UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ LAÉCIO PIMENTEL

UM OLHAR SOBRE TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

MOSSORÓ-RN
2018

JOSÉ LAÉCIO PIMENTEL

UM OLHAR SOBRE TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Campus Mossóro, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia.

MOSSORÓ-RN

2018

P474o Pimentel, José Laécio
Um olhar sobre técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica / José Laécio Pimentel. - 2018.
55 f. : il.

Orientador: Antônio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2018.

1. Técnicas de demonstração matemática. 2. Aprendizagem. 3. Educação Básica. 4. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. I. Garcia, Antônio Ronaldo Gomes, orient. II. Título.

JOSÉ LAÉCIO PIMENTEL

UM OLHAR SOBRE TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 31 / 08 / 2018

BANCA EXAMINADORA

____

Dr. ANTONIO RONALDO GOMES GARCIA- UFERSA

Presidente

____

Dr. ODACIR ALMEIDA NEVES- UFERSA

Membro interno

Mauricio Zuluaga M.

____

Dr. MAURÍCIO ZULUAGA MARTINEZ (UFERSA CAMPUS CARAÚBAS)

Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2018.

Ao meu filho, Lucas do Vale Pimentel, e à minha esposa, Denise Batista Pimentel, razão dos meus esforços diários, sempre em meus pensamentos, amores da minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, pela iluminação nos momentos difíceis.

Aos meus amados e inspiradores pais, Iracema Pimentel de Oliveira e Oscar Pimentel, pelo exemplo de vida, caráter e amor incondicional.

Ao meu estimado filho, Lucas Pimentel, por me tornar pai e ser uma pessoa melhor ao experimentar um amor incondicional.

À minha amada esposa, Denise Batista Pimentel, por suas palavras de incentivo, pelo carinho e, sempre que necessário, por renunciar em prol dessa conquista.

Aos professores das escolas visitadas que contribuíram imensamente com a conclusão dessa pesquisa.

Aos professores, coordenadores, colegas e amigos de mestrado que foram peças essenciais na minha formação.

Ao meu orientador, professor, Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia, pela atenção e profissionalismo na condução desta dissertação.

“*Se quiser buscar realmente a verdade, é preciso que, pelo menos, uma vez em sua vida você duvide, ao máximo que puder, de todas as coisas.*”
René Descartes

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo geral lançar um olhar sobre técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica. Este trabalho se iniciou a partir de uma pesquisa bibliográfica, e teve seu estudo embasado em autores como Fiorentini (1994), D'Ambrosio (2007), Fossa (2009), Pinedo (2011), Hausen (2013) e Caputi e Miranda (2017). Realizou-se uma pesquisa, com abordagem qualitativa, na qual os dados foram levantados a partir de cinco perguntas de uma entrevista aplicada a dez professores de matemática de oito escolas da rede pública de ensino do estado do Ceará, com ênfase na Educação Básica. Dada à relevância e abrangência do tema, considera-se que há muito o que ser abordado a este respeito. Afinal, demonstrar uma proposição em matemática requer experiência, pois existem regras e técnicas que são fundamentais nesta tarefa. Este também é um meio eficaz para promover aprendizagens na Educação Básica. Comprovou-se, portanto, que este é um conteúdo razoavelmente utilizado nas aulas dessa etapa educacional. Os dados revelaram que os professores se mostram conscientes que as técnicas de demonstração matemática poderiam contribuir de forma mais produtiva e significativa se fossem mais utilizadas em diferentes turmas e níveis de ensino. Pensar que o tema em estudo é de nível superior e muito avançado para a ensino básico, é um equívoco. Observou-se, ao longo da pesquisa, que os professores estão em sintonia quanto à relevância de se incluir e/ou utilizar alguma técnica de demonstração matemática na Educação Básica. Dessa forma, eles também disseram que a utilizam quando se faz pertinente, porém não a fazem com mais frequência por observar que seus alunos apresentam limitações de compreensão em relação a alguns conhecimentos matemáticos básicos. Conclui-se que os professores e o currículo escolar precisam e devem fazer uso das técnicas de demonstração matemática para tornar o ensino-aprendizagem mais eficaz ao produzir conhecimento, ao estimular a mente dos alunos, utilizando os conteúdos e as diferentes metodologias de aprendizagem de forma produtiva, significativa e eficiente.

Palavras-chave: Técnicas de demonstração matemática. Aprendizagem. Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

ABSTRACT

The present dissertation had the general objective to take a look at mathematical demonstration techniques in the classroom in Basic Education. This work began with a bibliographical research and was based on authors such as Fiorentini (1994), D'Ambrosio (2007), Fossa (2009), Pinedo (2011), Hausen (2013) and Caputi and Miranda 2017). A qualitative research was carried out, in which the data were collected from five questions of an interview applied to ten mathematics teachers from eight public schools in the state of Ceará, with an emphasis on Basic Education. Given the relevance and scope of the topic, it is considered that there is much to be addressed in this regard. After all, demonstrating a proposition in mathematics requires experience, for there are rules and techniques that are fundamental in this task. This is also an effective way to promote learning in Basic Education. It has been proven, therefore, that this content is reasonably used in classes at this educational stage. The data revealed that teachers are aware that mathematical demonstration techniques could contribute in a more productive and meaningful way if they were used more widely in different classes and levels of education. To think that the subject under study is a high school and very advanced for basic education, is a misconception. It was observed throughout the research that teachers are in tune with the relevance of including and/or using some technique of mathematical demonstration in Basic Education. Thus, they also said that they use it when it is relevant, but they do not do it more often because they observe that their students present limitations of understanding in relation to some basic mathematical knowledge. It is concluded that teachers and the school curriculum need and should make use of mathematical demonstration techniques to make teaching and learning more effective in producing knowledge by stimulating the students' minds, using the contents and different learning methodologies. productive, meaningful and efficient.

Keywords: Mathematical demonstration techniques. Learning. Basic education. National Curricular Parameters of High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CEB	Câmara de Educação Básica
CNE	Conselho Nacional de Educação
EEEP	Escola Estadual de Educação Profissional
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
PA	Progressão Aritmética
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
SEDUC	Secretaria de Educação do Estado do Ceará
TCLE	Termo de Consentimento de Livre e Esclarecido
UNESCO	Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura

LISTA DE SÍMBOLOS

$\neq$	Diferente
$\subset$	Está contido
$\exists$	Existe
$=$	Igualdade
$\rightarrow$	Implica; acarreta
$\cap$	Interseção
$\geq$	Maior ou igual
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual
$<$	Menor que
$\sim$ ou $\neg$	Negação lógica
$\wedge$	Conjunção lógica “e”
$\vee$	Disjunção lógica “ou”
$\forall$	Para todo; qualquer que seja
$\vdash$	Prova (implica; produz)
$/$	Tal que

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A utilização das técnicas de demonstrações matemáticas em sala de aula é algo que desperta interesse por acreditar ser uma forma de ampliar os conhecimentos matemáticos dos alunos e aguçar a mente com uma forma de aprendizagem mais significativa.

O fazer pedagógico e as novas metodologias são estratégias que facilitam o processo de ensino-aprendizagem na da Educação Básica, principalmente, pelo quadro atual de baixo desempenho dos alunos em provas de larga escala. Logo, esta é uma preocupação de muitos professores que lecionam a disciplina de Matemática, devido à necessidade intrínseca da utilização de algumas técnicas de demonstração ao longo do processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos dessa etapa da Educação Básica.

Assim, corroborando com essa reflexão, Fossa (2009, p. 47) observa que:

> O nosso propósito em estudar essas técnicas, portanto, é facilitar a leitura de textos matemáticos, especialmente na análise e compreensão das demonstrações encontradas, bem como proporcionar ao aluno alguns recursos para demonstrar os teoremas que os textos deixam ao seu encargo. […] O primeiro motivo é que algumas proposições que parecem intuitivamente óbvias são de fato falsas necessitando de demonstração.

As demonstrações, na maioria dos textos matemáticos, são apresentadas por via do formalismo da lógica. Logo, fazem-se necessárias técnicas de demonstração a serem feitas, usando inclusive uma análise não-formal, emprega-se também exemplos não-matemáticos para dirimir dúvidas e torná-las mais compreensíveis. É pertinente compreender que "[…] o mero domínio das técnicas de demonstração a serem estudadas no que se segue não é garantia de que o aluno se tornará um 'fera' em demonstrações" (FOSSA, 2009, p. 49).

Afinal, "demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo" (FOSSA, 2009, p. 48), pois exige conhecimentos e diversas habilidades. Sabe-se, portanto, que as várias técnicas e estratégias de demonstração matemática são instrumentos relevantes que podem provar resultados (lema, proposição, teorema e/ou corolário) matemáticos e, por isso, vale a pena dominá-los.

A presente dissertação teve por objetivo geral lançar um olhar sobre técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica. Dentro dessa perspectiva, tem-se como objetivos específicos: Identificar os desafios do professor atual em matemática sobre o ensino e as demandas da modernidade quanto aos conhecimentos matemáticos, elencando a legislação específica; Organizar os parâmetros do conhecimento matemático (definições, axiomas, teorema e demonstração) e fundamentar teoricamente demonstração matemática, descrevendo e classificando-as; Elencar os métodos de demonstração matemática e as proposições usuais como: condicional; verdade e validade; redução ao absurdo; proposições gerais; indução matemática; e técnicas avulsas; Conhecer as práticas recorrentes de uso das técnicas de demonstração matemática; Refletir sobre o uso das técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica.

Diante das exigências atuais da educação matemática, tem-se como base os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), estes indicam alternativas que sugerem uma correlação entre a teoria e a prática por meio de temas transversais, sugerindo novos significados, outra abordagem de velhos assuntos. Assim, inovar é tratar de questões relacionadas a diversos temas e buscar diferentes formas de atingir seu objetivo maior, promover conhecimento para que o aluno consiga prosseguir os estudos, tendo habilidades de compreender a funcionalidade dos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio para suas escolhas profissionais (BRASIL, 2000).

Diante dessa constatação, a busca atual do professor é inovar o ensino-aprendizagem da matemática, frente as dificuldades encontradas por muitos alunos, este deve a partir de uma reflexão sobre o saber fazer o cotidiano escolar, escolher a melhor metodologia que deve ser usada para cada situação e cada realidade na qual está inserido.

A organização dos conhecimentos escolares permite introduzir um novo fazer pedagógico do professor, na qual o processo de reflexão e interpretação sobre diferentes procedimentos permitam estabelecer uma relação entre a teoria e o cotidiano, deixando o processo de ensino-aprendizagem menos enfadonho, criativo e mais produtivo.

Pires (2000, p. 23) explica que a organização do currículo escolar tradicional, composto por disciplinas que “se justapõem sem, no entanto, sofrerem algum tipo de penetração mútua, é uma das razões para uma formação fragmentada, baseada na dissociação e no esfacelamento do saber”. Assim, durante muitas décadas o estudo da matemática passou por muitas reflexões para que esta não seja mais vista na escola de forma descontextualizada, fragmentada e distante do cotidiano do aluno. Muitos conteúdos podem ser demonstrados, afinal, o uso da lógica e técnicas facilitam seu ensino.

A metodologia utilizada para fundamentar esta dissertação foi uma revisão bibliográfica de abordagem qualitativa com o intuito de esclarecer e aprofundar questões importantes para serem analisadas a respeito de um dado estudo que neste caso é “demonstração matemática”. A principal vantagem da pesquisa bibliográfica “reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente” (GIL, 2002, p. 23).

> A pesquisa qualitativa trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2007, p. 14).

Foi realizado uma pesquisa com professores de oito escolas públicas do estado do Ceará, sendo que apenas dez voluntários responderam a cinco questões sobre o uso de alguma técnica de demonstração matemática em suas salas de aula na Educação Básica.

Vale salientar que se optou por pesquisar sobre técnicas de demonstração matemática, pois é um tema pertinente à realidade de quem lida com turmas da Educação Básica e necessita de suporte prático para as diversas nuances do processo de ensino da matemática, observando inclusive alguns fatores que podem tornar a natureza da aprendizagem mais satisfatória e produtiva; principalmente, conteúdos que exigem observação e reflexão.

Os fundamentos teóricos que nortearam este estudo foram baseados em trabalhos relevantes em educação matemática, técnicas e/ou métodos de demonstração, como os autores Fiorentini (1994), D’Ambrosio (2007), Fossa (2009), Pinedo (2011), Hausen (2013) e Caputi e Miranda (2017).

Para concretizar esta dissertação, organizou-se o trabalho em cinco capítulos, a saber: No primeiro capítulo desta dissertação, encontra-se a introdução, em que se descreve a natureza do trabalho, seus objetivos, justificativa e metodologia utilizada. No segundo capítulo, buscou-se refletir sobre o professor frente aos desafios do ensino-aprendizagem na atualidade, os encaminhamentos dos PCNEM sobre a matemática e da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, também conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN). O terceiro capítulo foi destinado às reflexões sobre o referencial teórico que discorre acerca dos parâmetros do conhecimento matemático, demonstrações matemáticas, definições, técnicas, usos e importância para o processo de ensino-aprendizagem de diversos conteúdos, havendo inclusive uma breve discussão sobre alguns livros didáticos do Ensino Médio. O quarto capítulo foi dedicado à descrição da metodologia da pesquisa, o local e seus sujeitos, bem como a análise dos dados coletados sobre o uso das técnicas de demonstração matemática. Em seguida, finalizou-se esta dissertação com as considerações finais, na qual se procurou resgatar as principais conclusões sobre a pesquisa.

2 O PROFESSOR ATUAL, ENSINO DA MATEMÁTICA E O PCNEM

2.1 DESAFIOS DO PROFESSOR ATUAL E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A necessidade atual para educação é promover aprendizagens significativas, principalmente, na educação matemática. O educador precisa de meios que de fato promovam um ensino eficiente e produtivo. Frente à realidade das escolas atuais, seu público-alvo e os fins educacionais há muito que se melhorar quanto ao ensino da matemática, pois as questões de ensino-aprendizagem não perpassam unicamente pelo método ou pelo professor.

Sabe-se, contudo, que quando se pensa em aprendizagens e estas envolvem índices, o professor é sempre o primeiro a ser lembrado e/ou responsabilizado. Todos os conhecimentos são construções resultantes das ações humanas ao longo de um período histórico, sendo social, biológico, filosófico ou matemático (BRASIL, 1998).

Diante dessa perspectiva, a matemática como conhecimento humano deve priorizar a construção do conceito por meio da experimentação ativa dos sujeitos que a utilizam, tendo em vista a compreensão da sua utilidade prática, seja em situações pessoais, educacionais ou profissionais (D’AMBROSIO, 2007).

A modernidade, segundo D’Ambrosio (2012), exige a “[...] participação ativa de todos os interessados na tomada de decisões. Na prática docente isso se manifesta na elaboração do aprendizado”. Assim, as leis vigentes no País para a educação promovem a escola e ao educador autonomia para a quebra de paradigmas, instigam mudanças de sua realidade educacional. Atualmente, é notório em vários exames, entre os quais se inclui o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), um alto índice de notas baixas em matemática. Não se pode negar, portanto, que essa problemática têm sua origem dentro e fora do ambiente escolar.

Dentro do ambiente escolar há outros obstáculos que também ultrapassam o espaço educacional, como questões sociais, culturais etc. Daí, nota-se que os obstáculos são vários e presentes em diferentes instâncias sociais. Logo, faz-se necessário que se iniciem as mudanças no âmbito da formação e do compromisso dos alunos, pais e escola.

Todos em prol do sucesso escolar dos alunos, vislumbrando saídas para sua efetiva aprendizagem (FIORENTINI, 1994). Nem todos os professores atuantes em salas de aula têm uma formação universitária sólida que os preparasse para uma nova forma de conceber a construção do conhecimento (BRITTO, 2010), o que se configura como um entrave para a ampliação do conhecimento de muitos.

> O professor que acredita que aluno aprende Matemática através da memorização de fatos, regras e princípios transmitidos pelo professor ou pela repetição exaustiva de exercícios, também terá uma prática diferenciada daquele que entende que o aluno aprende construindo conceitos a partir de ações reflexivas sobre materiais e exercícios ou a partir de situações-problema e problematizações e saber matemático. (FIORENTINI, 1994, p. 34).

A observação de Fiorentini (1994) relembra os pilares educacionais preconizados pela Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura (UNESCO), um dos principais “aprender a aprender e o aprender a conhecer”. Dentro desse contexto, percebe-se, portanto, a importância da formação continuada do professor para instigar-lhe a consciência crítica de que concepções teóricas devem estar respaldadas na prática escolar, a busca de um ensino que ultrapasse a teoria dos livros com a interdisciplinaridade, aplicabilidade prática e funcionalidade da matemática na vida das pessoas, tornam-se o norte inicial que levaria a mudar esse quadro atual.

Com relação à viabilidade da concretização do projeto da educação matemática, Garnica (2008, p. 173) reflete sobre a necessidade e a capacidade “da massa de composição relativamente disforme”, cujos educadores matemáticos devem apoiar “um projeto político-epistemológico com que possa intervir diretamente e de forma organizada junto aos mecanismos de poder ligados ao ensino e à aprendizagem de matemática”.

A implantação de um projeto interdisciplinar de educação matemática tem o intuito de mostrar que essa ciência é construída pelas pessoas na tentativa de resolução de problemas, e está relacionada com outras temáticas. Dessa forma, segundo Seibert e Groenwald (2003, p. 2), deve-se:

> [...] vincular a Matemática às demais áreas de conhecimento, criar um ambiente favorável para reflexão sobre diferentes temas transversais, elaborar um projeto interdisciplinar que aborde assuntos do interesse dos educandos, que mude a rotina da sala de aula, trazendo motivação e contextualização para a abordagem de diferentes conteúdos matemáticos.

Os projetos de trabalho possibilita alterar a rotina da sala de aula, proporcionado mais espaço para pesquisa, expressão de opiniões, diálogo, troca de ideias e socialização dos envolvidos. Dessa forma, a sala de aula se torna um ambiente de crescimento pessoal, de incentivo à descoberta, da busca da autonomia, do desenvolvimento da ética, tendo o professor como modelo de integridade (FAZENDA, 2001).

De acordo com Seibert e Groenwald (2003, p. 2), “é possível estabelecer relações entre o estudo da matemática e diferentes temas, permitindo com que se compreenda melhor os elos existentes entre as diferentes áreas de conhecimento". Sempre tendo em vista que o aluno veja que a matemática é um conhecimento importante e que deve ser valorizada como tal. É pertinente, porém, ressaltar a relevância do estudo dos conhecimentos matemáticos e sua importância desde a Educação Infantil e Ensino Fundamental I, o que se observa nas escolas é, de certa forma, uma desvalorização da matemática em detrimento do letramento. Isso é algo que pode explicar a dificuldade de se aprender matemática, nos anos que se seguem após o privilégio do letramento, 4º e 5º anos em diante. Assim, faz necessário também que se repense o ensinar princípios matemáticos de forma mais enfática desde a Educação Infantil. Portanto a relevância de projetos na área desde a mais tenra idade escolar.

Para Hernandéz e Ventura (1998), os projetos permitem uma mudança na organização dos conhecimentos escolares, posto que, em sala de aula, é possível trabalhar qualquer tema que se estabelece como problema.

> Nos projetos, a ênfase na relação entre ensino e aprendizagem é, sobretudo, de caráter procedimental e gira em torno do tratamento da informação. Os alunos passam a compartilhar com o professor a responsabilidade da organização das atividades. O papel do educador é daquele que guia, que media, que está ao lado do educando, que é capaz de buscar, permanentemente, a solução de novos problemas, aquele que crê em mudanças e não teme expor seu conhecimento. (SEIBERT; GROENWALD, 2003, p. 3).

O professor, portanto, precisa ser o condutor do processo, devendo saber esperar e reconhecer no aluno aquilo que nem o próprio aluno tenha percebido (FAZENDA, 2001). Os projetos podem proporcionar debates em sala de aula sobre temas de enfoque social, chamados de temas transversais, permitindo que a escola cumpra seu papel social, bem como prepara o aluno para atuar como cidadão modificador de sua realidade (SEIBERT; GROENWALD, 2003).

Os preceitos acima sobre o perfil do educador são ampliadas pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC) que prevê para o Ensino Médio algumas propostas específicas dispostas no art. 10 da Resolução da Câmara de Educação Básica (CEB) nº 3, de 26 de junho de 1998, do Conselho Nacional de Educação (CNE):

> Art. 10 A base nacional comum dos currículos do Ensino Médio será organizada em áreas de conhecimento, a saber: [...].
> II - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, objetivando a constituição de habilidades e competências que permitam ao educando:
> a) Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolvem por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.
> [...].

> d) Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades.
> e) Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações.
> f) Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos sócio-econômicos, científicos ou cotidianos.
> g) Apropriar-se dos conhecimentos da física, da química e da biologia e aplicar esses conhecimentos para explicar o funcionamento do mundo natural, planejar, executar e avaliar ações de intervenção na realidade natural.
> h) Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.
> [...].
> m) Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas. (BRASIL, 1998).

Todos esses objetivos exigem um professor mais reflexivo e comprometido com uma educação de qualidade, além disso, faz-se necessário que o Estado cumpra sua parte quanto à formação continuada de professores. Elemento imprescindível para que as mudanças de paradigmas educacionais sejam compreendidas e implementadas a contento no Ensino Médio.

2.2 OS PCNEM E O ENSINO DA MATEMÁTICA

O ensino dos conhecimentos matemáticos exige que estratégias inovadoras sejam implementadas para que eles consigam ser melhor assimilados e vistos como importantes. Dentro dessa perspectiva, os PCNEM “sugerem alternativas que possibilitam relacionar a teoria à prática, por meio de temas transversais, trazendo assim novos significados a abordagem de velhos assuntos” (SEIBERT; GROENWALD, 2003, p. 1). Abordar questões relacionadas às diferentes áreas e relacioná-las à realidade de cada escola, todavia, é algo que ainda precisa ser aprimorado por muitos educadores. É preciso que haja um bom nível de comprometimento tanto do corpo docente, quanto do corpo discente da escola.

O fim dos temas transversais e projetos educacionais multidisciplinares deve se escolher uma temática ampla e rica para se desenvolver uma pesquisa, devendo no decorrer da mesma, incluir e mostrar a matemática e seus conhecimentos como necessário para a plena compreensão do assunto escolhido (BRITTO, 2010).

Os PCNEM seguem os preceitos básicos da Lei nº 9.394/96, em seu art. 4º, IX, que dispõe: “padrões mínimos de qualidade de ensino, definidos como a variedade e quantidade mínimas, por aluno, de insumos indispensáveis ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem” (BRASIL, 1996). Dessa forma, os conhecimentos devem ser repensados e modificados para atender às necessidades dos alunos e de sua realidade educacional.

Britto (2010, p. 24) explica que:

> [...] a Educação Matemática não é apenas um campo profissional, mas também uma área de conhecimento relacionada ao domínio do conteúdo e das ideias e processos envolvidos em sua transmissão/assimilação, bem como à apropriação/construção do saber matemático escolar. Enquanto área de conhecimento, a Educação Matemática apresenta uma excelente natureza interdisciplinar, uma vez que emprega contribuições de outras diversas áreas, tais como a Filosofia, a Educação, a Psicologia, a Sociologia e a História.

As técnicas de demonstração matemática, diante de seu caráter lógico, podem ser lançadas como mais um subsídio prático para exemplificar, contextualizar e tornar clara a origem e importância do raciocínio lógico-matemático para os alunos.

No próximo capítulo, observa-se o referencial relativo à demonstração matemática, conceitos, técnicas e definições relevantes para o processo de ensino-aprendizagem. E uma breve discussão sobre alguns livros didáticos utilizados no Ensino Médio (DANTE, 2011; SOUZA; GARCIA, 2016).

3 DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

As demonstrações, também identificadas como problemas de conclusão, mostram aos estudantes um novo conceito de trabalho matemático bastante distinto daquele estudado no Ensino Médio tradicional, em que se visa a aplicações diretas de fórmulas preestabelecidas e conceitos diretos, sem promover muitas reflexões sobre sua origem e funcionalidade, pois partiu de algo experienciado.

Nesta nova concepção de ensino, são inseridos conceitos desconhecidos em sua maioria, como axiomas, teoremas, definições, postulados, entre outros; bem como são incorporadas habilidades, tais como: conjeturar, realizar um contra-exemplo, induzir, deduzir, justificar e generalizar (PINEDO, 2011).

> O êxito que tiver um estudante em sua profissão é sim duvidas proporcional a seu aprendizado e ao desenvolvimento destas habilidades. Assim, justifica-se a importância de educar estudantes na forma de articular seus pensamentos para resolver um problema de conclusão conhecida, e uma forma de lográ-lo mediante uma compreensão adequada dos métodos da demonstração. (PINEDO, 2011, p. v).

Quando se inicia a realização de uma demonstração matemática, é necessário ter em mente as seguintes proposições (ABE, 2018):

- Definição: enunciado que descreve o significado de um termo;
- Proposição: uma sentença declarativa, na qual são válidos os princípios da identidade, da não contradição e do terceiro excluído;
- Argumento: sequência finita de $n+1$ proposições $H_1, H_2, \dots, H_n, T$, onde T se diz consequência das demais;
- Axioma: ponto de partida de raciocínio, proposição assumida como verdadeira e que não precisa de prova;
- Postulado: fato reconhecido e ponto de partida, implícito ou explícito, de uma argumentação; premissa, ou seja, uma afirmação admitida sem necessidade de demonstração;
- Prova: argumento válido que estabelece a verdade de sentenças matemáticas, ou seja, que uma afirmação é verdadeira;
- Teorema: proposição que é garantida por uma prova, ou seja, que se demonstra ser verdadeira baseada em outras proposições;

- Lemas: provas que ajudam a demonstrar afirmações mais importantes (teoremas), normalmente, configura-se como um teorema auxiliar já utilizado para provar outros teoremas;
- Corolário: teorema estabelecido diretamente de um teorema provado. Desse modo, quando um teorema ou uma prova ajudam a concluir facilmente que outras afirmações são verdadeiras, chama-se estas últimas de corolários do teorema;
- Conjectura: proposição que ainda não foi provada, nem refutada, ou seja, sentença sendo proposta como verdade, mas que precisa ser provada para virar teorema;
- Demonstração: prova de que um teorema é verdadeiro, obtido por regras lógicas e válidas.

Para explicar a importância de se estudar demonstração, Caputi e Miranda (2017, p. 21) afirmam que:

> [...] a matemática se estende muito além do pensamento racional-dedutivo e a intuição e a percepção inconsciente são chaves para a criatividade matemática, e a sede de descobrir novas verdades, de expandir o conhecimento é a motivação do esforço matemático [...].
> O principal motivo é que nossa intuição falha. E na história da matemática, diversos exemplos demonstraram e convenceram os matemáticos que só a intuição é insuficiente para compreender os fatos matemáticos.

Daí a necessidade de demonstrações a fim de tornar o conhecimento mais preciso quanto aos conhecimentos matemáticos.

A organização do conhecimento matemático adota os seguintes parâmetros: Definição e Axioma (ABE, 2018).

Hilbert (*apud* SANTOS, 2007, p. 73), em sua teoria da demonstração, propõe os seguintes axiomas:

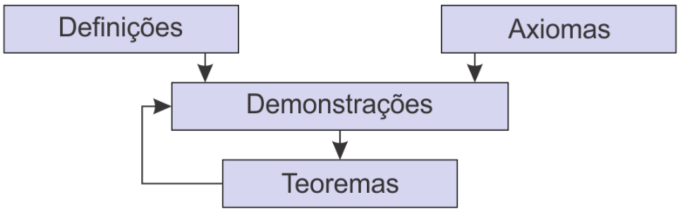
- Axioma da identidade: $\forall x, x = x$;
- Axioma da substituição: $\forall P(x = y \wedge P(x)) \rightarrow P(y)$;
- Indução de uma hipótese: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
- Omissão de uma hipótese: $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$;
- Permutação de hipóteses: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$;
- Eliminação de uma proposição: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$;
- Axioma da não contradição: $(\alpha \rightarrow \beta \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$;
- Axioma da dupla negação: $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.

Em adição aos axiomas supracitados, Hilbert (*apud* SANTOS, 2007, p. 73-74) valida as seguintes regras de inferência:

- $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$;
- $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$;
- $\alpha \vdash (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$;
- $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$;
- $\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \gamma \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma$.

Hausen (2013) esquematizou os parâmetros do conhecimento matemático da seguinte forma (Figura 1):

Figura 1 – Parâmetros do conhecimento matemático



Fonte: Hausen (2013, p. 6).

Como disciplina, a teoria da demonstração tem a função de estudar, formular, estruturar e sintetizar modelos gerais, podendo simular e representar diversos problemas para solucioná-los. Em geral, as demonstrações se apresentam como estruturas de dados indutivamente definidas, sendo esses dados desenvolvidos conforme os axiomas e regras de inferência dos sistemas lógicos (PINEDO, 2011).

Diante dessa constatação, a teoria da demonstração trata da sintaxe, que se refere ao estudo das regras que gerenciam a combinatória de regras menores e a formação de unidades maiores a estas. Já a teoria dos modelos de demonstração trata da semântica, que está relacionada aos "aspectos de significado, sentido ou interpretação do significado de um determinado elemento, símbolo, expressão ou representação formal" (PINEDO, 2011, p. v).

A teoria da demonstração é uma subdivisão da Lógica Matemática que encara as demonstrações como um objeto formal da matemática. Uma demonstração matemática pode, por exemplo, ser vista como uma estrutura de dados conhecida como estrutura de árvore. Diante de sua importância, consta-se que a teoria da demonstração serve como guia para matemáticos como uma base para orientar as diversas áreas da matemática.

Existem outras versões da teoria da demonstração com apenas cinco axiomas e uma regra de inferência, porém, não é intenção esgotar o assunto nem estendê-lo demasiadamente.

Contudo quando se estuda a teoria da demonstração de Hilbert, observa-se que ele omite o axioma referente à demonstração por indução (HAUSEN, 2013).

3.1 AS NOÇÕES DE DEMONSTRAÇÃO E TEOREMA EM UM SISTEMA AXIOMÁTICO

Os sistemas axiomáticos são utilizados na sistematização de determinada área do conhecimento, por exemplo nas ciências contemporâneas, na qual necessita de deduções e demonstrações, conforme explica Tassinari (2013, p. 11):

> Nessas teorias, as deduções e demonstrações sempre se apoiam em asserções anteriores e, então, devemos aceitar determinadas asserções como primeiras para não cairmos em um regresso infinito. Essas primeiras asserções, que aceitamos sem delas ter uma dedução, são chamadas, por definição, de axiomas.

Para se compreender a noção de dedução em um sistema axiomático, é necessário considerar a dedução exemplificada por Tassinari (2013, p. 11):

Exemplo 1:

Hipótese: O objeto considerado tem vida.

Axioma 1: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.

Conclusão parcial: O objeto considerado é um organismo.

Axioma 2: Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.

Conclusão: O objeto considerado é complexo.

De forma geral, tem-se que a dedução de uma asserção (conclusão da dedução), baseada em certas asserções (hipóteses da dedução), é, por definição, "uma sequência de sentenças, tal que cada sentença da sequência ou é uma hipótese ou é um axioma ou é inferida a partir das anteriores por regras de inferência" (TASSINARI, 2013, p. 11).

A regra de inferência aplicada no Exemplo 1 é chamada de *modus ponens* (em latim significa "a maneira que afirma afirmando"), e se X e Y são duas sentenças, ela tem a seguinte forma:

$$X$$

$$\text{Se } X, \text{ então } Y.$$

$$Y$$

Dessa forma, percebe-se que, na dedução exemplificada por Tassinari (2013), a regra de inferência foi aplicada à Hipótese e ao Axioma 1, que resultou na Conclusão parcial; e, em seguida, ao Axioma 2 e à Conclusão parcial, tendo como resultado a conclusão final.

Em um sistema axiomático, a demonstração de uma asserção é, por definição, “uma dedução, dessa mesma asserção, a partir apenas dos axiomas” (TASSINARI, 2013, p. 12).

Exemplo 2:

Axioma 1: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é um organismo.

Axioma 2: Se o objeto considerado é um organismo, então o objeto considerado é complexo.

Conclusão: Se o objeto considerado tem vida, então o objeto considerado é complexo.

A regra de inferência aplicada no Exemplo 2 é chamada de silogismo hipotético, e se X, Y e Z são duas sentenças, ela tem a seguinte forma:

Se X, então Y.

Se Y, então Z.

Logo, se X, então Z.

Para as asserções que são axiomas ou para as quais existe uma demonstração, são chamadas, por definição, de teoremas. No Exemplo 2, portanto, a conclusão é considerada um teorema, posto que existe uma demonstração explicando-a.

3.2 AS FUNÇÕES DA DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

As funções da demonstração em matemática, segundo Villiers (2001, p. 32), podem ser entendidas como um processo de:

> • verificação (dizendo respeito à verdade da afirmação)
> • explicação (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira)
> • sistematização (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas)
> • descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados)
> • comunicação (a transmissão do conhecimento matemático)
> • desafio intelectual (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

Hanna (2000, p. 8, tradução nossa) acrescentou a essa lista as seguintes funções:

> • construção de uma teoria empírica

> • exploração do significado de uma definição ou das consequências de uma suposição
> • incorporação de um fato conhecido em uma nova estrutura e, assim, visualizá-lo a partir de uma nova perspectiva.

Para Lakatos (1991), a demonstração é tida como essencial na formação dos teoremas. É fundamental, portanto, para se desenvolver e ensinar a lógica matemática, estimular a mente e tornar o ensino mais significativo aos alunos. Villiers (2001, p. 32), porém, afirma que "a demonstração não é um requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração".

Rodrigues (2008, p. 149) explica que:

> [...] se não estivessem previamente convencidos das suas conjecturas, os matemáticos procurariam um contra-exemplo e não se sentiriam motivados a levar tanto tempo a demonstrá-las. Os testes quase-empíricos tanto podem suportar uma conjectura como refutá-la.

A discussão do papel específico da demonstração na educação matemática implica que se tenha claro os objetivos da etapa que será ministrada. É necessário que exista uma dada linha curricular abrangente e organizada para a educação matemática.

Na seção seguinte, realiza-se a sistematização das técnicas de demonstração matemática e exemplos mais usuais no processo de ensino aprendizagem, conhecimentos essenciais para a compreensão da funcionalidade desse conteúdo.

3.3 AS TÉCNICAS DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Sabe-se que demonstrações matemáticas são argumentos obtidos com uma lógica válida partindo de ideias que são dadas como verdadeiras, que são comumente chamadas de premissas, para obter-se a afirmação que é proposta, ou seja, a conclusão. Faz-se até a obtenção da verdade da tese.

Caputi e Miranda (2017, p. 22) recordam algumas definições que são utilizadas nas técnicas de demonstração:

> - Um número inteiro não nulo a divide um número inteiro se existe um número inteiro k, tal que: $b = ak$. Se a divide b, b é dito múltiplo de a ou de modo equivalente a é dito divisor de b.
> - Um número inteiro a é dito par se 2 divide a, ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$.

- Um número inteiro b é dito ímpar se 2 não divide b, nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro k tal que $b = 2k + 1$.
- Um número real r é dito racional se existirem números inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $r = \frac{p}{q}$.
- Um número real r é dito irracional se não for racional, isto é, se não existirem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $r = \frac{p}{q}$.

Hausen (2003) classifica as diversas técnicas de demonstrações como:

- **Demonstração direta:** parte-se da hipótese, fazendo uso direto de propriedades e regras válidas até alcançar à tese.

  Exemplo 3:

  Demonstre que se n é ímpar, então n^2 também é ímpar.

  Hipótese: n é ímpar

  Tese: n^2 é ímpar

  Demonstração: Como n é ímpar, $n = 2k + 1$ para algum inteiro k. Assim,

  $$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\ell + 1$$

  Onde $\ell = 2k^2 + 2k$ é um inteiro. Portanto, n^2 também é ímpar.

- **Demonstração por contraposição:** baseada no fato de que uma proposição do tipo $p \rightarrow q$ é equivalente a sua contrapositiva não $q \rightarrow$ não p.

  Exemplo 4:

  Demonstre que se n^2 é par, então n também é par.

  Proposição: n^2 é par $\rightarrow$ n é par.

  Contrapositiva: n é ímpar $\rightarrow$ n^2 é ímpar.

  Demonstração: A contrapositiva é verdadeira, como demonstrado no Exemplo 3. A proposição original, portanto, também é verdadeira.

- **Demonstração por redução ao absurdo:** dada uma proposição p a ser provada, assume-se inicialmente a hipótese não p e é feito um raciocínio direto a partir desta hipótese até encontrar uma contradição.

  Exemplo 5:

  Demonstre que é $\sqrt{2}$ irracional.

  Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{2}$ é racional. Assim, seria possível encontrar números inteiros a e b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2}$ poderia ser representado como fração irredutível $\frac{a}{b}$. Assim, pode-se afirmar que:

$$2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$2b^2 = a^2$$

Tem-se, portanto, que a^2 é par e, pelo que foi demonstrado no Exemplo 4, a também é par. Como a é par, $a = 2k$ para algum inteiro k, e daí:

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$
$$b^2 = 2k^2$$

Logo, quer dizer que b também é par. Tal fato é uma contradição, posto que se a e b são pares, a fração irredutível $\frac{a}{b}$ poderia ser reduzida, um absurdo! Pode-se, assim, concluir que o número real $\sqrt{2}$ não pode ser racional, portanto é irracional.

Com relação aos métodos apresentados, Hausen (2003) afirma que é uma boa ideia tentar aplica-los nesta ordem. São também corriqueiras as demonstrações do tipo “número x é irracional” ou “não existe x tal que [...]” serem realizadas por redução ao absurdo.

Fossa (2009), em seu trabalho sobre técnicas de demonstração matemática, sistematizou as seguintes técnicas como as mais significativas:

- **Condicional:** quando condiciona um resultado a certas exigências.

  Exemplo 6:

  Proposição 1: Se x é par, x é divisível por 2.

  Proposição 2: x é divisível por 2 se x é par.

  Ou seja: Antecedente → Consequente.

- **Verdade e validade:** Um argumento é válido se, e somente, se seria impossível para sua conclusão ser falsa se todas as premissas fossem verdadeiras.

  Exemplo 7:

  Premissa 1: Se Matilda tomar o veneno, ela morrerá.

  Premissa 2: Se Ela de fato, tomou veneno.

  Conclusão: Portanto, morreu.

- **Redução ao absurdo:** uma premissa não pode ser considerada verdadeira se ela produz uma contradição (A e não-A), ou seja, trata-se de uma proposição que afirma algo e ao mesmo tempo nega a própria afirmação.

  Exemplo 8:

  Premissa 1: Matilda morreu.

  Premissa 2: Matilda não morreu.

- **Indução matemática:** É um argumento dedutivo, portanto, quando é demonstrada uma proposição usando a indução matemática, a conclusão é seguida das premissas com todo o rigor lógico. Por isso, a indução, segundo Fossa (2009), é a mais usada das técnicas de demonstração em toda a matemática, quando se tem eventos sobre os números naturais, o seu princípio básico é o mais simples. Para formular essa técnica, deve-se acompanhar a seguinte estrutura tripartida:

  Para todo x: $P(x)$, com x sendo um número natural,

  (I) Demonstrar $P(1)$.

  (II) Supor $P(n)$.

  (III) Demonstrar $P(n+1)$.

  Exemplo 9:

  Suponha que várias pedras de dominó em pé formam uma fila em que cada pedra é separada da seguinte por uma distância. Para queda de todas as pedras, é preciso empurrar a primeira pedra, esta derrubará a segunda que, por sua vez, derrubará a terceira, e assim por diante até o fim da fila. O resultado final é a queda de todas as pedras de dominó que foram colocadas em fila.

Agora, Fossa (2009) aponta outras técnicas que podem ser úteis na demonstração matemática:

- **Demonstração por casos:** situação em que todos os casos possíveis conduzem ao mesmo resultado, sendo necessário serem esgotadas todas as possibilidades, que pode ser feita por meio de definições ou axiomas.

  Exemplo 10:

  Mostrar que não existe um número inteiro que satisfaz a equação a seguir:

  $$x^7 + x^5 = 32265830021739426673821119136135258 37$$

  Demonstração:

  x é par ou ímpar.

  Se x é par, então $x^7 + x^5$ é par.

  Se x é ímpar, então $x^7 + x^5$ ainda é par.

  Assim, em todos os casos possíveis, $x^7 + x^5$ é par.

  Mas um número par não pode ser igual a um número ímpar. A equação, Portanto, não é satisfeita por qualquer número inteiro.

- **Trabalhando para trás:** situação em que se inverter a ordem da seguinte demonstração “começar com a proposição a ser demonstrada e deduzir dela uma proposição já demonstrada (um teorema)"; obtendo, assim, uma demonstração da proposição a ser demonstrada. Ou seja, para ser obter êxito nessa técnica, é preciso que a inferência de cada linha para a próxima seja invertível.

Exemplo 11:

Para demonstrar a proposição A, pode-se proceder assim:

1. A (hipótese)
2. B
3. C
4. D (teorema já demonstrado)

Sendo D um teorema, inverte-se a demonstração da seguinte maneira:

1. D
2. C
3. B
4. A

Para representar as diferentes concepções, terminologias e tratamento sobre a temática das demonstrações matemáticas, recorreu-se ao estudo de Pinedo (2011). De acordo com o autor,

> Uma demonstração matemática é um argumento consistente obtido com uma lógica válida que progride a partir de ideias dadas como verdadeiras (chamadas premissas) para obter a afirmação proposta (conclusão), isto é, até obter a verdade da tese. Estes passos devem ser fundamentados na aplicação de regras de dedução, com base tanto em axiomas ou teoremas previamente comprovados ou regras de inferência do sistema em questão. O fato de não conhecer nenhuma prova de um teorema não implica sua não verdade, apenas demonstrando a negação deste resultado implica que ela é falsa. (PINEDO, 2011, p. 45).

Körner e Neale (2005) afirmam que sendo a matemática uma ciência exata, a noção de prova (demonstração) é fundamental em toda a matemática; e, por isso, existem diversas formas para provar alguma proposição, corolário, teorema, etc.

Pinedo (2011) categoriza as demonstrações matemáticas em dois tipos: demonstrações diretas e demonstrações indiretas. No primeiro tipo, a demonstração se inicia com as premissas, sendo seguidas das tautologias e regras de inferência necessárias, até chegar à conclusão; sendo que cada etapa deve acompanhar a respectiva justificativa. Já o segundo tipo de demonstração é caracterizado por estabelecer a verdade de uma afirmativa, revelando a falsidade da suposição contraditória.

Com relação às demonstrações diretas, Pinedo (2011) aponta as mais comuns:

- **Prova por contra-exemplo:** utiliza-se a seguinte equivalência lógica: "Não é verdade que para todo elemento x, cumpra a propriedade $p(x)$ é logicamente equivalente a: Existe algum elemento x que não cumpre a propriedade $p(x)$"; isto é, para demonstrar que não é verdade que se cumpra $p(x)$ para todo x, é preciso mostrar que existe pelo menos um x tal que não se cumpra $p(x)$.

  Exemplo 12:

  Demonstrar que todo número natural n, tem-se $n + 1 = 5$.

  Demonstração: Supondo que o argumento é falso, tema-se que achar um número natural n tal que não cumpra $n + 1 = 5$. Ao considerar $n = 6$, tem-se que: $(6) + 1 \neq 5$. Assim, existe um número natural n tal que $n + 1 \neq 5$.

  Portanto não é verdade que, para todo natural n, tem-se $n + 1 \neq 5$.

- **Demonstração por exaustão:** a condição p se divide em um número finito de casos, e, ao provar estes casos, demonstra-se q.

  Exemplo 13:

  Demonstrar que todo número que é cubo perfeito tem que ser múltiplo de 9, um múltiplo de 9 mais 1 ou um múltiplo de 9 menos 1.

  Demonstração: Tem-se que todo número natural n é da forma $3k$, $3k + 1$ e $3k - 1$, com k sendo um número natural.

  Quando $n = 3k$, tem-se que:

  $$n^3 = (3k)^3 = 27k^3$$

  então n^3 é múltiplo de 27, que certamente é múltiplo de 9.

  Quando $n = 3k + 1$, tem-se que:

  $$n^3 = (3k + 1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1 = 9q + 1$$

  onde $q = 3k^3 + 3k^2 + k$. Então n^3 é múltiplo de 9 mais 1.

  Quando $n = 3k - 1$, tem-se que:

  $$n^3 = (3k - 1)^3 = 27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 = 9(3k^3 - 3k^2 + k) - 1 = 9p - 1$$

  onde $p = 3k^3 - 3k^2 + k$. Então n^3 é múltiplo de 9 menos 1.

- **Prova por indução matemática:** inicia-se com uma base de indução e se conclui com uma hipótese de indução. Esta técnica se aplica a casos específicos e pode ser enunciada como: "Se $P(1)$ é verdadeira, e $\forall n \leq h$, com h sendo um número natural, satisfaz $P(h)$ implica que $P(h + 1)$ também satisfaz. Então a propriedade $P(n)$ vale para todo número n natural".

Exemplo 14:

Demonstre que, para qualquer número n natural, $2^n > n$.

Demonstração: Assumindo $n = 1$ na afirmação, tem-se que $2^1 > 1$. Então, a relação é verdadeira. Supondo, agora, que, para qualquer número n natural, $2^n > n$, chamada de hipótese de indução, tem-se que para $n = k + 1$, com k sendo um número natural, ou seja, $2^{k+1} > k + 1$. Analisando o lado esquerdo da desigualdade, tem-se que: $2^{k+1} = 2^k \cdot 2^1$. Pela hipótese de indução, tem-se que: $2^k > k \rightarrow 2^k \cdot 2^1 > k \cdot 2$. Como $k \cdot 2 = k + k$, conclui-se que: $2^{k+1} > k + 1$.

Com relação às demonstrações indiretas, Pinedo (2011) aponta os seguintes métodos:

- **Por contradição:** supõe-se que $\sim q$ para mostrar que se cumpre $\sim p$, ou seja, busca-se provar que $\sim q \rightarrow \sim p$, que equivale à afirmação original. Logo, a proposição $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ é verdadeira, que é um exemplo de tautologia.

  Exemplo 15:

  Demonstre que se a e b são números reais não negativos, tais que $a \cdot b = 1$, então $a + b \geq 2$.

  Demonstração: Supondo $a + b \ngeq 2$, tem-se que: $a + b < 2$. E sabendo que a e b são números reais não negativos, tem-se que: $0 < (a + b)^2 < 2^2$. Pela propriedade em reais, tem-se que: $2ab + a^2 + b^2 < 4$ e $2ab \leq a^2 + b^2$. Logo, $4ab < 2ab + a^2 + b^2 < 4$. Por tautologia, tem-se que: $4ab < 4 \rightarrow ab < 1$. Portanto:

  $$(a + b \ngeq 2 \rightarrow ab \neq 1) \rightarrow (ab = 1 \rightarrow a + b \geq 2)$$

- **Por redução ao absurdo:** mostra-se a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante, semelhante à ironia, ou seja, é utilizado o argumento de que uma tese deve ser aceita devido a sua rejeição ser insustentável.

  Exemplo 16:

  Demonstrar que $5 \neq 1$.

  Demonstração:

  Seja q: $5 \neq 1$; a verificar que q é verdadeira.

  Sabe-se que p: $5 - 1 \neq 0$ (hipótese auxiliar).

  Supondo $\sim q$: $5 = 1 \rightarrow 5 - 1 = 0$ (hipótese auxiliar)

  Por tautologia, tem-se que: $\sim q \rightarrow \sim p$, ou seja, $5 - 1 = 0 \rightarrow 5 - 1 \neq 0$. Logo, $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge p$.

  Por *Modus Tollens* (princípio da contraposição), conclui-se que $5 \neq 1$ é verdadeiro.

- **Por casos:** baseado na validade do argumento da seguinte equivalência lógica:

  $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ \dots \ \vee p_n) \wedge [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge (p_3 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)] \rightarrow q$

  Exemplo 17:

  Demonstrar que para todo inteiro n, $n^2 \geq n$.

  Seja n um inteiro qualquer, então $n \leq -1$ ou $n = 0$ ou $n \geq -1$.

  Se $n \leq -1$, obtém-se $n^2 \geq n$, multiplicando os dois lados da desigualdade por n.

  Se $n = 0$, então $n^2 = 0^2 = 0 = n$, portanto $n^2 \geq n$.

  Se $n \geq -1$, então $n < 0 \rightarrow n^2 \geq 0$, logo, $n^2 \geq n$.

  Portanto, conclui-se que $n^2 \geq n$.

- **Por árvore de refutação:** verifica a validade de um argumento, análogo à demonstração por absurdo. Para testar tal validade, constrói-se uma lista de fórmulas que consiste de suas premissas e a negação de sua conclusão que formam a raiz da árvore.

  Exemplo 18:

  Dado o domínio $D = \{1,2,3\}$, determine o valor verdade para o seguinte enunciado: $\forall a, \exists b /. \ a^2 + b^2 < 12$.

  Solução: O enunciado é verdadeiro, posto que para todo $a_0 \in D$ existe $b = 1$, de modo que: $a_0^2 + 1^2 < 12$.

Segundo Pinedo (2011), em geral, embora não haja um procedimento único para demonstração de uma tese, existem diferentes tipos de demonstrações que são comumente utilizados em matemática.

Os pesquisadores elencados aqui como referência para elaboração dessa seção possuem definições e elegem distintas terminologias ao tratar do assunto, técnicas de demonstração matemática. A partir dessa constatação, observa-se como o tema é amplo e aberto a discussões, inclusive esse conteúdo é utilizado em salas de aulas da Educação Básica, contudo, nem sempre são utilizados tendo as definições acadêmicas aqui descritas.

Observa-se, todavia, com o passar do tempo, que essa prática está perdendo força, pois as novas gerações não demonstram interesse no aprendizado em geral e isso gera prejuízos na exposição mais rigorosa dos fatos matemáticos. Deve-se, também, levar em consideração a precarização de alguns livros didáticos, pois vários autores estão retirando a formalidade de suas obras e poucos prezam por manter demonstrações de fatos matemáticos com seus devidos detalhes técnicos. A seguir, faz-se uma breve discussão sobre alguns livros didáticos do Ensino Médio (DANTE, 2011; SOUZA; GARCIA, 2016).

3.4 UM BREVE DIÁLOGO SOBRE LIVRO DIDÁTICO

O livro didático é uma importante referência para os professores, pois se trata de um subsídio muito utilizado com a obrigatoriedade e disseminação de seu uso pelo Ministério da Educação (MEC). Esse suporte se tornou o norte principal dos professores para planejarem suas aulas.

Dessa forma, por meio do livro didático "também se inseriram muitas teorias e técnicas pedagógicas, que reformularam conceitos e melhoram (ou não) o ensino" (CHAVES; NINA, 2010, p. 2). Essas mudanças merecem atenção, e é pertinente conhecer e avaliar como elas afetam o ensino.

Sobre a necessidade de livros didáticos, Valente (2008, p. 141) afirma que:

> Talvez seja possível dizer que a Matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência, a saber, de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida na construção dos livros didáticos.

Há, todavia, a necessidade de analisar alguns livros didáticos do Ensino Médio e verificar como estes vêm tratando as demonstrações matemáticas. Os primeiros objetos de observação desta pesquisa foram os livros: "Matemática: contextos & aplicações" (DANTE, 2011) e "#contato matemática" (SOUZA; GARCIA, 2016). Verificou-se, também, que eles trazem a axiomática consigo e demonstram seus resultados conforme vão surgindo.

Observou-se que, com o passar dos anos a cultura de se demonstrar os resultados em sala de aula está se esvaindo. Tem-se, contudo, professores que ainda buscam levar para suas aulas a prática e o raciocínio em demonstração matemática de resultados. Por outro lado, atentou-se para outro grupo de professores que não desenvolvem essa prática, na maioria dos conteúdos, principalmente, em álgebra.

Estes possuem razões diversas: defasagem do aprendizado e falta de interesse de alguns alunos em pensar e desenvolver ainda mais suas habilidades cognitivas. Assim, as demonstrações, mesmo sendo utilizadas, estão ficando de lado, restando, frequentemente, a aplicação direta em listas de exercícios que são feitos para a fixação dos conteúdos programáticos.

Professores de Matemática do Ensino Fundamental II fazem uso das demonstrações em determinados conteúdos, tais como: relações métricas no triângulo retângulo, lei dos senos, lei dos cossenos, dentre outros tópicos, pois, acredito que facilita a compreensão dos conteúdos, algo mais relevante que apresentar o resultado pronto e acabado. Dentro do fazer pedagógico, sugere-se trabalhar, primeiramente, definições, axiomas, no caso, dos estudos de pontos, retas, planos, etc.

Apesar de que ainda aconteça a utilização de algumas técnicas de demonstração matemática, em determinado contexto, é notório que usá-las está ficando cada vez mais raro. Percebeu-se isso claramente através da observação de algumas coleções nos livros do Ensino Médio.

Atualmente, a preocupação no livro didático é apresentar os conteúdos matemáticos, analisando cada um dos elementos que se tem à disposição, tais como as definições, os axiomas ou postulados, os teoremas e as demonstrações dos resultados, mas não são feitos com formalismo e rigor matemático, e, também, não são em todos os conteúdos que são encontradas. Verificou-se que estão sendo mais explorados didaticamente quando se aborda os conteúdos de geometria, nos quais são expressos axiomas, postulados e teoremas com suas respectivas demonstrações.

Além disso, as demonstrações poderiam ser mais detalhadas passo a passo e também melhor expressas para se proceder em cada situação. Isso despertaria no aluno pensamento lógico e dedutivo para captar alguns passos na demonstração que, muitas vezes, não é expresso em palavras, são subentendidas na análise das expressões ou argumentação.

Portanto, para se trabalhar expondo como se chegar aos resultados apresentados, faz-se necessário também que os alunos se mostrem abertos e determinados a aprender, caso contrário, torna-se inviável proceder com as demonstrações nas salas de aulas na Educação Básica.

Nos dois livros didáticos mencionados anteriormente, podem ser encontrados todos os elementos presentes nas demonstrações, como definições, axiomas, postulados, teoremas, dentre outros. Foram identificados alguns pontos que comprovarão que de fato ainda se encontra a essência da demonstração matemática, sem muito formalismo. Observa-se, no entanto, algum rigor matemático em literaturas mais bem elaboradas.

Souza e Garcia (2016, p. 178-179) explicam que:

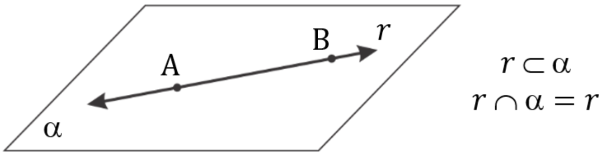
> No estudo da geometria, existem noções ou conceitos que são aceitos como verdadeiros sem que seja necessário demonstrá-los. As noções de ponto, reta, plano e espaço são chamadas primitivas e não definidas formalmente: nós as distinguimos intuitivamente. [...]. Essas noções primitivas servem como base para novos conceitos, sendo os postulados (ou axiomas) afirmações tomadas como verdadeiras sem a necessidade de demonstração, e os teoremas, conclusões baseadas em postulados ou em outros teoremas já demonstrados, que necessitam de demonstração para serem aceitos como verdadeiros.

Agora, tem-se alguns exemplos de como é apresentado esses elementos no livro de Souza e Garcia (2016):

Exemplo 19:

Postulado: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então essa reta está contida neste plano (Figura 2).

Figura 2 – Reta pertencente a um plano

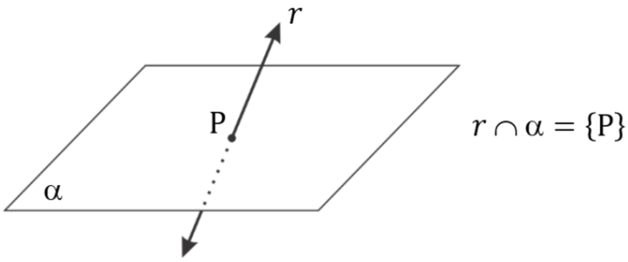


Fonte: Adaptada de Souza e Garcia (2016).

Exemplo 20:

Teorema: Se uma reta não contida em um plano o corta, a interseção dessa reta com esse plano é um único ponto (Figura 3).

Figura 3 – Reta não contida em um plano



Fonte: Adaptada de Souza e Garcia (2016).

Hipótese: proposição que se admite como um princípio, independentemente do fato ser verdadeira ou falsa.

Tese: proposição que se expõe para ser defendida.

Demonstração:

Suponha que existam pelo menos dois pontos distintos de interseção entre a reta r e o plano α, pelo postulado do Exemplo 17, r estaria contida em α. Essa afirmação é falsa, pois r não está contida em α. Portanto o ponto de interseção de r e α é único.

Observa-se que em outros assuntos abordados nos livros as demonstrações aparecem, no entanto, não com tanto rigor. A seguir, seguem-se exemplos extraídos dos livros de Dante (2011) e Lima *et al*. (2016):

Exemplo 21:

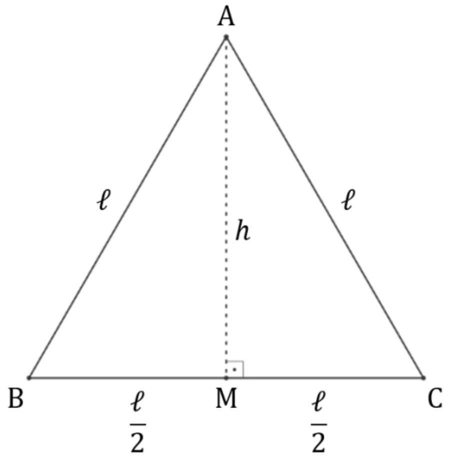
Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética (PA): Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ de razão r, partindo do primeiro termo (a_1), para avançar um termo basta somar r ao primeiro termo $(a_2 = a_1 + r)$; para avançar dois termos basta somar $2r$ ao primeiro termo $(a_3 = a_1 + 2r)$; para avançar três termos basta somar $3r$ ao primeiro termo $(a_4 = a_1 + 3r)$; e assim por diante. Desse modo, encontra-se o termo de ordem n, denominado termo geral da PA (DANTE, 2011):

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Exemplo 22:

Área de um triângulo equilátero: No triângulo equilátero, todos os lados são congruentes (ℓ, ℓ e ℓ), todos os ângulos internos são congruentes (60º, 60º e 60º) e toda altura é também mediana e bissetriz. Veja o cálculo da área (Figura 4), usando a base e a altura (LIMA *et al*., 2016):

Figura 4 – Triângulo equilátero



Fonte: Lima *et al*. (2016).

O triângulo AMC é retângulo em M e, portanto, vale a relação de Pitágoras:

$$(\ell)^2 = (h)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área do triângulo ABC é dada por:

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Ao observar os livros supracitados e alguns de seus exemplos, conclui-se que os conceitos matemáticos e as técnicas de demonstração matemática ainda resistem às mudanças de ensino e a rapidez que a informação e o conhecimento precisam ser repassados. Embora, ainda se encontram nos livros esses elementos; eles não vem com tamanho formalismo ao qual é encontrado na literatura acadêmica. Pode-se citar como exemplo o livro “A Matemática do Ensino Médio”, de Lima *et al*. (2016). O conteúdo presente em seu livro se mostra de maneira didática e acessível a todos os alunos que desejam aprender matemática.

Assim, pode-se afirmar que os livros didáticos constituem elemento fundamental para a educação matemática, sendo essenciais como subsídios para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem, pois direcionam o fazer pedagógico do professor dando suporte para o aluno exercitar e aprender. Eles, contudo, acabam espelhando as mudanças do tempo e demandas da modernidade, daí o professor sentir alguma necessidade de modificar seu modo de ensinar. Dessa maneira, pode-se “perceber que de tempos em tempos surgem produções inovadoras e elas sempre são frutos de momentos históricos” (CHAVES; NINA, 2010, p. 5).

Chaves e Nina (2010, p. 5), explicam que “As mudanças nos livros são necessárias, tanto para corrigir falhas decorrentes de métodos obsoletos, quanto para melhorar o acesso do aluno ao conteúdos do livro”, tornando-o mais compreensível a todos. Outro fato é que oferecem aos professores materiais pedagógicos adequados para facilitar-lhes o processo de ensino-aprendizagem, ao promover um vasto leque de atividades, através dos quais os alunos possam se apropriar mais facilmente do conhecimento matemático.

Em suma, o ensino da matemática se configura como algo de relativa complexidade tanto para o professor quanto para o aluno. Diante dessa constatação, a aprendizagem perpassa questões de método, interesse ou formação do professor. Todos esses fatores somados devem ser tema de reflexão para que a matemática seja ensinada e aprendida de forma sempre significativa, produtiva e eficiente, atingindo seu objetivo maior de promover conhecimentos sólidos para que o aluno possa prosseguir nos estudos e obter êxito no que optar em sua vida.

4 METODOLOGIA, SUJEITOS E ANÁLISES DAS ENTREVISTAS

4.1 TIPO DE PESQUISA

Este trabalho iniciou-se a partir de uma pesquisa bibliográfica para aprofundamento sobre o tema “Um olhar sobre técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica”, para tanto, utilizou-se os estudos de Rodrigues (2008), Fossa (2009), Pinedo (2011), Tassinari (2013), Caputi e Miranda (2017), dentre outros.

Uma pesquisa bibliográfica abrange o exame da literatura científica para levantamento e análise dos principais estudos já publicados sobre determinado assunto (MARCONI; LAKATOS, 2003).

Com relação à abordagem qualitativa, Minayo (2007, p. 10) observa que: “[...] a metodologia qualitativa é aquela que incorpora a questão do significado e da intencionalidade como inerentes aos atos, às relações e às estruturas sociais”.

Para se encontrar tratamentos diferenciados sobre o tema em questão, optou-se em realizar a investigação em duas unidades educacionais diferenciadas: uma Escola Estadual de Educação Profissional (EEEP) e uma escola de Ensino Médio regular pertencente à rede estadual de educação do estado do Ceará.

A pesquisa aconteceu durante os meses de fevereiro e março do ano de 2018, contudo, foi finalizada de fato em maio e junho do mesmo ano, pois os dados ainda precisavam ser ampliados.

4.2 LOCAL DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada nas EEEP do estado do Ceará, onde estas têm basicamente um mesmo padrão, possuem cerca de 12 salas de aula, tem sala de multimeios, biblioteca, sala de informática, 6 banheiros coletivos (com espaços para banho, chuveiro e pequenos armários), duas salas de professores, uma quadra, secretaria, sala da direção e coordenação. Esta funciona em dois turnos com as mesmas turmas que estudam em período integral das 7h10min às 17h. No local fazem três refeições diárias, inclusive almoçam na instituição.

As instituições nas quais trabalham os outros sete professores entrevistados são escolas de Ensino Médio regular. Um docente inclusive leciona em uma escola que oferece o Ensino Médio pedagógico (Formação de professores das séries iniciais – Educação Infantil, 1º e 2º Ano). Todas funcionam os três turnos, possuindo entre 10 a 15 salas de aula.

Os espaços das instituições regulares não são tão amplos quanto os das escolas profissionalizantes citadas anteriormente. Mesmo diante de suas limitações espaciais possuem biblioteca, entre 2 e 4 banheiros coletivos, sala de direção e coordenação e uma quadra ampla, porém, falta reparos e pinturas adequadas às práticas esportivas. As salas amplas, com ar-condicionado e quadra de esportes bem estruturada.

4.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com dez professores, oito do sexo masculino e dois do sexo feminino. Três professores pertencem a duas diferentes EEEP do estado do Ceará.

Os critérios de inclusão para os sujeitos foram: ser professor efetivo da disciplina de Matemática de escolas pertencentes à Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC) e estar em exercício em salas de aula do Ensino Médio. Todos os professores possuem formação na área, são licenciados em Matemática. Solicitou-se a participação de cada um, entregou-se o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (APÊNDICE A) aos professores. Entregou-se cerca de 18 entrevistas, porém, apenas 10 entregaram as entrevistas no prazo e respondidos a contento para a finalização de nossas reflexões.

Os professores têm experiência na área e atuam no magistério entre 6 e 17 anos. A idade dos sujeitos varia entre 28 e 47 anos.

4.4 INSTRUMENTO PARA COLETA DE DADOS

Para se obter os dados da pesquisa foi utilizado como instrumento de coleta uma entrevista (APÊNDICE B) composto de cinco perguntas, a saber:

1) O que você considera como dificuldade em ensinar os conteúdos matemáticos? Quais conteúdos podem pontuar? Explique.
2) Os alunos de sua escola têm apresentado dificuldades no processo de apropriação dos conceitos matemáticos? O uso de alguma técnica de demonstração facilita o processo de ensino aprendizagem?
3) O conteúdo das demonstrações matemáticas, enfrenta alguma resistência e/ou dificuldade de ser ministrado em sala?
4) Quanto às técnicas de demonstração matemática, você observa que tem a mesma aceitação nas turmas? Há um tipo específico de demonstração utilizada de forma mais frequente?

5) Você acredita que o conteúdo das demonstrações seriam melhor aproveitados por outras séries de educação matemática? Quais? Especifique.

A partir dessas questões, pode-se conhecer e refletir sobre o uso das técnicas de demonstrações matemáticas. A entrevista foi entregue pessoalmente após a aceitação de participar e assinatura do TCLE. As identidades dos professores foram preservadas por meio de pseudônimos: Pitágoras, Hipátia, Newton, Euler, Sophie, Tales, Lavoisier, Euclides, Arquimedes e Kepler[1].

4.5 RESULTADOS E ANÁLISES DOS DADOS

Há que se esclarecer que no total foram 18 entrevistas entregues com o compromisso da devolutiva. Porém somente 11 devolveram na data marcada, destes um não tinha respostas que de fato pudessem ser utilizadas, havia uma pergunta em branco e duas monossilábicas e evasivas. Assim, somente 10 entrevistas atenderam plenamente às necessidades da pesquisa.

A seguir, tem-se uma breve descrição das entrevistas realizadas:

A primeira questão colocada aos professores foi: “O que você considera como dificuldade em ensinar os conteúdos matemáticos? Quais conteúdos você pode pontuar? Explique.”. Abaixo, observa-se as respostas obtidas:

> **Pitágoras** – Como professor, não tenho dificuldades, mas os alunos, principalmente do 1º ano, chegam ao Ensino Médio sem dominar as quatro operações, isso se torna uma dificuldade, pois não é possível progredir e seguir todo o programa se o conhecimento prévio deles não é bom sobre muitos assuntos matemáticos, principalmente álgebra.
> **Hipátia** – Falta conhecimento em várias áreas, principalmente, álgebra, ou seja, temos que fazer um longo e árduo trabalho para que compreendam equações, operações matemáticas, polinômios e as demais estruturas algébricas. Para que até o final do Ensino Médio tenham assimilados alguns conhecimentos matemáticos mais importantes e que serão úteis em avaliações e para o Enem.
> **Euler** – A falta de interesse e o baixo conhecimento dos alunos quando chegam do Ensino Fundamental. Eles apresentam limitações em todos os conteúdos, não tem como enumerar, cada aluno é diferente do outro, chegam a desconhecer o nome das figuras geométricas, assim, apresentam muita dificuldade em geometria.
> **Newton** – A dificuldade é a falta de material, que nem sempre tem disponível, o fato de muitos alunos não terem noções matemáticas para absorver novas aprendizagens e o desinteresse dos mesmos. De início apresentam dificuldades em identificar conjuntos e funções, a geometria também é um calcanhar de Aquiles. A grande dificuldade mesmo é a preguiça e falta de interesse de muitos alunos.

[1] Nomes de representantes ilustres do conhecimento matemático: Pitágoras – matemático grego (570-495 a.C.); Hipátia – matemática grega (351-415 d.C.); Newton – cientista inglês (1643-1727); Euler – matemático alemão (1907-1983); Sophie Germain– matemática e física francesa (1776-1831); Tales – filósofo e matemático grego (624-546 a.C.); Lavoisier – químico francês (1746-1794); Euclides – matemático grego (295 a.C. morte); Arquimedes – matemático, físico e astrônomo grego (212 a.C. morte); Kepler – astrônomo e matemático alemão (1571-1630).

Sophie – Os alunos vêm do ensino fundamental com poucos conhecimentos, porém quando se empenham aprendem.
Tales – Falta de interesse dos alunos; Dificuldade em assuntos básicos; Frações, pois não tem ideia sobre conceitos matemáticos.
Lavoisier – A função modular é um dos assuntos que tenho mais dificuldade em ensinar, porque é difícil encontrar uma relação com o cotidiano, ou seja, o dia a dia.
Euclides – Os alunos chegam ao 1º ano sem parte do conhecimento básico para seu nível educacional.
Arquimedes – Eu considero difícil ensinar os conteúdos de matemática cujos exercícios possuem uma variedade grande de raciocínios, como por exemplo, análise combinatória e probabilidade.
Kepler – A falta de base teórica dos alunos. Assunto como funções e geometria espacial são bem complicados de serem passados quando encontramos os alunos que, na maioria das vezes, não sabem fundamentos básicos.

As respostas dadas à primeira questão foram diretas quanto às dificuldades dos alunos, a unanimidade é quanto ao desconhecimento básico dos conhecimentos matemáticos pelos alunos que estão adentrando o Ensino Médio, que faz parte da Educação Básica. Outra observação é quanto ao conteúdo, há certa convicção que o conteúdo de álgebra é o que apresenta maior dificuldade, tendo em vista que é o maior conteúdo que deve ser ministrado nessa etapa da Educação Básica. Os professores se mostraram conhecedores de seus alunos com clara compreensão do fazer pedagógico.

A segunda questão fez uma reflexão sobre se "Os alunos de sua escola têm apresentado dificuldades no processo de apropriação dos conceitos matemáticos? O uso de alguma técnica de demonstração facilita o processo de ensino aprendizagem?". As respostas foram:

Pitágoras – A dificuldade deles advém de uma educação deficitária, seja pelo pouco conhecimento, interesse ou falta de qualidade no ensino. Realizo sim técnicas de demonstração, porém é uma utilização implícita das técnicas para mostrar de onde e como provar conteúdos de álgebras que exigem raciocínio lógico.
Hipátia – Eles apresentam dificuldades sim, em todo e qualquer conteúdo programático de matemática, porém há bons alunos e parte deles conseguem atingir níveis regulares e bons de aprendizado.
Euler – Apresentam, mas aprendem. As demonstrações ajudam na compreensão de muitas questões de álgebra.
Newton – Apresentam algumas dificuldades, pois chegaram ao Ensino Médio com déficit de conhecimento, porém aprendem. As demonstrações ajudam bastante a instigar a mente nas questões relativas à lógica matemática, principalmente.
Sophie – Muita dificuldade, acredito que parte do baixo rendimento se deve a falta de interesse, afinal, não cobramos questões complexas.
Tales – Sim. Uso em situações muito pontuais onde a demonstração é simples e auxilie no entendimento global do conteúdo.
Lavoisier – Eles têm muita dificuldade na compreensão e nas contas, ou seja, na aritmética querendo usar calculadora direto. Até usando demonstração eles se perdem no caminho.
Euclides – Sim. Mas não utilizo demonstrações na maioria dos assuntos, pois trabalho com formação de professores.

> **Arquimedes** – Sim, eu considero que dependendo dos teoremas, as demonstrações ajudam na formação do conceito pelo aluno. Considero as demonstrações muito interessante no ensino da geometria.
> **Kepler** – Os alunos apresentaram dificuldades, contudo, conseguem assimilar os conteúdos. Algumas preposições são explicitadas para facilitar sua compreensão, como no ensino da geometria, principalmente. A demonstração do tipo direta é a mais utilizada..

Estas respostas demonstram o quanto os professores estão atentos à realidade educacional de seus alunos e como podem auxiliá-los a vencer suas limitações, buscando melhores formas de facilitar o ensinar e o aprender. Foram bem específicos ao indicar onde e como utilizam alguma técnica de demonstração.

O fragmento a seguir reflete sobre a relevância das demonstrações:

> Quanto à importância das demonstrações para o ensino de Matemática, sabemos que o matemático precisa das demonstrações para autenticar a verdade de seus teoremas, tanto quanto os profissionais das áreas de Ciências precisam da experimentação para provar suas leis. Fossa [...] aponta dois motivos para que o matemático tenha a preocupação de demonstrar todos os seus teoremas: o primeiro se deve ao fato de “que algumas proposições que parecem intuitivamente óbvias são de fato falsas e o segundo é baseado no fato de a Matemática ser um tipo de conhecimento e para se conhecer algo não é o bastante se acreditar nela, se torna necessário ter boas razões para acreditar”. (SOUSA; FOSSA; SOUSA, 2010, p. 4).

Faz-se relevante observar que mesmo no Ensino Médio, os professores lançam mão dos mais variados conhecimentos acadêmicos adquiridos ao longo de sua formação profissional.

Quando questionados sobre “O conteúdo das demonstrações matemáticas enfrenta alguma resistência e/ou dificuldade de ser ministrado em sala?”. Os entrevistados responderam:

> **Pitágoras** – Não. Utilizo mais nas turmas de Finanças e Informática da escola profissional onde leciono, principalmente, no 3º ano, estes irão prestar o Enem ou outro vestibular e precisam avançar nos conhecimentos matemáticos, ter noções de lógica.
> **Hipátia** – Não têm resistência alguma, quem quer aprender compreende e aproveita a aprendizagem para situações futuras.
> **Euler** – Não, a dificuldade é natural como em todo e qualquer conhecimento matemático novo.
> **Newton** – Não, mas nem chego a enfatizar esse conteúdo através de definições, é algo bem básico, usual e de fácil compreensão.
> **Sophie** – Às vezes, pois são imediatistas e acham sacal observar passo a passo alguns conteúdos.
> **Tales** – Sim, pois os alunos querem, normalmente, resultados prontos para aplicar, o que, na matemática, sabemos que não é bem assim. A valorização do raciocínio e das inferências tem que ser reforçado pelo professor para que eles entendam que sem pensar, não se aprende matemática.
> **Lavoisier** – Não. A dificuldade está em eles compreenderem as demonstrações.

> **Euclides** – Não, algumas turmas aceitam mais que outras. As principais demonstrações são: teorema de Pitágoras e Bháskara.
> **Arquimedes** – Sim, alguns teoremas apresentam deduções e raciocínios avançados para o Ensino Médio, por esse motivo em algumas situações é melhor só enunciar em vez de prová-los.
> **Kepler** – Não, pois trabalhamos as demonstrações dos teoremas que são mais pertinentes a sua realidade, trazendo para os alunos situações ligadas ao seu cotidiano.

É pertinente salientar que se um ensinamento realizado por meio de técnicas, fórmulas, procedimentos, cálculos e definições não acarreta uma apropriação por parte do aluno de um saber matemático, faz-se necessário direcionar as atividades de ensino para uma exploração de “situações ligadas à natureza e à vida social, através da qual seja possível aos alunos construir um sentido matemático, um saber integrado e relacionador de vários domínios, um saber onde, afinal, a matemática esteja presente e faça sentido” (RODRIGUES, 2008, p. 200).

O ensino da matemática, portanto, assinala para uma gestão curricular bem mais exigente, do ponto de vista do ofício do docente, uma vez que ele tem o dever de fazer pesquisas em outros domínios para compreender as respectivas relações com a matemática e sua finalidade prática (RODRIGUES, 2008).

O penúltimo questionamento “Quanto às técnicas de demonstração matemática, você observa que tem a mesma aceitação nas turmas? Há um tipo específico de demonstração utilizada de forma mais frequente?”. Assim escreveram:

> **Pitágoras** – Utilizo princípios básicos de demonstração, principalmente, em questões de álgebra que exigem mais a lógica, tais como as induções matemáticas, dentre outras, esta é a mais simples e com mais rigor lógico. Portanto, podem ser melhores exemplificadas e compreendidas pela maioria.
> **Hipátia** – Costumo fazer generalizações e uso de induções matemáticas, lógica básica com exemplos significativos que podem instigar a mente dos alunos.
> **Euler** – Os alunos não costumam questionar conteúdos, tem que estudar, pois faz parte do currículo obrigatório. Utilizo demonstrações diretas, por ser de fácil compreensão, dependendo do contexto geral.
> **Newton** – Eles não reclamam, uso exemplos lógicos das demonstrações sem categorizar, nomear, apenas trato do assunto.
> **Sophie** – Quando o assunto é simples, dá para realizar demonstrações diretas.
> **Tales** – Não. Demonstrações que partem de algo cotidiano. Eles sempre se interessam. As demonstrações mais frequentes são as implicações.
> **Lavoisier** – As demonstrações voltadas para o dia a dia é mais aceitável.
> **Euclides** – Sim. As demonstrações se tornam mais necessárias no Ensino Médio regular.
> **Arquimedes** – Geralmente, quando ministro aula de geometria, levo o software GeoGebra para auxiliar nas deduções e demonstrações, no primeiro ano em geometria plana e no 3º ano na geometria analítica plana.
> **Kepler** – Sim. As proposições que partem de algo relacionado ao seu dia a dia é mais aceitável em determinadas turmas. Os alunos, na sua maioria, demonstram interesses. As demonstrações mais usadas é do tipo direta: por contra-exemplo e por indução.

Analisando as respostas, observou-se que os professores entrevistados utilizam-se, com certa frequência técnicas de demonstração. Assim corroboram com a pesquisa de Santos (2008) que expressa a relevância do método de demonstração quando se trabalha, geralmente, Álgebra ou de Teoria dos números, tendo aplicações em quase todas as áreas da matemática e em todos os níveis educacionais, basta que seja utilizado de forma produtiva, significativa e eficiente.

A quinta e última questão, faz a seguinte reflexão “se os conteúdos das demonstrações seriam melhor aproveitados por outras séries de educação matemática? Quais? Especifique”.

> **Pitágoras** – Sim, acredito que diante do caráter lógico e simples de algumas definições de demonstração matemática, era possível trabalhar esse conteúdo a partir do 8º e 9º, realizando atividades e situações significativas para a aprendizagem dos alunos.
> **Hipátia** – Poderia se visto de fato em todo o Ensino Médio, agregado aos conteúdos que os aborda, a lógica matemática seria melhor enfatizada a partir de seus conteúdos.
> **Euler** – A meu ver as demonstrações diretas podiam ser bem mais utilizadas desde o Ensino Fundamental.
> **Newton** – As técnicas de demonstrações podem ser usadas quase em toda sua totalidade ao longo do Ensino Médio, afinal, os conteúdos de alguma forma podem ser explicados através de uma demonstração.
> **Sophie** – Desde o Ensino Fundamental II os jovens seriam capazes de assimilar vários conceitos matemáticos.
> **Tales** – Sim, nas séries do Ensino Fundamental I, de forma lúdica e prática, bem como as definições e propriedades. Assim, o aluno crescerá com o hábito da curiosidade de saber de onde veio o que ele estuda e, portanto, haverá, certamente, uma melhora no aprendizado do mesmo.
> **Lavoisier** – No fundamental é necessário o uso das demonstrações para a fundamentação do conhecimento.
> **Euclides** – Sim. Mas não utilizo com frequência.
> **Arquimedes** – Não considero que demonstrações deveriam ser feitas ante do 9º ano do ensino fundamental.
> **Kepler** – Sim, mas de uma forma dinâmica e criativa, onde os alunos participem dessa construção, principalmente na álgebra. O conceito básico dos elementos da geometria devem ser inseridos, também, neste contexto: ponto, reta, plano, axioma, etc. Desta forma, ele vai saber a origem daquilo que está estudando.

Os professores são conscientes que as demonstrações matemáticas, poderiam contribuir de forma mais produtiva e significativa se fossem mais utilizadas em diferentes turmas, principalmente nas turmas finais do Ensino Fundamental II. A temática em estudo leva a crer que é de nível superior e muito avançada para a Educação Básica. Constatou-se, contudo, que os docentes e o currículo escolar precisa e utiliza-se das demonstrações para tornar o ensino-aprendizagem matemático mais eficaz ao produzir conhecimento, instigar a mente dos seus alunos.

As respostas às indagações das entrevistas constataram que os professores estão em sintonia quanto à relevância de se incluir e/ou utilizar alguma técnica de demonstração matemática no Ensino Médio. Dessa forma, eles também mostram que a utiliza quando se faz pertinente. Afinal, são conscientes como estas podem gerar um ambiente educacional com clima propício à aprendizagem eficiente; mesmo esbarrando na falta de conhecimento prévio de conteúdos básicos do Ensino Fundamental.

> [...] para estudar as demonstrações matemáticas, é preciso que estejam claras duas coisas. Primeira, a importância de fazer uma explanação clara e explícita do significado do que seja demonstrar no contexto matemático e como esse conceito difere do de demonstração em outros campos do saber. Segunda, precisa-se de material de instrução adequado que leve o aluno a construir os conceitos e habilidades envolvidos na atividade de fazer demonstrações. (SOUSA; FOSSA; SOUSA, 2010, p. 2).

Assim, pode-se dizer que o professor cuja metodologia está voltada à facilitação do ensino-aprendizagem, por meio de técnicas e do ensino significativo, pode conseguir estabelecer uma relação mais segura com seus alunos, inclusive evitando bloqueios que impeçam de obter um trabalho educativo eficaz e produtivo.

Os professores entrevistados revelaram que se utilizam, em alguns momentos, de técnicas de demonstração, são conscientes que a utilização poderia ser bem maior, consideram sim que demonstrar é importante. Preferem, no entanto, optar por um método menos reflexivo, porém eficiente para transmitir os conteúdos matemáticos. Alegam que demonstrar torna-se difícil diante de alunos com grandes lacunas de aprendizagem, afirmam que estes, às vezes, desconhecem princípios matemáticos básicos como as quatro operações. O que de fato, pode-se constatar sim ao se aplicar testes básicos a alunos que estão concluindo o Ensino Fundamental. Além da constatação do baixo nível de conhecimento matemático dos alunos nas avaliações de larga escala.

Dessa forma, faz-se pertinente repensar como e quando os conhecimentos matemáticos estão sendo explorados na Educação Básica. Algo complexo que sofre influência de muitos fatores desde a formação acadêmica dos professores até o método e a qualidade dos livros didáticos utilizados para tal fim, bem como a qualificação e a qualidade das escolas, da gestão e os problemas que a comunidade escolar enfrenta. Enfim, apesar de se tratar, aqui, somente dos conhecimentos matemáticos adquiridos pelos alunos do Ensino Médio, fica claro que a problemática educacional é algo complexo e atinge todas as áreas do conhecimento.

A questão maior é uma mudança conjunta da educação brasileira, algo que deve iniciar conosco em sala de aula até as mais altas instâncias educacionais. É um processo a longo prazo que já vem logrando êxito nas últimas décadas, há muito o que melhorar, porém os esforços e pesquisas estão ganhando visibilidade e galgando um caminho para se atingir a tão almejada educação de qualidade. Como educadores e conscientes de nosso papel, tem-se a obrigação de continuar na luta em busca do melhor para os alunos, afinal estes representam o futuro, logo, precisa ser pensado e cuidado diante de sua importância social.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação assumiu como objetivo lançar um olhar sobre técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica. A hipótese levantada era se os professores do Ensino Médio fazem uso de técnicas de demonstração matemática e em quais situações. Observou-se que o uso razoavelmente frequente em todo o Ensino Médio é utilizado de forma produtiva e eficiente em diferentes contextos e momentos do ensino-aprendizagem. Os professores, no entanto, esclarecem que devido às lacunas de aprendizagem dos alunos, estes não compreendem, nem apresentam interesse diante do conteúdo.

Os demais objetivos relativos ao perfil do professor atual sobre o ensino e as demandas da modernidade foram contemplados, como a organização de parâmetros do conhecimento matemático (definições, axiomas, teorema e demonstração) e fundamentou-se teoricamente as técnicas de demonstração matemática, descrevendo e classificando-as. Por fim, elencou-se os métodos de demonstração matemática e as proposições usuais.

A pesquisa de campo revelou importantes informações sobre o uso das técnicas de demonstração matemática. As respostas foram concisas, claras e diretas quanto às dificuldades dos alunos, a unanimidade e quanto ao desconhecimento de princípios matemáticos básicos, como as quatro operações, base dos conhecimentos matemáticos para quem está adentrando ao Ensino Médio. Ao longo das entrevistas, os professores se mostraram conhecedores de seus alunos com clara compreensão do seu fazer pedagógico, das necessidades dos mesmos e de sua realidade educacional.

Assim, também foram conscientes que as técnicas de demonstração matemática poderiam contribuir de forma mais produtiva e significativa se fossem mais utilizadas em diferentes turmas e níveis de ensino. A temática em estudo, todavia, leva a crer que é de nível superior e muito avançada para a Educação Básica. Observou-se, ao longo da pesquisa, que os professores estão em sintonia quanto à relevância de se incluir e/ou utilizar alguma técnica de demonstração. Dessa forma, eles também revelaram que a utilizam quando se faz pertinente. Afinal, são conscientes como estas podem gerar um ambiente educacional com clima propício a aprendizagens significativas.

Os professores entrevistados demonstraram em seus discursos que utilizam as técnicas de demonstração com o propósito de instigar a mente dos alunos e desenvolver o raciocínio lógico-matemático. Já em relação à prática em sala de aula no Ensino Médio, existem diferentes identidades que se refletem no grau de participação e de posse dos significados, usos e de discussão matemática. Dessa forma, o professor desempenha um papel decisivo na aplicação do método com os alunos, tendo em vista que, de acordo com a necessidade de uma técnica de demonstração, ele avalia quais são as suas características pertinentes às suas aulas. Com o uso das demonstrações, promove-se uma maior compreensão matemática, conduzindo a um crescimento da posse de significados e ampliação do conhecimento matemático e do raciocínio lógico.

Conclui-se, portanto, que os professores e o currículo escolar precisam e devem utilizar-se das técnicas de demonstração matemática para tornar o ensino-aprendizagem matemático mais eficaz ao produzir conhecimento e estimular o conhecimento dos alunos. Dessa forma, considera-se que há muito ainda o que ser abordado a este respeito, dado a relevância e abrangência do tema, uma vez que, ao se fazer o levantamento do referencial teórico, observou-se que há também um vasto campo de trabalho para estudos posteriores nesta área. Espera-se que a pesquisa aqui realizada e as nossas referências possam servir de subsídios para futuros trabalhos teóricos e práticos. Isso só demonstra quão necessário se faz a inserção de novos pesquisadores nesse campo teórico.

Como sugestão para pesquisas futuras, acredita-se que seria pertinente avaliar a formação matemática dos educadores, suas concepções sobre educação matemática, observando suas realidades. Espera-se, portanto, que esse estudo venha contribuir um pouco mais para o avanço dessas discussões e que resulte num maior incremento para a formação de profissionais, bem como na melhoria das condições e incentivos para novas e futuras pesquisas.

REFERÊNCIAS

ABE, Fabio Henrique Noboru. **Alguns termos...** Dourados, MS: Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, .2018. Disponível em: <http://www.comp.uems.br/~fhna/ca/180613/ Alguns%20termos.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2018.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução nº 3, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 5 ago. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2018.

______. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 09 fev. 2018.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC/CNE/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em 20 fev. 2018.

BRITTO, Flávia Aparecida. **Perspectivas de consolidação da educação matemática como campo de pesquisa no Programa de Pós-graduação em Educação da UFMG**. 2010. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

CAPUTI, Armando; MIRANDA, Daniel Miranda. **Bases matemáticas**. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2017. Disponível em: <http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel. miranda/livros/basesmatematicas/bases.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2018.

CHAVES, Antônio João Michels; NINA, Clarissa Trojack Della. A evolução dos livros didáticos de Matemática nas últimas décadas. **Revista Ciência e Conhecimento**, São Jerônimo, v. 8, p. 1-6, 2010

D’AMBROSIO, Ubiratan. Armadilha da mesmice em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 95-110, 2007.

______. Formação de professores: o comentarista crítico e o animador cultural. **Ethnomath**, [s. l.], 26 out. 2012. Disponível em: <https://sites.google.com/site/etnomath/14>. Acesso em: 20 mar. 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contextos & aplicações: Ensino Médio. 5. ed. São Paulo: Ática, 2011. v. 1.

EVANGELISTA, Luís Antonio. **O Teorema de Pitágoras**: alternativas de demonstrações. 2014. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2014.

FAZENDA, Ivani C. Arantes. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 15. ed. Campinas: Papirus, 2008.

FIORENTINI, Dario. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática**: o caso da produção científica em cursos de Pós-Graduação. 1994. 414 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

FOSSA, John A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **A experiência do labirinto**: metodologia, história oral e educação matemática. São Paulo: Editora UNESP, 2008.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

HANNA, Gila. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 44, n. 1-2, p. 5-23, 2000.

HAUSEN, Rodrigo. **Bases matemáticas**: Aula 2 – Métodos de demonstração. Santo André: Universidade Federal do ABC, 2013. Disponível em: <http://compscinet.org/hausen/courses/bm/aulas/aula2.pdf>. Acesso em 10 mar. 2018.

HERNÁNDEZ, Fernando; VENTURA, Montserrat. **A organização do currículo por projetos de trabalho**: o conhecimento é um caleidoscópio. Tradução de Jussara Hauber Rodrigues. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

KÖRNER, Katherine; NEALE, Vicky. An introduction to proof by contradiction. **NRICH**, Cambridge, 2005. Disponível em: <https://nrich.maths.org/4717>. Acesso em: 12 mar. 2018.

LAKATOS, Imre. **Proofs and refutations**: The logic of mathematical discovery. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LIMA, Elon Lages et al. **A matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (Org.). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 26. ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

PINEDO, Christian Q. **Argumentação e teoria da demonstração em matemática**. Araguaína: Universidade Federal do Tocantins, 2011. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgNQEAK/teoria-demonstracao>. Acesso em: 12 mar. 2018. .

______. **Fundamentos da matemática**. Araguaína: Universidade Federal do Tocantins, 2007. Disponível em: <http://biblioteca.uccvirtual.edu.ni/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=38&Itemid=1>. Acesso em: 12 mar. 2018.

PIRES, Célia Maria Carolino. Educação matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 29, p. 13-42, 2000.

RODRIGUES, Margarida Maria Amaro Teixeira. **A demonstração na prática social da aula de matemática**. 2008. 831 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

SANTOS, José Carlos Leite dos. **Fundamentos de matemática**. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2007.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

SEIBERT, Tania Elisa; GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira. Organizando o currículo de matemática por projetos de trabalho no ensino fundamental. In: INTERAMERICAN COMMITTEE ON MATHEMATICS EDUCATION, XI., 2003, Blumenau. **Anais...** Blumenau: CIAEM, 2003.

SOUSA, Enne Karol Venancio de; FOSSA, John Andrew; SOUSA, Gisele Costa. Demonstrações matemáticas: uma experiência com a aplicação de um módulo de ensino no curso de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**: 2º Ano. São Paulo: FTD, 2016.

TASSINARI, Ricardo P. **Introdução à lógica contemporânea**. Marília, SP: UNESP, 2013. Disponível em: <http://www.marilia.unesp.br/Home/Instituicao/Docentes/RicardoTassinari/2013ILC.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2018.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **ZETETIKÉ**, São Paulo, v. 16, n. 30, p. 139-161, 2008.

VILLIERS, Michael D. de. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. Tradução de Eduardo Veloso. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(a) Sr.(a) está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada: "Um olhar sobre técnicas de demonstração matemática em sala de aula na Educação Básica".

Suas respostas à entrevista serão tratadas de forma anônima e confidencial, isto é, em nenhum momento será divulgado seu nome ou local de trabalho em qualquer fase do estudo. Quando for necessário exemplificar determinada situação, sua privacidade será assegurada uma vez que seu nome será substituído de forma aleatória. Os dados coletados serão utilizados somente nesta pesquisa.

Sua participação nesta pesquisa consistirá em responder a 5 (cinco) perguntas a serem realizadas sob a forma de entrevista.

O(a) Sr.(a) não terá nenhum custo ou quaisquer compensações financeiras. Não haverá riscos de qualquer natureza relacionada à sua participação. O benefício relacionado à sua participação será de aumentar o conhecimento científico para a área do Ensino da Matemática. Desde já agradecemos!

Tendo em vista o que foi apresentado acima, eu, de forma livre e esclarecida, manifesto meu consentimento em participar da pesquisa. Declaro que recebi cópia deste termo de consentimento, e autorizo a realização da pesquisa e a divulgação apenas dos dados obtidos neste estudo.

____

Assinatura do Participante da Pesquisa

____

Assinatura do Pesquisador

APÊNDICE B – Entrevista aplicada aos professores

ENTREVISTA APLICADA AOS PROFESSORES

Prezado(a) participante,

Estas cinco perguntas procuram refletir sobre o ensino-aprendizagem na área da matemática, mais especificamente o uso das técnicas de demonstração. Dessa forma, é de extrema importância sua participação, por isso, contamos com sua ajuda e colaboração. Sua identidade será preservada.

Cordialmente,

José Laécio Pimentel

Formação: ________________________________

Idade: ___________

Tempo de magistério: ____________

1) O que você considera como dificuldade em ensinar os conteúdos matemáticos? Quais conteúdos você pode pontuar? Explique.

____

____

____

2) Os alunos de sua escola têm apresentado dificuldades no processo de apropriação dos conceitos matemáticos? O uso de alguma técnica de demonstração facilita o processo de ensino aprendizagem?

____

____

____

3) O conteúdo das demonstrações matemáticas, enfrenta alguma resistência e/ou dificuldade de ser ministrado em sala?

____

____

____

4) Quanto às técnicas de demonstração matemática, você observa que tem a mesma aceitação nas turmas? Há um tipo específico de demonstração utilizada de forma mais frequente?

____

____

____

5) Você acredita que o conteúdo das demonstrações seriam melhor aproveitados por outras séries de educação matemática? Quais? Especifique.

____

____

____