UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Augusto Sergio Furquim

Da Aritmética à Álgebra: um passo importante nos anos finais do Ensino Fundamental

São José do Rio Preto
2018

Augusto Sergio Furquim

Da Aritmética à Álgebra: um passo importante nos anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre, junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Profmat, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de São José do Rio Preto.
Financiadora: CAPES
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto
2018

Furquim, Augusto Sergio.
Da aritmética à álgebra: um passo importante nos anos finais do ensino fundamental / Augusto Sergio Furquim. -- São José do Rio Preto, 2018
108 f. : il.

Orientador: Flavia Souza Machado da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino fundamental) 3. Aritmética - Estudo e ensino. 4. Álgebra. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Augusto Sergio Furquim

Da aritmética a álgebra: um passo importante nos anos finais do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre, junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Profmat, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de São José do Rio Preto.
Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva
IBILCE/ UNESP/ São José do Rio Preto (SP)
Orientadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP - São José do Rio Preto

Profª. Drª. Ana Paula Tremura Galves
UFU - Uberlândia

São José do Rio Preto
19 de Fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho à minha amada família: aos meus pais, Antônio e Dioni e aos meus irmãos Juliana e João Pedro.

Agradecimentos

A Deus, fonte e origem de todo bem, sem o qual eu não teria condições de realizar este Mestrado. Ele que olhou para o seu pobre servo e, como a Pedro, disse: “Coragem! Sou Eu. Não tenhais medo.”(Mateus, 14, 22-23), me amparando e dando forças para continuar quando, por mim mesmo, já não era mais possível.

À Virgem Maria, Mestra e Rainha, que, mais uma vez, através de sua incansável e indispensável interseção ao Filho, não deixou que o “vinho viesse a faltar”nesses quase três anos de Mestrado.

À minha família, minha referência, que me ensinou o que é amar e ser amado e deu a mim pleno sentido ao provérbio chinês que diz: “Quando as raízes são profundas, não há razão para temer o vento.”

Aos meus amados amigos Lucas dos Santos, Marcelo Bongarte, Paulo Bergamini e Jair Junior por todo companheirismo durante a graduação e, também, agora. Especialmente a Alex Honorato, pela amizade e pelo apoio no desenvolvimento desde trabalho.

À minha amada noiva, Nicole Silveira, pelo incentivo, compreensão e amor a mim dispensados nos autos e baixos desta caminhada.

À Coordenadoria Municipal da Educação de Potirendaba, aos gestores e aos nobres colegas da “Escola Municipal Maestro Antonio Amato”pelo apoio na realização da pesquisa de campo inserida neste trabalho.

À Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva pela orientação.

À Capes, pelo apoio financeiro.

A todos supracitados, todo o meu carinho.

Resumo

Neste trabalho, promovemos um estudo acerca da introdução à Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para tanto, perpassamos pela construção lógica e a Aritmética do conjunto dos números Naturais, Inteiros e Racionais. Além disso, abordamos a Álgebra em seus aspectos históricos, concepções, resultados em avaliações de larga escala, disposição no Currículo do Estado de São Paulo - onde constatamos um salto entre Aritmética e Álgebra - e sua introdução através de situações de aprendizagem as quais denominamos atividades de "Pré-Álgebra". Ao longo do desenvolvimento de nosso trabalho discutimos, em revisão de literatura e, também, experimentalmente, as implicações de um adiantamento, com relação ao currículo supracitado, no tratamento da Álgebra em atividades introdutórias. Como resultado, verificamos que há, sim, espaço para que a Álgebra seja previamente introduzida, em consonância com a Aritmética, através de atividades de Pré-Álgebra. No entanto, não podemos garantir que esta introdução seja mais fácil para os alunos, embora conjecturemos que a suavidade da forma como tratamos a Álgebra durante as atividades da Pré-Álgebra pode contribuir para uma melhoria no cenário de ensino da Álgebra em nosso país.

Palavras-chave: Pré-Álgebra. Ensino de Matemática. Aritmética.

Abstract

In this work, we promote a study on the introduction to Algebra in the final years of Elementary School. For this, we went through the logical construction and the arithmetic of the set of Natural, Integer and Rational numbers. Moreover, we analyzed Algebra based on its historical aspects, conceptions, the outcome on the large-scale evaluations, on how it appears on the State of São Paulo Curriculum - which showed us a jump between Arithmetic and Algebra - and its introduction by using some learning activities that we call "pre-algebra". Throughout the development of our work we discussed - by reviewing some literature and also experimentally - the implications of an advance in the treatment of Algebra in introductory activities, in comparison with the above mentioned curriculum. As a result, we find out that in fact there is space to introduce Algebra in advance, in line with Arithmetic, using the Pre-Algebra activities. However, we cannot guarantee that this introduction is going to be easier for the students, although we conjecture that the smoothness of the way we treat Algebra during the Pre-Algebra activities can contribute for an improvement in the scenario of teaching Algebra in our country.

Keywords: Pre-Algebra. Mathematics Teaching. Arithmetic.

Sumário

Introdução

Muito embora ocupe um lugar de grande destaque no currículo de Matemática e seja uma poderosa ferramenta na resolução de problemas (BRASIL, 1998b), percebemos que o processo de ensino-aprendizagem da Álgebra passa por sérias dificuldades, conforme apontam os resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) citados por Silva (2008).

Segundo Lins e Gimenez (1997), a tardia introdução a Álgebra no Ensino Básico, tem uma grande parcela de culpa no atual panorama do próprio ensino de Álgebra. Ainda conforme os autores, a Aritmética e a Álgebra devem ser juntamente desenvolvidas desde o início da vida escolar dos alunos. No entanto, ao verificar o currículo de Matemática para o Ensino Fundamental - Ciclo II do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2011), notamos que a Álgebra é efetivamente introduzida apenas no quarto bimestre do sétimo ano, no qual as letras, misteriosamente, tomam o espaço dos números. Há uma abrupta mudança no modo de encarar a Matemática, que passa do prático, do contextualizado, para o teórico, no qual os conceitos deixam de fazer sentido para o aluno. Nesse momento, em nosso ponto de vista, a Matemática pode perder muitos daqueles que, até então, são apaixonados por ela e, daí, surgem inquietações como: "Como podemos reverter esta situação de desinteresse?", "Será que a Álgebra, por si só, já produz um certo desinteresse do aluno pela Matemática?", "A transição da Aritmética para a Álgebra, Pré-Álgebra, está sendo trabalhada adequadamente?".

"Mas por que aprender isso (Álgebra)?"Esta certamente é uma pergunta corriqueira nas aulas de matemática e uma má resposta pode ter consequências imensuráveis. A valorização da Álgebra passa pelo conhecimento daquilo que ela é e, também, de seus potenciais. Acerca disso, Wu (2009, p.2-3) define que a Aritmética é o estudo dos números em si, enquanto a Álgebra trata da "verdade"de todos os números. O autor ainda ressalta o cuidado que se deve ter com relação ao currículo para que não haja um salto entre o específico e o geral, o que pode impedir que os alunos consigam acompanhar o desenvolvimento da Álgebra. Já Vygotsky (2001, p. 267) sugere que o domínio da álgebra leva o ser humano a um estágio superior de pensamento e que isso permite entender as operações matemáticas como casos particulares de operações de álgebra, oferecendo-lhe "uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica das operações com números concretos". É imprescindível que o estudante dê a devida importância ao estudo da Álgebra e que não se acomode no campo da Aritmética, mas para isso ele precisa, primeiramente, conhecê-la sem que esta apresentação se torne um verdadeiro trauma.

"Ter em mãos"somente o conhecimento aritmético adquirido nos anos iniciais do Ensino Fundamental pode não ser suficiente para a resolução de problemas que envolvem conceitos algébricos, estes já presentes nos anos finais deste mesmo nível de ensino. Faz-se necessária, então, uma discussão no sentido de alinhar o ensino da introdução à Álgebra ao ensino da Aritmética. É preciso considerar que uma formação inicial sólida em Álgebra, pode assegurar ao aluno competências e habilidades que lhe serão cobradas em outros níveis de ensino. Já uma primeira formação com defasagens gera um "efeito cascata", pois se o aluno tem dificuldades nesta fase inicial, logo terá obstáculos maiores e quase que intransponíveis em fases posteriores, o que, por sua vez, causa o desinteresse em aprender uma Matemática permeada, cada vez mais, por conceitos e pensamentos algébricos.

Nossa experiência de alguns anos como docentes nos anos finais do Ensino Fundamental II vem de encontro ao que foi brevemente exposto até aqui. Grande parte dos alunos chegam ao sexto ano com uma verdadeira adoração pela Matemática e, com o passar do tempo, este encanto vai se perdendo. Infelizmente, raríssimas são as exceções e ao final do nono ano muitos já demonstram até mesmo um certo pavor. Nossas diversas tentativas de reversão deste quadro através da utilização de recursos como jogos, música e informática trouxeram bons resultados, ainda que distantes do ideal e, desse modo, podemos nos questionar: além da dificuldade (inegável) própria da álgebra, temos também problemas quanto aos métodos empregados em seu ensino? É bem provável que sim.

À partir disso, este estudo objetiva evidenciar as potencialidades de se trabalhar com atividades de pré-álgebra nas aulas de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Para tanto, esta dissertação está distribuída em três capítulos - além desta introdução, resumo, considerações finais, referências bibliográficas e anexos - de acordo com com o que segue:

O primeiro capítulo é dividido em três seções e tratamos, após uma breve introdução histórica, da construção e da Aritmética dos conjuntos dos números Naturais ($\mathbb{N}$), Inteiros ($\mathbb{Z}$) e Racionais($\mathbb{Q}$), que já são amplamente utilizados a partir do sexto ano do Ensino Fundamental II, sobre os quais constituem-se, ainda que de maneira dissociada, os conceitos iniciais da Álgebra, os quais denominamos Pré-Álgebra.

No segundo capítulo fazemos uma discussão da Álgebra em si. Ao longo do capítulo são tratadas considerações históricas sobre o surgimento da Álgebra desde a Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, Índia e Arábia. Serão abordadas definições e concepções em Álgebra, baseadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Matemática (BRASIL, 1998b) e, também, nos estudos realizados por Zalman Usiskin (USISKIN, 1995). Além disso, temos um breve estudo acerca do ensino de álgebra no Brasil, trazendo resultados obtidos em avaliações de larga escala que compõem o SAEB e finalizamos o capítulo com uma discussão acerca da Pré-Algebra, desde concepções, até sua estrutura sugerida por Queiroz (2014), culminando em um exemplo simplista de seu desenvolvimento, motivando-nos a seguir para o nosso último capítulo, onde articulamos estes dois primeiros capítulos.

Já no terceiro capítulo apresentamos, em um primeiro momento, uma discussão acerca dos métodos de investigação, que é de cunho qualitativo e nos quais são utilizados, à título de coleta de dados, recursos como a observação participante e a aplicação de questionário. Em seguida, propomos e realizamos uma experiência com a Pré-Álgebra já no Sexto Ano do Ensino Fundamental, fazendo uma conexão com a Aritmética vista até então, na intenção de corroborar a hipótese levantada por Lins e Gimenez, em "Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI", da antecipação no tratamento da Álgebra no Ensino Fundamental. Há, ainda, uma estreita relação entre a atividade proposta e a teoria apresentada em nosso capítulo inicial, tal como detalharemos em nosso relato, que também é parte integrante deste último capítulo. Concluímos fazendo uma análise dos dados aferidos durante a pesquisa, destacando pontos positivos e negativos de nossa experiência.

Finalmente, encerramos este trabalho com as considerações finais, nas quais destacamos as contribuições e limitações de nosso trabalho.

Capítulo 1

Os conjuntos numéricos

De acordo com historiadores, o surgimento dos números se deu através de uma provável necessidade de se contar pequenas coleções de objetos ou seres e de dar forma ao pensamento matemático, próprio do ser humano, representando-os primeiramente através de símbolos e, depois, criando sistemas de numeração. Primeiramente apareceram os números naturais, já que estes estão relacionados aos problemas de contagem.

No entanto, não é possível precisar algo sobre sua origem, uma vez que este assunto é ainda mais antigo que a própria arte de escrever e seu estudo se baseia, sobretudo, em achados arqueológicos (BOYER, 1996). Contudo, ainda que não saibamos, com certeza, onde, como e quando surgiram os números, temos a ideia de que seu surgimento se deu de forma independente e em lugares e épocas distintas.

No que segue, traremos a construção e a Aritmética dos conjuntos dos números Naturais ($\mathbb{N}$), Inteiros ($\mathbb{Z}$) e Racionais ($\mathbb{Q}$). Para tanto, utilizaremos como base o livro Fundamentos de Aritmética, de Hygino Hugueros Domingues (DOMINGUES, 2009).

1.1 Considerações Preliminares

Para a construção dos conjuntos numéricos aqui contemplados, no decorrer do trabalho, estaremos lidando com o conceito de relação de equivalência. Esta seção tratará de nos fornecer importantes definições e ferramentas para o que vem adiante.

Definição 1.1.1 *Dado um conjunto A qualquer, o conjunto das partes de A, ou conjunto potência de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.*

Observação 1.1 *$\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto e, portanto, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ para qualquer conjunto A.*

A próxima definição nos dará uma formalização para a ideia de par ordenado. A definição mais intuitiva, tal como vemos no Ensino Fundamental, será tratada no teorema logo após a definição.

Definição 1.1.2 *Seja A um conjunto com $a, b \in A$. Definiremos o par ordenado (a, b) como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.*

Observação 1.2 $(a, b) \subset \mathcal{P}(A)$.

Teorema 1.1.1 *Seja A um conjunto onde $a, b, c, d \in A$. Então:*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $(a, b) = (c, d)$, ou seja, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Temos dois casos a serem considerados:

- $a = b$:

  Aqui temos $(a, b) = (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Dessa maneira, $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ e, assim, $\{c\} = \{a\}$ e $\{c, d\} = \{a\}$, donde $c = a,\ d = a$. Logo, como, neste caso, $a = b$, teremos $a = c = b = d$.

- $a \neq b$:

  Já para este caso, por hipótese $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ e, assim, $\{a, b\} = \{c\}$ ou $\{a, b\} = \{c, d\}$. Se $\{a, b\} = \{c\}$, então $a = b = c$, o que contradiz nossa hipótese. Logo, só pode ocorrer $\{a, b\} = \{c, d\}$, donde segue que $c \neq d$, pois se isso não acontecesse, teríamos $a = b$. Disso já podemos concluir que $\{a\} \neq \{c, d\}$ e, então, $\{a\} = \{c\}$, ou seja, $a = c$. Assim, como $\{a, b\} = \{c, d\}$, $a \neq b$ e $c \neq d$, só podemos ter $b = d$.

  Logo, $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$

  ($\Leftarrow$) Se $a = c$ e $b = d$, é imediato que $(a, b) = (c, d)$.

  Portanto, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

■

Definição 1.1.3 *Seja A um conjunto qualquer. Definimos $A \times A$ (produto cartesiano de A por A), como $A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$.*

Definição 1.1.4 *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer tais que $x \in A$ e $y \in B$, então $x, y \in A \cup B$. Definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.*

Observação 1.3 $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, *pois, como $x, y \in A \cup B$, temos $\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$.*

Definição 1.1.5 *Uma relação binária R sobre um conjunto A é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times A$, isto é, $R \subset A \times A$.*

No caso em que $a, b \in A$, diremos que a está relacionado com b (denotamos aRb) se R é uma relação binária em A e se $(a, b) \in R$, ou seja,

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow aRb.$$

Para o que segue, uma relação binária será chamada apenas de relação.

Definição 1.1.6 *Dados um conjunto A e uma relação R sobre ele, diz-se que R é uma relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:*

1. *(Reflexiva): aRa, $\forall a \in A$;*

2. *(Simétrica): Tendo $a, b \in A$, então aRb e bRa;*

3. *(Transitiva): Tendo $a, b, c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.*

Definição 1.1.7 *Sejam R uma relação de equivalência em A e $a \in A$ um elemento fixado. O conjunto $\overline{a} = \{x \in A \mid xRa\}$ chama-se classe de equivalência de a pela relação R, ou seja, $\overline{a}$ é o conjunto dos elementos de A que se relacionam com a.*

Teorema 1.1.2 *Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e $a, b \in A$. Então:*

1. *$a \in \overline{a}$;*

2. *$\overline{a} = \overline{b}$ se, e somente se, aRb;*

3. *$\overline{a} \neq \overline{b}$ se, e somente se, $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.*

Demonstração:

1. Por definição, $\overline{a} = \{x \in A \mid xRa\}$. Como R é uma relação de equivalência, pela propriedade reflexiva temos aRa e, assim, $a \in \overline{a}$.

2. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\overline{a} = \overline{b}$, onde $\overline{a} = \{x \in A \mid xRa\}$ e $\overline{b} = \{x \in A \mid xRb\}$. Se $a \in \overline{a}$, então, como por hipótese que $\overline{a} = \overline{b}$, teremos $a \in \overline{b}$. Logo, aRb.

   ($\Leftarrow$) Suponhamos aRb.

   - Para todo $x \in A$, tal que $x \in \overline{a}$ temos, por definição, que xRa. Por hipótese, aRb, então, da transitividade da relação de equivalência sai que xRb, donde $x \in \overline{b}$. Logo $\overline{a} \subset \overline{b}$;

   - Para todo $x \in B$, tal que $x \in \overline{b}$ temos, por definição, que xRb. Por hipótese, aRb, então, da propriedades de simetria e transitividade da relação de equivalência sai que bRa e xRa, donde $x \in \overline{a}$. Logo $\overline{b} \subset \overline{a}$;

   Portanto, como $\overline{a} \subset \overline{b}$ e $\overline{b} \subset \overline{a}$, temos $\overline{a} = \overline{b}$.

3. ($\Rightarrow$) Por hipótese $\overline{a} \neq \overline{b}$. Suponha que $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, isto é, existe um $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$, o que acarreta que $c \in \overline{a}$ e $c \in \overline{b}$. Assim, cRa e cRb, donde da definição de relação de equivalência (propriedades simétrica e transitiva) obtemos aRb. Logo, pelo item 2 deste teorema concluímos $\overline{a} = \overline{b}$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

   ($\Leftarrow$) Agora, por hipótese, $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$. Suponhamos $\overline{a} = \overline{b}$. Pelo item 2 deste teorema temos aRb, ou seja, $a \in \overline{b}$. Pelo item 1 deste Teorema, $a \in \overline{a}$ e, consequentemente, $a \in \overline{a} \cap \overline{b}$, o que é um absurdo, pois contradiz a hipótese. Logo, $\overline{a} \neq \overline{b}$.

   Portanto, $\overline{a} \neq \overline{b}$ se, e somente se, $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$. ■

Observação 1.4 *Deste último teorema, podemos ter a ideia de que todo elemento de uma classe de equivalência $\overline{a}$ tem a mesma classe de equivalência de a, isto é, $\overline{a}$ pode ser representado por $\overline{x}$, para todo $x \in \overline{a}$.*

Definição 1.1.8 *Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto constituído pelas classes de equivalência de A pela relação R é denotado por A/R e denominado conjunto quociente de A por R. Assim, $A/R = \{\overline{a} \mid a \in A\}$.*

Definição 1.1.9 *Dado um conjunto A não vazio, uma operação em A é uma função $* : A \times A \to A$. A imagem $*((x, y))$ de um par ordenado (x, y) pela função $*$ é denotada por $x * y$.*

Definição 1.1.10 ***(Propriedade Associativa):*** *Seja $*$ uma operação em A. Dizemos que $*$ satisfaz a* **propriedade associativa** *se*

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in A$.

Definição 1.1.11 ***(Propriedade Comutativa):*** *Seja $*$ uma operação em A. Dizemos que $*$ satisfaz a* **propriedade comutativa** *se*

$$x * y = y * x,$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Definição 1.1.12 ***(Elemento Neutro):*** *Seja $*$ uma operação no conjunto A. O elemento $e \in A$ diz-se* **elemento neutro** *para esta operação se, e somente se, $x * e = e * x = x$ para qualquer $x \in A$.*

Proposição 1.1.1 *Se uma operação * admite elemento neutro, então ele é único.*

Demonstração: Suponhamos que e e e' são ambos elementos neutros para a operação $*$. Temos então:

(1) $e * e' = e'$, pois e é elemento neutro;
(2) $e * e' = e$, pois e' é elemento neutro;

Portanto, de **(1)** e **(2)**, $e = e'$.

■

Observação 1.5 *Seja $*$ uma operação associativa e que tem elemento neutro em A. Se $a, b \in A$ e a é um elemento simetrizável, ou seja, se existe $a' \in A$ tal que $a' * a = a * a' = e$, onde e é o elemento neutro, então a equação $a * x = b$ possui conjunto solução unitário, constituído do elemento $a' * b$.*

De fato,

$$a * (a' * b) \overset{Assoc.}{=} (a * a') * b \overset{\exists e}{=} e * b = b.$$

Por exemplo, se considerarmos $A = \mathbb{Z}$ e $*$ sendo a operação adição (usual), a equação $2 + x = 3$ tem como solução $-2 + 3 = 1$.

Agora sim estamos em condições de prosseguir com a construção dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

1.2 Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O tratamento lógico-dedutivo para a teoria dos números demorou muito tempo. Segundo Domingues (2009), a primeira tentativa se deve a Giovanni Campano (viveu por volta de 1260), que procurou fundamentar os números naturais em quatro postulados, sendo o último dos quais a afirmação de que "um número não pode diminuir indefinidamente", o que significa a existência de um mínimo para qualquer coleção de números naturais. Já no século XIX, Giuseppe Peano (1858 - 1932), através de um conjunto de Axiomas, hoje denominados Axiomas de Peano, fez a construção mais usual para o conjunto dos números Naturais ($\mathbb{N}$).

Considerado um grande avanço na abstração, a utilização do zero como notação ocorre desde cerca de 700 a.C., sendo seu emprego devido aos babilônicos. No entanto, o conceito de zero como utilizamos nos dias de hoje surgiu apenas em 620 através de Brahmagupta, matemático indiano. Para todos os efeitos e apesar da divergência nesse sentido, consideraremos o 0 como um número natural.

A construção aqui apresentada, se dará através do método axiomático, aceitando os Axiomas de Peano como verdadeiros, independentemente de qualquer demonstração. As proposições que se seguem serão provadas a partir desses axiomas e por raciocínio lógico.

1.2.1 Axiomas de Peano

Peano escolheu três conceitos primitivos: zero, número natural e a relação de sucessor. A partir disso, formulou os seguintes axiomas:

P_1) Zero é um número natural.

P_2) Se a é um número natural, então a tem um único sucessor que também é um número natural.

P_3) Zero não é sucessor de nenhum número natural.

P_4) Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

P_5) (Axioma da indução completa) Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

De modo a simplificar as notações, utilizaremos: 0 (zero), a^+ (sucessor de a), $\mathbb{N}$ (conjunto de todos os números naturais) e $\mathbb{N}^*$ (conjunto de todos os números naturais, excetuando-se o 0). Posto isto, podemos resumir os axiomas ao seguinte:

P_1) $0 \in \mathbb{N}$.

P_2) $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \in \mathbb{N}$.

P_3) $(\forall a)(a \in \mathbb{N} \Rightarrow a^+ \neq 0)$.

P_4) $a^+ = b^+ \Rightarrow a = b$.

P_5) $S \subset \mathbb{N}$ e **i)** $0 \in S$, **ii)** $a \in S \Rightarrow a^+ \in S$, então $S = \mathbb{N}$

Observação 1.6 *De P_1, temos $\mathbb{N} \neq \emptyset$. Em P_2, deve-se subentender a unicidade de a^+. Já do Axioma P_4, pela contra-positiva, decorre que: $a \neq b \Rightarrow a^+ \neq b^+$. O Axioma P_5 é chamado Axioma da Indução Completa.*

Proposição 1.2.1 *Se $a \in \mathbb{N}$, então $a^+ \neq a$.*

Demonstração: Seja $S = \{a \in \mathbb{N} \mid a^+ \neq a\}$. Como, pelo axioma P_3, 0 não é sucessor de nenhum número natural, temos $0 \in S$. Se $a \in S$, então, pela definição do conjunto S, $a \neq a^+$ e pela contrapositiva de P_4 já citada anteriormente, temos $(a^+)^+ \neq a^+$. Logo, $a^+ \in S$ sempre que $a \in S$ e, portanto, por P_5, conclui-se que $S = \mathbb{N}$, ou seja, para todo $a \in \mathbb{N}$, $a^+ \neq a$.

■

Proposição 1.2.2 *Seja $b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^+ = b$.*

Demonstração: Considere $S = \{0\} \cup \{y \in \mathbb{N} \mid y \neq 0 \text{ e } x^+ = y \text{ para algum } x \in \mathbb{N}\}$. Pela construção, obviamente $0 \in S$ e ainda $0^+ \in S$, já que $0 \in \mathbb{N}$. Seja $a \in S$ tal que $a \neq 0$. Então, para algum $b \in \mathbb{N}$, teremos $a = b^+$ e, dessa maneira, como números iguais sempre terão sucessores iguais, $a^+ = (b^+)^+$, o que implica que $a^+ \in S$. Logo, $a^+ \in S$ sempre que $a \in S$. Portanto, por P_5, $S = \mathbb{N}$, isto é, todo número natural distinto de zero é sucessor de algum outro, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 1.2.3 ***(Primeiro Princípio de Indução Completa):*** *Suponhamos que a todo natural n esteja associada uma afirmação P(n) tal que:*

i) *P(0) é verdadeira.*

ii) *P(r^+) é verdadeira, sempre que P(r) é verdadeira.*

Então P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Considere $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Pela hipótese **i)** $0 \in S$. Supondo $a \in S$, pela hipótese **ii)**, $a^+ \in S$. Logo, pelo axioma P_5, $S = \mathbb{N}$, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo n.

■

Observação 1.7 *Denominaremos por "Hipótese de Indução"(HI), a condição "P(r) é verdadeira".*

1.2.2 Adição em $\mathbb{N}$

Definimos a adição $(x, y) \longrightarrow x + y$ em $\mathbb{N}$ mediante as seguintes condições:

- $a + 0 = a$.
- $a + b^+ = (a + b)^+$.

Em $c = a + b$, a e b são parcelas e c a soma. Para o que segue, adotaremos as seguintes notações: $0^+ = 1$, $1^+ = 2$ e assim por diante.

Exemplo 1.1
- $1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2$;
- $1 + 2 = 1 + 1^+ = (1 + 1)^+ = 2^+ = 3$.

Proposição 1.2.4 *Para todo $r \in \mathbb{N}$, $r^+ = r + 1$ e, ainda, $r + 1 = 1 + r$.*

Demonstração: Primeiramente, pela definição de adição em $\mathbb{N}$, temos:

$$r + 1 = r + 0^+ = (r + 0)^+ = r^+.$$

Para a segunda parte da demonstração lançaremos mão de indução sobre r.

Se $r = 0$, temos:

$$1 + 0 = 1$$

e, ainda,

$$0 + 1 = 0 + 0^+ = (0 + 0)^+ = 0^+ = 1.$$

Portanto, $1 + 0 = 1$ e $0 + 1 = 1$.

Suponha $1 + r = r + 1$ e mostremos que $1 + r^+ = r^+ + 1$ se verifica. De fato,

$$1 + r^+ = (1 + r)^+ = (r + 1)^+ = (r^+)^+ = r^+ + 1$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $n + 1 = 1 + n, \forall n \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.5 *Para todo* $a \in \mathbb{N}$, $0 + a = a$

Demonstração: Demonstremos por indução sobre a.
Para $a = 0$, temos:

$$0 + a = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $a + 0 = a$.
Suponhamos que $0 + r = r$ e mostremos que $0 + r^+ = r^+$. De fato,

$$0 + r^+ = (0 + r)^+ = r^+.$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $0 + a = a, \ \forall a \in \mathbb{N}$.

■

Vejamos agora as propriedades relativas a adição no conjunto dos números naturais.

Proposição 1.2.6 ***(Associativa):*** $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Faremos esta prova através de indução sobre c.
Para $c = 0$, temos:

$$(a + b) + 0 = a + b = a + (b + 0).$$

Suponha, $(a + b) + r = a + (b + r)$ e mostremos que $(a + b) + r^+ = a + (b + r^+)$. De fato,

$$(a + b) + r^+ = [(a + b) + r]^+ = [a + (b + r)]^+ = a + (b + r)^+ = a + (b + r^+).$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $(a+b)+c = a+(b+c), \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.7 $b^+ + a = b + a^+, \ \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Faremos esta demonstração por indução sobre a;
Para $a = 0$, temos

$$b^+ + 0 = b^+ = (b + 0)^+ = b + 0^+$$

Suponha que $b^+ + r = b + r^+$ e provemos que $b^+ + r^+ = b + (r^+)^+$. De fato,

$$b^+ + r^+ = (b^+ + r)^+ = (b + r^+)^+ = b + (r^+)^+.$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $b^+ + a = b + a^+, \ \forall a, b \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.8 ***(Comutativa):*** $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Faremos esta demonstração por indução sobre b.

Para $b = 0$, temos:

$$a + 0 = a \overset{Prop.1.2.5}{=} 0 + a.$$

Suponha $a + r = r + a$ e mostremos que $a + r^+ = r^+ + a$. De fato,

$$a + r^+ = (a + r)^+ = (r + a)^+ = r + a^+ \overset{Prop.1.2.7}{=} r^+ + a.$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.9 ***(Elemento neutro da adição):*** *O zero é o elemento neutro da adição.*

Demonstração: Demonstraremos a existência e a unicidade do elemento neutro da adição.

Existência: Que $a + 0 = a$, já temos das condições dadas na definição de adição. Já pela Proposição 1.2.5, temos $a = 0 + a$. Logo, $a + 0 = a = 0 + a$.

Unicidade: Segue imediatamente da Proposição 1.1.1.

Portanto, 0 é o único elemento neutro para a adição de números naturais.

■

Proposição 1.2.10 ***(Lei do Canc. da adição):*** $a + b = a + c \Rightarrow b = c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para tanto, façamos indução sobre a.

Para $a = 0$, temos $0 + b = 0 + c$ o que implica em $b = c$, já que $0 + b = b$ e $0 + c = c$.

Suponha $r + b = r + c \Rightarrow b = c$. Temos que se $r^+ + b = r^+ + c$, então

$$(b + r)^+ = b + r^+ = r^+ + b = r^+ + c = c + r^+ = (c + r)^+.$$

Logo, pelo Axioma P_4, $b + r = c + r$ e, desse modo, $b = c$ pela hipótese de indução.

Portanto, $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

■

Proposição 1.2.11 *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$. *Se* $a + b = 0$*, então* $a = b = 0$.

Demonstração: Suponha por absurdo que $b \neq 0$. Então, b é sucessor de algum número natural u, isto é, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $b = u^+$. Daí,

$$0 = a + b = a + u^+ = (a + u)^+.$$

Mas isso não ocorre, pois 0 não é sucessor de nenhum número natural. Logo, $b = 0$ e, consequentemente,

$$0 = a + b = a + 0 = a.$$

Portanto, se $a + b = 0$, então $a = b = 0$.

$\blacksquare$

1.2.3 Multiplicação em $\mathbb{N}$

Definimos a multiplicação $(x, y) \mapsto xy$ (ou $x \cdot y$) em $\mathbb{N}$ mediante as seguintes condições:

- $a \cdot 0 = 0$.
- $a \cdot b^+ = ab + a$.

Em $ab = c$, a e b são chamados fatores e c, produto.

Exemplo 1.2

- $1 \cdot 1 = 1 \cdot 0^+ = 1 \cdot 0 + 1 = 1$;
- $1 \cdot 2 = 1 \cdot 1^+ = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Passemos agora ao estudo relativo as propriedades da multiplicação de números naturais.

Proposição 1.2.12 *Para todo $a \in \mathbb{N}$, $0 \cdot a = 0$*

Demonstração: Façamos por indução sobre a.
Para $a = 0$, temos diretamente da definição que:

$$0 \cdot 0 = 0.$$

Suponha $0 \cdot r = 0$ e mostremos que $0 \cdot r^+ = 0$. De fato,

$$0 \cdot r^+ = 0 \cdot r + 0 = 0 + 0 = 0$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio da Indução Completa , $0 \cdot a = 0, \forall a \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Proposição 1.2.13 ***(Distributiva da multiplicação em relação a adição):*** *Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a(b + c) = ab + ac$.*

Demonstração: Façamos por indução sobre c, fixando a e b arbitrariamente.
Para $c = 0$, $a(b + 0) = ab = ab + 0 = ab + a.0$
Suponha $a(b + r) = ab + ar$ e mostremos que $a(b + r^+) = ab + ar^+$. Temos,

$$a(b + r^+) \overset{(def.deAd.)}{=} a(b + r)^+ =$$

$$= a(b+r) + a \overset{HI}{=} (ab+ar) + a = ab + (ar+a) = ab + ar^+.$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $a(b+c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.14 ***(Associativa):*** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Faremos esta prova por indução sobre c.
Para $c = 0$, temos:

$$(a \cdot b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot (b \cdot 0).$$

Suponha $(a \cdot b) \cdot r = a \cdot (b \cdot r)$ e mostremos que $a \cdot (b \cdot r^+) = (a \cdot b) \cdot r^+$. De fato,

$$a \cdot (b \cdot r^+) \overset{Def.}{=} a \cdot (b \cdot r + b) \overset{Prop.(1.2.13)}{=} a \cdot (b \cdot r) + a \cdot b \overset{HI}{=} (a \cdot b) \cdot r + (a \cdot b) \overset{Def.}{=} (a \cdot b) \cdot r^+$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio de Indução Completa, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \ \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.15 ***(Elemento neutro da multiplicação):*** *Para todo* $a \in \mathbb{N}, \ 1 \cdot a = a$

Demonstração: Façamos por indução sobre a.
Para $a = 0$, temos, diretamente da definição $1 \cdot 0 = 0$.
Suponha $1 \cdot r = r$ e mostremos $1 \cdot r^+ = r^+$. De fato,

$$1 \cdot r^+ = 1 \cdot r + 1 = r + 1 = r^+.$$

Portanto, pelo Primeiro Princípio da Indução Completa $1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.16 ***(Cancelamento do produto):*** *Para todo* $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \ \textit{ou} \ b = 0.$$

Demonstração: Suponha que $b \neq 0$. Assim, sabemos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $b = r^+$, então

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a \cdot r^+ = 0 \Rightarrow a \cdot r + a = 0,$$

o que, pela Proposição 1.2.11, nos dá $a = 0 = a \cdot r$.
Analogamente, supondo $a \neq 0$, obtemos $b = 0$.

■

Proposição 1.2.17 ***(Comutativa):*** *Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, $a \cdot b = b \cdot a$.*

Demonstração: Faremos esta prova por indução sobre a.
Para $a = 0$, temos da definição e da Propriedade 1.2.12 que:

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a.$$

Suponha $r \cdot b = b \cdot r$ e mostremos que $r^+ b = b \cdot r^+$. Temos,

$$r^+ b = (r+1) \cdot b = r \cdot b + b = b \cdot r + b = b \cdot r^+$$

Portanto, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

■

Proposição 1.2.18 ***(Cancelamento da multiplicação):*** *Sendo $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos $(a \cdot c = b \cdot c,\ c \neq 0) \Rightarrow a = b$.*

Demonstração: Deixaremos para a próxima subseção.

Proposição 1.2.19 *Se $a \cdot b = 1$, então $a = 1 = b$.*

Demonstração: Também deixaremos para a próxima subseção.

1.2.4 Relação de Ordem

Definimos a relação $\leq$ (menor que ou igual) para $a, b \in \mathbb{N}$ do seguinte modo: diz-se que $b \leq a$ ou, equivalentemente, $a \geq b$ (maior que ou igual) se $a = b + u$, onde $u \in \mathbb{N}$. Para o caso em que $u \neq 0$, dizemos que $b < a$ (b é estritamente menor que a) ou, equivalentemente, $a > b$ (a é estritamente maior que b).O numero u chama-se *diferença* entre a e b e é denotado por $u = a - b$, onde a é o *minuendo* e b é o *subtraendo*. Assim, podemos definir a subtração $(a, b) \to a - b$ para todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \geq b$.

Proposição 1.2.20 *Para $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos:*

1. $(b - a) + a = b$, *sempre que* $a \leq b$;
2. $c \leq a \Rightarrow (a + b) - c = (a - c) + b$;
3. $(b + c) \leq a \Rightarrow a - (b + c) = (a - b) - c$;
4. *Se* $b \leq a$ *e* $d \leq c$, *então* $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

Demonstrações:

1. Se $a \leq b$, ou seja, $b - a = u$, então $b = a + u = a + (b - a)$;

$\blacksquare$

2. Seja $u = a - c$. Então $a = c + u$ e, portanto,

$$a + b = c + (u + b) \Rightarrow (a + b) - c = u + b = (a - c) + b;$$

$\blacksquare$

3. Como $(b + c) \leq a$, existe $u \in \mathbb{N}$ tal que,

$$a = (b + c) + u \Rightarrow \begin{cases} a - (b + c) = u & \textbf{(i)} \\ a = b + (c + u) \Rightarrow a - b = c + u \Rightarrow (a - b) - c = u & \textbf{(ii)} \end{cases}$$

Logo, de **(i)** e **(ii)** segue que $a - (b + c) = (a - b) - c$, como gostaríamos.

$\blacksquare$

4.
   - $b \leq a \Rightarrow a = b + u \Rightarrow u = a - b,\ u \in \mathbb{N}$.
   - $d \leq c \Rightarrow c = d + u' \Rightarrow u' = c - d,\ u' \in \mathbb{N}$.

   Por um lado $u + u' = (a - b) + (c - d)$**(i)**.

   Por outro, $a + c = (b + d) + (u + u') \Rightarrow (a + c) - (b + d) = u + u'$ **(ii)**.

   Portanto, de **(i)** e **(ii)** segue $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$.

$\blacksquare$

No que segue, faremos as demonstrações das propriedades pelas quais se diz que $\leq$ é uma *relação de ordem total* sobre $\mathbb{N}$, compatível com a adição e a multiplicação em $\mathbb{N}$.

Proposição 1.2.21 ***(Relação de Ordem total):*** *São válidas as seguintes propriedades:*

1. $a \leq a, \forall a \in \mathbb{N}$ *(reflexiva);*

2. $a \leq b$ *e* $b \leq a \Rightarrow a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$ *(antissimétrica);*

3. $a \leq b$ *e* $b \leq c \Rightarrow a \leq c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ *(transitiva);*

4. $a \leq b$ *ou* $b \leq a, \forall a, b \in \mathbb{N}$ *(a relação* $\leq$ *é total);*

5. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ *(*$\leq$ *é compatível com a adição);*

6. $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$ *(*$\leq$ *é compatível com a multiplicação).*

Demonstrações:

1. Note que $a \leq a$ sempre se verifica, uma vez que $a = a + 0$.

$\blacksquare$

2. Por hipótese temos
$$a \leq b \Rightarrow b = a + u,\ u \in \mathbb{N}\ \textbf{(i)}$$
e ainda
$$b \leq a \Rightarrow a = b + v,\ v \in \mathbb{N}\ \textbf{(ii)}.$$
Substituindo **(i)** em **(ii)** segue que $a = (a+u)+v \Rightarrow a = a+(u+v) \Rightarrow u+v = 0$, donde pela Propriedade 1.2.11 tem-se $u = 0 = v$. Desse modo, voltando em **(ii)**, obtemos
$$a = b + v \Rightarrow a = b + 0 \Rightarrow a = b,$$
como gostaríamos.

$\blacksquare$

3. Por hipótese temos
$$a \leq b \Rightarrow b = a + u, u \in \mathbb{N}\ \textbf{(i)}$$
e ainda
$$b \leq c \Rightarrow c = b + u', u' \in \mathbb{N}\ \textbf{(ii)}$$
Substituindo **(i)** em **(ii)**: $c = (a + u) + u' \Rightarrow c = a + (u + u') \Rightarrow c = a + u''$, onde $u'' = u + u'$. Portanto $a \leq c$.

$\blacksquare$

4. Para cada natural b, definimos S_b o subconjunto formado pelos elementos n, para os quais se verifica ao menos uma das seguintes condições:

(a) existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $b = n + u$;

(b) existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $n = b + v$.

Façamos esta prova por indução sobre n. Observe que para $n = 0$ a condição (a) é satisfeita quando $b = u$, isto é, $0 \in S_b$.

Suponha agora, como Hipótese de Indução (HI) que $r \in S_b$. Temos dois casos a considerar:

- $(r = b)$ Neste caso, pelo Axioma de Peano, $r^+ = b^+ \Rightarrow r^+ = b + 1$, ou seja, tomando $v = 1$, temos satisfeita a condição **(b)**.
- $(r \neq b)$ Primeiramente suponhamos que $r \leq b$. Assim, $b = r + u,\ u \neq 0$ e, dessa maneira, $u = v^+ = v+1$ para algum $v \in \mathbb{N}$. Daí $b = r+(v+1) = (r+1)+v = r^+ + v$, ou seja, r^+ satisfaz a condição **(a)** e, desse modo, $r^+ \in S_b$.

Já para o caso em que $b \leq r$ temos $r = b+v,\ v \neq 0$ e, dessa maneira, $r^+ = (b+v)^+ = b + v^+$, ou seja, r^+ satisfaz a condição **(b)** e, desse modo, $r^+ \in S_b$.

Portanto, $S_b = \mathbb{N}$, por isso, para todo $b \in \mathbb{N}$, qualquer que seja o número natural a, teremos $a \leq b$ ou $b \leq a$.

■

5. Por hipótese temos

$$a \leq b \Rightarrow b = a + u \Rightarrow a = b - u,\ u \in \mathbb{N}\ \textbf{(*)}$$

e, assim

$$\begin{array}{rcl} a + c & \overset{(*)}{=} & (b - u) + c \Rightarrow \\ \Rightarrow a + c & = & (b + c) - u \Rightarrow \\ \Rightarrow (a + c) + u & = & (b + c) \Rightarrow \\ \Rightarrow a + c & \leq & b + c \end{array}$$

Portanto, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, qualquer que seja $c \in \mathbb{N}$.

■

6. Por hipótese temos

$$a \leq b \Rightarrow b = a + u,\ u \in \mathbb{N}\ \textbf{(*)}$$

e, assim

$$\begin{array}{rcl} bc & \overset{(*)}{=} & (a + u)c \Rightarrow \\ \Rightarrow bc & = & ac + uc \Rightarrow \\ \Rightarrow ac & \leq & bc \end{array}$$

Portanto, se $a \leq b$ então $ac \leq bc$, qualquer que seja $c \in \mathbb{N}$.

■

Lema 1.2.1 *Se $a < b$, então $a + 1 \leq b$, para $a, b \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Se $a < b$ então $b = a + u,\ u \in \mathbb{N}\ (u \neq 0)$. Como $u \neq 0$, existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $u = v + 1$, isto é, u é sucessor de algum número v.

Logo, $b = a + u \Rightarrow b = a + (v + 1) \Rightarrow b = (a + 1) + v \Rightarrow a + 1 \leq b$.

Portanto, se $a < b$ então $a + 1 \leq b$.

■

Definição 1.2.1 *Dado um conjunto ordenado A, dizemos que $a \in A$ é um menor elemento de A se $a \leq x$, para todo $x \in A$.*

Teorema 1.2.1 ***(Princípio da Boa Ordem):*** *Qualquer que seja o subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{N}$, S possui um mínimo.*

Demonstração: Seja $H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \forall x \in S\}$. Note inicialmente que, como $0 \leq a, \forall a \in S$, então $0 \in H$. Por hipótese, $S \neq \emptyset$ e, dessa maneira, podemos tomar $s \in S$. Claramente $s + 1 \notin H$, já que $s < s + 1$ e, assim, $H \neq \mathbb{N}$.

Como $0 \in H$ e $H \neq \mathbb{N}$, deve existir $k \in H$ tal que $k+1 \notin H$, caso contrário, pelo Axioma P_5, $H = \mathbb{N}$. Mostremos que k é o menor elemento de S. De fato, como $k \in H$, então $k \leq x, \forall x \in S$. Suponha que $k \notin S$, então $k < x$ para todo $x \in S$ e, daí, pelo Lema 1.2.1 temos $k + 1 \leq x$, o que implica que $k + 1 \in H$. Mas como observamos anteriormente, isto não pode ocorrer. Logo, $k \in S$.

Portanto, todo subconjunto S do conjunto dos Números Naturais tem um menor elemento.

■

Proposição 1.2.22 ***(Lei da Tricotomia em $\mathbb{N}$):*** *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, vale uma só das relações: $a = b$, $a < b$ ou $a > b$.*

Demonstração: Pelo item 4 da Proposição 1.2.21 temos $a \leq b$ ou $a \geq b$, ou seja, $b = a + u$ ou $a = b + v$, com $u, v \in \mathbb{N}$.

Supondo $a \neq b$, devemos ter $u \neq 0$ para a primeira opção ou $v \neq 0$ para a segunda opção e, desse modo, se $a \neq b$, então $a < b$ ou $b < a$. Note que, $a < b$ e $b < a$ não ocorrem simultaneamente pois, se assim fosse

$$a < b \Rightarrow b = a + r, r \neq 0 \ \textbf{(i)}$$

e ainda

$$b < a \Rightarrow a = b + s, s \neq 0 \ \textbf{(ii)}.$$

Substituindo **(i)** em **(ii)** temos $a = (a + r) + s \Rightarrow a = a + (r + s) \Rightarrow r + s = 0 \overset{Propos.1.2.11}{\Rightarrow} r = 0 = s$. Absurdo.

Portanto, se $a, b \in \mathbb{N}$, então $a = b$, $a < b$ ou $a > b$, exclusivamente.

■

Proposição 1.2.23 *Para todo $a \in \mathbb{N}$, $\{x \in \mathbb{N} \mid a < x < a + 1\} = \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que exista um par de elementos $a, t \in \mathbb{N}$ tal que $a < t < a + 1$. Assim,

$$a < t \Rightarrow t = a + u, u \neq 0 \ \textbf{(i)}$$

e ainda

$$t < a+1 \Rightarrow a+1 = t+v, v \neq 0 \textbf{ (ii)}.$$

Substituindo **(i)** em **(ii)** temos $a+1 = (a+u)+v \Rightarrow a+1 = a+(u+v) \Rightarrow u+v = 1$. Considerando que $u \neq 0$, temos que existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que, $u = r^+$. Desse modo,

$$1 = u+v = (r+1)+v = (r+v)+1 \Rightarrow r+v = 0 \Rightarrow r = v = 0,$$

absurdo!

Portanto, $\forall a \in \mathbb{N}, \ \{x \in \mathbb{N} \mid a < x < a+1\} = \emptyset$.

Agora, de posse das ferramentas necessárias, voltemos para demonstrar as Proposições 1.2.18 e 1.2.19 deixadas na subseção anterior.

Demonstrações:

- **1.2.18)** Se $a < b$, então existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $b = a+v, \ v \neq 0$. Logo $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c = a \cdot c + v \cdot c \Rightarrow v \cdot c = 0$, donde pela Propriedade 1.2.16, $c = 0$ ou $v = 0$. Como $v \neq 0$, então teríamos $c = 0$, o que contraria a hipótese. Já se $b < a$, então existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $a = b+u, \ u \neq 0$. Logo, $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow b \cdot c + u \cdot c = b \cdot c \Rightarrow u \cdot c = 0$, o que pela Proposição 1.2.16 implica $u = 0$ ou $c = 0$. Como $u \neq 0$, então teríamos, novamente, $c = 0$, o que contraria a hipótese. Portanto, se $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos $(a \cdot c = b \cdot c, \ c \neq 0) \Rightarrow a = b$.

- **1.2.19)** Da hipótese é imediato que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Logo, $a \geq 1$ e $b \geq 1$. Suponha $a > 1$, então $a = 1+u, \ u \neq 0$. Como $b = 1+v$ (pois $b \geq 1$), temos

  $$1 = a \cdot b = (1+u) \cdot (1+v) = 1+u+v+u \cdot v,$$

  donde

  $$u + (v + u \cdot v) = 0,$$

  e isto nos da $u = 0$. Absurdo! Portanto, como $a \geq 1$ e $a \not> 1$ (a não estritamente maior que 1),concluímos $a = 1$ e, por conseguinte, $b = 1$.

$\blacksquare$

Observação 1.8 *As propriedades a seguir decorrem do que já vimos e algumas vezes serão necessárias para o que segue. Sendo $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, temos:*

1. $a \leq b$ *e* $b < c \Rightarrow a < c$;
2. $a < b \Rightarrow a+c < b+c$;
3. $a+c \leq b+c \Rightarrow a \leq b$;
4. $(a \leq b$ *e* $c \leq d) \Rightarrow a+c \leq b+d$;

5. $(a < b \text{ e } c \neq 0) \Rightarrow ac < bc$;

6. $(a < b \text{ e } c \leq d) \Rightarrow a + c < b + d$;

7. $c \leq b \Rightarrow a(b - c) = ab - ac$;

1.3 Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

A trajetória histórica dos números inteiros é incerta. No entanto, sabe-se, por Domingues (2009) , que os números negativos surgiram inicialmente na China há mais de dois milênios. Os chineses já conheciam até mesmo as regras de sinais para a adição e a subtração e acredita-se, ainda, que foram os primeiros a denotar o número zero como uma circunferência. Mais tarde, com a intenção de indicar e quantificar débitos, os hindus introduziram os números negativos em sua matemática, tendo Brahmagupta (c. 598- 668) e Bhaskara (1114-1185) como os principais matemáticos da Índia.

A aceitação com relação aos números negativos foi um processo longo. As controvérsias com relação a eles perduraram até o século XIX. Stifel (1501 - 1576), por exemplo, os chamavam de números absurdos. Já F. Viete (1540 - 1603), importante matemático francês, simplesmente ignorava os números inteiros (DOMINGUES, 2009).

1.3.1 Extensão de $\mathbb{N}$

Daremos, nesta subseção, sentido matemático as expressões $a - b$, sendo a e b quaisquer naturais e não somente para o caso em que $a \geq b$, como em $\mathbb{N}$. Assim, a cada par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N}$, associaremos a "diferença" $a - b$.

Proposição 1.3.1 *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Se $a \geq b$ e $c \geq d$, então*

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = c + b.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha $a - b = c - d$, o que é possível, já que $a \geq b$ e $c \geq d$. Então, temos

$$a - b + (b + d) = c - d + (b + d) \Rightarrow a - b + b + d = c - d + d + b \Rightarrow a + d = c + b.$$

($\Leftarrow$) Suponha agora $a + d = c + b$. Como $a \geq b$ e $d \geq 0$, segue que $a + d \geq b$ e $(a - b) + d \geq d$. Assim,

$$a + d = c + b \Rightarrow (a + d) - b = (c + b) - b \Rightarrow (a + d) - b = c + (b - b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a - b) + d = c \Rightarrow [(a - b) + d] - d = c - d \Rightarrow a - b = c - d.$$

■

No conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consideremos a relação $\sim$ definida do seguinte modo: para quaisquer (a, b) e (c, d) em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Proposição 1.3.2 *A relação $\sim$ acima definida é de equivalência, ou seja, para qualquer $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$, vale que:*

1. $(a, b) \sim (a, b)$ *(Reflexiva);*
2. $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$ *(Simétrica);*
3. $(a, b) \sim (c, d)$ *e* $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$ *(Transitiva).*

Demonstração:

1. Note que, como $a, b \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.2.8 temos $a + b = b + a$, e daí $(a, b) \sim (a, b)$;
2. Se $(a, b) \sim (c, d)$, então $a + d = b + c$. Pela Proposição 1.2.8, $d + a = c + b$. Logo, $(c, d) \sim (a, b)$.

■

3. De $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ temos

$$a + d = b + c \ (*)$$

$$c + f = d + e \ (**)$$

Somando as igualdades membro a membro obtemos

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e) \Rightarrow (a + f) + (d + c) = (b + e) + (d + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

■

Por ser uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a relação $\sim$ determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Indicaremos por $\overline{(a, b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Desse modo,

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + b = y + a\}. \end{aligned}$$

Indicaremos por $\mathbb{Z}$ o conjunto de todas as classes $\overline{(a, b)} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, isto é,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Observação 1.9 *Temos,* $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}$,

$$\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Em particular:

1. *Se* $a \geq b$, *então* $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)}$, *pois* $a + 0 = (a-b) + b$.

2. *Se* $a \leq b$, *então* $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)}$, *pois* $a + (b-a) = b + 0$.

   Logo, se $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, *então*

   $$\overline{(a,b)} = \overline{(c,0)} \text{ ou } \overline{(a,b)} = \overline{(0,c)},$$

   para algum $c \in \mathbb{N}$.

   Observamos ainda que a maneira acima de se representar o elemento $\overline{(a,b)}$ *é única pois, por exemplo, se* $\overline{(c,0)} = \overline{(d,0)}$, *então* $c + 0 = 0 + d$, *ou seja,* $c = d$.

1.3.2 Adição em $\mathbb{Z}$

Sejam $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ elementos de $\mathbb{Z}$. Definimos a soma de m com n, indicada por $m + n$, por:

$$m + n = \overline{(a+c, b+d)}$$

Exemplo 1.3 • $1 + 2 = \overline{(1,0)} + \overline{(2,0)} = \overline{(1+2, 0+0)} = \overline{(3,0)} = 3$

A próxima Proposição garante que esta soma de dois números inteiros está bem definida.

Proposição 1.3.3 *Se* $m = \overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \in \mathbb{Z}$ *e* $n = \overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \in \mathbb{Z}$, *então,*

$$m + n = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}.$$

Demonstração: Como $(a,b) \sim (a',b')$ e $(c,d) \sim (c',d')$ então:

$$a + b' = b + a' \text{ e}$$
$$c + d' = d + c'.$$

Somando membro a membro as equações e considerando que a, b, c, d, a', b', c' e d' são números naturais, obtemos:

$$(a + b') + (c + d') = (b + a') + (d + c') \Rightarrow (a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(a'+c', b'+d')} \Rightarrow \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}.$$

Logo, $m + n = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$ e, portanto,

$$(m,n) \to m + n$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, ou seja, uma operação sobre $\mathbb{Z}$, chamada adição.

■

Para a adição em $\mathbb{Z}$ são válidas as seguintes propriedades:
Para o que segue, considere $m = \overline{(a,b)},\ n = \overline{(c,d)},\ r = \overline{(e,f)}$ elementos genéricos de $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.3.4 ***(Associativa)****:* $(m + n) + r = m + (n + r),\ \forall m, n, r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: $(m + n) + r = \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(e,f)} =$

$$= \overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} = \overline{(a + (c + e), b + (d + f))} =$$

$$= \overline{(a,b)} + \overline{(c + e, d + f)} = m + (n + r).$$

■

Proposição 1.3.5 ***(Comutativa)****:* $m + n = n + m,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: $m + n = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a + c, b + d)}$

$$= \overline{(c + a, d + b)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} = n + m.$$

■

Proposição 1.3.6 ***(Existência do Elemento Neutro)****: A classe* $\overline{(0,0)}$ *é o elemento neutro para a adição.*

Demonstração: $m + \overline{(0,0)} = \overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a,b)} = m$.

■

Observação 1.10 *Para todo* $a \in \mathbb{N}$, $\overline{(a,a)} = \overline{(0,0)}$, *pois* $a + 0 = a = a + 0$.
Usaremos a notação $0 = \overline{(0,0)}$.

Proposição 1.3.7 ***(Simétrico aditivo)****: Dado* $m = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, *existe um único* $m' = \overline{(a',b')} \in \mathbb{Z}$ *tal que* $m + m' = 0$. *Mais ainda,* $m' = \overline{(b,a)}$.

Demonstração: Provemos inicialmente a sua existência e, depois, sua unicidade.
(i) Existência:
Tomemos $\overline{(a',b')} = \overline{(b,a)}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)}+\overline{(a',b')} &= \overline{(a,b)}+\overline{(b,a)} = \\ &= \overline{(a+b,b+a)} = \\ &= \overline{(a+b,a+b)} = \\ &= \overline{(0,0)}\end{aligned}$$

Logo, existe $m' \in \mathbb{Z}$ tal que $m+m'=0$

(ii) Unicidade: Suponhamos que existam $m'=\overline{(a',b')} \in \mathbb{Z}$ e $m''=\overline{(a'',b'')} \in \mathbb{Z}$ tais que $m+m'=0$ e $m+m''=0$. Então,

$$\begin{aligned} m+m'=\overline{(a,b)}+\overline{(a',b')}=\overline{(0,0)} &\Rightarrow \overline{(a+a',b+b')}=\overline{(0,0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a+a'=b+b' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m+m''=\overline{(a,b)}+\overline{(a'',b'')}=\overline{(0,0)} &\Rightarrow \overline{(a+a'',b+b'')}=\overline{(0,0)} \\ &\Rightarrow a+a''=b+b'' \end{aligned}$$

Assim,

$$(a+a')+(b+b'')=(b+b')+(a+a'') \Rightarrow a'+b''=b'+a'' \Rightarrow \overline{(a',b')}=\overline{(a'',b'')} \Rightarrow m'=m''.$$

Portanto, sendo $m=\overline{(a,b)}$, existe um único $m'=\overline{(b,a)}$, tal que $m+m'=0$.

■

Notação: Denotaremos por $-m$ o simétrico aditivo (oposto) de m.

Proposição 1.3.8 ***(Lei do Cancelamento da Adição)***: *$m+r=n+r \Rightarrow m=n$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} m &= m+0=m+(r+(-r)) = \\ &= (m+r)+(-r)=(n+r)+(-r)= \\ &= n+(r+(-r))=n+0=n. \end{aligned}$$

■

1.3.3 Subtração em $\mathbb{Z}$

Para cada par de elementos $m, n \in \mathbb{Z}$, chama-se diferença entre m e n e indica-se por $m - n$ o elemento $m + (-n) \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$m - n = m + (-n).$$

Para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}$, a relação dada por

$$(m, n) \to m - n$$

é uma operação sobre $\mathbb{Z}$, denominada subtração em $\mathbb{Z}$. Esta operação não é associativa, não é comutativa e não admite elemento neutro.

Proposição 1.3.9 *Sejam* $m = \overline{(a,b)}$, $n = \overline{(c,d)}$ *e* $r = \overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$. *Então:*

1. $-(-m) = m$;
2. $-m + n = n - m$;
3. $m - (-n) = m + n$;
4. $-m - n = -(m + n)$;
5. $m - (n + r) = m - n - r$.

Demonstração: Temos $-m = \overline{(b,a)}$, $-n = \overline{(d,c)}$ e $-r = \overline{(f,e)}$. Então:

1. $-(-m) = -\overline{(b,a)} = \overline{(a,b)} = m$.

$\blacksquare$

2.

$$\begin{aligned} -m + n &= \overline{(b,a)} + \overline{(c,d)} = \overline{(b+c, a+d)} = \\ &= \overline{(c+b, d+a)} = \overline{(c,d)} + \overline{(b,a)} = \\ &= n - m \end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.

$$\begin{aligned} m - (-n) &= \overline{(a,b)} - \overline{(d,c)} = \\ &= \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \\ &= m + n. \end{aligned}$$

■

4.

$$\begin{aligned}
-m-n &= \overline{(b,a)} - \overline{(c,d)} = \overline{(b,a)} + \overline{(d,c)} = \\
&= \overline{(b+d,a+c)} = -\overline{(a+c,b+d)} = \\
&= -(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) = -(m+n)
\end{aligned}$$

■

5.

$$\begin{aligned}
m-(n+r) &= \overline{(a,b)} - (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} - \overline{(c+e,d+f)} = \\
&= \overline{(a,b)} + \overline{(d+f,c+e)} = \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} + \overline{(f,e)} = \\
&= m-n-r.
\end{aligned}$$

■

1.3.4 Multiplicação em $\mathbb{Z}$

Sejam $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ elementos genéricos de $\mathbb{Z}$. Definimos o produto de m por n, indicado por mn ou $m.n$, como

$$mn = \overline{(ac+bd, ad+bc)}.$$

Exemplo 1.4 • $1 \cdot 2 = \overline{(1,0)} \cdot \overline{(2,0)} = \overline{(1.2+0.0, 1.0+0.2)} = \overline{(2,0)} = 2.$

A Proposição seguinte garante que esta multiplicação está bem definida para números inteiros.

Proposição 1.3.10 *Se* $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \in \mathbb{Z}$ *e* $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \in \mathbb{Z}$, *então*

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}.$$

Demonstração: Se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, temos $a+b' = b+a'$, o que nos fornece:

$$ac + b'c = bc + a'c \tag{1.1}$$

e, também,

$$bd + a'd = ad + b'd \tag{1.2}$$

Somando, membro a membro, as equações (1.1) e (1.2), obteremos:

$$ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd. \tag{1.3}$$

Do mesmo modo, se $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, temos $c + d' = d + c'$, o que nos fornece:

$$a'c + a'd' = a'd + a'c' \tag{1.4}$$

e, também,

$$b'd + b'c' = b'c + b'd'. \tag{1.5}$$

Mais uma vez somando, membro a membro, as equações (1.4) e (1.5), obteremos:

$$a'c + b'd + a'd' + b'c' = a'd + b'c + a'c' + b'd'. \tag{1.6}$$

Logo, das equações (1.3) e (1.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
ac + bd + a'd + b'c + a'c + b'd + a'd' + b'c' &= ad + bc + a'c + b'd + a'd + b'c + a'c' + b'd' \Rightarrow \\
\Rightarrow (ac + bd) + (a'd' + b'c') &= (ad + bc) + (a'c' + b'd') \Rightarrow \\
\Rightarrow \overline{(ac + bd, ad + bc)} &= \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')} \Rightarrow \\
\Rightarrow \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} &= \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}.
\end{aligned}$$

■

Para a multiplicação em $\mathbb{Z}$ são válidas as seguintes propriedades:
Para o que segue, considere $m = \overline{(a,b)},\ n = \overline{(c,d)},\ r = \overline{(e,f)}$ elementos genéricos de $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.3.11 ***(Associativa)****:* $(mn)r = m(nr),\ \forall m, n, r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(mn)r &= (\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}) \cdot \overline{(e,f)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e,f)} = \\
&= \overline{((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e)} = \\
&= \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)} = \\
&= \overline{(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)} = \\
&= \overline{(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df))} = \\
&= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} = \overline{(a,b)} \cdot (\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)}) = \\
&= m(nr).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 1.3.12 ***(Comutativa)***: *$mn = nm, \ \forall m, n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} mn &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \\ &= \overline{(ca+db, da+cb)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} = \\ &= nm. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 1.3.13 ***(Elemento Neutro)***: *A classe $\overline{(1,0)}$ é o elemento neutro para a multiplicação.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} m\overline{(1,0)} &= \overline{(a,b)}\ \overline{(1,0)} = \\ &= \overline{(a.1+b.0, a.0+b.1)} = \overline{(a,b)} = m. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 1.3.14 ***(Lei do Anulamento do Produto)***: *Se $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} mn = \overline{(0,0)} &\Rightarrow \overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow ac+bd+0 = ad+bc+0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow ac+bd = ad+bc. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Suponhamos agora que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,0)}$. Note que, desse modo, $a \neq b$, ou seja, $a > b$ ou $b > a$. Considerando $a > b$, temos $a = b + p$, onde $p \in \mathbb{N}^*$. Assim, substituindo na equação (1.7), obtemos:

$$\begin{aligned} (b+p)c + bd = (b+p)d + bc &\Rightarrow bc + pc + bd = bd + pd + bc \\ &\Rightarrow pc = pd \overset{Propos.1.2.18}{\Rightarrow} c = d. \end{aligned}$$

Logo, como $c = d$, temos $\overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$. De modo análogo poderíamos supor $\overline{(c,d)} \neq \overline{(0,0)}$ e concluiríamos que $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$.

$\blacksquare$

Proposição 1.3.15 ***(Distributiva)****:* $m(n+r) = mn + mr$, $\forall m, n, r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} m(n+r) &= \overline{(a,b)}.(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c+e, d+f)} \Rightarrow \\ &= \overline{(a(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e))} \Rightarrow \\ &= \overline{(ac+ae+bd+bf, ad+af+bc+be)} \Rightarrow \\ &= \overline{(ac+bd, ad+bc)} + \overline{(ae+bf, af+be)} \Rightarrow \\ &= \overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}.\overline{(e,f)} \Rightarrow \\ &= mn + mr \end{aligned}$$

■

Proposição 1.3.16 *Se* $m, n, r \in \mathbb{Z}$*, temos:*

1. $m(n-r) = mn - mr$ *e* $(m-n)r = mr - nr$*;*
2. $m.0 = 0$*;*
3. $m(-n) = (-m)n = -(mn)$*;*
4. $(-m)(-n) = mn$*;*
5. $(mn = mr$ *e* $m \neq 0) \Rightarrow n = r$ *(Lei do Cancelamento da multiplicação).*

Demonstrações: Para as demonstrações desta proposição consideraremos o exposto na Propriedade (1.3.9).

1. Note que, como $m(n-r) + mr = m[(n-r)+r] = mn$, então $m(n-r) = mn - mr$.

   Analogamente, como $(m-n)r + nr = r[(m-n)+n] = mr$, então $(m-n)r = mr - nr$;

2. $m.0 = m.(0-0) = m.0 - m.0 = 0$;

3. $m(-n) = m[0+(-n)] = m(0-n) = m.0-(mn) = -(mn)$. E ainda, $(-m)n = (0-m)n = 0.n - mn = -(mn)$;

4. Do item anterior temos

   - $(-m)(-n) = -[m(-n)]$ **(i)**
   - $m(-n) = -(mn)$ **(ii)**

   Substituindo **(ii)** em **(i)**, obtemos $(-m)(-n) = -[-(mn)] = mn$;

5. Suponha $m \neq 0$. Desse modo, temos:

$$\begin{aligned} mn = mr \quad & \Rightarrow \quad mn + [-(mr)] = mr + [-(mr)] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad mn - mr = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad m(n-r) = 0 \Rightarrow \\ & \overset{m \neq 0}{\Rightarrow} \quad n - r = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad n = r. \end{aligned}$$

■

1.3.5 Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$

Considerando

$$\begin{array}{rcl} ... = \overline{(1,1)} = \overline{(0,0)} = 0 & \quad & ...\overline{(1,2)} = \overline{(0,1)} = -1 \\ ...\overline{(2,1)} = \overline{(1,0)} = +1 & & ...\overline{(1,3)} = \overline{(0,2)} = -2 \\ ...\overline{(3,1)} = \overline{(2,0)} = +2 & & ...\overline{(1,4)} = \overline{(0,3)} = -3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

podemos escrever

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$$

A partir disso, definamos $\mathbb{Z}_+ = \{\overline{(c,0)} \mid c \in \mathbb{N}\} = \{0, +1, +2, ...\}$ (conjunto dos inteiros positivos), $\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, ...\}$ (conjunto dos inteiros estritamente positivos), $\mathbb{Z}_- = \{\overline{(0,c)} \mid c \in \mathbb{N}\} = \{..., -2, -1, 0\}$ (conjunto dos inteiros negativos) e $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -3, -2, -1\}$ (conjunto dos inteiros estritamente negativos).

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que m é menor que ou igual a n ($m \leq n$) se

$$n = m + r,$$

para algum $r \in \mathbb{Z}_+$. Neste caso é equivalente dizer que $n \geq m$, ou seja, n é maior que ou igual a m.

Se $n = m + r$, com $r \in \mathbb{Z}_+^*$, então m diz-se menor que n ($m < n$) ou, equivalentemente, n maior que m ($n > m$).

Observação 1.11 *Sejam* $m = \overline{(a,b)}$, $n = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} m \leq n &\Leftrightarrow n = m + r, \ p/\ algum\ r \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{(c,d)} = \overline{(a,b)} + \overline{(e,0)}, \ p/\ algum\ e \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{(c,d)} = \overline{(a+e,b)}, \ p/\ algum\ e \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c + b = d + (a+e), \ p/\ algum\ e \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b + c = (a+d) + e, \ p/\ algum\ e \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a + d \leq b + c \ (em\ \mathbb{N}). \end{aligned}$$

No que segue, faremos as demonstrações das propriedades pelas quais se diz que $\leq$ é uma *relação de ordem total* sobre $\mathbb{Z}$, compatível com a adição e a multiplicação em $\mathbb{Z}$.

Proposição 1.3.17 ***(Relação de Ordem total):*** *A relação $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\forall m \in \mathbb{Z}, m \leq m$ *(reflexiva);*

2. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n \text{ e } n \leq m \Rightarrow m = n$ *(antissimétrica);*

3. $\forall m, n, r \in \mathbb{Z}, m \leq n \text{ e } n \leq r \Rightarrow m \leq r$ *(transitiva);*

4. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n \text{ ou } n \leq m$ *(a relação $\leq$ é total);*

5. $\forall m, n, r \in \mathbb{Z}, m \leq n \Rightarrow m + r \leq n + r$ *($\leq$ é compatível com a adição);*

6. $\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{Z}_+^*, m \leq n \Rightarrow mr \leq nr$ *($\leq$ é compatível com a multiplicação).*

Demonstrações: Sejam $m = \overline{(a,b)}, n = \overline{(c,d)}$ e $r = \overline{(e,f)}$.

1. Note que $m = m + 0$ e $0 \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $m \leq m, \forall m \in \mathbb{Z}$.

■

2. Por um lado temos

$$\begin{aligned} m \leq n \Rightarrow \overline{(a,b)} &\leq \overline{(c,d)} \Rightarrow \\ \Rightarrow a + d &\leq b + c. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} n \leq m \Rightarrow \overline{(c,d)} &\leq \overline{(a,b)} \Rightarrow \\ \Rightarrow c + b &\leq d + a. \end{aligned}$$

Assim, já que $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, temos pela Tricotomia dos Naturais (Proposição 1.2.22), que $a + d = b + c$, isto é, $\overline{(a, b)} = \overline{(c, d)}$, ou ainda, $m = n$.

■

3. De $m \leq n$, temos $\overline{(a, b)} \leq \overline{(c, d)} \Rightarrow a + d \leq b + c$. Assim, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$a + d + p = b + c \quad \textbf{(i)}.$$

Já de $n \leq r$, temos $\overline{(c, d)} \leq \overline{(e, f)} \Rightarrow c + f \leq d + e$. Assim, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$c + f + q = d + e \quad \textbf{(ii)}.$$

Somando, membro a membro as equações **(i)** e **(ii)** e utilizando as propriedades relativas aos números naturais, teremos

$$\begin{aligned} a + d + p + c + f + q &= b + c + d + e \Rightarrow \\ \Rightarrow a + f + (p + q) &= b + e \Rightarrow \\ \Rightarrow a + f &\leq b + e \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{(a, b)} &\leq \overline{(e, f)} \Rightarrow \\ \Rightarrow m &\leq r, \end{aligned}$$

como gostaríamos de demonstrar.

■

4. Suponha que a afirmação $m \leq n$ ou $n \leq m$ não seja válida, isto é, $m > n$ e $n > m$.

De $m > n$ temos $a + d > b + c$. Já de $n > m$ segue $c + b > d + a \Leftrightarrow b + c > a + d$. Assim temos

$$a + d > b + c$$

e

$$b + c > a + d$$

o que, pela Tricotomia dos Naturais (Proposição 1.2.22), é um absurdo. Portanto, $m \leq n$ ou $n \leq m$, como gostaríamos.

■

5. Suponha $m \leq n$, isto é, $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$. Temos então as seguintes implicações:

$$\begin{aligned}
\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} &\Rightarrow a+d \leq b+c \Rightarrow \\
&\Rightarrow a+d+(e+f) \leq b+c+(e+f) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (a+e)+(d+f) \leq (c+e)+(b+f) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \overline{(a+e,b+f)} \leq \overline{(c+e,d+f)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \overline{(a,b)}+\overline{(e,f)} \leq \overline{(c,d)}+\overline{(e,f)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow m+r \leq n+r,
\end{aligned}$$

como gostaríamos.

■

6. De $m \leq n$, obtemos $a+d \leq b+c$, donde afirmamos que existe um natural p tal que
$$a+d+p = b+c.$$
Já de $0 \leq r$, obtemos $0+f \leq e+0 \Rightarrow f \leq e$, donde existe $q \in \mathbb{N}$ tal que
$$f+q = e.$$

Desse modo, temos:

$$b+c = a+d+p \Rightarrow be+ce = ae+de+pe \tag{1.8}$$
$$b+c = a+d+p \Rightarrow bf+cf = af+df+pf \tag{1.9}$$
$$f+q = e \Rightarrow pf+pq = pe \tag{1.10}$$

Somando o segundo membro da equação (1.8) ao primeiro membro da equação (1.9) e o primeiro membro da equação (1.8) ao segundo membro da equação (1.9), obteremos

$$ae+de+pe+bf+cf = be+ce+af+df+pf \tag{1.11}$$

Substituindo (1.10) na equação (1.11), temos:

$$\begin{aligned}
ae+de+(pf+pq)+bf+cf &= be+ce+af+df+pf \\
(\Rightarrow)\ ae+de+pq+bf+cf &= be+ce+af+df \\
(\Rightarrow)\ ae+de+bf+cf &\leq be+ce+af+df \\
(\Rightarrow)\ \overline{(ae+bf,af+be)} &\leq \overline{(ce+df,cf+de)} \\
(\Rightarrow)\ \overline{(a,b)}.\overline{(e,f)} &\leq \overline{(c,d)}.\overline{(e,f)} \\
(\Rightarrow)\ mr &\leq nr
\end{aligned}$$

como gostaríamos.

■

Teorema 1.3.1 ***(Tricotomia dos Inteiros):*** *Para $m, n \in \mathbb{Z}$, uma e apenas uma das situações seguintes ocorre: $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$.*

Demonstração: Sejam $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$. Suponhamos que $m < n$ e $n < m$ simultaneamente:

$$m < n \Rightarrow \overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Rightarrow a + d < b + c$$

$$n < m \Rightarrow \overline{(c,d)} < \overline{(a,b)} \Rightarrow c + b < d + a.$$

Assim, temos

$$a + d < b + c = c + b < a + d,$$

absurdo! Logo, $m < n$ e $n < m$ não ocorrem simultaneamente.

Da mesma maneira, se $m < n$ (ou $n < m$) e $m = n$ teremos:

$$m < n \Rightarrow \overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Rightarrow a + d < b + c$$

$$m = n \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Rightarrow a + d = b + c$$

Assim, temos

$$a + d < b + c = a + d,$$

absurdo! Logo, $m < n$ e $m = n$ também não ocorrem simultaneamente.

Neste ponto, note que, como a, b, c e $d \in \mathbb{N}$, pela Tricotomia dos Naturais (Proposição 1.2.22), temos que uma, e somente uma, das situações abaixo ocorrem:

$$a + d < b + c, \quad b + c < a + d, \quad a + d = b + c,$$

o que equivale a

$$\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}, \quad \overline{(c,d)} < \overline{(a,b)}, \quad \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}.$$

Portanto, para $m, n \in \mathbb{Z}$, $m = n$ ou $m < n$ ou $n < m$.

$\blacksquare$

O próximo teorema nos dará condições de considerar $\mathbb{N}$ como parte de $\mathbb{Z}$. Mais precisamente, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$.

Teorema 1.3.2 ***(Imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$):*** *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(a) = \overline{(a,0)}$, $\forall a \in \mathbb{N}$. Então $Im(f) = \mathbb{Z}_+$, f é injetora e valem as seguintes propriedades:*

1. *$f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$;*

2. *$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{N}$;*

3. *Se $a \leq b$, então $f(a) \leq f(b)$.*

Demonstração: Primeiramente temos $Im(f) = \{f(a) \mid a \in \mathbb{N}\} = \{\overline{(a,0)} \mid a \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_+$. Verifiquemos que f é injetora. De fato,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \overline{(a,0)} = \overline{(b,0)} \Rightarrow a + 0 = 0 + b \Rightarrow a = b,$$

logo, f é injetora. Passemos agora a demonstração dos itens 1,2 e 3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, então:

1. $f(a+b) = \overline{(a+b,0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(b,0)} = f(a) + f(b)$;

2. $f(ab) = \overline{(ab,0)} = \overline{(a.b + 0.0, a.0 + 0.b)} = \overline{(a,0)} \cdot \overline{(b,0)} = f(a)f(b)$;

3. $a \leq b \Rightarrow a + c = b$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Assim, $f(b) = \overline{(b,0)} = \overline{(a+c,0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(c,0)} =$ $= f(a) + \overline{(c,0)}$, donde $f(a) \leq f(b)$.

■

No que se refere aos aspectos algébricos e à ordenação, $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia de $\mathbb{N}$, obtida através de f. A função f costuma ser chamada de imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ e sua injetividade nos garante que o conjunto $\mathbb{Z}$ é infinito.

Lembremo-nos, neste ponto, que a grande motivação para que pudéssemos "expandir" nossa gama de números, construindo, então, o conjunto dos números inteiros, foi dar sentido matemático a diferença $a - b$, quaisquer que fossem $a, b \in \mathbb{N}$. Agora, podemos obter

$$a - b = \overline{(a,0)} - \overline{(b,0)} = \overline{(a,0)} + (-\overline{(b,0)}) = \overline{(a,0)} + \overline{(0,b)} = \overline{(a,b)}$$

Por outro lado, se considerarmos $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, então $x = \overline{(a,0)} + \overline{(0,b)} = \overline{(a,0)} + [-\overline{(b,0)}]$ e, desse modo, $x = a - b$. Logo, todo número inteiro é a diferença de dois números naturais.

Observação 1.12 *Sendo m um inteiro qualquer, podemos identificar $-m$ por $(-1).m$, pois, se considerarmos $m = \overline{(a,b)}$, teremos*

$$(-1).m = \overline{(0,1)}.\overline{(a,b)} = \overline{(b,a)} = -\overline{(a,b)} = -m$$

Proposição 1.3.18 ***(Regra de Sinais)*** *Se $m, n \in \mathbb{Z}$, temos:*

1. *Se $m > 0$ e $n > 0$, então $mn > 0$;*

2. *Se $m < 0$ e $n < 0$, então $mn > 0$;*

3. *Se $m < 0$ e $n > 0$, então $mn < 0$;*

Demonstração:

1. *Como m e n são inteiros positivos, considere $m = \overline{(a,0)}$ e $n = \overline{(b,0)}$. Assim, $mn = \overline{(a,0)}.\overline{(b,0)} = \overline{(ab,0)} > 0$ e, desse modo, $mn > 0$.*

■

2. *De* $m < 0$ *e* $n < 0$ *segue que* $-m > 0$ *e* $-n > 0$. *Assim, pelo item anterior,* $(-m).(-n) > 0$. *Por outro lado, do item 4 da Proposição (1.3.16), temos* $(-m).(-n) = m.n$. *Logo,* $m.n > 0$.

■

3. *De* $m < 0$ *segue que* $-m > 0$. *Assim, sendo* $n > 0$*, pelo item 1 desta Proposição,* $(-m).n > 0$. *Por outro lado, do item 3 da Proposição (1.3.16), temos* $(-m).n = -(m.n)$. *Logo,* $-(m.n) > 0$*, o que nos da* $m.n < 0$.

■

Definição 1.3.1 *Seja* S *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{Z}$. *Todo elemento* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $k \leq x$, $\forall x \in S$*, chama-se* ***cota inferior*** *de* S. *Uma cota inferior de* S *que pertença a* S *chama-se* ***mínimo*** *de* S.

Notação: Usaremos $min(S)$ para indicar o mínimo de S, caso ele exista.

Observação 1.13 *Um subconjunto não vazio* S *de* $\mathbb{Z}$ *não pode ter mais que um mínimo.*

De fato, sejam m e m' dois mínimos de S. Então, $m \leq m'$, já que m é o mínimo de S. Por outro lado, $m' \leq m$, já que m' também é mínimo de S. Logo, de $m \leq m'$ e $m' \leq m$, segue $m = m'$.

Teorema 1.3.3 ***(Princípio da Boa Ordem):*** *Seja* $X \subset \mathbb{Z}$ *não vazio e limitado inferiormente. Então* X *possui elemento mínimo.*

Demonstração: Seja $X' = \{x - k \mid x \in X\}$, onde k é uma cota inferior de X que, por hipótese, existe. O fato de que $X \neq \emptyset$, nos garante que $X' \neq \emptyset$. Mais ainda, como $k \leq x$, então $x - k \geq 0$ para todo $x \in X$, ou seja, $X' \subset \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema(1.2.1) (Princípio da boa ordem nos Naturais), X' tem um mínimo $m_0 = m - k$, para algum $m \in X$. Mostremos que $m = min(X)$. Se $x \in X$ então $x - k \in X'$ e, dessa maneira, $m - k \leq x - k \Rightarrow m \leq x$. Logo, como $m \in X$ e $m \leq x, \forall x \in X$, temos $m = min(X)$.

■

1.4 Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

A noção de número racional surgiu relativamente tarde, diferentemente das noções de números inteiros, cuja origem é pré-histórica. Segundo Boyer (1996), entre as tribos primitivas não houve praticamente nenhuma necessidade de se utilizar frações pois, para proceder com contagens, o homem podia escolher unidades suficientemente pequenas para eliminar o emprego de frações.

Da antiguidade, podemos destacar que por volta de 2000 a.C., os egípcios já utilizavam frações para representar a divisão, quando não exata, de um número inteiro por outro. Convém, também, registrar que, ainda por volta de 2000 a.C., os babilônios, que já utilizavam numeração posicional, conseguiram estender o princípio posicional para as frações, criando assim, as frações sexagesimais. Vestígios dessas frações estão em nosso dia-a-dia, como na expressão do tempo, que é dado em horas, minutos e segundos.(DOMINGUES, 2009).

As frações decimais são um produto da idade moderna da Matemática. De acordo com Domingues (2009), o uso generalizado da forma decimal das frações se deu após a publicação, em 1585, de um texto de Simon Stevin (1548-1620), intitulado *De Thiende* ("O décimo").

1.4.1 Construção de $\mathbb{Q}$

Para o que segue, consideremos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m,n) \mid m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*\}$ e a relação $\sim$ definida, para quaisquer $(m,n),(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ do seguinte modo:

$$(m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow mq = np.$$

Proposição 1.4.1 *A relação $\sim$ definida acima é uma relação de equivalência, ou seja, para quaisquer $(m,n),(p,q),(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, vale que:*

1. $(m,n) \sim (m,n)$ *(Reflexiva);*
2. $(m,n) \sim (p,q) \Rightarrow (p,q) \sim (m,n)$ *(Simétrica);*
3. $(m,n) \sim (p,q)$ *e* $(p,q) \sim (r,s) \Rightarrow (m,n) \sim (r,s)$ *(Transitiva).*

Demonstração:

1. Reflexiva: Considere $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Pela Proposição (1.3.12), temos $mn = nm$ e, assim, $(m,n) \sim (m,n)$.
2. Simétrica: Considere $m,p \in \mathbb{Z}$ e $n,q \in \mathbb{Z}^*$. Se $(m,n) \sim (p,q)$, então $mq = np$, donde pela Proposição (1.3.12), $pn = qm$, isto é, $(p,q) \sim (m,n)$.
3. Transitiva: Considere $m,p,r \in \mathbb{Z}$ e $n,q,s \in \mathbb{Z}^*$. Se $(m,n) \sim (p,q)$ e $(p,q) \sim (r,s)$, temos:

$$mq = np \Rightarrow mqs = nps,$$

$$ps = qr \Rightarrow nps = nqr.$$

Dessa forma, $mqs = nqr \overset{q \neq 0}{\Rightarrow} ms = nr$, ou seja, $(m,n) \sim (r,s)$.

Portanto, a relação $\sim$ é de equivalência.

■

Dado $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, denotamos por $\dfrac{m}{n}$ (m sobre n) a classe de equivalência do par (m,n) pela relação $\sim$ já definida. Assim,

$$\frac{m}{n} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (x,y) \sim (m,n)\}.$$

Neste caso, denominamos m por *numerador* e n por *denominador*.

Proposição 1.4.2 *(Princípio Fundamental das Frações):* *Se (m,n) e (p,q) são elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, então*

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np.$$

Demonstração: Pelo item 2 do Teorema (1.1.2), temos:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow (m,n) \sim (p,q) \Leftrightarrow mq = np,$$

como queríamos. ■

Denotamos por $\mathbb{Q}$ e denominamos por conjunto dos números racionais, o conjunto quociente de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

Note que cada $a \in \mathbb{Q}$ pode ser representado de infinitas maneiras (diferentes) na forma $\dfrac{m}{n}$.

1.4.2 Adição em $\mathbb{Q}$

Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ números racionais. Chama-se *soma* de a com b e indica-se por $a+b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms+nr}{ns}.$$

Exemplo 1.5

- $\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{3\cdot 5 + 4\cdot 2}{2\cdot 5} = \dfrac{23}{10}$

Através do próximo teorema poderemos afirmar que a soma está bem definida em $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.4.1 *Se $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ e $\dfrac{r}{s} = \dfrac{r'}{s'}$, então $\dfrac{m}{n} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{m'}{n'} + \dfrac{r'}{s'}$.*

Demonstração: Utilizando o Princípio Fundamental das Frações (Proposição 1.4.2), temos, $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$. Da definição,

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms+nr}{ns} \qquad e \qquad \frac{m'}{n'} + \frac{r'}{s'} = \frac{m's'+n'r'}{n's'}$$

Novamente considerando a Proposição (1.4.2),

$$\begin{aligned}\frac{ms+nr}{ns} &= \frac{m's'+n'r'}{n's'} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (ms+nr)(n's') &= (ns)(m's'+n'r') \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow mn'ss'+nn'rs' &= nm'ss'+sr'nn'. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Substituindo $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$ na equação (1.12) temos

$$\begin{aligned} mn'ss'+nn'rs' &= nm'ss'+sr'nn' \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow nm'ss'+nn'sr' &= nm'ss'+nn'sr' \end{aligned}$$

ou seja, a igualdade se verifica.

Portanto, $\dfrac{m}{n}+\dfrac{r}{s}=\dfrac{m'}{n'}+\dfrac{r'}{s'}$, isto é, a correspondência $(a,b)\to a+b$, quaisquer que sejam $a,b\in\mathbb{Q}$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

■

A operação adição, como definimos, goza das seguintes propriedades:

Para as propriedades que se seguem, considere $a,b,c\in\mathbb{Q}$, onde $a=\dfrac{m}{n}$, $b=\dfrac{p}{q}$ e $c=\dfrac{r}{s}$, com $m,p,r\in\mathbb{Z}$ e $n,q,s\in\mathbb{Z}^*$.

Proposição 1.4.3 ***(Associativa):*** $(a+b)+c=a+(b+c)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}(a+b)+c=\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s} &= \frac{mq+np}{nq}+\frac{r}{s} = \\ &= \frac{s(mq+np)+nqr}{nqs} = \\ &= \frac{(smq+snp)+nqr}{nqs} = \\ &= \frac{smq+(snp+nqr)}{nqs} = \\ &= \frac{smq+n(sp+qr)}{nqs} = \\ &= \frac{m}{n}+\frac{sp+qr}{qs} = \\ &= \frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right) = a+(b+c).\end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.4 ***(Comutativa):*** *$a+b=b+a$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{q} &= \frac{mq+np}{nq} = \\ &= \frac{pn+qm}{qn} = \\ &= \frac{p}{q}+\frac{m}{n} = b+a. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.5 ***(Elemento Neutro):*** *A classe de equivalência $\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{3}=\ldots$ é o elemento neutro da adição.*

Demonstração: Tomando o representante $\frac{0}{1}$, temos:

$$a+\frac{0}{1}=\frac{m}{n}+\frac{0}{1}=\frac{m.1+0.n}{n.1}=\frac{m}{n}=a.$$

■

Denotaremos tal classe de equivalência simplesmente por 0.

Proposição 1.4.6 ***(Elemento Simétrico):*** *Para todo $a\in\mathbb{Q}$, existe $a'\in\mathbb{Q}$ tal que $a+a'=0$.*

Demonstração: Seja $a'=\frac{-m}{n}$, então

$$\frac{m}{n}+\frac{-m}{n}=\frac{mn+(-m)n}{nn}=\frac{mn-mn}{nn}=\frac{n(m-m)}{nn}=\frac{m-m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

■

Proposição 1.4.7 ***(Cancelamento Aditivo):*** *$a+c=b+c\Leftrightarrow a=b$.*

Demonstração: Considerando o Princípio Fundamental das Frações (Proposição 1.4.2) e, também, as propriedades para números inteiros vistas na seção anterior, temos as seguintes equivalências:

$$
\begin{aligned}
a+c=b+c \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{p}{q}+\frac{r}{s} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{ms+nr}{ns}=\frac{ps+qr}{qs} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (ms+nr).(qs)=(ns).(ps+qr) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad msqs+nqrs=nsps+nsqr \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad s(mqs+nqr)=s(nps+nqr) \overset{s\neq 0}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \quad mqs+nqr=nps+nqr \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad mqs=nps \overset{s\neq 0}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \quad mq=np \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{m}{n}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow a=b.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 1.4.8 ***(Unicidade do Elemento Simétrico):*** *Todo $a \in \mathbb{Q}$, tem um único simétrico $a' \in \mathbb{Q}$ tal que $a+a'=0$.*

Demonstração: Seja a um número racional e suponha que a' e a'' são seus simétricos. Desse modo teremos $a+a'=\dfrac{0}{1}$ e, também, $a+a''=\dfrac{0}{1}$, o que acarreta $a+a'=a+a''$, donde, pela Proposição (1.4.7), segue $a'=a''$.

Portanto, o elemento simétrico de um numero racional é único. ■

Observação 1.14 *Dado um elemento $a \in \mathbb{Q}$, denotaremos por $-a$ o seu simétrico aditivo, de modo que, se $a=\dfrac{m}{n}$ então $-a=-\dfrac{m}{n}$.*

Neste ponto o leitor pode ser perguntar: *"Na Propriedade (1.4.6), temos $-a=\dfrac{-m}{n}$, enquanto na Observação (1.14) $-a=-\dfrac{m}{n}$. Já que pela Proposição (1.4.8) o simétrico é único, não temos aqui uma contradição?"* A resposta vem através da Proposição a seguir.

Proposição 1.4.9 *Para $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{-a}{-b}$.*

Demonstração: De acordo com a Proposição (1.3.16), como $a,b \in \mathbb{Z}$, temos

$$(-a)(-b)=ab=-(a)(-b)=-(-a)b,$$

donde segue, respectivamente, que

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}=-\frac{-a}{-b}.$$

■

1.4.3 Subtração em $\mathbb{Q}$

Se $a, b \in \mathbb{Q}$, denomina-se *diferença* entre a e b e indica-se por $a - b$, o elemento

$$a - b = a + (-b),$$

que também pertence a $\mathbb{Q}$, uma vez que $-b \in \mathbb{Q}$. Esta operação será chamada de *subtração* em $\mathbb{Q}$. Note que a diferença entre a e b nada mais é do que a soma de a com o oposto de b.

Proposição 1.4.10 *Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, sendo $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{p}{q}$, são válidas as seguintes afirmações:*

1. $-(-a) = a$;
2. $-a + b = b - a$;
3. $a - (-b) = a + b$;
4. $-(a + b) = (-a) + (-b)$;
5. $(a - b) + b = a$.

Demonstração: Considerando as propriedades para números inteiros vistas da seção anterior, temos:

1. $-(-a) = -\left(\dfrac{-m}{n}\right) = \dfrac{-(-m)}{n} = \dfrac{m}{n} = a.$ ■

2.
$$\begin{aligned} -a + b = -\frac{m}{n} + \frac{p}{q} &= \frac{(-m)}{n} + \frac{p}{q} = \frac{(-m)q + np}{nq} = \\ &= \frac{-(mq) + np}{nq} = \frac{np - (mq)}{nq} = \\ &= \frac{pn + q(-m)}{qn} = \frac{p}{q} + \frac{-m}{n} = \\ &= b - a. \end{aligned}$$
■

3. $a - (-b) = \dfrac{m}{n} - \left(\dfrac{-p}{q}\right) = \dfrac{m}{n} + \dfrac{-(-p)}{q} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} = a + b.$ ■

4. Para provar esta igualdade basta concluirmos que $(-a) + (-b)$ é o oposto de $(a + b)$, isto é, $(a + b) + [(-a) + (-b)] = 0$. De fato, como $(-a)$ e $(-b)$ são os simétricos de a e b, respectivamente, segue que

$$(a + b) + [(-a) + (-b)] = [a + (-a)] + [b + (-b)] = 0 + 0 = 0.$$

$\blacksquare$

5. Novamente, como $(-a)$ e $(-b)$ são os simétricos de a e b, respectivamente, segue que
$$(a-b)+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+0=a.$$

$\blacksquare$

1.4.4 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Sejam $a=\dfrac{m}{n}$ e $b=\dfrac{p}{q}$ números racionais. Chama-se produto de a por b e indica-se por ab (ou $a.b$), o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a.b=\frac{m}{n}.\frac{p}{q}=\frac{m.p}{n.q}.$$

Exemplo 1.6 • $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\dfrac{15}{28}.$

Através do próximo teorema poderemos afirmar que a multiplicação é uma operação bem definida em $\mathbb{Q}$.

Proposição 1.4.11 *Se* $\dfrac{m}{n}=\dfrac{m'}{n'}$ *e* $\dfrac{r}{s}=\dfrac{r'}{s'}$, *então* $\dfrac{m}{n}.\dfrac{r}{s}=\dfrac{m'}{n'}.\dfrac{r'}{s'}$.

Demonstração: Por hipótese, considerando o Princípio Fundamental das Frações (Proposição 1.4.2), temos $mn'=nm'$ e $rs'=sr'$.

Da definição,
$$\frac{m}{n}.\frac{r}{s}=\frac{mr}{ns} \qquad e \qquad \frac{m'}{n'}.\frac{r'}{s'}=\frac{m'r'}{n's'}.$$

Queremos provar que $\dfrac{mr}{ns}=\dfrac{m'r'}{n's'}$, o que, pela Proposição (1.4.2), equivale a mostrar $mrn's'=m'r'ns$, o que se verifica, pois substituindo $mn'=nm'$ e $rs'=sr'$ temos:

$$mrn's' \;=\; nm'sr'=mn'rs'=mrn's'.$$

Portanto, $\dfrac{m}{n}.\dfrac{r}{s}=\dfrac{m'}{n'}.\dfrac{r'}{s'}$, isto é, a correspondência $(a,b)\to a.b$, quaisquer que sejam $a,b\in\mathbb{Q}$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$. $\blacksquare$

A operação multiplicação, como definimos, goza das seguintes propriedades:

Para as propriedades que se seguem, considere $a,b,c\in\mathbb{Q}$, onde $a=\dfrac{m}{n}$, $b=\dfrac{p}{q}$ e $c=\dfrac{r}{s}$, com $m,p,r\in\mathbb{Z}$ e $n,q,s\in\mathbb{Z}^*$.

Proposição 1.4.12 ***(Associativa):*** $(ab)c = a(bc)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}(ab)c = \left(\frac{m}{n}\frac{p}{q}\right)\frac{r}{s} &= \left(\frac{mp}{nq}\right)\frac{r}{s} = \\ &= \frac{mpr}{nqs} = \frac{m}{n}\left(\frac{pr}{qs}\right) = \\ &= \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\frac{r}{s}\right) = a(bc).\end{aligned}$$

■

Proposição 1.4.13 ***(Comutativa):*** $ab = ba$.

Demonstração:

$$ab = \frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} = \frac{pm}{qn} = \frac{p}{q}\frac{m}{n} = ba.$$

■

Proposição 1.4.14 ***(Elemento Neutro):*** *A classe de equivalência* $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = ...$ *é o elemento neutro da multiplicação.*

Demonstração: De fato, tomando o representante $\frac{1}{1}$, temos

$$a\frac{1}{1} = \frac{m}{n}\frac{1}{1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n} = a.$$

■

Denotaremos tal classe de equivalência simplesmente por 1.

Proposição 1.4.15 ***(Elemento Inverso):****Para todo* $a \in \mathbb{Q}^*$, *existe* $a' \in \mathbb{Q}$ *tal que* $a.a' = 1$.

Demonstração: De fato, se $a = \frac{m}{n} \neq \frac{0}{1}$, então $a' = \frac{n}{m}$, pois

$$\begin{aligned}aa' = \frac{m}{n}\frac{n}{m} &= \frac{mn}{nm} = \frac{mn}{mn} = \frac{m}{m}\frac{n}{n} = \\ &= \frac{1}{1}\frac{1}{1} = \\ &= \frac{1}{1}.\end{aligned}$$

■

Observação 1.15 *A Proposição (1.1.1) garante que o Elemento Inverso, cuja existência foi demonstrada na Proposição (1.4.15), é único.*

Proposição 1.4.16 ***(Cancelamento Multiplicativo):*** *Para* $a = \dfrac{m}{n} \neq \dfrac{0}{1}$,

$$ac = bc \Leftrightarrow a = b.$$

Demonstração: Considerando o Princípio Fundamental das Frações (Proposição 1.4.2) e, também, as propriedades para números inteiros vistas na seção anterior, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} ac = bc &\Leftrightarrow \frac{m}{n}\frac{r}{s} = \frac{p}{q}\frac{r}{s} \Leftrightarrow \frac{mr}{ns} = \frac{pr}{qs} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (mr)(qs) = (ns)(pr) \Leftrightarrow mq = np \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

■

Observação 1.16 *Dado um elemento* $a \neq \dfrac{0}{1} \in \mathbb{Q}$, *denotaremos por* a^{-1} *o seu inverso (ou simétrico multiplicativo), de modo que, se* $a = \dfrac{m}{n}$ *então* $a^{-1} = \dfrac{n}{m}$.

Proposição 1.4.17 *Dados* $a, b, c \in \mathbb{Q}$, *são válidas as seguintes igualdades:*

1. *(Distributiva da multiplicação em relação a adição):* $a(b + c) = ab + ac$;

2. *(Distributiva da multiplicação em relação a subtração):* $a(b - c) = ab - ac$.

Demonstração: Sejam $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q}$ e $c = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

1.

$$\begin{aligned} a(b + c) &= \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{ps + rq}{qs}\right) = \frac{m(ps + rq)}{n(qs)} \\ &= \frac{mps + mrq}{nqs} = \frac{n}{n}\frac{mps + mrq}{nqs} = \frac{n(mps + mrq)}{n(nqs)} \\ &= \frac{nmps + nmrq}{nnqs} = \frac{(mp)(ns) + (mr)(nq)}{(nq)(ns)} = \frac{mp}{nq} + \frac{mr}{ns} \\ &= \frac{m}{n}\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\frac{r}{s} = ab + ac. \end{aligned}$$

■

2. Considerando o que foi feito no item 1, temos:

$$\begin{aligned} a(b - c) &= \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right)\right) = \\ &= \frac{m}{n}\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n}\frac{p}{q} + \left(-\frac{m}{n}\frac{r}{s}\right) = \\ &= \frac{m}{n}\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\frac{r}{s} = ab - ac. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Proposição 1.4.18 *Se $a, b \in \mathbb{Q}$, são válidas as seguintes afirmações:*

1. $a \cdot 0 = 0$;
2. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$;
3. $(-a)(-b) = ab$.

Demonstração: Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{p}{q}$.

1. Considere o representante $\dfrac{0}{1}$ para classe de equivalência 0. Desse modo,
$$a \cdot 0 = \frac{m}{n} \cdot \frac{0}{1} = \frac{m \cdot 0}{n \cdot 1} = \frac{0}{n} = 0.$$

$\blacksquare$

2. Pelas Proposições (1.3.16) e (1.4.9), temos as seguintes igualdades:
$$(-a)b = \left(-\frac{m}{n}\right)\frac{p}{q} = \frac{(-m)}{n}\frac{p}{q} = \frac{(-m)p}{nq} = \frac{-(mp)}{nq} = -\left(\frac{mp}{nq}\right) = -\left(\frac{m}{n}\frac{p}{q}\right) = -(ab)$$
e ainda,
$$a(-b) = \frac{m}{n}\left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{(m)}{n}\frac{-p}{q} = \frac{m(-p)}{nq} = \frac{-(mp)}{nq} = -\left(\frac{mp}{nq}\right) = -\left(\frac{m}{n}\frac{p}{q}\right) = -(ab)$$

$\blacksquare$

3. Novamente considerando a Proposição (1.3.16), juntamente com o item 1 desta Proposição e a Propriedade (1.4.10),temos as seguintes igualdades:
$$\begin{aligned}(-a)(-b) &= \left(-\frac{m}{n}\right)\left(-\frac{p}{q}\right) = -\frac{m}{n}\left(-\frac{p}{q}\right)\\ &= -\left(-\frac{mp}{nq}\right) = -\left(-\left(\frac{mp}{nq}\right)\right)\\ &= \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n}\frac{p}{q} = ab.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

1.4.5 Divisão em $\mathbb{Q}$

Entende-se por divisão em $\mathbb{Q}$ a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por
$$(a, b) \to a.b^{-1}.$$
Chamamos $a.b^{-1}$ de quociente e denotamos $a : b$.

Proposição 1.4.19 *Se $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $c \neq 0$, então $(a+b) : c = a : c + b : c$.*

Demonstração: Sejam $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q}$ e $c = \dfrac{r}{s}$, onde $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$. Daí, considerando a Propriedade (1.4.17), temos:

$$(a+b) : c = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) : \frac{r}{s} = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) . \frac{s}{r} = \frac{m}{n} . \tfrac{s}{r} + \frac{p}{q} . \tfrac{s}{r} = \frac{m}{n} : \tfrac{r}{s} + \frac{p}{q} : \tfrac{r}{s} = a : c + b : c.$$

■

1.4.6 Relação de Ordem em $\mathbb{Q}$

Observação 1.17 *Sempre podemos considerar um número racional com uma representação em que o denominador seja um inteiro estritamente maior que zero, já que, sendo $a = \dfrac{m}{n}$, temos $\dfrac{-m}{-n} = \dfrac{m}{n}$, uma vez que $(-m)n = (-n)m$.*

Sejam, então, a e b elementos de $\mathbb{Q}$, onde $a = \dfrac{m}{n}$, $b = \dfrac{p}{q}$ e $n, q \in \mathbb{Z}_+^*$. Nessas condições, diz-se que a é *menor que ou igual* a b e indica-se $a \leq b$, quando $mq \leq np$. Aqui é equivalente dizer que $b \geq a$ (b *é maior que ou igual a* a).

Com as mesmas hipóteses, se $mq < np$, diz-se que a é *estritamente menor que* b e indica-se $a < b$ ou, equivalentemente, b é *estritamente maior que* a.

No que segue, mostraremos que $\leq$, acima definida, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$, compatível com a adição e a multiplicação, também já definidas. Para tanto, admitiremos que todos os denominadores que figurem nos enunciados das propriedades sejam estritamente positivos, o que sempre é possível, como já observamos inicialmente.

Proposição 1.4.20 ***(Relação de Ordem total:)*** *Sejam $a = \dfrac{m}{n}, b = \dfrac{p}{q}$ e $c = \dfrac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$, onde $n, q, s \in \mathbb{Z}_+^*$. São válidas as seguintes propriedades:*

1. *$a \leq a, \forall a \in \mathbb{Q}$ (reflexiva);*
2. *$a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (antissimétrica);*
3. *$a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitiva);*
4. *$a \leq b$ ou $b \leq a$ (a relação $\leq$ é total);*
5. *$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{Q}$ ($\leq$ é compatível com a adição);*
6. *$a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$, onde $c \in \mathbb{Q}$, tal que $0 \leq r$ ($\leq$ é compatível com a multiplicação).*

Demonstração:

1. Como $mn = nm$, segue que $mn \leq nm$ e, daí, $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{m}{n}$. Logo, $a \leq a$. ■

2. Por um lado,

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Rightarrow mq \leq np.$$

Por outro,

$$b \leq a \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} \leq \frac{m}{n} \Rightarrow np \leq mq.$$

Como mq e np são inteiros, pelo item 2 da Propriedade (1.3.17), temos $mq = np$, donde $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, ou ainda, $a = b$. ■

3. De $a \leq b$, temos $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Rightarrow mq \leq np$. Assim, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $s \in \mathbb{Z}_+^*$ teremos

$$mqs \leq nps \quad \textbf{(i)}.$$

Já de $b \leq c$, temos $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Rightarrow ps \leq qr$. Assim, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $n \in \mathbb{Z}_+^*$ teremos

$$nps \leq nqr \quad \textbf{(ii)}.$$

Daí, através do item 3 da Propriedade (1.3.17) relativa aos números inteiros, de **(i)** e **(ii)** obtemos

$$mqs \leq nqr.$$

Cancelando q nesta última relação, o que é possível, pois $q > 0$, teremos $ms \leq nr$, o que equivale a $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$, ou ainda, $a \leq c$. ■

4. De acordo com as definições, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} a \leq b \;\; ou \;\; b \leq a \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \;\; ou \;\; \frac{p}{q} \leq \frac{m}{n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad mq \leq np \;\; ou \;\; np \leq mq \end{aligned}$$

o que, pelo item 4 da Propriedade (1.3.17), é verdadeiro, já que np e mq são inteiros. ■

5. Por hipótese $a \leq b$, ou seja, $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Rightarrow mq \leq np$. Considerando os itens 5 e 6 da Propriedade (1.3.17), multiplicamos ambos os membros desta desigualdade por $s^2 > 0$, e obtemos

$$mqs^2 \leq nps^2,$$

e agora, somando $rnqs$ também em ambos os lados teremos

$$mqs^2 + rnqs \leq nps^2 + rnqs \Rightarrow qs(ms + nr) \leq ns(ps + qr)$$

donde
$$\frac{(ms+nr)}{ns} \leq \frac{(ps+qr)}{qs}. \quad (*)$$

Desse modo,
$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{(ms+nr)}{ns} \overset{(*)}{\leq} \frac{(ps+qr)}{qs} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s}.$$

Portanto, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, como gostaríamos de demonstrar. ∎

6. Por hipótese $a \leq b$, ou seja, $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} \Rightarrow mq \leq np$. Considerando o item 6 da Propriedade (1.3.17), multiplicamos ambos os membros desta desigualdade por $rs > 0$, já que $r > 0$ e $s > 0$ e obtemos
$$(mq)(rs) \leq (np)(rs) \Rightarrow (mr)(qs) \leq (ns)(pr)$$

   donde
$$\frac{mr}{ns} \leq \frac{pr}{qs} \quad (*).$$

   Desse modo,
$$\frac{m}{n}.\frac{r}{s} = \frac{mr}{ns} \overset{(*)}{\leq} \frac{pr}{qs} = \frac{p}{q}.\frac{r}{s}.$$

   Portanto, $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$, como gostaríamos de demonstrar. ∎

Teorema 1.4.2 ***(Tricotomia em $\mathbb{Q}$)*** *Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, uma, e apenas uma, das situações seguintes ocorre: ou $a = b$, ou $a < b$ ou $a > b$.*

Demonstração: De fato, sendo $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$, pela Tricotomia em $\mathbb{Z}$, temos que um, e apenas um, dos itens abaixo ocorre:

- $mq = np$, de onde $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow a = b$;
- $mq < np$, de onde $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Rightarrow a < b$;
- $mq > np$, de onde $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \Rightarrow a > b$.

Portanto, ou $a = b$, ou $a < b$ ou $a > b$. ∎

O Próximo Teorema nos dará condições de considerar $\mathbb{Z}$ como parte de $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.4.3 ***(Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$):*** *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ e $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(m) = \frac{m}{1}$. Então f é injetora e valem as seguintes propriedades:*

1. *$f(m+n) = f(m) + f(n)$ (f preserva a adição);*
2. *$f(mn) = f(m)f(n)$ (f preserva a multiplicação);*
3. *Se $m \leq n$, então $f(m) \leq f(n)$. (f preserva a relação de ordem);*

Demonstração: Primeiramente verifiquemos que f é injetora. De fato,

$$f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m.1 = 1.n \Rightarrow m = n,$$

logo, f é injetora. Passemos agora a demonstração dos itens 1,2 e 3.

1. $f(m+n) = \dfrac{m+n}{1} = \dfrac{m.1+1.n}{1.1} = \dfrac{m}{1} + \dfrac{n}{1} = f(m) + f(n)$;

2. $f(mn) = \dfrac{mn}{1} = \dfrac{mn}{1.1} = \dfrac{m}{1}.\dfrac{n}{1} = f(m)f(n)$;

3. Se $m \leq n$, então $f(m) = \dfrac{m}{1} \leq \dfrac{n}{1} = f(n)$.

■

Este Teorema mostra que $Im(f) = \mathbb{Z}$ pode ser vista como uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ na medida em que se identifica cada inteiro m com sua imagem $\dfrac{m}{1}$.

Proposição 1.4.21 *Para $a, b \in \mathbb{Q}$ são válidas as seguintes afirmações:*

1. *Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$;*

2. *Se $a > 0$ e $b > 0$, então $ab > 0$;*

3. *Se $a > 0$ e $b < 0$, então $ab < 0$;*

4. *Se $a < 0$ e $b < 0$, então $ab > 0$;*

5. *Se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$.*

Demonstração: Para o que segue, consideraremos o exposto na Observação (1.17) e adotaremos os denominadores de a e b sempre estritamente positivos.

1. Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{p}{q}$. De $ab = 0$ temos $\dfrac{m}{n}\dfrac{p}{q} = \dfrac{0}{1} \Rightarrow \dfrac{mp}{nq} = \dfrac{0}{1} \Rightarrow mp = 0$. Pelo Anulamento do Produto no conjunto dos números inteiros, Propriedade (1.3.14), temos $m = 0$ ou $p = 0$, o que acarreta $a = \dfrac{0}{n} = 0$ ou $b = \dfrac{0}{q} = 0$, como gostaríamos. ■

2. Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{p}{q}$. De $\dfrac{m}{n} > 0$ e $\dfrac{p}{q} > 0$ obtemos, respectivamente, $m > 0$ e $p > 0$, donde $mp > 0$. Assim, como $n > 0$ e $q > 0$, temos $nq > 0$ e, assim, $\dfrac{mp}{nq} > 0$, ou seja, $ab > 0$. ■

3. Sejam $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{-p}{q}$. De $\dfrac{m}{n} > 0$ e $\dfrac{-p}{q} < 0$ obtemos, respectivamente, $m > 0$ e $-p < 0$, donde $m(-p) < 0$. Assim, como $n > 0$ e $q > 0$, temos $nq > 0$ e, assim, $\dfrac{m(-p)}{nq} < 0$, ou seja, $ab < 0$. ■

4. Sejam $a = \dfrac{-m}{n}$ e $b = \dfrac{-p}{q}$. De $\dfrac{-m}{n} < 0$ e $\dfrac{-p}{q} < 0$ obtemos, respectivamente, $-m < 0$ e $-p < 0$, donde $(-m)(-p) = mp > 0$. Assim, como $n > 0$ e $q > 0$, temos $nq > 0$ e, assim, $\dfrac{(-m)(-p)}{nq} > 0$, ou seja, $ab > 0$. ■

5. Seja $a = \dfrac{m}{n}$.Como $a > 0$, ou seja, $\dfrac{m}{n} > \dfrac{0}{1} \Rightarrow m > 0$. Assim, como $n > 0$, segue que $a^{-1} = \dfrac{b}{a} > 0$. ■

Proposição 1.4.22 *Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Q}$, se $a < b$, então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.*

Demonstração: Como $a < b$, temos $a + a < a + b$ e $a + b < b + b$. Logo,

$$a + a < a + b < b + b. \quad (*)$$

No entanto, pelas propriedades vistas, temos

- $a + a = 1.a + 1.a = (1 + 1).a = 2a$;
- $b + b = 1.b + 1.b = (1 + 1).b = 2b$.

Voltando a equação $(*)$, teremos:

$$a + a < a + b < b + b \Rightarrow 2a < a + b < 2b.$$

Multiplicando cada membro da expressão por $\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}.(2.a) < \frac{1}{2}.(a+b) < \frac{1}{2}.(2.b) \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}.2\right).a < \frac{1}{2}.(a+b) < \left(\frac{1}{2}.2\right).b \\ &\Rightarrow \quad 1.a < \frac{1}{2}.(a+b) < 1.b \\ &\Rightarrow \quad a < \frac{1}{2}.(a+b) < b \end{aligned}$$

Portanto, chamando por c o número racional $\dfrac{1}{2}.(a+b)$, teremos $a < c < b$, como gostaríamos. ■

Lembremo-nos, aqui que a Observação (1.5) nos garante a resolução de equações do tipo

$$a * x = b \Rightarrow x = a' * b,$$

já que, no caso da Proposição acima (1.4.22), temos a operação multiplicação (associativa e dotada de elemento neutro em $\mathbb{Q}$).

Capítulo 2

A Álgebra

2.1 Considerações Históricas

Assim como toda ciência, a Matemática tem seu percurso histórico. O conhecimento de suas origens nos permite entender as ideias que nos levaram ao nível de Matemática em que nos encontramos hoje. Além disso, os aspectos históricos revelam manifestações culturais como os costumes, os valores e as crenças de povos nos mais diversos momentos da História. Nesta seção traremos, brevemente, alguns aspectos históricos da Álgebra.

Acredita-se que o surgimento da Álgebra se deu juntamente com a escrita, no mundo antigo, como uma forma de simbolizar ideias. Ao longo dos tempos, no que diz respeito a "evolução"da Álgebra, tivemos uma grande contribuição de povos como os babilônios, egípcios, gregos, árabes, hindus, entre outros.

Mas, para Roque e Carvalho (2011), antes que possamos falar da História da Álgebra, precisamos caracterizar o que entendemos por "Álgebra"e considerar que os procedimentos associados a este tipo de conhecimento não podem ter como base sua definição atual tida como válida desde o início, ou seja, houve, também, uma evolução conceitual. Deste modo, levando em conta que a palavra "Álgebra"tem um significado muito mais amplo que em outrora, assim como Baumgart (1992), a enfocaremos em duas fases: Álgebra antiga (estudo das equações e métodos de resolvê-las) e Álgebra moderna (estudo de estruturas matemáticas como grupos, anéis e corpos). Além disso, diremos que o desenvolvimento da notação algébrica se deu ao longo de três estágios: o *retórico* (verbal), o *sincopado* (utilização de abreviações de palavras) e o *simbólico*. Este último passando por várias mudanças, até se consolidar da forma como temos atualmente.

Segundo Baumgart (1992), a palavra Álgebra é uma variante de *al-jabr*, uma palavra árabe utilizada no título do livro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe *Mohammed ibn-Musa al-khowarizmi* (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizmi).

No que segue, traremos, em linhas gerais, a Álgebra de alguns dos povos antigos, começando por aquele que foi o seu provável "berço", a Babilônia.

2.1.1 Álgebra na Babilônia

Na Babilônia, ainda por volta de 1700 a.C., por meio de tábuas de argila com notação sexagesimal cuneiforme (de base 60 e numerais em forma de cunhas), concluiu-se que já podia-se resolver problemas com um certo grau de sofisticação.

Figura 1: Plimpton 322.

Fonte: Abdulaziz, 2010, p. 2.

Nesta Figura 1, temos a tábua Plimpton 322, cujo nome é devido a George A. Plimpton, que a comprou no início dos anos vinte e, posteriormente, a doou a Columbia University. De acordo com o exposto por Abdulaziz (2010), a tábua foi encontrado em Tell Senkereh, um sítio arqueológico no sul do Iraque correspondente à antiga cidade da Mesopotâmia de Larsa. Inicialmente, acreditava-se que esta tábua fazia referências a transações comerciais da época, no entanto, em um segundo momento (1945) Neugebauer e Sachs deram ao seu conteúdo uma interpretação relacionada aos ternos pitagóricos. Este fato chamou a atenção de muitos pesquisadores, já que ela foi escrita pelo menos mil anos antes do nascimento de Pitágoras, e fez com que a taboa Plimpton 322 se tornasse o documento mais famoso advindo dos babilônicos.

A estrutura dos enunciados e soluções tinham estilo retórico, ou seja, expresso em palavras, sem notação simbólica. Vejamos um exemplo, já considerando, é claro, nosso sistema de numeração atual.

"Determinar comprimento e largura de um retângulo sabendo que, multiplicando comprimento por largura, obtemos a área igual a 252 e, somando comprimento e largura, obtemos 32."

Denotando-se por x o comprimento e y a largura de um retângulo, em notação moderna, o problema mencionado é equivalente a resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ xy = 252 \end{cases}$$

cuja solução é $x = 14$ e $y = 18$ ou $x = 18$ e $y = 14$.

Os babilônios também já eram capazes de resolver uma variedade surpreendente de equações, incluindo algumas especiais de terceiro e, até mesmo, quarto graus. (BAUMGART, 1992)

2.1.2 Álgebra no Egito

Diferentemente dos babilônicos, os egípcios tinham uma Matemática menos sofisticada, pautada em cálculos e resoluções de problemas.

Além dos escritos em pedras, a matemática egípcia pôde ser estudada através de documentos como o Papiro de Berlim e o Papiro Rhind, que datam de 2000 a.C. e 1650 a.C., respectivamente.

Figura 2: Papiro de Rhind.

Fonte: Pedroso, 2009, p. 19.

Nesta figura 2 podemos observar o mais extenso papiro egípcio de natureza matemática, tendo cerca de $0,30m$ de altura e $5m$ de comprimento, sendo também conhecido como Papiro Ahmes. Nele, assim como nas tábuas babilônicas, o conteúdo aparece em estilo retórico.

No que diz respeito a Álgebra, de acordo com Boyer (1996), os egípcios resolviam ao que hoje equivale as equações lineares do tipo $x + ax = b$ ou $ax + bx = c$, onde a, b e c são valores conhecidos e x é a incógnita, então denominada por “aha”(BAUMGART, 1992). O método de resolução para este tipo de equação é o que hoje conhecemos por “método da falsa posição”, que consiste em uma estimativa inicial para “aha”e a utilização de proporções para se chegar ao resultado correto. Com a finalidade de exemplificar, podemos citar o Problema 24 do Papiro de Rhind:

"Determinar o valor de aha, sabendo que aha mais um sétimo é igual a 19."

Em sua resolução, o Papiro trás uma tentativa inicial de *aha* igual a 7, tendo então $x + \frac{x}{7} = = 7 + \frac{7}{7} = 8 \neq 19$. No entanto, observando que $8(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 19$, multiplica-se 7 por $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, obtendo, assim, $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$. Para se certificar da validade de sua resposta, o Papiro mostrou que, somando $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ ao seu sétimo (que é $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$), obtém-se 19. (BOYER, 1996)

Já no Papiro de Berlim, há indícios de um certo conhecimento no que diz respeito as equações quadráticas (PEDROSO, 2009). Nele podemos encontrar o seguinte problema:

A soma das áreas de dois quadrados é 100 unidades, sendo que a medida de um lado é $\frac{3}{4}$ da medida do outro. Quais são os lados?

Em notação atual, teríamos o equivalente a resolver a equação $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 100$.

Acredita-se que a falta de eficiência do sistema de numeração hieróglifo prejudicou, em muito, o avanço dos egípcios em relação a Álgebra.

2.1.3 Álgebra na Grécia

De acordo com Boyer (1996), ainda dois milênios a. C., com o declínio da cultura das civilizações do Egito e da Mesopotâmia, invasores iletrados abriram caminho até o mar Mediterrâneo estabelecendo, assim, uma nova civilização, a Grécia. Estes primeiros gregos pouco sabiam de Matemática, mas não hesitavam em absorver os conhecimentos de outras culturas. Através de comerciantes, negociadores e estudiosos, eles começaram a ter contato com a matemática desenvolvida até então na Babilônia e no Egito, não só apropriando-se dela, como desenvolvendo-a a níveis ainda mais elevados. Entre as figuras que mais se destacaram nesta época estão Tales de Mileto (624-548 a. C. aproximadamente), Pitágoras de Samos (580-600 a.C. aproximadamente) e Euclides de Alexandria (300 a.C. aproximadamente).

O estudo da Matemática desenvolvida pelos gregos requer cuidados especiais pois, diferentemente dos egípcios e babilônios (cujas fontes, embora desgastadas, sejam originais), seus documentos são cópias de cópias de cópias, e assim sucessivamente. De Aaboe (2013), temos o exemplo de Elementos, obra de Euclides de Alexandria escrita originalmente por volta de 300 a. C., cujos manuscritos mais antigos a que temos acesso na atualidade datam do século X.

No que diz respeito a Álgebra, os gregos se distanciaram da "Álgebra Aritmética" dos babilônios, dando início ao que chamamos de "Álgebra Geométrica", onde não podia haver soma de segmentos com áreas, ou áreas com volume. (BOYER, 1996)

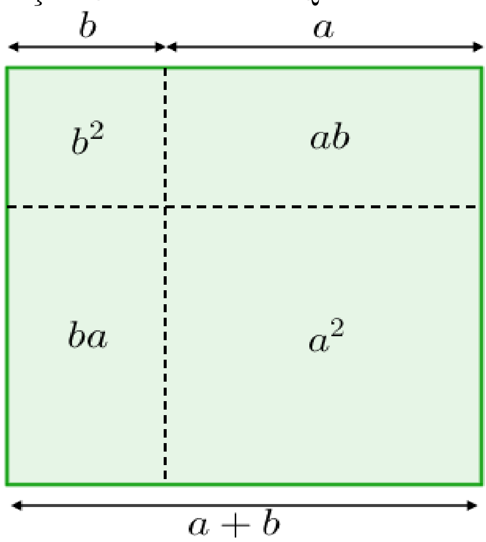
O que hoje nós escrevemos como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era apresentado de maneira geométrica. Euclides, em *Elementos*, livro II, proposição 4, enunciava da seguinte maneira:

"Se uma linha reta é dividia em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha toda é igual aos quadrados sobre as duas partes, junto com duas vezes o retângulo que as partes contêm",

ou seja, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Outro recurso muito utilizado pelos gregos consistia na utilização de diagramas, conforme ilustra a Figura 3, ainda relacionada ao quadrado da soma de dois termos.

Figura 3: Representação Geométrica do Quadrado da soma de dois termos



Fonte: Próprio Autor

Segundo Baumgart (1992), os gregos utilizavam estratégias dos babilônios na maior parte dos problemas, isto porque tinham dificuldades conceituais com frações e números irracionais. A medida da diagonal de um quadrado de lado unitário ($\sqrt{2}$), por exemplo, que não podia ser expressa em termos inteiros ou em razões, causou grande escândalo.

Após algum tempo de estagnação, já em 250 d. C., aproximadamente, Diofanto de Alexandria deu um novo impulso à Álgebra grega, introduzindo o estilo *sincopado* de escrever equações. Sua obra *Arithmetica* ganhou destaque pelo engenhoso tratamento das equações indeterminadas (duas ou mais equações em diversas variáveis com uma infinidade de soluções racionais), hoje denominadas equações diofantinas. Diofanto ostenta o título de maior algebrista (não geométrico) grego.

2.1.4 Álgebra na Índia e na Arábia

De acordo com Boyer (1996), escavações arqueológicas sugerem uma antiga civilização de alta cultura na Índia. No entanto, há uma carência de registros mais antigos e pouco se sabe da matemática hindu antes do século V.

Atribui-se aos hindus uma grande contribuição para a criação de nosso sistema de numeração atual (decimal posicional). No entanto, Boyer (1996) afirma que o surgimento do número zero provavelmente não se deu juntamente com os outros nove numerais hindus, mas teve sua origem no mundo grego, talvez em Alexandria, para depois ser transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já tinha se estabelecido por lá.

No que diz respeito a Álgebra, os hindus resolviam equações quadráticas completando quadrados, e, diferentemente dos gregos, aceitavam números negativos e raízes irracionais. Além disso, sabiam, também, que uma equação quadrática tem duas soluções. Podemos destacar como principais algebristas hindus, Brahmagupta (aproximadamente 628 d.C.) e Bhaskara (aproximadamente 1150 d.C.). O trabalho dos hindus com equações indeterminadas foi superior ao de Diofanto, sendo Brahmagupta o primeiro a dar uma solução geral as equações do tipo $ax + by = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (BAUMGART, 1996). Brahmagupta trabalhou em estilo sincopado onde $5xy + \sqrt{35} - 12$, por exemplo, seria escrito como na Figura 4.

Figura 4: Estilo sincopado

ya	*ka*	5	*bha*	*k*(*a*) 35	*ru*	$\dot{1}2$
x	*y*	5	produto	irracional 35	número "puro"	– 12

Fonte: Baumgart, 1996, p.10

Bhaskara, considerado como o mais importante matemático do século XII, tem em sua obra a culminação de contribuições hindus anteriores a ele. De acordo com Boyer, (1996), ele compilou problemas de Brahmagupta e outros matemáticos, acrescentando observações próprias. Cabe o registro de que, apesar de sua grande contribuição ao desenvolvimento da Matemática, Bhaskara não foi o criador da fórmula resolutiva da equação do segundo grau, que, no Brasil, leva seu nome.

Após a conquista da Índia e de outros territórios, os árabes se apropriaram de escritos científicos, sobretudo gregos e hindus, e Bagdá se tornou o novo centro da Matemática.

A Álgebra árabe ganhou destaque com os trabalhos de al-Khowarizmi, *Al-jabr* e *Liber algorismi*, este primeiro responsável pelo surgimento da palavra Álgebra. Para Boyer (1996), ainda que Diofanto seja, às vezes, chamado de "Pai da Álgebra", este título, na verdade, pertence mais a al-Khowarizmi. Embora sua obra seja considerada como um retrocesso àquela de Diofanto, *Al-jabr* está mais próxima a Álgebra elementar que temos hoje.

A importância de al-Khowarizmi para a Álgebra também se deve ao fato de que, tendo suas obras traduzidas para o latim, ele influenciou profundamente a matemática européia, deixando sua marca na História. Os árabes ainda tiveram outros nomes importantes na Matemática, como é o caso de Omar Khayyam (1100 d.C) que, através da intersecção de cônicas, obteve uma solução para certos tipos de equações cúbicas. (BAUMGART, 1992)

Um dos resultados mais importantes do "período árabe"é, sem dúvida, a determinação das raízes de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, dadas pela fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que, como já mencionado, não é de responsabilidade de Bhaskara.

Apesar de todo avanço percebido, uma séria deficiência da Álgebra árabe, com relação aos tempos modernos, consistia na utilização de notação retórica, sem o uso de símbolos. O moderno simbolismo despontou ao longo dos séculos XVI e XVII através de famosos matemáticos como Cardano (1545), Viète (1591), Descartes (1637), entre outros. De acordo com Baumgart (1992), em contato com os escritos árabes (já traduzidos em latim), o florescimento da Álgebra na Europa se deu, entre outros motivos, pela facilidade de manipular trabalhos numéricos e, também, pela invenção da imprensa, que acelerou a padronização do simbolismo para que houvesse uma melhor comunicação.

Desde os tempos medievais até os dias atuais, a Álgebra evoluiu e ainda evolui muito. No entanto, tais avanços, grandiosos que são, fogem do escopo deste trabalho e, portanto, nos limitaremos ao que já foi exposto até aqui.

2.2 Concepções em Álgebra

A esta altura talvez seja adequado o seguinte questionamento: *"O que é Álgebra?"*. Comumente ouve-se como resposta *"Álgebra é quando se misturam números e letras"* ou ainda, *"Álgebra é equação"*. Fato é que esta é uma pergunta um tanto quanto complexa de se responder. Nos apoiando nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática referentes ao terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, Brasil (1998b), definimos Álgebra como uma área da Matemática que desenvolve a capacidade de abstração e generalização. No entanto, longe da simplicidade que aparenta, tal definição pode ser vista na perspectiva de quatro dimensões/concepções, de acordo com Brasil (1998b, p.116), que serão separadamente abordadas à seguir.

Para o que segue, consideraremos, paralelamente, Usiskin (1995).

2.2.1 Álgebra como Aritmética Generalizada

Nesta dimensão, ampliando as ideias da Aritmética, as letras são utilizadas como modelo de generalização, tanto em propriedades de operações, como em padrões aritméticos. Segundo Usiskin (1995, p.13), as instruções-chave são *traduzir* e *generalizar*, e essas técnicas são muito importantes para a Álgebra e, também, para a aritmética.

Como exemplo, consideremos a seguinte situação hipotética:

"A população P da cidade de Tangamandápio no ano x,
pode ser aproximadamente descrita como

$$P = 100 \cdot x + 5430\text{''}$$

Aqui a letra x se restringe a escolha de um número, no caso, o ano.

É impossível, conclui Usiskin (1995, p.14), estudar Aritmética adequadamente sem lidar implícita ou explicitamente com variáveis.

2.2.2 Álgebra como Equação

Para esta interpretação da Álgebra, as letras são consideradas incógnitas ou variáveis empregadas na resolução de equações. Estes são, certamente, os casos mais comuns vistos durante as aulas de Matemática no Ensino Fundamental. Usiskin (1995, p.14) entende esta dimensão como sendo "Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema", tendo como instruções-chave *simplificar* e *resolver*.

Tais procedimentos consistem, não só na procura de um modelo geral que resolva a situação apresentada, mas, também, na própria resolução da equação encontrada. Por Cohen e Drabkin (apud Boyer, 1996, p.121), como exemplo, consideremos um problema sobre a vida de Diofanto de Alexandria, que data do quinto ou sexto século, de uma coleção chamada "Antologia Grega".

"Deus lhe concebeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento, concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida".

"Traduzindo", obtemos a equação

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{75x + 756}{84} = x,$$

cuja resolução, ainda que por caminhos diferentes, dará $x = 84$, ou seja, Diofanto viveu por oitenta e quatro anos, caso o enigma seja realmente exato.

2.2.3 Álgebra Funcional

Neste caso, diferentemente do anterior, as letras são utilizadas como variáveis para expressar relações e funções no estudo de variação de grandezas. De acordo com Usiskin (1995, p.15), aqui não temos a sensação de estar lidando com incógnitas, já que não estamos resolvendo nada, o que difere da concepção anterior no sentido de que no estudo de relação de grandezas as variáveis, de fato, variam. As instruções-chave são, neste caso, *relacionar* e *gráficos*.

Podemos exemplificar com o seguinte questionamento:

"O que acontece com o valor de $\frac{1}{x}$ *quando x vai aumentando indefinidamente?"*

Pois bem, ainda que pareça fácil perceber que a medida que x cresce, $\frac{1}{x}$ se aproxima de zero, eis que criamos uma grande confusão na cabeça do aluno, uma vez que ele está acostumado a entender letras como incógnitas, ou seja, números a serem descobertos e não como algo que pode variar.

De acordo com Brasil (1998b, p.118), a noção de variável tem sido explorada no Ensino Fundamental e, assim, os estudantes acabam por ter uma visão equivocada no sentido de que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar um valor desconhecido, ou seja, a letra sempre significa uma incógnita.

2.2.4 Álgebra Estrutural

Nesta última dimensão da Álgebra, as letras tem o papel de símbolos abstratos, geralmente utilizados em cálculos algébricos para obtenção de expressões equivalentes. De acordo com Usiskin (1995, p. 18) não se trata de nenhuma função ou relação, isto é, a variável não é um argumento. Não há equação alguma a ser resolvida, ou seja, a variável não atua como uma incógnita. Também não há nenhum modelo aritmético a ser generalizado.

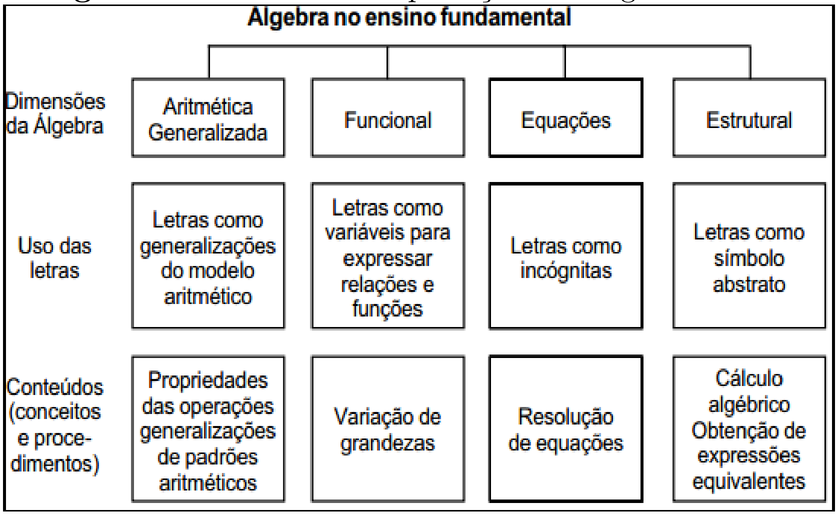
As instruções-chave são, neste caso, *manipular* e *justificar*. Vejamos então o exemplo no qual se enquadra esta dimensão de Álgebra:

$$\textit{Simplifique a expressão } \frac{x^2-14x+49}{x-7}, x \neq 7.$$

Não é difícil enxergar que o numerador é o quadrado de uma diferença e que, simplificando obteremos $x-7$. No entanto, o entrave novamente se dá no sentido de que não chegamos aonde a maioria dos alunos esperam, isto é, não encontramos valor numérico para x.

Resumidamente temos o esquema da figura abaixo:

Figura 5: Diferentes interpretações da Álgebra escolar



Fonte: Brasil, 1998b, p.116.

2.3 O Ensino de Álgebra no Brasil

No Brasil, de acordo com Gomes (2013, p.32), durante o século XIX e o início do século XX, as disciplinas Matemáticas eram separadas e sucessivamente apresentadas na seguinte ordem: Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Esta situação perdurou até 1931, ocasião da Reforma Francisco Campos, onde a Matemática se tornou disciplina única, englobando todas aquelas antes existentes. Neste período, o ensino de Álgebra, especificamente, consistia na abordagem dos seguintes tópicos: cálculo algébrico, razões e proporções, equações e inequações do 1º grau, sistemas de equações, radicais, equações do 2º grau, trinômio do 2º grau, equações redutíveis ao 2º grau, problemas que recaem em equações do 2º grau e sistemas de equações do 2º grau.

Já em 1959, Gomes (2013, p.23) relata a inserção das ideias do Movimento Matemática Moderna no Brasil. Estas ideias davam destaque para as propriedades das operações em lugar da ênfase nas habilidades computacionais, o que favorecia fortemente o ensino de Álgebra. No entanto, não tendo os resultados esperados, o Ensino de Matemática precisava ser novamente modificado. A organização atual da educação no Brasil (inclua-se a Matemática) foi somente estabelecida na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), em 20 de dezembro de 1996.

Em tempos atuais, os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que aspectos algébricos devem ser trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, em constatação de padrões e generalizações, proporcionando o surgimento de um "pensamento algébrico" de modo que, ao chegar nos anos finais, o estudante tenha plena capacidade para obtenção de ferramentas de comando fundamentais no aprendizado da Álgebra. "[...] A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de Álgebra."(BRASIL, 1998b, p.68).

Ainda de acordo com Brasil (1998b), o empenho dos professores em relação ao ensino de Álgebra não garante o aprendizado dos alunos, isto à julgar tanto por pesquisas em Educação Matemática, quanto em um conjunto de avaliações em larga escola, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica - instituído em 1990), por exemplo, onde os itens referentes à Álgebra raramente atingem a marca de 40% de acertos. Isto faz com que os professores dediquem ainda mais tempo no trabalho de conteúdos algébricos, em detrimento de outras áreas importantíssimas como a Geometria, por exemplo. Ou seja, este "fracasso"pode ser responsável pelo desencadeamento de problemas mais gerais no ensino de Matemática.

Estando em 2017, quase vinte anos após a publicação dos PCNs (BRASIL, 1998b), poderíamos pensar que, nestes últimos tempos, possa ter havido alguma melhora com relação ao índice alarmante exposto ainda a pouco. No entanto, através de dados obtidos no Portal Inep, referentes ao SAEB no ano de 2013, constatamos resultados nada animadores.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) foi instituído em 1990 e é composto de três avaliações externas em larga escala, Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (ANRESC/PROVA BRASIL) e Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA). Essas avaliações são elaborados a partir de Matrizes de Referência, que tem como base os PCNs. Os conteúdos associados a competências e habilidades foram subdivididos em partes menores, denominadas "descritores", que especificam o que cada habilidade implica.

Pela brevidade e foco deste trabalho, nos dedicamos ao que concerne à Prova Brasil. Esta avaliação é aplicada nos 5ºs e 9ºs anos do Ensino Fundamental e, a partir dos resultados apontados, são definidas ações voltadas ao aprimoramento da qualidade da educação no país. Por estarmos desenvolvendo este trabalho considerando a Álgebra dos Anos Finais do Ensino Fundamental, trataremos apenas dos resultados obtidos pelos 9ºs anos. Para tanto, na sequência, apresentamos as tabelas 1 e 2, que contemplam a parte da escala de proficiência da Prova Brasil de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, onde se inicia a cobrança da Álgebra. A tabela completa pode ser vista no Anexo B.

Tabela 1: Matrizes de Referência - Nível 4.

Nível 4: 275-300	**Espaço e forma** • Localizar um ponto em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas. • Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada. • Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema. • Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema. • Localizar números inteiros negativos na reta numérica. • Localizar números racionais em sua representação decimal. **Tratamento de informações** • Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.

Fonte: INEP

Tabela 2: Matrizes de Referência (Cont.) - Nível 5.

Nível 5: 300-325	**Espaço e forma** • Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/redução. • Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema. • Determinar o volume através da contagem de blocos. **Números e operações; álgebra e funções** • Associar uma fração com denominador 10 à sua representação decimal. • Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares. • Determinar, em situação-problema, a adição e a multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros. • Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.

Fonte: INEP

À partir do nível 4 podemos perceber a efetiva presença da Álgebra na resolução de expressões algébricas do primeiro grau em situações-problema. Já no nível 5 pode ser observado que o aluno deve ter a capacidade de resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, donde subentende-se que ele consiga resolver equações do primeiro grau.

Já no nível 5, a utilização da Álgebra se torna não facultativa, exigindo-se a associação da situação-problema à sua linguagem algébrica.

No nível 6 (vide Anexo), por sua vez, pode-se notar a Álgebra como uma importante ferramenta para a resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais com constante de proporcionalidade não inteira. Não podemos, é claro, ignorar o fato de que o domínio das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) seja suficiente para resolver este tipo de problema, no entanto, a Álgebra, através da Regra de Três Simples, vem como ferramenta que facilita a resolução. Guardadas as devidas proporções, é como um motorista trocando o pneu furado de seu carro sem um "macaco", até da certo, mas pode ser muito mais complicado.

Ainda no nível 6, expressões algébricas já se tornam um pouco mais complexas, envolvendo agrupamentos, além de potência e raiz, como é o caso do Teorema de Pitágoras.

Já no nível 7 (vide Anexo), no que diz respeito a Álgebra, é exigida associação de situação-problema a um sistema de equações lineares. Além disso, exigi-se a habilidade de resolver problemas envolvendo equações do segundo grau.

A seguir, poderemos observar o gráfico da distribuição dos alunos por nível de proficiência do SAEB, considerando os alunos de 9º ano das Redes Estaduais de todo o país e em escolas urbanas, no ano de 2013.

Gráfico 1: Distribuição dos alunos por nível de proficiência - 2013.

Fonte: INEP

Em destaque no gráfico acima, o nível 4, como observado anteriormente, já exige conteúdos algébricos. Neste ponto, é interessante sublinhar que a inserção da Álgebra pode ter influenciado negativamente nos índices de proficiência apontados no gráfico.

De 71 questões de Matemática disponíveis no Portal Inep, referentes à Prova Brasil no ano de 2013, aplicadas nos anos finais do Ensino Fundamental (9º Ano, especificamente), selecionamos 9 que envolviam conceitos algébricos. Entre elas, os índices de acertos dos alunos das Redes Estaduais de Ensino por todo o Brasil variaram entre 16% e 64%, enquanto a média de acertos não passou de 34%. No que segue, traremos algumas das questões consideradas neste simplório estudo.

Primeiramente trazemos uma questão que avalia a habilidade de se determinar o valor da variável independente de uma função quadrática, dados a lei da função e um valor para a variável dependente, em contexto extramatemático.

Figura 6: Questão da Prova Brasil - Item 197

O custo de uma produção, em milhares de reais, utilizando x máquinas iguais, é dado pela expressão $C(x) = x^2 - x + 10$. Se o custo foi de 52 mil reais, então, o número de máquinas utilizadas na produção foi

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

Fonte: INEP

De acordo com o Portal Inep, o problema da Figura 6 apresenta uma função quadrática, que fornece o custo de uma produção em função do número de máquinas empregadas. O aluno deve calcular o número de máquinas utilizados na produção para um custo $C = 52$ mil reais. Para resolver, duas estratégias poderiam ser adotadas. Primeiramente, igualando $C = 52$, obtém-se a equação

$$x^2 - x + 10 = 52 \Leftrightarrow x^2 - x - 42 = 0,$$

cuja resolução é dada por

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-42)}}{2.1} \Rightarrow \frac{1 \pm 13}{2} \Rightarrow x = -6 \quad ou \quad x = 7.$$

No entanto, é preciso observar que, por se tratar do número de máquinas, x não pode ser negativo. Logo $x = 7$, ou seja, deverão ser utilizadas 7 máquinas.

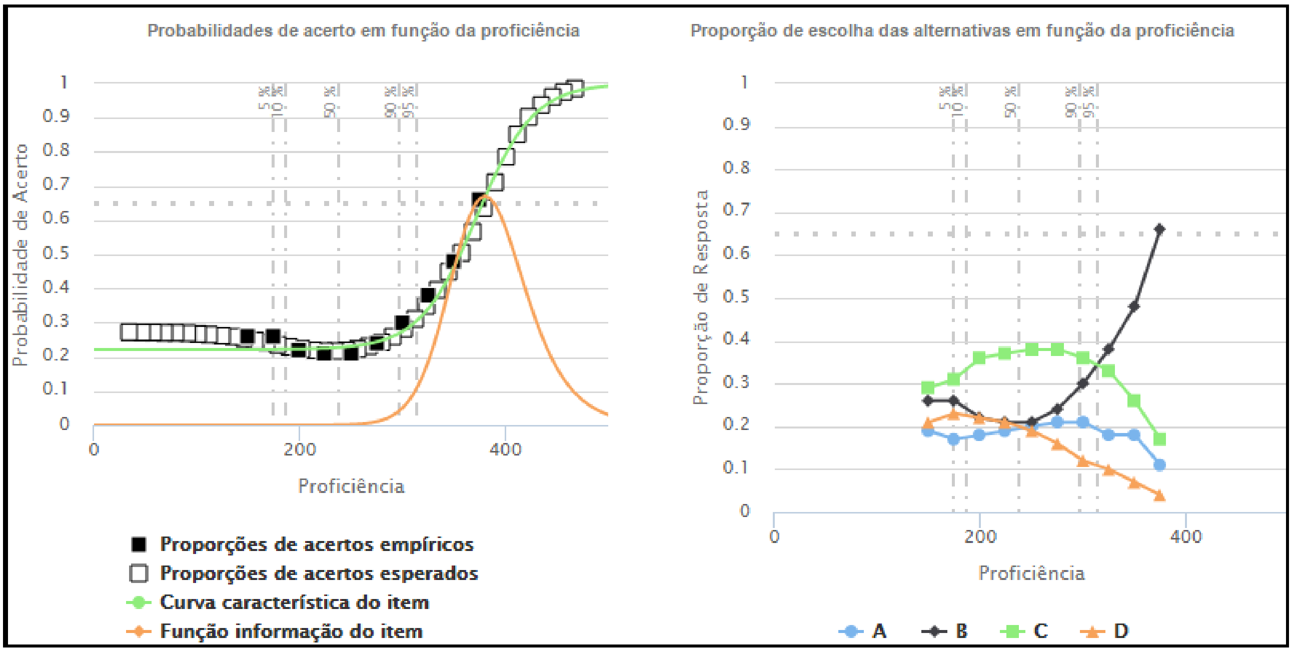
Um outro caminho seria testar os valores dados nas alternativas, substituindo cada um deles na variável x na função, de modo a verificar qual deles fará com que C assuma o valor 52. Vejamos:

- Para $x = 6 \Rightarrow C(6) = 6^2 - 6 + 10 = 40 \neq 52$;
- Para $x = 7 \Rightarrow C(7) = 7^2 - 7 + 10 = 52$;

- Para $x = 8 \Rightarrow C(8) = 8^2 - 8 + 10 = 66 \neq 52$;
- Para $x = 9 \Rightarrow C(9) = 9^2 - 9 + 10 = 82 \neq 52$.

O índice de acertos para esta questão foi de apenas 24%, sendo que a alternativa correta só se tornou a alternativa mais procurada apenas por alunos com proficiência a partir do nível 325 da escala, o que corresponde a menos de 5% dos alunos avaliados, conforme pode ser visto na figura a seguir, que traz os gráficos da Teoria de Resposta ao Item (TRI) para esta questão.

Figura 7: Gráficos de TRI - 2013, item 197.



Fonte: INEP

Traremos, agora, uma questão que avalia a habilidade de lidar com grandezas diretamente proporcionais, em um contexto extramatemático.

Figura 8: Questão da Prova Brasil - Item 583

Um carro faz 15 km com um litro de gasolina. Sabendo-se que a capacidade do tanque desse carro é de 40 litros, e que foi realizada uma viagem de 1800 km, a quantidade de tanques gastos foi de

(A) 2,6

(B) 3,0

(C) 4,5

(D) 6,0

Fonte: INEP

De acordo com o Portal Inep, o enunciado traz como informações o rendimento do automóvel e a capacidade de seu tanque e pede para que se calcule a quantidade de tanques gastos em uma viagem de 1800 km. A resolução ocorre em duas etapas. Primeiramente, calcula-se a quantidade de litros de gasolina gastos para a distância percorrida, o que pode ser feito por meio de proporcionalidade, utilizando, como ferramenta, a regra de três simples como segue:

$$\begin{array}{ccc} \textit{Distancia percorrida} & & \textit{Litros de gasolina} \\ 15\ km & \longrightarrow & 1\ l \\ 1800\ km & \longrightarrow & x\ l \end{array}$$

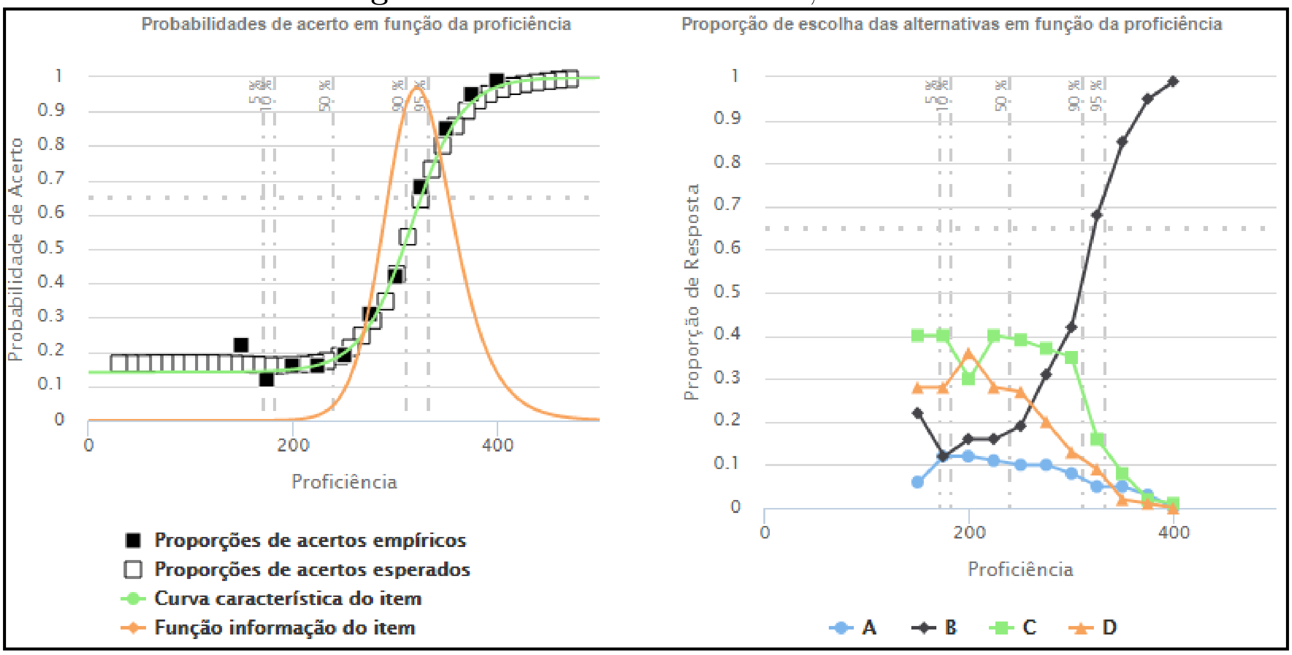
Daí, temos:

$$\frac{15}{1800} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1800}{15} \Leftrightarrow x = 120\ l.$$

Já tendo o número de litros, a segunda parte consiste em calcular a quantidade de tanques necessários, bastando, apenas, dividir 120 por 40, para encontrar o resultado de 3 tanques.

O índice de acertos para esta questão foi de apenas 27%, sendo que a alternativa correta só se tornou a alternativa mais procurada apenas por alunos com proficiência a partir do nível 300 da escala, o que corresponde a pouco mais de 10% dos alunos avaliados, conforme pode ser visto na figura a seguir, que traz os gráficos da Teoria de Resposta ao Item para esta questão.

Figura 9: Gráficos de TRI - 2013, item 583.



Fonte: INEP

Como último exemplo, traremos agora a questão com maior índice de acertos, dentre as 9 analisadas. Esta questão avalia a habilidade de se representar uma situação descrita textualmente por meio de um sistema de equações do primeiro grau.

Figura 10: Questão da Prova Brasil - Item 581.

Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando R$ 7,20.

Danilo comprou 2 canetas e 1 lápis pagando R$ 4,40.

O sistema de equações do 1º grau que melhor representa a situação é

(A) $\begin{cases} 3x + 2y = 7{,}20 \\ 2x + y = 4{,}40 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x - 2y = 7{,}20 \\ 2x - y = 4{,}40 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x + y = 3{,}60 \\ x - y = 2{,}20 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x + y = 7{,}20 \\ x + y = 4{,}40 \end{cases}$

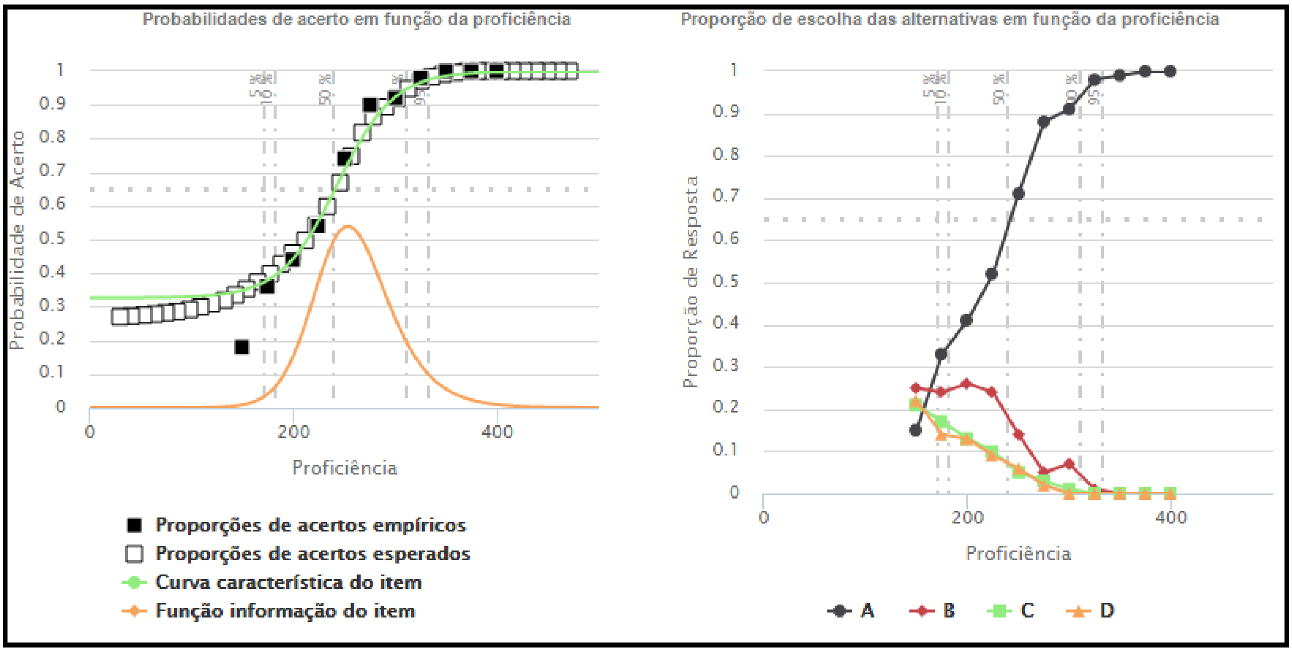
Fonte: INEP

De acordo com o Portal Inep, trazendo como informações as compras feitas por duas pessoas e o total gasto por cada uma delas, o enunciado pede que se represente a situação através de um sistema de equações.

Para responder corretamente, o aluno precisa, primeiramente, observar, a partir das alternativas, que x denota o preço de cada caneta e y o de cada lápis. Em um segundo momento, deve relacionar a compra feita por Lucas à equação $3x+2y = 7,20$, e a compra feita por Danilo à equação $2x + y = 4,40$.

O índice de acertos para esta questão foi de razoáveis 64%, sendo que a alternativa correta só se tornou a alternativa mais procurada apenas por alunos com proficiência a partir do nível 175 da escala, o que corresponde a 95% dos alunos avaliados, conforme pode ser visto na figura a seguir, que traz os gráficos da Teoria de Resposta ao Item para esta questão.

Figura 11: Gráficos de TRI - 2013, item 581.



Fonte: INEP

Já no Ensino de Matemática no Brasil de um modo mais geral, considerando não apenas a Álgebra, mas todas as áreas contempladas no Ensino Básico, tem-se, na comparação com outros países, de acordo com o Programme for International Student Assessment ou, em português, Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), através do Portal Inep, dados alarmantes. Os índices brasileiros figuram entre os piores de todos os países avaliados, ficando para trás de Peru, México, Colômbia e Chile, por exemplo.

2.4 A Pré-Álgebra

Conforme pudemos notar na Seção 2.3 - ainda que as avaliações externas e de larga escala citadas possam não ser suficientemente precisas, refletindo apenas um contexto mais geral em detrimento das especificidades de cada aluno, como nos alertam Bauer, Alavarse e Oliveira (2015) - através dos baixos índices apontados, nos defrontamos com o seguinte questionamento: "*Por que nossos alunos, em linhas gerais, não conseguem desenvolver problemas de cunho algébrico?*" "*Como poderíamos melhorar o processo de ensino-aprendizagem de Álgebra?*" Certamente não há solução mágica. No entanto, com boas intenções, trataremos, no próximo capítulo, de uma sugestão de atividade introdutória à Álgebra (Pré-Álgebra).

A esse respeito, Wu (2009, p.3) considera que existem três razões principais inter-relacionadas:

1. A Aritmética trata da computação de números específicos, enquanto a Álgebra, o que é verdadeiro em geral para todos os números. Passar do específico ao geral é um salto conceitual gigante e os alunos devem ser preparados pelo currículo para esse salto.

2. Os alunos não obtêm, durante a vida escolar, as habilidades fundamentais necessárias ao desenvolvimento da Álgebra.

3. As concepções em Álgebra são trabalhadas incorretamente, quando da sua introdução.

Considerando os itens 1 e 2 e analisando o currículo proposto pelo Estado de São Paulo para os Anos Finais do Ensino Fundamental, conforme podemos ver nos anexos deste trabalho e cujo resumo consta na Tabela 3, temos a introdução à Álgebra apenas no último bimestre do Sétimo Ano. Anteriormente a isto, o pensamento algébrico não é nem se quer citado, o que nos leva a crer que, até o terceiro bimestre do Sétimo Ano, o estudante não tenha ideia do que seja Álgebra.

Tabela 3: Quadro de conteúdos do Ensino Fundamental - Anos Finais.

	5ª série/6º ano	6ª série/7º ano	7ª série/8º ano	8ª série/9º ano
Volume 1	**NÚMEROS NATURAIS** – Múltiplos e divisores. – Números primos. – Operações básicas. – Introdução às potências. **FRAÇÕES** – Representação. – Comparação e ordenação. – Operações. **NÚMEROS DECIMAIS** – Representação. – Transformação em fração decimal. – Operações. **SISTEMAS DE MEDIDA** – Comprimento, massa e capacidade. – Sistema métrico decimal.	**NÚMEROS NATURAIS** – Sistemas de numeração na Antiguidade. – O sistema posicional decimal. **NÚMEROS INTEIROS** – Representação. – Operações. **NÚMEROS RACIONAIS** – Representação fracionária e decimal. – Operações com decimais e frações. **GEOMETRIA/MEDIDAS** – Ângulos. – Polígonos. – Circunferência. – Simetrias. – Construções geométricas. – Poliedros.	**NÚMEROS RACIONAIS** – Transformação de decimais finitos em fração. – Dízimas periódicas e fração geratriz. **POTENCIAÇÃO** – Propriedades para expoentes inteiros. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – A linguagem das potências. **ÁLGEBRA** – Equivalências e transformações de expressões algébricas. – Produtos notáveis. – Fatoração algébrica.	**NÚMEROS REAIS** – Conjuntos numéricos. – Números irracionais. – Potenciação e radiciação em $\mathbb{R}$. – Notação científica. **ÁLGEBRA** – Equações de 2º grau: resolução e problemas. – Noções básicas sobre função; a ideia de interdependência. – Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
Volume 2	**GEOMETRIA/MEDIDAS** – Formas planas e espaciais. – Noção de perímetro e área de figuras planas. – Cálculo de área por composição e decomposição. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – Leitura e construção de gráficos e tabelas. – Média aritmética. – Problemas de contagem.	**NÚMEROS/ PROPORCIONALIDADE** – Proporcionalidade direta e inversa. – Razões, proporções, porcentagem. – Razões constantes na geometria: π. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – Gráficos de setores. – Noções de probabilidade. **ÁLGEBRA** – Uso de letras para representar um valor desconhecido. – Conceito de equação. – Resolução de equações. – Equações e problemas.	**ÁLGEBRA/EQUAÇÕES** – Equações de 1º grau. – Sistemas de equações e resolução de problemas. – Inequações de 1º grau. – Sistemas de coordenadas (plano cartesiano). **GEOMETRIA/MEDIDAS** – Teorema de Tales e Pitágoras: apresentação e aplicações. – Área de polígonos. – Volume do prisma.	**GEOMETRIA/MEDIDAS** – Proporcionalidade, noção de semelhança. – Relações métricas entre triângulos retângulos. – Razões trigonométricas. – O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. – Volume e área do cilindro. **TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** – Contagem indireta e probabilidade.

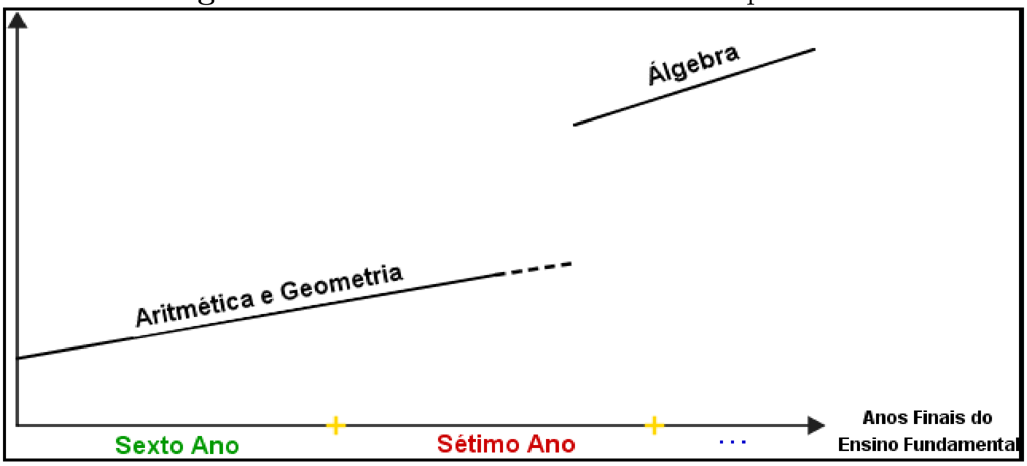
Fonte: São Paulo, 2009.

Refletindo agora acerca da terceira razão levantada por Wu (2009) para o baixo desempenho de nossos alunos em Álgebra, podemos citar pequenos deslizes como a confusão conceitual entre incógnita e variável, por exemplo, quando o professor diz que "O x é sempre aquilo que eu quero descobrir."

Ora, mas seria possível tratar da Álgebra antes mesmo dela efetivamente definida? Sim, existem muitas oportunidade para a introdução de abstrações, no entanto, a estrutura curricular aqui discutida preconiza atividades práticas, desenhos e analogias, em detrimento do pensamento abstrato. Vejamos um simples exemplo de como isso ocorre: No Sexto Ano do Ensino Fundamental, primeiro bimestre, quando são trabalhadas as operações básicas no conjunto dos números naturais, simplesmente ignoram-se propriedades como a Comutatividade da Adição, momento em que, sutilmente, se poderia introduzir sentenças como: *"Sendo a e b dois números naturais, então $a + b = b + a$"*, onde o aluno já se vê diante da Álgebra.

Observamos, ainda, uma Álgebra introduzida abruptamente e sem efetiva conexão com aquilo que foi visto até então. Há uma sensação de descontinuidade, como se a Álgebra não tivesse qualquer relação com a Aritmética. Seguindo as ideias de Wu (2009) e trazendo para a realidade do Estado de São Paulo, poderíamos representar essa situação como na Figura 12 à seguir.

Figura 12: Descontinuidade no currículo paulista.

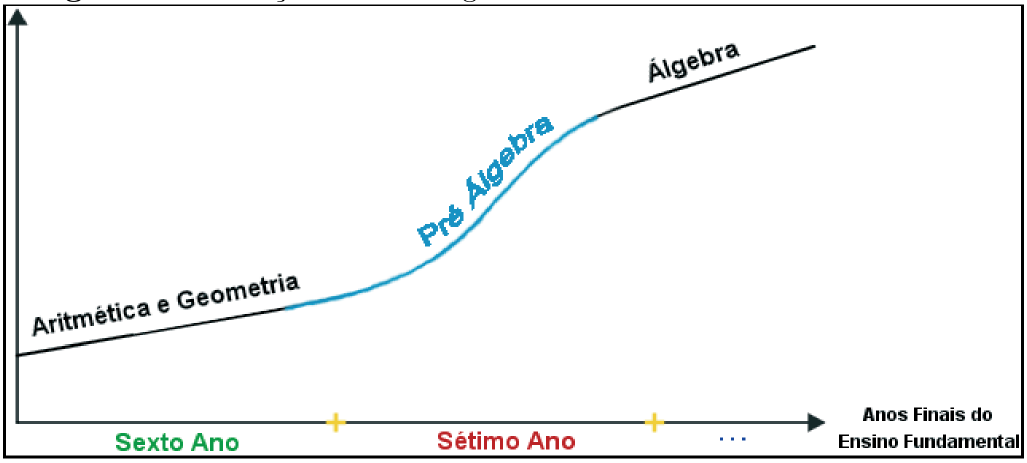


Fonte: Próprio Autor

De acordo com Lins e Gimenez (1997), poderíamos levantar a hipótese de que ao final do Sétimo Ano os alunos ainda não tenham o nível intelectual requerido para "encarar"a Álgebra e, assim, a única solução para este problema seria postergá-la. No entanto, ainda de acordo com os autores, várias experiências desse tipo foram realizadas em países como a Inglaterra, por exemplo, sendo os resultados nada positivos.

Ao invés disso, defendemos uma gradual elevação do pensamento algébrico que dê ao aluno condições de uma transição mais suave entre a Aritmética e a Álgebra. Este movimento crescente de algebrização não deve se restringir apenas ao Sétimo ano, mas ser trabalhado desde o Sexto, concomitantemente com a Aritmética e a Álgebra.

Figura 13: Inserção da Pré-Álgebra no desenvolvimento do currículo.

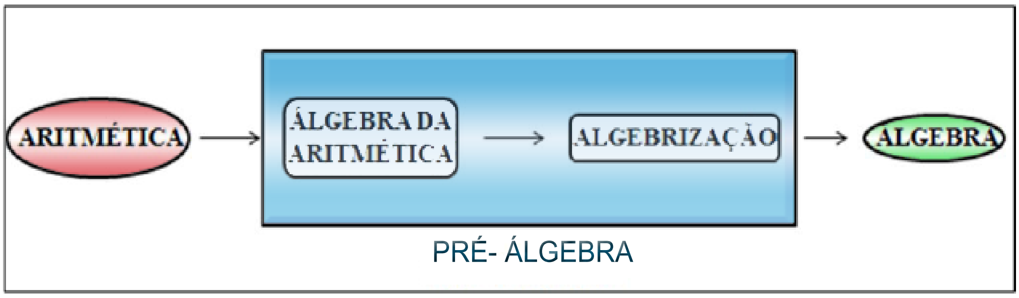


Fonte: Próprio Autor

A Pré-Álgebra caracteriza-se pelo processo de ensino na transição entre a Aritmética e a Álgebra, onde é dada uma sequência ao pensamento aritmético, culminando no pensamento algébrico. O aluno deve perceber, nesta etapa, uma ligação da Álgebra com os conceitos aritméticos trabalhados anteriormente, dando-lhes um sentido de sutil evolução, evitando o salto conceitual citado por Wu (2009).

Queiroz (2014, p. 28) ilustra essa transição de modo a considerar que a Pré-Álgebra é uma ponte capaz de unir a descontinuidade existente entre a Aritmética e a Álgebra, conforme se vê na Figura 14.

Figura 14: A Pré-Álgebra como ponte, interligando Aritmética e Álgebra.



Fonte: Queiroz, 2014, p.28.

Ainda de acordo com Queiroz (2014, p.28), esta "quebra"da Pré-Álgebra ainda em dois momentos se justifica do seguinte modo: primeiramente, a Aritmética deve passar a desenvolver a Álgebra à partir da própria Aritmética, isto é, nesta fase o aluno deverá ter a oportunidade de consolidar seu conhecimento quanto as operações aritméticas e suas propriedades, de modo que consiga compreender as vantagens do raciocínio matemático na resolução de problemas, sendo eles abstratos ou contextuais. O segundo momento, denominado "algebrização", consiste na generalização de propriedades e regularidades através de expressões algébricas, onde o aluno é capaz de compreender a estrutura dos conjuntos numéricos de uma forma mais ampla.

Um exemplo de como se dá a relação entre esses dois momentos pode ser o fato de que a soma de dois números pares sempre resulta em um número par. Ao somar dois números pares por várias vezes, o aluno está desenvolvendo a Aritmética. Percebendo que o resultado é sempre um número par, já se desenvolve a Álgebra da Aritmética. Finalmente, ao generalizar a soma de dois números pares, vivencia-se a Algebrização.

Entendemos por essencial para a obtenção de resultados positivos, que a introdução à Álgebra seja tratada de forma sutil, passando pela Pré-Álgebra de modo que a transição, partindo da Aritmética, não se dê em um momento único, mas que seja resultado de um processo mais acessível ao aluno. Neste sentido, motivados pela discussão realizada até este ponto, vamos nos encaminhando ao último capítulo de nosso trabalho, onde nos defrontamos com o desafio de uma experiência de Pré-Álgebra no Sexto Ano do Ensino Fundamental.

Capítulo 3

Pré-Álgebra: uma proposta para o 6º ano do Ensino Fundamental

Neste capítulo discutimos, primeiramente, a justificativa e o devido amparo metodológico para o desenvolvimento de nossa investigação. A partir disso, propomos uma atividade enfocando a Pré-Álgebra no 6º Ano do Ensino Fundamental, isto é, antecipamos o tratamento da Álgebra seguindo as ideias de Lins e Gimenez (1997), conforme discutido em nosso segundo capítulo, na perspectiva da Modelagem Matemática.

Além da estreita relação com o capítulo 2, onde discutimos acerca da Álgebra em si - considerando aspectos históricos, diferentes concepções, resultados apresentados em avaliações de larga escala, currículo adotado pelo Estado de São Paulo e Pré-Algebra como transição entre a Aritmética e a Álgebra - nossa atividade tem como base, no que diz respeito à Matemática, conceitos apresentados no capítulo 1 como, por exemplo, contagem/medidas no conjunto dos números naturais, diferença e relação de ordem no conjunto dos números racionais.

Concluímos fazendo um relato dos dados aferidos durante a pesquisa, destacando pontos positivos e negativos em nosso relato de experiência.

3.1 Amparo Metodológico

Neste último capítulo, embora mencionemos superficialmente os dados numéricos obtidos, estamos mais interessados em interpretar e compreender o comportamento de um grupo de alunos diante do desenvolvimento da Álgebra em um momento anterior ao sugerido pelo, já mencionado, Currículo do Estado de São Paulo. Por assim ser, entendemos que nossa investigação se enquadra no paradigma qualitativo.

Nossa experiência na docência nos anos Finais do Ensino Fundamental, garante a "imersão do pesquisador no contexto a ser estudado"para a definição de algumas questões iniciais e os procedimentos para a investigação dessas questões, característica marcante em pesquisas de cunho qualitativo, conforme Alves-Mazzotti (2001, p.148). Assim, consideramos que nossa pesquisa se dá em uma amostragem acessível e conveniente e, por isso, destituída de qualquer rigor estatístico. Sublinhamos que a inquietação que move esta pesquisa se dá justamente pelas nossas experiências vivenciadas no interior de várias escolas.

A estrutura curricular abordada no capítulo anterior, na qual, ao nosso entender, há uma abrupta mudança, um descompasso, quando da introdução a Álgebra com relação aos conteúdos previamente estudados, nos revela uma "lacuna", a qual, através da inserção de atividades Pré-Algebra, dedicamos esta pesquisa, o que, de acordo com Alves-Mazzotti (2001, p.151), está em consonância com a metodologia de pesquisa qualitativa, uma vez que esta geralmente se propõe a preencher lacunas no conhecimento, sendo definida como descritiva ou exploratória. Ainda de acordo com a autora, tais lacunas "fazem referência à compreensão de processos que ocorrem em uma dada instituição", em nosso caso, a escola.

De acordo com Alves-Mazzotti (2001, p.131), existem três características essenciais aos estudos qualitativos: A visão holística, que parte do princípio de que "a compreensão do significado de um comportamento ou evento só é possível em função da compreensão das inter-relações que emergem de um dado contexto". A abordagem indutiva, na qual o pesquisador "parte de observações mais livres, deixando que dimensões e categorias de interesse emerjam progressivamente durante os processos de coleta e análise de dados". Por fim, a investigação naturalística, em que a "intervenção do pesquisador no contexto observado é reduzida ao mínimo". Nesse sentido, nosso enfoque durante a pesquisa se dará na abordagem indutiva em todo o processo, onde os alunos pesquisados partem de um contexto extra-matemático e são induzidos a chegar no conteúdo previsto através da Modelagem Matemática, metodologia de ensino de Matemática que discutiremos melhor na próxima seção.

Para a obtenção de dados, utilizaremos técnicas como a observação participante e aplicação de questionário. Dedicamos os próximos parágrafos a uma breve explanação de cada uma delas.

A observação participante consiste na participação e envolvimento real do pesquisador com determinada situação. Esta é considerada a técnica na qual os dados de um grupo são obtidos a partir de seu próprio interior, como pondera Gil (2008, p.103). O autor ainda menciona algumas das vantagens deste tipo de observação, sendo elas:

- Facilita e agiliza o acesso a dados sobre as situações habituais dos indivíduos pesquisados;
- Dá acesso a dados considerados de domínio privado;
- Possibilita a captação de palavras que esclarecem os comportamentos observados.

Esta técnica é amplamente utilizada durante nossa pesquisa, já que o papel de professor nos exige a interação com os alunos investigados. O registro é feito em caderno de notas durante o próprio desenvolvimento das atividades inseridas nesta pesquisa.

Já o questionário, por sua vez, é definido como a técnica de investigação na qual "um conjunto de questões são submetidas a pessoas com o propósito de se obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc."(GIL, 2008, p.121). Ainda de acordo com o autor, a utilização de questionário, apesar de impedir o auxílio ao informante quando este não entende o que está sendo questionado, apresenta algumas vantagens em relação a outras técnicas, tais como a não exposição à influência das opiniões do pesquisador e, também, a garantia do anonimato das respostas, dando segurança ao indivíduo pesquisado. Sublinhamos que, por nos enquadrarmos no paradigma qualitativo, optamos por um questionário breve e com questões abertas, isto é, solicitamos que os alunos pesquisados formulassem suas próprias respostas.

Os dados obtidos, bem como reflexões acerca da atividade desenvolvida, constam no relato da pesquisa, instrumento de comunicação que fecha este nosso capítulo. De acordo com Gil (2008, p.181) "o relatório é absolutamente indispensável, posto que nenhum resultado obtido na pesquisa tem valor se não puder ser comunicado aos outros".

Até agora nos esforçamos no sentido de reunir todo o aporte teórico para que pudéssemos fazer nossa experiência, já que, para melhor interpretar os resultados obtidos, o pesquisador precisa ir além da leitura dos dados, integrando-os num universo mais amplo de modo que tenham algum sentido, conforme Gil (2008, p.178). Assim, nos encaminhamos para a próxima seção, onde se encontra a atividade proposta.

3.2 Atividade proposta

Nossa pesquisa tem, entre seus objetivos específicos, a elaboração de uma atividade de Pré-Álgebra para o 6º Ano do Ensino Fundamental, na perspectiva da Modelagem Matemática. O propósito desta atividade é investigar os pontos positivos e negativos de um "adiantamento"do currículo proposto pelo Estado de São Paulo, no que diz respeito a introdução da Álgebra. Entre as concepções de Álgebra abordadas no capítulo 2 deste trabalho, consideramos que nossa atividade se enquadra em Álgebra como Aritmética generalizada.

De modo a situar teoricamente nossa atividade, fazemos, inicialmente, algumas considerações acerca da Modelagem Matemática.

3.2.1 Metodologia de Ensino: Modelagem Matemática

Primeiramente sublinhamos que a adoção da Modelagem Matemática como metodologia para o ensino de Matemática, especificamente da atividade proposta nessa pesquisa, se deu mediante a experiência adquirida em anos de atuação na Rede Pública de Ensino, onde concluímos que, em alguns momentos, é preciso e pertinente ir além de uma mera sequência de teoria, exemplos e exercícios. Não vamos teorizar sobre esta questão, mas apenas apresentar a metodologia escolhida para o desenvolvimento de nossa atividade.

Antes das devidas considerações, as quais fazemos mais adiante, precisamos saber com clareza sobre aquilo que consideramos por Modelagem Matemática e, assim como Barbosa (2003, p. 1), a definimos genericamente como "a aplicação de Matemática em outras áreas do conhecimento".

A primeira consideração a ser feita é que Modelagem Matemática parte de tema do próprio interesse dos alunos, ou seja, nessa perspectiva o professor perde aquela triste sensação de ser um vendedor oferecendo um produto que ninguém quer comprar. O despertar do interesse do aluno, bem como a ativa participação na construção dos conceitos trabalhados são pontos fortes favorecidos por essa metodologia.

A segunda consiste na estrutura, conforme Dionísio Burak propõe em seu trabalho **"Modelagem Matemática e a Sala de Aula"**, para o desenvolvimento de atividades nessa perspectiva, que é dividida em cinco etapas, sendo elas:

1. Escolha do Tema;

2. Pesquisa exploratória;

3. Levantamento de Problemas;

4. Resolução dos problemas propostos propiciando a inclusão da Matemática relacionada;

5. Análise crítica das soluções.

Na etapa 1 o tema é proposto direta ou indiretamente pelos alunos, isto é, ou os próprios alunos sugerem um tema, ou o professor, através de uma investigação prévia, define um tema que seja de interesse dos alunos, tornando o ensino mais significativo e mais dinâmico. A pesquisa exploratória, etapa 2, consiste na "ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece"(BURAK, 2011, p.4). Além disso, ao trabalhar determinado tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos envolvidos nessa realidade e, naturalmente, já nos situamos na terceira etapa de todo o processo, onde são levantados os problemas relacionados ao tema escolhido.

Os problemas que surgem ao decorrer da pesquisa exploratória (etapa 2), apresentam algumas características que normalmente não são vistas em livros textos mais comuns no ensino de Matemática, conforme considera Burak (2011):

- São elaborados partindo dos dados obtidos na pesquisa de campo;

- São, geralmente, genéricos;

- Estimulam a pesquisa e a organização dos dados;

- Favorecem, em contexto amplo, a compreensão de situações.

Já na etapa 4, os problemas elaborados determinam os conteúdos matemáticos a serem abordados, dando sentido e significado a Matemática envolvida no contexto do tema escolhido. "Na Modelagem Matemática esse momento é fundamentalmente rico, pois favorece o trabalho com os conteúdos matemáticos que assim ganham significado"(BURAK, 2011, p.6). E o autor ainda acrescenta que nessa etapa temos um momento privilegiado e rico para a formação do pensar matemático, pois se oportuniza a construção de modelos matemáticos para a resolução de problemas.

Finalmente, a 5ª etapa consiste na validação da resolução apontada na etapa anterior. A validação permite o uso do modelo adotado para resolução de situações análogas.

Através de estudos na literatura existente e também de experiências vivenciadas, Barbosa (2003) sistematiza a classificação da Modelagem Matemática em três casos de acordo com a extensão e as atribuições dadas aos professores e alunos, e que demonstram certa flexibilidade para a inserção da Modelagem Matemática no contexto escolar. Cada um desses casos, considerados não prescritivos, já que representam apenas a idealização de um conjunto de práticas constatadas, é brevemente descrito a seguir.

No caso 1, o professor apresenta tanto o problema inicial, quanto os dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos, acompanhados pelo professor, a investigação desses dados e a resolução do problema. Nesta possibilidade para a aplicação da Modelagem Matemática a atividade se torna mais rápida, já que não demanda a coleta de novos dados. No caso 2, por sua vez, ao professor cabe a tarefa de formular o problema inicial e, aos alunos, a coleta de dados, a investigação e, também, a resolução do problema. Nesta possibilidade, a atividade se torna um pouco mais extensa (em relação ao caso 1), já que os alunos precisam coletar os dados fora da sala de aula. Já no caso 3, a escolha do tema "não matemático" também é aberta aos alunos.

Partindo do caso 1 até o caso 3, percebemos que a responsabilidade do professor é cada vez mais compartilhada com os alunos. Barbosa (2003) resume os casos apresentados de acordo com a Tabela 9.

Tabela 4: Comparativo dos casos de Modelagem.

-	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação problema	Professor	Professor	Professor/Aluno
Simplificação	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Resolução	Professor/Aluno	Professor/Aluno	Professor/Aluno

Fonte: Barbosa, 2003.

Ao decorrer de nossa próxima subseção ficará claro que a atividade proposta nessa pesquisa se insere no caso 2 apontado por Barbosa (2003).

3.2.2 Descrição

Nesta subseção, descrevemos, a luz da Modelagem Matemática, uma proposta de atividade de Pré-Álgebra para o Sexto Ano do Ensino Fundamental realizada em uma Escola Pública

Municipal, a título de pesquisa de campo como parte integrante deste nosso trabalho. Para todo desenvolvimento desta atividade na perspectiva da Modelagem, consideramos os passos apontados por Burak (2011). Esta descrição revela apenas uma ideia inicial daquilo que se deseja, ou seja, descrevemos aqui os encaminhamentos previstos para o desenvolvimento da atividade proposta. O devido relato do que de fato ocorreu durante as aulas se da na terceira seção deste mesmo capítulo.

1. Escolha do Tema: Determinamos como tema, a partir de observações dos interesses dos alunos participantes dessa atividade, a padronização da beleza imposta pela sociedade. Sublinhamos que nossa escolha quanto a temática a ser desenvolvida foi facilitada pelo fato de que, enquanto professores de Matemática, já estamos inseridos no convívio dos alunos e, desse modo, sabemos, ainda que superficialmente, de seus interesses. A arbitrariedade na escolha do referido tema nos enquadra no caso 2 indicado por Barbosa (2003), onde o autor considera que o professor é o único responsável por esta etapa. Destacamos, ainda acerca do tema, que, através dele, além de abordarmos a própria Matemática pertinente, pretendemos fecundar em nossos alunos um sentimento de respeito às diferenças.

2. Pesquisa Exploratória: Nesta etapa, os alunos são convidados a fazer pesquisas acerca do tema determinado, utilizando, como recurso, a internet disponibilizada pela escola no laboratório de informática. Estimamos que o desenvolvimento desta etapa terá a duração de 100 minutos, o que equivale a duas aulas.

3. Levantamento de problemas: Considerando os dados levantados na etapa anterior, promovemos uma discussão acerca do tema já mencionado. Nesta etapa lançamos mão da Observação Participante na qual, ainda que sejamos responsáveis pela mediação da situação de aprendizagem, os alunos tem o protagonismo durante todo seu desenvolvimento, cujo tempo estimamos em 50 minutos. Esperamos que neste momento de discussão possam surgir, entre os próprios alunos, questões relacionadas ao respeito às diferenças e, com uma expectativa bastante otimista, ao padrão de beleza considerado na Matemática (Número de outro/Razão Áurea), como, por exemplo, "Por que a sociedade nos impõe um padrão de beleza?", ou então, "Há alguma relação entre beleza e Matemática?".

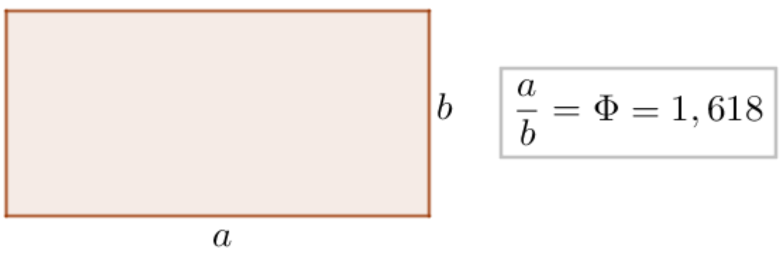
4. Resolução dos problemas propostos propiciando a inclusão da Matemática relacionada: Caso já tenhamos discutido o padrão de beleza na Matemática, partiremos para o estudo da Razão Áurea, onde conseguimos relacionar o conteúdo de fração (proposto pelo currículo adotado pela escola onde a pesquisa de campo foi realizada) com a Álgebra, caracterizando uma atividade de Pré-Álgebra, cujo desenvolvimento é um dos objetivos específicos deste trabalho. Caso contrário, dedicaremos um momento inicial a uma nova pesquisa, agora já direcionada à Matemática para, apenas depois, procedermos com o desenvolvimento tal como já descrevemos. Idealizamos que, ao se depararem com o questionamento "Existe algum padrão de beleza estabelecido pela Matemática?", os alunos

consigam responder "Sim, a Razão Áurea". É importante ressaltar, à esta altura, que os conceitos de razão e proporcionalidade atrelados a Razão Áurea não serão amplamente discutidos, mas nos restringiremos, apenas, a aplicabilidade da fórmula dada à título de verificação do enquadramento de determinado objeto ao padrão de beleza estabelecido.

5. Análise crítica das soluções: Consideramos como solução para o problema matemático proposto na etapa anterior, o conhecimento acerca da existência da Razão Áurea. A análise critica se dará na forma de experimentação no próprio ambiente escolar. Os alunos serão desafiados a verificar a existência de objetos que se enquadram no padrão de beleza estabelecido. Para o desenvolvimento desta etapa, pressupomos que os alunos saberão relacionar Fração e Álgebra através da expressão $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi = 1,6180339...$. Os cálculos poderão ser feitos com o auxílio de calculadora e, além disso, à título de simplicidade, serão consideradas apenas as três primeiras "casas decimais"para comparação dos resultados obtidos.

   Nos restringiremos à verificação da Razão Áurea em objetos retangulares, conforme a Figura 15, onde denominamos "a" o maior lado e "b", o menor. Salientamos que os valores atribuídos a "a" e "b" ficarão restritos ao conjunto nos números naturais ($\mathbb{N}$), de modo que sejam determinados de acordo com a relação de ordem desenvolvida ainda em nosso primeiro capítulo. Assim, faz-se necessária uma adaptação, de modo a enquadrar o Número de Ouro $\phi = 1,6180339...$ ao conjunto dos números racionais, uma vez que a razão $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, quando $a, b \in \mathbb{N}$. Além disso, levamos em consideração que o conjunto dos números irracionais ainda não foi introduzido na turma em que realizaremos a atividade. Para tanto, definiremos que um retângulo tem as proporções de ouro quando $\frac{a}{b} = \phi = 1,618$, como podemos observar na Figura 15.

Figura 15: Razão Áurea adaptada.



Fonte: Próprio Autor

Considerando que estamos ampliando as ideias da Aritmética, utilizando as letras como modelo de generalização em operações aritméticas, entre as concepções de Álgebra abordadas no capítulo 2 deste trabalho, nossa atividade se enquadra em Álgebra como Aritmética generalizada.

3.2.3 Relato da Atividade

Apresentamos aqui o relato e as considerações acerca do desenvolvimento da atividade cuja estrutura está posta na seção imediatamente anterior a esta.

Esta investigação foi realizada no mês de setembro do ano de 2017 em uma Escola Municipal de Ensino Fundamental, situada no interior do Estado de São Paulo. Participaram da atividade proposta 28 alunos de uma turma de Sexto Ano. Sublinhamos, neste ponto, que todo o processo de desenvolvimento da atividade foi autorizado e acompanhado pelas autoridades competentes e, também pelos pais dos alunos participantes, como pode ser visto no "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido", presente no Anexo C deste trabalho.

De modo a assegurar o anonimato dos alunos participantes, utilizaremos codinomes como "Mariazinha", "Joãozinho"e assim por diante.

No primeiro momento de sua realização, propusemos uma discussão preliminar acerca dos padrões de beleza estipulados pela sociedade. O debate se deu com os alunos dispostos em círculo, de modo a facilitar a interação entre todos na sala. Iniciamos com o seguinte questionamento:

"Vocês já ouviram falar em padrão de beleza?"

Grande parte dos presentes responderam um imediato e sonoro "*não*". No entanto, Mariazinha logo se adiantou com a seguinte fala:

"Eu já ouvi. É tipo assim, a pessoa magra é mais bonita do que a gorda, mas pra mim isso não tem nada a ver porque tem pessoas gordinhas que são bonitas também."

Joãozinho, bem humorado, complementou:

"Eu sou gordinho e lindo!"

Principiou-se aí uma grande discussão acerca das preferências de cada um. Porém, percebendo que tínhamos perdido o foco com relação à aula, já com aproximadamente 15 minutos de debate, optamos pelo prosseguimento da atividade, conforme planejado na etapa 2, onde os alunos foram conduzidos ao laboratório de informática da escola para que pudessem pesquisar acerca do tema já previamente debatido. Devido a limitação no número de computadores disponíveis, os alunos foram organizados em duplas de modo que todos pudessem participar da aula. Todos receberam um papel em branco para que pudessem fazer as anotações que achassem importantes. Foram empregados aproximadamente 75 minutos no desenvolvimento da pesquisa *on-line*.

Nesta segunda etapa alguns fatores positivos e negativos nos chamaram bastante atenção. Destacamos, entre eles, a facilidade dos alunos na utilização dos computadores, pois absolutamente nenhum deles fez qualquer pergunta relacionada ao seu funcionamento ou ao modo de proceder com a pesquisa. No entanto, houve muita dificuldade no controle do conteúdo acessado pelos alunos, pois alguns foram flagrados, durante o desenvolvimento da aula, em sites de vídeos e jogos.

Figura 16: Alunos no Laboratório de Informática.

Fonte: Próprio Autor

Já a terceira etapa (levantamento dos problemas) pôde ser verificada ainda durante a pesquisa proposta na etapa dois. Antes que a aula de pesquisa chegasse ao fim, Mariazinha participou novamente com o seguinte questionamento:

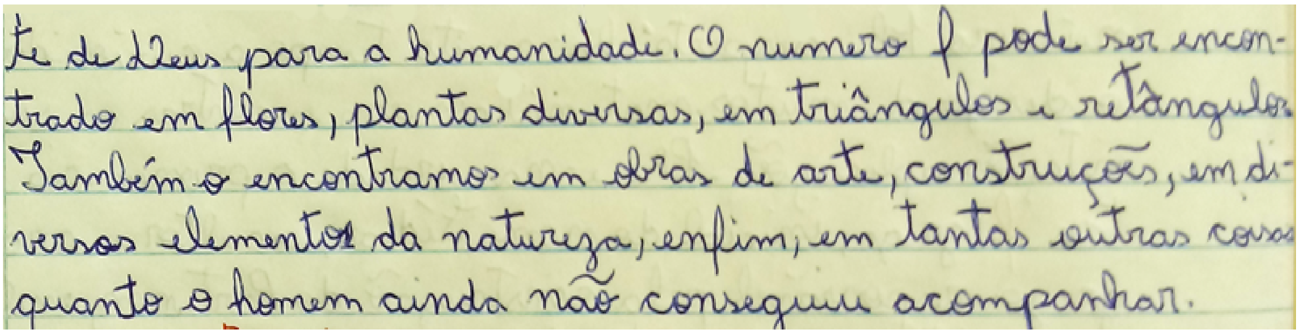
"Professor, por que o senhor está dando essa aula aqui na informática, sendo que isso não tem nada a ver com Matemática?"

Esta foi uma pergunta providencial para o momento e, através de nossa intervenção, todos os alunos da sala passaram a ter a "missão" de ajudar Mariazinha a encontrar qual era a relação entre beleza e Matemática. Para finalizar esta etapa, foi proposto, como tarefa, à partir do que havia sido pesquisado e anotado, o seguinte questionário:

1. O que você considera como padrão de beleza?
2. Quais são os padrões de beleza estabelecidos pela sociedade?
3. Você acredita que há discriminação ou preconceito com pessoas que não estão de acordo com o padrão definido na resposta anterior?
4. Você acha que existe um padrão de beleza na Matemática? Se sim, qual é este padrão?

Ao recebermos as respostas, na aula seguinte, pudemos perceber um grande volume de cópias feitas diretamente de sites da internet, o que nos revela certa imaturidade dos alunos com relação à essa modalidade de pesquisa. Embora não queiramos nos meter profundamente na questão, considerando o público pesquisado, ficou-nos nítida a dependência dos alunos aos conteúdos expostos pelos professores durante as aulas.

Figura 17: Parte da resposta ao questionário de uma aluna.


te de Deus para a humanidade. O numero ϕ pode ser encon-
trado em flores, plantas diversas, em triângulos e retângulos
Também o encontramos em obras de arte, construções, em di-
versos elementos da natureza, enfim, em tantas outras coisas
quanto o homem ainda não conseguiu acompanhar.

Fonte: Próprio Autor

Adentrando já na quarta etapa de nossa atividade, procuramos, novamente dispostos em círculo, perpassar por todas as questões deixadas como tarefa, sempre deixando clara a ideia de que, independente de qualquer característica física, todas as pessoas são belas e, por isso, não há razão para qualquer tipo de preconceito ou discriminação. No entanto, pelo foco deste trabalho, vamos nos ater ao conteúdo da questão 4, onde relacionamos o padrão de beleza à Matemática.

Ao iniciarmos a discussão sobre a referida questão, muitos alunos concordaram que existe alguma relação entre padrão de beleza e Matemática. No entanto, nenhum deles foi capaz de falar claramente e explicar qual seria esta relação. Destacamos aqui algumas participações feitas neste momento.

Robertinho: "Acho que não tem nada a ver, professor."

Joãozinho: "Tem sim! Tem um negócio de número de ouro."

Paulinha: "Tem, professor. Eu vi que no corpo humano tem esse número, só que eu não entendi nada."

À partir disso, introduzimos o conceito de Razão Áurea, estabelecendo a conexão com o conteúdo de fração, já que este é proposto no currículo adotado pela Rede Municipal de Ensino na qual desenvolvemos a atividade, nesta etapa de ensino.

Finalmente, na análise crítica das soluções, etapa 5 de nossa atividade, consideramos como solução para o problema matemático proposto na etapa anterior, o conhecimento acerca da existência da Razão Áurea, tal como a adaptamos, de acordo com o que foi exposto na seção anterior. A análise foi feita na forma de experimentação no próprio ambiente escolar. Os alunos foram dispostos em duplas e cada uma delas escolheu um objeto de forma retangular que considerasse estar mais próximo daquilo que se considera perfeito, o retângulo de ouro. Alguns dos objetos escolhidos foram o gol da quadra, o quadro negro, o portão da escola, a mesa do refeitório, entre outros, conforme podemos notar na Figura 18. Feita a escolha inicial, com o auxílio de uma fita métrica, em um segundo momento, foram determinadas as medidas de “a”e “b”, que representavam as medidas dos lados do retângulo (largura e comprimento). Por fim, através de uma calculadora, cada dupla obteve o valor da razão representada pela fração $\frac{a}{b}$, comparando o resultado obtido com a aproximação do número de ouro.

Ressaltamos que a participação dos alunos nesta última etapa foi muito expressiva e superou as nossas expectativas quanto ao desempenho apresentado.

Figura 18: Alunos fazendo medidas pela escola.

Fonte: Próprio Autor

De modo geral, o desenvolvimento da atividade se deu de maneira tranquila, salvo a imaturidade, relativa ao modo de pesquisa, apresentada pelos alunos.

Conjecturamos, à partir da atividade aqui relatada e da revisão de literatura que culminou neste texto, que há, sim, espaço para que a Álgebra seja previamente introduzida, em consonância com a Aritmética, através de atividades de Pré-Álgebra. Não conseguimos, no entanto, com aquilo que desenvolvemos até aqui, garantir que haverá, para os alunos envolvidos em nossa pesquisa, maior facilidade quando da introdução à Álgebra no Sétimo Ano do Ensino Fundamental, conforme prevê o Currículo do Estado de São Paulo. Acreditamos, porém, que a naturalidade com a qual a Álgebra é tratada em atividades de Pré-Álgebra, pode contribuir muito para uma melhora no cenário do ensino de Álgebra em nosso país.

Considerações Finais

"O caminho se faz caminhando."
Dunga

A pesquisa que se materializou, em parte, nesta dissertação, é fruto de uma longa caminhada repleta de descobertas e desafios, mas, sobretudo, transformadora. Lançamo-nos "ao escuro"e pudemos perceber uma nova luz à brilhar na imensidão de números e letras que se misturavam a pedidos de socorro dos estudantes que pouco se habituavam com a Álgebra. As inquietações que nos moveram até aqui datam já das primeiras experiências com o ensino de Álgebra e que foram se acumulando durante os anos de docência na Rede Pública. O caminhar nos levou a perceber que havia algo de errado e este trabalho nos representa a tentativa de mudança para uma direção mais assertiva.

À partir disso, até pela essência de pesquisador, algo próprio de professor e motivados pelo curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), nos dedicamos ao estudo da transição entre Aritmética e Álgebra que, comumente, ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental e que, ao nosso entender, tem deixado profundas marcas negativas em nossos alunos. Por assim ser, tivemos como objetivo central dessa pesquisa, não apenas refletir e compreender os obstáculos encontrados no processo de ensino aprendizagem de Álgebra, mas evidenciar as dificuldades encontradas por professores e alunos, bem como sugerir algo que possa ajudar a melhorar esta complicada realidade.

Para tanto, como aporte teórico, iniciamos nosso trabalho com o estudo da Aritmética, desde a construção lógica dos conjuntos numéricos - Naturais, Inteiros e Racionais -, até suas operações e propriedades. Em seguida, discutimos acerca da Álgebra em si, trazendo considerações históricas, concepções, resultados apresentados em avaliações de larga escala e, também, a sequencia curricular proposta pelo Estado de São Paulo, que, ao nosso entender, revela um grande salto entre Aritmética e Álgebra, quando da sua introdução. Finalmente, dedicamos o terceiro capítulo a apresentação e ao relato de uma atividade de Pré-Álgebra, na qual relacionamos a teoria vista nos dois capítulos anteriores na intenção de fecundar novas discussões que levem em consideração as dificuldades existentes para o "acesso"à Álgebra.

Durante os estudos voltados ao desenvolvimento deste trabalho, constatamos certa carência de pesquisas que englobam a transição entre Aritmética e Álgebra, bem como a sequencia curricular "ideal"para os Anos Finais do Ensino Fundamental, no que diz respeito à Matemática.

Pudemos verificar que este tema, quando considerado, é tratado com superficialidade, embora distante esteja da simplicidade que aparenta.

Em contrapartida, levando em consideração as ideias de Lins e Gimenez (1997), conforme vimos em nosso segundo capítulo, propomos uma antecipação no tratamento da Álgebra em atividades introdutórias, as quais denominamos atividades Pré-Álgebra, de modo a evitar uma abrupta mudança entre a Aritmética e a Álgebra, pois entendemos por essencial para obtenção de melhores resultados, que essa transição não se dê em um momento único, mas seja resultado de um processo mais acessível ao aluno. Na execução de nossa proposta de atividade de Pré-Álgebra no Sexto Ano de Ensino Fundamental, pudemos perceber que há, sim, espaço para que a Álgebra seja previamente introduzida. No entanto, com aquilo que aqui desenvolvemos, não conseguimos precisar sobre uma futura introdução à Álgebra, isto é, não podemos afirmar que os alunos participantes da atividade por nós proposta terão menores dificuldades em seu acesso. Todavia, considerando a complicada realidade aqui exposta, entendemos que é importante o desenvolvimento de pesquisas, como a aqui apresentada, de modo que haja uma busca por alternativas para a introdução da Álgebra no Ensino Básico.

Ainda que tivéssemos limitações, como o tempo e a restrição de faixa etária dos alunos envolvidos, por exemplo, acreditamos que os resultados aqui obtidos podem contribuir de alguma forma com o processo de ensino-aprendizagem de Álgebra, que, como vimos, tem apresentado resultados desoladores. Ademais, considerando tais limitações e o bom resultado na atividade realizada, surge uma nova indagação: "Atividades de Pré-Álgebra podem dar melhores condições aos alunos quando da introdução à Álgebra, comumente realizada ao final do Sétimo Ano do Ensino Fundamental?"Acreditamos que este questionamento pode desdobrar-se em novas pesquisas que trilhem novos caminhos e vislumbrem novos horizontes.

Referências Bibliográficas

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 3. ed. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro, 2013. p. 1-52.

ABDULAZIZ, A. A. **The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples**. University of Balamand, 2010. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1004.0025.pdf>. Acesso em 01 de junho de 2017.

ALVES-MAZZOTTI, A. **O Método nas Ciências Sociais**. In: ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWAMDSZNADJDER, F. O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2ª reimpressão da 2ª edição. São Paulo: Pioneira, 2001. p.107-188.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática em sala de aula.** Perspectiva, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, junho/2003.

BAUER, A.; ALAVARSE, O. M.; OLIVEIRA, P. R. **Avaliações em larga escala: uma sistamatização do debate**.Educ. Pesqui., São Paulo, v. 41, n. especial, p. 1367-1382, dez.2015.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em Sala de Aula**. 2. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Atual, 1992. 112 p.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda., 1996. p. 1-183.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. P**arâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998a

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. P**arâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998b.

BRURAK, D. **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**, 2011. Disponível em: <http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/regina/materiais/modelagem.pdf>. Acesso em 07 de agosto de 2017.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 8. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009. p. 17-253.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, M. L. M. **História do Ensino de Matemática: uma introdução**. Belo Horizonte. UFMG, 2012.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 2ª ed. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2016. 330 p. (Coleção PROFMAT).

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus Editora, 1997.

PEDROSO, H. A. **História da Matemática**. São José do Rio Preto, SP: Editora Unesp, 2009.

PORTAL INEP, **Plataforma devolutiva**. Disponível em:<http://portal.inep.gov.br/devolutivas>. Acesso em 21 de junho de 2017.

QUEIROZ, J. M. dos S. **Resolução de Problemas da Pré-Álgebra e Álgebra para Fundamental II do Ensino Básico com auxílio do modelo de barras**. 2014. 144f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)- Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 2014.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo (Estado), 2011.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental - Anos Finais**. São Paulo (Estado), 2009.

SILVA, A. G. de A. **O professor formador do Curso de Pedagogia: Os saberes que importam para o ensino da Matemática nas séries iniciais**. 2008. 122f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2008.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a Álgebra da escola media e utilizações das variáveis**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) As ideias da Álgebra. Trad. DOMINGUES, H. H. São Paulo: Atual, 1995.

VYGOTSKI, L.S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra, São Paulo: Martins Fontes, 2001.

WU, H. **From arithmetics to algebra**. Eugene: University of Oregon, 2009. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/∽wu/C57Eugene_3.pdf>. Acesso em 25 de julho de 2017.

Anexos

Anexo A

Quadro completo de conteúdos e habilidades de Matemática do Estado de São Paulo.

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Números naturais • Múltiplos e divisores • Números primos • Operações básicas (+, −, . , ÷) • Introdução às potências Frações • Representação • Comparação e ordenação • Operações	• Compreender as principais características do sistema decimal: significado da base e do valor posicional • Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores • Saber realizar operações com números naturais de modo significativo (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação) • Compreender o significado das frações na representação de medidas não inteiras e da equivalência de frações • Saber realizar as operações de adição e subtração de frações de modo significativo
2º Bimestre	**Números/Relações** Números decimais • Representação • Transformação em fração decimal • Operações Sistemas de medida • Medidas de comprimento, massa e capacidade • Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade	• Compreender o uso da notação decimal para representar quantidades não inteiras, bem como a ideia de valor posicional • Saber realizar e compreender o significado das operações de adição e subtração de números decimais • Saber transformar frações em números decimais e vice-versa • Saber realizar medidas usando padrões e unidades não convencionais; conhecer diversos sistemas de medidas • Conhecer as principais características do sistema métrico decimal: unidades de medida (comprimento, massa, capacidade) e transformações de unidades

5ª série/6º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Geometria/Relações** Formas geométricas • Formas planas • Formas espaciais Perímetro e área • Unidades de medida • Perímetro de uma figura plana • Cálculo de área por composição e decomposição • Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas	• Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas • Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações • Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras • Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares
4º Bimestre	**Números/Relações** Estatística • Leitura e construção de gráficos e tabelas • Média aritmética • Problemas de contagem	• Compreender informações transmitidas em tabelas e gráficos • Saber construir gráficos elementares (barras, linhas, pontos) utilizando escala adequada • Saber calcular, interpretar e utilizar informações relacionadas às medidas de tendência central (média, mediana, moda) • Saber utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem • Compreender a ideia do princípio multiplicativo de contagem

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
1º Bimestre	**Números** Sistemas de numeração • Sistemas de numeração na Antiguidade • O sistema posicional decimal Números negativos • Representação • Operações Números racionais • Representação fracionária e decimal • Operações com decimais e frações (complementos)	• Compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração e realizar cálculos simples com potências • Compreender a relação entre uma fração e a representação decimal de um número, sabendo realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com decimais • Saber realizar operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, compreendendo o significado das operações realizadas • Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos • Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos
2º Bimestre	**Geometria** Geometria • Ângulos • Polígonos • Circunferência • Simetrias • Construções geométricas • Poliedros	• Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau), sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos • Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia • Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de *n* lados • Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas • Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista • Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais

6ª série/7º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Relações** Proporcionalidade • Variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais • Conceito de razão • Porcentagem • Razões constantes na Geometria: π • Construção de gráficos de setores • Problemas envolvendo probabilidade	• Saber reconhecer situações que envolvem proporcionalidade em diferentes contextos, compreendendo a ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais • Saber resolver problemas variados, envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais • Reconhecer e saber utilizar o conceito de razão em diversos contextos (proporcionalidade, escala, velocidade, porcentagem etc.), bem como na construção de gráficos de setores • Conhecer o significado do número π como uma razão constante da Geometria, sabendo utilizá-lo para realizar cálculos simples envolvendo o comprimento da circunferência ou de suas partes • Saber resolver problemas simples envolvendo a ideia de probabilidade (porcentagem que representa possibilidades de ocorrência)
4º Bimestre	**Números** Álgebra • Uso de letras para representar um valor desconhecido • Conceito de equação • Resolução de equações • Equações e problemas	• Compreender o uso de letras para representar valores desconhecidos, em particular, no uso de fórmulas • Saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica • Compreender o conceito de equação a partir da ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta • Saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações • Conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa

Anexo B

Níveis de proficiência da Prova Brasil - Completo

MATEMÁTICA – 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Nível*	**Descrição do nível – O estudante provavelmente é capaz de:**
Nível 1: 200-225	**Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer o maior ou o menor número em uma coleção de números racionais, representados na forma decimal. **Tratamento de informações** • Interpretar dados apresentados em tabela e gráfico de colunas.
Nível 2: 225-250	**Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer a fração que corresponde à relação parte-todo entre uma figura e suas partes hachuradas. • Associar um número racional que representa uma quantia monetária, escrito por extenso, à sua representação decimal. • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por três. **Tratamento de informações** • Interpretar dados apresentados em um gráfico de linha simples. • Associar dados apresentados em gráfico de colunas a uma tabela.
Nível 3: 250-275	**Espaço e forma** • Reconhecer o ângulo de giro que representa a mudança de direção na movimentação de pessoas/objetos. • Reconhecer a planificação de um sólido simples, dado através de um desenho em perspectiva. • Localizar um objeto em representação gráfica do tipo planta baixa, utilizando dois critérios: estar mais longe de um referencial e mais perto de outro. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar uma fração irredutível, equivalente a uma fração dada, a partir da simplificação por sete. • Determinar a soma, a diferença, o produto ou o quociente de números inteiros em situações-problema. • Localizar o valor que representa um número inteiro positivo associado a um ponto indicado em uma reta numérica. • Resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros. **Tratamento de informações** • Associar dados apresentados em tabela a gráfico de setores. • Analisar dados dispostos em uma tabela simples. • Analisar dados apresentados em um gráfico de linha com mais de uma grandeza representada.

Nível 4: 275-300	**Espaço e forma** • Localizar um ponto em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas. • Reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada. • Interpretar a movimentação de um objeto utilizando referencial diferente do seu. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medidas de comprimento, de metros para centímetros, na resolução de situação-problema. • Reconhecer que a medida do perímetro de um retângulo, em uma malha quadriculada, dobra ou se reduz à metade quando os lados dobram ou são reduzidos à metade. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar a soma de números racionais em contextos de sistema monetário. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 1º grau envolvendo números naturais, em situação-problema. • Localizar números inteiros negativos na reta numérica. • Localizar números racionais em sua representação decimal. **Tratamento de informações** • Analisar dados dispostos em uma tabela de dupla entrada.

Nível 5: 300-325	**Espaço e forma** • Reconhecer que o ângulo não se altera em figuras obtidas por ampliação/redução. • Localizar dois ou mais pontos em um sistema de coordenadas. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, com o apoio de figura, na resolução de uma situação-problema. • Determinar o volume através da contagem de blocos. **Números e operações; álgebra e funções** • Associar uma fração com denominador 10 à sua representação decimal. • Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de equações do 1º grau ou sistemas lineares. • Determinar, em situação-problema, a adição e a multiplicação entre números racionais, envolvendo divisão por números inteiros. • Determinar a porcentagem envolvendo números inteiros. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números racionais na forma decimal.

Nível 6: 325-350	**Espaço e forma** • Reconhecer a medida do ângulo determinado entre dois deslocamentos, descritos por meio de orientações dadas por pontos cardeais. • Reconhecer as coordenadas de pontos representados no primeiro quadrante de um plano cartesiano. • Reconhecer a relação entre as medidas de raio e diâmetro de uma circunferência com o apoio de figura. • Reconhecer a corda de uma circunferência, as faces opostas de um cubo, a partir de uma de suas planificações. • Comparar as medidas dos lados de um triângulo a partir das medidas de seus respectivos ângulos opostos. • Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida da hipotenusa, dadas as medidas dos catetos. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medida de massa, de quilograma para grama, na resolução de situação-problema. • Resolver problema fazendo uso de semelhança de triângulos. **Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer frações equivalentes. • Associar um número racional, escrito por extenso, à sua representação decimal, e vice-versa. • Estimar o valor da raiz quadrada de um número inteiro aproximando-o de um número racional em sua representação decimal. • Resolver problema envolvendo grandezas diretamente proporcionais com constante de proporcionalidade não inteira.
	• Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica que contenha parênteses, envolvendo números naturais. • Determinar um valor monetário obtido por meio de um desconto ou um acréscimo percentual. • Determinar o valor de uma expressão numérica, com números irracionais, fazendo uso de uma aproximação racional fornecida. **Tratamento de informações** • Resolver problemas que requerem a comparação de dois gráficos de colunas.

Nível 7: 350-375	**Espaço e forma** • Reconhecer ângulos agudos, retos ou obtusos de acordo com sua medida em graus. • Reconhecer as coordenadas de pontos representados num plano cartesiano localizados em quadrantes diferentes do primeiro. • Determinar a posição final de um objeto, após a realização de rotações em torno de um ponto, de diferentes ângulos, em sentido horário e anti-horário. • Resolver problemas envolvendo ângulos, inclusive utilizando a Lei Angular de Tales sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. • Resolver problemas envolvendo as propriedades de ângulos internos e externos de triângulos e quadriláteros, com ou sem justaposição ou sobreposição de figuras. • Resolver problema utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo da medida de um dos catetos, dadas as medidas da hipotenusa e de um de seus catetos. **Grandezas e medidas** • Determinar o perímetro de uma região retangular, obtida pela justaposição de dois retângulos, descritos sem o apoio de figuras. • Determinar a área de um retângulo em situações-problema. • Determinar a área de regiões poligonais desenhadas em malhas quadriculadas. • Determinar o volume de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo sem o apoio de figura. • Converter unidades de medida de volume, de m^3 para litro, em situações-problema. • Reconhecer a relação entre as áreas de figuras semelhantes. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar o quociente entre números racionais, representados na forma decimal ou fracionária, em situações-problema. • Determinar a soma de números racionais dados na forma fracionária e com denominadores diferentes. • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica de 2º grau, com coeficientes naturais, envolvendo números inteiros. • Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração, multiplicação e/ou potenciação entre números inteiros. • Determinar o valor de uma expressão numérica com números inteiros positivos e negativos. • Determinar o valor de uma expressão numérica com números racionais. • Comparar números racionais com diferentes números de casas decimais, usando arredondamento. • Localizar na reta numérica um número racional, representado na forma de uma fração imprópria. • Associar uma fração à sua representação na forma decimal. • Associar uma situação-problema à sua linguagem algébrica, por meio de inequações do 1º grau. • Associar a representação gráfica de duas retas no plano cartesiano a um sistema de duas equações lineares, e vice-versa. • Resolver problemas envolvendo equação do 2º grau. **Tratamento de informações** • Determinar a média aritmética de um conjunto de valores. • Estimar quantidades em gráficos de setores. • Analisar dados dispostos em uma tabela de três ou mais entradas. • Interpretar dados fornecidos em gráficos envolvendo regiões do plano cartesiano. • Interpretar gráficos de linhas com duas sequências de valores.

Nível 8: 375-400	**Espaço e forma** • Resolver problemas utilizando as propriedades das cevianas (altura, mediana e bissetriz) de um triângulo isósceles com o apoio de figura. **Grandezas e medidas** • Converter unidades de medida de capacidade, de mililitro para litro, em situações-problema. • Reconhecer que a área de um retângulo quadruplica quando seus lados dobram. • Determinar a área de figuras simples (triângulo, paralelogramo, trapézio), inclusive utilizando composição/decomposição. **Números e operações; álgebra e funções** • Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica do 1º grau, com coeficientes racionais, representados na forma decimal. • Determinar o valor de uma expressão numérica envolvendo adição, subtração e potenciação entre números racionais, representados na forma decimal. • Resolver problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.
Nível 9: 400-425	**Espaço e forma** • Resolver problemas utilizando a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono. **Números e operações; álgebra e funções** • Reconhecer a expressão algébrica que expressa uma regularidade existente em uma sequência de números ou de figuras geométricas.

Anexo C

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido acerca da atividade desenvolvida.

Eu, ________________________________ pai (mãe) ou responsável legal do(a) estudante(a) ____________________________________, autorizo meu filho(a) a participar da pesquisa desenvolvida pelo Profº. Augusto Sergio Furquim e orientado pelo Profº. Dra. Flávia de Souza Machado da Silva, relativa ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, campus de São José do Rio Preto-SP.

A pesquisa consistirá na realização de atividades escritas, questionários, fotografias, intervenção pedagógica junto aos participantes do estudo e posterior análise dos dados. A qualquer momento da realização desse estudo qualquer participante/pesquisado ou o estabelecimento envolvido poderá receber os esclarecimentos adicionais que julgar necessários. O sigilo das informações será preservado através de adequada codificação dos instrumentos de coleta de dados.

Todos os registros efetuados no decorrer desta investigação serão usados para fins unicamente acadêmico-científicos e apresentados na forma de Dissertação, não sendo utilizados para qualquer fim comercial.

Em caso de concordância com as considerações expostas, solicitamos que assine este "Termo de Consentimento Livre e Esclarecido". Desde já agradecemos sua colaboração e nos comprometemos com a disponibilização à instituição dos resultados obtidos nesta pesquisa, tornando-os acessíveis a todos os participantes.

Potirendaba, dia______ de ____________________ de 2017.

____

(assinatura)