UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
MESTRADO PROFISSINAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

MARCIA APARECIDA GARCIA TEIXEIRA

ASPECTOS ALGÉBRICO E COMBINATÓRIO DOS NÚMEROS DE PELL E CATALAN

Dourados - MS
2018

MARCIA APARECIDA GARCIA TEIXEIRA

ASPECTOS ALGÉBRICO E COMBINATÓRIO DOS NÚMEROS DE PELL E CATALAN

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Orientador: PROF$^{\underline{a}}$. DR$^{\underline{a}}$. IRENE MAGALHÃES CRAVEIRO

Dourados - MS

2018

Ao José Paulo, pela paciência,
incentivo, carinho, amor,
em todas as horas dessa caminhada.
Aos meus pais, Wilson e Rosa,
que me ensinaram a ousar,
questionar e,
acima de tudo,
ser persistente,
muito persistente...

Agradecimentos

O ato de agradecer ajuda o coração e faz a sua mente se expandir. Agradeça, agradeça, agradeça! Agradeça sempre!!!

Demorei muito para escrever essa pagina, pois a tantos devo gratidão. Pessoas maravilhosas com enorme conhecimento, carinho ou amizade, contribuíram direta ou indiretamente para a realização desse trabalho.

Agradeço ao meu Marido e amigo, Jose Paulo, que sempre esteve ao meu lado me apoiando, ajudando, animando, sendo paciente e companheiro de viagem de todos os fins de semana.

Aos meus pais, Wilson e Rosa que sempre me incentivaram e me acolheram durante esse período de estudo, com um chá sempre quentinho no final da noite.

A minha sogra Judith, pelo carinho, incentivo e por sempre cuidar de mim.

Aos meus colegas de turma (turma 2016) que me ensinaram que a união, doação, bom humor (muito bom humor), resiliência e um bom cafezinho, são essenciais para a boa convivência. Agradeço a oportunidade de ter feito parte da vida de cada um. Em particular aos colegas: Anderson (Tiquinho), Anderson, Beatriz, Eder, Eduarda, Edvair, Katiuce, Miqueias, Naiguiel, Rodrigo, Viviane.

Em especial agradeço aos amigos Edvair, Miqueias, Eduarda, (os dois últimos filhos que adotei), vocês sempre estarão no meu coração.

Aos professores da UFGD-PROFMAT, pela paciência, conhecimento e precioso apoio durante todo o curso e pelas inúmeras aulas extras quando precisávamos. Agradeço ao Prof. Bruno Locatelli que sempre acreditou que seriamos capazes.

A professora Irene mais do que orientadora, agradeço pela dedicação, carinho e enorme atenção. Obrigado por todas as sextas-feiras que estudamos juntas para a qualificação e por todo o seu tempo, aplicação e disciplina para que pudéssemos desenvolver este trabalho. Agradeço por ter acreditado no meu potencial sempre oferecendo palavras de incentivo e suporte quando precisei. Penso que algumas pessoas nos marcam, nem sempre por estarem continuamente ao nosso lado nos incentivando, mas sim porque de certa forma nos fizeram segui-la como exemplo de humildade, disciplina e competência.

A Mariana pelo estímulo e todos os livros e cadernos emprestados durante o curso.

As amigas de caminhada e toda uma vida, Maria Aparecida e Marystela pela imensa contribuição nesse trabalho.

A direção Colegiada da Escola Bonifácio Camargo Gomes (Bonito), Maria Luisa e Rose por sempre entenderem a minha ausência e acreditarem em mim.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Posso ter defeitos, viver ansioso e ficar irritado algumas vezes,
mas não esqueço de que minha vida é a maior empresa do mundo.
Que posso evitar que ela vá a falência.
Ser feliz é reconhecer que vale a pena viver
apesar de todos os desafios, incompreensões e períodos de crise.
Ser feliz é deixar de ser vítima dos problemas e
se tornar um autor da própria história.
É atravessar desertos fora de si, mas ser capaz de encontrar
um oásis no recôndito da sua alma.
É agradecer a Deus a cada manhã pelo milagre da vida.
Ser feliz é não ter medo dos próprios sentimentos.
É saber falar de si mesmo.
É ter coragem para ouvir um "não".
É ter segurança para receber uma crítica, mesmo que injusta.
Pedras no caminho?
Guardo todas, um dia vou construir um castelo...
(Fernando Pessoa)

Resumo

O escopo desse trabalho é explorar as sequências numéricas de Pell e Catalan através de uma abordagem com o uso de recorrências e funções geradoras. Introduzir conceitos e aspectos algébricos para algumas propriedades relacionadas a essas sequências. Iremos explorar algumas interpretações combinatórias e aplicações, tais como razão de prata, ladrilhamentos, n- braceletes, triangulações de polígonos e caminhos reticulados.

Palavras-chave: Recorrências. Funções Geradoras. Números de Pell. Números de Catalan. Razão de Prata. Triangulações. Ladrilhamento. n-braceletes.

Abstract

The scope of this work is to explore the numerical sequences of Pell and Catalan through an approach with the use of recurrences and generating functions. Introduce concepts and algebraic aspects to some properties related to these sequences. We will explore some combinatorial interpretations and applications, such as silver ratio, tiling, n-bracelets, polygon triangulations and lattice paths.

Keywords: Recurrences. Generating Functions. Pell Numbers. Catalan Numbers. Silver Ratio. Triangulations. Tying. n-bracelets..

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

Sumário

INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é o estudo de duas sequências numéricas de números inteiros, mais precisamente aquelas em que os termos são obtidos por meio de uma regra matemática aplicada aos termos anteriores, em particular os números de Pell e os de Catalan.

Um exemplo de sequências numéricas são as progressões, segundo Boyer (2010), as progressões foram estudadas desde os povos muito antigos como os babilônicos. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, no qual os egípcios de 5.000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio, para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento. Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste, um pouco antes do sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, e com 30 dias cada mês e mais 5 dias de festas dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Isis e Nephthys. Os egípcios dividiram ainda os dozes meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

Iremos explorar essas duas sequências numéricas, a saber, Pell e Catalan. Vamos defini-las e em seguida obter uma fórmula fechada por meio de duas técnicas: polinômio característico e função geradora. A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, visando desenvolver métodos que permitam contar, de uma forma indireta, o número de elementos de um conjunto, sem que seja necessário enumerar seus elementos, com isso associamos a combinações, arranjos e permutações. No entanto, outras técnicas podem ser uteis, tais como, o princípio de inclusão e exclusão, funções geradoras, relações de recorrência e princípio da casa dos pombos.

As relações de recorrência podem modelar problemas relacionados a Matemática Discreta, Combinatória e Teoria dos Números, temos como objetivo principal, estabelecer uma fórmula explícita para tal sequência gerada pela recorrência em questão. Uma das ferramentas para determinar a fórmula explícita é a utilização do polinômio característico, entretanto, essa técnica é válida para recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes. Todavia o conceito de função geradora pode abranger uma classe mais ampla de relações de recorrência.

Dessa forma, usaremos o polinômio característico e função geradora para determinar uma fórmula para o número de Pell que é um dos tópicos principais de estudo desse trabalho e outros resultados que envolvam essa sequência explorando os aspectos combinatórios. Com relação a sequência de Catalan que não é uma sequência linear, a fórmula explicita será obtida por meio de função geradora. Função geradora é uma técnica versátil para solução de problemas combinatórios.

Este trabalho está subdivido em 3 capítulos. No primeiro capítulo, apresentaremos as definições e o conceito de recorrências, nosso foco será apenas das resoluções das recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem com coeficientes constantes e as funções geradoras. Serão abordados alguns teoremas encontrados em (CARVALHO; MORGADO, 2015, p.), bastante simples de se demonstrar e faremos alguns exemplos aplicando esses teoremas.

No segundo capítulo, apresentaremos uma definição para a sequência de Pell, também conhecida como os números de Pell. Estabeleceremos uma fórmula fechada para a recorrência usando o polinômio característico e outra solução para a fórmula explícita com as funções geradoras. Outro enfoque será demonstrar algumas propriedades e identidades dos números de Pell, com isso, realizaremos algumas interpretações combinatórias para validar algumas propriedades. Também, apresentaremos o número de prata, ou ainda, razão prateada que está relacionada ao número de Pell e outras aplicações como na arquitetura e em situações do uso cotidiano.

No terceiro capítulo, apresentaremos a definição para os números de Catalan. A partir da recorrência estabeleceremos uma fórmula explícita usando o conceito de funções geradoras. Em seguida, provaremos algumas propriedades explorando os aspectos algébricos e finalmente, faremos algumas interpretações combinatórias, dentre elas, iremos relacionar os números de Catalan com o número de triangulações de um polígono de n lados e os caminhos reticulados que saem da origem $(0,0)$ e chegam no ponto (n,n).

1 RECORRÊNCIAS E FUNÇÃO GERADORA

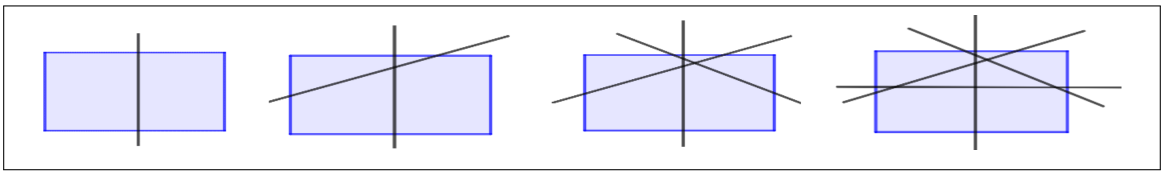
Os problemas de contagem podem ser resolvidos combinando diversos métodos, tais como princípios aditivo e multiplicativo, da inclusão e exclusão, entre outros. Também podemos usar o conceito de recorrências, cuja ideia principal por trás desse conceito é expressar uma quantidade de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$. Em termos da quantidade x_n

1.1 Recorrências

Uma relação de recorrência é uma equação em que cada termo de uma sequência é definido em função dos elementos anteriores. Resolver uma relação de recorrência consiste em encontrar, se possível, uma fórmula explícita que dá o termo geral da sequência. A modelagem matemática por meio de uma recorrência linear consiste em abordar um problema particular, por exemplo, calcular o número de determinadas configurações quando dispomos de uma quantidade pequena de elementos e a partir daí estabelecer uma equação que descreve o problema genérico. Ou seja para um dado número natural n, esta equação depende das configurações iniciais e das geradas até o passo $n-1$.

Em Poffal e Ferreira (2012), aborda uma situação no qual podemos modelar usando o conceito de recorrência. Para isso observemos a seguinte situação: vamos cortar fatias de um bolo retangular que apresentamos na tabela abaixo:

Figura 1 – Bolo Retangular Fatiado



Fonte: Autor.

Na Figura 1, podemos visualizar que quando fazemos um corte no bolo, obtemos 2 pedaços. Quando fazemos 2 cortes obtemos 4 pedaços. No terceiro corte teremos 7 pedaços e com o quarto corte teremos 11 pedaços. Na sequência quantos pedaços obteremos no n-ésimo corte? Podemos observar que os pedaços vão aumentando a cada corte e que no n-ésimo corte teremos n pedaços novos. Se tomamos $P(n)$ como o total de pedaços obtidos por n cortes teremos a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(n) = P(n-1) + n, \qquad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Um exemplo interessante de recorrência são as progressões aritméticas muito usadas no ensino médio e que modela diversos problemas aplicados. Uma progressão aritmética é uma sequência da forma $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ onde r é a razão a_1 é primeiro termo da sequência definida por $a_{n+1} = a_n + r$, com $n \geq 1$.

Definir uma sequência recursivamente é uma maneira prática de utilizar uma ferramenta matemática eficiente que permite modelar problemas partindo de um caso particular para um caso geral. Essa técnica permite o cálculo de qualquer termo da sequência em função do termo anterior. A finalidade do modelo como já dissemos anteriormente, é obter a partir do comportamento genérico da recorrência linear uma solução do problema genérico de forma explícita.

1.2 Recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes tem a forma $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, onde $q \neq 0$ e p e q são constantes e X_0 e X_1 são condições iniciais. A cada recorrência desse tipo podemos associar uma *equação característica*, nesse caso a equação da referida equação é: $r^2 + pr + q = 0$ e r_1 e r_2, são as raízes dessa equação. Em CARVALHO e MORGADO (2015, p.), é descrito que o cálculo das raízes dessa equação está relacionado com a solução da recorrência dada. Para isso vamos descrever como que é validado esses resultados.

O teorema a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, então qualquer sequência explicita da recorrência em questão é da forma $X_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ onde C_1 e C_2 constante a determinar por meio das condições inicias.

Teorema 1.2.1. Se as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, são r_1 e r_2 então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da equação da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, para quaisquer valores de C_1 e C_2.

Demonstração. De fato $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência em questão, pois por definição $a_{n+1} = C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}$ e $a_{n+2} = C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2}$.

Substituindo ambos na equação de recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, temos: $C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p\left[C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1}\right] + q\left[C_1 r_1^n + C_2 r_2^n\right] = 0$, agrupando os termos de forma conveniente obtemos:

$$C_1 r_1^n \left(r_1^2 + pr_1 + q\right) + C_2 r_2^n \left(r_2^2 + pr_2 + q\right) = C_1 r_1^n (0) + C_2 r_2^n (0) = 0$$

■

Teorema 1.2.2. Se as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$ com condições inicias x_0 e x_1 são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, onde $y_1 = x_0$ e $y_2 = x_1$. Segue do teorema 1.2.1 que as soluções são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. Determinaremos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações $\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}$, isto é $C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$ e $C_2 = \frac{r_2 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}$ Isto é possível pois $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$. Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n \left(r_1^2 + pr_1 + q\right) - C_2 r_2^n \left(r_2^2 + pr_2 + q\right)$.

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$; os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$. Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$.

Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n. ■

Exemplo 1.2.1. *Determine a solução da recorrência $X_{n+2} - 4X_{n+1} - 5X_n = 0$,dados $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$.*

Solução: *Considere a recorrência $X_{n+2} - 4X_{n+1} - 5X_n = 0$. A equação característica é $r^2 - 4r - 5 = 0$, cujas as raízes são -1 e 5. De acordo com teorema 1.2.1, todas as formas $a_n = C_1(-1)^n + C_2(5)^n$ são solução da recorrência.*

Substituindo $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$, obtemos $a_0 = C_1(-1)^0 + C_2(5)^0 = 1$ e $a_1 = C_1(-1)^1 + C_2(5)^1 = 1$ que resulta no sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 5C_2 = 1 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = \dfrac{2}{3}$ e $C_2 = \dfrac{1}{3}$.

Logo, a solução da recorrência dada é $a_n = \dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{3}5^n$.

Teorema 1.2.3. Se as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, com $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, com condições inicias x_0 e x_1 e os valores de C_1 e C_2 constantes a determinar.

Demonstração. De fato, se as raízes são iguais, então $r = -\dfrac{p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + nC_2 r^n$ na recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, obtemos:

$$C_1 r^{n+2} + nC_2 r^{n+2} + p\left[C_1 r^{n+1} + nC_2 r^{n+1}\right] + q\left[C_1 r^n + nC_2 r^n\right],$$

agrupando os termos de forma conveniente obtemos:

$$C_1r^n(r^2+pr+q)+nC_2r^n+(r^2+pr+q)+C_2r^nr(2r+p) = C_1r^n(0)+nC_2r^n(0)+C_2r^nr(0) = 0$$

As constantes são determinadas por meios das condições iniciais. ■

Exemplo 1.2.2. *Determine a solução da recorrência $X_{n+2} - 8X_{n+1} + 16X_n = 0$, dados $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$.*

Solução: *Considere a recorrência $X_{n+2} - 8X_{n+1} + 16X_n = 0$. A equação característica é $r^2 - 8r + 16 = 0$, cujas as raízes são $r_1 = 4$ e $r_2 = 4$. De acordo com teorema 1.2.3, todas as formas $a_n = C_1 4^n + nC_2 4^n$ são solução da recorrência.*

Substituindo $X_0 = 1$ e $X_1 = 1$, obtemos $a_0 = C_1(4)^0 + 0C_2(4)^0 = 1$ e $a_1 = C_1(4)^1 + 1C_2(4)^1 = 1$ que resulta no sistema

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 4C_1 + 4C_2 = 1 \end{cases},$$

cuja solução é $C_1 = 1$ e $C_2 = -\dfrac{3}{4}$.

Logo, a solução da recorrência dada é $a_n = 4^n - \dfrac{3}{4}4^n$.

Teorema 1.2.4. Se as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$ forem complexas, $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$, então $a_n = \rho^n \left[C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)\right]$ é solução da recorrência $X_{n+2} + pX_{n+1} + qX_n = 0$, com condições iniciais x_0 e x_1 e os valores de C_1 e C_2 constantes.

Demonstração. De fato, como o r_1 é complexo ou seja, $r_1 = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária, tal que $i^2 = -1$, além disso r_1 e r_1 as raízes complexas da equação característica. Esses números são complexos e conjugados, ou seja, o conjugado de $r_1 = Z_1 = a + bi$ é $r_2 = Z_2 = a - bi$.

De acordo com DANTE (2011, p.156), as raízes podem ser escritas da forma trigonométrica, onde $r_1 = \rho\left(\cos\theta + i \sin\theta\right)$ e $r_2 = \rho\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$, com $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Na trigonometria ρ representa o módulo do número complexo e θ é o argumento, tal que $\cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $\sin\theta = \dfrac{b}{\rho}$

A fórmula de Moivre[1] representa a potência de um número complexo, tal que $r_1^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$ e $r_2^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$, Dessa forma,

$$a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n = \rho^n\left[(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i((C_1 - C_2)\sin(n\theta)\right].$$

Fazendo $C_1^{"} = C_1 + C_2$ e $C_2^{"} = i(C_1 + C_2)$, a solução pode ser escrita

$$a_n = \rho^n\left[C_1^{"}\cos(n\theta) + i(C_2^{"}\sin(n\theta)\right].$$

1 Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francês Benjamin et al. (2008, p.312)

■

Exemplo 1.2.3. *Determine a solução da recorrência* $X_{n+2} - 2X_{n+1} + 2X_n = 0$, *dados* $X_1 = 1$ *e* $X_2 = 2$.

Solução: *Considere a recorrência* $X_{n+2} - 2X_{n+1} + 2X_n = 0$. *A equação característica é* $r^2 - 2r + 2 = 0$ *, cujas as raízes são* $r_1 = 1 + i$ *e* $r_2 = 1 - i$. *Sendo* r_1 *e* r_2 *as raízes, calculamos o modulo e o argumento da equação* $\rho = |r_1| = |r_2| = \sqrt{2}, \theta = \dfrac{\pi}{4}$. *De acordo com teorema 1.2.4, a solução da recorrência é da forma* $a_n = \rho^n \left[C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)\right]$, *substituindo as raízes e o argumento temos a solução da recorrência* $a_n = \sqrt{2}^n \left[C_1 \cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) - C_2 \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

Fazendo $X_1 = 1$ *e* $X_2 = 2$, *temos*

$$\begin{cases} \sqrt{2}\left[C_1 \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = 1 \\ 2\left[C_1 \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_2 = 2 \end{cases}$$

cuja solução é $C_1 = 0$ *e* $C_2 = 1$

Logo, a solução da recorrência dada $a_n = \sqrt{2}^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

1.3 Usando Função Geradora para Resolver Recorrências

O método de resolução de problemas de contagem por meio de funções geradoras é atribuído a Euler e apresenta-se muito útil. Além disso, pode ser usado na resolução de recorrências.

Normalmente, quando resolvemos um problema de contagem estamos interessados em determinar uma quantidade a_n que depende do natural n, essa dependência de n pode ser formalizada por meio de uma sequência, cujos valores que queremos determinar: $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. A resolução do problema consiste em determinar o termo geral dessa sequência. As funções geradoras podem ser de grande utilidade para determinar o termo geral de uma determinada sequência. Função geradora é uma forma de abordarmos a teoria elementar de funções e são ferramentas úteis para contagem de configurações discretas que permitem relacionar os conceitos de contagem (combinatória) com funções contínuas. Um exemplo de funções contínuas são as funções polinomiais, um polinômio é uma expressão da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Uma generalização de polinômios são as séries de potência, que é uma expressão da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, onde $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \geq 0$ com $i \in \mathbb{N}$ são chamados de *coeficientes das potências*. Essas séries podem ser usadas para encontrar aproximações de números irracionais, por exemplo, o número e, π entre outros. Em um curso de cálculo são estudadas as funções que podem ser expressas com séries de potências, nesse trabalho iremos abordar algumas funções desse tipo, sem nos preocupar com a convergência, com intuito apenas de resolver as recorrências que geram os números de Pell e de Catalan.

Dessa forma, considere as séries de potências

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots,$$

Dizemos que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_n = b_n, \forall n \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Agora definimos as soma e produto de duas séries de potência, analogamente a somas e produtos de polinômios, para isso dados

$A, B \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots,$

Então definimos a soma:

$$Af(x) + Bg(x) = (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + \dots.$$

Portanto os coeficientes de x^r, da serie de potência $Af(x) + Bg(x)$, são da forma $Aa_r + Bb_r, \forall r \in \mathbb{N}$.

O produto de $f(x)$ por $g(x)$ é dado:

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)x^3 + \dots$$

$$\dots + (a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \dots a_0bk)x^k + \dots$$

Assim os coeficientes de x^k, da série de potência $f(x)g(x)$, são da forma $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_kb_{k-i}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Sabemos que para $|x| < 1, f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, quando $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, em cálculo estamos preocupados em saber para quais valores de $x, f(x)$ converge. Nesse caso não estamos preocupados com as questões de convergência, e podemos tratar a série simbolicamente, como uma serie formal de potência, No contexto de série de potência estaremos interessados somente no cálculo dos coeficientes destas funções quando expandidas em séries de potência e não necessariamente em atribuir valores numéricos a variável x.

Uma primeira aplicação das séries de potência, por exemplo, consiste em determinar uma fórmula explícita para a sequência definida por $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, para $n \geq 0$. A ideia é considerar a série de potencia $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ onde a_n é o termo da sequência definida pela recorrência em questão. Em seguida multiplique $f(x)$ por $-5x$ e em seguida por $6x^2$, assim,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$-5xf(x) = -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - 5a_3x^4 + \dots$$

$$6xf(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + 6a_3x^5 + \dots$$

Somando as equações acima, os coeficientes de $x^n, n \geq 2$, anulam-se e ficamos com $(1-5x+6x^2)f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x}{1-5x+6x^2}$, observe que $1-5x+6x^2 = (1-2x)(1-3x)$ e que é razoável procurar constantes a e b tais que $\dfrac{a}{1-2x} + \dfrac{b}{1-3x} = \dfrac{x}{1-5x+6x^2} \Leftrightarrow$ $\dfrac{(a+b)-(3a+2b)x}{(1-2x)(1-3x)} = \dfrac{x}{1-5x+6x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+2b=-1 \end{cases}$, resolvendo o sistema temos $a=-1$ e $b=1$.

Logo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1-5x+6x^2} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x} \\ &= (1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\dots) - (1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\dots) \\ &= (3^0-2^0) + (3^1-2^1)x + (3^2-2^2)x^2 + (3^3-2^3)x^3 + \dots \end{aligned}$$

assim o coeficiente x^n em $f(x)$ é $3^n - 2^n = a_n$.

Definição 1.3.1. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica. A série de potência $A(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx_n$ é chamada <u>função geradora ordinária</u> para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\hat{A}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\dfrac{x^n}{n!}$ é chamada <u>função geradora</u> exponencial para a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 1.3.1. *Determine a função geradora ordinária para a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida pela recorrência* $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1}+1 \end{cases}$

Solução *Consideremos a seguinte sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida pela recorrência:*

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1}+1 \end{cases}$, *os primeiros termos da sequência são:* $1, 4, 13, 40, \dots$

Em alguns casos raros é possível conjecturar uma fórmula explicita para a_n a partir da simples observação dos primeiros termos. Quando isto é possível, pode-se tentar a prova por indução.

O ideal, quanto se está lidando com uma relação de recorrência, é a obtenção de uma fórmula que forneça o valor de a_n como uma função de n. O procedimento que fornecemos faz uso do conceito de função geradora ordinária para determinar uma fórmula explícita para a_n, para isto, escreva

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Multiplicamos a relação de recorrência por x^n obtemos: $a_nx^n = 3a_{n-1}x^n + x^n$.

Somando os dois lados para $n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Segue daí que $f(x) - a_0 = 3xf(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. *Podemos escrever* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$.

Com essas observações e sabendo que $a_0 = 1$ *podemos resolver* $f(x)$ *obtendo*

$$f(x) - 3xf(x) = 1 + \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow f(x)(1-3x) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-3x)}.$$

Podemos a partir de $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-3x)}$ *determinar uma fórmula explicita para* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Para isso vamos decompor* $f(x)$ *em frações parciais, este método é visto em cálculo quando se estuda a resolução de integrais de funções racionais. Ou seja,*

$$\frac{1}{(1-x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x}$$

Para que esta igualdade seja válida, A e B devem, portanto, satisfazer os sistemas de equações:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad e \quad B = \frac{3}{2} \quad \textit{e portanto} \quad f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-3x}$$

Mas, as séries para essas duas funções são conhecidas:$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$, *colocando* x^n *em evidencia, temos a solução:* $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Teorema 1.3.1 (**Teorema Binomial**)**.** Dados a e b números reais e n um número natural, tem-se que

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots + \binom{n}{i} x^i + \ldots + x^n,$$

Caso o leitor esteja interessado em uma prova do teorema 1.3.1, veja (SANTOS et al., 2007, p.161).

Teorema 1.3.2 (**Teorema Binomial Generalizado**)**.** Seja u um número real arbitrário. Então:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r \tag{1.2}$$

onde,

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}, & \text{se} \quad r > 0 \\ 1, & \text{se} \quad r = 0 \end{cases}$$

O número $\binom{u}{r}$ é chamado coeficiente *binomial generalizado.*

Demonstração. Considere a função $f(x) = (1+x)^u$, u é um número real arbitrário. Podemos considerar a expansão de $f(x)$ em série de Taylor (CAMINHA, 2015, p.358) em torno de $x = 0$. Dessa forma,

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}x^r + \ldots$$

Denotando,

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}, & \text{se} \quad r > 0 \\ 1, & \text{se} \quad r = 0 \end{cases},$$

temos $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r$

Observamos que quando u é um número inteiro positivo temos o Teorema Binomial (já conhecido), pois $\binom{u}{r} = 0$ se $n > u$ ■

Corolário 1.3.1. O coeficiente de x^p na expressão $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n$ é igual $\binom{n+p-1}{p}$.

Demonstração. Temos que: $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$. Fazendo $u = -n$ e substituindo x por $-x$ em 1.2, obtemos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-1)^r(-x)^r \tag{1.3}$$

Observamos que o coeficiente de x^p em 1.3 é dado por (vamos reescrevê-lo de maneira conveniente):

$$\begin{aligned} \binom{-n}{p}(-1)^p &= \frac{-n(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-p+1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{-n(-1)(n+1)(-1)(n+2)\ldots(-1)(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(-1)^p}{p!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)(n-1)!}{p!(n-1)!} \\ &= \frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots 1}{p!(n-1)!} \\ &= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \\ &= \binom{n+p-1}{p} \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.3.2. *Calcule o coeficiente de* x^{3n} *em* $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2n})^3$.

Solução:
$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2n})^3 = \left(\dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}\right)^3 = (1-x^{2n+1})^3(1-x)^{-3} = (1-3x^{2n+1}+3x^{4n+2}-x^{6n+3})(1-x)^{-3}$.

Podemos escrever $(1-x)^{-3} = \sum\limits_{r=0}^{\infty}\binom{-3}{r}(-x)^r = \sum\limits_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-3}{r}x^r$, *concluímos que o coeficiente de* x^{3n} *é igual a* $(-1)^{3n}\binom{-3}{3n} - 3(-1)^{n-1}\binom{-3}{n-1}$.

Temos que $\binom{-n}{r}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$.

Assim,

$$(-1)^{3n}\binom{-3}{3n} - 3(-1)^{n-1}\binom{-3}{n-1} =$$

$$= (-1)^{3n}(-1)^{3n}\binom{3+3n-1}{3n} - 3(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}\binom{3+n-1-1}{n-1} =$$

$$= \binom{3n+2}{2} - 3\binom{n+1}{n-1} = \binom{3n+2}{2} - 3\binom{n+1}{2} = 3n(n+1)+1.$$

Exemplo 1.3.3. *Calcule o coeficiente de* x^{15} *em* $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$.

Solução: *Observe que*

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 = x^4(1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 = x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4.$$

A solução para o problema é o coeficiente de x^{15}, *equivale a encontramos o coeficiente de* x^{11} *em* $\left(\dfrac{1-x^6}{1-x}\right)^4$. *Temos que* $(1-x^6)^4 = 1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}$ *e*

$$(1-x)^4 = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-4}{j}(-1)^j x^j$$

Portanto a resposta para o problema é:

$$\binom{-4}{11}(-1)^{11} - 4\binom{-4}{5}(-1)^5 = \binom{4+11-1}{11} - 4\binom{4+5-1}{5} = \binom{14}{11} - 4\binom{4}{5} = 140.$$

2 OS NÚMEROS DE PELL

Neste capítulo, definiremos uma sequência de números em que os dois primeiros termos valem 0 e 1 e cada número de Pell é obtido pela soma de duas vezes o número de Pell anterior mais o número de Pell antecessor, tal sequência é chamada de sequência de Pell ou números de Pell.

Porém, antes vamos descrever umas considerações sobre o autor dessa sequência. Segundo Stedall (2002), descreve o matemático John Pell (1611–1685) como um dos matemáticos mais enigmáticos do século XVI e de um homem que amava ler, estudar, trabalhar em projetos, ensino, e trocar correspondências envolvendo trabalhos com matemática. Ele não é famoso na história da matemática devido ao seu desejo de manter-se anônimo, e por sua falta de publicações de significativa relevância e de pouquíssimos materiais publicados. Dos poucos livros e trabalhos que ele publicou, o que é mais conhecido é uma "Introdução à Álgebra" publicado em 1668. John Pell, pelo menos o nome, é provavelmente mais conhecido por intermédio da sequência ou equação de Pell.

2.1 Definição e fórmula explícita para os números de Pell usando o conceito de recorrência

Os números de Pell formam uma sequência infinita de inteiros conhecidos desde à Antiguidade que compõe os denominadores das aproximações racionais que convergem para o irracional $\sqrt{2}$. Esta sequência de denominadores irracionais é dada por $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \ldots$. Sendo os primeiros termos da sequência dos números de Pell $1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \ldots$. Além disso, eles são dados por meio de uma relação de recorrência como segue.

Definição 2.1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$, denotamos por P_n o número de Pell de ordem n, cuja lei de formação é dada pela relação recorrência:

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(n) = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases} \tag{2.1}$$

Agora, determinaremos uma fórmula explícita para os números de Pell por meio do conceito de recorrência homogênea linear de segunda ordem, cujos coeficientes são constantes, pois a relação de recorrência que define os números de Pell apresentam essas características. Para isso usaremos o teorema 1.2.2 e reescreveremos a recorrência 2.1 como:

$$P(n) - 2P_{n-1} + P_{n-2} = 0 \tag{2.2}$$

A equação característica de 2.2 é $r^2 - 2r - 1$ e resolvendo temos as raízes $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ que são reais e distintas. Dessa forma, a solução da recorrência será da forma:

$$P(n) = C_1 r_1^n C_2 r_2^n = 0 \tag{2.3}$$

substituindo as raízes r_1 e r_2 temos:

$$P(n) = C_1(1 + \sqrt{2})^n C_2(1 + \sqrt{2})^n. \tag{2.4}$$

Sabendo que C_1 e C_2 são constantes a determinar e usando as condições iniciais de 2.1, sendo $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1(1 + \sqrt{2}) + C_2(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases} \tag{2.5}$$

Resolvendo 2.5, temos:

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo C_1 e C_2 em 2.4, encontramos a fórmula explícita para os números de Pell.

$$P(n) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^n.$$

2.2 Função geradora e uma fórmula explicitam para os números de Pell

Faremos uma outra abordagem para gerar uma fórmula explícita para os números de Pell, tal abordagem fará o uso de funções geradoras. Para isso, considere a série de potências a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$, onde P_n é o n-ésimo número de Pell.

Multiplicando por x^n em ambos os lados de 2.2 temos:

$$P_n x^n = 2P_{n-1} x^n + P_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} P_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2P_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2} x^n =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n x^n = 2x \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2} x^{n-2} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n x^n = 2x \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1} x^{n-1} + x^2 f(x) =$$

$$f(x) + P_0 + P_1 x = 2x(f(x) - P_0) + x^2 f(x) \Rightarrow f(x) - 2x f(x) - x^2 f(x) = x \Rightarrow$$

$$(1-2x-x^2)f(x)=x$$

Desse modo,

$$f(x)=\frac{x}{1-2x-x^2}$$

Assim, obtemos o resultado:

Proposição 2.2.1. A função geradora para os números de Pell é:

$$f(x)=\frac{x}{1-2x-x^2}$$

A proposição 2.2.2 estabelece uma fórmula explícita para os números de Pell usando o conceito de função geradora.

Proposição 2.2.2. Seja P_n o n-ésimo número de Pell. Então

$$P_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right].$$

Demonstração. Usando frações parciais podemos encontrar A e B tais que

$$f(x)=\frac{x}{1-2x-x^2}=\frac{x}{(1-(1+\sqrt{2})x)(1-(1-\sqrt{2})x)}=$$

$$=\frac{A}{(1-(1+\sqrt{2})}+\frac{B}{(1-(1-\sqrt{2})} \tag{2.6}$$

Logo,

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2})=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $B=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ substituindo em 2.6 temos,

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(1-(1+\sqrt{2})x)}+\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(1-(1-\sqrt{2})x)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n x^n=x^n\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]\right].$$

$$P_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right] \tag{2.7}$$

■

2.3 Propriedades para sequência dos números de Pell

Na matemática há uma infinidade de sequências que podemos descrever situações práticas que poderão ser usadas em diversos campos das ciências, em geral, como exemplo citamos a sequência de Fibonacci que é muito explorada, sendo estudada de variadas formas explorando tanto os aspectos combinatórios como os algébricos.

A sequência de Pell é tão importante quanto a sequência de Fibonacci e na literatura matemática é possível encontrar uma quantidade razoável de resultados relacionados a essa sequência. Nos últimos tempos alguns matemáticos estudaram a sequência de Pell relacionando matrizes de ordem 2×2 e recorrências lineares.

Em Santana e Diaz-Barrero (2006) são concebidos vários resultados correlacionados aos números de Pell. Algumas consequências exploraremos nesse trabalho, sendo que um deles estabelece que a soma dos primeiros $4n + 1$ números de Pell é um quadrado perfeito, e como consequência outras propriedades para os números de Pell são obtidas.

Segue de 2.7 que $P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}\right]$. Tome $\alpha = 1+\sqrt{2}$ e $\beta = 1-\sqrt{2}$. Então,

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right] = P_n \tag{2.8}$$

Vamos definir por S_n a seguinte soma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} P_n = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n,$$

Provaremos que $S_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4}$, por indução sobre n.

Para $n = 1, S_1 = 1$. Por outro lado, $S_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2}{4} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2-2}{4} = \frac{4}{4} = 1 = P_1$

Suponha que para algum $n \geq 1$, $S_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4}$. Observe que:

$$S_{n+1} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n + P_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4} + P_{n+1} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2 + \sqrt{2}\alpha^{n+1} - \sqrt{2}\beta^{n+1}}{4} =$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}(1+\sqrt{2}) + \beta^{n+1}(1-\sqrt{2}) - 2}{4} = \frac{\alpha^{n+1}\alpha + \beta^{n+1}\beta - 2}{4} = \frac{\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} - 2}{4}$$

Portanto, segue por indução que

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = S_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - 2}{4}.$$

Dessa forma temos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.1. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, temos que

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{4}$$

Corolário 2.3.1. Para todo $n \geq 0$, $S_{4n+1} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{4n+1}$ é um quadrado perfeito.

Demonstração. Observe que $\alpha \cdot \beta = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$.

$$\left(\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^{4n+2} + 2\alpha^{2n+1}\beta^{2n+1} + \beta^{4n+2}}{4} = \frac{\alpha^{4n+2} + 2(\alpha\beta)^{2n+1} + \beta^{4n+2}}{4} =$$

$$\frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} + 2(-1)^{2n+1}}{4} = \frac{\alpha^{4n+2} + \beta^{4n+2} - 2}{4} = S_{4n+1}$$

Segue por indução sobre n que $\dfrac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} \in \mathbb{N}$. De fato:

Para $n = 0$, temos $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2}}{2} = 1 \in \mathbb{N}$. Logo, $\dfrac{\alpha + \beta}{2} \in \mathbb{N}$

Suponha que para algum $n \geq 0$, $\dfrac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} = k \in \mathbb{N}$.

Temos que

$$\frac{\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3}}{2} = \frac{\alpha^2\alpha^{2n+1}\beta^2\beta^{2n+1}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2\alpha^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^2\beta^{2n+1}}{2} =$$

$$\frac{(1+2\sqrt{2}+2)\alpha^{2n+1} + (1-2\sqrt{2}+2)\beta^{2n+1}}{2} = \frac{(3+2\sqrt{2})\alpha^{2n+1} + (3-2\sqrt{2})\beta^{2n+1}}{2} =$$

$$\frac{3\alpha^{2n+1}+3\beta^{2n+1}+2\sqrt{2}(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})}{2}=\frac{3(\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1})}{2}+\sqrt{2}(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})=$$

$$3k+\sqrt{2}\left((1+\sqrt{2})^{2n+1}-(1-\sqrt{2})^{2n+1}\right)$$

Observe que

$$P_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{n\smile}(1-\sqrt{2})^{n}\right]\Leftrightarrow 4P_n=\sqrt{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n\smile}(1-\sqrt{2})^{n}\right]$$

Logo

$$\frac{\alpha^{2n+3}+\beta^{2n+3}}{2}=3k+4P_{2n+1}\in\mathbb{N}$$

■

Um resultado que segue imediatamente do corolário 2.3.1 é do teorema Binomial (SANTOS et al., 2007, p.161) é que

$$S_{4n+1}=\left(\sum_{n=0}^{n-1}\binom{2n+1}{n}2^{n}\right)^{2}$$

De fato,

$S_{4n+1}=\left(\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}\right)^{2}$, e segue do teorema Binomial que

$$\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}=\frac{1}{2}\left(\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{r=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{r}(\sqrt{2})^{r}+\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}(-\sqrt{2})^{j}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2+2\binom{2n+1}{2}\cdot 2+2\binom{2n+1}{4}\cdot 2^{2}+2\binom{2n+1}{6}\cdot 2^{3}+\ldots+2\binom{2n+1}{2n}\cdot 2^{n}\right]=$$

$$=1+\binom{2n+1}{2}+\binom{2n+1}{4}+\ldots+\binom{2n+1}{2n}=\sum_{r=0}^{n+1}\binom{2n+1}{2r}\cdot 2^{r}.$$

Portanto: $S_{4n+1}=\left(\sum_{r=0}^{n+1}\binom{2n+1}{2r}\cdot 2^{r}\right)^{2}=\left(\dfrac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}\right)^{2}$, ou seja,

$$(S_{4n+1})^{\frac{1}{2}}=(\sum_{r=0}^{n+1}\binom{2n+1}{2r}\cdot 2^{r}=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}. \tag{2.9}$$

Vamos considerar a sequência $(a_n), n \in \mathbb{N}$, definido $a_n = (S_{4n+1})^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2}$

É claro que $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 7 \end{cases}$ Observe que:

$$a_n = \frac{\alpha^{2n+1} + \beta 2n + 1}{2}; a_{n-1} = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3}}{2}.$$

Então:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha^{2n+3} + \beta^{2n+3}) = \frac{\alpha^{2n+1}}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}) + \frac{\beta^{2n+1}}{2}(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2}) =$$

$$= \frac{\alpha^{2n+1}}{2}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}) + \frac{\beta^{2n+1}}{2}(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}) - \frac{1}{2}(\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}) =$$

Como: $\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2 + \dfrac{1}{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2} = 3 + 2\sqrt{2} + \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \dfrac{(3 - 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})} =$
$= 3 + 2\sqrt{2} + \dfrac{(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$ e da mesma forma $\beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2} = 6$, então

$$a_{n+1}\frac{\alpha^{2n+1}}{2} \cdot 6 + \frac{\beta^{2n+1}}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2}(\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}) = 6 \cdot \left(\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2}\right) - \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{2} =$$

$$= 6 \cdot a_n - a_{n-1}.$$

Portanto, concluímos.

Proposição 2.3.2. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Seja $a_n = (S_{4n-1})^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{r} 2^r$.

Então (a_n) é solução da recorrência $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 6a_n - an - 1 \end{cases}$

Proposição 2.3.3. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ Seja $a_n = (S_{4n-1})^{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{r} 2^r = P_{2n} + P_{2n+1}$

Demonstração. Segue da proposição que $a_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{2r+1}{r} 2^r$. Por outro lado a equação característica da recorrência $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 7 \\ a_{n+1} = 6a_n - an - 1 \end{cases}$ é $x^2 - 6x + 1 = 0$

Cujas as raízes são:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{6+\sqrt{36-4}}{2} = \dfrac{6+\sqrt{32}}{2} = \dfrac{6+\sqrt{2^4\cdot 2}}{2} = \dfrac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2} = \alpha^2 \quad \text{e} \\ x_2 = \dfrac{6-\sqrt{36-4}}{2} = \dfrac{6-\sqrt{32}}{2} = \dfrac{6-\sqrt{2^4\cdot 2}}{2} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3-2\sqrt{2} = \beta^2 \end{cases}$$

Portanto: $a_n = C_1\alpha^{2n} + C_2\beta^{2n}$, sendo que C_1 e C_2 são constantes a determinar.

Como $a_0 = 1$ e $a_2 = 7$, então $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 = 7 \end{cases}$

Resolvendo o sistema obtemos: $C_1 = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-\beta}$ e $C_2 = -\dfrac{\beta+1}{\alpha-\beta}$. Dessa forma concluímos

$$a_n = \frac{(\alpha+1)\alpha^{2n} - (\beta+1)\beta^{2n}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}.$$

Segue de 2.9 que $= \dfrac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta} = P_{2n+1}$ e $\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{2} = P_{2n}$

Logo,

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{2r+1}{r} 2^r = P_{2n} + P_{2n+1}$$

■

Vamos definir para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor do que ou igual a x.

Teorema 2.3.1. Para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r}$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Para todo $n = 0$ é válido o resultado.

Para $n = 1$,

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \binom{1-r}{r} 2^{1-2r} = \sum_{r=0}^{0} \binom{1-r}{r} 2^{1-2r} = \binom{1}{0} 2^1 = 2 = P_2$$

Suponhamos que para algum $k \in \mathbb{N}, k > 1$, temos $P_{k+1}\binom{k-r}{r}2^{k-2r}$.

Queremos provar que $P_{n+2} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-r}{r} 2^{n+1-2r}$.

De fato, se n é par, ou seja, $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, então $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{2k}{2} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. Assim,

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-r}{r} 2^{n+1-2r} = \binom{n+1}{0} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1-r}{r} 2^{n+1-2r} =$$

$$= \binom{n+1}{0} 2^{n+1} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n-r}{r} + \binom{n-r}{r-1} \right] 2^{n+1-2r} =$$

$$\binom{n}{0} 2^{n+1} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n+1-2r} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r-1} 2^{n+1-2r} =$$

$$\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n+1-2r} = + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r-1} 2^{n+1-2r} \tag{2.10}$$

Fazendo $j = r - 1$ na última parcela 2.10 temos:

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1-r}{r} 2^{n+1-2r} = 2 \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j} 2^{n+1-2(j+1)} =$$

$$= 2 \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-j-1}{j} 2^{n+1-j} = 2P_{n+1} + P_n = P_{n+2}.$$

Portanto, para todo inteiro par $n \geq 0$ a fórmula 2.1 é válida. Seguindo o mesmo raciocínio para todo o caso n ímpar provamos a fórmula (I). ■

Podemos escrever para $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$ a seguinte identidade:

$$\binom{n-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k} = \frac{n+1}{n+1-k} \binom{n+1-k}{k}.$$

De fato,

$$\binom{n-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k} = \frac{(n-k)!}{(k-1)!(n-2k+1)!} + \frac{(n+1-k)!}{(n+1-2k)!k!} =$$

$$= \frac{k(n-k)! + (n+1-k)!}{k!(n+1-2k)!} = \frac{k(n-k)! + (n+1-k)(n-k)!}{k!(n+1-2k)!} = \frac{(k+n+1-k)(n-k)!}{k!(n+1-2k)!}$$

$$= (n+1) \frac{(n-k)!}{k!(n+1-2k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \frac{(n+1-k)(n-k)!}{k!(n+1-2k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \frac{(n+1-k)!}{k!(n+1-2k)!} =$$

$$= \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n+1-k}{k}$$

Segue do teorema 2.3.1 que $P_{2n-1} + P_{2n+1} = P_{2n-2} + 1 + P_{2n+1} =$

$$= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{2n-2}{2} \rfloor} \binom{2n-2-r}{r} 2^{2n-2-2r} + \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n-2-r}{r} 2^{2n-2-2r} + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n-2-r}{r} 2^{2n-2r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n-2-(r+1)}{(r+1)-1} 2^{2n-2(r+1)} + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \binom{2n-1-k}{k-1} 2^{2n-2k} + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r} =$$

$$= \binom{2n}{0} 2^{2n} + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{2n-1-r}{(r-1)} + \binom{2n-r}{r} \right] 2^{2n-2r} =$$

$$= \binom{2n}{0} 2^{2n} + \sum_{r=1}^{n} \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r}$$

Dessa forma concluímos:

Proposição 2.3.4. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Obtemos que:

$$P_{2n-1} + P_{2n+1} = \sum_{r=0}^{n} \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r}.$$

Da mesma forma como fizemos para validar a proposição 2.3.4 temos:

$$P_{2n-1} + P_{2n+1} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n+1-r}{r} 2^{2n+1-2r} + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1-r}{r} 2^{2n+1-2r} =$$

$$= \binom{2n+1}{0} 2^{2n+1} + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{2n-r}{r-1} + \binom{2n+1-r}{r} \right] 2^{2n+1-2r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{2n+1}{2n+1-k} \binom{2n+1-r}{r} 2^{2n+1-2r}$$

Dessa forma concluímos.

Proposição 2.3.5. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.Temos

$$P_{2n} + P_{2n+2} = \sum_{r=0}^{n} \frac{2n+1}{2n+1-r} \binom{2n+1-r}{r} 2^{2n+1-2r}$$

Uma interessante identidade para os números de Pell e a relação entre a potência da Matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para n natural e a sequência de Pell. Usando a diagonalização da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estabelecemos essa bela identidade como segue. Caso o leitor queria se aprofundar sobre esse tema poderá recorrer a livros de álgebra linear ou consultar o breve resumo do apêndice anexo a esse trabalho.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vamos encontrar a Matriz P que diagonaliza A. Para isso vamos determinar autovalores de A.

$$\lambda I - A = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda & \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$P(\lambda) = 0, \quad \text{temos :} \quad \lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

A matriz P que diagonaliza A é formada pelos autovetores de A, associados a λ_1 e λ_2.

Além disso,

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e $P = [P_1 P_2]$, onde $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ é autovetor associados a λ_1 e $P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ é autovetor associado a λ_2.

Encontrando P_1, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1+\sqrt{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} 2x + y = (1+\sqrt{2})x \\ x = (1+\sqrt{2})y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -(1+\sqrt{2}) & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \to (1-\sqrt{2})l_2 + l_1} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(1-\sqrt{2})x + y = 0 \Leftrightarrow y = -(1-\sqrt{2})x$$

Logo: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -(1-\sqrt{2})x \end{bmatrix} = -x \begin{bmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Encontramos P_2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-\sqrt{(2)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} 2x + y = (1-\sqrt{2})x \\ x = (1-\sqrt{2})y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y - x = +\sqrt{2}x = 0 \\ x - y + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (1-\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1+\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \to -(1+\sqrt{2})l_2 + l_1} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(1+\sqrt{2})x + y = 0 \Leftrightarrow y = -(1+\sqrt{2})x$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -(1+\sqrt{2})x \end{bmatrix} = -x \begin{bmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Temos que $\{P_1, P_2\}$ é linearmente independente e P que diagonaliza A e $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Além disso, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}DP$, onde $D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Logo, calculando a inversa de P obtemos:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1-\sqrt{2})\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{(1-\sqrt{2})\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos a seguinte relação para a matriz $A : A = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = D$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Se $A = PDP^{-1}$, então $A^n = PD^nP{-}1$.

De fato, se $n = 1$ então $A = PDP^{-1}$, suponha que $A^n = PD^nP^{-1}$ e observe que $A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P$. Portanto, segue por indução sobre n o resultado.

Como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} -(1+\sqrt{2})^n & -(1-\sqrt{2})^n \\ (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n & (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} -(1+\sqrt{2})^n(-1)(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2}) & -(1-\sqrt{2})^n(-1)-(1-\sqrt{2})^n \\ (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n(-1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2}) & (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n(-1)+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1} & (1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n \\ (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n & (1+\sqrt{2}^n-1-(1-\sqrt{2})^{n-1} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\right] & \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right] \\ \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n\right] & \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}\right] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{pra todo} n \in \mathbb{N}.$$

Com isso obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.6. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$

Corolário 2.3.2. Para todo $n \in \mathbb{N}, (-1)^n = P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2$.

Demonstração. Segue da proposição 2.3.6 que, $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\right) = \det\left(\begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}\right)$,
Ou seja,

$$\left(\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^n = P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 \Rightarrow (2.0-1)^n = P_{n+1}Pn - 1 - P_n^2,$$

ou ainda $(-1)^n = P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2$ ■

Em Dasdemir (2011) e Srisawat e Sriprad (2016) são abordadas inúmeras propriedades dos números de Pell e matrizes 2×2 e com isso obtendo outras identidades, usando o conceito de determinantes de uma matriz, sendo que algumas dessas identidades abordamos nesse trabalho. Por isso considere

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_1 = 2 \\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \tag{2.11}$$

É possível provar facilmente por indução sobre $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ que $Q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$.

De fato, para $n = 1, Q_1 = P_1 + P_0 = 2 + 0 = 2$. Suponha $Q_k = P_{k+1} + P_{k-1}$ para $K > 1$ e observe que

$$Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1} = 2(P_{n+1} + P_{n-1}) + P_n + P_{n-2} = (2P_{n-1} + P_{n-2}) = P_{n+2} + P_n.$$

Dessa forma ainda podemos obter que $Q_n = P_{n+1} + P_{n-1} = 2P_n + P_{n-1} + P_{n-1} = 2P_n + 2P_{n-1}$, para $n \geq 1$, ou seja, $\dfrac{Q_n}{2} = P_n + P_{n-1}$.

Outra identidade interessante que obtemos para Q_n é $Q_n = \alpha^n + \beta^n$ cujos $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$, ou seja,

Proposição 2.3.7. Dada a recorrência $\begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_1 = 2 \\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}$, $n \geq 2$ então $Q_n = \alpha^n + \beta^n$.

Demonstração. A recorrência 2.1 é linear homogênea com coeficientes constantes. A equação características de 2.2 é $x^2 - 2x + 1 = 0$ cujas as raízes são $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

Então $Q_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, onde C_1 e C_2 são constantes a determinar. Temos que

$$\begin{cases} 2 = Q_0 = C_1 + C_2 \\ 2 = Q_1 = C_1\alpha + C_2\beta \end{cases} \tag{2.12}$$

Resolvendo 2.12 temos $C_1 = C_2 = 1$. Logo $Q_n = \alpha^n + \beta^n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$. ■

Proposição 2.3.8. Para $n \geq 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_n + P_{n-1} & P_n \\ 2P_n & P_n + P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Q_n & P_n \\ 2P_n & \frac{1}{2}Q_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Dado $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos encontrar a matriz P que diagonaliza A. Para isso, considere $\lambda I - A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$.

A equação característica de A é $P(\lambda) = 0$, no qual $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$.

$\Delta = 4 + 4 = 8$ e obtemos as raízes: $\lambda_1 = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} = \alpha$ e $\lambda_2 = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} = \beta$.

Vamos encontrar um autovetor P_1 associado a $\lambda_1 = \alpha$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \alpha - 1 & -1 \\ -2 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} - 1 & -1 \\ -2 & 1 + \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \to \sqrt{2}l_1 + l_2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $\sqrt{2}x - y = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{2}x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$. Assim $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Agora vamos calcular P_2 autovetores associados a $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} - 1 & -1 \\ -2 & 1 - \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -2 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \to -\sqrt{2}l_1 + l_2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $-\sqrt{2}x - y = 0 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ -\sqrt{2}x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Assim $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Além disso P_1, P_2 são linearmente independentes. Portanto a matriz P que diagonaliza A e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$. A inversa de P é $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e além disso, $A = PDP^{-1}$, Cujo $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, dessa forma para cada $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ temos $A^n = PD^nP^{-1}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

Assim,

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\alpha^n & \beta^n\\ \sqrt{2}\alpha^n & -\sqrt{2}\beta^n\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n) & \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n-\beta^n)\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha^n-\beta^n) & \frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n) & \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\\ 2\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} & \frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{Q_n}{2} & P_n\\ 2P_n & \frac{Q_n}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_n+P_{n-1} & P_n\\ 2P_n & P_n+P_{n-1}\end{bmatrix}.$$

■

Corolário 2.3.3. Para $n \geq 1, P_n^2 + 2P_nP_{n-1} + P_{n-1}^2 = (-1)^n$.

Demonstração. Segue da proposição 2.3.8 que
$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^n\right) = \det\left(\begin{bmatrix}P_n+P_{n-1} & P_n\\ 2P_n & P_n+P_{n-1}\end{bmatrix}^n\right)$, ou seja, $\left(\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)^n =$ $-P_n^2 + 2P_{n+1}P_{n-1} + P_{n-1}^2$. Logo $(1\cdot 1 - 2\cdot 1)^n = -P_n^2 + 2P_nP_{n-1} + P_{n-1}^2$,

ou ainda $(-1)^n = -P_n^2 + 2P_nP_{n-1} + P_{n-1}^2$ ■

Corolário 2.3.4. Para $n \geq 1, Q_n^2 - 8P_n^2 = 4(-1)^n$.

Demonstração. Segue da proposição 2.3.8 que,$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^n\right) = \det\left(\begin{bmatrix}\dfrac{Q_n}{2} & P_n\\ 2P_n & \dfrac{Q_n}{2}\end{bmatrix}^n\right)$, Ou seja, $\left(\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)^n = \dfrac{Q_n^2}{4} - 2P_n^2 \Rightarrow (1\cdot 1 - 2\cdot 1)^n = \dfrac{Q_n^2}{4} - 2P_n^2$,

ou ainda $4(-1)^n = Q_n^2 - 8P_n^2$ ■

2.4 Os números de Pell e a razão de Prata

Alguns números metálicos estão na natureza, como por exemplo o número de ouro e outros são utilizados como base nas construções desde a Antiguidade até os dias de hoje. O mais famoso dos números metálicos é sem dúvida o número de ouro, porém com igual importância, mas não tão conhecido, o número de prata já era estudado pelos gregos e surge em várias aplicações na matemática. O casal de arquitetos norte americano Donald e Carol Whatts, estudaram cuidadosamente as ruínas das Casas de Jardim de Óstia, na cidade Porto do Império Romano e descobriram que essas casas eram organizadas por um sistema proporcional ao número de prata, conforme podemos constar em Spinadel (1995).

A terminologia razão de prata ou número prateado é uma analogia ao número de ouro relacionado de Fibonacci enquanto que a razão de prata vincula-se a sucessão de Pell.

2.4.1 Os números de Pell e a Razão de Prata

.

Do ponto de vista geométrico, o elemento mais simples ao qual se pode aplicar o conceito de proporção, é um segmento dividindo-o em duas partes. Essas proporções aplicadas resultam na razão extrema e média que dá lugar à razão prata.

Para que possamos chegar algebricamente a razão de prata considere o segmento de reta, dividido em duas partes de medidas $2a, b$,com $a > b$.

Figura 2 – Segmento Prateado

Fonte: Autor

Sejam $a + b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ tais que $\dfrac{2a+b}{a} = \dfrac{a}{b} = S$.

$$\frac{2a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2ab + b^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{2ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2\frac{a}{b} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Como $S = \dfrac{a}{b}$, então $2S + 1 = S^2$, ou seja $S^2 - 2S - 1 = 0$, sendo $S \in \mathbb{R}$ e $S > 0$. Resolvendo $S^2 - 2S - 1 = 0$ temos

$$S = 1 + \sqrt{2} \tag{2.13}$$

O número de prata é uma constante matemática sendo que sua terminologia tem como ponto de referência o número de ouro. Em Primo e Iglesias (2007), são dadas diversas propriedades do número de prata sendo que algumas delas desenvolveremos nesse trabalho.

A solução positiva da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$ temos $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e é chamada de número de prata. É claro que a solução negativa é $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

Agora, considere a progressão geométrica $\{a_n\} = \{\alpha^n\}$ de razão α.

Observe que

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (1+\sqrt{2})+0 = 1+\sqrt{2} = \alpha \\
\alpha^2 &= \alpha\alpha = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2})+1 = 2\alpha+1 \\
\alpha^3 &= \alpha\alpha^2 = 5(1+\sqrt{2})+2 = 5\alpha+2 \\
\alpha^4 &= \alpha\alpha^3 = \alpha(5\alpha+2) = 5\alpha^2+2 = 12\alpha+5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Com isso,

Proposição 2.4.1. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $\alpha^n = \alpha P_n + P_{n-1}$, onde P_n é o n-ésimo número de Pell.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Observe que para $n = 1$, temos $\alpha = 1+\sqrt{2} = 1(1+\sqrt{2})+0 = P_1(1+\sqrt{2})+P_0$. Suponha que para algum $n \geq 1, n \in \mathbb{N}, \alpha^n = P_n\alpha + P_{n-1}$.

Queremos provar que $\alpha^{n+1} = P_{n+1}\alpha + P_n$.

De fato, $\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n = \alpha(P_n\alpha + P_{n-1}) = P_n\alpha^2 + \alpha P_{n-1} = P_n\left[2(1+\sqrt{2})+1\right] + \alpha P_{n-1} = 2P_n(1+\sqrt{2}) + P_n + (1+\sqrt{2})P_{n-1} = (2P_n + P_{n-1})\alpha + P_n = \alpha P_{n+1} + P_n$.

Portanto, segue o resultado por indução sobre n

■

O número de prata satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.4.2. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então:

1. $\alpha^n = 2\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$, para todo $n \geq 2$
2. $\alpha^{-n} = 2\alpha^{-n-1} + \alpha^{-n-2}$, para todo $n \geq 2$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = 2\alpha$, para todo $n \geq 1$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = \alpha^2$, para todo $n \geq 1$

Demonstração. 1) Faremos a prova por indução sobre n. Para todo $n = 2$, temos $\alpha^2 = 2\alpha^{2-1} + \alpha^{2-2} = \alpha^2 = 2\alpha + 1$.

Logo $\alpha^2 = 2\alpha + 1$.

Suponhamos que seja válido para n, temos: $\alpha^n = 2\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$. Queremos provar que é válido para $n+1$.

Multiplique a hipótese de indução por α em ambos os lados, $\alpha^n\alpha = 2\alpha^{n-1}\alpha+\alpha^{n-2}\alpha$, $\alpha^n + 1 = 2\alpha^n + \alpha^{n-1}$. Portanto, segue o resultado por indução sobre n. ■

Demonstração. 2) Faremos a prova por indução sobre n. Para todo $n = 2$, temos $\alpha^{-2} = 2\alpha^{-2-1} + \alpha^{-2-2}$ ou seja, $\alpha^{-2} = 2\alpha^{-3} + \alpha^{-4}$. De fato:

$$\alpha^{-2} = \alpha^{-3}(2 + \alpha^{-1}) = \alpha^{-3}\left(2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right) = \alpha^{-3}(2 + \sqrt{2} - 1) = \alpha^{-3}(1 + \sqrt{2}) =$$
$$= \alpha^{-3}\alpha = \alpha^{-2}$$

Suponhamos que seja válido para n, temos: $\alpha^{-n} = 2\alpha^{-n-1} + \alpha^{-n-2}$. Queremos provar que é válido para $n + 1$.

Multiplique a hipótese de indução por α em ambos os lados, $\alpha\alpha^{-n} = 2\alpha^{n-1}\alpha + \alpha^{n-2}\alpha \to \alpha^{-n+1} = 2\alpha^{-n} + \alpha^{-n-1}$. Portanto, segue o resultado por indução sobre n. ■

Demonstração. 3) De fato, temos que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ então $\dfrac{2}{\alpha} < 1$ e com isso garantimos a convergência da série.

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = \frac{\frac{2}{\alpha}}{1-\frac{2}{\alpha}} = \frac{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}{1-\frac{2}{1+\sqrt{2}}} = \frac{2}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{2(1+\sqrt{2})}{-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+2} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{1} = 2\alpha.$$

■

Demonstração. 4) Usando o resultado anterior (3), finalizamos a demonstração.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = 1 + 2\alpha$$

■

Agora vamos definir a sequência $S_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, para $n \geq 1$, ou seja, S_n é a razão entre os números de Pell consecutivos P_{n+1} e P_n. Uma observação que fazemos sobre $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é que tal sequência é limitada.

De fato, para todo $n \geq 1, 0 \leq \dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$, pois $P_1 > P_0$ e $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} > P_{n-1} > 0$, para todo $n \geq 1$. Dessa forma, $0 < \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \dfrac{P_{n-1}}{P_n} < 2 + 1 = 3$ e com isso, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Segue do Corolário 2.3.2 que $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}$ então com isso concluímos:

$$S_n - S_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \frac{P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2}}{P_{n+1}P_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{P_{n+1}P_n},$$

onde $P_{n+1}P_n > 0$, para todo $n \geq 1$

$$\text{Portanto} \begin{cases} S_n - S_{n+1} < 0, & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \\ S_n - S_{n+1} > 0, & \text{se} \quad n \quad \text{é ímpar} \end{cases}$$

Ou seja, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(S_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ são sequências monótonas. Toda sequência monótona e limitada é convergente (CAMINHA, 2015). Como ambas $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(S_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas e monótonas então convergem, isto é, existem os seguintes limites:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = L_2.$$

A ideia agora é provar que $L_2 = L_1$. Assim:

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{P_{2k+1}}{P_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2P_{2k} + P_{2k-1}}{P_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{P_{2k-1}}{P_{2k}}\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{1}{\frac{P_{2k}}{P_{2k-1}}}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{1}{S_{2k-1}}\right) = 2 + \frac{1}{L_2}.$$

Logo, $L_1 = 2 + \dfrac{1}{L_2}$, ou seja, $L_1 \cdot L_2 = 2L_2 + 1$. Fazendo $L_2 = \lim_{k\to\infty} S_{2k-1}$ e procedendo de forma análoga temos que $L_1 \cdot L_2 = 2L_1 + 1$.

$$\text{Como} \begin{cases} L_1 L_2 = 2L_2 + 1 \\ L_1 L_2 = 2L_1 + 1, \quad \text{então} \quad L_1 = L_2. \end{cases}$$

Dessa forma, concluímos que $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = L$. Segue do teorema da conservação de sinal para limites (CAMINHA, 2015) que $L \geq 0$.

Proposição 2.4.3. Seja $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de Pell. Então $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2}$

Demonstração. Temos que: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = L$ e $L \geq 0$. Como $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \dfrac{P_{n-1}}{P_n} = 2 + \dfrac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_n}}$, então $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 2 + \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n}} = 2 + \dfrac{1}{L}$. Logo: $L^2 = 2L + 1$ isto é, $L^2 - 2L - 1 = 0$.

Resolvendo a equação $L^2 - 2L - 1 = 0$, obtemos a solução positiva $L = 1 + \sqrt{2}$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2}$$

■

2.4.2 Algumas construções geométricas que envolvem a Razão de Prata.

Na seção anterior fizemos a prova para a razão de prata e sua proporção, iremos agora relacionar a razão de prata com outros elementos geométricos e com sua utilização presente em nossas vidas. Através da construção geométrica da figura 3, podemos determinar as proporções e estas por sua vez correspondem ao valor da razão prateada.

As etapas a seguir descrevem a construção de um triângulo retângulo isósceles e sua relação com a proporção prateada.

Considere um triangulo retângulo isósceles ABC, cujos lados são respectivamente: os catetos que medem n e hipotenusa que mede m, tal que $\overline{AB} = n$ e $\overline{BC} = n$. Logo $\overline{AC} = n\sqrt{2} = m$, pelo teorema de Pitágoras.

1. Construir o triângulo retângulo isósceles de catetos n. O cateto $\overline{BC} = n$, por construção $\hat{A} = \hat{C} = 45\,°$ e $\hat{B} = 90\,°$.

2. Com centro em A e raio $\overline{AC} = m$, trace uma circunferência e encontre o ponto E que será a intersecção da circunferência com a reta suporte $\overline{AB}$. Obtendo por construção o segmento $\overline{BE} = m - n$.

3. Com centro em A e raio $\overline{AB} = n$, trace uma circunferência e encontre o ponto D que será a intersecção da circunferência com a reta suporte $\overline{AC}$. Obtendo por construção o segmento $\overline{CD} = m - n$.

4. Traçando o segmento $\overline{ED}$, encontre o ponto P que será a intersecção com o cateto $\overline{BC}$

5. Considere os triângulos EPB, PDC e ADE, onde $B\hat{E}P = \theta$ e $E\hat{P}B = \beta$, $C\hat{P}D = \beta$ e $C\hat{D}P = \delta$.

Provaremos que $\theta = \beta = 45\,°$ e $\delta = 90\,°$. De fato, do triângulo ADE obtemos: $\theta + 180\,° - \delta + 45\,° = 180\,°$, ou seja, $\theta - \delta = -45\,°$. Observando agora o triângulo PDC vemos $\beta + \delta + 45\,° = 180\,°$, ou seja, $\beta + \delta = 135\,°$.

Dessa forma temos

$$\begin{cases} \theta - \delta = -45\,° \\ \theta + \delta = 90\,° \\ \beta + \delta = 135\,° \end{cases} \tag{2.14}$$

Resolvendo 2.14, obtemos $\theta = \beta = 45\,°$ e $\delta = 90\,°$.

Portanto, concluímos que $\overline{PD} = m - n$ e $\overline{BP} = m - n$. Observe que $\overline{BP} = m - n$ e $\overline{BC} = n$, logo temos $\overline{PC} = 2n - m$.

O triângulo ABC é semelhante aos triângulos EBP e PDC, pois os três triângulos possuem ângulos congruentes. Dessa forma, obtém-se as seguintes relações:

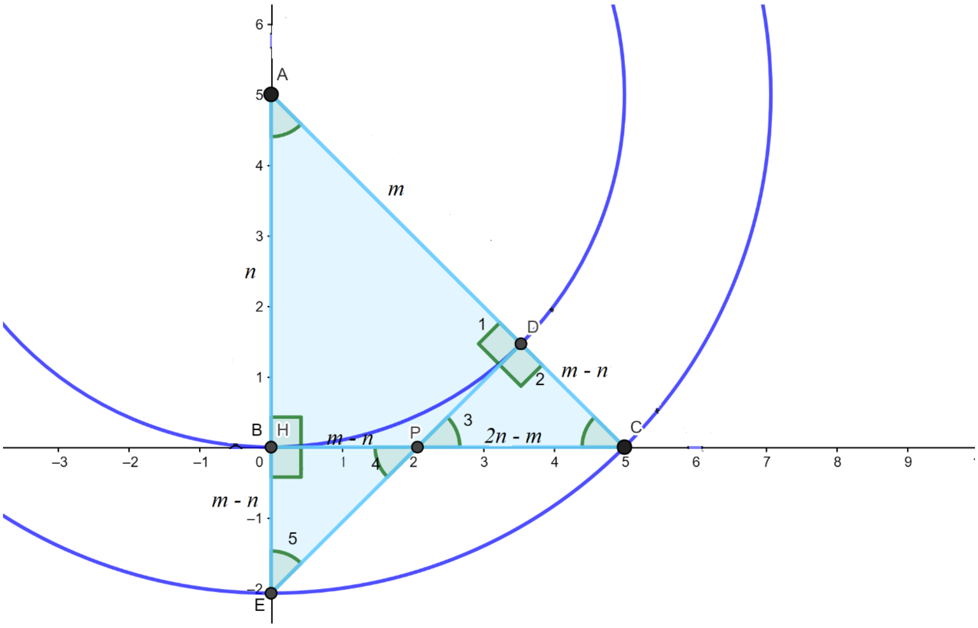
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$$

Observe que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{n}{m-n} = \frac{n}{n\sqrt{2}-n} = \frac{n}{n(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = 1+\sqrt{2} = \alpha$$

e assim concluímos que $\alpha = \sqrt{2}+1$ é o número de prata.

Figura 3 – Triângulo Isósceles e a Relação de Prata



Fonte: Autor

2.4.3 Retângulo de prata

Outra construção interessante é o retângulo prateado que faremos a seguir. Chamamos de retângulo prateado um retângulo que possui a razão entre dois de seus lados adjacentes igual à $\alpha = \sqrt{2}+1$ que é o número de prata [3].

As etapas a seguir descrevem a construção do retângulo prateado e sua relação com a proporção prata.

1. Construa um quadrado $ABCS$ de lado a. Em seguida fixe o ponto D do quadrado anterior e construa outro quadrado $CDEF$ de lado a, que fique adjacente ao primeiro.

2. Com centro em A e raio $\overline{DE}$, trace um arco de circunferência até interceptar o prolongamento do segmento $\overline{DF}$, obtendo assim o ponto H.

3. Trace uma perpendicular $\overline{DF}$ passando pelo ponto H e obtenha o ponto G, que está na intersecção dessa perpendicular e a reta suporte $\overline{CE}$.

O resultado será o quadrilátero $ABGH$ que é o retângulo prateado, onde a razão entre os lados do retângulo $\alpha = \dfrac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = 1+\sqrt{2}$.

E repetindo o processo infinitamente da construção acima, teremos sucessivos novos retângulos áureos prateados a partir do primeiro.

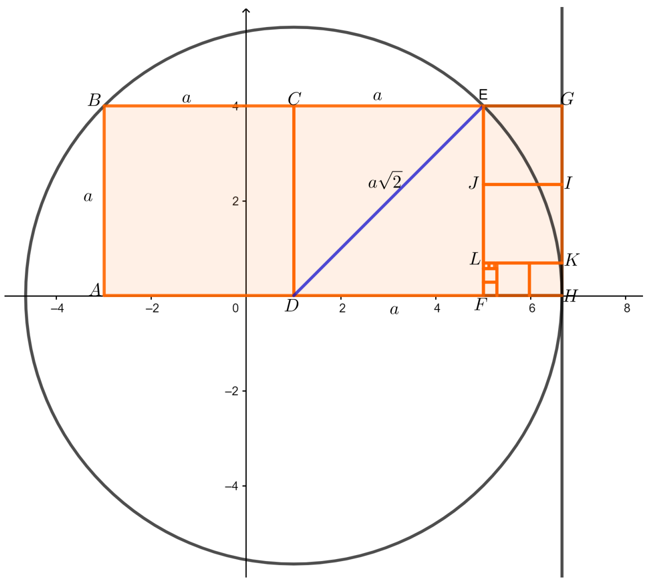
Observe que a diagonal $\overline{DE} = a\sqrt{2}$ e que $\overline{AB} = a$ e $\overline{BG} = a + \sqrt{2}$. Sabemos que $\alpha = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{a + a\sqrt{2}}{a} = 1 + \sqrt{2}$.

Provaremos agora que o quadrilátero $EGHF$ é um retângulo prateado, tal que a razão entre os lados GH e FH é também o número de prata. Tome o segmento $\overline{GH} = a$ e $\overline{FH} = a\sqrt{2} - a$ e a razão entre eles é $\alpha = \frac{\overline{GH}}{\overline{FH}} = \frac{a}{a\sqrt{a} - a} = 1 + \sqrt{2}$. Da mesma forma faremos para o quadrilátero $FHKL$. Os segmentos $\overline{FH} = a\sqrt{2}$ e $\overline{KL} = a - 2(a\sqrt{2} - a) = a(3 - 2\sqrt{2})$. Dessa forma teremos a razão entre os lados do retângulo $FHKL$,

$$\alpha = \frac{\overline{FH}}{\overline{KL}} = \frac{a\sqrt{2} - a}{a(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{a(3 - 2\sqrt{2})} = 1 + \sqrt{2}.$$

Assim, concluímos a prova que a razão de prata está presente em todos os retângulos originários do primeiro.

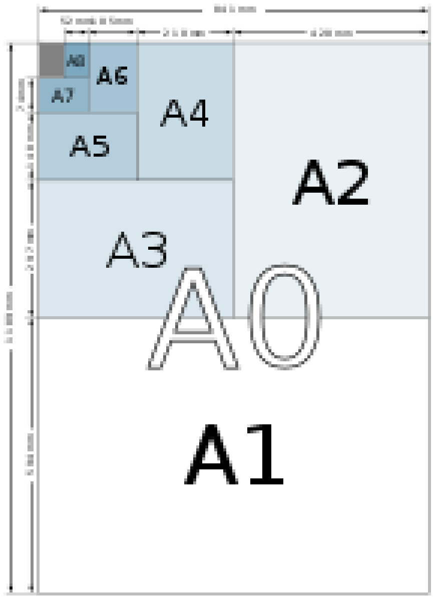
Figura 4 – Retângulo de Prata



Fonte: Autor

Uma das aplicações notáveis da proporção de prata e o retângulo prateado está relacionada a folha de A4 que obtida com a ajuda do conceito da proporção de prata. As folhas de A4 possuem tamanho padronizados internacional de acordo com a ISO[1] 216

Figura 5 – Formato de Folha ISO 216



Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio>

Com base na construção do retângulo áureo prateado é possível traçar uma espiral. Faremos um breve relato sobre a construção espiral prateada.

1. Construa um quadrado $ABCD$ de lado a. Em seguida, fixe o ponto D do quadrado anterior e construa outro quadrado $CDEF$ de lado a, que fique adjacente ao primeiro.

2. Em seguida, fixe o ponto F e construa outro quadrado de lado a, que fique adjacente ao primeiro.

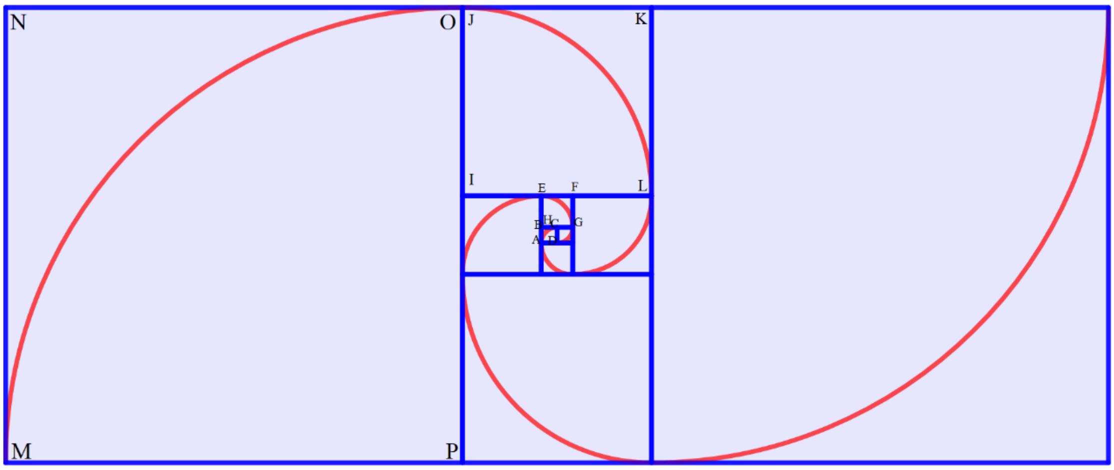
3. Repita o processo fixando agora o ponto E e construa outro quadrado de lado a.

4. Repita o processo sucessivamente até obter o número suficiente de quadrado para a construção da espiral.

5. Agora com o uso da ferramenta arco circular inicie a construção da espiral, traçando inicial o arco AC, com centro em A trace o AC.

6. Analogamente repita o processo e trace os demais arcos.

Figura 6 – Espiral de Prata



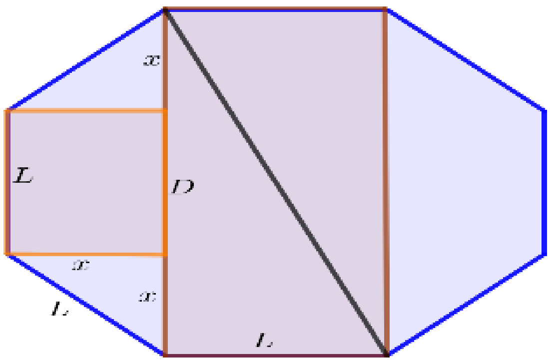
Fonte: Autor

2.4.4 Octógono e a Razão de Prata

O retângulo de prata que definimos na seção 2.4.3 pode ser relacionado ao octógono regular; com efeito, a partir de um octógono regular podemos formar um retângulo de prata. vamos desenhar o octógono, seja L o lado do octógono e D a sua diagonal que atravessa o centro e unido os dois lados opostos. A razão de prata pode ser obtida quando olhamos a razão entre a diagonal e o lado do octógono.

Para isso observe a figura 7.

Figura 7 – Octógono Regular



Fonte: Autor

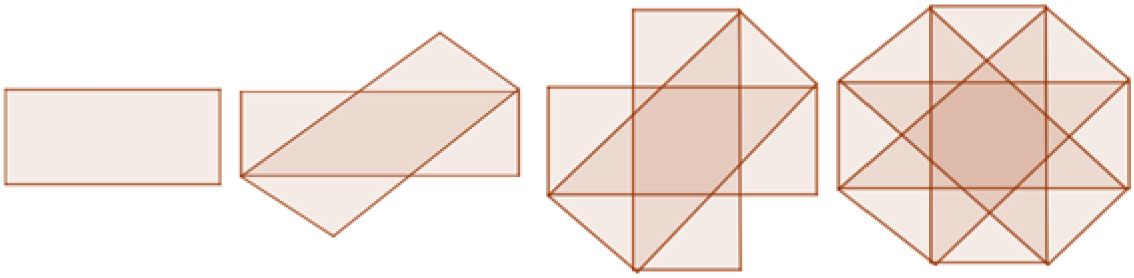
Suponha que o retângulo em questão cujo o lado escolhido tenha comprimento L

Temos que $L^2 = 2x^2$ e $2x + 1 = D$. Portanto: $L = x\sqrt{2}$ e $D = x(2 + \sqrt{2})$. A relação entre D e L é $\frac{D}{L} = \frac{x(2+\sqrt{2})}{x\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} = 1 + \sqrt{2}$.

Com isso temos que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ que é a relação entre a diagonal e o lado de comprimento L e assim o retângulo que está indicado no octógono e o retângulo prateado. Pois duas quantidades estão em proporção de prata se a razão entre a maior e a menor é o número prateado.

Além disso, um octógono regular tendo, ao centro um retângulo de prata ao girá-lo com rotação de $45\,^{\circ}$, obtemos quatro retângulos prateados organizados como mostra a figura 8 originando um polígono em forma de estrela (forma de estrela de $8/2$ e polígono em forma de estrela $8/3$), conforme podemos verificar nas figuras abaixo.

Figura 8 – Os Quatro Retângulos de Prata de um Octógono



Fonte: Autor

Com isso, verificamos que o número de prata pode ser construído facilmente com o uso de uma régua e compasso, ou fazendo uso de um software como, por exemplo, geogebra, e suas aplicações (o que nos mostra a sua relação com octógono regular), estão presente na arquitetura romana e mourisca, em várias catedrais medievais e de arte gótica, e com igual representação nos símbolos como quadrado do corte e a cruz dos templários.

O Cimborrio da Catedral de Burgos, Figura 10, é um exemplo em que um octógono, sua estrela $|8/3|$, outra estrela nela inscrita e várias formas geométricas que cobrem a estrutura são combinadas, outro exemplo é a enigmática igreja de Santa Maria de Eunate, do século XII, Figura 9, também octogonal em planta, abside pentagonal e rodeada por múltiplos arcos, mostra a presença de proporções dinâmicas em sua construção.

Figura 9 – Ermita Santa Maria de Eunate

Fonte: <www.picoeuropa.net>

Figura 10 – Cimborrio Catedral de Burgos

Fonte: <https://www.arteguias.com/catedral/burgos.htm>

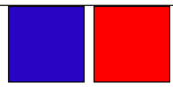
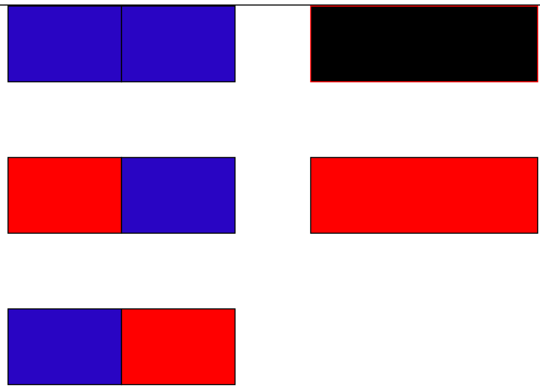
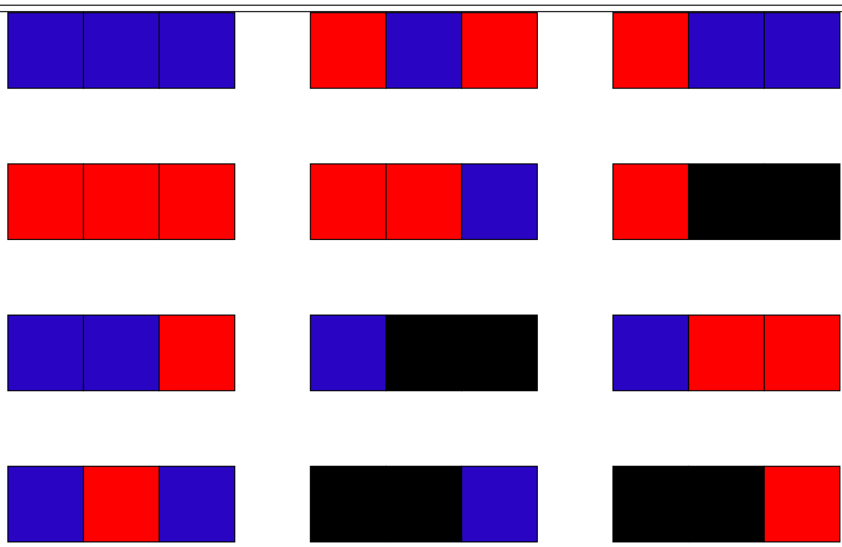
2.5 Algumas Interpretações combinatória para os Números de Pell

O nosso objetivo é reconsiderar algumas identidades da seção 2.3 com demonstrações algébricas e apresentá-las sob um ponto de vista combinatório, de acordo, com Benjamin e Quinn (2003).

Para isso apresentaremos uma interpretação combinatória para os números de Pell por meio de uma certa classe de ladrilhamentos para o retângulo de altura 1 e largura n $n \times 1$.

Vamos denotar por L_n o número de ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$, onde n é um número natural, com Três tipos ladrilhos, o ladrilho 1×1 azul, o ladrilho 1×1 vermelho e o dominó 1×2 preto. Temos que $L_0 = 1$, pois L_0 conta o ladrilhamento vazio e $L_1 = 2$, pois temos dois ladrilhamentos 1×1. No quadro 12, descrevemos alguns ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$, para alguns casos particulares de n.

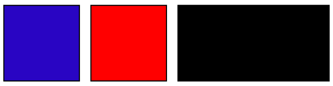
Quadro 1 – Ladrilhamento Para o Retângulo $(n-1) \times 1$

n	P_n	Ladrilhamento para o retângulo $(n-1) \times 1$
1	$P_1 = 1$	$\varnothing$
2	$P_2 = 2$	
3	$P_3 = 5$	
4	$P_4 = 12$	

Fonte: Autor

Queremos determinar uma recorrência que enumera o conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$ com três tipos de ladrilhos, um ladrilho de azul 1×1, um ladrilho de cor vermelha 1×1 e um dominó preto 1×2. Segue abaixo os três tipos de ladrilhos que usaremos para ladrilhar este retângulo.

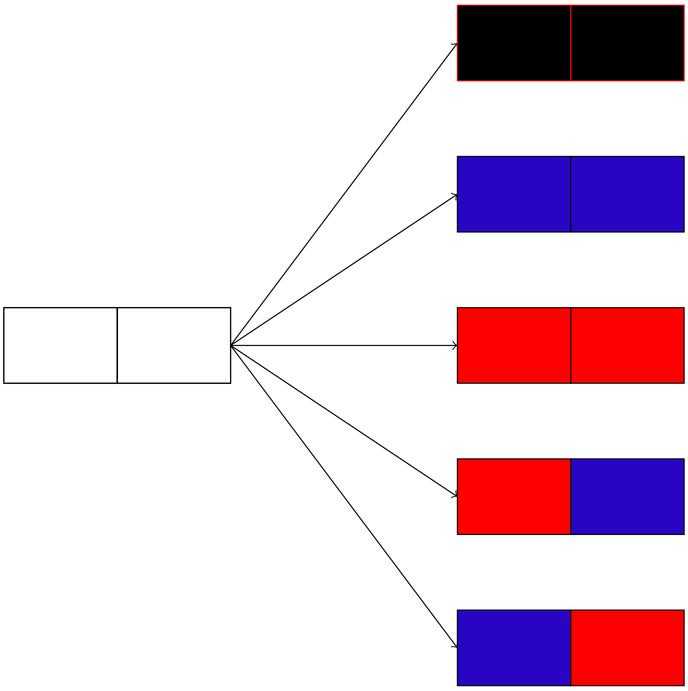
Figura 11 – Ladrilhamento 1×1 e 1×2.



Fonte: Autor

O número de ladrilhamento para o retângulo 1×2 é $L_2 = 5$. Segue abaixo a lista desse ladrilhamento com três tipos de ladrilhos.

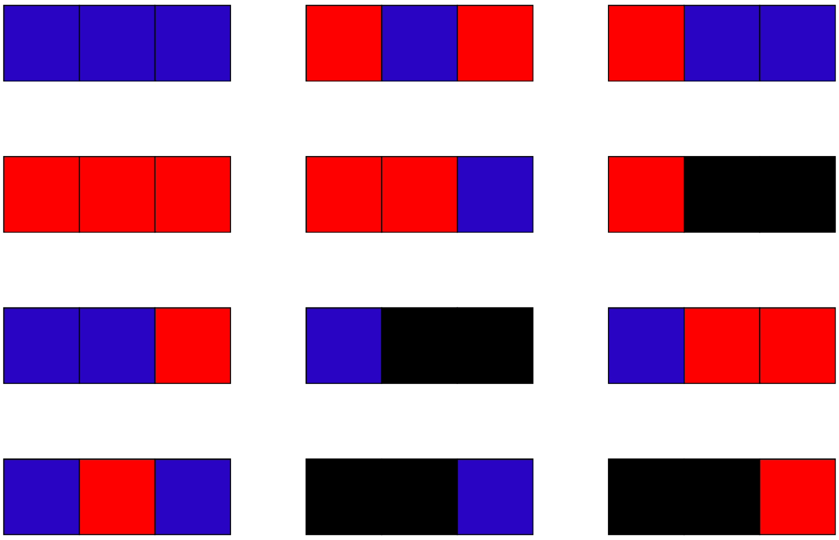
Figura 12 – Ladrilhamento $L_2 = 5$



Fonte: Autor

Observamos que $L_3 = 12$, pois há 12 maneiras de ladrilhar o retângulo 1×3 com os três tipos de ladrilhos.

Figura 13 – Ladrilhamento $L_3 = 12$.



Fonte: Autor

Agora vamos considerar o conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$ com $n \geq 2$ que é será o total de ladrilhamentos possíveis. Particionamos esse conjunto em três subconjuntos distintos da seguinte forma:

1. O conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$ que contem na ultima célula o ladrilho azul 1×1. Observe que temos um total de L_{n-1} ladrilhamentos com essa características;

2. O conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$ que contem na ultima célula o ladrilho vermelho 1×1. Observe que temos um total de L_{n-1} ladrilhamentos, cuja a ultima célula é o ladrilho vermelho;

3. O conjunto dos ladrilhos do retângulo $n \times 1$ que contem nas duas ultimas células o dominó preto 1×2. Temos um total de L_{n-2} ladrilhamentos desse tipo.

Segue de $1, 2$ e 3 que $L_n = L_{n-1} + L_{n-1} + L_{n-2}$, ou seja, $L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geq 4$. Reescrevendo a recorrência temos

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_1 = 2 \\ L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \text{n>2} \end{cases}$$

Observe que $L_n = P_{n+1}$, onde P_{n+1} é $(n+1)$-ésimo número de Pell. Portanto P_{n+1} enumera os ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$. Dessa forma concluímos:

Proposição 2.5.1. Para todo $n \geq 0$, temos que o total de ladrilhamentos para o retângulo $n \times 1$ com três tipos de ladrilhos: 1×1 azul, 1×1 vermelho e um dominó preto 1×2 é P_{n+1}, ou seja, $(n+1)$-ésimo número de Pell.

Como havíamos mencionado anteriormente, em Roman (2015) foram apresentadas diversas propriedades para o número de Pell em que o autor faz validações algébricas para tais resultados. Agora abordaremos alguns desses resultados fazendo provas combinatórias de acordo com Santana e Diaz-Barrero (2006). A primeira dessas identidades é a 2.2.1 da seção 2.3.

Proposição 2.5.2. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, temos $P_{n+1} = L_n = \sum_{r \geq 0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r}$.

Demonstração. Segue da proposição 2.5.1 que L_n é o total de ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$, com três tipos de ladrilhos. Vamos contar os ladrilhos de $n \times 1$ de outra forma.

Vamos considerar todos os ladrilhamentos que contém exatamente r dominós cinzas e então sobra $n - 2r$ ladrilhos para serem ladrilhados com os ladrilhos azul ou vermelho.

Os ladrilhamentos que possuem r dominós devem conter $n - 2r$ quadrados. Tais ladrilhamentos contém $n - r$ ladrilhos juntos $(n = n - r + r)$. Dessa forma há $\binom{n-r}{r}$ maneiras, para decidir quais desses $n - r$ ladrilhos juntos são dominós e então colorir os $n - 2r$ restantes que podem ser coloridos de 2^{n-2r} .

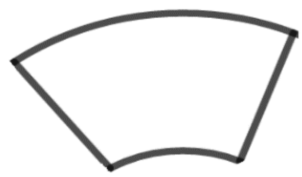
Portanto há $\binom{n-r}{r} 2^{n-2r}$ ladrilhamentos de $n \times 1$ com r dominós cinza. Observe que r não excede $\frac{n}{2}$ e fazendo r variando de 0 até $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, temos:

$$P_{n+1} - L_n = \sum_{r \geq 0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} 2^{n-2r}.$$

∎

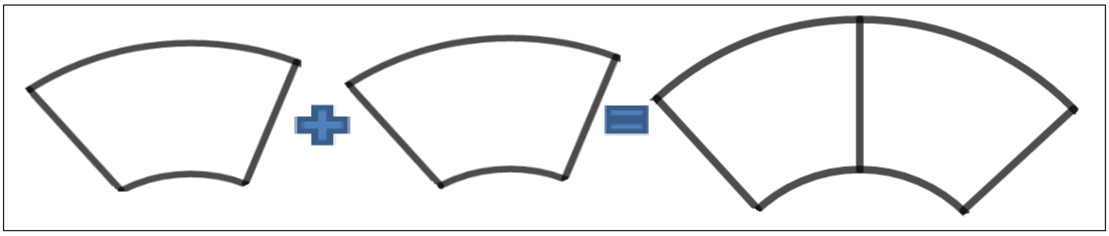
Em Benjamin et al. (2008) é caracterizado a soma de dois números de Pell consecutivos, a saber $L_{n-1} + L_n$ em termos do conceito de braceletes. Em Benjamin e Quinn (2003, cap.2) define a ideia de bracelete de comprimento $n \times 1$, ou seja, um n-bracelete, que consiste de um ladrilhamento circular de n lugares que podem ser preenchidos com ladrilhos curvos: o ladrilho chamado de quadrado curvo de altura 1 e o dominó curvo de altura 1 que consiste na junção de dois quadrados curvos. Para ilustrar considere a figuras 14 e 15, respectivamente.

Figura 14 – Quadrado Curvo de Altura 1



Fonte:Autor

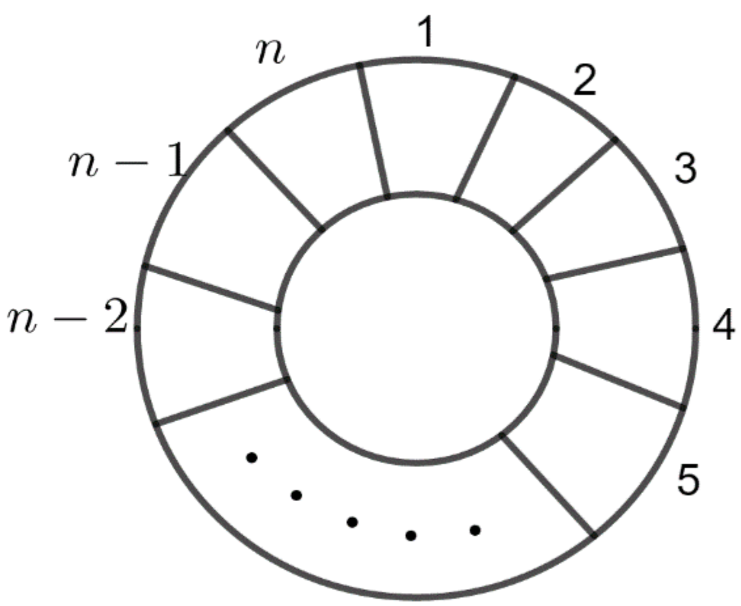
Figura 15 – Dominó Curvo



Fonte:Autor

Dado um n-bracelete, vamos considerar as n células que podem ser preenchidas por n quadrados curvos numerados de 1 até n no sentido horário. Para ilustrar considere a figura 16.

Figura 16 – n-bracelete Rotulado

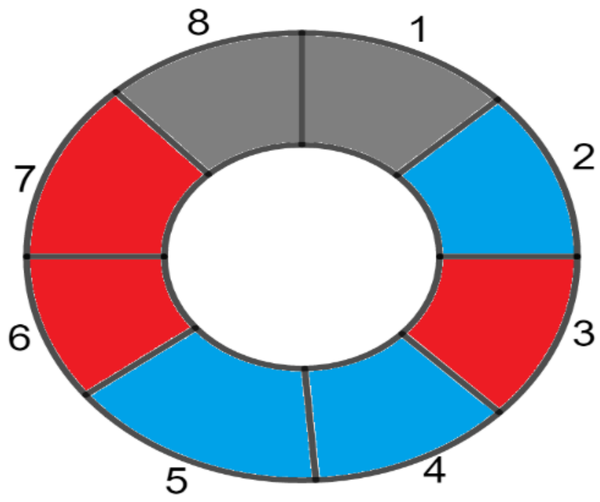


Fonte:Autor

A ideia seguinte é ladrilhar o n-bracelete com três tipos de ladrilhos, dois quadrados curvos, sendo um vermelho e um azul e um dominó curvo cinza. Vamos considerar o conjunto dos ladrilhamentos de um n-bracelete com esses três tipos de ladrilhos que denotamos por τ_n.

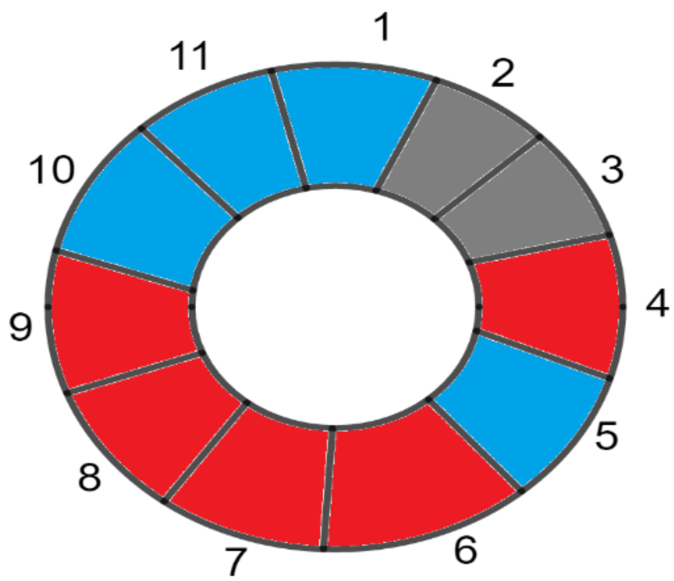
Um n-bracelete ladrilhado em τ_n é dito fora de fase quando houver um único dominó cobrindo simultaneamente as células n e 1. Caso contrário dizemos que o n-bracelete está em fase. As figuras 17 e 18, respectivamente ilustram as duas definições.

Figura 17 – 8-bracelete Fora de Fase



Fonte: Autor

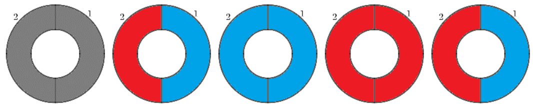
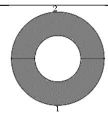
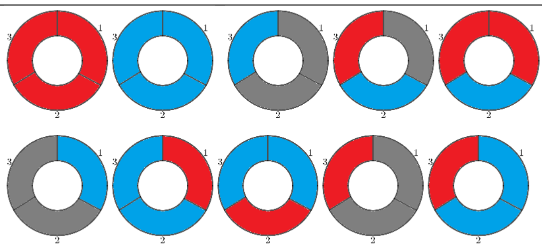
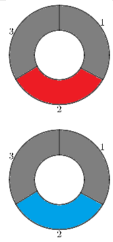
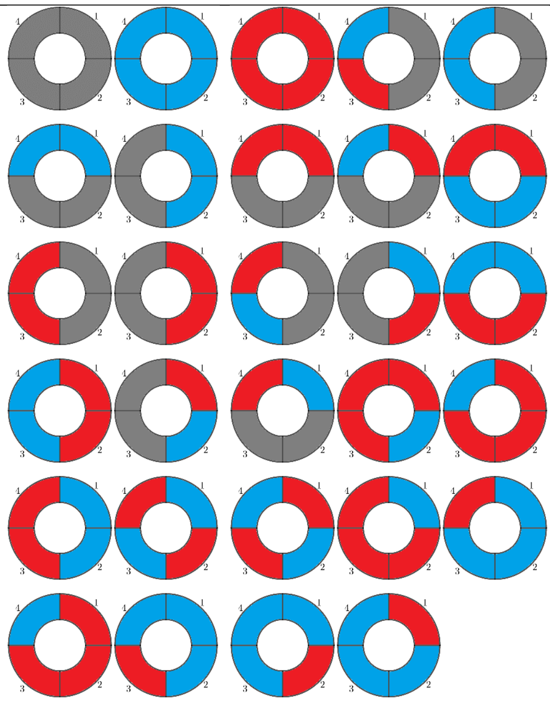
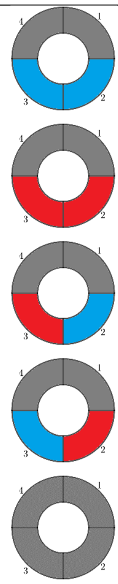
Figura 18 – 11-bracelete em Fase



Fonte: Autor

Observe o quadro:

Quadro 2 – Braceletes em Fase e Fora de Fase.

n	braceletes em fase	braceletes fora da fase	b_n
2			5
3			12
4			34

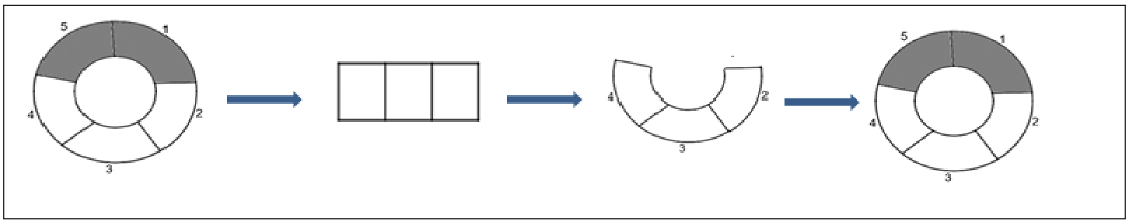
Fonte: Fonte: Autor

Observando o quadro vemos que: $b_2 = L_1 + L_3 = 1 + 5 = 6$ e $b_3 = L_2 + L_4 = 2 + 12 = 14$, finalmente $b_3 = L_3 + L_5 = 5 + 29 = 34$.

Vamos denotar o número de n-braceletes ladrilhados com três tipos de ladrilhos, com dois quadrados curvos azul e vermelho e um dominó curvo cinza por b_n, ou seja, $|\tau_n| = b_n$, com $n \geq 2$. Denotamos por τ_{n1} e τ_{n2} os conjuntos dos n-braceletes em τ_n fora de fase e em fase, respectivamente. Logo $\tau_n = \tau_{n1} \cup \tau_{n2}$ e $\tau_{n1} \cap \tau_{n2} = \varnothing$

Para os n-braceletes em τ_{n1} retiramos o dominó que cobre as células n e 1 e o abrimos em um retângulo $(n-2) \times 1$, que agora podem ser preenchidos por ladrilhos 1×1 azul, 1×1 vermelho e dominó cinza 2×1. Para revertermos o processo, dado um ladrilhamento $(n-2)\times 1$, rotulamos no sentido horário e mantemos o ordenamento das posições 2 e $n-1$ são completados pelo dominó cinza, com isso temos um n-bracelete fora de fase. A figura 19, ilustra o processo

Figura 19 – 5-bracelete Fora de Fase



Fonte: Autor

Portanto há uma bijeção entre os n-braceletes fora de fase e os ladrilhamentos do retângulo $(n-2)\times 1, n \geq 2$. Segue da proposição 2.5.1 que $|\tau_{n1}| = L_{n-2}$ e $(n-2)$-ésimo número de Pell.

Para os n-braceletes em fase, ou seja, um n-bracelete em τ_{n2}, basta abri-lo entre as células 1 e n dando origem a um n-ladrilhamento do retângulo $n\times 1$ com três tipos de ladrilhos, 1×1 azul, 1×1 vermelho e um dominó 2×1 cinza. O processo é reversível de forma única, pois dado um n-ladrilhamento rotulamos da esquerda para direita as células de 1 até n e em seguida colarmos os seus extremos.

Assim temos uma bijeção entre os ladrilhamentos do retângulo $n\times 1$ com três tipos de ladrilhos 1×1 azul, 1×1 vermelho e o dominó cinza 2×1 e o conjunto τ_{n2}. Dessa forma, segue da proposição 2.5.1 que $|\tau_{n2}| = L_n$. Logo $|\tau_n| = b_n = L_{n-2} + L_n$, para $n \geq 2$ e temos o seguinte resultado:

Proposição 2.5.3. Para todo $n \geq 2$, o número de n-braceletes ladrilhados com três tipos de ladrilhos, dois quadrados curvos azul e vermelho e um dominó curvo cinza é igual a $L_{n-2} + L_n = P_{n-1} + P_{n+1}, L_{n-2}$ e L_n denotada o total de ladrilhamento do retângulo $(n\times 1)$ com três tipos de ladrilhos, dois quadrados de cores azul e vermelho e um dominó preto.

Proposição 2.5.4. Para todo $n \geq 2, L_{n-2} + L_n = \sum\limits_{r\geq 0} \dfrac{n}{n-r}\dbinom{n-r}{r}2^{n-2r}$, ou seja, $\sum\limits_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\dbinom{n-r}{r}2^{n-2r}$ é o total de n-braceletes ladrilhados com três tipos de ladrilhos, dois quadrados curvos azul e vermelho, e um dominó curvo cinza.

Demonstração. Segue da proposição 2.5.3 que $L_{n-2}+L_n$ é o total de n-braceletes ladrilhados com três tipos de ladrilhos, dois quadrados curvos azul e vermelho e o dominó cinza 2×1. Por outro lado, temos que o total n-braceletes em fase com exatamente r dominós é $\binom{n-r}{r}2^{n-2r}$, pois há uma bijeção entre os ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$ com exatamente r dominós e os n-braceletes desse tipo. Além disso, na proposição 2.5.2 tratamos desse argumento.

Dessa mesma forma, $\binom{n-r-1}{r-1}2^{n-2r}$ braceletes fora de fase com r dominós. Como é válida a identidade $\binom{n-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k} = \dfrac{n+1}{n+1-k}\binom{n+1-k}{k}$ então fazendo $n \to n-1$ e $k = r$:

$$\binom{n-r-1}{r-1}2^{n-2r} + \binom{n-r}{r}2^{n-2r} = \left[\binom{n-r-1}{r-1} + \binom{n-r}{r}\right]2^{n-2r} =$$

$$= \frac{n-1+1}{n-1+1-r}\binom{n-1+1-r}{r}2^{n-2r} = \frac{n}{n-r}\binom{n-r}{r}2^{n-2r}$$

Somando em r todos os n-braceletes temos:$L_{n-2} + L_n = \sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r}\binom{n-r}{r}2^{n-2r}$. ■

3 OS NÚMEROS DE CATALAN

Os números de Catalan é uma sequência que surge em diversas áreas da matemática, entre essas estão a Geometria, Álgebra, Análise Complexa e Combinatória, essa última é a que nos interessa e será fonte do nosso estudo. Nesse capítulo, faremos um breve histórico sobre a origem dessa sequência e em seguida apresentaremos a recorrência para os números de Catalan usando método recursivo, em seguida uma fórmula explícita com o uso de funções geradoras juntamente com algumas propriedades e por fim apresentaremos algumas interpretações para os números de Catalan.

3.1 Um breve histórico

Em Poffal e Ferreira (2012) descreve a trajetória dos números de Catalan. Eugene Catalan (1814–1894) nasceu em Bruges, na Bélgica e teve uma infância tranquila, aos dez anos tornou-se aprendiz de joalheiro, mas desistiu da arte por não ter habilidade. Anos mais tarde sua família mudou-se para Paris e seu pai começou a trabalhar como arquiteto e levava seu filho Eugene para o trabalho. Essa experiencia influenciou sua vida acadêmica e o início dos estudos na Escola École Polytechnique. A vida acadêmica e profissional de Eugene foi tumultuada por seu envolvimento político, republicano e esquerdista, que quase acabou com o seu futuro, mas ainda assim tornou-se um grande especialista em teoria dos números e teoria combinatória. Em 1838 é atribuído a Eugene Catalan o nome da sequência dos Números de Catalan, durante um estudo das sequências bem formadas entre parênteses descobriu quase ao acaso a sequência de Catalan.

Há três matemáticos que merecem uma menção especial quando se trata da descoberta e desenvolvimento dos números catalães: Leohnard Euler, Eugene Charles Catalan e Sharabiin Myangat.

No entanto, os números de Catalan têm seu primeiro registro volta de 1730 com alguns modelos geométricos por Ming An-Tu(1692-1763), um matemático da Mongólia que escreveu o livro Quick Methods for Accurate envolvendo os números de Catalan.

O matemático Leonard Euler (1707-1783) é considerado a primeira pessoa a descobrir os números de Catalan , ao conjeturar um método para a resolução do seguinte problema geométrico: "*De quantas maneiras se pode decompor um polígono convexo com $n + 2$ lados em n triângulos através das suas diagonais de forma a que não existam duas que se interceptem no interior do polígono?*".

Não há provas que Euler tenha concluído ou demonstrado o resultado, Euler sugere por carta este problema ao matemático Johann Andres Von Segner (1704—1777) e, este por sua vez, empenha-se e determina uma relação de recorrência para solução do problema e realiza os cálculos para um $n < 20$, mas Segner comete alguns erros de cálculo e Euler aproveita desses erros ,refaz seus cálculos até $n = 25$ e apropria-se dos resultados sem mencionar a participação de Segner. O Matemático francês Gabriel Lamé (1795-1870), inspirado pelo trabalho de Euler, conjectura e demonstra uma prova para os resultados de Euler e mais tarde essa prova foi discutida em artigos publicados (1838-1839) por Eugene Catalan. E obtém a formula que conhecemos

$$Cn = \frac{2n!}{n(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Os números de Catalan possuem mais de 200 interpretações combinatórias e aparecem em cerca de 400 artigos atuais e em problemas relacionados aos números de Catalan, e é uma fonte inesgotável de possibilidades de estudo.

3.2 Definição e fórmula explicita para os números de Catalan usando o conceito de recorrência

Os números de Catalan é uma sequência numérica $1, 2, 5, 14, 42, \dots$

Definição 3.2.1. Seja $n \in \mathbb{N}$, denotamos por C_n o número de Catalan de ordem n, cuja lei de formação é dada pela relação recorrência:

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \sum_{j=0}^{n} C_j C_{n-j}, \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Faremos alguns exemplos com termos da sequência, com o objetivo de determinar futuramente uma formula explicita para os números de Catalan.

Exemplo 3.2.1.

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1; \\
C_1 &= C_0 \cdot C_0 = 1 \cdot 1 = 1; \\
C_2 &= C_0 \cdot C_1 + C_1 \cdot C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2; \\
C_3 &= C_0 \cdot C_2 + C_1 \cdot C_1 + C_2 \cdot C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \\
C_4 &= C_0 \cdot C_3 + C_1 \cdot C_2 + C_2 \cdot C_1 + C_3 \cdot C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 14; \\
C_5 &= C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42; \\
C_6 &= C_0 \cdot C_5 + C_1 \cdot C_4 + C_2 \cdot C_3 + C_3 \cdot C_2 + C_4 \cdot C_1 + C_5 \cdot C_0 = 1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132.
\end{aligned}$$

Quadro 3 – Números de Catalan $C_n, 0 \leq n \leq 6$

n		C_n
0	1	1
1	1	1
2	1+1	2
3	2+1+2	5
4	5+2+2+5	14
5	14+5+4+5+14	42
6	42+14+10+10+14+42	132

Fonte: Autor

Podemos reescrever 3.1 da seguinte forma:

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_j C_{n-j}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Para $n = 0$, temos:

$$C_1 = C_{0+1} = \sum_{j=0}^{n} C_0 C_{0-j} = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Para $= 1$, temos:

$$C_2 = C_{1+1} = \sum_{j=0}^{n} C_0 C_{0-j} = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 + 1 = 2$$

Então, faça $k = n + 1$ dessa forma para $n = k - 1$ e reescrevemos 3.1

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_k = C_{k-1+1} = \sum_{j=0}^{k-1} C_j C_{k-1-j}, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

3.3 Formula Explicita para os números de Catalan

Queremos agora determinar uma formula explicita que permitam gerar os números de Catalan. Para isso, considere a série de potências $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, onde C_n é o n-ésimo de Catalan:

$$C(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Multiplicando por z^n em ambos os lados $C_n = \sum_{j=0}^{n=1} C_n C_{n-1-j}$, para $ngeq1$ Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n C_{n-1-j} z^n;$$

Adicionamos C_0 em ambos os lados da equação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n + C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j} + C_0;$$

Utilizando o conceito de produto de series de potência,

$$C(z) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n-1}^{\infty} z^{n-j-1} z + C_0;$$

$$C(z) = z \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n-1}^{\infty} z^{n-j-1} C_{n-1-j} + C_0;$$

Portanto temos:

$$C(z) = zC(z) \cdot C(z) + 1;$$

ou

$$C(z) = zC(z)^2 + 1;$$

Em seguida, obtemos a equação quadrática de Catalan;

$$zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0; \tag{3.2}$$

Utilizando o cálculo do discriminante, obtemos as possíveis soluções para a equação quadrática acima:

$$\Delta = 1 - 4z \Rightarrow C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Temos que:

$$\lim_{z \to 0+} \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \to 0-} \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z} = -\infty$$

Analisando as soluções e sem considerar a convergência, que não é o nosso objeto de estudo:

Portanto $C(z) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$.

Observe que: $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = 1 = C(0)$.

De fato, o $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Dessa forma aplicar a regra de L'Hospital(CAMINHA, 2015):

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-4z})'}{2z'}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-4z}}-4}{2}=\lim_{z\to 0}\frac{2}{\sqrt{1-4z}}\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-4z}}=1=C(0).$$

Proposição 3.3.1. A função ordinária para os números de Catalan é:

$$C(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \tag{3.3}$$

Agora vamos determinar uma formula explicita para os números de Catalan;

$$\sqrt{1-4z}=(1-4z)^{\frac{1}{2}}=$$

Utilizando o teorema Binomial Generalizado 1.3.2 para expandir o binômio;

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4z)^{\frac{1}{2}}=1-4z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^{k-1}}{k!}=$$

$$=1-2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^{k-1}}{k!}=$$

Substituindo em 3.3

$$=C(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}=(1-(1-2z))\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^{k-1}}{k!}}{2z}$$

$$=2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^{k-1}}{k!}}{2z}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^{k-1}}{k!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-2}{2}\right)\left(\frac{1-4}{2}\right)\left(\frac{1-6}{2}\right)\dots\left(\frac{1-2k+2}{2}\right)(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(\frac{3-2k}{2}\right)(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\dots\cdot\left(\frac{2k-3}{2}\right)(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)(-1)^{k-1}(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{k!}(-4)^{k-1}(z)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{k!}(z)^{k-1}.$$

E assim a solução da recorrência é obtida por:

$$= C_k = 2^k \frac{1 \cdot 3 \ldots 2k-1}{(k+1)!} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2k-1) \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k} =$$

$$= C_k = \frac{2^k}{(K+1)!} \frac{(2k)!}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \ldots (2 \cdot k)} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{(2^k)!}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} =$$

$$= C_k = \frac{(2^k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!}$$

$$C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$$

Portanto, a formula explicita que define os números de Catalan é $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ para $k \geq 0$. Dessa forma,

Teorema 3.3.1. Seja C_n é o n-ésimo de Catalan e $n \in \mathbb{N}$, então

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

3.4 Propriedades para os números de Catalan

Apresentaremos algumas propriedades para os números de Catalan cujas provas apresentadas para cada uma delas faremos por meio de manipulações algébricas.

Proposição 3.4.1. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Logo:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{n(2n)!}{(n+1)!(n!)^2}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$$

■

Proposição 3.4.2. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ tal que $\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} C_n. \end{cases}$

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ logo:

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} - \frac{\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} \frac{\frac{(2n+2)(2n+1)2n!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n!)}{n!n!}} = \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)(n+1)(n!)^2}{(n+1)n!(n+1)n!} =$$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$$

■

Uma identidade interessante que decorre do teorema Binomial é que $\dbinom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ é $C_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

De fato, considere a expansão do polinômio:

$$(1+2x)^{2n} = 1 + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \ldots + \binom{2n}{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} x^n \tag{3.4}$$

Por outro lado:

$$(1+2x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \tag{3.5}$$

Comparando o coeficiente de x^n em 3.4 e 3.5, temos que:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k}, \quad \text{pois} \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Dessa forma temos a identidade

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{3.6}$$

Demonstração. Segue da identidade 3.6.

De fato, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ■

Proposição 3.4.3. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $C_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Proposição 3.4.4. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $C_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1}$.

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. Dessa forma:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n(n-1)!n!} = \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n+1)n!(n-1)!} =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n+1}.$$

∎

Proposição 3.4.5. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $C_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n-1}$

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, dessa forma:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$$

∎

Proposição 3.4.6. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $C_n = 4\binom{2n-1}{n} - \binom{2n+1}{n}$.

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, dessa forma:

$$4\binom{2n-1}{n} - \binom{2n+1}{n} = 4\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} - \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} =$$

$$= 4\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} - \frac{(2n+1)2n(2n-1)!}{(n+1)!n!n(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}\left(4 - \frac{(2n+1)2n}{(n+1)n}\right) =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{4(n+1)n - 4n^2 - 2n}{(n+1)n}\right) = \frac{(2n-1)!(4n^2+4n-4n^2-2n)}{n!n(n-1)!(n+1)} =$$

$$= \frac{(2n-1)!2n}{n!n(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = C_n$$

∎

Proposição 3.4.7. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $C_n = \dfrac{2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}{n+1!}$

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, dessa forma:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 2 \cdot 1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)\ldots 2(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{2n(n-1)2(n-2)(n-3)\ldots 2 \cdot 1 \cdot (2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{2^{n+1}n(n-1)2(n-2)\ldots 1(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{2^{n+1}n(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}2(2n-1)2(2n-3)\ldots 2 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= \frac{(4n-2)(4n-6)\cdots 6 \cdot 2}{(n+1)!}$$

■

Proposição 3.4.8. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $C_{2n} = \dbinom{4n}{2n} - \dbinom{4n}{2n-1}$.

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \frac{1}{n+1} = \dbinom{2n}{n}$, dessa forma:

$$\binom{4n}{2n} - \binom{4n}{2n-1} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!} - \frac{(4n)!}{(2n-1)!(2n+1)}$$

$$= \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!} - \frac{(4n)!2n}{2n(2n-1)!(2n+1)(2n)!} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!} - \frac{(4n)!2n}{(2n)!(2n)!(2n+1)}$$

$$= \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}\left(\frac{2n+1-2n}{2n+1}\right)$$

$$= \binom{4n}{2n}\frac{1}{2n+1} = C_{2n}$$

■

Proposição 3.4.9. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_n}{C_{n+1}} = 4$.

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, dessa forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} \cdot \frac{n(n+1)!(n-1)!}{(2n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n-1)(2n-2)!n!(n-1)!}{(n+1)n!n(n-1)!(2n-2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n(2n-1)}{(n+1)n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n-1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 4$$

Observe que $\forall n, \in \mathbb{N}, n \geq 1$ temos $0 < \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} < 1$ e $0 < 4 - \dfrac{2}{n} < 4$.

Logo

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{4-\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \left(4-\frac{2}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right) < 4 - \frac{2}{n} < 4.$$

Observe que $\dfrac{C_n}{C_{n-1}} \cdot \dfrac{C_{n-1}}{C_{n-2}} \dots \dfrac{C_2}{C_1} \cdot \dfrac{C_1}{C_0} < 4 \cdot 4 \cdot 4 \dots 4^n$ e como $C_0 = 1$, logo

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} < 4^n \quad \blacksquare$$

Proposição 3.4.10. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Então $C_n = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2}$

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, dessa forma:

$$\binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n-2} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-2)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n-2)!(n+1)n!} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\left(\frac{n+1-(n-1)}{(n+1)(n-1)}\right) = \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\frac{2}{(n+1)(n-1)}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{n!(n-2)!}\frac{2n}{n(n-1)(n+1)} = \frac{2n(2n-1)!}{(n+1)n!n(n-1)(n-2)!}$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{2n!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

$\blacksquare$

Proposição 3.4.11. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Então $C_{n+1} = 2C_n + \dfrac{2}{n}\binom{2n}{n-2}$

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, dessa forma:

$$= 2C_n + \frac{2}{n}\binom{2n}{n-2} = 2\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} + \frac{2}{n}\binom{2n}{n-2} = \frac{2}{n}\frac{(2n)!}{n!n!} + \frac{2}{n}\frac{(2n)!}{n(n-2)!(n+2)!} =$$

$$= \frac{2(2n)!(n+2)(n+1) + 2(2n)!(n-1)(n+1)}{(n+2)(n+1)!(n+1)!} = \frac{2(2n)!(n+1)\left[n+2+n-1\right]}{(n+2)(n+1)!(n+1)!}$$

$$\frac{(2n)!(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)}{(n+2)(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} = C_{n+1}$$

∎

Proposição 3.4.12. Seja $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Então $C_{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$

Demonstração. De fato, segue do teorema 3.3.1 que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, dessa forma:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-2)!(n+2)!} =$$

$$\frac{(2n)!(n+1)}{n(n+1)n!} - \frac{(2n)!(n-1)n}{(n-2)!(n-1)n(n+2)(n+1)!} = \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!(n-1)n}{n!(n+2)(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[(n+1)\frac{(n-1)n}{(n+2)}\right] = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} - \frac{2(2n-2)}{n+2} =$$

$$= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)!(n+2)} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} = \binom{2(n+1)}{n+1} = C_{n+1}$$

∎

3.5 Interpretações Combinatória para os números de Catalan

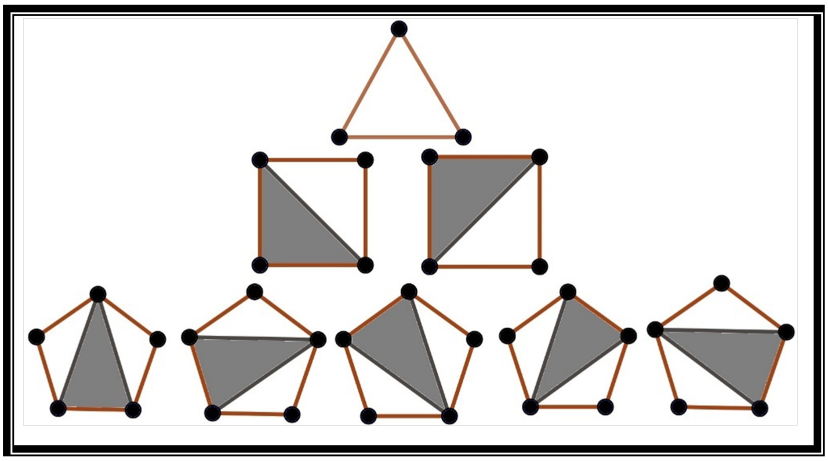
Os números de catalan possuem várias e maravilhosas aplicações e uma infinidade de interpretações combinatórias, (STANLEY, 1997), do MIT (Massachusetts Institute of Technology), reuniu ao longo de sua vida acadêmica inúmeros problemas com os números de Catalan e mais tarde escreveu o livro Enumerative Combinatorics vol. 2, com cerca 66 problemas cuja solução é um número catalan. Apresentaremos algumas dessas interpretações e começaremos por uma interpretação geométrica para os números de Catalan.

3.5.1 Triangulações e os números de Catalan

Historicamente, matemáticos demonstram grande interesse em estudar objetos com propriedades especiais, por exemplo, as triangulações de um polígono convexo. Uma triangulação de um polígono é a P decomposição de P em triângulos por um conjunto maximal de diagonais que não se cruzam. Estamos interessados em determinar o número de triangulações de um polígono convexo de n lados.

Usaremos a notação T_n para indicar o número de triangulações de um polígono convexo de n lados P_n. No caso de $n = 3$, temos um triângulo e convencionamos $T_2 = 1$. Por inspeção podemos constatar que há 2 maneiras de triangular um quadrilátero convexo e cinco maneiras de triangular o pentágono convexo traçando diagonais que não se cruzam. Para ilustrar observem a figura 20.

Figura 20 – Triangulações de um Polígono



Fonte: Autor

Definição 3.5.1. Seja $n \geq 3$ e considere um polígono convexo de n vértices rotulados. Definimos $T_2 = 1$ e T_n como o número de triangulações válidas deste polígono, isto é, aquelas obtidas através de $n - 3$ diagonais que não se interceptam em seu interior.

Vamos definir $\tau_n =$|conjunto das triangulações de P_n|. Temos que $|\tau_n| = T_n$.

Antes de enunciar o próximo teorema que será de grande utilidade em nosso trabalho, iremos conhecer um pouco sobre a história do matemático de Johann Andreas von Segner (1704–1777), nascido em Pressburg, Hungria (atual Bratislava, Eslováquia). Filho de um comerciante, estudou nos ginásios de Pressburg e Debrecen, formou na Universidade de Jena com um M.D. em 1730, onde estudou matemática e física e desenvolveu um fascínio vitalício por ambos. Em 1728, Segner publicou um artigo sobre a Regra dos Sinais de Descartes e em 1758 publica seu segundo livro. Depois de praticar medicina em Pressburg e Debrecen por um breve período, Segner retornou a Jena em 1732 como professor assistente e tornou-se professor associado de matemática no ano seguinte.

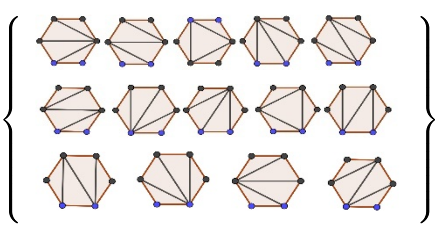
Em 1735, Segner foi nomeado professor de matemática e física na recém-fundada Universidade de Göttingen, na Alemanha. Vinte anos depois, ele se mudou para a Universidade de Halle, Alemanha, e permaneceu lá até sua morte. Um escritor volumoso em matemática e física, Segner ironicamente não fez descobertas na medicina. Em 1743, ele desenvolveu um barômetro naval. Sete anos depois, ele inventou uma turbina hidráulica de reação simples que leva seu nome. Mais tarde, Euler acrescentou seus próprios aprimoramentos à roda hidráulica de Segner. Aconselha-se a considerar a construção e a execução de dispositivos eficientes, incluindo réguas de cálculo, relógios e telescópios. Em 1751, ele introduziu o conceito de tensão superficial de líquidos e estudou a teoria do pião. A segner devemos esse belíssimo teorema a seguir.

Teorema 3.5.1. (Fórmula de Segner) A sequência T_n satisfaz

$$T_n = \sum_{j=2}^{n-2} T_j T_{n-j+1}, \quad n \geq 3$$

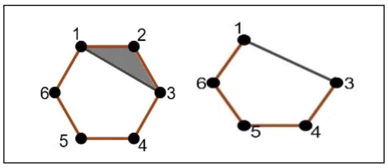
De fato, tomemos um polígono convexo de n vértices, temos que $T_n = |$O conjunto das triangulações de $P_n|$ e por convenção definimos $T_2 = 1$. Seja $Q \in \{3, 4, 5, \ldots, n\}$. Ao triangular P_6 obtemos 14 triangulações

$T_6 =$



Cada triangulação de P_6 que contém o triangulo $12Q$, podem ser particionadas em triangulações de polígonos cuja quantidade de lados é menor do que 6, por exemplo, observe o $Q = 3$, vamos triangular o pentágono (Figura 21) que são cinco no total.

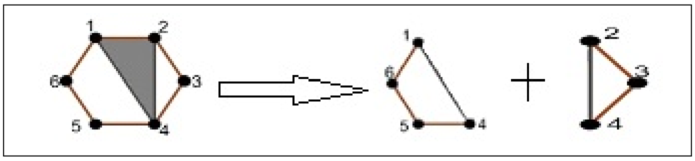
Figura 21 – Triangulação do Pentágono $Q = 3$



Fonte: Autor

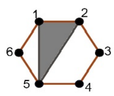
Dessa forma com o triângulo de vértices 123 fixos temos 5 triangulações de P_6. Agora, considere o hexágono com o triângulo de vértices 124 fixos:

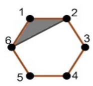
Figura 22 – Triangulação do Pentágono $Q = 4$



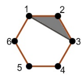
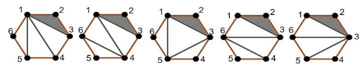
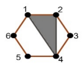
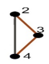
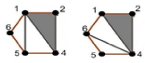
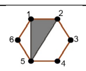
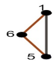
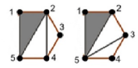
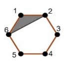
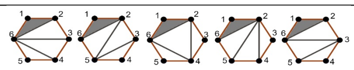
Fonte: Autor

Nesse caso vamos considerar as triangulações de P_4 que é um quadrilátero e do triangulo que é no total T_4T_3. Assim temos duas triangulações de P_6 com o triângulo de vértices 124 fixos.

Da mesma forma,  e assim temos T_2T_4 com duas triangulações de P_6 com o triangulo de vértices 125 fixos.

Finalmente considere  o total de triangulações de P_6 com os triângulos de vértices fixos é igual ao total de triangulações do pentágono de vértices 62345, logo o total é $T_5T_2 = T_5 \cdot 1$. Portanto, $T_6 = T_2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5T_2 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$, conforme vemos na quadro abaixo:

Quadro 4 – Triangulações de T_6

Q	Triangulações de P_{Q-1} $\lvert\tau_{Q-1}\rvert = T_{Q-1}$	Triangulações de P_6 que contém o triangulo $12Q$ $\lvert\tau_{6-Q+2}\rvert = T_{6-Q+2}$
 Q_3	$\varnothing$ $T_2 = 1$	 $T_5 = 5$
 Q_4	 $T_3 = 1$	 $T_4 = 2$
 Q_5	 $T_4 = 2$	 $T_3 = 1$
 Q_6		$\varnothing$

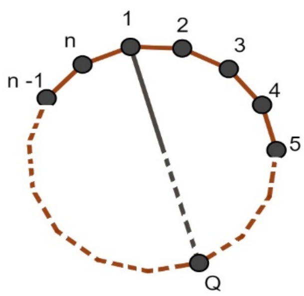
Fonte: Autor

Teorema 3.5.2. A sequência T_n satisfaz

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}\sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2}, \quad n \geq 4$$

Demonstração. De fato, observe a figura a abaixo, cujo $Q \in \{3, 4, 5, \ldots, n-1\}$ e uma diagonal $\overline{1Q}$ do polígono convexo P_n, que se divide em 2 outros polígonos convexos. Um a direita com Q lados e com T_Q maneiras e outro a esquerda com $n+1-Q+1 = n-Q+2$ lados, triangulados de T_{n-Q+2} maneiras.

Figura 23 – Divisão do Polígono P_n em Duas Regiões Separadas pela Diagonal $\overline{1Q}$



Fonte: Autor

Usando o princípio multiplicativo, temos $T_Q T_{n-Q+2}$ que serão as triangulações validas usando a diagonal $\overline{1Q}$ e ao variar o ponto Q para as posições $3, 4, 5, \ldots, n-1$, obtemos um total de triangulações validas para as diagonais que cruzem o vértice 1.

$$\sum_{Q=3}^{n-1} T_Q T_{n-Q+2}$$

Somando os números de triangulações e variando vértice de 1 até n, teremos duplicidade de todas as triangulações feitas a partir das diagonais. Isso porque contaremos duas vezes as diagonais $\overline{1Q}$ e $\overline{Q1}$. Portanto

$$\frac{n}{2}\sum_{Q=3}^{n-1} T_Q T_{n-Q+2}$$

é o número de triangulações validas a partir de cada diagonal do polígono convexo P_n. Esse número contém as $n-3$ vezes o total de triangulações de T_n, uma vez que cada vértice é origem de $n-3$ diagonais e cada triangulação utiliza $n-3$ diagonais. Com isso finalizamos a demonstração da recorrência:

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}\sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2}, \quad n \geq 4$$

■

Teorema 3.5.3. Se $n \in \mathbb{N}_0$, então $T_{n+2} = C_n$.

De outra forma, seja $n \in \mathbb{N}$. Então o número de triangulações de um $(n+2)$-ágono convexo em n triângulos, obtidas através de $n-1$ diagonais que não se interceptam em seu interior, é dado por C_n, o n-ésimo número de Catalan.

Demonstração. De fato, seja $g : \mathbb{N} \cup 0 \to \mathbb{N}$ e $g(m) = \dfrac{T_{m+2}}{C_m}$. Provemos que $g(m) = 1, \forall m$ e $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Sabemos que $T_2 = 1$ e $C_0 = 1$.

Logo:

$g(0) = \dfrac{T_2}{C_0} = \dfrac{1}{1} = 1$ e $T_2 = C_0$, também: $g(1) = \dfrac{T_3}{C_1} = 1$ e $g(2) = \dfrac{T_4}{C_2} = 1$,

Observe que para $n \geq 4$, temos:

$T_n + 1 = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} T_j T_{n-j+2}$, ou seja, $T_{n+1} = T_2 T_{n-2+2} + \sum_{j=3}^{n} T_j T_{n-j+2} = T_2 T_n + \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} + T_n T_2 = \displaystyle\sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} + 2T_n$

Logo:

$$T_{n+1} - 2T_n = \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} \tag{3.7}$$

Segue do Teorema 3.5.2, que

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}\sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2}, \quad \text{para todo} \quad n \geq 4 \tag{3.8}$$

Substituindo 3.7 em 3.8:

$(n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_{n+1} - T_n)$, ou seja, $(2n-6)T_n = nT_{n+1} - 2nT_n$, isto é, $2nT_n - 6T_n + 2T_n = nT_{n+1}$ ou ainda, $4nT_n - 6T_n = nT_{n+1}$.

Portanto,

$$T_{n+1} = \frac{(4n-6)}{n}T_n \leftrightarrow \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{4n-6}{n} \tag{3.9}$$

Segue da proposição da fórmula explicita que:

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} =$$

$$= \frac{2(n-1)(2n-3)}{n(n-1)}\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!^2} = \frac{4n-6}{n}\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!^2} =$$

$$\frac{1}{n}\frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}{n(n-1)(n-2)!(n-1)(n-2)!} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{n(n-1)}\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!^2} =$$

$$= \frac{4n-6}{n}\frac{1}{n-1}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!^2} \tag{3.10}$$

Substituindo $C_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{(n-2)!^2}$ em 3.10 temos:

$$C_{n-1} = \frac{4n-6}{n}C_{n-2}$$

ou seja,

$$\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} = \frac{4n-6}{n}$$

Logo:

$$\frac{C_{n-2}}{C_{n-1}} = \frac{n}{4n-6} \tag{3.11}$$

Para todo $n \geq 4$, segue de 3.10 e 3.11,

$$\frac{g(n-1)}{g(n-2)} = \frac{\frac{T_{n+1}}{C_{n-1}}}{\frac{T_n}{C_{n-2}}} = \frac{T_{n+1}}{C_{n-1}}\frac{C_{n-2}}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n}\frac{C_{n-2}}{C_{n-1}} = \frac{4n-6}{n}\frac{n}{4n-6} = 1$$

Portanto para todo $n \geq 4, g(n-1) = g(n-2) = C$.

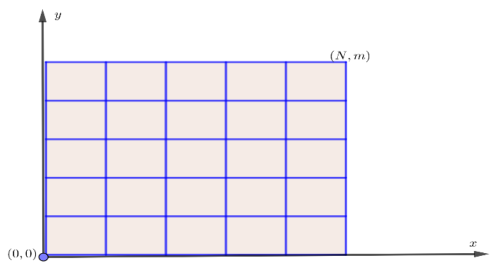
Como $g(3) = g(4) = 1$, então $g(m) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup 0$ ■

3.5.2 Uma abordagem combinatória para os números de Catalan: Caminhos reticulados

Iremos agora apresentar uma interpretação combinatória para a identidade 3.4.1 da seção 3.4. Faremos aqui uma interpretação do coeficiente binomial $\binom{N+m}{m}$ através de caminhos reticulados em $\mathbb{Z}^2 = \{(a,b); a,b \in \mathbb{Z}\}$.

Considere o plano xy e o retângulo de lados inteiros N e m contidos no primeiro quadrante, cujo em lado esteja contido o eixo x e no outro eixo y

Figura 24 – Retângulo $N \times m$



Fonte: Autor

De quantas maneiras podemos passar pela origem $(0,0)$ para o ponto (N,m), cujo N e m são inteiros não negativos, podendo caminhar de unidade em unidade para à direita (leste) ou para cima (norte). Tomamos um total de $N+m$ passos, exatamente N desses passos devem ir para o leste, sendo tomados em qualquer posição. Assim do conjunto de $N+m$ passos, podemos selecionar qualquer m deles para serem os passos para o norte. Vamos denotar por $K(N,m)$ =total de caminhos reticulados que partem de $(0,0)$ e chegam no (N,m).

Temos que $\#K(N,m) = \binom{N+m}{m}$

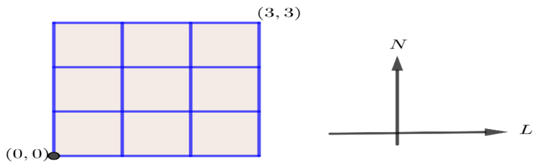
Exemplo 3.5.1. *De quantas maneiras podemos passar da origem* $(0,0)$ *para o ponto* $(3,3)$*?*

Temos:

$$\binom{3+3}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20 \quad \textit{caminhos de} \quad (0,0) \quad a \quad (3,3).$$

Considere uma grade quadrada $n \times n$, como ilustrado na figura:

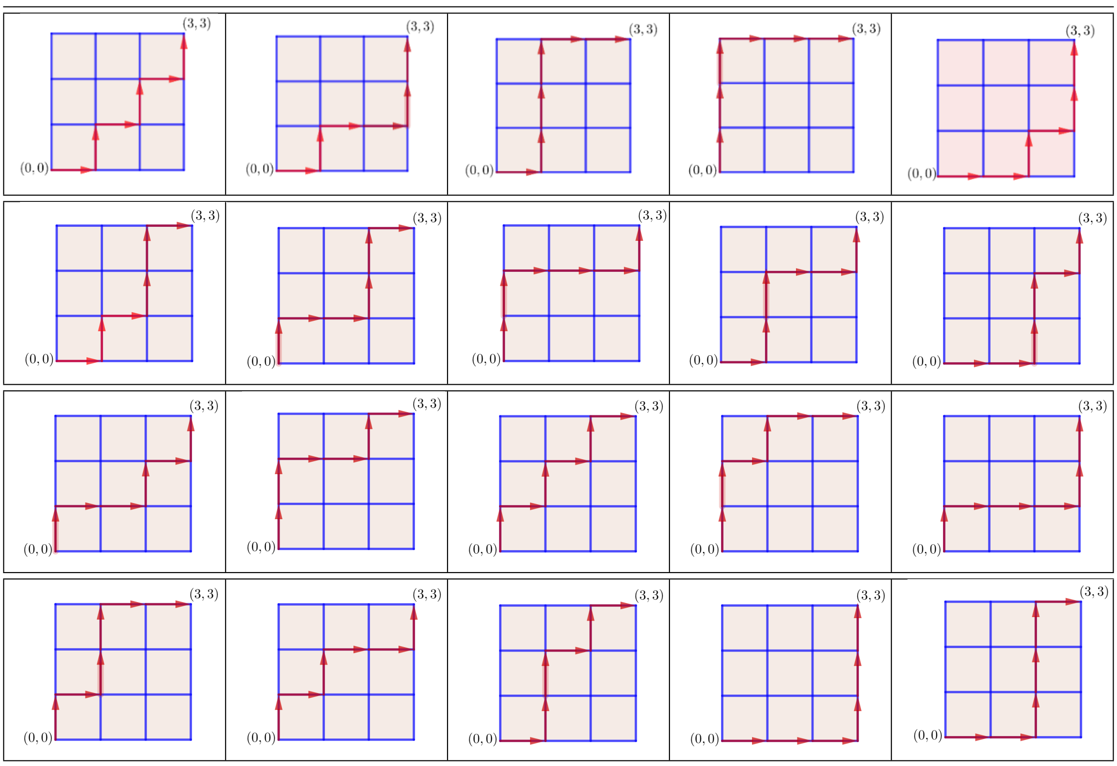
Figura 25 – Caminho 3×3



Fonte: Autor

No caso a grade 3×3 temos os seguintes caminhos reticulados:

Quadro 5 – Caminhos Reticulados Grade 3×3



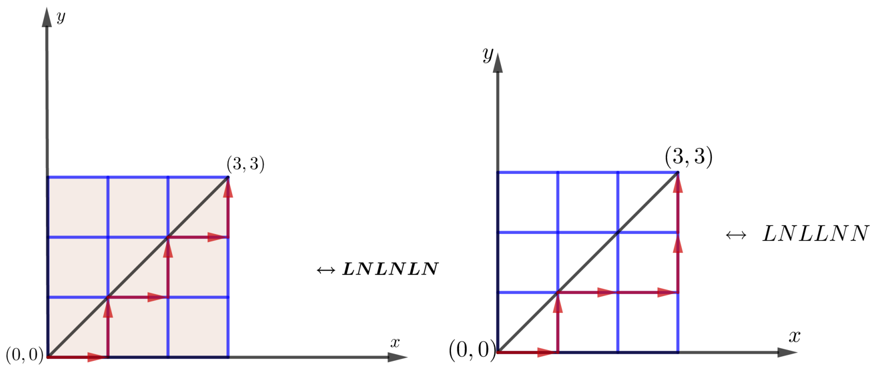
Fonte: Autor

Segue do exemplo 3.5.1 do quadro 5 todos os possíveis caminhos reticulados que saem $(0, 0)$ até $(3, 3)$. Vamos estabelecer uma bijeção entre os caminhos que saem de $(0, 0)$ e chegam em (n, n). Com os anagramas de $2n$ letras, cujas letras L se repetem n vezes e a letra N se repetem n vezes.

Temos $K(n, n)$ conjunto dos caminhos reticulados que saem de $(0, 0)$ e terminam em (n, n). Já vimos que $\#K(n, n) = \binom{2n}{n}$ e $\mathfrak{L}(n, n) =$ o conjunto dos anagramas de $2n$ letras, cujas letras L se repetem n vezes e N se repetem n vezes. A bijeção de $K(n.n)$ e $\mathfrak{L}(n, n)$ é dada da seguinte forma:

Cada passo dado no caminho para o leste, simbolizamos a letra que compõe o anagrama por L e cada passo dado para o norte simbolizamos com a letra N . Como temos $2n$ passos, formamos um anagrama com $2n$ letras, observe que o processo é reversível. Na figura 26 ilustramos a bijeção:

Figura 26 – Bijeção



Fonte: Autor

Agora vamos considerar em $K(n, n)$ os caminhos reticulados cujos passos estão abaixo da reta $y = x$ e iremos denotar por $\zeta(n, n) \subset K(n, n)$ e vamos considerar o complementar de $\zeta(n, n)$ em relação a $K(n, n)$.

Definição 3.5.2. Dado $C \in K(n, n)$, dizemos que C é um caminho válido se o anagrama $A \in \mathfrak{L}(n, n)$ associado a C satisfizer as seguintes condições:

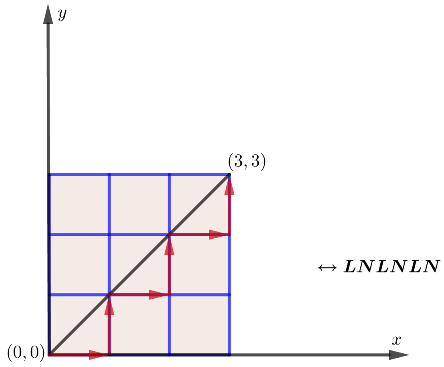
i. Os anagramas devem começar em L e terminar em N;

ii. A cada bloco de k letras $(1 \leq k \leq 2n)$ o número de $L's$ é maior ou igual ao número de $N's$.

Caso contrário, dizemos que o caminho reticulado C é inválido.

Exemplo 3.5.2. *Seja C na figura 25, $C \in K(3,3)$*

Figura 27 – Bijeção - Caminho Reticulado 3×3



Fonte: Autor

Dado o anagrama $A : LNLNLN$, associado a C, A começa com L e termina com N. Logo satisfaz a condição i).

Agora vamos verificar que a condição ii) da definição 3.5.2 também ocorre. Logo Para $k = 1$, temos: $L|NLNLN$, no primeiro bloco temos 1 números de L e zero números de N.
Para $k = 2$, temos: $LN|LNLN$, verifique que 1 números de L e 1 números de N.
Para $k = 3$, temos: $LNL|NLN$, verifique que 2 números de L e 2 números de N.
Para $k = 4$, temos: $LNLN|LN$, verifique que 3 números de L e 1 números de N.
Para $k = 5$, temos: $LNLNL|N$, verifique que 4 números de L e 1 números de N.

Portanto C é um caminho válido.

Observe que os caminhos válidos estão associados ao $C \in K(n,n)$ tal que C está abaixo da reta $y = x$.

Queremos provar que $C \in K(n.n)$, C é $|Caminhos\ válidos| = | \zeta(n.n) |$.

Agora iremos definir uma bijeção entre os caminhos inválidos e os anagramas de $2n$ letras cuja letra L repete $(n-1)$ e a letra N repete $(n+1)$ vezes.

Para isso observe: Se o caminho C começa com N então C será inválido, nesse caso, considere o bloco formado pela letra N e outro com o restante das letras com segue no exemplo:

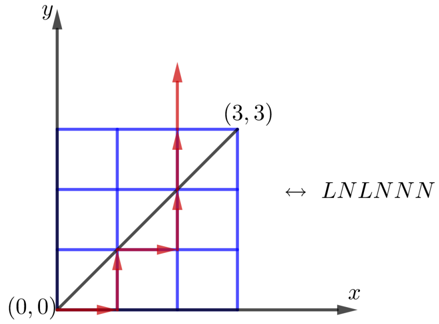
$$NLLNNL \leftrightarrow \underbrace{N}_{1^\circ\,Bloco} \mid \underbrace{LLNNL}_{2^\circ\,Bloco} \leftrightarrow N \mid NNLLN$$

Ou seja, repetimos a letra do 1° bloco e trocamos as letras do 2° bloco, concluímos que o processo é reversível.

Se C começa em L e termina com N e não satisfaz ii) da definição 3.5.2.

Por exemplo, $LNLNNN$. Como são 6 letras, então considere a grade 3×3 e descreva o anagrama $LNLNNN$ nessa grade, por meio norte (acima) e leste (direita), como a figura abaixo.

Figura 28 – Caminhos Não Válido

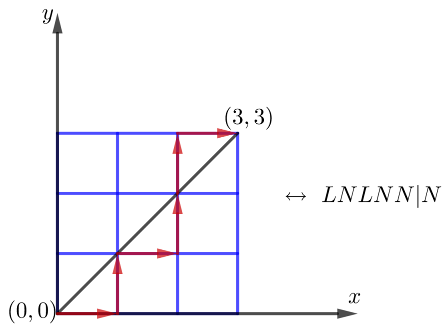


Fonte: Autor

Separamos o anagrama em dois blocos de letras como segue $LNLNN|N$ no qual a barra divide em dois blocos em que exatamente a reta $y = x$ cruza o caminho C a ser construído. Vamos conservar o 1° bloco e trocamos as letras do 2° bloco.

$LNLNN|N \leftrightarrow LNLNN|L$

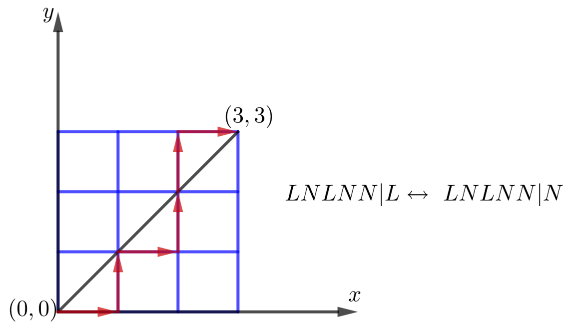
Figura 29 – Caminho C



Fonte: Autor

Como o caminho C' obtido de C começa em L e termina em L não satisfaz i) e nem ii), continua sendo um caminho inválido. Além disso, cruza a reta $y = x$ em algum instante. Considere a primeira vez que C' cruza a reta $y = x$. O exemplo a seguir deixará claro

Figura 30 – Caminho C



Fonte: Autor

Ou seja, observando o caminho no momento e em que passo ele cruza a reta $y = x$ que foi no quinto passo, nesse instante forma-se dois blocos de letras 1° bloco e 2° bloco (lendo da esquerda para direita). Conserve as letras do 1° bloco e trocamos as letras do 2° bloco, observe que ficamos com um anagrama de 6 letras com 4 letras $N's$ que se repetem e 2 letras $L's$ que se repetem.

Portanto, $C \in K(n,n) : C$ é | caminhos inválidos $|= \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)} = \dbinom{2n}{n-1}$.

Com isso concluímos que $\#\zeta(n,n) = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n-1}$.

De fato,

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!n}{(n-1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{n(2n)!}{(n-1)!(n!)^2} =$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

Portanto, segue do resultado:

Proposição 3.5.1. Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. O total de caminhos reticulados que começam em $(0,0)$ e terminam (n,n) e estão abaixo da reta $y = x$ é igual a $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho apresentamos definições, resultados, algumas propriedades e identidades que envolvem os números de Pell e Catalan, ressaltamos a importância do estudo dessas sequências numéricas e apresentamos algumas possibilidades para o professor utiliza-las e aplica-las em sala de aula, adequando-se a sua realidade. Delineamos algumas interpretações combinatórias que validam algumas propriedades que escolhemos e a presença dessas duas sequências numéricas em problemas práticos, seja em construções arquitetônicas ou no cotidiano. Um dos objetivos durante a elaboração desse trabalho foi pensar numa proposta didática para o Ensino Médio que ajudasse o professor em sua pratica, os números de Pell oferecem muitas possibilidades desde as suas construções geométricas até as interpretações combinatórias, explorando os ladrilhamentos e os braceletes em atividades lúdicas e práticas. uma ideia é uma aula sobre braceletes feita com a montagem de pequenas de pulseiras coloridas feitas com miçangas, onde podemos introduzir o conceito de maneira divertida e prazerosa.

Os números de Catalan com as triangulações e os caminhos reticulados em que espera que o aluno perceba a quantidade de movimento feitos para a direita (leste) é o número correspondente ao eixo x no plano cartesiano e a quantidade de movimentos feitos para cima (norte) é o número correspondente ao eixo y no plano, ou seja, o par ordenado (x, y) onde os caminhos reticulados terminam. A proposta didática é oferecer uma abordagem com construções geométricas e interpretações combinatórias que possam ser aplicadas em sala de aula do Ensino Médio e com isso, melhorar e fixar os conceitos aqui apresentados.

Durante os estudos esbarrei em outras sequências interessantes que podem vir a serem investigadas e estudadas. A riqueza e diversidade das sequências numéricas será sempre uma fonte inesgotável para aqueles que a apreciam.

Referências

ALVES, F. R. V. Sequência generalizada de pell (sgp): aspectos históricos e epistemológicos sobre a evolução de um modelo. *Revista Thema*, v. 13, n. 2, p. 27–41, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.15536/thema.13.2016.27-41.324>. Acesso em: 25 Jul. 2017. Nenhuma citação no texto.

BENJAMIN, A. T.; PLOTT, S. S.; SELLERS, J. A. Tiling proofs of recent sum identities involving pell numbers. *Annals of Combinatorics*, Springer, v. 12, n. 3, p. 271–278, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 53.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. *Proofs that really count: the art of combinatorial proof.* [S.l.]: MAA, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 53.

BOYER, C. B. *Historia da matemática.* 3. ed. [S.l.]: Blucher, 2010. Citado na página 11.

BUESCU, J. *Os incríveis números de Catalan.* Disponível em: <https://nda.tecnico.ulisboa.pt/files/sites/40/Os-incriveis-numeros-de-Catalan-ingenium-93-2010.pdf>. Acesso em: 02 Jul. 2018. Nenhuma citação no texto.

CAMINHA, A. *Fundamentos de Cálculo.* 1. ed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 21, 42 e 62.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *Matemática discreta.* 1. ed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

CRAVEIRO, I. M. *Extensões e interpretações combinatorias para os numeros de Fibonacci, Pell e Jacobsthal.* Doutorado em Matemática — Instituto de Matemática, Estatísitca e Computação Científica, 2004. Nenhuma citação no texto.

CRAVEIRO, I. M. *Aplicação de Diagonalização de Operadores.* [S.l.]: Minicurso, 2012. Nenhuma citação no texto.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações.* 1. ed. São Paulo - São: Àtica, 2011. v. 3. Citado na página 16.

DASDEMIR, A. On the pell, pell-lucas and modified pell numbers by matrix method. *Applied Mathematical Sciences*, v. 5, n. 64, p. 3173–3181, 2011. Citado na página 36.

GARCIA, D. B. *Resolução de problemas de Combinatória usando Funções Geradoras.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal do Maranhão, São Luis - MA, 2013. Nenhuma citação no texto.

GEEK37. *silver rectangles and silver spirals*: vídeo do youtube - 6:08 min. Publicado em 25 de fev de 2018. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=vdsXeUThKyE>. Acesso em: 20 jul 2018. Nenhuma citação no texto.

GRIMALDI, R. *Fibonacci and Catalan Numbers: an introduction.* [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Nenhuma citação no texto.

HOWARD, A.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações.* [S.l.]: Bookman Porto Alegre, 2006. Nenhuma citação no texto.

KOSHY, T. *Catalan numbers with applications*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L. *Análise real*. 12. ed. [S.l.]: Impa, 2016. v. 1. Nenhuma citação no texto.

PAK, I. History of catalan numbers. *arXiv preprint arXiv:1408.5711*, 2014. Disponível em: <http://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf>. Acesso em: 15 mar 2018. Nenhuma citação no texto.

POFFAL, C. A.; FERREIRA, L. d. N. Relações de recorrência. 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1/1051>. Acesso em: 20 jul. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 59.

PRIMO, A.; IGLESIAS, E. R. Some algebraic and geometric properties of the silver number: Mathematics and informatics. Quarterly 18, 2007. Citado na página 39.

ROMAN, S. *An introduction to Catalan numbers*. 1. ed. [S.l.]: Birkhauser, 2015. Citado na página 53.

SANTANA, S. F.; DIAZ-BARRERO, J. Some properties of sums involving pell numbers. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, v. 18, n. 1, p. 33–40, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 53.

SANTOS, J. P. de O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à análise combinatória*. [S.l.]: Ed. Ciencia Moderna, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 28.

SPINADEL, V. W. de. La familia de números metálicos y el diseño. 1995. Disponível em: <https://studyres.es/doc/1886729/la-familia-de-los-números-metálicos-y-el-dise~no>. Acesso em: 05 jun 2018. Citado na página 38.

SRISAWAT, S.; SRIPRAD, W. Some pell and pell-lucas identities by matrix methods and their applications. *Science and Technology RMUTT Journal*, v. 6, n. 1, p. 170–174, 2016. Citado na página 36.

STANLEY, R. P. Enumerative combinatorics, wadsworth publ. *Cambridg University Press*, Cambridg Studies in Advanced Mathematics, II, n. 49, 1997. Citado na página 70.

STEDALL, J. A. *A discourse concerning algebra: English algebra to 1685*. [S.l.]: New York, Oxford University Press Inc, 2002. Citado na página 23.

TRAVASSOS, M. F. G. *Abordagens Algébricas e Combinatórias para o Polinômio de Gauss*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados - MS, 2017. Nenhuma citação no texto.

Apêndices

APÊNDICE A – Caracterização Sistemas Homogêneos via Determinantes de Matrizes e dependência e independência linear

Faremos um breve estudo dos conceitos: autovalores e autovetores e teremos a necessidade de alguns resultados que envolvem a resolução de sistemas lineares homogêneos. Dessa forma, nos preocuparemos em descrever alguns conceitos e resultados que usaremos diretamente no próximo capítulo.

A.1 Sistemas Homogêneos

Definição A.1.1. Dados os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta (n \geq 1)$. Chamamos de equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$$

onde, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes e β é chamado de termo independente.

Exemplo A.1.1. $2x + 3y - 5z = 10$, *é uma equação linear nas variáveis* x, y, z *sendo* $2, 3, 5$ *os coeficientes e* 10 *é o termo independente.*

Definição A.1.2. Dada a equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta,$$

dizemos que o vetor, cujas entradas são números reais e tem comprimento n, a saber, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é uma solução da equação, se e somente se,

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b = \beta.$$

Definição A.1.3. Um sistema linear S de m equações com n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n (m, n \geq 1)$ é um conjunto de m equações lineares, cada uma dessas equações com n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, como segue

$$S = \begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + \alpha_{mn} x_n = \beta_m \end{cases}$$

para todo i, j as constante α_{ij} são chamados coeficientes das variáveis x_j com $j = 1, 2, \ldots, n$ e os β_i são chamados de termos independentes.

Exemplo A.1.2. *Considere os seguintes sistemas lineares:*

$$1^{\underline{o}} = \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases} \quad \textit{um sistema linear} \quad 2 \times 2, \textit{de variáveis} \quad x \quad e \quad y.$$

$$2^{\underline{o}} = \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y - z = 8) \end{cases} \quad \textit{um sistema linear} \quad 3 \times 3, \textit{de variáveis} \quad x, y \quad e \quad z$$

Definição A.1.4. Se em um sistema linear todos os termos independentes são nulos, o sistema é chamado sistema linear homogêneo.

A.2 Sistemas Homogêneos: Determinante de Matrizes

O objetivo desta seção é descrever a resolução de sistemas lineares homogêneos, cujo número de variáveis é igual ao número de equações. Para isso, vamos reescrever esses sistemas lineares, por meio de matrizes quadradas, onde estão definidos o conceito de determinante de matriz. Segue de [1], que a toda matriz quadrada A está associada a ela um número real chamado determinante da matriz A que denotamos por $de(A)$.

Exemplo A.2.1. *1)O sistema linear homogêneo de m equações e n variáveis:*

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Observe que esse sistema sempre tem uma solução, a saber, a solução que chamamos de trivial, ou seja, que é $S = (0, 0, \ldots, 0)$. *Estaremos interessados nos sistemas homogêneos que apresentam outras soluções que são diferentes da solução trivial.*

2)Os sistemas lineares homogêneos de 2 e 3 equações e 2 e 3 variáveis, respectivamente:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - y - z = -1 \\ x - y - z = 8) \end{cases}$$

Considere o sistema linear homogêneo n equações e n variáveis, como segue

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Vamos reescreve-lo usando a notação matricial, dessa forma tal sistema é equivalente:

$AX = 0_{(n\times 1)}$ onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 0_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo

$$AX = 0_{(n\times 1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde A é chamada matriz dos coeficientes, X matriz das variáveis e $0_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes

Segue de [1], algumas propriedades de sistemas homogêneos que irão orientar o desenvolvimento desse trabalho.

1) Se $\det(A) = 0$ então o sistema é homogêneo só pode ser possível e indeterminado, ou seja, tem a solução trivial entre outras;

2) Se $\det(A) \neq 0$ então o sistema é homogêneo tem somente uma solução, ou seja, $S = (0, 0, \ldots, 0)$ é a única solução do sistema;

3) A é *inversível* $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$;

De acordo com essas propriedades:

Exemplo A.2.2. *a) O sistema linear homogêneo é determinado* $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0) \end{cases}$

possui mais de uma solução. Pois, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$*;*

b) O sistema linear homogêneo é determinado $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0) \end{cases}$ *e possui uma única solução, pois* $\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 5 + 1 + 4 + 1 - 2 + 10 = 19.$

Como $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\right) \neq 0$ *então o sistema linear homogêneo só admite a solução trivial;*

c) Observe que A é inversível se, e somente se, existe uma matriz quadrada A^{-1} tal que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_{n\times n}$, onde $I_{n\times n}$ é a matriz identidade de ordem n. Dessa forma,

$$AX = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times 0_{n\times 1} \Leftrightarrow I_{n\times n}X = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow X = 0_{n\times 1}.$$

Com isso concluímos que um sistema linear homogêneo admite somente a solução trivial quando a matriz dos coeficientes, A é inversível. Dessa forma, um sistema linear homogêneo admite somente a solução trivial se e somente se, $\det(A) \neq 0$. *Estaremos interessados em sistemas lineares homogêneos que admite infinitas soluções, neste caso, é equivalente dizer que o determinante da matriz dos coeficientes,* $\det(A) = 0$.

A.3 Sistemas Homogêneos: Dependência e Independência Linear

Queremos descrever a resolução de sistemas lineares homogêneos $AX = 0_{n\times 1}$, observando as colunas da matriz A. Ou seja,

$$AX = 0_{(n\times 1)} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \end{pmatrix} \dots v_n = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$, Para isso,

Definição A.3.1. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \subset V$. Dizemos que o conjunto $v_1, v_2, \dots, v_n$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$

são LI, se e somente se, $(\forall \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$, tais que, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0)$. Caso contrário, dizemos que e $v_1, v_2, \ldots, v_n \subset V$ é linearmente dependente. Neste trabalho denotaremos por 0_V= vetor nulo do espaço vetorial V.

Teorema A.3.1. Sejam $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \end{pmatrix} \ldots$

$\ldots v_n = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$.

Temos que $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \end{pmatrix}$,$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \end{pmatrix} \ldots$
$v_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ são linearmente dependentes se, e somente se $\det(A) = 0$.

Demonstração. Suponha $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{n1} \end{pmatrix}$,$v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \end{pmatrix} \ldots v_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ é linearmente dependentes, dessa forma existem $c_1, c_2 \ldots c_n \in \mathbb{R}$ com algum $c_j \neq 0$ tal que, $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = 0_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ou seja, $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Portanto existe uma solução que não é a solução trivial desse sistema homogêneo. Logo, $\det(A) = \left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \right) = 0$.

Reciprocamente, suponha $\det(A) = \left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \right) = 0$.

Daí o sistema homogêneo, $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ tem solução $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Isto é, existe pelo menos $c_j \neq 0, c_j \in \mathbb{R}$. Dessa forma,
$c_1 \times \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \times \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \ldots$

$$\ldots + c_n \times \begin{pmatrix} \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $v_1, v_2 \ldots v_n$ são linearmente dependentes.

■

APÊNDICE B – Autovetores e autovalores

Dada uma matriz quadrada A estamos investigando a existência de vetores não nulos v, tais que o vetor Av seja múltiplo de v. Esta questão é fundamental na Álgebra Linear. Este tipo de problema tem aplicações por todas as áreas da Matemática, e fora dela também.

B.1 Autovalores de uma matriz quadrada

Definição B.1.1. Considere A uma matriz de ordem $n \times n$. Um escalar λ é chamado de autovalor de A, se existe um vetor não nulo v, tal que $Av = \lambda v$. O vetor v é chamado de um autovetor de A correspondente a λ.

Dada uma matriz A quadrada de ordem n queremos encontrar os autovalores de A, para isso, suponha $Ax = \lambda x$, onde x é um vetor não nulo e λ é um escalar. Observe que:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0_{n\times 1}.$$

onde $0_{n\times 1}$ é a matriz nula de ordem $n \times 1$ e I é a matriz identidade de ordem n. A equação $(\lambda I - A)x = 0_{n\times 1}$ tem uma solução não nula, se e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$.

Definição B.1.2. Considere A uma matriz $n \times n$. Chama-se polinômio característico de A, o polinômio na indeterminada $\lambda, p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ e $\det(\lambda I - A) = 0$ de equação característica.

Observe que os valores $\lambda \in \mathbb{R}$ que satisfazem $\det(\lambda I - A) = 0$ são autovalores de A. Para encontrar os autovalores associados a λ basta resolver o sistema $Ax = \lambda x$ e escolher uma solução não nula x.

Exemplo B.1.1. *Encontre os autovalores de* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Solução: *Agora vamos calcular a equação característica de A, para isso,*

$$(\lambda I - A) = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & (\lambda - 8) \end{bmatrix}$$

Segue da expansão em cofatores [1], que:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 17 & (\lambda - 8) \end{bmatrix} {}^{-}1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & (\lambda - 8) \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 17) - 4 = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4.$$

Assim $\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$, *portanto os autovalores devem satisfazer esta equação cúbica. Esta tarefa pode ser enormemente simplificada se lembrarmos do seguinte resultado: "todas as soluções (se houver) de uma equação polinomial* $\lambda^n + C_1\lambda_{n-1} + \ldots + C_n = 0$, *com coeficientes inteiros são divisores do termo constante* C_n*."*

Desta forma, as possíveis soluções inteiras de $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$ *são os divisores de* -4 *que são* $\pm 1, \pm 2, \pm 4$*. Substituindo cada um destes valores em* $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$ *temos que* $\lambda = 4$ *é uma solução inteira. Então dividindo* $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$ *por* $\lambda - 4$ *temos* $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$.

Resolvendo a equação quadrática $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, *temos que* $2 \pm \sqrt{3}$ *são as duas soluções. Desta forma, os autovalores de* A *são:* $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$.

Teorema B.1.1. Sejam A uma matriz de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) λ é autovalor de A;

b) O sistema $(\lambda I - A)x = 0_{n\times 1}$ de equações tem soluções não nulas;

c) Existe um vetor não-nulo x, tal que $Ax = \lambda x$;

d) λ é uma solução da equação característica $\det(\lambda I - A)x = 0$

Demonstração. $(a \Longrightarrow b)$
Um escalar λ é chamado autovalor de A, se existe um vetor não nulo x, tal que $Ax = \lambda x$.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0_{n\times n} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0_{n\times n}$$

Onde $0_{n\times n}$ é a matriz nula $n \times 1$, I é a matriz identidade de ordem n e x uma solução não nula.

$(b \Longrightarrow c)$ Considere o sistema $(\lambda I - A)x = 0_{n\times n}$, onde $0_{n\times 1}$ é a matriz nula $n \times 1$, I a matriz identidade de ordem n e x uma solução não nula.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x - Ax = 0_{n\times n} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0_{n\times n} \Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

Onde $0_{n\times n}$ é a matriz nula $n \times 1$, I a matriz identidade de ordem n e x uma solução nula.

$(c \Longrightarrow d)$ Suponha que exista um vetor x não nulo , tal que $Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0_{n\times n} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0_{n\lambda 1}$$

Onde x é uma solução não nula. Dessa forma $\det(\lambda I - A) = 0$

$(d \Longrightarrow a)$ Supondo que λ é uma solução da equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$. Segue daí que existe x não nulo tal que $(\lambda I - A)x = 0_{n\lambda 1}$. Como

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0_{n\times n} \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0_{n\times 1}$$

Portanto λ é autovalor de A. ∎

B.2 O cálculo dos autovetores

Dada uma matriz A de ordem n, queremos calcular os autovetores de A. Inicialmente, temos que calcular os autovalores de A que já vimos como proceder, na seção anterior. Se a matriz A não possui autovalor, não há o que fazer. Senão, sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t; t \leq n$ os autovalores de A, associados ao $\lambda_i, i = 1, 2, 3, \ldots, t$. Segue um esquema para o cálculo dos autovetores de A.

Procedimento

Dados de entrada: matriz A de ordem n.

1. Calcule a matriz $\lambda I - A$, onde λ é uma variável real;
2. Calcule $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;
3. Encontre t, onde t é o grau de p, observe que $t \leq n$;
4. Encontre as raízes do polinômio p, ou seja, resolva $p(\lambda) = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$: Para $j = 1$ até t faça:

   4.1 $\exists \lambda_j \in \mathbb{R};\ p(\lambda_j) = 0$? Se 4.1 é falsa, então A não possui autovalores. Caso contrário, repita o passo 4.1 novamente;

   4.2 Liste λ_j.
5. Enquanto $j = 1$ até t faça:

   5.1 Encontre as soluções não nulas do sistema $Ax = \lambda_j x$;

   5.2 Liste as soluções X_j associados à λ_j;
6. Liste $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Estes são os autovetores de A, associados à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ respectivamente.

Fim do Procedimento

B.3 O Problema de Diagonalização (versão matricial)

Dada uma matriz A de ordem n, existe uma matriz invertível P, tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal?

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ Observe que P é invertível e $P^{-1}AP = D$, ou seja, $AP = PD$.

Considere agora $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Queremos encontrar $P = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, tais que $P^{-1}AP = D$, ou seja, $AP = PD$. Supondo que existem tais matrizes temos:

$$P = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\lambda_1 & z\lambda_2 \\ y\lambda_1 & w\lambda_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x\lambda_1 \\ w = x\lambda_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -x = y\lambda_1 \\ -z = w\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -y\lambda_1^2 \quad \text{e} \quad w = -w\lambda_2^2 \Leftrightarrow y(1+\lambda_1^2) = 0 \quad \text{e} \quad w(1+\lambda_2^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{e} \quad w = 0.$$

Mas, $y = 0$ e $w = 0$ implica que o $\det(P) = 0$ e P não é invertível, o que é uma contradição.

Definição B.3.1. Seja A uma matriz de ordem n. Dizemos que A é diagonalizável se existe uma matriz P invertível, tal que a $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Se existe a matriz P, dizemos que P diagonaliza A.

Proposição B.3.1. Sejam M uma matriz quadrada e n um número natural. Se M é diagonalizável então M^n é diagonalizável.

Demonstração. M diagonalizável $\Leftrightarrow \exists P$ inversível e D matriz diagonal tais que $P^{-1}MP = D \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$.

$M = PDP^{-1} \Rightarrow M^n = (PDP^{-1})^n \Rightarrow M^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\ldots(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDDD\ldots DP^{-1} = PD^nP$

E D^n é uma matriz diagonal, pois D é uma matriz diagonal. Portanto,

$$M^n = PD^nP \Leftrightarrow P^{-1}M^nP = D^n$$

E M^n é diagonalizável. ∎

Teorema B.3.1. Seja A uma matriz de ordem n, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é diagonalizável;

b) A tem n autovetores linearmente independente;

Demonstração. ($a \Rightarrow b$) Suponha que A é diagonalizável. Logo existe uma matriz

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Invertível, tal que $P^{-1}AP = D$,onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$$AP = PD \Leftrightarrow AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \lambda_2 p_{13} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \lambda_2 p_{23} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \lambda_2 p_{n3} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n, \quad \text{onde}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix}, \dots, p_n = \begin{bmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix}$$

são as sucessivas colunas de P.

Portanto $p_1, p_2, \dots, p_n$, são autovalores de A e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os seus autovalores associados, respectivamente. Como P é invertível, seus vetores colunas são não-nulos e formam um conjunto linearmente independente $(L.I)$ com n vetores.

$(b \Rightarrow a)$ Suponha que A tenha n linearmente independente $p_1, p_2, \dots, p_n$ são autovetores de A com autovalores associados e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e seja

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz cujos vetores colunas são: $p_1, p_2, \dots, p_n$. Os vetores de AP são: $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$. Mas $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$ de modo que

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \lambda_2 p_{13} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \lambda_2 p_{23} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \lambda_2 p_{n3} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

Onde D é uma matriz diagonal com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na diagonal principal. Como os vetores-coluna de P são linearmente independentes, P é invertível, assim $P^{-1}AP = D$, ou seja, A é diagonalizável. ■

Procedimento:

Dado de entrada: matriz A de ordem n.

1. Calcule a matriz $\lambda I - A$, onde λ é uma variável real;
2. Calcule $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$;
3. Encontre t, onde t é o grau de p, observe que $t \leq n$;
4. Encontre as raízes do polinômio p, ou seja, resolva $p(\lambda) = 0$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$: Para $j = 1$ até t faça:

   4.1 $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$; $p(\lambda_j) = 0$? Se 4.1 é falsa, então A não possui autovalores. Caso contrário, repita o passo 4.1 novamente;

   4.2 Liste λ_j.

5. Enquanto $j = 1$ até t faça:

   5.1 Encontre as soluções não nulas do sistema $Ax = \lambda_j x$;

   5.2 Liste as soluções X_j associados à λ_j;

6. Liste $X_1, X_2, \ldots, X_t$. Estes são os autovetores de A, associados à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ respectivamente.
7. Verifique se é possível escolher $X_1, X_2, \ldots X_n$ autovetores de associados à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$, de maneira que o conjunto $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ seja linearmente independente. Caso não seja possível, então A não é diagonalizável, caso contrário:
8. Forme a matriz P com os vetores-coluna $X_1, X_2, \ldots X_n$.
9. A matriz $P^(- 1)AP$ é a matriz diagonal D com entradas na diagonal principal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Fim do Procedimento

Exemplo B.3.1. *Encontre a matriz P que diagonaliza A, onde* $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: *Temos que a equação característica de A é:* $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$. *Desta forma, segue que os autovalores são:* $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$, *com isso os seus respectivos autovetores associados são:*

$$\lambda = 1, X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda = 2, X_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda = 3, X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ *é L.I. Portanto* A *é diagonalizável e*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo B.3.2. *Encontre a matriz* P *que diagonaliza* A*, onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução*: Temos que a equação característica de* A *é:* $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$. *Desta forma, segue os autovalores com os seus respectivos autovetores associados:*

$$\lambda 1 = 1, X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}; \lambda_2 = 2, X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

observe que $\{X_1, X_2\}$ *não é L.I, em* $\mathbb{R}^3$. *Portanto* A *não é diagonalizável.*

Uma interessante aplicação de diagonalização de matrizes é resolução de sistemas de recorrências lineares, por exemplo:

Exemplo B.3.3. *Considere a seguinte recorrência, dados* $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ *e* $c_0 = 0$ *com* $a_0 + b_0 + c_0 = 1$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{1} b_{n-1} \\ b_n = \dfrac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = 0 \end{cases}$$

Encontre uma fórmula explícita para tal recorrência em função de $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$.
Vamos reescrever a recorrência por meio de matrizes, ou seja,

$$X_n = MX_{n-1}, \quad com \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_(n-1) = \begin{bmatrix} a_{n-1}) \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \quad e \quad X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ainda podemos reescrever o vetor X_n *em função do vetor inical* $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$.

Pois, $X_n = MX_{n-1}) = M^2 X_{n-2} = M^3 X_{n-3} = \ldots = M^n X_0$. *Dessa forma, estabeleceremos uma expressão explícita para* M^n*, para isso, vamos diagonalizar* M*, ou seja, procuraremos uma matriz inversível* P *e uma matriz diagonal* D*, tais que* $M = PDP^{-1}$. *Com esta diagonalização teremos:* $M^n = PD^nP^{-1}$*, para* $n = 1, 2, 3, \ldots$*, onde,*

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix},$$

onde λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores da matriz M.

Com a diagonalização de M, encontramos os autovalores e os autovetores correspondentes, a saber: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 0$, cujos autovetores associados:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e \quad P = [X_1 \mid X_2 \mid X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Como $P = P^{-1}$, temos $X_n = PD^nP^{-1}X_0 =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 + c_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, então temos para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \tag{B.1}$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \tag{B.2}$$

$$c_n = 0 \tag{B.3}$$

Exemplo B.3.4. *Considere a seguinte recorrência, dados $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}bc_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \end{cases} \tag{B.4}$$

Encontre uma fórmula explícita para tal recorrência em função do vetor inicial $X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$.

***Solução**: Vamos reescrever a recorrência por meio de matrizes, ou seja,*

$$X_n = MX_{n-1}, \quad com \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, X_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \quad e \quad X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Usaremos a diagonalização de operadores para encontrar uma fórmula explícita para Xn. Temos que a equação característica de M é:

$$
\begin{aligned}
&\det(M-\lambda I) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = \left(\frac{1}{2}\right) - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left\{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{1}{8}\right\} - \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left\{\frac{1}{4}-\lambda+\lambda^2-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left\{-\lambda+\lambda^2\right\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(\lambda-1)\,\lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Para encontrarmos os autovetores associados a $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 1$, *basta resolvermos os sistemas* $MX = \lambda_i X, i = 1,2,3$ *onde* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *e considerarmos uma das suas soluções não nulas. Resolvendo os sistemas temos:*

$$
\lambda_1 = \frac{1}{2}; X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = 0; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_3 = 1; X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Observe que $\{X_1, X_2, X_3\}$ *é L.I. Portanto* M *é diagonalizável e* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Dessa forma* $M = PDP^{-1}$ *e daí,* $M^n = PD^nP^{-1}$.

Como $X_n = M^n X_0$ *então,* $X_n = PD^nP^{-1}X_0$. *Usaremos o método do cálculo da matriz cofator para calcular a matriz inversa de* P.

Então segue que $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *vamos calcular a matriz cofator* Δ *de* P. *Para isso precisaremos determinar as matrizes menores* P_{ij} *para todo* $1 \leq i,j \leq 3$. *Assim* *teremos 9 matrizes menores, que são:*

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
P_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
P_{31} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, P_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, P_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Agora devemos calcular os números cofatores Δ_{ij} para todo $1 \leq i, j \leq 3$. Logo:

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= (-1)^{1+1}\det(P_{11}) = -4 \\
\Delta_{12} &= (-1)^{1+2}\det(P_{12}) = -2 \\
\Delta_{13} &= (-1)^{1+3}\det(P_{13}) = 2 \\
\Delta_{21} &= (-1)^{2+1}\det(P_{21}) = 0 \\
\Delta_{22} &= (-1)^{2+2}\det(P_{22}) = 2 \\
\Delta_{23} &= (-1)^{2+3}\det(P_{23}) = -2 \\
\Delta_{31} &= (-1)^{3+1}\det(P_{31}) = 4 \\
\Delta_{32} &= (-1)^{3+2}\det(P_{32}) = -2 \\
\Delta_{33} &= (-1)^{3+3}\det(P_{33}) = -2.
\end{aligned}$$

Portanto temos que $\Delta = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. *Como a matriz inversa é dada pela fórmula* $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\Delta^t$. *Assim temos que* $\Delta^t = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Aplicando a fórmula temos: $P^(-1) = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, *assim temos, portanto que:*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$X_n = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Assim para $n = 1, 2, 3, \ldots, X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$, *onde:*

$$a_n = \frac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}(a_0 - c_0), \quad b_n = \frac{1}{2}, \quad c_n = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(a_0 - c_0)$$