{p\times r}$.

P_2 : Distributividade à direita em relação a adição: $(A + B)C = AC + BC$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ e $C = [c_{jk}]_{n\times p}$.

P_3 : Distributividade à esquerda: $A(B + C) = AB + AC$ para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e $C = [c_{jk}]_{n\times p}$.

P_4 : $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ Para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e para todo escalar α.

P_5 : Produtos com matrizes identidades: $AI_n = A$ e $I_m A = A$, para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$ e I_m é a matriz identidade de ordem $m \times m$.

Observação: O produto de matrizes não é comutativo, em geral $AB \neq BA$, mesmo para matrizes quadradas de mesma ordem.

Definição 7. *Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, define-se a matriz transposta de A, denotada por A^t, como a matriz $A^t = [a'_{ij}]_{n\times m}$, onde $a'_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.*

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações da forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (1) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \qquad (2)
\end{aligned}
$$

com a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, números reais.

Definição 8. *Uma solução do sistema* (2) *é uma* $n-$*upla de números* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *satisfazendo simultaneamente as* m *equações.*

Podemos escrever o sistema (2) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ou $Ax = b$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

é a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

a matriz das incógnitas e

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema (2) é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

que chamamos de matriz ampliada do sistema.

Definição 9. *Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.*

Neste trabalho usaremos como parte da resolução dos problemas que envolvem as Cadeias de Markov a resolução de um sistema linear homogêneo.

Quando

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

o sistema 2 é dito homogêneo. Um sistema homogêneo admite solução. Quando a solução é única o sistema é possível e determinado e sua solução é trivial, ou seja, $x = \{0, 0, \ldots, 0\}$ é a solução do sistema.

Quando o sistema possui mais de uma solução o sistema é possível e indeterminado. E o representaremos por uma expressão geral, em função de um α, com $\alpha \in \Re$.

Exemplo 1. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

.

Logo, da primeira equação $2x_1 - 4x_2 = 0$ *obtém-se*

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1,$$

e fazendo $x_1 = \alpha$, *tem-se que*

$$x_2 = \frac{1}{2}\alpha,$$

e a solução do sistema é, $x = \{\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \quad \alpha \in R\}$.

2.2 O Conceito de Probabilidade

Modelos matemáticos podem ser determinísticos quando as condições sob as quais o experimento é realizado determinam o resultado do experimento, e não determinísticos quando não é possível prever de antemão seus resultados. Neste último caso diz-se que o experimento é aleatório. Um dos objetivos do estudo de probabilidade é estudar os experimentos aleatórios.

O cálculo da probabilidade envolve além do conceito de experimento aleatório, os conceitos de espaço amostral e evento. Para as definições a seguir usamos como referência [2].

Definição 10. *Espaço amostral é definido como sendo o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Um subconjunto de um espaço amostral é denominado evento.*

Definição 11. *Seja* U *um espaço amostral e* $A \subset U$, *um evento. A probabilidade de ocorrer o evento* A *é definida por*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)},$$

onde $n(U)$ *é o número de elementos do espaço amostral* U, *e* $n(A)$ *é o número de elementos do evento* A.

3 Cadeias de Markov

3.1 Breve histórico sobre Andrei A. Markov

Figura 1: Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922)

Andrei Andreyevich Markov nasceu em 14 de junho de 1856 em Ryazan, Russia. Graduou-se na Universidade de São Petersburgo (1878) e começou a atuar como professor na mesma Universidade em 1886. A partir de 1900 estudou processos estocásticos.

Os primeiros trabalhos de Markov foram em teoria dos números e análise, principalmente em frações contínuas, limites de integrais, teoria da aproximação e convergência de séries. O método das frações contínuas foi inicialmente desenvolvido por seu professor Pafnuty Chebyshev (1821-1894), mas Markov descobriu que poderia aplicar o conhecimento destas frações à teoria de probabilidade.

As Cadeias de Markov apareceram em um trabalho onde em um certo texto ele estudava a probabilidade de uma consoante ocorrer em uma determinada posição de uma palavra qualquer. Como hipótese, ele supôs que a probabilidade deveria depender apenas se a letra precedente à consoante seria uma vogal ou outra consoante. Deste estudo nasceram as **Cadeias de Markov**.

No desenvolvimento da teoria de processos estocásticos onde uma Cadeia de Markov é um tipo especial desses processos, foi o que tornou Markov um famoso cientista. Sua teoria é aplicada em diversas áreas como física atômica, teoria quântica, biologia, genética, comportamento social, economia e finança.

Em 1923 Norbert Winter se tornou o primeiro autor a tratar rigorosamente um processo contínuo de Markov. A teoria geral dos processos de Markov foi estabelecida em 1930 por Andrei Kolmogorov. Em 20 julho de 1922 Andrei A. Markov faleceu na então cidade de Petrogrado, hoje São Petersburgo, na Rússia.

3.2 Processos Aleatórios: Cadeias de Markov

Nesta seção seguimos como referência [1, 3, 4].

Muitos fenômenos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados, pelo menos em uma primeira aproximação, como se os fenômenos passassem a partir de um estado inicial, por uma sequência de estados, onde a transição de um estado para o seguinte, ocorre segundo uma certa probabilidade. No caso em que esta probabilidade de transição depende apenas do estado em que o fenômeno se encontra e do estado a seguir, o processo é denominado de Processo de Markov e uma sequência de estados envolvida nesse processo é denominada de Cadeia de Markov.

O exemplo a seguir é resolvido na Seção 4.2 usando as Cadeias de Markov.

Exemplo 2. *Em uma experiência um psicólogo coloca um rato cada dia em uma gaiola com duas portas, A e B. O rato pode passar pela porta A, onde recebe um choque elétrico, ou pela porta B, onde recebe comida. Mantém-se o registro da porta usada pelo rato. No início do experimento, em uma segunda-feira, o rato tem a mesma probabilidade de escolher a porta A ou a B. Depois de passar pela porta A e receber um choque, a probabilidade de usar a mesma porta no próximo dia é 0,3. Depois de passar pela porta B e receber comida, a probabilidade de usar a mesma porta no próximo dia* *é 0,6. Qual a probabilidade do rato passar pela porta A, na quinta-feira, isto é, no terceiro dia após o experimento?*

Observamos que esse exemplo envolve uma Cadeia de Markov com dois estados, o estado antes da passagem do rato por uma das portas e o estado depois da passagem.

As Cadeias de Markov envolvem uma matriz, denominada matriz de transição, cujos elementos são as probabilidades de transição de um estado para outro. Para resolver um problema usando as Cadeias de Markov o diagrama de transição descrito a seguir, tem o objetivo de facilitar na obtenção da matriz de transição.

3.2.1 Diagrama de Transição

O diagrama de transição é uma representação gráfica de uma Cadeia de Markov. Neste diagrama são visualizados os estados, representado por círculos, e as probabilidades de transição entre os estados. A Figura 2 mostra um diagrama de transição com 3 estados. Generalizando, vamos representar os estados e as probabilidades de transição, respectivamente, por E_i e p_{ij}, onde p_{ij} representa a probabilidade de haver uma transição do estado E_j para o estado E_i .

Para um processo com k estados a matriz das probabilidades de transição, ou simplesmente, matriz de transição, é dada por,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}.$$

Cada elemento p_{ij} é um número real, $p_{ij} \in [0, 1]$, i, $j = 1, \ldots, k$, que significa a probabilidade do sistema mudar do j-ésimo estado para o i-ésimo estado. Na literatura a matriz P também é denominada de matriz estocástica ou matriz de Markov.

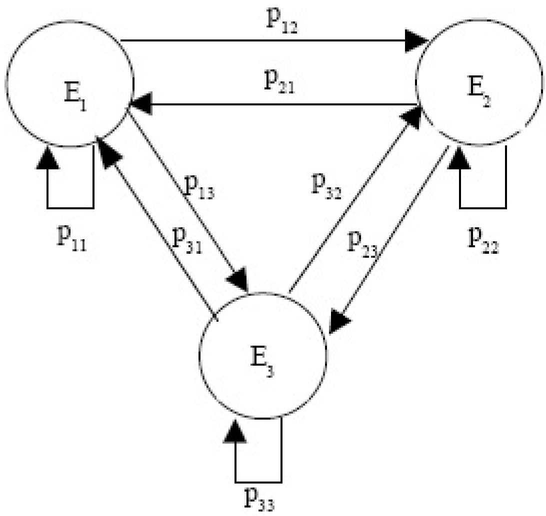

Figura 2: Diagrama de Transição com 3 estados

Exemplo 3. *Determinar a matriz de transição da Cadeia de Markov do seguinte problema: Conferindo os registros de doações recebidas, uma certa entidade filantrópica observa que 80% dos seus associados que contribuem ao fundo da entidade em um certo ano, também contribuem no ano seguinte e que 30% dos que não contribuem em um certo ano, contribuem no ano seguinte. Isto pode ser visto como uma Cadeia de Markov de dois estados. O primeiro estado corresponde a um associado que contribui em um ano qualquer e o segundo estado corresponde a um associado que não contribui naquele ano.*

A matriz de transição é dada por,

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Observe que $p_{ij} \geq 0$, e que a soma de cada coluna da matriz P deve ser igual a 1.

No caso geral, se $P = [p_{ij}]$ é a matriz de transição de uma Cadeia de Markov com k estados, deve-se ter que

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{kj} = 1, \;\; j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

Em geral, numa observação arbitrária, não se pode determinar com certeza o estado de um sistema em uma Cadeia de Markov. O melhor que se pode fazer é especificar as probabilidades para cada um dos estados possíveis. Por exemplo, podemos descrever o estado possível do sistema, em uma certa observação em uma Cadeia de Markov com k estados, por um vetor coluna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix},$$

onde x_1 é a probabilidade do sistema estar no primeiro estado, x_2 é a probabilidade de estar no segundo estado e x_k é a probabilidade do sistema estar no k-ésimo estado. Tem-se a seguinte definição:

Definição 12. *O vetor estado de uma observação de uma Cadeia de Markov com k estados é um vetor coluna x cuja i-ésima componente x_i é a probabilidade do sistema estar no i-ésimo estado naquela observação.*

Observe que as entradas em qualquer vetor estado de uma Cadeia de Markov são não-negativas e têm soma igual a um. Conforme (3), um vetor com estas propriedades é denominado de *vetor de probabilidade*.

A seguir, denotamos por $x^{(i)}$ o vetor estado na i-ésima observação de uma Cadeia de Markov. Suponhamos agora, que seja conhecido o vetor estado $x^{(0)}$ de uma Cadeia de Markov numa observação inicial. O seguinte teorema permite determinar os estados das observações subsequentes na Cadeia de Markov.

Teorema 1. *Se P é a matriz de transição de uma Cadeia de Markov e $x^{(n)}$ é o vetor estado na n-ésima observação, então*

$$x^{(n+1)} = Px^{(n)}.$$

A prova deste teorema envolve idéias da teoria de probabilidades e não será dada aqui. Ver a demonstração em [1].

Segue do Teorema 1 que,

$$x^{(1)} = Px^{(0)}$$

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = P^2x^{(0)}$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = P^3x^{(0)}$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = Px^{(k-1)} = P^kx^{(0)}.$$

Desta maneira, o vetor estado inicial $x^{(0)}$ e a matriz de transição P determinam $x^{(k)}$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Voltemos agora ao Exemplo 3 cuja matriz de transição reescrevemos aqui,

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Vamos usar o Teorema 1 para determinar um registro futuro provável de contribuição de um novo associado que não contribuiu para este ano de 2013, o qual vamos considerar como o ano inicial das contribuições. Para esse associado o sistema está inicialmente no segundo estado, de modo que o vetor estado inicial é

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 1 temos que,

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix},$$

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{bmatrix},$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,525 \\ 0,475 \end{bmatrix}.$$

Assim, daqui a três anos, em 2016, podemos esperar com probabilidade 0,525 que o associado irá contribuir. A partir de 2017, teremos os seguintes vetores estado (com três casas decimais):

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0,563 \\ 0,438 \end{bmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 0,581 \\ 0,419 \end{bmatrix},$$
$$x^{(6)} = \begin{bmatrix} 0,591 \\ 0,409 \end{bmatrix}, \quad x^{(7)} = \begin{bmatrix} 0,595 \\ 0,405 \end{bmatrix},$$
$$x^{(8)} = \begin{bmatrix} 0,598 \\ 0,402 \end{bmatrix}, \quad x^{(9)} = \begin{bmatrix} 0,599 \\ 0,401 \end{bmatrix},$$
$$x^{(10)} = \begin{bmatrix} 0,599 \\ 0,401 \end{bmatrix}, \quad x^{(11)} = \begin{bmatrix} 0,600 \\ 0,400 \end{bmatrix},$$

Usando três casas decimais, a partir de $x^{(11)}$, para qualquer n, observamos que,

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} 0,600 \\ 0,400 \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, os vetores estado convergem para um vetor fixo à medida que cresce o número de observações.

Exemplo 4. *Considere a figura abaixo.*

Uma guarda de trânsito é designada para controlar o tráfego nos oito cruzamentos indicados na Figura 4. Ela é instruída a permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, permanecer no mesmo cruzamento ou no cruzamento adjacente. Para evitar que ela estabeleça um padrão, ela deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ela está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2, 4, 5 ou 8, cada um com

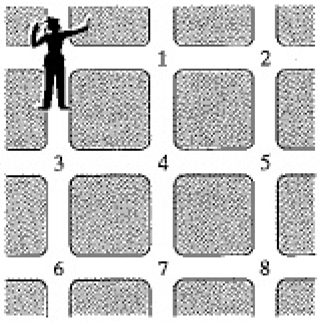

Figura 3: Cruzamento de Trânsito

probabilidade $\frac{1}{4}$. *Cada dia ela começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição desta Cadeia de Markov é*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Se a guarda inicialmente começa no cruzamento 5, suas prováveis localizações, hora a hora, são dadas pelos vetores estado da seguinte tabela:

$x^{(n)}$ *e* n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*	*15*	*20*	*22*
$x_1^{(n)}$	*0*	*0,000*	*0,133*	*0,116*	*0,130*	*0,123*	*0,113*	*0,109*	*0,108*	*0,107*
$x_2^{(n)}$	*0*	*0,250*	*0,146*	*0,163*	*0,140*	*0,138*	*0,115*	*0,109*	*0,108*	*0,107*
$x_3^{(n)}$	*0*	*0,000*	*0,050*	*0,039*	*0,067*	*0,073*	*0,100*	*0,106*	*0,107*	*0,107*
$x_4^{(n)}$	*0*	*0,250*	*0,113*	*0,187*	*0,162*	*0,178*	*0,178*	*0,179*	*0,179*	*0,179*
$x_5^{(n)}$	*1*	*0,250*	*0,279*	*0,190*	*0,190*	*0,168*	*0,149*	*0,144*	*0,143*	*0,143*
$x_6^{(n)}$	*0*	*0,000*	*0,000*	*0,050*	*0,056*	*0,074*	*0,099*	*0,105*	*0,107*	*0,107*
$x_7^{(n)}$	*0*	*0,000*	*0,133*	*0,104*	*0,131*	*0,125*	*0,138*	*0,142*	*0,143*	*0,143*
$x_8^{(n)}$	*0*	*0,250*	*0,146*	*0,152*	*0,124*	*0,121*	*0,108*	*0,107*	*0,107*	*0,107*

Para todos valores de n maiores do que 22, todos os vetores estado são iguais a $x^{(22)}$ até três casas decimais. Assim, como nos exemplos anteriores, os vetores estado convergem a um vetor fixo à medida que n cresce.

Comportamento limite de vetores estado

Observamos nos exemplos 2 e 3 que os vetores estados convergem para um vetor fixo à medida que o número de observações cresce. Agora, será que este comportamento sempre será observado em uma Cadeia de Markov?

Um exemplo simples, como o abaixo, mostra um caso onde este fato não acontece.

Exemplo 5. *Exemplo onde o vetor estado oscila entre dois estados:*

Sejam $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Então, como $P^2 = I$ e $P^3 = P$, temos

$$x^{(0)} = x^{(2)} = x^{(4)} = ... = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e

$$x^{(1)} = x^{(3)} = x^{(5)} = ... = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este sistema oscila indefinidamente entre os dois vetores estado $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, e portanto não converge a nenhum vetor fixo.

No entanto, impondo uma restrição fraca a matriz de transição, podemos mostrar que o sistema se aproxima de um vetor estado fixo. Condição descrita abaixo.

Definição 13. *Uma matriz de transição é regular se existe uma potência positiva da matriz tem todas as entradas positivas.*

Uma Cadeia de Markov que é governada por uma matriz de transição regular é chamada *Cadeia de Markov regular.* Veremos que qualquer cadeia de Markov regular possui um vetor estado fixo q tal que, para qualquer escolha $x^{(0)}$, o vetor $P^{(n)}x^{(0)}$ converge a q quando n aumenta. Este resultado é da maior importância na teoria de Cadeias de Markov e é baseado no seguinte teorema.

Teorema 2. *Comportamento de $P^{(n)}$ quando $n \to \infty$.*

Se P é uma matriz de transição regular, então

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ q_3 & q_3 & \cdots & q_3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix},$$

quando $n \to \infty$, onde os q_i são números positivos tais que $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_k = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Fazendo,

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix},$$

e

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix},$$

assim, Q é uma matriz de transição com todas as colunas iguais ao vetor de probabilidade q. Esta matriz Q tem a seguinte propriedade: se x é qualquer vetor de probabilidade, então

$$Qx = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1x_1 & q_1x_2 & \cdots & q_1x_k \\ q_2x_1 & q_2x_2 & \cdots & q_2x_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_kx_1 & q_kx_2 & \cdots & q_kx_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1(x_1 + x_2 + ... + x_k) \\ q_2(x_1 + x_2 + ... + x_k) \\ \vdots \\ q_k(x_1 + x_2 + ... + x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + ... + x_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}.$$

Conforme fora visto em (3), temos que $x_1 + x_2 + ... + x_k = 1$, então:

$$Qx = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + ... + x_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = q.$$

Isto mostra que Q transforma qualquer vetor de probabilidade x num vetor de probabilidade q fixo. Este resultado leva ao teorema seguinte.

Teorema 3. *Comportamento de $P^n x$ quando $n \to \infty$.*

Se P é uma matriz de transição regular e x é um vetor de probabilidade qualquer, então

$$P^n x \to \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = q.$$

quando $n \to \infty$, onde q é um vetor de probabilidade fixo, independente de n, cujas entradas são todas positivas.

Este resultado vale pois o teorema 2 implica que $P^n \to Q$ quando $n \to \infty$, de modo que $P^n x \to Qx = q$ quando $n \to \infty$. Assim, para uma Cadeia de Markov regular, o sistema sempre acaba convergendo para um vetor estado q fixo. O vetor q é chamado *vetor de estado estacionário* da Cadeia de Markov regular.

Geralmente, a técnica mais eficiente de calcular o vetor de estado estacionário q de sistema com muitos estados, é simplesmente calcular $P^n x$ para algum n grande. Os exemplos 2, 3 e 4 ilustram este procedimento. Cada um é um processo de Markov regular, de modo que é garantida a convergência a um vetor de estado estacionário. Uma outra maneira de calcular o vetor de estado estacionário é utilizar o seguinte teorema:

Vetor de Estado Estacionário

Teorema 4. *O vetor de estado estacionário q de uma matriz de transição regular P é o único vetor de probabilidade que satifaz a equação $Pq = q$.*

Para ver isto, considere a igualdade matricial $PP^n = P^{n+1}$. Pelo teorema 2, ambas P^n e P^{n+1} convergem a Q quando $n \to \infty$. Assim temos $PQ = q$. Para mostrar que q

é o único vetor de probabilidade que satisfaz esta equação, suponha que r é um outro vetor de probabilidade tal que $Pr = r$. Então também $P^n r = r$ para $n = 1, 2, \ldots$. Pelo teorema 3, quando $n \to \infty$, resulta em $q = r$.

Do Teorema 4, podemos escrever o seguinte sistema linear homogêneo,

$$(I - P)q = 0,$$

o qual tem um único vetor solução q, com entradas não negativas que satisfazem a condição $q_1 + q_2 + ... + q_k = 1$. Podemos aplicar esta técnica para calcular o vetor de estado estacionário do exemplo 2, conforme descrito a seguir.

Exemplo 6. *No exemplo 2, a matriz de transição é dada por,*

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema linear $(I - P)q = 0$ *é*

$$\begin{bmatrix} 0,2 & -0,3 \\ -0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Isto leva à única equação independente

$$0,2q_1 - 0,3q_2 = 0,$$

ou

$$q_1 = 1,5q_2.$$

Assim, fazendo $q_2 = s$*, qualquer solução de* (4) *é da forma*

$$q = s \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

onde s *é uma constante arbitrária. Para fazer do vetor* q *um vetor de probabilidade, usamos a Equação* (3)*, que implica* $s = \frac{1}{1,5+1} = 0,4$*. Consequentemente,*

$$q = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

é o vetor de estado estacionário desta Cadeia de Markov regular. Isto significa que, a longo tempo, 60% *dos ex-alunos irão fazer uma doação em algum ano e* 40% *não farão doações. Observe que este resultado confere com o resultado obtido numericamente no exemplo 3.*

Após estudarmos as definições sobre as Cadeias de Markov, podemos enunciar aqui alguns exemplos que confirmem a utilização e importância do estudo da Álgebra Linear aplicada.

4 Aplicações da Cadeia de Markov

4.1 Aplicações da Cadeia de Markov na Genética

Uma planta pode ter flores vermelhas (V), cor de rosa (R) ou brancas (B), dependendo dos genótipos VV, VB e BB. Ao cruzar cada um desses genótipos com um genótipo VB, obtemos a seguinte tabela:

Flores da Planta Original				
		V	R	B
Flores da Planta Descendente	V	0,5	0,25	0,0
	R	0,5	0,5	0,5
	B	0,0	0,25	0,5

A partir da tabela acima, definimos a matriz de transição de cruzamento dos Genótipos (G) por,

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,0 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Suponha que cada geração sucessiva é produzida cruzando-se apenas com plantas do genótipo VB. Quando o processo atingir o equilíbrio, que porcentagem das plantas terá flores vermelhas, cor-de-rosa ou brancas?

Temos que calcular o vetor estacionário para o qual o processo atinja o equilíbrio. Para isso consideremos o sistema linear homogêneo,

$$(I-P)q=0,$$

onde

$$I-P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0,5&0,25&0,0\\0,5&0,5&0,5\\0,0&0,25&0,5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5&-0,25&0,0\\-0,5&0,5&-0,5\\0,0&-0,25&0,5\end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix}0,5&-0,25&0,0\\-0,5&0,5&-0,5\\0,0&-0,25&0,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Ou em sistema de equações,

$$\begin{cases}0,5q_1-0,25q_2=0\\-0,5q_1+0,5q_2-0,5q_3=0\\-0,25q_2+0,5q_3=0\end{cases}.$$

Escalonando a matriz ampliada deste sistema linear, temos,

$$\begin{bmatrix}0,5&-0,25&0,0&0\\-0,5&0,5&-0,5&0\\0,0&-0,25&0,5&0\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0,5&-0,25&0,0&0\\0,0&0,25&-0,5&0\\0,0&-0,25&0,5&0\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}0,5&-0,25&0,0&0\\0,0&0,25&-0,5&0\\0,0&0,0&0,0&0\end{bmatrix}.$$

Portanto, o sistema linear acima é equivalente ao seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{cases}0,5q_1-0,25q_2=0\\0,25q_2-0,5q_3=0\end{cases}.$$

Da segunda equação tem-se

$$q_2 = 2q_1.$$

Assim,

$$q_3 = \frac{1}{2}q_2.$$

Logo,

$$q_3 = q_1.$$

Tomando $q_1 = s$

$$q = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ e $q_1 = s, \; q_2 = 2s, \; \; e \; q_3 = s$, então $s = \frac{1}{1+2+1}$, logo,

$$s = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Logo o vetor estacionário q é igual a

$$q = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,50 \\ 0,25 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que ao longo do tempo, 25% das plantas serão vermelhas, 50% serão rosas e 25% serão brancas.

4.2 Aplicações da Cadeia de Markov na Psicologia

Em uma experiência um psicólogo coloca um rato cada dia em uma gaiola com duas portas, A e B. O rato pode passar pela porta A, onde recebe um choque elétrico, ou pela porta B, onde recebe comida. Mantém-se o registro da porta usada pelo rato.

No início do experimento, em uma segunda-feira, o rato tem a mesma probabilidade de escolher a porta A ou a B. Depois de passar pela porta A e receber um choque, a probabilidade de usar a mesma porta no próximo dia é 0,3. Depois de passar pela porta B e receber comida, a probabilidade de usar a mesma porta no próximo dia é 0,6.

a - Qual a matriz de transição desta experiência?

Denotando por T a matriz de transição, tem-se

$$T = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

b - Qual a probabilidade do rato passar pela porta A, na quinta-feira (terceiro dia após o experimento)?

Vamos aplicar o Teorema 1 iniciando com $n = 0$:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,365 \\ 0,635 \end{bmatrix}.$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,365 \\ 0,635 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,364 \\ 0,636 \end{bmatrix}.$$

Na quinta-feira, terceiro dia após o início do experimento, $0,364$ ou $36,4\%$ de chance do rato passar pela porta A.

c - Qual o vetor estacionário q, desta experiência?

Para calcular o vetor estacionário, usamos novamente o sistema linear de equações,

$$(I - P)q = 0.$$

Temos que,

$$I - P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,7 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,7 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema linear a ser resolvido é,

$$\begin{cases} 0,7q_1 - 0,4q_2 = 0 \\ -0,7q_1 + 0,4q_2 = 0 \end{cases}.$$

Observe que as duas equações do sistema são equivalentes, logo

$$0,7q_1 - 0,4q_2 = 0,$$

$$q_2 = \frac{7}{4}q_1.$$

Fazendo $q_1 = s$, temos que

$$q = s \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular o valor de s usando a Equação (3).

$$s = \frac{1}{1 + \frac{7}{4}} = \frac{1}{\frac{11}{4}} = \frac{4}{11} \approx 0,3636.$$

Logo o vetor estacionário q é igual a

$$q = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,3636 \\ 0,6364 \end{bmatrix}.$$

Concluímos então que, após n dias de experiência com n grande, a probabilidade do rato passar pela porta A é de $36,36\%$ e a de passar pela porta B é de $63,64\%$.

4.3 Aplicações da Cadeia de Marcov no Transporte de Massas

Neste exemplo estuda-se a viabilidade para implantação de um novo sistema de transporte de massas (poderia ser um sistema de Metrô) numa certa cidade. As autoridades fizeram estudos que previram o percentual de pessoas que migrarão para esse novo sistema de transporte de massas (M), e o percentual de pessoas que continuarão a dirigir seus automóveis (A). Foi obtida a seguinte tabela

	Esse Ano		
		M	A
Próximo Ano	M	0,7	0,2
	A	0,3	0,8

Escrita como matriz de transição de transporte de massas (T), temos,

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Suponha que a população da cidade permaneça constante e que, inicialmente, 30% das pessoas irão usar o transporte de massa e 70% irão usar seus carros.

a - Cálculo da porcentagem das pessoas que estarão usando o transporte de massa depois de um ano da implantação do sistema, e depois de dois anos.

Agora, vamos supor um registro futuro provável de pessoas que usarão o transporte de massas, de modo que o vetor estado inicial seja dado por,

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Pelo teorema 1, temos,

$$x^{(1)} = Px^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,70 \end{pmatrix}.$$

Logo, após o primeiro ano de uso do transporte de massas, o vetor estado $x^{(2)}$ dado por

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,55 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, após o primeiro ano, 35%, das pessoas estarão usando o transporte de massas, e 55% seus carros.

Depois de dois anos, denotando o vetor estado por $x^{(3)}$, o percentual de pessoas que estarão usando o transporte de massas, é dado por,

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,715 \end{pmatrix}.$$

Portanto, após o segundo ano, $37,5\%$ das pessoas estarão usando o transporte de massas, e $71,5\%$ estão usando os carros.

b - Calcular a porcentagem das pessoas que estarão usando o transporte de massas em um futuro mais longínquo, ou seja, deve-se calcular o vetor estacionário q.

Para calcular o vetor estacionário, temos o seguinte sistema de equações lineares,

$$(I - P)q = 0.$$

Substituindo as matrizes nesta equação, temos:

$$I - P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,3 & 0,2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema a ser resolvido é,

$$\begin{cases} 0,3q_1 - 0,2q_2 = 0 \\ -0,3q_1 + 0,2q_2 = 0 \end{cases}.$$

Observe que as duas equações são equivalentes, logo

$$0,3q_1 - 0,2q_2 = 0,$$

$$q_2 = \frac{3}{2}q_1.$$

Tomando $q_1 = s$, temos

$$q = s \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Usando a Equação (3) para calcular o valor de s, temos que

$$s = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Logo o vetor estacionário q é igual a

$$q = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

Concluímos então que num futuro mais longo, 40% das pessoas estarão usando o transporte de massas, e 60% ainda estarão usando seus carros.

5 Considerações Finais

Neste trabalho procuramos mostrar, através de exemplos, que tópicos de matemática estudados no ensino médio, como matrizes e sistemas lineares, podem ser usados como ferramentas para resolver problemas práticos importantes.

Uma pergunta frequente dos alunos do ensino básico numa sala de aula de matemática, é onde se aplica o assunto estudado. Este trabalho vem ajudar a dar uma resposta nesta direção, pelo menos no que se refere ao estudo das matrizes e sistemas lineares.

Usamos as matrizes e sistemas lineares nas Cadeias de Markov para resolver, como exemplos, três problemas práticos, nas áreas de Genética, Psicologia e Transporte de Massa.

O trabalho foi desenvolvido de tal modo que um aluno do ensino médio possa ler e entender os exemplos apresentados.

Referências

[1] **Álgebra Linear com Aplicações**. *Howard Anton, Chris Rorres*; trad. Claus Ivo Doering. - 8. ed. - Porto Alegre: Bookman. Brasil, 2001.

[2] **Fundamentos da Matemática Elementar, 5**. *Samuel Hazan*; - 7. ed. - São Paulo: Atual, Brasil, 2004.

[3] **Álgebra Linear**. *José Luiz Boldrini... [et. al]* - 3. ed. - São Paulo: HARBRA ltda, Brasil, 1986.

[4] **Introdução a Álgebra Linear com aplicações**. *Bernard Kolman*; - 8. ed. - Rio de Janeiro: LTC. Brasil, 2006.

[5] **Álgebra Linear e aplicações**. *Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, Roberto C. F. Costa*; - 6. ed. - São Paulo: Atual. Brasil, 2003.