UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LENNON DA ROCHA PEREIRA

MATEMÁTICA APLICADA ÀS ESCOLHAS SOCIAIS:

UM PROTÓTIPO PARA DECISÕES JUSTAS

MOSSORÓ

2018

LENNON DA ROCHA PEREIRA

MATEMÁTICA APLICADA ÀS ESCOLHAS SOCIAIS:

UM PROTÓTIPO PARA DECISÕES JUSTAS

Dissertação apresentada ao Corpo docente da Universidade Federal Rural do Semiárido-UFERSA, no Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr Antonio Ronaldo Gomes Garcia.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

MOSSORÓ

2018

d436m da Rocha Pereira, Lennon.
Matemática Aplicada às Escolhas Sociais: um protótipo para decisões justas / Lennon da Rocha Pereira. - 2018.
69 f. : il.

Orientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2018.

1. Eleições. 2. Escolhas Sociais. 3. Modelagem Matemática. 4. Sufrágio. 5. Voto. I. Ronaldo Gomes Garcia, Antonio, orient. II. Título.

LENNON DA ROCHA PEREIRA

MATEMÁTICA APLICADA ÀS ESCOLHAS SOCIAIS:

UM PROTÓTIPO PARA DECISÕES JUSTAS

Dissertação apresentada ao Corpo docente da Universidade Federal Rural do Semiárido-UFERSA, no Campus Mossoró para obtenção

APROVADA EM: 31 / 08 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Dr. ANTONIO RONALDO GOMES GARCIA- UFERSA
Presidente

Mauricio Zuluaga M.

Dr. MAURÍCIO ZULUAGA MARTINEZ – UFERSA CAMPUS CARAÚBAS
Membro externo

Dr. ODACIR ALMEIDA NEVES
Membro interno

MOSSORÓ/RN,2018.

Dedico todo esforço e esmero que depositei neste trabalho a meu Pai, Danilo Pereira Lima (In Memorian), que foi exemplo de paternidade, de homem e de ser humano durante toda sua vida. Nosso convívio me deixou inspiração e força para sempre seguir incansável.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por minha vida e a pela dádiva de ter tantas pessoas especiais ao meu lado, colocando suas orações e energia para que eu conseguisse cumprir mais esta etapa importante da minha vida.

Às minhas pequenas, Maria Larissa e Maria Louise, agradeço pelo presente de serem filhas tão maravilhosas e pelo incentivo que são para que eu alce voos constantes e ainda mais altos. Espero que um dia leiam este trabalho como se fosse parte das vidas de vocês escritas neste trabalho.

Sou muito grato também a minha amada esposa, Leidiane Souza, que sempre está comigo, apoiando-me e cuidando da maioria das coisas para que eu possa focar nos meus compromissos. Seu companheirismo, amizade, paciência e amor foram imprescindíveis para que este projeto de vida pudesse se concretizar e almejo brindar esta e muitas outras vitórias a seu lado.

À minha amada mãe, Lucivanda Rocha, minha incomensurável gratidão. Sem você estaria bem distante de onde cheguei. Sua luta e seu amor me levaram adiante nas dificuldades e derrotas que passei. Sempre me ensinou a ser forte, a enfrentar as situações de frente, acreditando que eu chegaria até aqui. Ensinou-me a perder de cabeça erguida e vencer com humildade. Seu exemplo de mãe me fez o homem que sou.

Ao meu amado irmão, Daniel Rocha, meu agradecimento pelo companheirismo de sempre e parceria desde o dia em que nasceste. Você me ajudou no desenvolvimento do papel paternal. Sempre estarei do seu lado para o que der e vier. Sinto-me amado e protegido por você e sabemos que nossas vitórias nunca são individuais e sim coletivas. Sua torcida e seu amor também estão presentes em todo meu trabalho e torço por você todos os dias.

Sou muito grato a todos os professores da UFERSA – em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Ronaldo Garcia – que me conduziram nesses últimos anos a tornar este trabalho exequível, seja na fase inicial ou nas disciplinas eletivas que enfrentei e pelo apoio e entendimento do escasso tempo que tive durante todo o inesquecível curso.

Agradeço, também, aos Professores Doutores Maurício Martinez e Odacir Neves que doaram tempo para analisar este trabalho e participar da banca de defesa, enriquecendo o processo com suas experiências.

Por fim, agradeço, com afeto, aos meus familiares, amigos e alunos que, verdadeiramente, torcem por mim e vibram com minhas conquistas. Vocês sempre me proporcionam uma oportunidade de ser melhor do que fui e reconhecer o ser humano finito que sou.

"Sob a mais livre das constituições, um povo ignorante é sempre escravo."

(Marquês de Condorcet)

RESUMO

Sistemas políticos democráticos têm como condição básica usar a opinião majoritária para obrigá-la a toda sociedade. Diversas modelagens matemáticas se tornaram imprescindíveis às Ciências Sociais. Uma das mais importantes e presentes na atualidade é o estudo do voto justo, meio coerente de se tomar decisões democráticas, refletindo a vontade de uma maioria. O sufrágio, direito de votar e ser votado, sempre foi um dos profundos problemas universais, mas o processo de justiça das escolhas demorou um longo período para obter tratamento matemático com teoremas e proposições consistentes sobre como tornar uma eleição íntegra, a partir de condições iniciais rigorosas. Haverá uma análise da história do voto e as ideias desenvolvidas por dois franceses que pesquisaram, com afinco, qual seria a forma mais honesta de escolher seus representantes nas eleições chamadas majoritárias atualmente. Na segunda parte da investigação, serão mostrados estudos feitos por célebres estadunidenses sobre como tornar uma eleição proporcional coerente, no que concerne às partições das vagas, onde a tentativa e erro é o método científico usado na maioria dos casos. Ao final, faremos uma exposição dos modelos adotados nas eleições brasileiras e, intuitivamente, será traçado um paralelo com todo o trabalho e o quanto os processos elencados estão corretos ou equivocados, no que tange à aplicação dos melhores meios de escolhas sociais.

Palavras-Chave: Eleições. Escolhas Sociais. Modelagem Matemática. Sufrágio. Voto.

ABSTRACT

Democratic political systems have as basic condition to use the majority opinion to force it society. Several mathematical models have become indispensable to the Social Sciences. One of the most important and present today is the study of the fair vote, a coherent means of making democratic decisions, reflecting the will of a majority. Suffrage, the right to vote and to be voted, has always been one of the deepest universal problems, but the process of fairness of choices has taken a long time to obtain mathematical treatment with consistent theorems and propositions about how to make a full election, from initial conditions rigorous. We will give an analysis of the history of the vote and the ideas developed by two Frenchmen who have researched hard and honestly what would be the most honest way to choose their representatives in the so-called majority elections today. In the second part of the investigation, we will show studies by famous Americans on how to make a proportional election coherent, in what concerns the division of vacancies, where trial and error is the scientific method used in most cases. In the end, we will give an exposition of the models adopted in the Brazilian elections and, intuitively, we will draw a parallel with all the work and how the processes listed are correct or misleading, regarding the application of the best means of social choices.

Keywords: Elections. Mathematical Modeling. Social Choices. Suffrage. Vote.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$+$	Adição
$-$	Diferença
$\cdot$	Produto
$\div$	Divisão
$=$	Igualdade
$\frac{m}{n}$	Divisão entre *m* e *n*
${}^{m}/_{n}$	Divisão entre *m* e *n*
$\sqrt{\ }$	Raiz quadrada
$\%$	Percentual
$\in$	Pertence a
$>$	Maior que
$<$	Menor que
$\geq$	Maior ou igual a
$\leq$	Menor ou igual a
$\succ$	Maior preferência que
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se,
$\rightarrow$	Relação entre conjuntos
$\lfloor\ \rfloor$	Símbolo da Função Piso

$\lceil \ \rceil$	Símbolo da Função Teto
$\lvert a-b \rvert$	Módulo da diferença entre *a* e *b*
!	Fatorial
$\binom{m}{n}$	Combinação de *m*, *n* a *n*
$C_{m,n}$	Combinação de *m*, *n* a *n*
$P_q^{m,n}$	Permutação de *q* elementos, com repetição de *m* e *n*
(Pr)	Probabilidade
IN	Conjuntos dos Números Naturais
IR	Conjuntos dos Números Reais

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Aplicações matemáticas sempre foram aliadas das sociedades e das instituições em geral. O ser humano sempre buscou meios para compreender melhor seu entorno e modelar aproximações da realidade através dessa linguagem imprescindível à nossa existência e ao desenvolvimento da sociedade humana em todos os aspectos, a Matemática.

Escolher líderes e representantes de uma maioria exige muita responsabilidade e coerência de todos os envolvidos. Para isso, necessita-se de modelagens que, efetivamente, tornem qualquer processo de escolha o mais equânime, democrático e equiprobabilístico possível. Mas será que é fácil encontrar um modelo assim? Bem, a história dos métodos de escolhas que o ser humano criou mostra, pelos diversos tipos existentes, que não é um trabalho fácil; ou melhor, nem sempre uma mesma forma é eficaz para todas as situações de escolhas que nos deparamos. Tudo depende do tipo de eleição, da cultura de um povo e dos espaços democráticos construídos por ele.

No Brasil, as eleições existem desde 1532 com a chegada dos portugueses. Naquele momento, foi necessário definir os governantes das cidades e vilas. Sabemos que sempre existiram restrições no que concerne a quem podia votar, já que mulheres, pobres, negros, dentre outros grupos, tiveram este direito cerceado por um longo período. Desde os primeiros povoados, com a chegada dos colonizadores, o voto já era a ferramenta fundamental para eleger líderes ou fazer certas escolhas sociais. A lei Saraiva introduziu as eleições diretas no ano de 1881 e, desde então, busca-se um modelo mais simples, inteligível, democrático e justo possível.

Neste início de século XXI, necessita-se, urgentemente, de uma reforma política no Brasil que, efetivamente, modifique os vícios nas eleições e as regalias anômalas dos representantes atuais do povo. Muitas votações feitas pelos deputados e senadores em plenária, encontram barreiras nos *quóruns* necessários e em outros problemas presentes em diversos escrutínios que têm como finalidade chegar a uma decisão de maioria sobre algo concernente às necessidades do povo. Notadamente, em algumas dessas votações, a vontade soberana das pessoas não é exercida por motivos pessoais dos parlamentares.

No que se trata das eleições que participamos efetivamente na escolha dos políticos, são discutíveis os métodos utilizados, os erros que estes acabam nos colocando, bem como os gastos feitos nos processos eleitorais que poderiam, em muitos casos, ser evitados. Estes e outros fatores são alguns dos graves problemas que acometem nosso país e fragilizam a democracia e os direitos sociais mais básicos das pessoas.

O processo eleitoral deve objetivar a igualdade entre os candidatos, a honestidade do voto, do processo e do responsável gasto público, pois, nestes momentos, espera-se que a decisão da maioria traduza o que será melhor para todos. A democracia, como se sabe, é uma saída razoável desde Aristóteles, mas é massacrada por interesses escusos.

Ao longo deste trabalho, serão apresentadas a história do voto, o início do estudo dos processos de escolha coletiva e dos diversos métodos, tanto das eleições majoritárias, como das proporcionais. Na primeira, critérios desenvolvidos por Kenneth Joseph Arrow, com a fundamentação da Teoria da Impossibilidade que trataremos logo mais, trouxeram uma mensagem do quanto temos que avançar neste estudo e o quão, provavelmente, pouco preocupados estamos em estabelecer práticas para desenvolver a melhor forma de escolher alguém que represente os interesses das pessoas de um estado ou até de um país.

Alguns problemas ligados à divisão proporcional serão mostrados e tentaremos superá-los, objetivando torná-la mais justa possível. Afinal de contas, todo o trabalho de uma eleição reside em escolher candidatos que reflitam a real intenção da maioria, e um método mal elaborado e modelado pode levar uma sociedade a consequências inimagináveis. Um verdadeiro efeito em cascata pode se instalar como, empiricamente, já conhecemos. O método proporcional usado no Brasil é diferente do usado, por exemplo, nos Estados Unidos. Naquele país, há muito tempo, usa-se um método que tem uma fundamentação matemática consistente em média geométrica, usando a tentativa e erro para se chegar aos resultados, e que merece ser levado em consideração e estudado com afinco em comparação com o modelo adotado no Brasil.

O campo de pesquisa em questão é, a cada dia, mais procurado por diferentes profissionais, seja por motivos louváveis, como: igualdade de condições em uma eleição ou alguma aplicação ou modelagem na Indústria, Ciência Política, Filosofia, Economia, Estatística, dentre outros mais, ou por motivos desprezíveis, como especular e manipular resultados ou prejudicar um conjunto social em detrimento de uma minoria. Para exemplificar, veremos, intrinsecamente, que o segundo turno das eleições no Brasil poderia ser evitado se uma das condições iniciais das eleições majoritárias elencadas fosse adotada que é a cédula de votação por preferências; ou o sistema das urnas comportasse um ordenamento dos candidatos por inclinações pessoais, mas sabemos que existem interesses políticos que desconsideram o melhor meio matemático de fazer tais escolhas.

Compreenderemos adiante, que muitos erros e ineficiências são de fácil reconhecimento, mas não se faz nada para modificar porque não atende às elites constituídas neste país. Nem precisaremos tocar enfaticamente neste assunto. Notaremos que, durante o trabalho, haverá, claramente, um paralelo com o que vivemos e o quanto nossos processos de escolha precisam ser aperfeiçoados para entregarmos à sociedade melhores governantes e o que ela merece de fato.

CAPÍTULO 2

ESCOLHAS SOCIAIS E A HISTÓRIA

Neste capítulo, será introduzido um pouco da história deste tema. Mostraremos que sua importância influenciou diversos povos e notáveis estudiosos que objetivavam, com o voto, tornar as situações que envolviam escolhas mais confiáveis e igualitárias possíveis.

Os primeiros processos eleitorais eram simples, com respostas do tipo: sim ou não. Não se articulava mais do que essas duas possibilidades para se transmitir uma escolha. Sabe-se também que apenas alguns setores da sociedade tinham esse direito e isso só mudou, de fato, há pouco tempo. Ainda existem diversas restrições para votar e ditaduras no mundo atual, mas nada parecido com o início de tudo. Ainda hoje, vemos países, inclusive na América Latina, que adotam eleições viciadas, onde o processo não tem compromisso com a vontade popular.

Desde o princípio, a preocupação estava no trâmite legal sobre quem votava, quais pessoas eram elegíveis e como evitar fraudes. Estas eram as grandes preocupações e não a metodologia. Dessa forma, ficavam alguns questionamentos. O sistema utilizado tem lisura e promove igualdade entre os candidatos? Há um reflexo do que a maioria quer de fato? Há indícios de que povos antigos, como os Espartanos (750 a.C.), já tinham estas preocupações em suas sociedades. Segundo PINTO (2006, p. 3),

> "A relação entre poder e voto surge de modo natural. Em vários relatos históricos são tratados modos pouco ortodoxos usados por certos *"senhores da guerra"* para ganharem eleições e chegarem ao poder. Reis, imperadores, ditadores e mesmo oligarquias, sem escrúpulos, vão, estrategicamente, dando privilégios do voto a certos sectores da sociedade, para desse modo evitarem contestações que pudessem, de algum modo, colocar em perigo os seus lugares; como era de esperar, continuam a "ganhar" eleições..."

Não se vê muita diferença do que acontece até hoje no Brasil e em muitos outros países que se escondem em uma democracia frágil e um sistema eleitoral viciado e desigual em relação ao justo processo.

Iremos agora passar por uma história interessante sobre o método de votar em uma situação de julgamento na Roma Antiga. Após, trataremos da Academia Real de Ciências

Francesa, composta por grandes líderes e estudiosos, até chegarmos à nova teoria de matemática nas eleições, desenvolvidas no século XXI.

2.1 A INDECISÃO DE PLINIUS

Plínio foi um historiador romano conhecido mais pelo codinome, o Jovem. Foi um dos primeiros a registrar circunstâncias onde o voto era necessário em atos criminosos. De acordo com PINTO (2006), em um dos trabalhos de Plinius, o mesmo cita a seguinte situação: um cônsul, chamado Afranius Dexter, morreu e as causas de seu falecimento levantaram suspeitas sobre alguns dos escravos de sua posse que tinham acesso livre à casa do mesmo e poderiam, em hipótese, atacá-lo. Havia também a possibilidade de um suicídio e evidências eram estudadas, a fim de concluir algo sobre o ocorrido com o nobre. Assim, uma moção foi posta diante dos senadores que votariam para decidir o futuro dos subjugados, bem como dar cabo do ocorrido e fazer justiça. Naturalmente, havia divergências enquanto ao que cada senador acreditava. Alguns achavam que Dexter, realmente, suicidara-se. Já outros estavam convictos de que os servos teriam assassinado “seu senhor”.

Houve três tipos de consequências que os senadores colocaram em votação. Segundo Plínio, ou Caius Plinius Caecilius Secundus, a opinião destes políticos se dividia da seguinte maneira:

- 25% acreditavam que os escravos eram culpados e, portanto, deveriam ser executados.
- 35% achavam que os escravizados nada mais que cumpriram a ordem do cônsul de acabar com sua vida. Por tratar de obediência, iriam ao exílio em uma ilha sem retorno.
- 40% deles estavam certos de que os escravos eram inocentes e defendiam o perdão dos crimes imputados a eles.

Não é uma tarefa fácil tomar uma decisão justa e que traduza a vontade da maioria! Se cada senador teve direito a um voto, houve uma disputa acirrada para se atingir a maioria absoluta de 50% + 1. Não se sabe qual foi o resultado da votação, mas, dependendo do tipo aplicado, pode ter havido vários. A título de exemplo, aqueles que defendem o perdão dos acusados, provavelmente, votariam em deixá-los em uma ilha se a disputa fosse entre abandonar ou executar os escravos. Em suma, o sistema eleitoral usado na situação citada foi um fator decisivo para o veredito dos réus. Não nos importa, neste trabalho, o resultado ocorrido e narrado por Plinius. O que nos importa, neste início, é perceber a complexidade do tema que tem, por finalidade, dar justiça a escolhas feitas em conjunto.

2.2 ACADEMIA REAL DE CIÊNCIAS FRANCESA

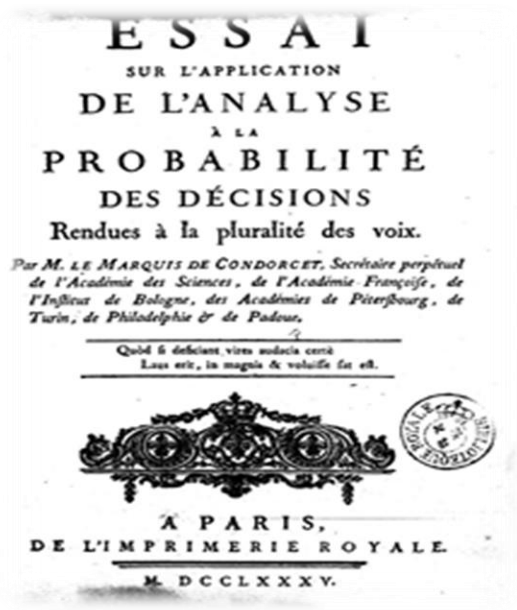
Figura 1 - Academia Francesa de Ciências

Fonte:<*http://www.academie-sciences.fr/en/Histoire-de-l-Academie-des-sciences/history-of-the-french-academie-des-sciences.html* > *Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Criada em 1666 no reinado de Louis XIV da França, vemos, na foto anterior, Colbert, um dos principais ministros do rei, apresentar ao mesmo o local e suas instalações. Atualmente, é uma das cinco academias francesas agrupadas ao Institut de France. Ficou conhecida na Europa por abrigar grandes nomes da época que publicavam artigos e teses relevantes ao mundo acadêmico. Escrita em língua francesa, seu nome era: L'académie Royale des Sciences. De acordo com INSTITUT DE FRANCE (2018, texto traduzido),

> "A Academia de Ciências de Paris tem suas origens em uma época em que seu superintendente,...COLBERT, planejava criar uma academia de vocação geral...escolheu um grupo pequeno de eruditos ... Em 20 de Janeiro de 1699, Luís XIV deu à companhia suas primeiras regras...e foi instalada no Louvre em Paris... desempenhou um papel de conselheiro para aqueles no poder...Em 1805, o Instituto Nacional de Ciências foi transferido para as instalações do Colégio das Quatro Nações"

Dentro dessa importante instituição europeia desde o Século XVIII, duas grandes mentes iniciaram os estudos ligados à Teoria Geral Matemática das Eleições. Com uma álgebra relativamente sofisticada, foram os precursores do estudo dos métodos em que uma eleição majoritária pode ocorrer e dos fatores que influenciavam os resultados da mesma. Cronologicamente, temos Jean Charles Borda (1733 – 1799) que desenvolveu um método de eleições majoritárias a qual estudaremos a frente. Após, outro Jean não menos notável que o anterior, Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet (1743 – 1794), Marquês de Condorcet, propôs o uso da probabilidade para analisar decisões de maioria. Assim como Borda, conferiu relevante contribuição aos estudos aqui elencados. Sua obra de maior destaque e, coincidentemente, que nos interessa é "Essai Sur L'Application de L'Analyse à La Probabilité des Décisions Rendues à La Pluralité des Voix".


ESSAI
SUR L'APPLICATION
DE L'ANALYSE
À LA
PROBABILITÉ
DES DÉCISIONS
Rendues à la pluralité des voix.

Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, de l'Académie Françoise, de l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de Turin, de Philadelphie & de Padoue.

Quid si deficiant vires audacia certè
Laus erit, in magnis & voluisse sat est.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLXXXV.

Figura 2 - Análise probabilística de Condorcet

Fonte:*<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k417181.r=Essai%20sur%20l%27application%20de%20l%27analyse%20%C3%A0%20la%20probabilit%C3%A9%20des%20d%C3%A9cisions%20rendues?rk=21459;2>*
Acesso em: 23 de Julho de 2018.

Traduzindo o título, temos: "Teste Sobre a Aplicação da Análise de Probabilidade de Decisões Feitas à Pluralidade de Vozes". Aqui, vozes se traduzem como votos. Este documento é de difícil compreensão por diversos fatores, tanto pelo uso arcaico da língua, como pelos argumentos usados. Há um pouco mais de duas décadas, conseguiu-se elencar tudo que o trabalho traz nos mínimos detalhes e revelou-se uma obra prima do conhecimento humano e um dos maiores documentos sobre voto e a Matemática. Um tema ainda com muitos questionamentos em aberto, mas com algumas irrefutáveis certezas, sabe-se, pela obra, que Condorcet notou que Borda considerava como premissa de seu trabalho o homem como ser que exercia o voto da forma mais honesta possível. Para PINTO (2006, p.19),

> "O sistema eleitoral apresentado por Condorcet é baseado no argumento de que os eleitores votam honestamente no candidato que julgam ser o melhor para a Sociedade, mas ocasionalmente enganam-se. Condorcet, assumindo que há uma maior probabilidade dos eleitores fazerem juízos correctos do que incorrectos..., desenvolve de forma rigorosa o seu sistema eleitoral utilizando o cálculo de probabilidades....é baseado em comparações dois a dois e assenta no chamado Critério do Vencedor de Condorcet..."

A pouco, traremos os estudos elencados por estes célebres franceses que iniciaram toda esta jornada e deram toda base para que se fundamentasse uma parte do presente trabalho.

2.2.1 Jean Charles Borda

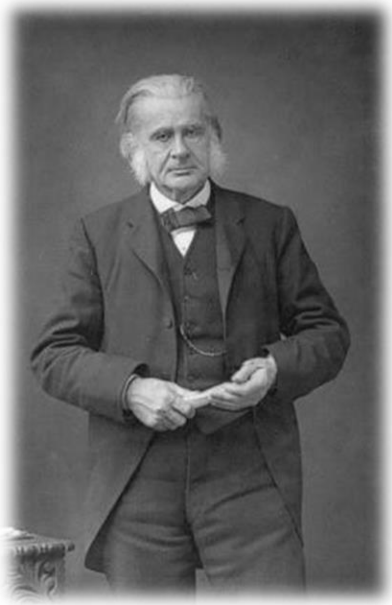


Figura 3 - Borda

Fonte: <*https://alchetron.com/Jean-Charles-de-Borda*>. *Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Borda era de família nobre. Físico, matemático, engenheiro e astrônomo, sua maior contribuição, quando se trata deste tema, foi entender que nem sempre aquele que tem a maior quantidade de votos é o merecedor da vitória. Suponha que entre 100 pessoas que estão em uma eleição com três candidatos de um conjunto $\{A, B, C\}$, podemos ter A com 40 votos e ser o mais bem votado, mas ser o mais indesejado pelos outros 60 que votaram em B ou C apenas para excluir A. Esta simples conclusão motivou todo seu estudo apresentado pelo mesmo, oralmente, em 16 de Julho de 1770, na famosa academia francesa. Na verdade, seu principal intuito era mostrar que uma eleição pode ocorrer de forma justa e simples se tivermos dois candidatos. Se houver somente um, temos apenas que sancionar. Em qualquer outro caso, poderemos ter diferentes resultados se manipularmos, ou induzirmos resultados, assim, causando erros irreparáveis à correta escolha majoritária. Em sua opinião, para resolvermos tais problemas, precisamos fazer comparações de votos dois a dois, nos caso com mais de dois concorrentes. Suponha uma eleição com m eletivos. Teremos um número de comparações igual a $C_{m,2}$.

A este processo, chamou de Método das eleições particulares, porém logo notou que essa maneira de resolver o problema se torna inviável se tivermos uma longa lista de pessoas concorrentes, pois, assim sendo, cada eleitor teria vários votos a dar e tornaria ineficaz a eleição ineficaz. Com isto, pensou em algo diferente chamado: eleição por ordem de mérito que consistia no seguinte:

- Existe o conjunto $X = \{x_1, ..., x_m\}$, com m candidatos, onde x_k é o k'ésimo candidato, com $k = \{1, 2, ..., m\}$.

- Se ordenarmos os m candidatos por preferência, tal que se $x_i \succ x_j$, então o candidato x_i tem maior preferência de certo eleitor em relação ao x_j, com $i, j \in k$.

- Há $m!$ maneiras de ordenarmos os candidatos do mais preferido ao menos, mas não há necessidade de colocarmos todas as opções em votação.

- Atribuir um ponto para o último colocado, dois para o penúltimo, até chegar ao primeiro colocado, em uma ordem de mérito, com m pontos.

- O concorrente que obtiver a maior quantidade de pontos somando os valores de todas as preferencias é o vencedor para Borda.

- A preferência é qualitativa. Portanto, a “distância” da estima entre duas pessoas que têm um entre elas na escolha ordenada é a mesma.

Dadas considerações iniciais, se $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, significa que x_1 é tão mais preferido que x_2, quanto x_2 é mais preferido que x_3. Em outras palavras, a inclinação por um candidato, em relação a outro, não supera aquele acima ou abaixo dele em predileção.

Para deixar mais claro, considera-se o seguinte exemplo: Em uma eleição onde há três candidatos representados pelo conjunto $\{A, B, C\}$ e 12 eleitores, houve a seguinte votação em lista de preferências:

VOTANTES	**PREFERÊNCIA**
3	$A \succ B \succ C$
2	$A \succ C \succ B$
3	$B \succ C \succ A$
4	$C \succ B \succ A$

Tabela 1 – Borda

Observa-se que A tem a maior quantidade de preferências com cinco votos, mas é a última opção para sete das doze pessoas votantes. Seguindo os critérios da eleição por ordem de mérito, onde primeiro usamos a quantidade de votos dessa opção e, após, os pontos da posição de preferência, teremos as seguintes pontuações:

- $A = 3x3 + 2x3 + 3x1 + 4x1 = 22$.
- $B = 3x2 + 2x1 + 3x3 + 4x2 = 25$.
- $C = 3x1 + 2x2 + 3x2 + 4x3 = 23$.

Concluímos que B seria o vencedor segundo o método que Borda chamou de “eleição por ordem de mérito”. Nota-se que o fato de A ser rejeitado pela maioria levou sua pontuação para baixo. Neste caso, pode ter ocorrido o voto estratégico, deixando, por exemplo, C em segundo lugar por três votantes para deixar A em último, mas isto é rejeitado por Borda em suas premissas. Aqui os eleitores são honestos quanto às ordens de preferências.

Enunciaremos, a partir de agora, um teorema que Borda provou sobre eleições justas por ordem de mérito, onde a disputa ocorre com os casos mais excepcionais de uma eleição meritocrática entre os dois mais bem votados.

Teorema de Borda (PINTO, 2006): *Dada uma eleição por ordem de mérito onde há* x *candidatos e y eleitores. Se* C_1 *é o candidato mais votado com* δ *votos e* C_2 *o candidato mais votado, depois de* C_1*, com* ε *votos, onde todos que não colocaram* C_1 *em primeiro o colocaram em último e todos que não colocaram* C_2 *em primeiro o colocaram em segundo, então o resultado da eleição só favorece* C_1 *se* $\delta > \frac{\varepsilon + (x-2)y}{x-1}$*, com* $x \neq 1$.

Demonstração: Dadas as condições acima, temos que, nesse tipo de eleição, como há x candidatos, existem x pontos para o primeiro, $x-1$ para o segundo colocado e, por conseguinte, 1 ponto para o último. Assim, C_1 terá $x\delta + 1(y-\delta)$ pontos, enquanto que C_2 uma pontuação igual a $x\varepsilon + (x-1)(y-\varepsilon)$. A eleição favorecerá somente a vitória de C_1 se:

$$x\delta + (y-\delta) > x\varepsilon + (x-1)(y-\varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\delta(x-1) > \cancel{x\varepsilon} + xy - \cancel{x\varepsilon} - y + \varepsilon - y \Leftrightarrow$$

$$\delta(x-1) > \varepsilon + xy - 2y \Leftrightarrow$$

$$\delta(x-1) > \varepsilon + y(x-2)$$

Portanto, concluímos que $\delta > \frac{\varepsilon + (x-2)y}{x-1}$; $x \neq 1$.

Observe que, supondo apenas dois candidatos em uma eleição por este método que chamaremos Bordaniano, teremos $x = 2$. Assim, imediatamente, temos $\delta > \varepsilon$ e, portanto, quem obteve a maioria dos votos é o eleito de forma justa.

Proposição (PINTO, 2006): *Se em uma votação, quem não preferir* C_1 *como vencedor, votar em* C_2*, ou seja, no caso em que* $\varepsilon = y - \delta$*, concluiremos, então, que* $\delta > y\frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$.

Demonstração: Em uma eleição, onde C_1 teve δ votos, então se todos os outros eleitores que não votaram C_1 votarem em C_2, este terá $y-\delta$ votos, já que há y eleitores. Mas sabemos que $\delta > \frac{\varepsilon + (x-2)y}{x-1}$, $x \neq 1$. Dessa forma, segue que

$$\delta > \frac{\overset{y-\delta}{\overset{\downarrow}{\varepsilon}} + (x-2)y}{x-1} \Leftrightarrow \qquad \delta > \frac{y-\delta+xy-2y}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\delta > \frac{-\delta+xy-y}{x-1} \Leftrightarrow \qquad \delta > \frac{-\delta+y(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\delta(x-1)+\delta > y(x-1) \Leftrightarrow \qquad \delta(x-1+1) > y(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\delta x > y(x-1) \qquad \delta > y\frac{x-1}{x}, \quad x \neq 0 \cdot$$

Portanto, concluímos que, de fato, o resultado é o esperado.

Nota-se que se houver 3 candidatos, o mais votado será o vencedor se mais de $2/3$ votarem nele. Se forem 4 candidatos, será necessária uma quantidade maior que $3/4$ dos votantes para elegê-lo. Se forem 5, teremos a necessidade de mais de $4/5$ dos eleitores para o escolhido pela maioria ser o merecedor da vitória e sucessivamente.

Na memória apresentação de Borda, em 16 de Julho de 1770, na Academia das Ciências da França e com suas próprias palavras, diz o ilustre Borda em PINTO (2006, p.16)

> "Tudo que eu disse sobre eleições também se aplica a deliberações[1], dado que as deliberações não são mais do que uma espécie de eleições entre diferentes opiniões, estando portanto sujeitas às mesmas regras."

A contagem de Borda foi utilizada até 1800 pela Academia Real de Ciências Francesa. Após, Napoleão[2] interveio nas eleições e montou uma comissão que criou novas regras. Nela, havia um conhecido matemático que dispensa grandes apresentações e foi, sem dúvida, um grande colaborador desta área, Laplace[3] (1749 – 1827).

---

[1] São debates para se chegar a um consenso, trazendo questionamento ou reflexão sobre algo em comum de um coletivo.

[2] Imperador francês, dominou boa parte da Europa e, com grande poder militar e político, estabeleceu uma ditadura na França em 1799.

[3] Francês de Beaumont-en-Auge, foi professor da Escola Militar de Paris e grande físico e matemático. Colocou todo seu conhecimento em sua obra: "Mecânica Celeste", de difícil leitura, por omitir diversas passagens durante suas demonstrações.

2.2.2 Marquês de Condorcet

Figura 4 - Marquês de Condorcet

Fonte: *<http://profjanaina2.blogspot.com/p/revolucao-francesa.html>. Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Nobre, reconhecido matemático, sociólogo, economista e filósofo contribuiu grandemente para os estudos aqui elencados e desenvolveu a Teorias de Probabilidade Aplicadas às Ciências Sociais. Condorcet era um exímio matemático e pensador. Sua maior obra foi "Teste Sobre a Aplicação da Análise de Probabilidade de Decisões Feitas à Pluralidade de Vozes" onde desenvolveu uma bela matemática robusta e de difícil compreensão sobre o tema que estamos analisando. Defendia, no trabalho, o famoso Princípio de Condorcet que enunciao seguinte: "se, em uma disputa eleitoral, um candidato qualquer vencer todas as comparações dois a dois, ou seja, se for preferência em comparação com qualquer outro, então dever ser o justo vencedor".

Respeitoso com Borda, o Marquês mostra, em sua obra, algumas falhas não observadas por seu colega matemático que, certamente, inspirava-o. Com toda a "simplicidade" do seu modelo, Borda considerava, humanisticamente, que o trabalho desenvolvido por ele se baseava em uma sociedade justa e honesta e distrações inerentes às possíveis manipulações não eram variáveis a considerar. Condocert já discorda e mostra que um candidato pode ser colocado abaixo, acima ou entre outros dois, com o único objetivo de alterar o resultado justo de Borda e beneficiar alguém em específico. Claramente, Condorcet tinha razão, pois, no mundo real, esses fatores devem ser considerados e em um ideal, Borda estaria completamente certo. Na verdade, Condorcet mostrou que em uma eleição Bordaniana com *n* candidatos, se tivermos um resultado pronto e após, acrescentarmos outros, sem alterar o primeiro certame, teremos alteração no vencedor entre os *n* iniciais. E ainda pior; sem mover nenhum dos votos de preferência antes do acréscimo dos novos concorrentes. A isto, Condorcet chamou de "sensibilidade às alternativas irrelevantes".

Resume de forma muito coerente, em seu trabalho, a maneira de enxergar o sistema eleitoral de Condorcet, quando diz PINTO (2006, p. 19)

> "O objectivo de Condorcet é a procura da "verdade colectiva". Perante uma lista de candidatos procura-se o melhor primeiro, o segundo melhor, o melhor terceiro, etc. Para Condorcet, encontrar "verdadeiramente o melhor" é encontrar aquele que com maior probabilidade, a maioria vai eleger... Por exemplo, quando um tribunal de juri tem que decidir se um arguido é culpado ou inocente, espera-se que a decisão tomada seja justa e correcta. Ora é este sentido (humanista) de honestidade que leva Condorcet a considerar que as assembleias de voto são formadas por pessoas que têm opiniões diferentes e, por isso mesmo, enganam-se, considerando no entanto que é muito provável que a maioria tome a melhor decisão...se só existirem dois candidatos não haverá nenhuma dificuldade de os ordenar...quando o número...é maior que dois, começam a aparecer dificuldades."

Os problemas em uma eleição para ele, como sabemos empiricamente, aparecem, somente, em processos com mais de dois candidatos, pois, se assim forem, temos uma escolha simples a fazer. Quando houver mais de dois, há vários problemas que podem surgir e precisam ser verificados.

Como o princípio nos informa, um candidato é vencedor justo se for o preferido em todas as comparações dois a dois com seus concorrentes. Ma será que isto vai acontecer facilmente? Probabilísticamente, em uma amostra, existe uma tendência empírica de haver vários resultados distintos nessas comparações. Assim, ele percebeu, rapidamente, que havia um caso simples com três candidatos que já causaria um grave problema ao seu método.

Para começar, precisamos entender que se comparamos todos os candidatos em uma escolha de dois em dois, um eleitor irá preferir alguém em cada dupla comparada. A exemplo, se um eleito escolhe a opção: João a Pedro, então a opção Pedro a João é descartada e é contado um voto a preferência João $\succ$ Pedro. Portanto, se tenho *x* opções de comparação no total, um participante votará em $x/2$ delas, onde constará quem ele quer que vença em cada comparação entre dois candidatos.

No que se refere ao grave problema, suponha que três candidatos C_1, C_2 e C_3 disputam uma eleição. Temos $3! = 6$ relações possíveis:

$$C_1 \succ C_2,\ C_1 \succ C_3,\ C_2 \succ C_1,\ C_2 \succ C_3,\ C_3 \succ C_1 \text{ e } C_3 \succ C_2.$$

Suponha também que, nas comparações dois a dois, haja uma maioria de votos nos casos abaixo:

$$C_1 \succ C_2,\ C_2 \succ C_3 \text{ e } C_3 \succ C_1.$$

Assim, teremos o que ele chamou de ciclo. A figura abaixo representa este resultado que não nos leva a uma ordem de preferência vencedora, comparando os três concomitantemente.

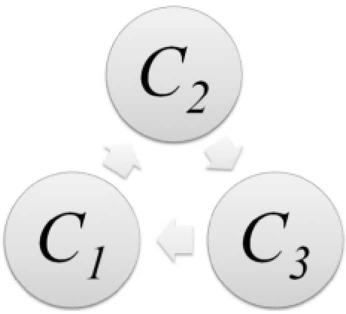


Figura 5 - Ciclo

Fonte: Lennon Rocha (2018).

Então, como vencê-lo? Para isto, o marquês pensou e chegou em algo plausível. Para quebrar os ciclos recorrentes que podem ocorrer, propôs as seguintes condições lógicas para uma eleição com *n* participantes:

- Existem $n!$ ordens de preferência para os n candidatos simultaneamente.
- Cada eleitor dará sua opinião em uma das $n!$ comparações possíveis entre todos os concorrentes.

- Os eleitores, agora, terão que votar $\frac{n(n-1)}{2}$ vezes para ordenar suas preferências quando comparados os candidatos dois a dois.
- Contam-se as opiniões que foram dadas pelos eleitores nas preferências dois a dois.
- Forma-se um resultado a partir das opiniões com o maior número de votos.
- Se a vencedora está entre as $n!$ possíveis, elege-se o vencedor desta ordem de preferência.
- Se a que ganhar estiver entre as impossíveis, retiramos, de todas elas, as que tiverem menor votação até que o ciclo se encerre e vence a preferência resultante, por transitividade, dentre as comparações dois a dois que sobrarem.

Para tornar mais simples a ideia, se estamos querendo eleger alguém, podemos formar uma ordem de preferência entre todos, após os votos nas comparações entre cada dois deles. Quando cruzarmos estas comparações, se tivermos uma das possíveis, saberemos facilmente quem venceu. Se o resultado não traduzir uma das possibilidades factíveis, ou seja, houver formação de ciclos caóticos de comparação, haverá necessidade de aplicar o modelo passo a passo apresentado anteriormente. Logo, teremos que eliminar as comparações de menor votação e vencerá a comparação mais votada.

Não é um trabalho simples entender o sistema de Condorcet. Acima, há uma tentativa de interpretar seu raciocínio da maneira mais leve e, ao mesmo tempo, fiel. Alguns renomados pesquisadores notaram a grande dificuldade de interpretar o raciocínio do mestre Condorcet, pois, para grandes quantidades de candidatos, o sistema se torna confuso, intricado e relativamente infiel.

Em seguida, vamos mostrar como se aplica seu método em um modelo simples com três candidatos (*A*, *B*, *C*), 11 eleitores e nos ateremos nisto.

VOTANTES	PREFERÊNCIA
6	$A \succ B$
5	$B \succ A$
9	$B \succ C$
2	$C \succ B$
3	$A \succ C$
8	$C \succ A$

Tabela 2 – Condorcet

Se escolhermos as preferências com melhor votação, teremos:

- $A \succ B$, com 6 votos.
- $B \succ C$, com 9 votos.
- $C \succ A$, com 8 votos.

Claramente, temos um ciclo. Se não houvesse, bastava usar transitividade e, de forma trivial, encontraríamos o justo vencedor. Pelo método em estudo, devemos eliminar a preferência, dentre as mais votadas, com pior votação, no caso $A \succ B$ e, após, terminamos com as ordenações em questão $B \succ C$ e $C \succ A$. Por transitividade, concluímos que a preferência vencedora, dentre as $3!$ formas possíveis é $B \succ C \succ A$.

Não se preocupando mais com os votos e sim com a ordem final, temos que o vencedor é o candidato *B*. Note que, com três candidatos, foi simples visualizar a ideia do marquês. Se houver mais ciclos, então a dificuldade é para que estes desapareçam e a solução acima seja colocada em prática. Falta pensarmos no seguinte questionamento: Onde se deposita a probabilidade elencada no início? Na verdade, é importante ressaltar que o valor deste modelo é histórico e foi um dos primeiros protótipos para o que conhecemos, na Estatística, por teste de hipóteses aplicado a dados observados em uma amostra significativa de um experimento qualquer.

Dentro dessa perspectiva, em uma eleição com *n* candidatos e $n > 2$, nas comparações dois a dois, um eleitor qualquer tem uma probabilidade $(\Pr)$ igual a *k* de fazer a escolha certa na comparação de dois candidatos, ou seja, de votar na ordem entre dois que irá compor a geral vencedora e dentre todas possíveis, com $k \in \Re$, onde $1/2 < k < 1$(considerava que havia uma maior chance de alguém fazer uma escolha acertada do que equivocada, sempre acreditando que o ser humano tem sensatez inata) e igual, óbvio, a 1 – *k* de optar pela ordem errada que irá de encontro ao resultado final.

Reforça-se que a ideia de equiprobabilidade, neste caso, não é usada, visto que os valores probabilísticos adotados pelo marquês levam em conta suas crenças pessoais sobre nossas condições positivas genéticas.

Usando a tabela 2, vamos mostrar a ideia de Condorcet. Uma das premissas usada é de que a escolha do votante é independente das outras escolhas que o mesmo fará nas demais comparações dois e dois e dos que votarão como ele.

Suponha que queremos calcular a probabilidade do resultado obtido ser a ordem de preferência total $B \succ C \succ A$ ao final da eleição. Observe que 9 escolheram $B \succ C$, logo 2 preferiram $C \succ B$ (Note também que há 11 eleitores). Desse modo, olhando para a tabela, *k* é a probabilidade de escolher a ordem entre dois $B \succ C$ que se espera e de 1 – *k* para a ordem inversa $C \succ B$ desses mesmos dois candidatos. Segue o raciocínio para as preferências $B \succ A$ e $C \succ A$. Para calcular a probabilidade de termos o resultado esperado, deve-se determinar a chance das escolhas dos 11 eleitores. Note que $\underset{M \succ P}{E_n}, (M \neq P)$, representa o *n*'ésimo eleitor que prefere *M* em relação a *P*. Observe o exemplo:

$$\underset{B \succ C}{E_1}\ \underset{B \succ C}{E_2}\ \underset{B \succ C}{E_3}\ \underset{B \succ C}{E_4}\ \underset{B \succ C}{E_5}\ \underset{C \succ B}{\overset{\Downarrow}{E_6}}\ \underset{B \succ C}{E_7}\ \underset{B \succ C}{E_8}\ \underset{B \succ C}{E_9}\ \underset{B \succ C}{E_{10}}\ \underset{C \succ B}{\overset{\Downarrow}{E_{11}}}$$

Note que o 6º e 11º eleitores votaram na ordem errada, relativo às expectativas de resultado, porém poderiam ter sido outros dois a fazerem a escolha equivocada. Isto nos remete ao que conhecemos, na análise combinatória, por Permutação com repetição $P_q^{m,n}$; com *q*, *m* e $n \in IN$. Portanto, se queremos calcular a probabilidade de ocorrer tal resultado temos que permutar os de cada eleitor como se, analogamente, tivéssemos contando quantos anagramas existem na palavra *"arara"* que seriam:

$$P_5^{3,2} = 10 \left| \overset{1}{rraaa}, \overset{2}{arraa}, \overset{3}{aarra}, \overset{4}{aaarr}, \overset{5}{raaar}, \overset{6}{aarar}, \overset{7}{arara}, \overset{8}{raraa}, \overset{9}{araar}, \overset{10}{raara} \right\rangle.$$

Com efeito, note que as ocorrências com a definição de escolha dos 11 se somam e têm a mesma probabilidade que é $[k^9 \cdot (1-k)^2]$, já que 9 votam como se espera e 2, contra.

Assim, temos que a $\Pr(B \succ C) = P_{11}^{9,2} \cdot [k^9 \cdot (1-k)^2]$. O mesmo acontece com as ordens que esperamos $B \succ A$ e $C \succ A$. Fazendo as possibilidades de todos os 33 resultados, onde cada um dos 11 eleitores opinou 3 vezes, concluímos que:

$$\Pr(B \succ C \succ A) = \Pr(B \succ C) \cdot \Pr(B \succ A) \cdot \Pr(C \succ A) \Leftrightarrow$$

$$= P_{11}^{9,2} \cdot [k^9 \cdot (1-k)^2] \cdot P_{11}^{5,6} \cdot [k^5 \cdot (1-k)^6] \cdot P_{11}^{8,3} \cdot [k^8 \cdot (1-k)^3] \Leftrightarrow$$

$$= \frac{11!}{2!\ 9!} \cdot [k^9 \cdot (1-k)^2] \cdot \frac{11!}{6!\ 5!} \cdot [k^5 \cdot (1-k)^6] \cdot \frac{11!}{3!\ 8!} \cdot [k^8 \cdot (1-k)^3] \Leftrightarrow$$

$$= \frac{(11!)^3}{2!\ 3!\ 5!\ 6!\ 8!\ 9!} \cdot [k^{22} \cdot (1-k)^{11}] \Leftrightarrow$$

$$= \frac{(11!)^3}{2!\ 3!\ 5!\ 6!\ 8!\ 9!} \cdot [(k^2)^{11} \cdot (1-k)^{11}] \Leftrightarrow$$

$$= \frac{(11!)^3}{2!\ 3!\ 5!\ 6!\ 8!\ 9!} \cdot [(k^2) \cdot (1-k)]^{11} \Leftrightarrow$$

$$\Pr(B \succ C \succ A) = \frac{(11!)^3}{2!\ 3!\ 5!\ 6!\ 8!\ 9!} \cdot (k^2 - k^3)^{11}.$$

É muito interessante imaginar o que pode vir após estes valores. Mensurar numericamente a chance de alguém ganhar uma eleição, a partir das probabilidades de comparações dois a dois traz uma matemática inexplorada e um enriquecedor histórico do tema em análise. De fato, fica a beleza do exposto e a ânsia por um estudo maior, desenvolvido no século XXI, por alguns professores que pesquisam o tema. Com exemplo fica o grande Saari[4] que é referência mundial de muito do estudo que estamos interessados.

---

[4] Nascido em 1940, é palestrante e professor emérito de Matemática e Economia, bem como diretor do Instituto de Matemática e Ciências comportamentais da Universidade de Califórnia em Irvine, Califórnia, EUA. Também contribui com estudo de Mecânica Celeste que reacendeu o estudo da Teoria da singularidade dos grandes, *Henri Poincaré* e *Paul Painlevé*. Outro grande feito foi sua prova *da Conjectura de Littlewood* sobre as condições iniciais de colisões em Teoria dos conjuntos.

2.3 DIREITO DO VOTO NO BRASIL

O voto, no Brasil, nasceu em 1532 com a escolha do Conselho Municipal de São Vicente, primeira vila portuguesa e foi indireto inicialmente. Cerca de Trezentos anos mais tarde, homens livres e analfabetos passaram a exercer tal direito. Precisavam ter, no mínimo, 25 anos e se fossem casados ou oficiais das forças armadas, a idade necessária era de 21 anos. Nesse mesmo período, aconteceu a primeira Assembleia Constituinte e o voto era censitário, ou seja, os fatores econômicos eram preponderantes para participar da eleição. Havia muita fraude eleitoral, como é de se imaginar, e não existia título de eleitor. As pessoas podiam exercer tal direito por procuração, portanto uma pessoa cedia seu voto a outra por qualquer motivo. Poucos anos mais tarde, em 1842, essa forma de voto foi proibida.

Em 1881, a Lei Saraiva tornou o título de eleitor compulsório como medida de moralizar e diminuir fraudes nos pleitos, porém houve um grave retrocesso. O analfabeto perdeu este direito e mesmo estando às vésperas da Proclamação da República, mulheres, soldados rasos, integrantes do clero, mendigos e indígenas não tinham direito de participar das eleições. Dez anos após, o voto à presidente e vice passou a ser direto. O período marcou o fim do Brasil Império e início da República onde, para muitos pesquisadores, iniciou-se um atraso no desenvolvimento dos processos eleitores.

Em 1932, o sigilo dos votos e o tardio direito da mulher passam a ser lei após criação do novo código eleitoral. Com isto, é criada a Justiça Eleitoral que tem como foco reger todos os processos eleitorais e julgar crimes inerentes a eles. Nos anos seguintes, a idade de participação passou a ser de 18 anos e as eleições livres são suspensas vigorando a indireta que cerceou o vital sufrágio, voltando às eleições diretas apenas em 1945.

Exatamente no ano de 1964, um golpe militar proíbe, novamente, o sufrágio às majoritárias e temos, nessa fase, a retirada dos direitos fundamentais de liberdade de expressão e democracia. Quatro anos após, o Ato Institucional 5 fortalece a truculência dos militares e seus poderes expurgando muitos parlamentares. Todo esse período negro começa a se encerrar em 1984, quando as eleições diretas estão às vésperas. A partir daí, temos o retorno do voto direto e a constituição reintegrou os direitos civis no papel.

Em 1996, as urnas eletrônicas começaram a ser utilizadas e hoje vemos o uso das redes sociais como grandes auxiliares na propagação de informação e difusão de ideologias e os riscos das novas e perigosas “fake News” que transmitem informações mentirosas e podem denegrir imagens de pessoas e instituições que não cometeram os erros ou ilícitos apontados, como também levar informações falsas a grandes massas populacionais que não sabem discernir a importância de checar a fonte antes de propagar algo por rede social.

Sabemos que no Brasil atual, existe uma grave crise instalada e necessitamos de grandes mudanças que sejam, de fato, relevantes e eficazes. Nossa democracia existe, mas necessita de grande fiscalização e defesa. Novas eleições no ano corrente desse trabalho prometem sacudir o cenário político e têm como principal papel ser combustível de uma efetiva reforma política.

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DA IMPOSSIBILIDADE DE ARROW

Figura 6 - Kenneth J. Arrow

Fonte: *<https://en.wikipedia.org/wiki/Kenneth_Arrow#/media/File:Kenneth_Arrow,_Stanford_University.jpg>. Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Kenneth Joseph Arrow (1921 – 2017) nasceu em Nova Iorque e viveu seus últimos dias em Palo Alto, Califórnia, EUA. Grande economista estadunidense, Arrow recebeu o Prêmio Nobel de Economia sobre sua Teoria geral do Equilíbrio Econômico em 1972 e, notadamente, é conhecido pela sua tese de doutorado que contém sua famosa demonstração do Teorema da Impossibilidade de Arrow. Foi professor de universidades bastante respeitadas nos Estados Unidos, como: Universidade de Chicago, de Stanford e de Harvard.

O teorema da possibilidade geral, como ele o chamava, responde uma dúvida não muito trivial quando se trata em tomar decisões coletivamente: Será que existe algum sistema eleitoral que satisfaz condições matemáticas mínimas? Bem, veremos que a reposta é não. O único sistema livre de quase todos os paradoxos que comentaremos é o ditatorial, pois se elimina o processo, já que se o vencedor é conhecido desde o início, e põe todos os outros concorrentes em segundo lugar. O sistema de um ditador quase não falha nas condições que estudaremos.

Algumas perguntas bem razoáveis sobre nossas formas de escolher são imprescindíveis para o atual estudo social em questão. Este cientista chegou a um resultado afirmativo que nenhum dos sistemas de escolha social está ileso de todas as condições racionais e de autonomia que os eleitores podem enfrentar. À frente, entenderemos melhor sua prova e tais fatores condicionais.

3.1 CONDIÇÕES DE JUSTIÇA

São aquelas que põem em prova as contradições que podem existir em um sistema de escolhas. São capazes de analisar até que ponto se pode confiar em um método e o que o limita logicamente. É importante informar que não há empates entre preferências. Apesar de, na realidade, termos candidatos que nos afeiçoamos de forma igual, aqui não caberá ficar "em cima do muro". O eleitor precisa se posicionar e escolher alguém.

Será exposto os critérios que os métodos devem ser submetidos para fazer uma análise fiel e profunda do processo de escolha. Como exercício, o leitor pode fazer testes, aplicando as condições nos métodos e observar os resultados.

3.1.1 Unanimidade

Pode-se confundir com a maioria absoluta, porém, sensivelmente, não são as mesmas coisas. Também conhecida como Condição de Pareto, ela diz o seguinte:

- Se dois candidatos *A* e *B* participam de uma eleição, tal que *A* tem a mesma quantidade ou mais de votos que *B*, então, na lista final, dentre todos os candidatos, *A* estará empatado ou na frente de *B*.

Parece que estamos sendo redundantes, mas esta condição é importante para a precisão das considerações iniciais em qualquer processo.

3.1.2 Vencedor de Condorcet

Como já vimos anteriormente, Condorcet aprimorou o trabalho de Borda e sua condição inicial é um dos critérios de justiça e diz o seguinte:

- Se, em uma eleição, houver um Vencedor de Condorcet, ou seja, o ganhador de todas as comparações dois a dois será o vencedor da eleição. No caso em que algum candidato perder todas as comparações dois a dois, então será chamada, com efeito, de Perdedor de Condorcet.

3.1.3 Monotonia

A monotonia é uma condição e comportamento de algumas funções em Matemática que preservam as relações de ordem. Aqui, a condição diz o seguinte:

- Suponha que um candidato, em uma eleição, ocupa certa posição. Em uma nova eleição, com os mesmos candidatos e eleitores, se um dos candidatos tiver sua posição alterada, por no mínimo um voto a seu favor, então este não deve ocupar uma posição pior do que a que já estava.

Há uma ideia equivocada de que monotonia trata do vencedor assim permanecer durante um processo similar ao citado acima. Na verdade, seria um caso particular da condição.

3.1.4 Independência das Alternativas Irrelevantes

- Dadas duas eleições diferentes com o mesmo eleitorado e concorrentes, se a ordem relativa de dois candidatos não for alterada por nenhum eleitor na segunda eleição, então não haverá mudança no mais bem mais sucedido entre os dois em ambos os processos.

3.1.5 Neutralidade

- Se todos os eleitores trocarem dois candidatos em uma eleição, então basta mudar a posição final dos mesmos para corrigir tal falha.

3.1.6 Igualdade

- Permutar as listas de preferências escolhidas pelos eleitores, em um processo entre os próprios, sem alterá-las, não modificará o resultado da eleição.

No início do capítulo vimos que o sistema ditatorial não se encaixa em uma única condição e é esta. Importante recordar que o ditador é um eleitor ao modificarmos as listas de ordem. Com a mudança, será alterado o vencedor anterior, já que o mesmo estará, possivelmente, com um preferido que não é o mesmo que antes escolhera.

3.2 O TEOREMA

Não se tem como objetivo, neste ponto do trabalho, provar o teorema, pois existe uma série de passos minuciosos que necessitariam de uma análise de diversas proposições não postas no texto por não estarem no escopo do pretendido. O que importa, de certo, é apresentá-lo e conhecer sua aplicação no que será apresentado no próximo capítulo. O Teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema da Impossibilidade de Arrow: *É impossível encontrar um sistema de votação, democrático ou não, que satisfaça concomitantemente a Unanimidade, o Vencedor de Condorcet, a Monotonia, a Independência das Alternativas Irrelevantes, a Neutralidade e a Igualdade.*

O enunciado de Arrow é um pouco diferente e elenca menos condições, mas o objetivo desta parte do trabalho é reforçar que nenhum sistema satisfaz todas as condições expostas.

CAPÍTULO 4

ELEIÇÕES MAJORITÁRIAS

As eleições majoritárias objetivam escolher um vencedor em uma disputa entre vários candidatos. Diversas tentativas de sanar problemas causados por alguns métodos levaram ao desenvolvimento de outros, com o intuito maior de aperfeiçoar o anterior ou aplicar cada um em situações específicas. Todas as condições de Arrow podem ter suas validades verificadas em cada método que será desenvolvido abaixo. Deixamos esta análise a cargo do leitor que pode fazê-la como exercício de aprofundamento do tema, o que já foi dito no capítulo anterior.

Estudaremos os métodos distintos desenvolvidos ao longo da história do voto e que são usados em diferentes tipos de eleições. Não nos caberá julgar qual o melhor, mas apontar as divergências e evidentes vantagens de um em relação ao outro, em algumas situações específicas.

4.1 CONDIÇÕES PRECÍPUAS

As condições necessárias para iniciar e desenvolver a teoria abaixo são as seguintes:

- Dados *n* candidatos, onde $n > 2$.
- Cada eleitor tem voto único.
- Os eleitores têm uma preferência do tipo Bordaniana, ou seja, não são alteradas no curso do processo em qualquer hipótese.
- As questões de preferência obedecem à Propriedade Transitiva. Assim, dada uma eleição com três candidatos A, B e C, temos que, se $A \succ B$ e $B \succ C$, então $A \succ C$.
- A distância entre os desejos de um candidato, em relação a outro, são os mesmos, ou seja, o eleitor tem a mesma, digamos, distância subjetiva de preferência de um que está acima ou abaixo de um candidato fixado.

Nesta última condição, temos algo muito importante para os modelos que iremos analisar, porém se sabe que, na realidade, isso não é possível, já que há muita estratégia em uma eleição normalmente. Sendo assim, proporemos situações que ensejam o que se considera como ideal.

4.2 MÉTODOS DE ESCOLHAS

Escolher, neste caso, significa criar modelos ou métodos que garantam a vitória de um candidato em uma eleição por meios pré-determinados. A mudança de um modelo para outro em uma eleição modificará completamente o resultado obtido ao final. Veremos, a seguir, os principais métodos usados nas situações de escolhas coletivas de diversos tipos. Não existe aqui o intuito de comparar, mas apresentar os métodos mais importantes e usados.

4.2.1 Método Plural Simples

Consiste em eleger aquele candidato de maior preferência que obtiver m votos, sabendo que qualquer outro participante teve, no máximo, $m - 1$ em um único turno, com $m \in IN$. Considerado pobre, leva em conta a ordem de preferências de Borda, mas não o utiliza. Assim, o método pode eleger alguém que não representa o conjunto social, pois exige apenas maioria simples. Vejamos um exemplo de seu uso.

Exemplo 1: Uma eleição entre três candidatos *A*, *B* e *C* para prefeitura de uma cidade será realizado pelo método plural simples. Há 1130 eleitores aptos a votar, onde todos foram às urnas e não houve ausentes. A tabela abaixo contém o resultado em questão.

ELEIÇÃO PARA A PREFEITURA

Votos	231	245	85	235	89	245
Ordem de Borda	$A \succ B \succ C$	$A \succ C \succ B$	$B \succ A \succ C$	$B \succ C \succ A$	$C \succ A \succ B$	$C \succ B \succ A$

Tabela 3 - Método Plural Simples

Claramente, como só precisamos ver os votos obtidos pelo preferido de cada ordem, *A* obteve 476 votos nas duas preferências que liderou, *B*, 320 e *C*, 334. Claramente, *A* venceu a eleição por este método, pois obteve o maior número de votos.

Há algo muito interessante no exemplo que nos mostra o quanto ele pode ser injusto. O candidato *A* é o mais rejeitado, em preferências, por 480 pessoas. Isto quer dizer que o mesmo é mais detestado do que querido, quando se trata do todo. É razoável afirmar que o método é muito pobre e não representa bem um grupo, apesar do seu uso comum no cotidiano.

4.2.2 Método dos Dois Turnos

Neste método, deve-se introduzir a definição de maioria absoluta que é cinquenta por cento dos votos mais um (50% dos votos + 1). A grande diferença deste para o anterior é a necessidade da condição de majorar os votos do que está à frente para qualquer coisa maior que 50% dos votos válidos[5]. Se Ninguém atingir a maioria absoluta, o menos votado é eliminado e o próximo de cada preferência recebe os votos do perdedor, então temos outro turno eleitoral. Temos um modelo, em tese, um pouco melhor que o anterior, já que existe a necessidade de uma maioria que enseje real representatividade[6] e, não atendidas às mínimas condições, haverá o segundo turno.

Usa-se abaixo a mesma situação entre três candidatos, considerando a ordem de preferência entre eles. Poderia ser mais de três, mas complicaria o exemplo e não é esse o objetivo.

Exemplo 2: Uma eleição entre três candidatos *A*, *B* e *C* para prefeitura de uma cidade será realizado pelo método dos dois turnos. Há 1130 eleitores aptos a votar e as preferências são bordanianas, ou seja, as ordens são inalteráveis.

---

[5] São aqueles em que as pessoas tomam partido por um dos candidatos. Os votos brancos e nulos não são assim considerados e não computam na votação, nem prejudicam o processo. As pessoas tendem a se enganar e propagar informações inverídicas de que estes tipos de votos invalidam uma eleição.

[6] Quando uma maioria elege, legitimamente, alguém para falar e tomar decisões em nome do coletivo a ser representado.

ELEIÇÃO PARA A PREFEITURA

Votos	231	245	85	235	89	245
Ordem de Borda	$A \succ B \succ C$	$A \succ C \succ B$	$B \succ A \succ C$	$B \succ C \succ A$	$C \succ A \succ B$	$C \succ B \succ A$

Tabela 4 - Método dos dois Turnos (1º Turno)

Observe que o candidato *B*, segundo as ordens estabelecidas, conseguiu o menor número de votos, 320. No segundo turno, seus votos serão contabilizados para o próximo da ordem de preferência. Observe a tabela do 2º turno.

ELEIÇÃO PARA A PREFEITURA

Votos	231	245	85	235	89	245
Ordem de Borda	$A \succ C$	$A \succ C$	$A \succ C$	$C \succ A$	$C \succ A$	$C \succ A$

Tabela 5 - Método dos dois Turnos (2º Turno)

Fazendo os cálculos de contagem, a preferência $A \succ C$ obteve 561 votos, enquanto $C \succ A$, 569. Para obter maioria absoluta o vencedor tem que ter, no mínimo, 566 votos. Como $C \succ A$ venceu e tem uma quantidade de votos maior que o necessário, temos que *C* é o eleito.

4.2.3 Método Olímpico

Conhecido, também, como Método Plural com Eliminação, tem como objetivo eleger o candidato com maioria absoluta, porém, não atingida a majoração, elimina-se o pior votado e seguem outros turnos similares, até termos o vencedor. Tem este nome por ser o método utilizado pelo comitê olímpico nas eleições de escolha das cidades-sede dos famosos jogos. Vamos a uma situação de eleição por esse método.

Exemplo 3: Considere uma eleição com quatro candidatos *A*, *B*, *C* e *D* a ser feita pelo Método Olímpico. Haverá certa quantidade de eleitores que estarão participando do sufrágio e todos votarão compulsoriamente em algum candidato. Abaixo, vê-se uma tabela com os resultados de cada turno, onde não houve um deles com maioria absoluta até o último turno. Ratifica-se que os eleitores não votaram na ordem, mas em cada candidato. O ordenamento abaixo deixa claro quem foi mais votado, onde $B > A$ significa que *B* teve mais votos que *A*.

ORDEM VENCEDORA DO TURNO

1º Turno	$B > A > D > C$
2º Turno	$A > D > B$
3º Turno	$D > A$

Tabela 6 - Método Olímpico

Analisando o resultado, podemos concluir que *C* foi o pior votado no primeiro turno, deixando aí a competição. Seguindo, os menos votados foram *B*, após *A*, nos respectivos 2º e 3º turno, tornando *D* o eleito. Neste método, Observa-se com facilidade, estratégias de voto. Quando *C* é eliminado no primeiro turno, certamente seus eleitores passam para *A* e *D*, senão *B* não teria ido de primeiro a último colocado no 2º turno e perdido o pleito. A eleição é, definitivamente, não Bordaniana, já que nem se usa ordem de preferência e sim uma tática para eleger quem se quer ou não como vencedor.

A eleição pode acabar se um dos eletivos conseguir mais que 50% dos votos. Do contrário, irá prosseguir até termos os dois últimos não eliminados disputando o último turno.

Não temos empates no exemplo, mas, se houver, todos os participantes votam no desempate e, após, passam o ganhador para o próximo turno. De acordo com STEFFENON e JABUINSKI (2004), na escolha da sede das Olimpíadas de 2004, no primeiro turno das eleições, Buenos Aires, Argentina, empatou com Cape Town[7], África do Sul. Houve uma votação desempate e Buenos Aires levou a melhor. A cidade vencedora, já no quarto turno da eleição, foi Atenas, Grécia.

[7] No Brasil, Cape Town é mais conhecida por sua tradução, Cidade do Cabo.

Será que votar em quem queremos é melhor do que em quem não queremos? Bem, este é um dos pontos a se refletir. A bem da verdade, nem queremos respostas claras, mas um embasamento matemático para usarmos o melhor método em situações específicas.

4.2.4 Método de Borda

Já estudado anteriormente, reduz-se em pontuar as posições de forma que, se há n candidatos, então o último da comparação entre todos recebe 1 ponto, o penúltimo, 2 , até chegar no primeiro colocado com n pontos. Estes serão multiplicados, respectivamente, pelo número de votantes daquela ordem e somados para se saber quantos pontos cada candidato obteve. Segue um exemplo para facilitar o entendimento.

Exemplo 4: Uma eleição entre 3 candidatos e 17 eleitores, por ordem de preferência, ocorreu como na tabela subsequente. Vamos encontrar o vencedor de Borda.

VOTANTES	PREFERÊNCIA
4	$A \succ B \succ C$
6	$A \succ C \succ B$
2	$B \succ C \succ A$
5	$C \succ B \succ A$

Tabela 7 - Método de Borda (Particular)

Faremos o somatório dos produtos entre o número de votantes e os pontos relativos às posições de cada um. Os resultados dos candidatos foram:

- $A = 4.3 + 6.3 + 2.1 + 5.1 = 37$
- $B = 4.2 + 6.1 + 2.3 + 5.2 = 30$
- $C = 4.1 + 6.2 + 2.2 + 5.3 = 35$

Seguindo o método de Borda, A será o vencedor da eleição, pois obteve a maior pontuação.

4.2.5 Método das Comparações Dois a Dois

Temos aqui algo bem parecido com o Princípio de Condorcet, porém com uma pequena diferença; pelo princípio, um dos candidatos deve ganhar todas as disputas dois a dois e neste método, basta que algum seja o preferido na maioria das comparações entre dois que participarem da disputa, para que o considere como justo vencedor.

Utilizando o mesmo exemplo anterior, observa-se quem vence as compararmos dois a dois, em uma eleição com 17 eleitores que votam em alguém obrigatoriamente. Para mostrar o que acontece se passar de um tipo de escolha para outra, tem-se abaixo:

VOTANTES	PREFERÊNCIA
4	$A \succ B \succ C$
6	$A \succ C \succ B$
2	$B \succ C \succ A$
5	$C \succ B \succ A$

Tabela 8 - Método das comparações dois a dois

Abaixo, há uma tabela de comparações dois a dois, usando as informações de preferências acima, utilizadas em Borda:

COMPARAÇÕES DOIS A DOIS	QUANTIDADE DE VOTOS	VENCEDOR DAS COMPARAÇÕES	VENCEDOR DA ELEIÇÃO
$A \succ B$	10	A	A
$B \succ A$	7		
$A \succ C$	10	A	
$C \succ A$	7		
$B \succ C$	6	C	
$C \succ B$	11		

Tabela 9 - Método das comparações dois a dois (Resultado Final)

A venceu 20 comparações, enquanto *B*, 13 e *C*, 19. Assim, *A* obteve o maior quantitativo dois a dois, logo é o vencedor por este método.

É importante ressaltar que houve seis comparações, porém três resultados. Os 17 eleitores analisam dois a dois separadamente. Depois, observa-se os vencedores e se confronta os resultados dos melhores. O processo deve ser repetido até se ter o fim da disputa. Generalizando, podemos inferir, do exemplo acima, que, em uma eleição com *n* candidatos, teremos $C_{n,2}$ relações para analisar e ver quem obteve a maioria de vitórias e $2 \cdot C_{n,2}$ ordens a serem votados por todos os eleitores, de duas em duas, relativas a cada dois candidatos.

Como foi usada a tabela 8, infere-se, das ordens de preferências entre os três, que a tabela 9 permanece respeitando o ordenamento da votação dos 17 eleitores. Observe que faltaram as ordens $B \succ A \succ C$ e $C \succ A \succ B$ na tabela 8, o que indica que estas não obtiveram votos dos participantes do sufrágio.

CAPÍTULO 5

ELEIÇÕES DE DIVISÃO PROPORCIONAL

Seu principal objetivo é tornar uma divisão de algo indivisível justa e pautada em um equilíbrio baseado na proporcionalidade matemática em seu sentido amplo. Obviamente, se vamos distribuir vagas proporcionalmente, existe grande expectativa de que os resultados dessas divisões sejam decimais, mas sabemos que a quantidade de vagas é inteira. Então, como proceder e não ser injusto com os candidatos ou cidades em uma eleição? Bem, notaremos que calibrar a divisão de votos, que devem ser íntegros, é um grande desafio dos método, já que os resultados são decimais, mas muitos estudiosos doaram bastante energia em busca do ideal e conseguiram algo satisfatório.

Usada na escolha de diversos cargos onde os candidatos representam áreas de tamanhos diferentes, com economias e demandas distintas, não seria justo logicamente, dividirmos de forma igual à quantidade de representantes de uma cidade 10 vezes maior em população e território que outra, por terem demandas diferentes e em proporções distintas.

O método de divisão proporcional também é usado em situações bem distintas, mas que exigem uma razoabilidade para que os serviços funcionem normalmente e os funcionários não fiquem sobrecarregados. Para exemplificar, temos as escalas policiais nas companhias de patrulhamento, a divisão do número de funcionários em um supermercado de acordo com a demanda de cada setor e os horários de funcionamento e a divisão das chamadas telefônicas em *"call centers"*. Provavelmente, há menos policiais em um bairro de menor tamanho que em outro de mesma periculosidade ou deve haver menos funcionários no açougue de um supermercado de madrugada, se for 24 horas, do que no dia de uma promoção de carnes às 18 horas. Esse tipo de processo merece toda atenção, já que é bastante usado e necessário às nossas vidas.

Desde o século XVIII, muitos célebres políticos, principalmente estadunidenses, empenharam-se em desenvolver sistemas proporcionais razoáveis e com a menor possibilidade de injustiça possível nas distribuições das vagas. A Bélgica foi um dos primeiros países a introduzir este método eleitoral no início do Século XX.

5.1 QUOCIENTE ELEITORAL (Q_e)

Em uma eleição para o poder legislativo de um país, o quociente eleitoral é a razão entre o número total de votos *N* e de vagas existentes *n*, ou seja, o quantitativo necessário de votos para se obter uma vaga. É dada por $Q_e = \frac{N}{n}$.

Importante dizer que, no Brasil, após determinar tal razão, vemos se um partido atingiu, em votos, este quociente para que o mesmo possa participar do pleito. Mais a frente, o texto mostra como se procede neste país.

5.2 QUOTA (Q_t)

Conhecida também por quociente partidário, é a razão entre os votos de um partido N_p e o quociente eleitoral Q_e . De forma mais adequada, pode-se dizer que é o percentual de vagas que cada partido ou coligação deverá receber de acordo com o número de votos obtidos e é dado por $Q_t = \frac{N_p}{Q_e}$. Note o seguinte:

$$Q_t = \frac{N_p}{Q_e} \quad \Leftrightarrow \quad Q_t = \frac{N_p}{\frac{N}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad Q_t = N_p \cdot \frac{n}{N} \quad \Leftrightarrow \quad Q_t = \frac{N_p}{N} \cdot n.$$

Dado o desenvolvimento, pode-se afirmar o que foi dito. A quota é o percentual de vagas existentes que o partido terá direito, pois a fração final representa quantos votos o partido obteve em relação a todos os votantes, ou seja, é como se estivéssemos fazendo a seguinte proporção:

$$\begin{matrix} N_p \mapsto N \\ x \mapsto n \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_p}{x} = \frac{N}{n} \quad \Rightarrow \quad x \cdot N = N_p \cdot n \quad \Rightarrow \quad x = \frac{N_p}{N} \cdot n.$$

Note que N_p está para *N* assim como *x* está para *n*. Conclui-se que, de fato, *x* é a quota e o percentual das vagas que cada partido com votos suficientes terá direito.

5.2.1 Quota Mínima (Q_{mi})

É a parte inteira da quota que, possivelmente, será decimal. Para definir com mais precisão, vamos usar uma função $f : IR \rightarrow IR$ que se denomina função piso, tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ é uma função que transforma o número real *x* no maior inteiro menor ou igual a *x*. Assim, temos que $Q_{mi} = f(x)$, onde $x = Q_t$.

5.2.2 Quota Máxima (Q_{ma})

Nessa quota, define-se outra função $f : IR \rightarrow IR$, parecida com a anterior. A função teto, onde $f(x) = \lceil x \rceil$ é uma função que leva o número real *x* no menor inteiro maior ou igual a *x*. Portanto, conclui-se que $Q_{ma} = f(x)$, onde $x = Q_t$.

As casas decimais a serem usadas nas cotas comuns devem respeitar a necessidade de cada situação e serem levadas muito a sério, pois se houver grandes populações votantes, um erro de casa decimal pode causar problemas graves na equidade do processo. Portanto, não há regra geral, mas uso do bom senso e justiça. Abaixo, há tentativas de obter um modelo perto do ideal, feitas por pessoas que tinham estas preocupações elencadas aqui.

5.3 MÉTODOS DE DIVISÃO PROPORCIONAL

Os métodos deste sistema eleitoral têm como objetivo aferir qual melhor aproximação ou arredondamento que tornará justa a divisão já que, como dissemos, estamos em um ambiente de grandezas indivisíveis, ou seja, inteiros onde, na maioria das vezes, se apresentarão de forma decimal. Diversos estudiosos e celebres autoridades mundiais se debruçaram no estudo de métodos eficazes, talvez pela necessidade de tornar seus países berços de igualdade, fraternidade e justiça. Não há como negar que os Estados Unidos da América tiveram os maiores colaboradores com os métodos proporcionais. Veremos, a seguir, os principais métodos desenvolvidos e que são usados e aperfeiçoados até hoje. Modelos estes que objetivam tão somente dividir as vagas de forma equânime para que todos possam ter uma quantidade justa de governantes que os representem em suas casas legislativas.

Neste momento, serão aplicadas essas razões nos métodos proporcionais mais conhecidos da história.

5.3.1 Método de Hamilton

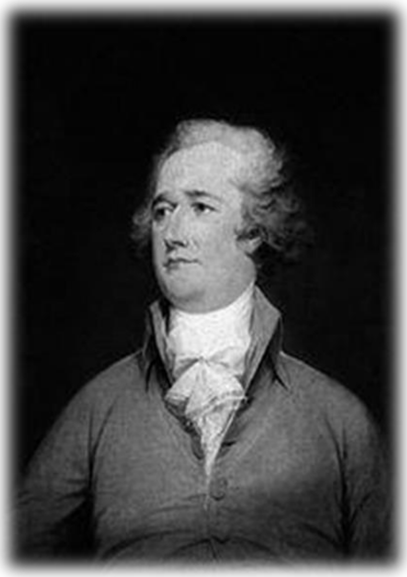


Figura 7 - Hamilton

Fonte: <*https://es.wikipedia.org/wiki/Alexander_Hamilton#/media/File:Alexander_Hamilton.jpg*>. *Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Alexander Hamilton (1755-1804) foi o primeiro secretário norte-americano que participou efetivamente do desenvolvimento do capitalismo de seu país. Um dos instituidores dos bancos naquele país, morreu em um duelo motivado por problemas políticos com outra personalidade pública de sua época, Aaron Burr. Era um intelectual e desenvolveu uma forma de divisão proporcional. Para calcular a divisão das vagas em seu método, deve-se seguir os seguintes passos:

- Determinar Q_e.
- Para cada uma das *n* cidades, obter Q_t.

- Após ter o valor de Q_t, determinar Q_{mi}.

- Distribuir as vagas que sobrarem pelos candidatos, de maneira que quem tiver o maior valor de $|Q_t - Q_{mi}|$, recebe primeiro a vaga e assim por diante, até não existirem vagas ociosas.

Exemplo 5: Suponha uma eleição com cinco Cidades C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, 1000 eleitores e 100 vagas. Note que $Q_e = 1\ 000/100 = 10$. A tabela abaixo mostra o número de eleitores de cada cidade e a distribuição das vagas por este método.

MÉTODO DE HAMILTON

Cidades	*Votantes*	Q_t	Q_{mi}	*Sobras*	*Vagas reais*
C_1	132	13,20	13	-	13
C_2	258	25,80	25	1	26
C_3	303	30,30	30	-	30
C_4	167	16,70	16	1	17
C_5	140	14,00	14	-	14
Totais	1000	100	98	2	100

Tabela 10 – Hamilton

É importante ressaltar que C_2 e C_4 ficaram com as duas vagas que sobraram porque seus valores de $|Q_t - Q_{mi}|$ foram os dois maiores dentre os de todas as cidades.

Note que o método apresenta uma falha enorme, pois foge ao princípio da proporção quando somamos sobras. Ora, o que se busca é um coeficiente que talvez distribua melhor e aproxime mais a parte decimal da inteira de maneira mais proporcional.

5.3.2 Método de Jefferson

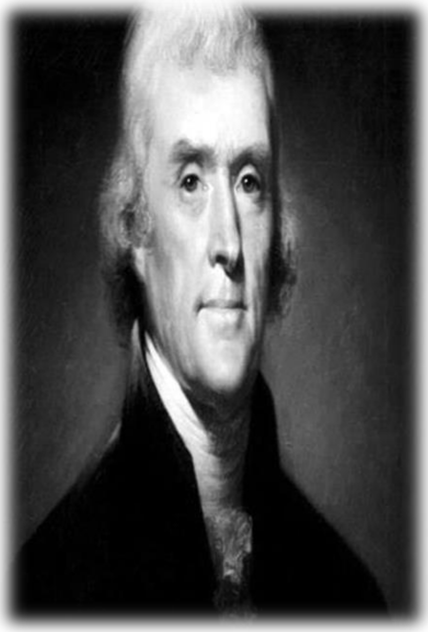


Figura 8 - Jefferson

Fonte: *<https://www.biography.com/people/thomas-jefferson-9353715>. Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Thomas Jefferson (1743 – 1826) foi o terceiro presidente dos Estados Unidos, já no início do século XIX. Um dos mais influentes idealistas republicanos[8] de sua época, buscava o estudo de modelos leais com os princípios de igualdade e justiça. O método de Jefferson consiste no seguinte:

- Encontrar um quociente eleitoral modificado[9] de modo que as quotas mínimas modificadas somem o número de vagas total.
- Atribuir a cada concorrente sua quota mínima modificada Q_{mi}.

É importante frisar que tudo que receber o termo “modificado” sofreu tentativas de se encontrar um valor ideal.

[8] Os republicanos defendem um ideal conservador de direita e com pouca intervenção estatal na economia. São antagonistas aos ideais democratas que são centro-esquerda e defendem a profunda intervenção do estado e os direitos sociais de seus cidadãos.

[9] Quociente determinado por tentativa e erro. Cada mudança que fizermos em Q_e tem como objetivo equilibrar as vagas do processo em sua totalidade.

O Método de Jefferson é confundido com o Método de D'Hondt. Na verdade, são equivalentes, porém, o último, que é europeu, tem uma forma um pouco diferente de calcular as vagas. As bibliografias, costumeiramente, confundem os métodos.

Usaremos o mesmo exemplo anterior, mas aplicando o atual método, com $Q_e = 9{,}8$, já que o quociente eleitoral é o modificado e foi escolhido por tentativa e erro.

MÉTODO DE JEFFERSON

Cidades	*Votantes*	Q_t	Q_{mi}
C_1	132	13,46	13
C_2	258	26,32	26
C_3	303	30,91	30
C_4	167	17,04	17
C_5	140	14,28	14
Totais	1000	100	100

Tabela 11 – Jefferson

Note que com $Q_e = 9{,}8$, existe uma maior precisão nos valores da distribuição das vagas não necessitando repartir vagas por algum artifício de soma como feito em Hamilton.

Não aconteceu no nosso exemplo, mas há outro grave problema no método de Jefferson e consequentemente no de D'Hondt. Dependendo da escolha de Q_e modificado, pode-se ter uma distribuição de vagas maior que Q_{ma} que podemos representar por $\lceil Q_e \rceil$. Se isto acontecer, um estado, em particular, que tiver maior número populacional se beneficiará com o método. Assim, em meados do século XIX, o método foi deixado para trás nos EUA. Logo após, foram introduzidos, no sistema proporcional daquele país, três novos métodos – Adams, Webster e Huntington – Hill – que se diferem um pouco do de Jefferson na escolha de Q_e modificado, mas são bem mais eficazes, por este e outros motivos.

5.3.3 Método de Adams

Figura 9 - Adams

Fonte: *<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=John_Quincy_Adams&oldid=51654064>. Acesso em: 12 Jul. 2018.*

Sexto estadista Norte-americano, John Quincy Adams (1767 – 1848) foi secretário de estado do presidente James Monroe e filho do ex-presidente John Adams. Grande advogado, Adams consolidou a Doutrina Monroe que defendia a independência dos estados norte-americanos e a não intervenção de países colonizadores europeus. Certa vez, ele propôs seu método ao congresso americano, mas nunca foi aprovado pelos parlamentares da época. Seu método tem como princípio dois passos que seguem:

- Encontrar um quociente eleitoral modificado, tal que cada quota modificada receba o valor inteiro superior ao seu valor real, de modo que o total de vagas seja contemplado.
- Atribuir a cada concorrente sua quota máxima modificada.

Para compreendermos Adams, usaremos o exemplo anterior com as cinco cidades e 100 vagas. Diferentemente do método de Jefferson, aqui se usa $Q_{ma} = \lceil Q_t \rceil$. Sendo assim, usaremos 10,3 como quociente eleitoral modificado, obtido por tentativa e erro. Segue o exemplo.

MÉTODO DE ADAMS

Cidades	*Votantes*	Q_t	Q_{ma}
C_1	132	12,81	13
C_2	258	25,05	26
C_3	303	29,42	30
C_4	167	16,21	17
C_5	140	13,59	14
Totais	1000	100	100

Tabela 12 – Adams

Apesar dos valores acertados para aplicação do método, houve exaustão de valores para chegar a um quociente modificado, justificando o termo: tentativa e erro. Apesar de sua razoabilidade, usar Q_{ma}, talvez, não dê justiça às quotas com decimais próximo do inteiro.

5.3.4 Método de Webster

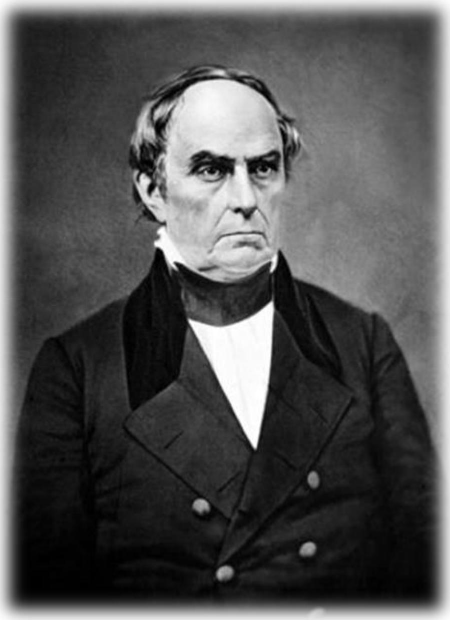


Figura 10 - Webster

Fonte: *<https://www.myinterestingfacts.com/daniel-webster-facts/>. Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Outro estadista que desenvolveu um método de divisão proporcional foi Daniel Webster (1782 – 1852). Ocupou o cargo de senador do estado de Massachusetts e, durante sua vida pública, propôs seu método ao congresso e o mesmo foi usado nos anos 1852, 1901, 1911 e 1931. Este processo parece ser mais razoável do que os anteriores, pois tem as seguintes condições:

- Usar a quota mínima $\lfloor Q_e \rfloor$, quando a parte decimal da quota for inferior a 0,5 e a quota máxima $\lceil Q_e \rceil$, no caso contrário.
- Atribuir a cada concorrente sua quota modificada pelo método de arredondamento citado.

Abaixo, tem-se o mesmo exemplo dos casos anteriores, usando $Q_e = 10{,}1$, também por tentativa e erro, por Webster.

MÉTODO DE WEBSTER

Cidades	*Votantes*	Q_t	$Q_{mi} \mid Q_{ma}$
C_1	132	13,07	13
C_2	258	25,54	26
C_3	303	30,00	30
C_4	167	16,53	17
C_5	140	13,86	14
Totais	1000	100	100

Tabela 13 – Webster

O arredondamento presente é bastante difundido nas escolas e nas situações em geral. Apresenta certa razoabilidade em aplicações cotidianas e aproximações que não causem prejuízos a resultados mais sensíveis. O método de Webster é considerado bom pelos aspectos apresentados, porém foi desbancado pelo próximo subsequente.

5.3.5 Método de Huntington – Hill

Figura 11 - Huntington - Hill

Fonte: *<https://www.maa.org/about-maa/governance/maa-presidents/edward-vermilye-huntington-1918-maa-president>. Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

Fonte:*<https://www.census.gov/history/www/census_then_now/notable_alumni/joseph_adna_hill.html>. Acesso em: 23 de Julho de 2018.*

As fotos estão na ordem do nome do método que estamos prestes a expor. Edward Vermilye Huntington (1874 – 1952) foi um grande matemático dos Estados Unidos e professor da respeitada Universidade de Harvard. O outro a direita é Joseph Adna Hill (1860 – 1938) que era descendente de uma família da elite Inglesa. Estudou em Harvard e se tornou um dos maiores estatísticos de seu tempo, ocupando grandes posições públicas nos EUA.

Em 1911, Hill propôs o método em questão. Naquela época, era chefe dos censos populacionais americanos. Posteriormente, o método foi melhorado pelo matemático Huntington e, assim, recebendo o nome de ambos.

O método de quotas modificadas destes grandes estudiosos usa Média Geométrica (*MG*) das quotas mínima e máxima, ou seja, $MG = \sqrt{Q_{mi} \cdot Q_{ma}}$. Assim, definimos o método pelo seguinte procedimento:

- Calcular a quota modificada de cada candidato.
- Calcular MG das quotas mínima e máxima modificada Q_t para cada concorrente.
- Se a quota for inferior a MG, atribuir o valor de Q_{mi}. Caso contrário, majorar para

a Q_{ma}.

- Atribuir a cada concorrente a quota modificada pelo método.

Considera-se o mesmo exemplo dos métodos anteriores com quociente eleitoral igual a 10. Assim:

MÉTODO DE HUNTINGTON – HILL

Cidades	*Votantes*	Q_t	*MG*	Q_{mod}
C_1	132	13,20	13,49	13
C_2	258	25,80	25,50	26
C_3	303	30,30	30,50	30
C_4	167	16,70	16,49	17
C_5	140	14,00	14	14
Totais	1000	100	99,98	100

Tabela 14 - Huntington – Hill

Desde 1941 até os dias atuais, o método de Huntington – Hill é adotado pelo parlamento americano para a distribuição de seus lugares.

Notadamente, sabemos que a média geométrica harmoniza os pesos através de um intrínseco percentual. Assim, comparamos as vagas existentes e a quantidade dos votantes e não causamos grandes distúrbios numéricos, como vemos quando se usa a média aritmética, pois esta pode levar a grandes distâncias do ideal ao comparar grandezas diferentes e de pesos numéricos bem distantes. Em outras palavras, o uso da média geométrica é mais razoável nas distribuições que estamos estudando, pois normaliza os alcances numéricos das vagas e quantidade de votos por cidade. Certamente, visualiza-se o motivo de esse método fazer sucesso até hoje no exigente parlamento norte-americano.

Todos os métodos estudados necessitam levar a soma das quotas modificadas, seja por um critério menos rigoroso como o de Hamilton, ou por tentativa e erro dos demais, para o total de vagas disponíveis da forma mais digna e razoável que se conseguir. Percebe-se que sempre houve a preocupação de chegar aos resultados das distribuições da forma mais respeitosa e justa já que se trata de repartir a representatividade dos povos, de maneira a não se ter estados privilegiados em detrimento de outros, por qualquer motivo econômico, geográfico ou político que seja.

As divisões proporcionais encontram várias aplicações no cotidiano. Desse modo, o aprimoramento dos modelos, ou outros novos, podem levar a práticas de trabalhos e eleitorais mais saudáveis e justas para um grupo ou a sociedade em geral.

CAPÍTULO 6

SISTEMA ELEITORAL BRASILEIRO

O sistema eleitoral do Brasil é baseado em alguns modelos vistos nos capítulos anteriores, obviamente, com algumas peculiaridades.

As urnas eletrônicas passaram a ser usadas em 1996, nas eleições municipais daquele ano, e a adesão passou a ser constante. Hoje é de 100% nos locais de votação e o Brasil é o único país do mundo que não usa mais a cédula física de papel. Há muitos que recriminam seu uso e, de fato, sabe-se que algo eletrônico pode ser muito mais facilmente controlado que um bilhete de voto, depositado em caixa lacrada. Muitos países desenvolvidos ainda utilizam o velho método de votar, mas o nosso objetivo aqui não é chegar a melhor maneira, e sim, levantar os questionamentos.

O TSE – Tribunal Superior Eleitoral – é o responsável pelas eleições, seu processo, organização, apuração e punição de crimes que venham a acontecer no ínterim de um trabalho de escolha no nosso país ou até em outros períodos fora das eleições.

6.1 ELEIÇÕES MAJORITÁRIAS

Sistema usado para escolher os prefeitos, governadores, senadores[10] e presidentes, tem como princípio escolher o candidato que obtiver a maioria absoluta dos votos válidos em primeiro turno e, não alcançado tal feito, organizar um segundo em até 20 dias, vencendo quem conseguir o maior número de votos, daqueles que saíram de suas casas e votaram em um dos dois.

Importante salientar que só há eleições majoritárias para governador e prefeito em estados e cidades com mais de 200 000 habitantes, segundo a legislação. Claro que, no Brasil, não acontecem distúrbios na eleição de governadores já que Roraima, que tem a menor população do país, possui mais que o dobro do mínimo exigido legalmente.

[10] Não há 2º turno para senadores que são eleitos com maioria relativa, ou seja, quem for mais o votado, em relação aos demais concorrentes, ganha a disputa.

Usando as condições iniciais de Borda, vimos que o segundo turno nas eleições brasileiras poderiam ser evitados, deixando um gasto enorme de dinheiro e tempo. O deslocamento de voluntários convocados, de servidores, materiais, veículos e energia elétrica são exemplos de custos que um segundo turno impõe e poderiam não ocorrer.

6.2 ELEIÇÕES PROPORCIONAIS

O sistema proporcional é preconizado pela CF[11] nas eleições para vereadores, deputados estaduais e federais. Consiste em eleger candidatos mais bem colocados de uma coligação[12] que disputam às vagas de seu estado. Os partidos pequenos, necessariamente, precisam da união com outros mais importantes. Do contrário, não teriam a mínima condição de disputa, pois precisam atingir as quotas que verificamos nos capítulos anteriores. Não atingindo, o mesmo não participa no pleito e as vagas são distribuídas somente pelos que atingiram esta razão.

Apesar das vagas serem distribuídas pelos estados, tem-se aqui uma subdivisão por partidos. Portanto, o eleitor vota no candidato, mas o vencedor é dado por uma lista de cada partido com a ordem decrescente dos votos dos seus candidatos. É dessa forma que nos surpreendemos com aquelas conversas familiares do tipo: Por que aquele ganhou a eleição se conseguiu poucos votos? Por que tal partido que tem um famoso para disputa proporcional levou tantos deputados à vitória? A melhor resposta é: os candidatos com elevado número de votos levam outros menos votados e as coligações influenciam em suas quotas. Sabemos que, no Brasil, as eleições ainda não são tão levadas a sério por uma parcela considerável da população que não vê a solução dos seus problemas na política e espera-se que, brevemente, as coisas melhorem nestes aspectos no Brasil.

O quociente eleitoral é utilizado no país e o cálculo das proporções e sobras, estudadas anteriormente, assemelha-se ao método europeu de D'Hondt, com uma diferença chamada cláusula de barreira, condição constitucional de que um partido precisa de uma quantidade

[11] Constituição Federal De 1988.

[12] União de partidos diversos durante uma eleição, formando alianças para alcançar a vitória, aumentando o número de vagas disponíveis para si.

mínima de votos para se poder aplicar todo o processo proporcional. Não atingindo essa quantia mínima, o mesmo sai da disputa, como já foi dito.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Escolher normalmente não é uma coisa fácil, ainda mais quando temos o compromisso de tomar uma decisão que influenciará não apenas a nossa vida, mas de todo um coletivo que dependerá desta escolha. Mesmo que seja feita de forma correta ou desejável, o objetivo maior deve ser questionar todos os pontos que o representante, ou a escolha, de um modo geral, trará de positivo e negativo a todos os inseridos no processo. A preocupação maior do nosso estudo foi induzir os leitores em uma viagem de algo pouco explorado no Brasil e tão importante nos dias de hoje que é a análise do processo, bem como do voto em si. Trazer a tona tal discussão deste trabalho deixa claro que é muito importante tocar em pontos tão atuais e necessários na vida dos brasileiros, assim como de toda a humanidade que precisa de representantes sérios e de processos equânimes, como já citamos em outros momentos.

Não há dúvida de que há muito que avançar. Tanto no que concerne aos métodos aplicados, como no processo e na organização das escolhas de um modo geral. Particularmente, a aplicação dos métodos de divisão proporcional, no dia a dia, tem seus peculiares problemas e é bastante difundida e importante para diversas profissões e setores, mas precisa ser melhorada. Anomalias que acabam por não dar justiça a alguns dos eleitores e, normalmente, trabalhadores de um modo geral.

A história de todo o processo de escolhas coletivas nos mostrou que os problemas observados nos deixam com algumas interrogações: Qual processo é melhor? Qual devemos aplicar em determinada situação? Será que os Sistemas Majoritários e Proporcionais do Brasil estão entre os melhores atualmente? Quais serão os próximos passos?

O que podemos responder, após a análise feita, é que há bastante o que melhorar, quanto aos processos, e muito do que falta é conhecido, mas a vontade política é pequena por vários motivos que já conhecemos bem. Mesmo com isto, a Matemática e as Ciências Sociais continuam unidas para aperfeiçoar nossas vidas e relações cotidianas em comunidade, esperando a boa vontade e discernimento dos ditos líderes.

A matemática usada durante o trabalho traz a beleza de sua aplicabilidade em mais um tipo de conhecimento humano: O Social. Uma parte robusta de Geometria e Álgebra Linear foi poupada, na presente dissertação, dos trabalhos do Prof. Dr. Saari, mas que fugia ao escopo do que gostaríamos de explorar. Deixamos a cargo do leitor, buscar lembranças de uma matemática relativamente básica para enxergar os passos dados nas demonstrações e aplicações que compuseram maior parte desta obra que buscou uma linguagem acessível a toda a comunidade das Ciências Exatas e Humanas.

Este trabalho nasce de uma demanda profissional e substitui a ideia inicial que era estudar a álgebra nos Fractais. Um projeto do TRE – Tribunal Regional Eleitoral – do Ceará, chamado "Eleitor do Futuro", motivou boa parte da análise. Na leitura de materiais parecidos, foi observado os gargalos e desafios do projeto para a área de Matemática. Assim, esta dissertação tem como um de seus objetivos se tornar um livro que envolve voto e Educação Matemática aplicada às eleições. Sua utilização nas escolas, de modo geral, pode levar os jovens ao correto uso do direito de votar, ao entendimento de sua importância e ao conhecimento científico que está em volta de todo o sufrágio.

Finalmente, concluímos que o voto é imprescindível às sociedades humanas e às organizações. Mesmo assim, os processos utilizados atualmente estão muito aquém do que deveriam. Há muitos gargalos nos métodos conhecidos e temos, agora, uma ideia da vastidão de informações que são necessárias para tornar os processos de escolhas justos de fato; ou injustos minimamente. As Ciências Sociais caminham lado a lado com a Matemática e temos, neste trabalho, um importante uso que implica diretamente na vida das pessoas há muito tempo e prova que qualquer antagonismo entre estas áreas é puro processo didático que deve ser superado, pois o conhecimento deve sempre se somar e se sobrepor, de forma que todo tema seja transversal e planificado a outros.

REFERÊNCIAS

CAMARA DOS DEPUTADOS. **Conheça a História do Voto**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/camaranoticias/noticias/POLITICA/93439-CONHECA-A-HISTORIA-DO-VOTO-NO-BRASIL.html> Acesso em 13 Jun. 2018.

CEBOLA, Ana Isabel et al. **Teoria da Partilha Equilibrada**. Coimbra, 2003. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2004/Teoria%20da%20Partilha%20Equilibrada.pdf> Acesso em 03 Jul. 2018.

CONDORCET, J. M. **Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix**. Paris, 1785. Disponível em: <http://www.ecn.ulaval.ca/~pgon/hpe/documents/adamsmith/Condorcet%20Probabilites.pdf> Acesso em 25 Mai. 2018.

FERNANDES, S. et al. **Representação Proporcional:** Método dos divisores. Universidade do Algarve, Portugal, 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/291833395_Representacao_proporcional_-_metodos_dos_divisores>. Acesso em: 12 Jul. 2018.

INSTITUT DE FRANCE. **History of the French Académie des sciences**. Paris, 2018. Disponível em: <http://www.academie-sciences.fr/en/Histoire-de-l-Academie-des-sciences/history-of-the-french-academie-des-sciences.html> Acesso em 02 Jun. 2018.

PINTO, Joaquim António da Piedade. **Teoria Matemática das Eleições**. 2006. Tese (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Porto, Porto, 2006. Disponível em: <https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:UVoluQxlHFMJ:https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/64099/1/90439_Tese-167_TM_01_C.pdf+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br> Acesso em 25 Mai. 2018.

SAARI, D.G et al. Mathematics and Voting. **Notices of the American Mathematical Society**, San Diego, 2008. Disponível em: <http://www.mathaware.org/mam/08/notices2.pdf> Acesso em 25 Mai. 2018.

STEFFENON, R.R.; JABUINSKI, A.C. **A Matemática da Escolha Social:** Eleições Majoritárias e Divisões Proporcionais. II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004, Salvador. **Anais...** Salvador: UFBA, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M48.pdf> Acesso em 25 Mai. 2018.

TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL. **O Tribunal da Democracia**. Brasília, 2018. Disponível em:<http://www.tse.jus.br/eleicoes/estatisticas/eleicoes/eleicoes-anteriores/estatisticas-eleitorais-2016/resultados> Acesso em 24 Jun. 2018.

WIKIPÉDIA . **Donald Gene Saari**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Donald_G._Saari&oldid=846979356>. Acesso em 25 Jul. 2018.

WIKIPÉDIA. **Academia de Ciências da França**. Florida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Acad%C3%A9mie_des_sciences_(France)#Notes_et_r%C3%A9f%C3%A9rences>. Acesso em: 02 Jun. 2018.

WIKIPÉDIA. **Alexander Hamilton**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Alexander_Hamilton&oldid=51197530>. Acesso em 03 Jul. 2018.

WIKIPÉDIA. **Daniel Webster**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Daniel_Webster&oldid=49611482>. Acesso em 23 Jul. 2018.

WIKIPÉDIA. **Edward Vermilye Huntington**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Edward_Vermilye_Huntington&oldid=51094996>. Acesso em 23 Jul. 2018.

WIKIPÉDIA. **Joseph Adna Hill**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Edward_Vermilye_Huntington&oldid=51094996>. Acesso em 23 Jul. 2018.

WIKIPÉDIA. **Plínio, O Jovem**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Pl%C3%ADnio,_o_Jovem&oldid=51891794>. Acesso em: 24 Abr. 2018.

WIKIPÉDIA. **Sistema Eleitoral do Brasil**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_eleitoral_do_Brasil&oldid=52555363>. Acesso em 24 Jul. 2018.

WIKIPÉDIA. **Thomas Jefferson**. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Thomas_Jefferson&oldid=52003250>. Acesso em: 3 Jul. 2018.