

Douglas Vinicius Rosato Costa

Programação no auxílio da resolução de situações-problema e  
uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática.

São José do Rio Preto  
2018

Douglas Vinicius Rosato Costa

Programação no auxílio da resolução de situações-problema e uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto  
2018

Costa, Douglas Vinicius Rosato.

Programação no auxílio da resolução de situações-problema e uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática / Douglas Vinicius Rosato Costa. -- São José do Rio Preto, 2018

81 f. : il.

Orientador: Flávia Souza Machado da Silva

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) – Estudo e ensino. 3. Aprendizagem baseada em problemas. 4. Programação (Matemática) 5. Linguagem de programação (Computadores). 6. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Douglas Vinicius Rosato Costa

Programação no auxílio da resolução de situações-problema e uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Flávia Souza Machado da Silva.

#### Comissão Examinadora

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Flávia Souza Machado da Silva

UNESP – São José do Rio Preto

Orientadora

Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos

UTFPR – Câmpus de Cornélio Procópio

São José do Rio Preto  
2 de Março de 2018

*Dedico este trabalho à minha mãe Zoleine, que não teve a oportunidade de ver os filhos crescerem para compartilhar com ela suas conquistas.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a meus pais por desde sempre me ensinarem o valor dos estudos e à minha noiva por me incentivar e me manter motivado frente às dificuldades encontradas desde o início da minha jornada como docente, na sala de informática da E.M.E.F - Lucia Maria Donato Garcia, em Ilha Solteira – SP.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce - UNESP, Campus de São José do Rio Preto, em especial à minha orientadora a Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Flávia Souza Machado da Silva, que me apoiou e guiou durante o processo de elaboração desta dissertação.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro através da bolsa de estudos que permitiu que eu me mantivesse no curso, não apenas durante o mestrado, mas também durante a graduação através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), onde comecei o trabalho com o software Scratch sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Dalva Maria de Oliveira Villarreal, do Departamento de Matemática da FEIS – UNESP, Câmpus de Ilha Solteira, a quem também tenho muita gratidão.

Agradeço também a meus colegas de turma, que caminharam lado a lado durante todo o curso, incentivando, apoiando e ajudando uns aos outros em todas as necessidades.

Finalmente, agradeço ao SESI pelas inúmeras formações que contribuem para minha evolução como docente e a toda a equipe de Araçatuba-SP que me incentivam a desenvolver formas inovadoras de ensinar Matemática.

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre funções afim e quadrática e resolução de situações-problema através do uso de programação, tendo como público alvo os estudantes do último ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio. Atualmente, notamos no ensino básico apatia e desmotivação por parte dos estudantes, por não julgarem necessário o que aprendem na escola e, principalmente, ao encarar as dificuldades apresentadas em Matemática. Partindo dessa premissa, objetiva-se apontar uma ligação direta entre resolução de situações-problema e programação, e abordar de forma interativa e atraente uma maneira de adquirir as habilidades necessárias nessas duas áreas. Utilizando o software Scratch para resolver as atividades propostas sobre funções afim e quadrática, conseguimos cativar o interesse dos estudantes e atingimos maior participação em sala de aula, por meio de atividades diferenciadas e criativas. Incluem-se ainda os benefícios de aprender a programar, que é considerada uma habilidade essencial para o futuro.

**Palavras-chave:** Função afim, função quadrática, software Scratch, situações-problema.

## ABSTRACT

*In this work, it is presented a study on linear and quadratic functions and problem-solving through the use of programming, focusing on the students of the last year of elementary school and the first year of high school. Nowadays we notice apathy and demotivation from the students in the basic education due to their belief that what they learn in the school is unnecessary and, mainly, when facing the usual difficulties concerning Mathematics. Based on this premise, this work aims to point out a direct link between problem-solving and programming, interactively and attractively approaching a way to acquire the necessary skills in these two areas. Using the Scratch software to solve the proposed activities on linear and quadratic functions, we were able to captivate students' interest and achieve greater participation in the classroom through differentiated and creative activities. It also includes the benefits of learning how to program, which is considered an essential skill for the future.*

**Keywords:** *Linear functions, quadratic function, Scratch software, problem-solving.*

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Plano cartesiano (eixos coordenados).....	14
Figura 2: Representação de uma função afim crescente.....	18
Figura 3: Representação de uma função afim decrescente.....	18
Figura 4: Colinearidade de pontos do gráfico de uma função afim. ....	19
Figura 5: Representação geométrica do zero da função afim.....	24
Figura 6: Parábola (Gráfico da função quadrática). ....	31
Figura 7: Translação horizontal da parábola. ....	34
Figura 8: Translação vertical da parábola.....	35
Figura 9: Orientação da concavidade da parábola. ....	35
Figura 10: Intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.....	36
Figura 11: Posições do gráfico da função quadrática quando $a > 0$ . ....	37
Figura 12: Posições do gráfico da função quadrática quando $a < 0$ . ....	37
Figura 13: Representação do vértice V da parábola. ....	39
Figura 14: Situação-problema contida no ENEM-2017.....	46
Figura 15: Situação-problema contida no ENEM-2017.....	46
Figura 16: Ligação entre os centros da circunferência para visualizar a resolução. ....	47
Figura 17: Professor Douglas Costa em atividade diferenciada em Araçatuba-SP.....	50
Figura 18: Formas geométricas utilizadas em fluxogramas ....	53
Figura 19: Distribuição de idade de novos Scratchers (dados gerados em Jan/18).....	54
Figura 20: Scratch 2.0 - Interface. ....	55
Figura 21: Exemplo de programação no Scratch.....	56
Figura 22: Ator no Scratch reagindo à programação.....	56
Figura 23: Aplicação do Scratch na sala de informática. ....	66
Figura 24: Algoritmo criado por estudante após a aula, em seu tempo livre. ....	67
Figura 25: Screenshot do aplicativo educativo Desafio da Hora. ....	68
Figura 26: Atividade 1-1. Algoritmo para cálculo da imagem de um ponto dado.....	71
Figura 27: Atividade 1-1. Cálculo de $f(2) = 1$ utilizando o algoritmo. ....	71
Figura 28: Atividade 1-1. Cálculo de $f(-4) = -11$ utilizando o algoritmo.....	72
Figura 29: Atividade 1-3. Algoritmo para calcular imagens de pontos de uma função afim...	73
Figura 30: Atividade 2-1. Algoritmo para cálculo da raiz de uma função afim qualquer.....	73

Figura 31: Atividade 2-2. Programa que gera funções afim para o usuário calcular sua raiz..	74
Figura 32: Atividade 2-2. Acréscimo de contador de acertos ao programa. ....	74
Figura 33: Atividade 3-1. Algoritmo para o esboço dos gráficos das funções dadas.....	75
Figura 34: Atividade 3-2. Algoritmo para esboço do gráfico de qualquer função afim.....	76
Figura 35: Atividade 3-2. Comando para identificar intersecção com o eixo Oy.....	76
Figura 36: Atividade 3-2. Comando para mostrar as coordenadas da posição do cursor. ....	76
Figura 37: Atividade 4-1. Algoritmo para cálculo das raízes da função dada. ....	77
Figura 38: Atividade 4-1. Verificação dos cálculos do algoritmo.....	77
Figura 39: Atividade 4-1. Extensão do algoritmo para uma função quadrática qualquer. ....	78
Figura 40: Atividade 5-1. Algoritmo para cálculo das raízes de uma função quadrática.....	78
Figura 41. Atividade 5-1. Correção do erro do algoritmo. ....	78
Figura 42: Atividade 5-2. Algoritmo para cálculo do ponto de máximo/mínimo da função. ..	79
Figura 43. Atividade 6-1. Algoritmo para traçar o gráfico das funções quadráticas dadas.....	80
Figura 44. Atividade 6-1. Algoritmo para calcular o ponto de máximo/mínimo de uma função quadrática qualquer.....	80
Figura 45: Atividade 6-1. Algoritmo para o cálculo do ponto de intersecção do gráfico com o eixo Oy. ....	81
Figura 46: Atividade 6-1. Comando para mostrar as coordenadas da posição do cursor. ....	81

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	09
1 O CONCEITO DE FUNÇÃO .....	11
1.1 Preliminares .....	11
1.2 Coordenadas Cartesianas .....	13
1.3 Gráfico .....	15
2 FUNÇÃO AFIM .....	16
2.1 Definição e preliminares.....	16
2.2 Monotonicidade da função afim.....	17
2.3 Gráfico da função afim .....	18
2.4 Caracterização da função afim .....	21
2.5 Zero da função afim.....	24
3 FUNÇÃO QUADRÁTICA .....	25
3.1 Definição e preliminares .....	25
3.2 Valor ou imagem da função quadrática em um ponto .....	27
3.3 Zeros da função quadrática .....	28
3.4 Gráfico da função quadrática .....	31
3.5 Vértice da parábola .....	37
3.6 Forma canônica da função quadrática .....	39
3.7 Caracterização da função quadrática .....	40
4 UMA ABORDAGEM COM O USO DA LINGUAGEM SCRATCH.....	44
4.1 Resolução de situações-problema.....	44
4.2 Scratch .....	51
4.3 Proposta de atividades com o uso da linguagem Scratch.....	57
4.4 Relato de experiência .....	66
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	68
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	70
APÊNDICE .....	71

## INTRODUÇÃO

Resolver problemas é tão antigo quanto nossa própria existência. Desde o começo da história dos seres humanos, nos deparamos com situações em que precisamos utilizar alguma estratégia para superar os obstáculos encontrados. Apesar disso, foi apenas na segunda metade do século XX que a resolução de situações-problema na área da Matemática começou a se fortalecer. Situações-problema diferem de problemas comuns no leque de habilidades e competências necessárias para sua resolução. Enquanto um exige apenas o conteúdo teórico específico, o outro exige leitura, interpretação, seleção de dados importantes e elaboração de uma estratégia antes da resolução propriamente dita.

A resolução de situações-problema é considerada uma metodologia de ensino inovadora por muitos especialistas da área da educação, pois proporciona ao estudante a capacidade de *aprender a aprender*. Dá a ele a autonomia para gerir a própria aprendizagem, evidenciando os processos de pensamento e raciocínio. Contudo, atualmente nosso país passa por uma crise na educação em que os estudantes já não são cativados pelo processo didático tradicional, considerado por eles arcaico e entediante. Eles querem aulas diferenciadas, atrativas e inovadoras. Ou seja, os professores atualmente passam pelo desafio de diversificar as aulas tradicionais e criar novos métodos que atraiam e foquem os estudantes no processo de ensino e aprendizagem. Para muitos, este é um caminho nebuloso e desafiador.

De acordo com George Polya (1887-1985), matemático húngaro, a resolução de um problema é dividida em quatro passos principais: compreensão do problema, elaboração de um plano de solução, execução do plano e verificação da resposta obtida. Do ponto de vista computacional, estes passos representam um algoritmo. Ou seja, é uma sequência lógica e ordenada de instruções para executar uma tarefa. Programação é uma área com crescente necessidade de profissionais devido ao acelerado avanço tecnológico que vivenciamos no mundo globalizado, entretanto a maioria das escolas não fornecem nenhuma formação ou apoio nesta área, que é diretamente ligada à Matemática.

Portanto, objetivando unir os benefícios de ambas as partes, ou seja, fortalecer as estratégias para resolução de situações-problema, ampliar o domínio dos jovens sobre instrumentos tecnológicos, introduzir programação no conjunto de competências dos estudantes e resgatar o interesse e motivação em aprender, este trabalho visa entrelaçar a

resolução de situações-problema em Matemática com programação através do software e linguagem de programação Scratch. Desenvolvida pelo Massachusetts Institute of Technology (MIT) e lançado em 2013, esta ferramenta promete ajudar crianças a partir de oito anos a pensarem criativamente e raciocinarem de modo sistemático.

Apesar de permitir trabalhar todas as áreas da Matemática, neste trabalho apresentaremos uma proposta, utilizando a linguagem Scratch, para abordar funções afim e quadrática, e resolução de situações-problema de forma criativa e atraente para o nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, através de atividades elaboradas de modo a desenvolver meticulosamente as habilidades e competências descritas anteriormente. No entanto, antes de desenvolver as atividades contidas nesse trabalho, os estudantes devem passar por um referencial teórico sobre o tema, contido nas seções iniciais desta obra.

No capítulo 1 deste trabalho introduzimos brevemente o conceito geral de função. No capítulo 2 trazemos um estudo mais aprofundado sobre função afim, envolvendo monotonicidade, gráfico, estudo do zero e a caracterização da função. Já no capítulo 3 abordamos função quadrática, sua caracterização, estudo da imagem, zeros da função, determinação algébrica das intersecções do gráfico com os eixos coordenados, gráfico, vértice da parábola e forma canônica. As principais referências utilizadas nos três capítulos iniciais são (DANTE, 2013); (LIMA, 2006) e (LIMA, 2012). O capítulo 4 estabelece uma relação entre resolução de situações-problema e programação, o problema que gera essa necessidade e a apresentação do software Scratch. Ainda nesta seção encontramos uma proposta de atividades sobre funções com o uso do Scratch e um relato de experiência sobre a aplicação dessas atividades no laboratório de informática de uma escola. No fim do trabalho encontra-se o apêndice, com as respostas para as questões elaboradas.

# 1 O CONCEITO DE FUNÇÃO

## 1.1 Preliminares

É muito comum livros didáticos e professores em sala de aula apresentarem uma função apenas como uma regra do tipo “ $y = x + 1$ ” tratando-se da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada número real  $x$  associa o número real  $x + 1$ . Porém, esta representação não é suficiente para fazer sentido matemático, caracterizando a situação apresentada inicialmente como um abuso de linguagem.

Do ponto de vista pedagógico, o uso descuidado do termo “a função  $y=x^2$ ” pode levar ao desenvolvimento de uma ideia limitada do conceito de função. Se em sala de aula referimo-nos a funções apenas por meio de fórmulas, é de se esperar que os alunos desenvolvam uma concepção de função restrita à ideia de fórmula: função é tudo que tem fórmula. [...] (LIMA, 2013, p. 3)

Para que uma função esteja bem definida, ela precisa de três elementos fundamentais: domínio, contradomínio e lei de associação. Entretanto, como o foco deste trabalho é o ensino básico, em algumas situações de aplicação serão omitidos os conjuntos domínio e contradomínio da função em questão, cometendo o abuso de linguagem mencionado anteriormente, mas nestes casos estaremos trabalhando dentro do conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ).

**Definição 1.1.1:** Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos não vazios. Uma **função**  $f: X \rightarrow Y$  (lê-se “uma função de  $X$  em  $Y$ ”) é uma regra (ou conjunto de regras) que, a cada elemento  $x \in X$ , associa um, e somente um, elemento  $y \in Y$ . Neste caso, os conjuntos  $X$  e  $Y$  são chamados **domínio** e **contradomínio** de  $f$ , respectivamente.

**Notação:** Escreve-se  $x \mapsto f(x)$  para indicar que  $f$  transforma (ou leva)  $x$  em  $f(x)$ .

### Observação 1.1.1:

(1) As variáveis associadas ao domínio designam-se por **variáveis independentes** e as associadas ao contradomínio por **variáveis dependentes**.

(2) Dada uma função  $f$  de  $X$  em  $Y$ , para cada  $x \in X$ , existe um único elemento  $y \in Y$  correspondente, o qual é chamado de **imagem de  $x$  pela função  $f$**  ou o valor assumido pela função  $f$  para  $x \in X$  e é representado por  $f(x)$  (lê-se “ $f$  de  $x$ ”). Assim,  $y = f(x)$ . O conjunto de todos os  $y$  assim obtidos é chamado **imagem da função  $f$**  e é indicado por  $Im(f)$ , ou seja,  $Im(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$ .

(3) Outra forma de dar a definição de uma função, ainda mantendo a consistência de incluir os elementos domínio, contradomínio e lei de associação, é como segue: para que uma relação  $f: X \rightarrow Y$  seja uma função, esta deve satisfazer duas condições fundamentais:

- (i) Estar definida em todo elemento do domínio (existência);
- (ii) Não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (unicidade).

### Exemplo 1.1.1:

Função identidade:  $f: X \rightarrow X$ , definida por  $f(x) = x, \forall x \in X$ .

Função constante:  $f: X \rightarrow Y$ , definida por  $f(x) = c$ , sendo  $c$  uma constante qualquer tal que  $c \in Y$ .

**Observação 1.1.2:** Como mencionado anteriormente, uma fórmula algébrica, por si só, não define uma função, sendo que uma mesma regra de associação pode representar diversas funções, variando de acordo com os conjuntos domínio e contradomínio. Por outro lado, existem funções que não podem ser representadas por uma única regra de associação em todo seu domínio, como por exemplo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ x + 2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

**Definição 1.1.2:** Sejam  $f: A \rightarrow B$  e  $g: C \rightarrow D$  duas funções, com  $B \subset C$ . A **função composta de  $g$  com  $f$**  é a função denotada por  $g \circ f$ , com domínio em  $A$  e contradomínio em  $D$ , que a cada elemento  $a \in A$  se associa o elemento  $d = g \circ f(a) = g(f(a)) \in D$ .

**Definição 1.1.3:** Consideremos uma função  $f: X \rightarrow Y$ . Dizemos que:

- (i)  $f$  é **sobrejetiva** se para todo  $y \in Y$ , existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
- (ii)  $f$  é **injetiva** se  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (iii)  $f$  é **bijetiva** se  $f$  é sobrejetiva e injetiva.

**Observação 1.1.3:** Note que, pela definição acima, uma função  $f: X \rightarrow Y$  é:

- injetiva quando elementos diferentes em  $X$  são transformados por  $f$  em elementos diferentes em  $Y$ .
- sobrejetiva quando, para qualquer elemento  $y \in Y$ , pode-se encontrar pelo menos um elemento  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .

**Definição 1.1.4:** Uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X \subset \mathbb{R}$ , é dita:

- (i) **Crescente** quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- (ii) **Decrescente** quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .
- (iii) **Monótona não decrescente** quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- (iv) **Monótona não crescente** quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Em qualquer um dos quatro casos,  $f$  diz-se monótona. Nos dois primeiros ( $f$  crescente ou  $f$  decrescente) diz-se que  $f$  é estritamente monótona. Nestes dois casos,  $f$  é uma função injetiva.

**Observação 1.1.4:** A condição para que uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X \subset \mathbb{R}$  seja crescente ou decrescente também pode ser posta da seguinte maneira:

- $f$  é **crescente** quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ .
- $f$  é **decrescente** quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ .

## 1.2 Coordenadas Cartesianas

A notação  $(a, b)$  é usada para indicar o par ordenado de números reais  $a$  e  $b$ , no qual o número  $a$  é a primeira coordenada e o número  $b$  é a segunda coordenada. Note que os pares

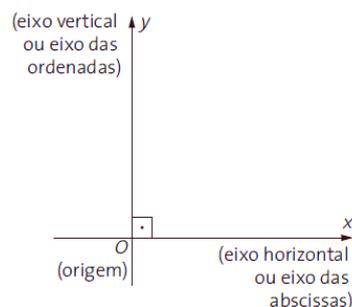
ordenados  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$  são diferentes, pois a primeira coordenada de  $(1, 2)$  é 1, enquanto a primeira coordenada de  $(2, 1)$  é 2.

Um **sistema de eixos ortogonais** é constituído por dois eixos perpendiculares,  $Ox$  e  $Oy$ , que têm a mesma origem  $O$ . O eixo  $Ox$  chama-se eixo das **abscissas** e  $Oy$  é chamado de eixo das **ordenadas**. O sistema é indicado com a notação  $Oxy$ . Por conveniência, o eixo das abscissas costuma ser chamado de *eixo x* e o eixo das ordenadas de *eixo y*. O sistema de eixos ortogonais é denominado **plano cartesiano**.

A cada ponto  $P$  do plano corresponde um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , onde os números  $x$  e  $y$  são as **coordenadas cartesianas** do ponto  $P$  relativamente ao sistema  $Oxy$ , sendo  $x$  a abscissa e  $y$  a ordenada. Reciprocamente, a cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano. Essa correspondência biunívoca entre pontos do plano e os pares de números reais une Álgebra à Geometria, isto é, possibilita escrever algebricamente algumas propriedades geométricas e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais. Dessa forma podemos representar geometricamente as expressões algébricas estudadas e visualizar o comportamento de cada tipo de função no plano cartesiano. As coordenadas  $x, y$  do ponto  $P$  são definidas do seguinte modo:

Se  $P$  estiver sobre o eixo  $Ox$ , o par ordenado associado a ele é  $(x, 0)$ , onde  $x$  é a coordenada de  $P$  no eixo  $Ox$ . Se  $P$  estiver sobre o eixo  $Oy$ , a ele corresponde o par  $(0, y)$ , onde  $y$  é a coordenada de  $P$  no eixo  $Oy$ . Se  $P$  não estiver sobre nenhum dos eixos, traçamos por  $P$  uma paralela ao eixo  $Oy$ , a qual corta  $Ox$  no ponto de coordenada  $x$ , indicando sua abscissa. Analogamente, traçamos por  $P$  outra reta, paralela ao eixo  $Ox$ , que cortará o eixo  $Oy$  no ponto que indica a ordenada do ponto  $P$ , ou seja,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é o par ordenado que corresponde ao ponto  $P$ .

**Figura 1: Plano cartesiano (eixos coordenados).**



### 1.3 Gráfico

Uma função na forma  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada uma função **real** (pois seus valores são números reais, isto é, seu contradomínio é  $\mathbb{R}$ ) de **variável real** (pois sua variável independente assume valores reais, isto é, seu domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ ). O gráfico de uma função desta forma é o seguinte subconjunto do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ :

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D, y = f(x)\}.$$

Assim, um ponto  $(x, y)$  pertence ao gráfico de  $f$  se, e somente se,  $x \in D$  e os números reais  $x$  e  $y$  satisfazem a lei de associação de  $f$ . Em outras palavras, o gráfico de uma função  $f$  é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação.

O principal recurso para esboçar e traçar gráficos de funções reais apresentado aos estudantes no ensino básico é o método baseado em substituição e interpolação. Dado uma expressão algébrica qualquer (usualmente omitem-se o domínio e contradomínio, cometendo o abuso de linguagem comentado inicialmente e, assim, não caracterizando uma função), cria-se uma tabela de valores para  $x$  e  $f(x)$  (mais frequentemente chamado de  $y$ ) onde atribuímos valores para  $x$  e através de substituição na expressão dada, calculamos o valor de  $y$  correspondente. Ao encontrar pares em quantidade suficiente para um bom esboço, traça-se o gráfico no plano cartesiano através dos pontos encontrados. Em geral, os valores da variável independente escolhidos para a tabela são números inteiros próximos de zero e os pontos são ligados por segmentos de reta. Este procedimento envolve pouco raciocínio matemático referente à função trabalhada. Tanto as escolhas dos valores incluídos na tabela quanto a interpolação dos pares obtidos são feitas mecanicamente sem que sejam levadas em consideração as propriedades algébricas e geométricas da função.

Portanto, apesar deste método ser didático para o nível básico, ele não contribui para a compreensão integral do gráfico como conjunto de pontos que satisfazem a lei de associação dada e, como o procedimento envolve ligar pontos por meio de segmentos de reta, ainda pode causar erros em casos onde a função não é contínua.

## 2 FUNÇÃO AFIM

Suponha a situação de ter que escolher entre duas empresas,  $A$  e  $B$ , para alugar um carro em uma viagem. A empresa  $A$  cobra uma taxa fixa de R\$150,00 e R\$0,50 por quilômetro rodado, enquanto a empresa  $B$  recolhe R\$2,00 por quilômetro rodado e não possui taxa fixa. Esta é uma situação muito comum no dia a dia e evidentemente não podemos afirmar que uma empresa é sempre mais vantajosa que a outra sem o devido estudo. Aqui, a escolha depende da estimativa de quilômetros a serem rodados, tornando uma delas mais interessante. As regras que transformam a quantidade de quilômetros rodados no preço cobrado por cada empresa, ao fim do uso do veículo, são representadas por funções **afim**. Matematicamente, chamando de  $x$  a quantidade de quilômetros rodados, podemos calcular o preço a ser cobrado pelas empresas  $A$  e  $B$  através das funções  $f(x) = 0,50x + 150$  e  $g(x) = 2x$ , respectivamente. Neste capítulo, estudaremos este tipo de função e suas características.

### 2.1 Definição e preliminares

**Definição 2.1.1:** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **afim** quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.1:** São exemplos de função afim:

- A função identidade  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- As translações  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por  $f(x) = x + b$ ;
- Funções lineares  $f(x) = ax$ ;
- Funções constantes  $f(x) = b$ .

É possível saber que certa função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é afim sem que os coeficientes  $a$  e  $b$  sejam fornecidos explicitamente. Neste caso, obtém-se  $b$  como o valor que a função dada assume quando  $x = 0$ . O número  $b = f(0)$  às vezes se chama o **valor inicial** da função  $f$ . Quanto ao coeficiente  $a$ , ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  que a função  $f$  assume em dois pontos distintos (porém arbitrários)  $x_1$  e  $x_2$ . De fato, conhecidos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b,$$

Obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

Portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados  $x, x + h \in \mathbb{R}$ , com  $h \neq 0$ , o número  $a = [f(x + h) - f(x)]/h$  chama-se a *taxa de crescimento* (ou taxa de variação) da função  $f$  no intervalo de extremos  $x, x + h$ .

Como exemplo, o preço a ser pago por uma corrida de táxi é dado por uma função afim  $f: x \mapsto ax + b$ , onde  $x$  é a distância percorrida (normalmente medida em quilômetros), o valor inicial  $b$  é a bandeirada e o coeficiente  $a$  é o preço do quilômetro rodado cobrado pelo taxista.

**Proposição 2.1.1:** A função afim  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ , é injetora.

**Demonstração:** Para todos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow ax_1 - ax_2 = 0 \Leftrightarrow a \cdot (x_1 - x_2) = 0.$$

Como  $a \cdot (x_1 - x_2) = 0$ , com  $a \neq 0$ , então  $(x_1 - x_2) = 0$  e, portanto,  $x_1 = x_2$ .

**Proposição 2.1.2:** A função afim  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ , é sobrejetora.

**Demonstração:** Para qualquer que seja  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y$ .

**Observação 2.3.1:** A função afim  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ , é bijetora porque, como visto, é injetora e sobrejetora.

## 2.2 Monotonicidade da função afim

**Proposição 2.2.1:** Uma função afim  $f(x) = ax + b$  é **crecente** quando sua taxa de crescimento (coeficiente  $a$ ) é positiva e **decrescente** quando  $a$  é negativo.

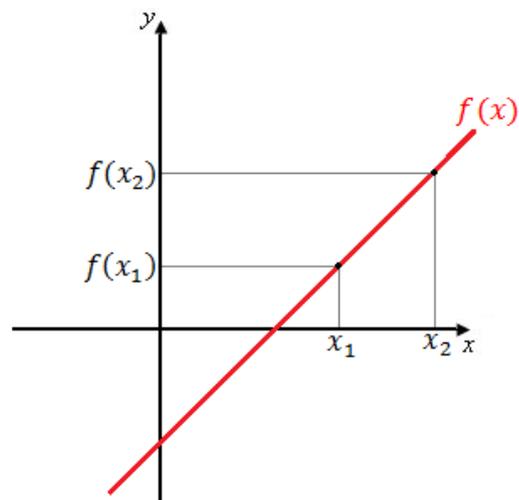
**Demonstração:** Para quaisquer  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $x_1 \neq x_2$ , temos:

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$$

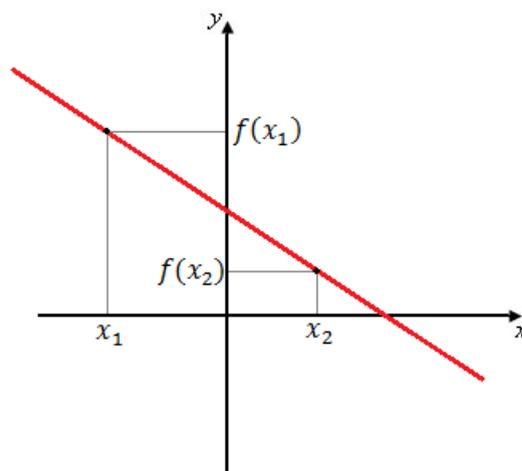
e

$$f(x) = ax + b \text{ é decrescente} \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

**Figura 2: Representação de uma função afim crescente.**



**Figura 3: Representação de uma função afim decrescente.**



### 2.3 Gráfico da função afim

Verificaremos a seguir as características do gráfico da função afim.

**Proposição 2.3.1:** O Gráfico  $G$  de uma função afim  $f: x \mapsto ax + b$  é uma reta.

**Demonstração:** Basta mostrar que três pontos quaisquer do gráfico  $G$  são colineares.

Sejam

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b),$$

$$P_2 = (x_2, ax_2 + b) \text{ e}$$

$$P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

pontos de  $G$ . Vamos mostrar que  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são colineares. Para isso, é necessário e suficiente que o maior dos três números  $d(P_1, P_2)$ ,  $d(P_2, P_3)$  e  $d(P_1, P_3)$  seja igual à soma dos outros dois. Podemos naturalmente supor que as abscissas  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são tais que  $x_1 < x_2 < x_3$ . A fórmula da distância entre dois pontos<sup>1</sup> nos dá:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

e

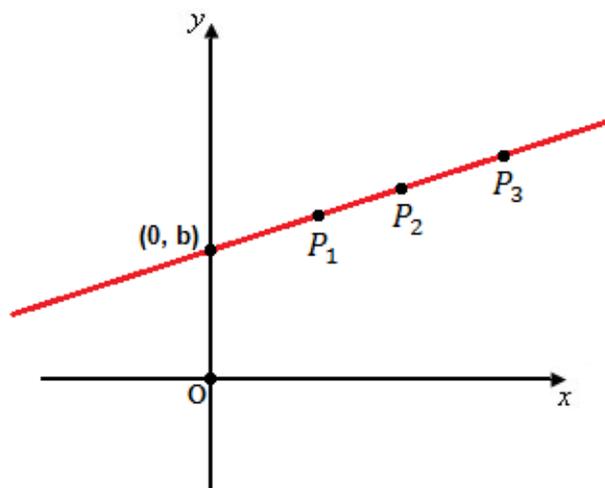
$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Daí, temos imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

■

**Figura 4:** Colinearidade de pontos do gráfico de uma função afim.



<sup>1</sup>LIMA, 2006, p.14-16

Como consequência da proposição anterior, para que uma função afim  $f$  fique totalmente determinada basta conhecer os valores  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$ . Isto se deve ao fato de que o gráfico de  $f$  é uma reta e, como sabemos, uma reta fica determinada quando conhecemos dois de seus pontos.

**Proposição 2.3.2:** Dados arbitrariamente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , com  $x_1 \neq x_2$ , existe uma, e somente uma, função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ .

**Demonstração:** Sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função afim tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ , queremos determinar os coeficientes  $a$  e  $b$  de modo que se tenha  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Isto corresponde a resolver o sistema

$$ax_1 + b = y_1$$

$$ax_2 + b = y_2$$

A solução é imediata:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

■

**Proposição 2.3.3:** Toda reta não vertical  $r$  é o gráfico de uma função afim.

**Demonstração:** Tomemos dois pontos distintos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  na reta  $r$ . Como  $r$  é não vertical, temos necessariamente que  $x_1 \neq x_2$ , logo, pela Proposição 2.3.2, existe uma função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x_1) = y_1$  e  $f(x_2) = y_2$ . O gráfico de  $f$  é uma reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Portanto, essa reta coincide com  $r$ .

■

**Observação 2.3.2:** Geometricamente,  $b$  é a ordenada do ponto onde a reta que é o gráfico da função  $f: x \mapsto ax + b$  intersecta o eixo  $Oy$ , também chamado simplesmente de **coeficiente linear**. O número  $a$  chama-se **inclinação** (ou **coeficiente angular**) dessa reta (em relação ao eixo  $Ox$  das abscissas). Quanto maior o valor de  $a$ , mais a reta se aproxima da posição vertical. Quando  $a > 0$ , o gráfico de  $f$  é uma reta ascendente (da esquerda para a direita) e quando  $a < 0$ , a reta é descendente.

Trabalhando-se com funções, no entanto, não é apropriado chamar o coeficiente  $a$  de coeficiente angular da função  $f$ . O nome mais apropriado é **taxa de variação** (ou taxa de crescimento), pois embora geometricamente  $a$  seja a tangente trigonométrica do ângulo do eixo  $Ox$  com a reta que representa o gráfico da função afim, na maioria dos casos nenhum

ângulo é estudado em problemas algébricos envolvendo funções. Outro problema é que o ângulo que o gráfico faz com o eixo horizontal depende da escala utilizada para medir as grandezas  $x$  e  $f(x)$ . Resumidamente, tem-se a taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

## 2.4 Caracterização da função afim

Para caracterizar a função afim, precisaremos inicialmente do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, apresentado a seguir:

**Teorema 2.4.1:** (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

$$(1) f(n \cdot x) = n \cdot f(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ e todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \text{ Sendo } a = f(1), \text{ tem-se } f(x) = ax \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$(3) f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração:** Iremos provar as implicações (1)  $\Rightarrow$  (2), (2)  $\Rightarrow$  (3) e (3)  $\Rightarrow$  (1).

- (1)  $\Rightarrow$  (2):

Inicialmente, vamos verificar que, para qualquer número racional  $q = \frac{m}{n}$ , a hipótese (1) acarreta que  $f(q \cdot x) = q \cdot f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . De fato, como  $nq = m$ , temos:

$$n \cdot f(qx) = f(nqx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

logo

$$f(qx) = \frac{m}{n} f(x) = q \cdot f(x).$$

Seja  $a = f(1)$ . Como  $f(0) = f(0 \cdot 1) = 0 \cdot f(1) = 0$ , a monotonicidade de  $f$  implica que  $a = f(1) > f(0) = 0$ . Assim,  $a$  é positivo. Além disso,  $f(q) = f(q \cdot 1) = q \cdot f(1) = q \cdot a = aq$  qualquer que seja  $q \in \mathbb{Q}$ .

Mostremos agora que  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Suponha, por absurdo, que exista algum número real  $x$  (necessariamente irracional) tal que  $f(x) \neq ax$ . Vamos admitir  $f(x) < ax$ . Como  $a > 0$ , temos

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tomemos  $q$  racional tal que

$$\frac{f(x)}{a} < q < x.$$

Então  $f(x) < aq < ax$ , ou seja,  $f(x) < f(q) < ax$ . Absurdo, pois  $f$  é crescente e, consequentemente, como  $q < x$ , deveríamos ter  $f(q) < f(x)$ . Portanto, (1)  $\Rightarrow$  (2).

- (2)  $\Rightarrow$  (3):

Seja  $f(x) = ax$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então temos:

$$f(x + y) = a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- (3)  $\Rightarrow$  (1):

Suponhamos, por hipótese, que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Provaremos, por indução sobre  $n$ , que  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Inicialmente, verificaremos a veracidade para  $n = 0$ :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Logo,  $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Suponha, agora,  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall n \geq 0$  (Hipótese de Indução).

Provemos que  $f((n + 1) \cdot x) = (n + 1) \cdot f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Temos,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f((n + 1) \cdot x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = n \cdot f(x) + f(x) = (n + 1) \cdot f(x).$$

Logo,  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Agora, se  $n < 0$ , então  $-n > 0$ . Temos,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(n \cdot x) = f((-n)(-x)) = (-n) \cdot f(-x).$$

Como,  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ , segue que

$$f(-x) = -f(x).$$

Assim  $f(n \cdot x) = (-n) \cdot (-f(x)) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Logo,  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall n < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Portanto,  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

■

**Teorema 2.4.2:** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona injetiva. Se o acréscimo  $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$  depender apenas de  $h$ , mas não de  $x$ , então  **$f$  é uma função afim.**

**Demonstração:** Vamos supor que a função  $f$  seja crescente. Então  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também é crescente, com  $\varphi(0) = 0$ . Além disso, para quaisquer  $h, k \in \mathbb{R}$  temos:

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) = \\ &= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) = \\ &= \varphi(h) + \varphi(k).\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, fazendo  $a = \varphi(1)$ , temos  $\varphi(h) = a \cdot h$  para todo  $h \in \mathbb{R}$ . Isto quer dizer que  $f(x+h) - f(x) = ah$ . Chamando  $f(0)$  de  $b$ , obtemos  $f(h) = ah + b$ , ou seja,  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

■

**Observação 2.4.1:** A recíproca do teorema anterior é válida. De fato, se  $f(x) = ax + b$ , então  $f(x+h) - f(x) = ah$  não depende de  $x$ .

A taxa de variação nos leva a observar uma ligação interessante entre funções afins e progressões aritméticas.

Uma **progressão aritmética** pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  igualmente espaçados na reta. Isto quer dizer que a razão  $h = x_{i+1} - x_i$  não depende de  $i$ :

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_{i+1} - x_i = \dots$$

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função afim, digamos  $f(x) = ax + b$ , e  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  é uma progressão aritmética de razão  $h$ , então os pontos  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah.$$

Assim, se tivermos uma reta não vertical (gráfico de uma função afim) em  $\mathbb{R}$  e tomarmos sobre ela os pontos

$$(1, y_1), (2, y_2), \dots, (i, y_i), \dots$$

cujas abscissas são os números naturais  $1, 2, \dots, i, \dots$ , as ordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$  desses pontos formam uma progressão aritmética.

Reciprocamente, se uma função monótona  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  transforma qualquer progressão aritmética  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  numa progressão aritmética  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots$  então, pelo Teorema anterior,  $f$  é uma função afim.

## 2.5 Zero da função afim

O valor de  $x$  para o qual a função  $f: x \mapsto ax + b$  se anula, ou seja, para o qual  $f(x) = 0$ , denomina-se **zero da função afim** (comumente também chamado de **raiz** da função). Para determinar o zero de uma função afim basta resolver a equação  $ax + b = 0$ .

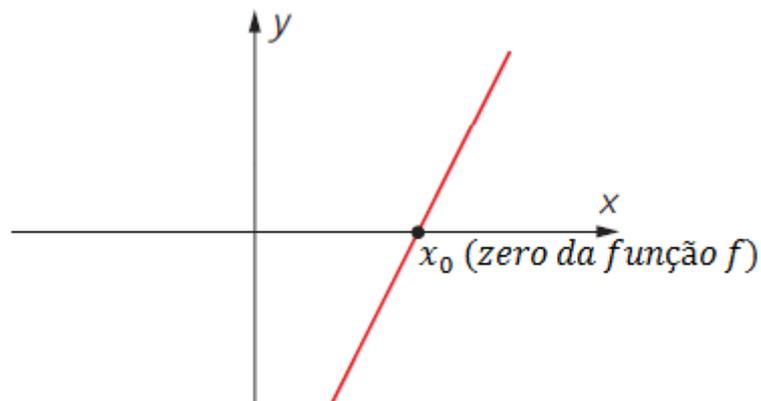
Ou seja,

$$ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Geometricamente, o zero da função afim é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo  $Ox$ .

**Figura 5: Representação geométrica do zero da função afim.**



### 3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Suponhamos que uma pessoa queira aumentar a renda familiar e comece a fazer bolos caseiros para venda. Passado certo tempo e anotando os dados de seus negócios, ela observa que cada bolo custa R\$20,00 em ingredientes e estima que se cada um for vendido por  $x$  reais, ela venderá  $100 - x$  bolos por mês. A função que representa matematicamente o lucro nesta situação pode ser escrita por  $L(x) = x(100 - x) - 20(100 - x) = -x^2 + 120x - 2000$ . Esta equação representa uma função quadrática. Com ela, esta pessoa poderia estabelecer qual o preço a ser cobrado que acarretaria em um lucro máximo, aperfeiçoando seu negócio. Neste capítulo estudaremos a função quadrática e suas características algébricas e geométricas.

#### 3.1 Definição e preliminares

**Definição 3.1.1:** Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **quadrática** quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.1.1:** São exemplos de funções quadráticas:

- a)  $f(x) = 2x^2 - 5x + 150$ , em que  $a = 2$ ,  $b = -5$  e  $c = 150$ .
- b)  $f(x) = -x^2 + x + 1$ , em que  $a = -1$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$ .
- c)  $f(x) = x^2 - 3x$ , em que  $a = 1$ ,  $b = -3$  e  $c = 0$ .
- d)  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 4$ , em que  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$  e  $c = 4$ .
- e)  $f(x) = x^2$ , em que  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = 0$ .

Observe que **não** são funções quadráticas:

- f)  $f(x) = 3x$  (função afim)
- g)  $f(x) = 2^x$  (função exponencial)
- h)  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3$  (função polinomial do terceiro grau).

**Observação 3.1.1:**

(I) Erroneamente, é muito comum a função quadrática ser chamada de *função do segundo grau* nas salas de aula do ensino básico, pois se “assemelha” a uma equação do segundo grau ( $ax^2 + bx + c = 0$ ). A forma correta de utilizar essa nomenclatura seria *função polinomial do segundo grau*.

(II) Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da função quadrática  $f$  ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume e são os principais elementos a serem estudados em funções quadráticas. Ou seja, se  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , então  $a_1 = a_2$ ,  $b_1 = b_2$  e  $c_1 = c_2$ . Vamos mostrar agora a veracidade desta ocorrência.

Seja  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $x = 0$ , tem-se  $c_1 = c_2$ . Então,  $a_1x^2 + b_1x = a_2x^2 + b_2x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^*$ . Dividindo ambos os membros da igualdade por  $x$ , obtemos  $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$  para todo  $x \neq 0$ . Fazendo  $x = 1$ , chegamos em  $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$  e agora substituindo  $x$  por  $-1$  obtemos  $-a_1 + b_1 = -a_2 + b_2$ . Chegamos então no sistema

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \\ -a_1 + b_1 = -a_2 + b_2 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos que  $b_1 = b_2$  e as subtraindo encontramos  $a_1 = a_2$ . Esta observação permite que identifiquemos uma função quadrática com um trinômio do segundo grau.

A fim de que se tenha  $a = a'$ ,  $b = b'$  e  $c = c'$ , não é necessário exigir que  $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Basta supor que esta igualdade valha para três valores distintos de  $x$ .

Suponhamos que as funções quadráticas  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$  assumam os mesmos valores  $f(x_1) = g(x_1)$ ,  $f(x_2) = g(x_2)$ ,  $f(x_3) = g(x_3)$  para três números reais distintos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Escrevendo  $\alpha = a - a'$ ,  $\beta = b - b'$  e  $\gamma = c - c'$ , queremos mostrar que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Sabemos que  $f(x_1) - g(x_1) = 0$ ,  $f(x_2) - g(x_2) = 0$  e  $f(x_3) - g(x_3) = 0$ . Isto significa que

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, vem:

$$\begin{aligned} \alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) &= 0 \\ \alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Como  $x_2 - x_1 \neq 0$  e  $x_3 - x_1 \neq 0$ , podemos dividir a primeira destas equações por  $x_2 - x_1$  e a segunda por  $x_3 - x_1$ , obtendo

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$$

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0$$

Subtraindo membro a membro, temos  $\alpha(x_3 - x_2) = 0$

Como  $x_3 - x_2 \neq 0$ , resulta daí que  $\alpha = 0$ . Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente  $\beta = 0$  e  $\gamma = 0$ . Portanto, se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real  $x$ .

A cada trinômio do segundo grau de coeficientes reais  $ax^2 + bx + c$  é associada uma função quadrática definida por  $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ . Ou seja, dado qualquer trinômio do segundo grau de coeficientes reais  $ax^2 + bx + c$ , a esse corresponde uma função quadrática com os mesmos coeficientes  $a, b$  e  $c$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Note que a correspondência (*trinômio*)  $\mapsto$  (*função quadrática*) é biunívoca, pois é injetiva pela observação anterior e sobrejetiva pela definição de função quadrática.

### 3.2 Valor ou imagem da função quadrática em um ponto

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , o valor (ou a imagem) de  $f$  no ponto  $x_0$  é dada por  $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$ .

**Exemplo 3.5.1:** Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x \mapsto 2x^2 - 2x - 12$ , para calcular o valor dessa função no ponto  $x = 1$ , ou seja,  $f(1)$ , fazemos:

$$f(\mathbf{1}) = 2 \cdot \mathbf{1}^2 - 2 \cdot \mathbf{1} - 12$$

$$f(\mathbf{1}) = -12.$$

Outro problema importante seria questionar o caminho inverso. Dado  $f(x)$ , calcular o valor de  $x$ . Isto é, descobrir o valor de  $x$  que substituindo na função dada, nos retorna o resultado  $f(x)$  dado. Utilizando, ainda, a função dada no exemplo anterior, suponha que  $f(x) = 0$ , então temos  $2x^2 - 2x - 12 = 0$ , que é uma equação do segundo grau. Os valores que satisfazem essa equação são 3 e  $-2$ .

### 3.3 Zeros da função quadrática

O estudo da função quadrática se origina na resolução da equação do 2º grau. Os **zeros** (ou raízes) da função quadrática  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , são todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = 0$ . Ou seja, as soluções da equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Queremos agora generalizar o cálculo dos zeros da função quadrática de modo a ter uma fórmula para o cálculo dos zeros de qualquer função deste tipo.

Para isso, partiremos de  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Subtraindo  $c$  em ambos os membros, temos:

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividindo a equação pelo coeficiente  $a$ , temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Completando quadrados, ficamos com:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

O primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito. Voltando ele para a forma de quadrado de uma soma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os membros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Daí,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Então, concluímos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

O número  $b^2 - 4ac$  é chamado de **discriminante** da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e representado pela letra grega  $\Delta$  (delta).

Por estarmos trabalhando no universo dos números reais, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- Se  $\Delta > 0$ , então a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem **dois zeros reais diferentes**;
- Se  $\Delta < 0$ , então a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  **não tem zeros reais**;
- Se  $\Delta = 0$ , então a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem **dois zeros reais iguais**.

Para usar a fórmula acima basta conhecer os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  da função.

Se  $\Delta > 0$  ou  $\Delta = 0$ , então os zeros dessa função serão:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

**Exemplo 3.3.1:** Calcular os zeros da função real dada por  $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ .

Temos  $f(x) = 2x^2 - 2x - 12 = 0$ , com  $a = 2$ ,  $b = -2$  e  $c = -12$ .

Utilizando a fórmula e substituindo os valores dos coeficientes dados, ficamos com:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) \\ \Delta &= 4 + 96 \\ \Delta &= 100. \end{aligned}$$

Daí,

$$x' = \frac{-(-2) + \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{2 + 10}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

e

$$x'' = \frac{-(-2) - \sqrt{100}}{2 \cdot 2} = \frac{2 - 10}{4} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Verificando:

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 12 = 8 + 4 - 12 = 0,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 12 = 18 - 6 - 12 = 0.$$

Portanto, os zeros de  $f$  são  $-2$  e  $3$ .

**Observação 3.3.1:** Podemos estabelecer as relações de **soma** e **produto** entre os zeros da função quadrática, que servem para muitos propósitos, tanto no estudo de funções quadráticas quanto na resolução de problemas. Dada a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , existindo os zeros de  $f$ , a saber,  $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ , é fácil calcular algebricamente sua soma e produto deles:

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

e

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo,  $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x''] = a[x^2 - x' \cdot x - x'' \cdot x + x' \cdot x''] = a(x - x')(x - x'')$ .

Portanto,  $f(x) = a(x - x')(x - x'')$ , que é a **forma fatorada** da função quadrática.

Note que existem outras formas algébricas de calcular os zeros da função quadrática. Em geral, os livros didáticos de matemática para o ensino básico expõem, numa sequência lógica com progressão de dificuldade, o cálculo das raízes de uma equação do segundo grau, deixando a apresentação da fórmula para o fim. Ou seja, começando desde as equações incompletas, passando pelas completas, que já formam trinômio quadrado perfeito ou que seja necessário completar quadrados para que se tornem um, até as equações completas mais elaboradas.

É fácil resolver por fatoração as equações incompletas com  $c = 0$ , sabendo que para o produto entre dois fatores resultar em zero, um dos fatores tem que ser, também, igual à zero. Por exemplo,  $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 0$  ou  $x = 5 \Rightarrow x' = 0$  e  $x'' = 5$ . A resolução para as incompletas de  $b = 0$  basta isolar a variável  $x$ , se assemelhando ao cálculo para a raiz da equação do primeiro grau, como mostra o exemplo  $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x' = 2$  e  $x'' = -2$ . Para determinar, quando elas existem, as raízes reais de uma equação do segundo grau completa sem utilizar a fórmula, basta completar quadrados e continuar o desenvolvimento algébrico analogamente à demonstração apresentada para a mesma.

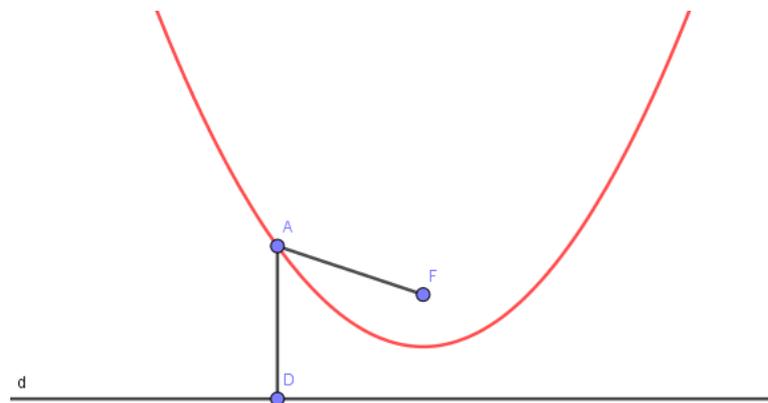
Geometricamente, a relação entre os zeros da função quadrática e o gráfico dessa função é a intersecção do gráfico com o eixo  $Ox$ . Vimos que a função quadrática pode possuir dois zeros reais diferentes, nenhum zero ou dois zeros reais iguais, portanto o seu gráfico poderá cortar o eixo  $Ox$  em **até** dois pontos. Sendo assim, não faria sentido esperar que seu gráfico seja uma reta. Estudaremos a seguir o gráfico da função quadrática.

### 3.4 Gráfico da função quadrática

Veremos que o gráfico de uma função quadrática é uma **parábola**. Para isso, inicialmente recordemos o conceito de uma parábola.

Dados um ponto  $F$  (chamado de **foco** da parábola) e uma reta  $d$  (chamada de **diretriz**) que não contém  $F$ , definimos **parábola** como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $F$  e  $d$ .

**Figura 6: Parábola (Gráfico da função quadrática).**



Na figura acima, onde o segmento  $\overline{AD}$  é perpendicular à reta diretriz  $d$ , são iguais as distâncias de  $A$  até  $F$  e de  $A$  até  $D$ , ou seja,  $d(A, F) = d(A, D)$ , para qualquer ponto  $A$  da parábola.

Observe que para representar o gráfico de uma função quadrática, a reta diretriz da parábola deve ser paralela ao eixo  $Ox$ .

**Proposição 3.4.1:** O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$ , com  $a \neq 0$  é a parábola cujo foco é  $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$  e cuja diretriz é a reta paralela ao eixo  $Ox$  de equação  $y = \frac{-1}{4a}$ .

**Demonstração:** Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , mostremos que a distância de um ponto aleatório  $X = (x, ax^2)$  do gráfico de  $f(x) = ax^2$  ao foco  $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$  é igual à distância do mesmo ponto  $X$  à reta  $d$  de equação  $y = \frac{-1}{4a}$ .

Queremos mostrar que  $d(X, F) = d(X, d)$ .

$$d(X, F) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}.$$

Agora, a distância entre o ponto  $X$  e a reta  $d$  é calculada da seguinte maneira<sup>2</sup>:

$$d(X, d) = \frac{\left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Como distâncias são números positivos, para verificarmos a igualdade entre elas, basta verificar a igualdade entre seus quadrados. De fato,

$$\begin{aligned} (d(X, F))^2 &= \left(\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}\right)^2 = x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= \left(\left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|\right)^2 = (d(X, d))^2. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>LIMA, 2006, vol.III, pp. 37-38

Portanto, o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , é a parábola com as características descritas anteriormente.

■

**Proposição 3.4.2:** Para todo  $a, m \in \mathbb{R}$  com  $a \neq 0$ , o gráfico da função quadrática  $f(x) = a(x - m)^2$  é uma parábola cujo foco é  $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$  e cuja diretriz é a reta horizontal de equação  $y = \frac{-1}{4a}$ .

**Demonstração:** Sendo  $X = (x, a(x - m)^2)$ ,  $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$  e a reta  $d$  de equação  $y = \frac{-1}{4a}$ . Vamos mostrar que para todo  $x \in \mathbb{R}$ , vale a igualdade  $d(X, F) = d(X, d)$ , ou seja,  $(x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2$ .

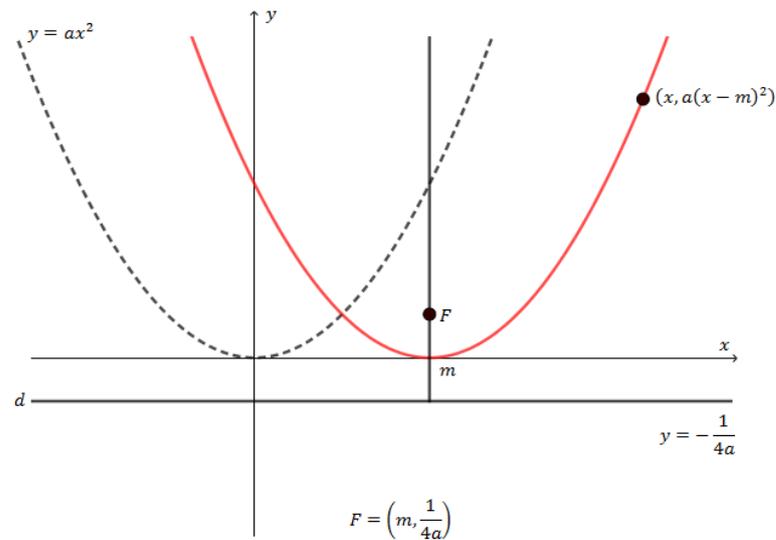
De fato,

$$\begin{aligned} & (x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \\ & = (x - m)^2 + a^2(x - m)^4 - \frac{2a(x - m)^2}{4a} + \frac{1}{16a^2} = \\ & = (x - m)^2 + a^2(x - m)^4 - \frac{(x - m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2} = \\ & = a^2(x - m)^4 + \frac{(x - m)^2}{2} + \frac{1}{16a^2} = \\ & = \left[a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2. \end{aligned}$$

■

**Observação 3.4.1:** Notemos que o gráfico de  $f(x) = a(x - m)^2$  é obtido do gráfico de  $g(x) = ax^2$  através da translação  $(x, y) \mapsto (x + m, y)$ , que leva o eixo  $x = 0$  no eixo  $x = m$ .

**Figura 7: Translação horizontal da parábola.**



**Proposição 3.4.3:** Dados  $m, k \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ , o gráfico da função quadrática  $f(x) = a(x - m)^2 + k$  é a parábola cujo foco é  $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$  e cuja diretriz é a reta horizontal de equação  $y = k - \frac{1}{4a}$ .

**Demonstração:** Sendo  $X = (x, a(x - m)^2 + k)$ ,  $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$  e a reta  $d$  de equação  $y = k - \frac{1}{4a}$ . Vamos mostrar que para todo  $x \in \mathbb{R}$ , vale a igualdade  $d(X, F) = d(X, d)$ , ou seja,  $(x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 + k - k - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x - m)^2 + k - k + \frac{1}{4a}\right]^2$ .

Temos,

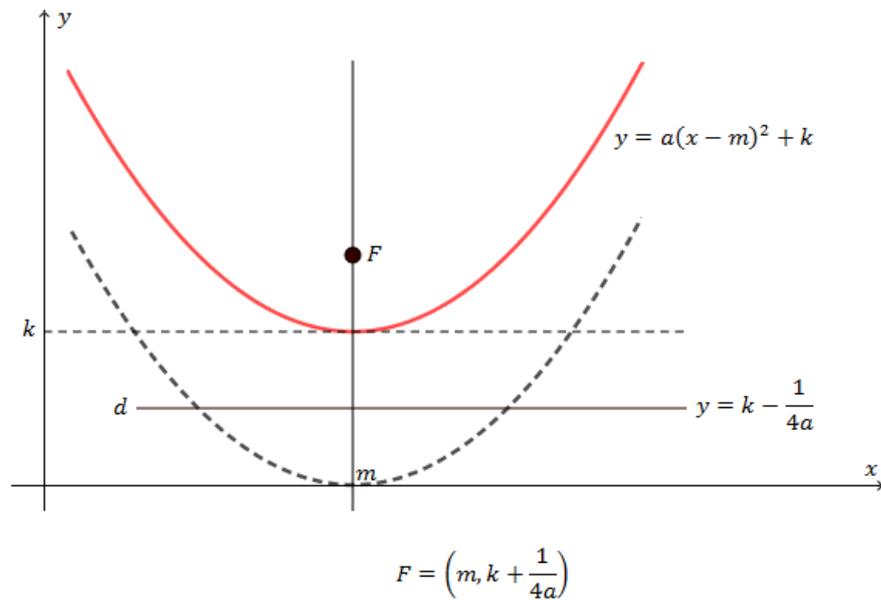
$$\begin{aligned} (x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 + k - k - \frac{1}{4a}\right]^2 &= \left[a(x - m)^2 + k - k + \frac{1}{4a}\right]^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 &= \left[a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2 \end{aligned}$$

e esta igualdade foi verificada na demonstração da **Proposição 3.4.2**.

■

**Observação 3.4.2:** O gráfico da função quadrática  $f = a(x - m)^2 + k$  é obtido através da translação vertical  $(x, y) \mapsto (x, y + k)$  do gráfico de  $g(x) = a(x - m)^2$ . Em outras palavras, adicionando-se  $k$  a cada ponto do gráfico da função  $g$ .

**Figura 8: Translação vertical da parábola.**



Das proposições anteriores, podemos concluir que o gráfico de qualquer função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola que pode estar transladada vertical e/ou horizontalmente em relação à parábola que é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2$ .

Vejamos agora outras observações a respeito do gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , além de algumas interpretações geométricas.

O coeficiente  $a$  indica o direcionamento da concavidade da parábola. Quando:

- $a > 0$ , a concavidade da parábola é voltada para *cima*;
- $a < 0$ , a concavidade da parábola é voltada para *baixo*.

**Figura 9: Orientação da concavidade da parábola.**



Se a concavidade da parábola é para cima, ela tem um ponto de mínimo. Por outro lado, se a concavidade for para baixo, essa parábola terá um ponto de máximo. Este ponto chama-se *vértice* e será estudado na seção 3.5 a seguir.

Quanto maior for o valor do coeficiente  $a$ , mais *fechada* será a concavidade da parábola, enquanto que valores mais próximos de zero mostram o comportamento contrário, isto é, aumentam a abertura da concavidade.

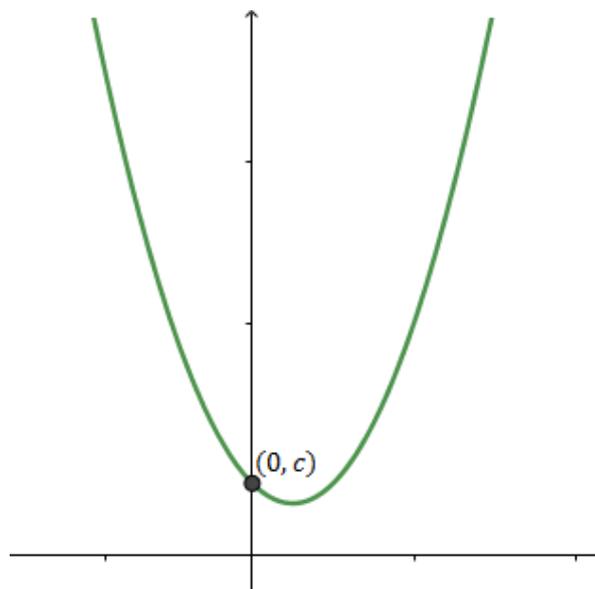
A parábola intersectará o eixo  $Ox$  nos pontos do tipo  $(x, 0)$  e o eixo  $Oy$  no ponto  $(0, y)$ . Vejamos quem são a abscissa  $x$  e a ordenada  $y$  desses pontos.

As raízes reais da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  (caso existam) são as abscissas dos pontos onde o gráfico intersecta o eixo  $Ox$ . Lembrando que o discriminante  $\Delta$  determina quantas raízes reais a função quadrática terá. Temos:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \rightarrow \text{uma raiz real dupla (o gráfico intersecta o eixo em um só ponto)} \\ \Delta > 0 \rightarrow \text{duas raízes reais distintas (o gráfico intersecta o eixo em dois pontos)} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{nenhuma raiz real (o gráfico não intersecta o eixo x)} \end{cases}$$

O coeficiente  $c$  indica a ordenada do ponto onde a parábola intersecta o eixo  $Oy$ . Ou seja, a intersecção do gráfico da função com o eixo das ordenadas acontece no ponto  $(0, c)$ , pois  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ .

**Figura 10: Intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.**



De acordo com o valor do discriminante  $\Delta$  e do coeficiente  $a$ , a parábola pode ter as seguintes disposições no plano cartesiano:

Figura 11: Posições do gráfico da função quadrática quando  $a > 0$ .

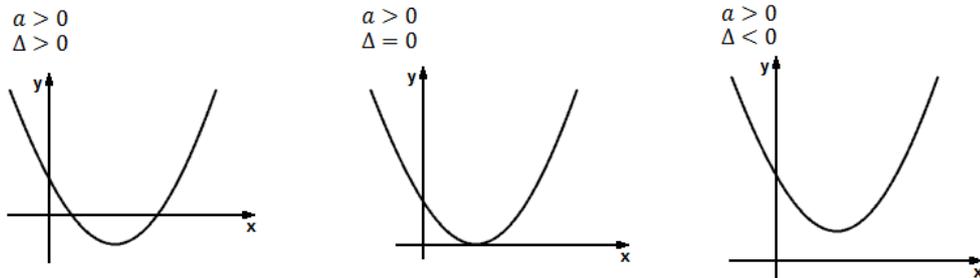
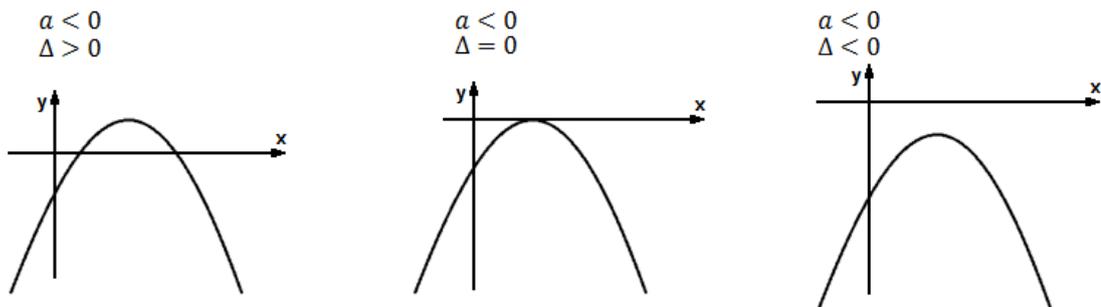


Figura 12: Posições do gráfico da função quadrática quando  $a < 0$ .



Note que as parábolas são figuras simétricas, com um eixo de simetria vertical, paralelo ou coincidente ao eixo das ordenadas passando pelo seu ponto de máximo ou de mínimo. Este ponto, o vértice da parábola, é muito importante no estudo da função quadrática pela sua aplicação em problemas envolvendo este tipo de função. Geometricamente, ele é o ponto médio do segmento que representa a distância do foco à diretriz da parábola. Na sequência, exploraremos sua definição e demonstração da fórmula para determinar seu valor, dada a regra de associação de uma função quadrática qualquer.

### 3.5 Vértice da parábola

Determinar o vértice da parábola permite o estudo de vários elementos da função quadrática relacionada a ele. A partir dele e do sinal do coeficiente  $a$  podemos encontrar a **imagem da função**, bem como seu valor de **máximo** ou de **mínimo** e ainda nos auxilia no esboço do gráfico dessa função.

Tomemos uma função quadrática  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ . Para a obtenção das coordenadas do vértice da parábola associada a  $f$ , utiliza-se o fato de ela ser simétrica em relação à reta que é paralela ao eixo  $Oy$  e contém o Foco da parábola, e ter a reta diretriz paralela ao eixo  $Ox$ . Tomando dois pontos da parábola que são equidistantes do eixo de simetria, basta calcular a média aritmética de suas abscissas para determinar a abscissa  $x$  do vértice, que denotaremos por  $x_v$ . Note que, para  $\Delta > 0$ , podemos utilizar os zeros  $x'$  e  $x''$  da função  $f$  para este propósito. Sendo assim, temos:

$$x_v = \frac{x' + x''}{2}.$$

Vimos anteriormente que  $x' + x'' = -b/a$ . Daí, substituindo na equação anterior, temos:

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

Generalizaremos para qualquer valor de  $\Delta$ . Tome  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$ . Como  $x_v$  pertence ao eixo de simetria da parábola, os pontos  $x_v - m$  e  $x_v + m$  do domínio da função possuem a mesma imagem, ou seja,  $f(x_v - m) = f(x_v + m)$ . Então:

$$\begin{aligned} a(x_v - m)^2 + b(x_v - m) + c &= a(x_v + m)^2 + b(x_v + m) + c \Rightarrow \\ a(x_v^2 - 2x_v m + m^2) + bx_v - bm &= a(x_v^2 + 2x_v m + m^2) + bx_v + bm \Rightarrow \\ ax_v^2 - 2ax_v m + am^2 + bx_v - bm &= ax_v^2 + 2ax_v m + am^2 + bx_v + bm \Rightarrow \\ 4ax_v m &= -2bm \Rightarrow \\ x_v &= \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

A ordenada do vértice, denotada por  $y_v$ , é o valor de  $f$  no ponto  $x_v$ , ou seja:

$$y_v = f(x_v) = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Portanto, o vértice da parábola que é o gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , é o ponto:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

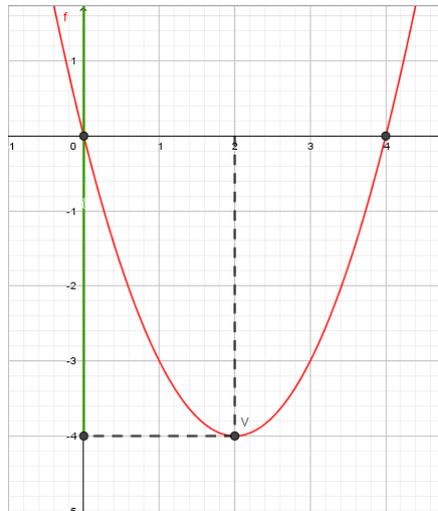
**Exemplo 3.5.1:** Para  $f(x) = x^2 - 4x$  temos

$$x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \quad e \quad y_v = \frac{-(16)}{4 \cdot 1} = -4$$

Portanto,  $V = (2, -4)$ .

Observe o gráfico:

**Figura 13:** Representação do vértice  $V$  da parábola.



Pelo gráfico podemos ver que a imagem de  $f$  é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}.$$

**Observação 3.7.1:** Dada  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , se  $V(x_v, y_v)$  é o vértice da parábola associada, temos então:

- Se  $a > 0$ , então  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v\}$  e  $y_v$  é o valor mínimo de  $f$ ;
- Se  $a < 0$ , então  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v\}$  e  $y_v$  é o valor máximo de  $f$ .

### 3.6 Forma canônica da função quadrática

Dada a função quadrática  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  determinada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando quadrados, temos:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right].$$

Simplificando:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Lembrando que  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e  $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = f(x_v)$ , então para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , podemos escrever qualquer função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  da seguinte maneira:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

a qual é denominada **forma canônica**.

### 3.7 Caracterização da função quadrática

Uma *progressão aritmética de segunda ordem* é uma sequência  $y_1, y_2, y_3, \dots$  em que as diferenças sucessivas  $d_1 = y_2 - y_1$ ,  $d_2 = y_3 - y_2$ , ... formam uma progressão aritmética usual. Por exemplo, a sequência 1, 4, 9, 16, 25, ... dos quadrados dos números naturais é uma progressão aritmética de segunda ordem. Isto significa que a função quadrática  $f(x) = x^2$  transforma a P.A. 1, 2, 3, 4, 5, ... na P.A. de segunda ordem  $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots$

Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma função quadrática qualquer e  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$  é uma P.A. arbitrária, então os números  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), y_3 = f(x_3), y_4 = f(x_4), \dots$  formam uma P.A. de segunda ordem, isto é, goza da propriedade de que as diferenças sucessivas  $d_1 = y_2 - y_1$ ,  $d_2 = y_3 - y_2$ ,  $d_3 = y_4 - y_3$ , ... formam uma progressão aritmética. Mais precisamente, se  $x_{i+1} - x_i = r$ , para todo  $i = 1, 2, 3, \dots$ , então  $d_{i+1} - d_i = 2ar^2$ . De fato, para todo  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\begin{aligned} d_{i+1} - d_i &= y_{i+1} - y_i = ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c - ax_i^2 - bx_i - c = a(x_{i+1}^2 - x_i^2) + b(x_{i+1} - x_i) = \\ &= a(x_{i+1} + x_i)(x_{i+1} - x_i) + b(x_{i+1} - x_i) = a(x_{i+1} + x_i)r + br \end{aligned}$$

e

$$d_i = y_i - y_{i-1} = a(x_i + x_{i-1})r + br.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_{i+1} - d_i &= a(x_{i+1} + x_i)r + br - a(x_i + x_{i-1})r - br = \\ &= a(x_i + r + x_i)r - a(x_i + x_i - r)r = 2ar^2. \end{aligned}$$

**Observação 3.7.1:** Uma P.A. pode ter razão  $x_{n+1} - x_n = 0$ . Neste caso, trata-se de uma sequência constante:  $x_1, x_1, x_1, \dots$ . Consequentemente, uma P.A. de segunda ordem pode degenerar-se em uma P.A. ordinária, quando a razão  $r$  da P.A.  $y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots$  for igual a zero.

**Teorema 3.7.1:** (Caracterização das Funções Quadráticas.) Para que a função contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  seja transformada por  $f$  numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n), \dots$

**Demonstração:** Mostremos que se  $y_1, y_2, y_3, \dots$  é uma P.A. de segunda ordem, então existem números reais  $a, b, c$  tais que  $y_n = an^2 + bn + c$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, considerando a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , temos  $y_n = f(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , portanto a restrição de  $f$  aos números naturais fornece os termos da P.A. de segunda ordem dada. De fato, as diferenças sucessivas

$$y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_{n+1} - y_n, \dots$$

formam uma P.A. ordinária, cujo primeiro termo é  $d = y_2 - y_1$  e cuja razão chamaremos de  $r$ , portanto seu  $n$ -ésimo termo é

$$y_{n+1} - y_n = d + (n - 1)r,$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Temos então:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + \dots + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1 \\ &= [d + (n - 1)r] + [d + (n - 2)r] + \dots + [d + r] + d + y_1 \end{aligned}$$

$$= nd + \frac{nr(n-1)}{2} + y_1$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Esta igualdade também é verdadeira quando  $n = 0$ , o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} y_n &= (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)}{2}r + y_1 \\ &= \frac{r}{2}n^2 + \left(d - \frac{3r}{2}\right)n + r - d + y_1 \\ &= an^2 + bn + c, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $a = \frac{r}{2}$ ,  $b = d - \frac{3r}{2}$ ,  $c = r - d + y_1$ .

Isso mostra a necessidade, concluindo a primeira parte da demonstração.

Para provar a suficiência, seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua com a propriedade de transformar toda P.A. não-constante numa P.A. de segunda ordem não-degenerada. Considerando a função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = f(x) - f(0)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , vemos que  $g$  tem as mesmas propriedades de  $f$  e mais a propriedade adicional de que  $g(0) = 0$ .

Em particular, considerando a progressão aritmética  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , temos que  $g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$  forma uma P.A. de segunda ordem não-degenerada. Logo existem constantes  $a \neq 0$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $g(n) = an^2 + bn + c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $g(0) = 0$ , segue que  $c = 0$ . Logo, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$g(n) = an^2 + bn.$$

Agora, fixemos arbitrariamente um número  $p \in \mathbb{N}$  e consideremos a progressão aritmética

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots, \frac{n}{p}, \dots$$

Analogamente, concluímos que existem  $a' \neq 0$  e  $b'$  tais que

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$an^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{np}{p}\right) = a'(np)^2 + b'(np) = (a'p^2)n^2 + (b'p)n.$$

Portanto, as funções quadráticas

$$ax^2 + bx \quad \text{e} \quad (a'p^2)x^2 + (b'p)x$$

coincidem para todo  $x = n \in \mathbb{N}$ . Assim,  $a = a'p^2$  e  $b = b'p$ , ou seja,  $a' = \frac{a}{p^2}$ ,  $b' = \frac{b}{p}$ .

Logo, para quaisquer números naturais  $n$  e  $p$  vale:

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\frac{n}{p}.$$

Portanto as funções contínuas  $g(x)$  e  $ax^2 + bx$  são tais que  $g(r) = ar^2 + br$  para todo número racional positivo  $r = \frac{n}{p}$ . Segue-se que  $g(x) = ax^2 + bx$  para todo número real positivo  $x$ . Analogamente, considerando a P.A.  $-1, -2, -3, \dots$ , concluiríamos que  $g(x) = ax^2 + bx$  para todo  $x \leq 0$ . Logo, colocando  $f(0) = c$ , temos  $f(x) = g(x) + c$ , ou seja,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

■

## **4 UMA ABORDAGEM COM O USO DA LINGUAGEM SCRATCH**

Nas últimas décadas, o mundo tem passado por um processo de desenvolvimento tecnológico muito acelerado. Esta evolução ramifica cada vez mais as áreas de pesquisa, gerando ainda mais novidades. Todo avanço tecnológico tem envolvimento de máquinas. Na medicina, braços mecânicos já realizam cirurgias com precisão e detalhamento superiores à capacidade humana. Na indústria, a maior parte dos processos de produção é automatizada. Na agricultura, a mecanização já existe desde a preparação do solo até a colheita. Ou seja, máquinas estão substituindo o homem. Contudo, apesar de desenvolverem as atividades com velocidade, força e precisão surpreendentes, ainda há a necessidade de serem programadas.

Desenvolvimento de software, que exige programação, é uma área com crescente necessidade de profissionais, entretanto a maioria das escolas não fornecem nenhuma formação ou apoio neste campo. Daí, visando fortalecer as estratégias para resolução de situações-problema, ampliar o domínio dos jovens sobre instrumentos tecnológicos, introduzir programação no leque de competências dos estudantes, resgatar o interesse e motivação em aprender e entrelaçar essa área com a Matemática, apresentaremos uma proposta para abordar funções afim e quadrática utilizando o software Scratch. As atividades terão como público alvo o último ano do ensino fundamental e primeiro ano do ensino médio.

### **4.1 Resolução de situações-problema**

Desde os primórdios, nos deparamos com situações em que precisamos utilizar alguma estratégia para superar o obstáculo à frente. A simples tarefa de cortar dois galhos de árvore de mesmo tamanho para formar a armação de uma barraca já requer uma linha de raciocínio sistematizada. Daí para as adversidades encontradas na exploração espacial, utilizando espaçonaves sofisticadas e equipamentos de tecnologia de ponta, existe uma ampla diferença de habilidades envolvidas. É natural pensar, portanto, que a resolução de problemas está intrínseca à nossa história e que as dificuldades enfrentadas aumentam junto com nossa evolução como civilização.

Apesar de andar lado a lado com nosso desenvolvimento, só no final da década de 70 que começou a se fortalecer a resolução de situações-problema na área da matemática, já que

estão diretamente ligadas. Note que resolução de problemas difere da resolução de situação-problema. Um pode limitar-se num cálculo direto, por exemplo, a resolução de uma equação dada já na forma de expressão matemática, enquanto o outro é uma situação elaborada, contendo um texto discorrendo sobre uma circunstância arbitrária ligada ao nosso dia a dia, onde o estudante necessita ler, interpretar, selecionar os dados importantes e entender o problema proposto, antes de poder elaborar uma estratégia para resolvê-lo pondo em prova tudo o que se sabe. Ou seja, a resolução de uma situação-problema aborda um leque de habilidades muito superior às necessárias para a resolução de uma simples equação.

Segundo Dante (2003, p. 20):

“situações-problema são problemas de aplicação que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos... Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a Matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse”.

Estas situações são responsáveis por grande parte das dúvidas que surgem entre os estudantes. O aluno precisa executar leitura atenta e interpretativa, entender a situação, extrair as informações fornecidas e traduzi-las para linguagem matemática, identificando a operação ou sequência de operações mais adequadas para a resolução. Para isso é necessário que o aluno aplique o que aprendeu em outros componentes curriculares ou até em outras áreas do conhecimento, desde conceitos de física, química e biologia até língua portuguesa, história, geografia, entre outros.

Devido a essa extensão do processo de busca pela resposta, os estudantes acham o processo complicado, tedioso e desnecessário, perdendo a motivação que os impulsiona. A proposta das situações-problema é precisamente o inverso. Justamente pela ligação com uma situação do cotidiano, possibilitando que o estudante estabeleça uma relação de vivência com o problema, é que se espera despertar-lhes a curiosidade e interesse para buscar a solução e, principalmente, desenvolver habilidades próprias dentro da escola para abordar adversidades e se preparar para a vida fora dela.

Considere o exemplo a seguir, retirado da prova de matemática do ENEM-2017:

**Exemplo:** (ENEM-2017) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

### **Caminhão entala em viaduto no Centro**

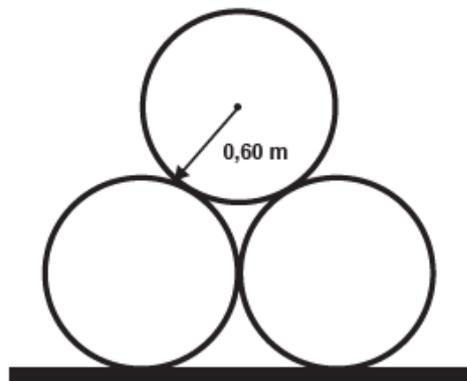
Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Bordes de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

**Figura 14: Situação-problema contida no ENEM-2017.**



Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

**Figura 15: Situação-problema contida no ENEM-2017.**



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$  (\*).

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

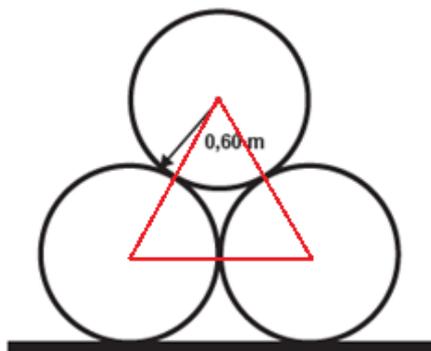
- a) 2,82
- b) 3,52
- c) 3,70
- d) 4,02
- e) 4,20

**Resolução e comentários:**

Observamos inicialmente a quantidade de informações para uma única questão. Ao ler, o candidato precisa interpretar toda a situação e atentar-se às informações relevantes contidas no texto. A manchete e o parágrafo inicial apenas ilustram a situação-problema, enquanto que a partir da primeira figura encontramos os dados necessários para a sua resolução.

O exercício pergunta qual deveria ser a *altura mínima para que esse caminhão pudesse passar com segurança*, portanto devemos analisar todas as alturas desde o chão até a parte mais alta do empilhamento de canos, além de considerar a margem de segurança recomendada de, no mínimo, 50 cm. Portanto, devemos somar os valores das alturas: Solo ↔ Base da carroceria ↔ Altura da pilha de canos ↔ Viaduto (margem de segurança). Conhecemos a distância do solo à base (1,30 m) e a margem de segurança (0,50 m), portanto nos resta apenas calcular a altura da pilha de canos através do raio de um deles, dado pelo desenho de sua vista traseira. Aqui é importante o candidato verificar que esta altura não é duas vezes o diâmetro do cano, pois o que está disposto na posição superior se apoia ligeiramente entre os dois inferiores.

**Figura 16: Ligação entre os centros da circunferência para visualizar a resolução.**



Unindo os centros das circunferências como mostra a figura anterior, obtemos um triângulo equilátero de lado  $l = 1,20 \text{ m}$ . Daí é fácil observar que a altura da pilha de canos é a altura deste triângulo equilátero, somado com duas vezes o raio de  $0,60 \text{ m}$  (um abaixo e outro acima do triângulo, unindo a caçamba ao ponto mais alto da pilha).

Uma forma de efetuar este cálculo é utilizando a fórmula da altura  $h$  do triângulo equilátero (obtida traçando sua altura e aplicando o Teorema de Pitágoras em qualquer um dos dois triângulos retângulos resultantes) dada por  $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ . Assim,

$$h = \frac{1,2\sqrt{3}}{2} = 0,6\sqrt{3} \leftrightarrow 1,02 \text{ m}.$$

Portanto, a altura do empilhamento de canos é  $1,02 + 0,6 + 0,6 = 2,22 \text{ m}$ . Daí, utilizando a estratégia elaborada anteriormente, a altura mínima do viaduto deve ser  $2,22 + 1,30 + 0,50 = 4,02 \text{ m}$ , que está representada pela alternativa (d).

Ainda aproveitando o exemplo, situações-problema na forma de questão objetiva contemplam quatro alternativas chamadas de *distratores*, que têm por objetivo analisar o erro do estudante. Supondo que tivesse sido marcada a alternativa (e), o professor consegue identificar onde esteve o equívoco. Ao somar, considerar a altura do empilhamento de canos como duas vezes o diâmetro de um deles, o cálculo final resultaria em  $4,20 \text{ m}$ . Ou seja, as alternativas não são elaboradas arbitrariamente, mas sim visando compreender o raciocínio do aluno.

A resolução de situações-problema é considerada uma metodologia de ensino inovadora por muitos especialistas da área da educação, pois proporciona ao estudante a capacidade de *aprender a aprender*. Dá a ele a autonomia para gerir a própria aprendizagem, evidenciando os processos de pensamento e raciocínio. O estudante deve assumir o papel de protagonista da própria aprendizagem. Ou seja, ele deve aprender a buscar informações e conhecimento sozinho através de estudos e pesquisas nos diversos meios disponíveis, como livros, enciclopédias, internet, jornais, documentários, etc. Com isso, há uma evolução nas funções do aluno e do professor dentro da sala de aula. O professor torna-se o mediador do processo de ensino e aprendizagem.

O papel do professor neste processo é fazer intervenções direcionando o estudante para o caminho correto, sem entregar a resposta ou atalhos para a resolução. Ele deve saber

ajudar a organizar as ideias, guiar o estudante para que aprenda a retirar os dados mais importantes fornecidos pelo enunciado, estimular a aprendizagem e principalmente saber lidar com os erros. Especialmente em matemática, análise do erro é importante para o aprendizado. Deve ficar claro para o aluno onde ele errou e o porquê, de modo que possa evitar os mesmos erros futuramente. Ensinar bem inclui conduzir o estudante a pensar, criticar, debater e questionar. De acordo com Cury (2003, p.127), “a exposição interrogada gera a dúvida, a dúvida gera o estresse positivo, e este estresse abre as janelas da inteligência. Assim formamos pensadores, e não repetidores de informações”.

Atualmente, ainda não damos a devida importância à resolução de situações-problema, porém estamos caminhando para essa direção. Provas de vestibulares, concursos públicos e processos seletivos cada vez mais incluem situações elaboradas para avaliar os candidatos, como o exemplo supracitado do Exame Nacional do Ensino Médio. Sua complexidade é proposital e permite uma análise mais profunda e fiel do verdadeiro conhecimento e habilidades do candidato. Algumas escolas que priorizam a evolução do ensino já estão desenvolvendo metodologias próprias, centradas na resolução de situações-problema e treinando professores para serem mediadores no processo de ensino-aprendizagem, transformando estudantes em protagonistas.

Apesar dos inúmeros benefícios trazidos pela injeção de situações-problema no ensino brasileiro, o nosso público estudantil, de uma maneira geral, passa por uma fase de comodismo. A interpretação errada da progressão continuada, em que o estudante é aprovado automaticamente, independentemente de ele ter ou não conseguido obter as habilidades e competências exigidas, a falta de participação dos pais na vida escolar dos filhos, tanto no acompanhamento dos estudos diários quanto no estímulo e incentivo mostrando valores e a importância dos estudos, são alguns dos fatores que corroboram com essa falta de interesse dos estudantes. Nosso sistema educacional arcaico não é menos culpado. Ele valoriza mais as notas obtidas pelos estudantes do que o conhecimento efetivamente adquirido. Embora especialistas e pesquisadores da área de educação tenham evoluído muito as noções pedagógicas de avaliação, ainda é mais conveniente para o aluno conseguir as notas de maneiras antiéticas. Assim, os estudantes frequentam atividades básicas apenas por obrigação, não se dedicam e, por conseguinte, deixam de exercitar e melhorar sua capacidade de pensamento.

Todos esses fatores mencionados resultam na desvalorização do conhecimento. Para reverter este quadro, os professores, com o apoio de toda a equipe escolar, precisam elaborar estratégias criativas e inovadoras que cativem a atenção dos estudantes. Ou seja, elaborar aulas envolvendo os diversos espaços e ambientes disponíveis na escola, desenvolver projetos e até utilizar os diversos aparelhos tecnológicos disponíveis, como smartphones, computadores, tablets e lousa digital, entre outros. Aulas diferenciadas geram motivação, que por sua vez, transformam apatia em protagonismo e proatividade, elevando a qualidade do ensino e aprendizagem. Segue um exemplo em que “transformei” o piso quadriculado da sala de aula em plano cartesiano para reforçar o conhecimento sobre como esboçar gráficos de função afim. Esta atividade foi aplicada a uma turma do nono ano do ensino fundamental, que mostrou um nível de atenção e participação muito superior comparado às aulas expositivas tradicionais.

**Figura 17: Professor Douglas Costa em atividade diferenciada em Araçatuba-SP.**



Outro trabalho que vem sendo realizado, ainda dentro do objetivo de diferenciar as aulas, é a utilização de programação no ensino de matemática e desenvolvimento das habilidades necessárias para resolução de situações-problema. De acordo com George Polya (1887-1985), matemático húngaro, a resolução de um problema é dividida em quatro passos principais. São elas:

- Compreensão do problema;
- Elaboração de um plano de solução;
- Execução do plano;

- Verificação da resposta obtida.

Do ponto de vista computacional, estes passos representam um algoritmo. Portanto, resolver uma situação-problema em Matemáticas e assemelha a programar, já que exercitam as mesmas habilidades. Programação é considerada uma das habilidades para as profissões do futuro. Partindo dessa ideia, é razoável considerar que aliar programação com resolução de situações-problema é uma estratégia efetiva de mobilização e motivação para os estudantes. De fato, é o que foi observado na aplicação desta técnica utilizando o software Scratch e será relatado mais adiante neste trabalho. De acordo com Ricardo Basaglia, diretor da empresa de recrutamento Michael Page, “A demanda por profissionais com essa habilidade (programar) deve ser maior do que a de uma pessoa que domine um segundo idioma”.

## 4.2 Scratch

Programação é o processo de escrita dos códigos que regem um programa de computador, seja ele simples ou complexo. Computadores nada mais fazem do que processar dados, portanto precisamos *ensiná-los* a executar as tarefas que cobramos deles. Isso traz muitas vantagens, como por exemplo, a agilidade para desenvolvimento de tarefas repetitivas ou complexas que demorariam muito tempo caso feito manualmente. Para isso, utilizamos as **linguagens de programação**.

Linguagens de programação são métodos padronizados de transferir instruções para um computador. São compostas por diversos códigos e regras que o computador consegue interpretar de modo a executar uma tarefa. Elas permitem que o programador especifique exatamente os dados que o computador deverá utilizar e como eles serão trabalhados, armazenados, transmitidos, transformados ou outra ação qualquer que devem ser tomadas para atingir o objetivo. Essas informações são passadas de forma ordenada e sequencial e são executadas passo a passo pela máquina, isto é, na forma de **algoritmos**.

Algoritmo é uma sequência ordenada finita e não ambígua de instruções para executar uma tarefa.

Embora ainda não seja uma palavra usada corriqueiramente, seguimos algoritmos para as mais diversas atividades do dia a dia. Por exemplo, vamos analisar o processo de ferver certa quantidade de água.

*Algoritmo para ferver uma quantidade de água:*

1. Selecione uma panela ou leiteira que pode ser levada ao fogo.
2. Insira a água no recipiente.
3. Coloque o utensílio sobre o fogo.
4. Espere alguns minutos.
5. Apague o fogo.

Observe que a ordem escolhida para os passos é importante para que o resultado obtido seja o esperado. Embora trocando a ordem dos passos 2 e 3 não altere significativamente o produto final, o simples fato de permutar os passos 3 e 4 determinaria o sucesso ou fracasso da tarefa planejada.

Note ainda que esta não é a única forma de ferver uma quantidade de água. Poderíamos escrever o mesmo algoritmo de forma diferente e obter resultado semelhante ou até superior ao encontrado anteriormente. Alguns problemas óbvios que não foram abordados são: quantidade de água, tamanho do recipiente, distância do objeto ao fogo e tempo de espera. O tempo de espera, como foi proposto, pode não ser suficiente de acordo com a quantidade de água e/ou intensidade do fogo ou extrapolar e acarretar no desperdício do combustível que mantém a chama ou ainda evaporar a água, reduzindo o produto final e, por consequência, a eficiência. Para corrigir isso, poderíamos substituir o quarto passo por uma espera curta e adicionar a decisão de verificar se a água está fervendo ou não. Em caso afirmativo após a verificação, pular para a próxima instrução e, caso contrário, voltar para o início do quarto passo.

Veja o algoritmo adaptado para a melhoria discutida:

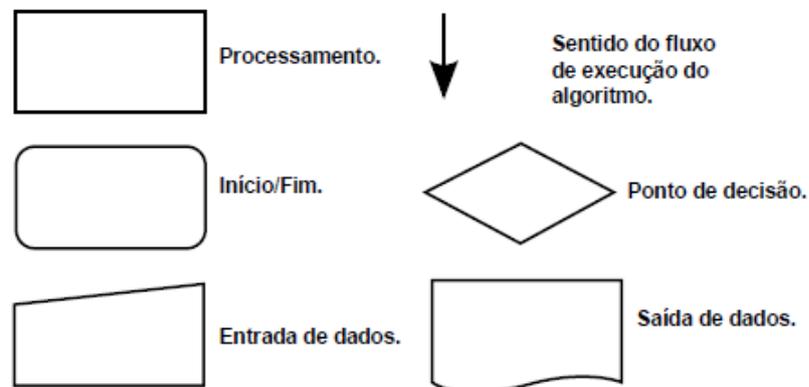
1. Selecione uma panela ou leiteira que pode ser levada ao fogo.
2. Insira a água no recipiente.
3. Coloque o utensílio sobre o fogo.
4. Espere 10 segundos.
5. Se a água estiver fervendo, continue, senão volte para o passo 4.
6. Apague o fogo.

Algoritmos podem ser representados na forma de descrição narrativa, fluxograma ou linguagem algorítmica.

Descrição narrativa é a utilização da própria língua mãe para descrever os processos envolvidos na execução da tarefa, como utilizado no exemplo anterior sobre o fervimento da água.

Fluxograma consiste em usar formas geométricas padronizadas para descrever os passos a serem executados no algoritmo. A figura a seguir mostra os blocos mais comuns utilizados na representação de um algoritmo através de fluxograma.

**Figura 18: Formas geométricas utilizadas em fluxogramas**



Por usar representação geométrica, os fluxogramas podem ser entendidos mais facilmente mesmo sem conhecimentos prévios sobre programação. Porém, para representar algoritmos mais sofisticados com diversos passos e interações complexas, os fluxogramas não são muito adequados pelo grande espaço utilizado e emaranhado de blocos que resulta deste processo.

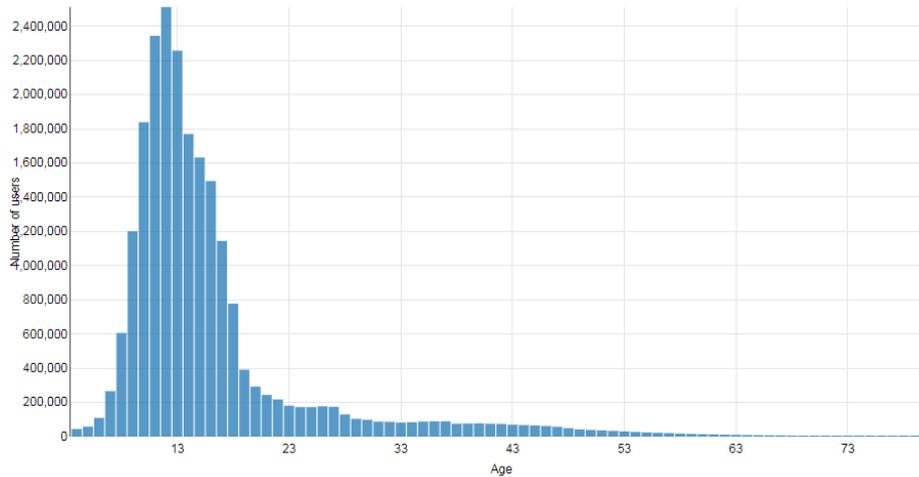
Por fim, a linguagem logarítmica, também chamada de pseudocódigo ou pseudolinguagem é uma forma genérica de escrever um algoritmo, sendo uma forma intermediária entre descrição narrativa e linguagem de programação. Este meio termo se dá pela utilização da estrutura de uma linguagem de programação, porém sem o alto rigor envolvido nas suas regras e códigos.

A seguir iremos abordar um pouco sobre a linguagem de programação Scratch.

Scratch é uma linguagem de programação visual, que possui uma comunidade online usada por dezenas de milhões de pessoas ao redor do mundo, tanto para propósitos educativos quanto para lazer. Ele foi desenvolvido pelo MIT (Massachusetts Institute of Technology) Media Lab e lançado publicamente em 2013 com o objetivo de ajudar crianças a partir de oito anos a pensarem de forma criativa, utilizar raciocínio sistemático e trabalhar

cooperativamente. É um software livre que pode ser baixado para uso off-line ou acessado online pelo site oficial <https://scratch.mit.edu>.

**Figura 19: Distribuição de idade de novos Scratchers (dados gerados em Jan/18).**



Diferentemente das principais linguagens de programação utilizadas nos mais diversos sistemas, o Scratch usa blocos personalizados, com encaixe (semelhante ao LEGO) e agrupados em categorias, que facilitam o entendimento e construção de códigos e algoritmos. Esta forma de representação influenciou vários outros ambientes de programação e está disponível em mais de 40 idiomas e 150 países. Com poucas informações, os usuários já são capazes de elaborar histórias interativas, cartões animados, jogos, animações, músicas, programas e ainda compartilhar suas criações na comunidade online.

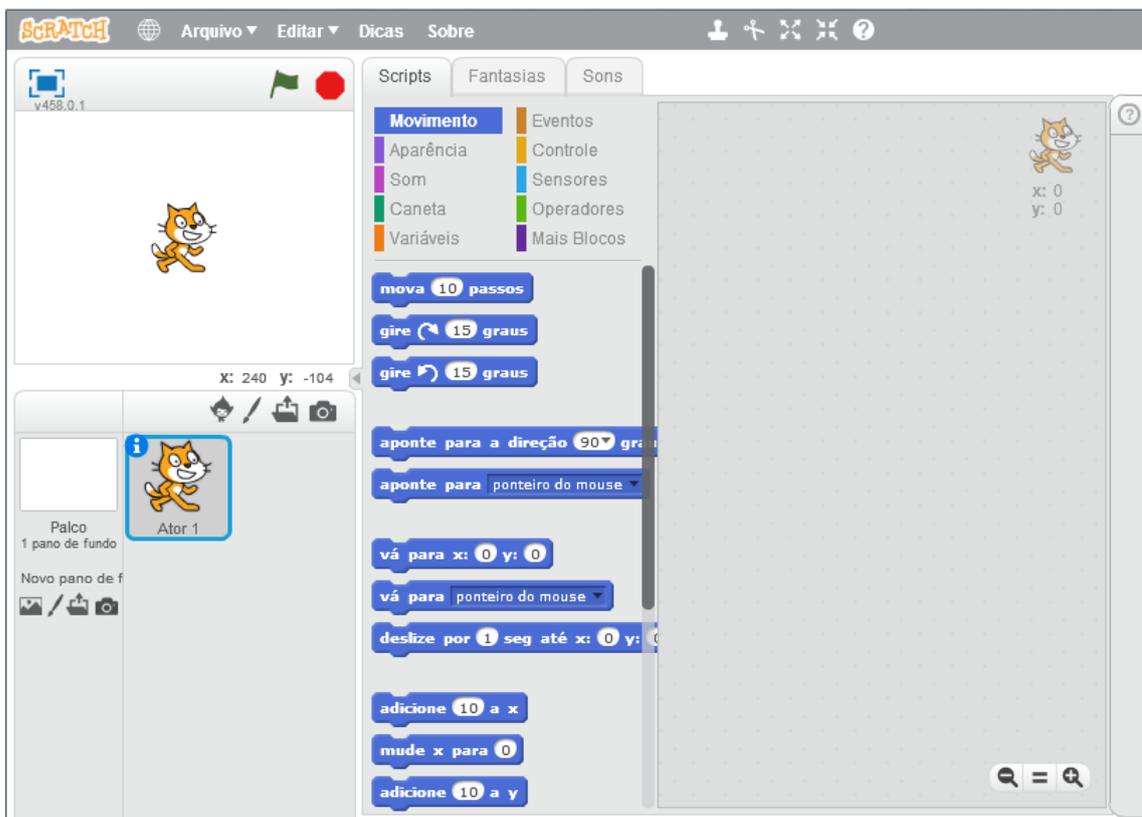
Ao abrir o programa, o usuário se depara a uma interface simples e intuitiva, onde encontra um palco na parte superior esquerda, que representa os resultados parciais ou finais e conta com uma lista de atores (objetos geométricos ou figuras) adicionados ao programa no espaço inferior ao palco. O palco tem 480 pixels de largura e 360 pixels de altura, com coordenadas variando de -240 até 240 para as abscissas e de -180 a 180 para as ordenadas, seguindo as mesmas orientações do plano cartesiano.

Na parte central, encontram-se as abas de scripts, fantasias e sons. Scripts são os blocos, que estão separados nas categorias movimento, aparência, som, caneta, variáveis, eventos, controle, sensores, operadores e mais blocos. A aba de fantasias permite desenhar, importar ou editar as aparências de um objeto, permitindo criar vários efeitos, incluindo animações. A terceira e última aba gerencia os sons dos objetos, oferecendo recursos para entrada de voz através de microfone ou carregados externamente. O Scratch também oferece

um banco de imagens e sons próprio para auxiliar nas criações, sem a necessidade de utilizar imagens externas.

À direita da tela inicial, encontra-se a área de programação, para onde os blocos devem ser arrastados e conectados logicamente para construir o algoritmo desejado. Esta área é ilimitada e expande automaticamente conforme mais blocos são incluídos. A versão 2.0 do programa adicionou o zoom como opção de acessibilidade nesta área. Neste espaço, também é possível escrever comentários para orientar ou especificar o que cada bloco de programação significa, mais utilizado em algoritmos longos e complexos.

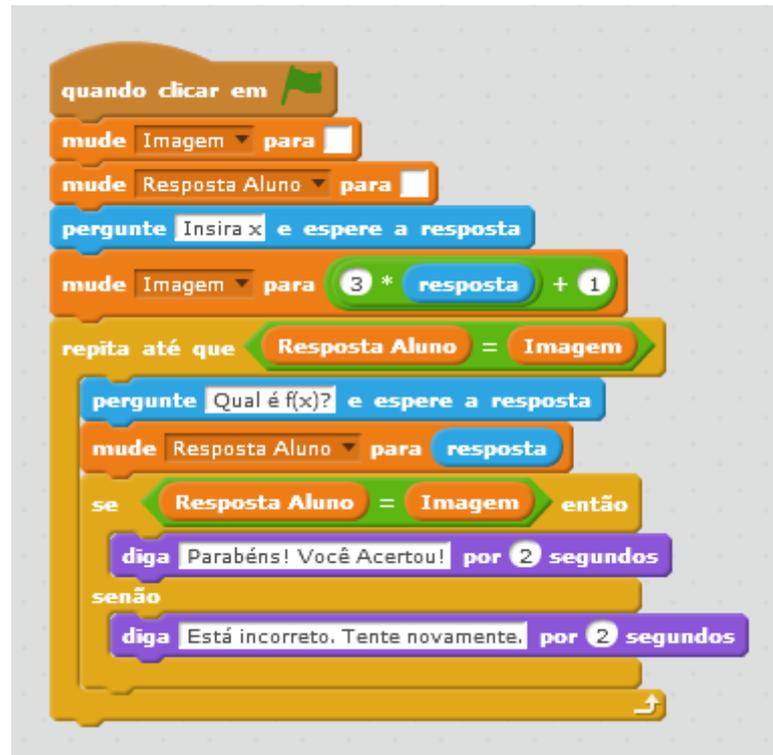
**Figura 20: Scratch 2.0 - Interface.**



Os blocos (scripts) se encaixam e seguem uma sequência lógica de cima para baixo, exceto em casos de repetição, e só iniciando um bloco novo quando a ação do anterior for concluída. No evento de repetição, o programa poderá voltar alguns passos caso a condição necessária para continuar não seja alcançada.

Observe agora a programação a seguir como exemplo, onde o estudante deverá inserir um valor  $x$  do domínio de  $f(x) = 3x + 1$  e calcular  $f(x)$ :

Figura 21: Exemplo de programação no Scratch.



Ao iniciar o programa, ele limpará a memória para as variáveis '*Imagem*' e '*Resposta Aluno*' e abrirá um campo para o usuário inserir um valor qualquer e espera até que a resposta seja dada. Na sequência, ele muda a variável *imagem* para três vezes a resposta dada, mais um. Entra-se, então, numa repetição cuja condição de saída é a variável *Resposta Aluno* ser igual à *imagem* calculada pelo programa. O algoritmo perguntará a resposta e esperará. Ao ser respondido, ele verificará se a resposta dada está correta ou não. Em caso afirmativo, o objeto responderá *Parabéns! Você Acertou!* e encerrará. Caso contrário, ele perguntará novamente qual é a resposta, mantendo esse loop até que a resposta correta seja dada.

Figura 22: Ator no Scratch reagindo à programação.



### 4.3 Proposta de atividades com o uso da linguagem Scratch

#### **ATIVIDADE 1: Imagem da função afim**

**Objetivo:** Espera-se com essa atividade fixar o processo do cálculo da imagem de uma função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nos mais diversos pontos do domínio, ou seja, que o estudante elabore um algoritmo para verificar seus cálculos utilizando números reais nas suas diversas representações possíveis. Espera-se ainda que o aluno note o comportamento do gráfico da função afim, de acordo com sua monotonicidade.

**Material necessário:** Computadores com o software Scratch instalado ou acesso à internet (<https://scratch.mit.edu/projects/editor/>)

**Tempo previsto:** 3 aulas (2h30min)

#### **Desenvolvimento:**

- 1) Escreva um algoritmo que, ao inserir um ponto  $x$  do domínio, calcule a imagem deste ponto para a regra de associação  $f(x) = 2x - 3$ .

Responda as etapas a seguir para resolução:

- a) Analisando o enunciado, quais os blocos chave que serão utilizados no algoritmo?

---

- b) Elabore uma estratégia para a construção do algoritmo (deve conter sequência lógica de argumentos e envolver os blocos mencionados no item anterior).

---



---



---

- c) Execute no Scratch a estratégia elaborada.

- d) Verifique se o algoritmo calcula corretamente:

- $f(2) = 1$
- $f(-4) = -11$

e) Relate a seguir as dificuldades ou erros encontrados no processo de desenvolvimento da atividade:

---



---



---

2) A partir do algoritmo escrito no item 1, faça o que se pede:

a) Escolha cinco valores para  $x$  em ordem **crecente** e anote suas imagens:

---

b) Escolha cinco valores para  $x$  em ordem **decrecente** e anote suas imagens:

---

c) Analisando os itens (a) e (b), qual conclusão você pode tirar?

---



---

d) Escolha agora cinco valores para  $x$ , igualmente espaçados, e anote suas imagens:

---

e) Analisando as imagens obtidas no item (d), que conclusão você pode tirar?

---

3) Escreva um algoritmo generalizando a atividade anterior para a regra de associação  $f(x) = ax + b$ .

Responda o que se pede:

a) Há diferenças em relação ao algoritmo criado no item 1? Quais?

---



---

- b) Escreva no Scratch o novo algoritmo baseado na estratégia elaborada e nas modificações relatadas no item (a).

**ATIVIDADE 2: Zero da função afim.**

**Objetivo:** Com essa atividade, espera-se fixar o processo do cálculo do zero de uma função afim  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para isso, o estudante deverá elaborar um algoritmo para calcular sua raiz, dada uma função afim qualquer.

**Material necessário:** Computadores com o software Scratch instalado ou acesso à internet (<https://scratch.mit.edu/projects/editor/>)

**Tempo previsto:** 01 aula (50 minutos)

**Desenvolvimento:**

- 1) Escreva um algoritmo que, ao inserir os coeficientes  $a$  e  $b$  de uma função afim arbitrária, calcule sua raiz.

Responda as etapas a seguir para resolução:

- a) Analisando o enunciado, quais os blocos chave que serão utilizados no algoritmo?

---

- b) Elabore uma estratégia para a construção do algoritmo (deve conter sequência lógica de argumentos e envolver os blocos mencionados no item anterior).

---

---

---

---

- c) Escreva o algoritmo no Scratch.
- 2) Escreva um algoritmo que gere funções (afim) aleatórias e peça para que o usuário responda qual é sua raiz e verifique a resposta. Desenvolva o algoritmo no formato de um aplicativo para exercitar o cálculo da raiz da função.

Responda o que se pede:

- a) Baseando-se nas etapas para a resolução de uma situação problema (compreensão do problema, elaboração de um plano de solução, execução do plano, verificação da resposta obtida), elabore e escreva uma estratégia para construir o algoritmo pedido.

---



---



---



---



---

- b) Crie este aplicativo utilizando o Scratch.

- c) DESAFIO: Crie um contador para as respostas corretas e as erradas. Mostre a porcentagem de acerto ao usuário.

### **ATIVIDADE 3: Gráfico da função afim.**

**Objetivo:** Espera-se com essa atividade que o estudante entenda a representar corretamente o gráfico de uma função afim, que significa o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a lei de associação dessa função. Outro objetivo é analisar a influência dos coeficientes no comportamento do gráfico da função.

**Material necessário:** Computadores com o software Scratch instalado ou acesso à internet (<https://scratch.mit.edu/projects/editor/>)

**Tempo previsto:** 03 aulas (2h30min)

**Desenvolvimento:**

- 1) Elabore um algoritmo para esboçar os gráficos da função afim  $f(x) = 2x - 20$  e  $g(x) = 2x + 20$ .
  - a) Quais os scripts chave utilizados nesta atividade?

---

- b) Baseando-se nas etapas para resolução de situações problema, elabore uma estratégia para construir este algoritmo.

---

---

---

---

- c) Escreva este algoritmo no Scratch.

- d) Analisando o gráfico, o que você pode observar sobre a posição relativa entre as retas traçadas?

---

- 2) Estenda o algoritmo criado no item 1 para a função afim generalizada  $f(x) = ax + b$ , dados os seus coeficientes  $a$  e  $b$ .

- a) Quais as diferenças entre o algoritmo anterior e o novo?

---

---

- b) Escreva o algoritmo no Scratch.

- c) Inclua em seu algoritmo a opção de calcular a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo  $y$ .

- d) Inclua em seu algoritmo a opção de mostrar as coordenadas da posição do cursor do mouse para verificar geometricamente a funcionalidade implementada no item (c).

- 3) Com base nos itens 1 e 2, responda:

- a) O que o coeficiente linear representa na função afim?

---

- b) O que o coeficiente angular representa na função afim?

---

- c) Com relação aos gráficos de duas funções (afim), o que implica dizer que seus coeficientes angulares são iguais?

- 
- d) Com relação aos gráficos de duas funções (afim), o que implica dizer que seus coeficientes lineares são iguais?
- 

#### **ATIVIDADE 4: Imagem da função quadrática.**

**Objetivo:** Espera-se com essa atividade fixar o processo do cálculo da imagem de uma função quadrática  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nos mais diversos pontos do domínio, ou seja, que o estudante elabore um algoritmo para verificar seus cálculos utilizando números reais nas suas diversas representações possíveis.

**Material necessário:** Computadores com o software Scratch instalado ou acesso à internet (<https://scratch.mit.edu/projects/editor/>)

**Tempo previsto:** 01 aula (50min)

**Desenvolvimento:**

- 1) Escreva um algoritmo que, ao inserir um ponto  $x$  do domínio, calcule a imagem deste ponto para a regra de associação  $f(x) = x^2 - 70x + 600$ .

Responda as etapas a seguir para resolução:

- a) Analisando o enunciado, quais os blocos chave que serão utilizados no algoritmo?

- 
- b) Elabore uma estratégia para a construção do algoritmo (deve conter sequência lógica de argumentos e envolver os blocos mencionados no item anterior).
- 
- 
- 
- 
-

- c) Execute no Scratch a estratégia elaborada.
- d) Verifique se o algoritmo calcula corretamente:
- $f(0) = 600$
  - $f(5) = 275$
  - $f(10) = 0$
- e) Estenda o algoritmo criado para a função quadrática generalizada  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , dados os seus coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

### **ATIVIDADE 5: Zeros da função quadrática e ponto de máximo ou mínimo.**

**Objetivo:** Espera-se com essa atividade utilizar o conhecimento teórico do estudante para escrever um algoritmo que calcule os pontos de máximo ou mínimo da função quadrática e suas raízes reais, quando existirem.

**Material necessário:** Computadores com o software Scratch instalado ou acesso à internet (<https://scratch.mit.edu/projects/editor/>)

**Tempo previsto:** 02 aulas (2h40min)

**Desenvolvimento:**

- 1) Elabore um algoritmo que calcule as raízes reais de uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

a) Escreva o algoritmo no Scratch utilizando a equação  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

- b) A função  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  não possui raízes reais. Teste seus coeficientes no algoritmo criado no item (a). O algoritmo obteve a resposta correta? Em caso negativo, interprete o erro do programa e justifique o erro.

---



---



---

- c) O que pode ser incluído no programa para corrigir o erro encontrado?

---



---

2) Elabore um algoritmo que calcule o ponto de máximo de uma função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  quando  $a < 0$  ou seu ponto de mínimo, quando  $a > 0$ .

a) Baseando-se nas etapas para resolução de situações-problema, elabore uma estratégia para construir este algoritmo.

---



---



---



---

b) Escreva este algoritmo no Scratch.

### **ATIVIDADE 6: Gráfico da função quadrática.**

**Objetivo:** Espera-se com essa atividade que o estudante entenda a representar corretamente o gráfico de uma função quadrática e que ele signifique o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a lei de associação desta função. Outro objetivo é analisar a influência dos coeficientes no comportamento do gráfico da função.

**Material necessário:** Computadores com o software Scratch instalado ou acesso à internet (<https://scratch.mit.edu/projects/editor/>)

**Tempo previsto:** 02 aulas (1h40min)

#### **Desenvolvimento:**

1) Elabore um algoritmo para esboçar os gráficos da função quadrática  $f(x) = x^2 - 100$  e  $g(x) = x^2 + 100x$ .

a) Escreva este algoritmo no Scratch.

b) Estenda o algoritmo criado no item 1 para da função afim generalizada  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , dados os seus coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  e escreva o algoritmo no Scratch.

c) Inclua em seu algoritmo a opção de calcular a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo  $y$ .

d) Inclua em seu algoritmo a opção de mostrar as coordenadas da posição do cursor do mouse para verificar geometricamente o que foi calculado no item (c).

2) Com base no item 1, responda:

a) Qual a influência do coeficiente  $a$  na função quadrática?

---

---

b) O que o coeficiente  $c$  implica no gráfico da função quadrática?

---

---

c) Qual o significado geométrico dos zeros da função quadrática?

---

#### 4.4 Relato de experiência

As atividades 2 e 5 (item 1) foram aplicadas no segundo semestre de 2017 para o 9º ano do ensino fundamental de uma escola de Araçatuba-SP, onde sou professor titular de Matemática. Na mesma turma também foram aplicadas outras atividades (que não estavam diretamente ligadas com funções) utilizando o software Scratch, trabalhando também as habilidades de resoluções de situações-problema. Para esta atividade, foi utilizada a lousa digital como recurso pedagógico para representar sistematicamente as ideias e sugestões dadas pelos estudantes.

As atividades mencionadas foram propostas após o estudo de funções afim e quadrática da forma tradicional e as outras atividades utilizando o Scratch. Portanto, os estudantes já conheciam métodos para o cálculo da(s) raiz(es) das funções, tinham noção de esboço de gráfico e diversos exercícios resolvidos como base. Conheciam também o básico sobre a funcionalidade do software utilizado, lógica de programação e construção de algoritmos.

**Figura 23: Aplicação do Scratch na sala de informática.**



Os benefícios do uso de programação na educação matemática são notados imediatamente. A partir da superação das dificuldades encontradas durante a execução da atividade, os estudantes ampliaram seu conhecimento sobre a fórmula para o cálculo das

raízes tanto da função afim quanto quadrática. Ao utilizar esta maneira interativa de resolver problemas através do uso de tecnologia, o estudante mostra mais foco, atenção e interesse.

A principal dificuldade encontrada foi organizar os argumentos matemáticos de modo a fazer sentido a equação  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . O software considera cada bloco (script) matemático como estando em parênteses, dando prioridade à operação nele contida. Portanto, o estudante compreende e exercita as habilidades de resolução de equações e expressões algébricas sempre que o algoritmo calcula incorretamente as raízes de uma função estudada previamente, pois precisa localizar o erro em sua programação e corrigir.

É importante o professor responsável conhecer muito bem o software. Como mencionado anteriormente, não há apenas uma maneira de solucionar um problema ou escrever um algoritmo para executar uma tarefa preestabelecida. Estudantes diferentes apresentarão soluções diferentes e frequentemente acontece do estudante elaborar uma programação única que chega ao resultado esperado parcial ou totalmente. Cabe ao educador analisar o programa escrito e intervir quando necessário. Essa intervenção é imprescindível caso o programa tenha alguma falha evidente que o estudante não tenha percebido como sugere, por exemplo, o exercício 1-b da atividade 5, apresentada anteriormente.

**Figura 24: Algoritmo criado por estudante após a aula, em seu tempo livre.**

The image displays a Scratch-like programming environment. On the left, a character named Abby is in a library setting. A speech bubble says "Aqui Está! Muito obrigada e bons estudos!". The interface includes a palette with variables (a: 1, b: -1, c: -6, Delta: 25), a character selection area with Abby, and a script area. The script is as follows:

```

quando clicar em
diga "Olá! Eu sou April e vou te ajudar com equações de segundo grau!" por 2 segundos
diga "Mas primeiro, me mostre os valores, insira o valor 'a'" por 2 segundos
pergunte "Insira o valor 'a'" e espere a resposta
mude a para resposta
diga "Muito bem! Vamos ao segundo valor" por 2 segundos
pergunte "Insira o valor 'b'" e espere a resposta
mude b para resposta
diga "Legal! Agora coloque o último valor para poder calcular o resultado" por 2 segundos
pergunte "Insira o valor 'c'" e espere a resposta
mude c para resposta
mude para a fantasia abby-b
diga "Espere um pouco, jája trago os seus resultados..." por 2 segundos
mude Delta para (b + b - 4 * a + c)
se Delta < 0 então
diga "Que pena! Seu cálculo não existe! Tente novamente!"
senão
mude X1 para (- b + raiz quadrada de Delta / 2 * a)
mude X2 para (- b - raiz quadrada de Delta / 2 * a)
mude para a fantasia abby-c
diga "Aqui Está! Muito obrigada e bons estudos!" por 10 segundos
  
```

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É recomendável seguir o tutorial online encontrado no site oficial do Scratch antes de começar a utilizá-lo. Apenas alguns minutos serão suficientes para que o usuário entenda a linguagem e já seja capaz de iniciar a programação.

Neste trabalho, foi proposta uma abordagem para inclusão do software de forma paralela ou posterior ao estudo sobre funções afim e quadrática. Entretanto, é possível que o educador o utilize previamente como mobilização ou como instrumento para sistematizar o conceito de função com os estudantes, tornando o conteúdo mais interessante desde o primeiro momento.

Venho incluindo o Scratch nas aulas de matemática há oito anos, iniciando pelo Ensino Fundamental I, durante minha participação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) enquanto graduando, e nos ensinos Fundamental II e Médio, já como professor graduado. A experiência com este software em sala de aula mostra melhores resultados em estudantes a partir dos 13 anos, ou seja, a partir do 8º ano do Ensino Fundamental.

Figura 25: Screenshot do aplicativo educativo Desafio da Hora.



Programado no Scratch, por Douglas Costa. Disponível em <https://scratch.mit.edu/projects/2028169/>

Nas séries iniciais, os estudantes ainda não possuem habilidades e competências necessárias para programar algoritmos complexos, porém já é possível começar pelo básico, sugerindo criação de cartões comemorativos, pequenas histórias ou animações. O professor

também pode utilizar o programa para criar aplicativos próprios e abordar conteúdos de qualquer natureza.

Nas séries finais do ensino fundamental e durante o ensino médio, os estudantes demonstram mais autonomia e criatividade surpreendente para a construção dos mais diversos tipos de histórias animadas, conteúdo matemático e jogos. Constantemente consultam o professor para auxiliar na inclusão de novas funcionalidades e ações em seus programas, gerando resultados magníficos.

Apesar dos benefícios gerados pela aplicação da programação na educação, o tempo ainda é um fator limitante. Cumprir o extenso currículo de matemática de cada série durante o ano letivo é desafiador e a aplicação de atividades complementares precisa ser bem planejada. No entanto, também faz parte das atribuições dos professores elaborar aulas diferenciadas e prazerosas, para incentivar e motivar os estudantes a gostarem de Matemática e suas tecnologias, além de divulgar suas ações exitosas com os colegas de profissão, buscando elevar o nível da educação nacional.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CURY, A. J. *Pais brilhantes, professores fascinantes*. Rio de Janeiro: Sextante, 2003.
- DANTE, L. R. *Didática da Resolução de problemas de matemática*. 12 ed. São Paulo: Ática, 2003.
- DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*: 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v.1.
- ÉPOCA NEGÓCIOS ONLINE. *5 habilidades para as profissões do futuro*. 2017. Disponível em <<http://epocanegocios.globo.com/Carreira/noticia/2017/07/cinco-habilidades-para-profissoes-do-futuro.html>> Acesso em: 21 de Janeiro de 2018.
- FERNANDES, F. P. *Um estudo de retas do plano e uma abordagem para o ensino médio com o software GeoGebra*. 2016. 76 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2016. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/135850>>.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*: 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.1.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v.3.
- PEZZINI, C. C.; SZYMANSKI, M. L. *Falta de desejo de aprender - Causas e Consequências*. 2008. 22 f. Artigo - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, 2008.
- SCRATCH. Disponível em <<https://scratch.mit.edu/>>. Acesso em 21 de Janeiro de 2018.
- SOUSA, B. J.; JÚNIOR, J. J.; FORMIGA, A. A. *Introdução a Programação*. João Pessoa: Editora da UFPB, 2014.

## APÊNDICE

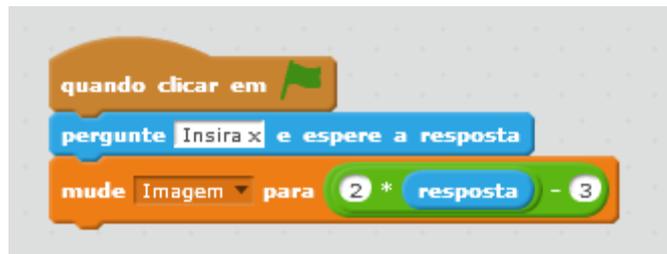
Apresentaremos a seguir a resolução das atividades propostas neste trabalho. Estas respostas foram elaboradas no Scratch 2.0 em 27 de Janeiro de 2018. Possivelmente, elas podem se tornar incompatíveis com futuras versões do software.

### ATIVIDADE 1: Imagem da função afim:

1)

- a) Início, pergunte, resposta, variável (mude variável para), multiplicação e subtração.
- b) Inicie com o bloco de pergunta pedindo para o usuário inserir o valor  $x$ . Crie uma variável para armazenar a imagem de  $x$ . Dê sequência mudando o valor da variável criada para duas vezes o valor da resposta, menos três.
- c) Resposta na figura a seguir:

Figura 26: Atividade 1-1. Algoritmo para cálculo da imagem de um ponto dado.



d) Resposta na figura a seguir:

Figura 27: Atividade 1-1. Cálculo de  $f(2) = 1$  utilizando o algoritmo.

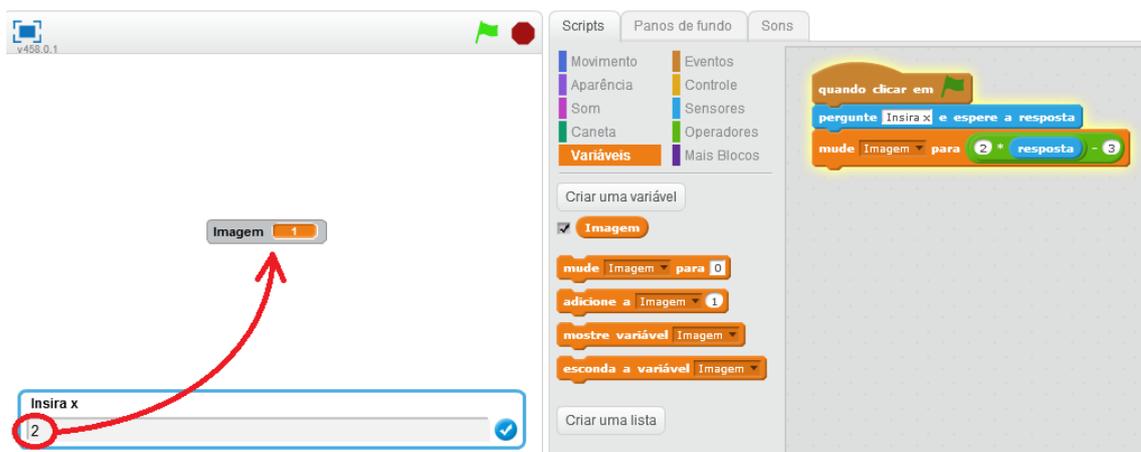
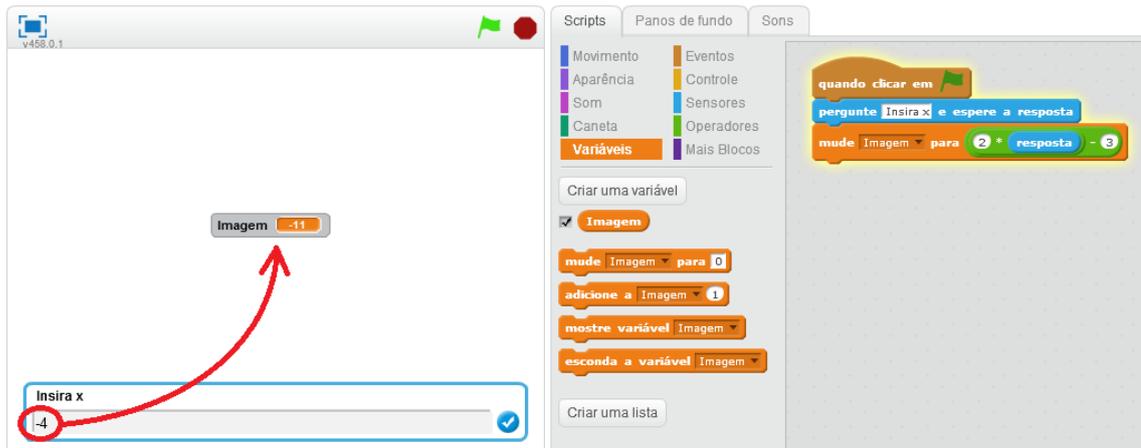


Figura 28: Atividade 1-1. Cálculo de  $f(-4) = -11$  utilizando o algoritmo.



- e) Um erro comum seria não colocar um bloco de início para o algoritmo. Outro comum seria esquecer-se de gerar uma variável de memória para armazenar a imagem obtida. Por fim, a ordem das operações de multiplicação e subtração precisa estar bem ordenada, pois o programa considera cada script mais interno em uma expressão como estando entre parêntesis.
- 2)
- 1, 3, 4, 5, 10.
  - 5, 3, 5, 7, 17
  - Conclui-se que pegando cinco valores para  $x$  em ordem crescente, as suas respectivas imagens também estarão em ordem crescente.
  - $f(1) = -1, f(3) = 3, f(5) = 7, f(7) = 11, f(9) = 15$ .
  - 1, 3, 7, 11, 15.
- 3)
- Sim, agora precisaremos gerar variáveis para armazenar os valores inseridos para os coeficientes  $a$  e  $b$ , além da variável para armazenar a imagem obtida. Colocaremos as variáveis dentro dos scripts e trocaremos a operação de subtração por adição. De modo a deixar armazenados  $a$  e  $b$  e verificar vários pontos  $x$ , utilizaremos dois inícios diferentes.
  - Resposta na figura a seguir:

Figura 29: Atividade 1-3. Algoritmo para calcular imagens de pontos de uma função afim.

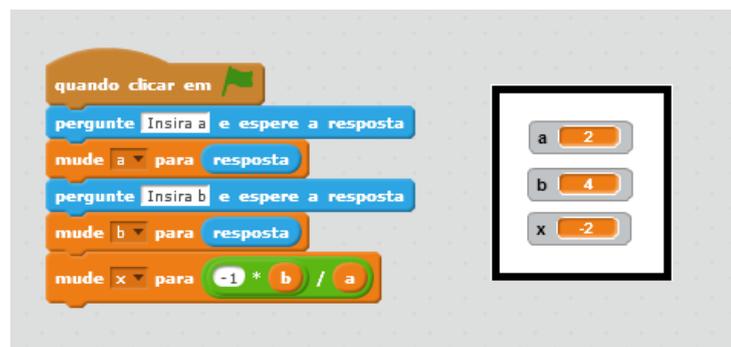


## ATIVIDADE 2: Zero da função afim.

1)

- a) Início, variáveis, blocos matemáticos de soma e multiplicação, pergunte e resposta.
- b) Primeiramente devemos perceber que  $ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$ . Iniciamos o algoritmo criando duas variáveis para armazenar os valores dos coeficientes e uma para guardar a resposta e, em seguida, escrevemos a equação dada acima e substituímos o valor de  $x$  para o cálculo resultante. Por fim, colocamos uma função para perguntar ao usuário quais os valores dos coeficientes  $a$  e  $b$  da função ao rodar o programa.
- c) Resposta na figura a seguir:

Figura 30: Atividade 2-1. Algoritmo para cálculo da raiz de uma função afim qualquer.



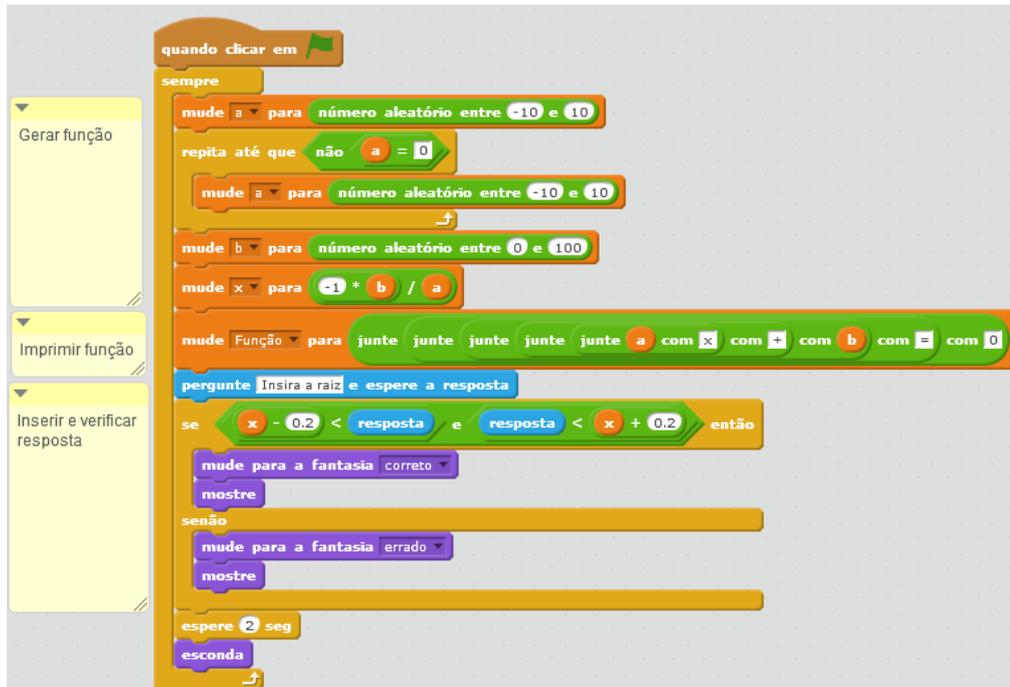
1)

- a) Por ainda existir a necessidade de o usuário inserir informações, continuaremos precisando perguntar e utilizar a resposta no programa, porém agora necessitamos gerar valores aleatórios para os coeficientes  $a$  e  $b$ . Ao criar uma função, precisamos programar o aplicativo para calcular corretamente sua raiz e verificar se a resposta

subsequente dada pelo usuário está correta ou não, através dos blocos condicionais. Criaremos uma variável para representar a função arbitrária gerada.

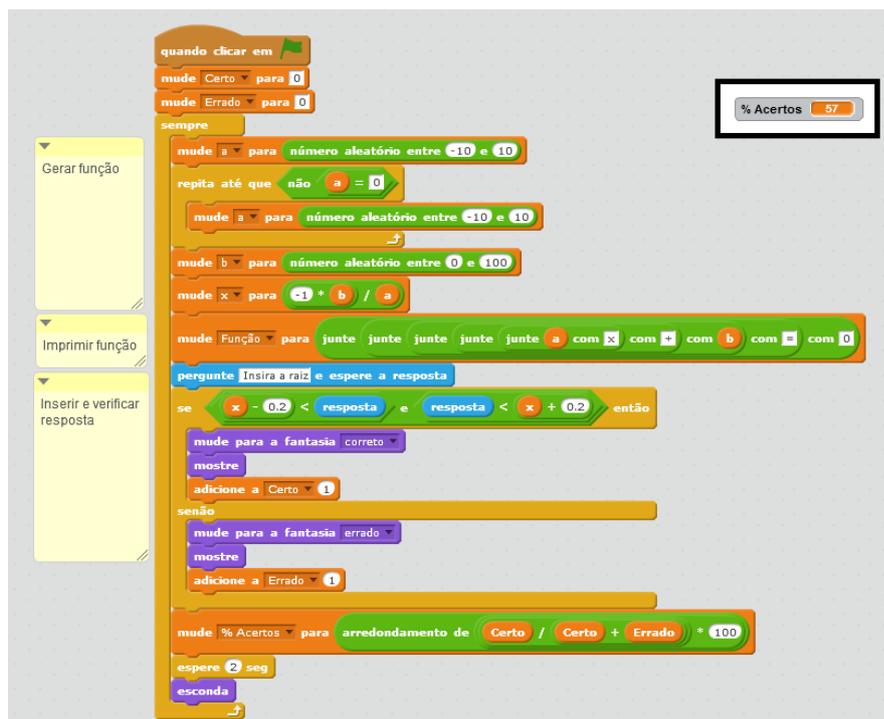
b) Resposta na figura a seguir:

Figura 31: Atividade 2-2. Programa que gera funções afim para o usuário calcular sua raiz.



c) Resposta na figura a seguir:

Figura 32: Atividade 2-2. Acréscimo de contador de acertos ao programa.

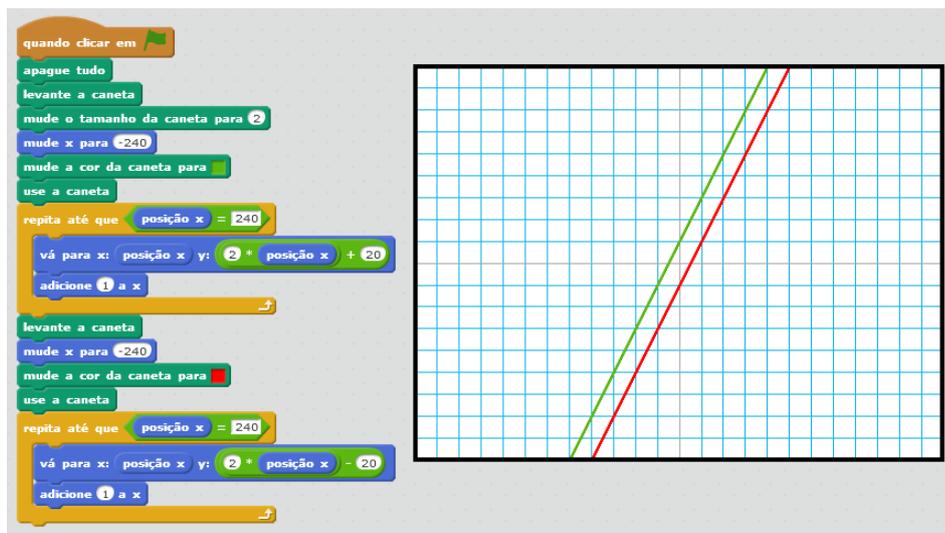


### **ATIVIDADE 3: Gráfico da função afim.**

1)

- a) Início, scripts de caneta, sempre, scripts de coordenadas e os demais utilizados nas atividades 1 e 2.
- b) Utilizaremos o fato de que o gráfico de uma função é o lugar geométrico dos pontos que pertencem a essa função. Para isso, começaremos com  $x = -240$  (extremidade negativa aceita pelo programa) e calcular ponto a ponto dessa função, passando com a caneta por todos (precisaremos criar um ator para guiar a caneta). Para isso, basta utilizar as mesmas estratégias utilizadas nas atividades 1 e 2 e desenhar cada uma das funções. Adicionaremos ao palco o fundo xy-grid-20px contido na biblioteca do Scratch.
- c) Resposta na figura a seguir:

**Figura 33: Atividade 3-1. Algoritmo para o esboço dos gráficos das funções dadas.**

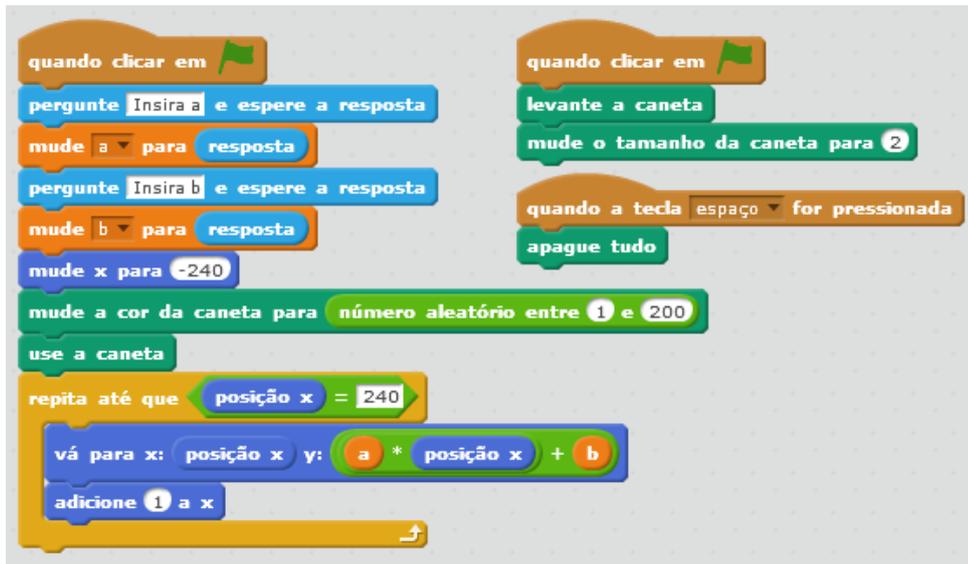


- d) As retas são paralelas.

2)

- a) Utilizaremos variáveis para representar os coeficientes da função e podemos programar um botão separado para apagar os traços de modo a desenhar vários gráficos no mesmo plano para compará-las.
- b) Resposta na figura a seguir:

Figura 34: Atividade 3-2. Algoritmo para esboço do gráfico de qualquer função afim.



c) Resposta na figura a seguir:

Figura 35: Atividade 3-2. Comando para identificar intersecção com o eixo Oy.



d) Resposta na figura a seguir:

Figura 36: Atividade 3-2. Comando para mostrar as coordenadas da posição do cursor.



3)

- a) O coeficiente linear representa a ordenada do ponto onde o gráfico da função intersecta o eixo y.
- b) O coeficiente angular representa a inclinação da reta (tangente do ângulo de inclinação referente ao eixo x).

- c) Elas têm a mesma inclinação, portanto são paralelas.
- d) Elas intersectam o eixo y no mesmo ponto.

**ATIVIDADE 4: Imagem e Zeros da função quadrática.**

1)

- a) Início, pergunte, resposta, variável (mude variável para), multiplicação, adição e subtração.
- b) Inicie com o bloco de pergunta pedindo para o usuário inserir o valor  $x$ . Crie uma variável para armazenar a imagem de  $x$ . Dê sequência mudando o valor da variável criada para a expressão do enunciado.
- c) Resposta na figura a seguir:

**Figura 37: Atividade 4-1. Algoritmo para cálculo das raízes da função dada.**



- d) Resposta na figura a seguir:

**Figura 38: Atividade 4-1. Verificação dos cálculos do algoritmo.**

x 0	x 5	x 10
Imagem 600	Imagem 275	Imagem 0

- e) Resposta na figura a seguir:

Figura 39: Atividade 4-1. Extensão do algoritmo para uma função quadrática qualquer.

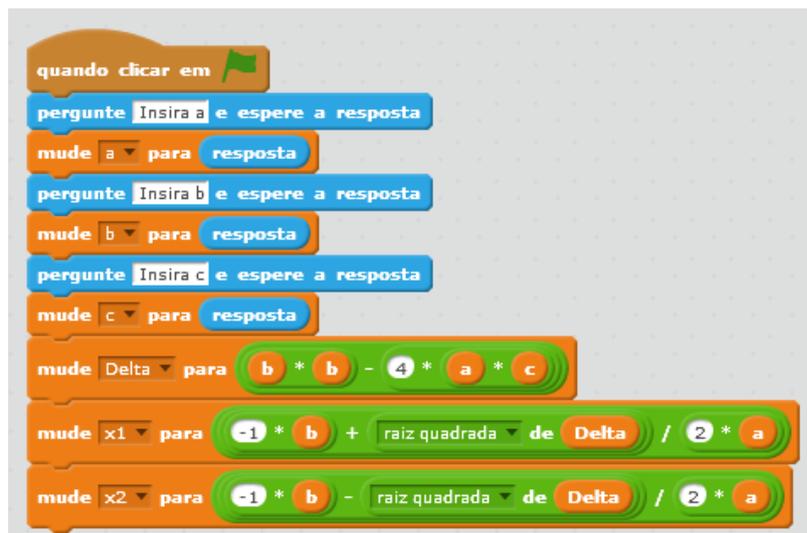


### ATIVIDADE 5: Zeros da função quadrática e ponto de máximo ou mínimo.

1)

a) Resposta na figura a seguir:

Figura 40: Atividade 5-1. Algoritmo para cálculo das raízes de uma função quadrática.



b) Não. O algoritmo retornou  $x = -2$  como raiz real da equação. Portanto houve um equívoco do algoritmo. Seu erro foi, ao identificar a raiz quadrada de um número negativo, ao invés de invalidar toda a equação ele ignorou apenas a sentença  $\sqrt{-4}$  e continuou a equação com o que conseguia calcular.

c) Precisamos apenas incluir o seguinte script em nosso programa:

Figura 41. Atividade 5-1. Correção do erro do algoritmo.

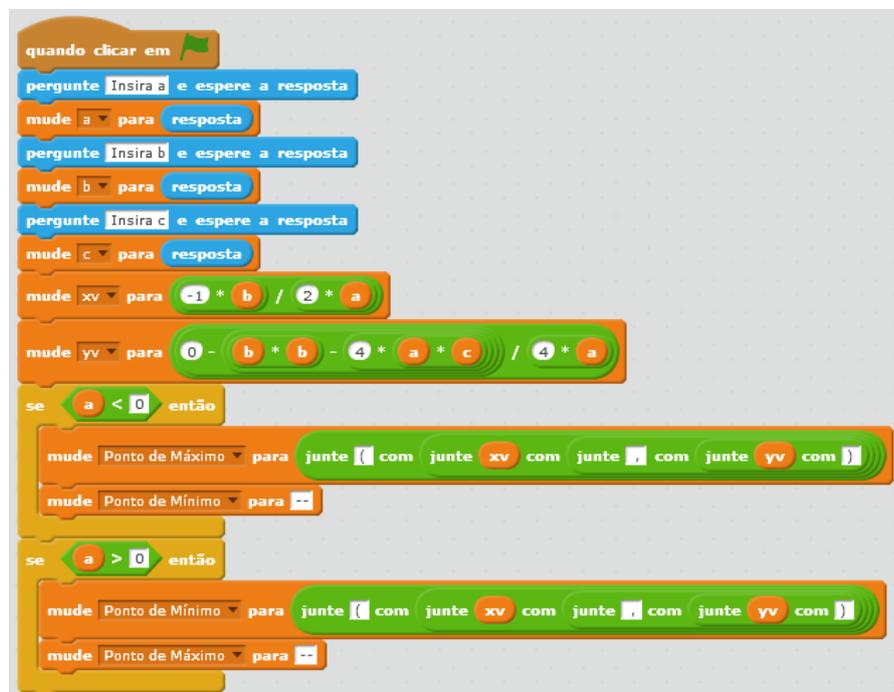


2)

a) Sabemos que o ponto de máximo ou de mínimo de uma função é dado por  $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ , portanto precisamos apenas escrever esta equação no Scratch. Mas o programa não conseguirá identificar automaticamente se é ponto de máximo ou de mínimo, então precisaremos incluir a verificação do sinal do coeficiente  $a$  e dar a resposta de acordo.

b) Resposta na figura a seguir:

Figura 42: Atividade 5-2. Algoritmo para cálculo do ponto de máximo/mínimo da função.

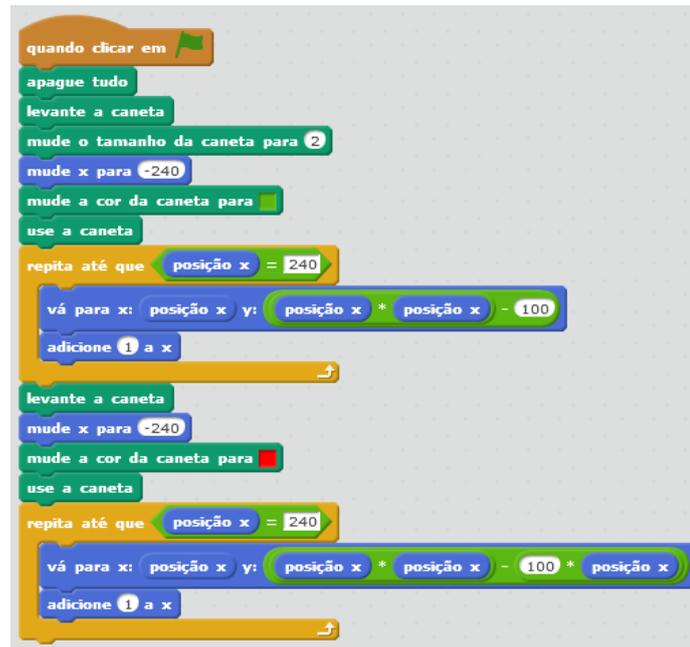


### ATIVIDADE 6: Gráfico da função quadrática.

1)

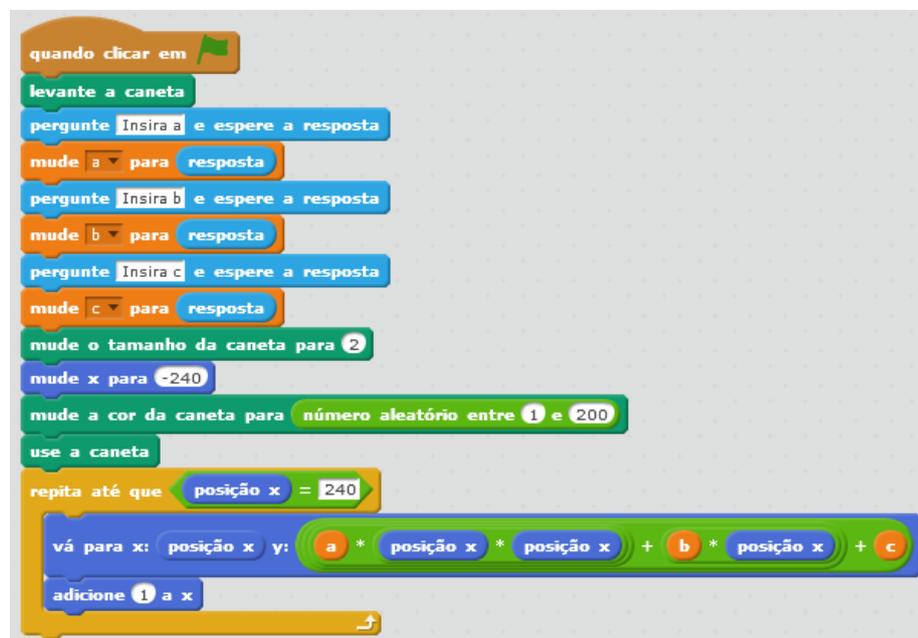
a) Resposta na figura a seguir:

Figura 43. Atividade 6-1. Algoritmo para traçar o gráfico das funções quadráticas dadas.



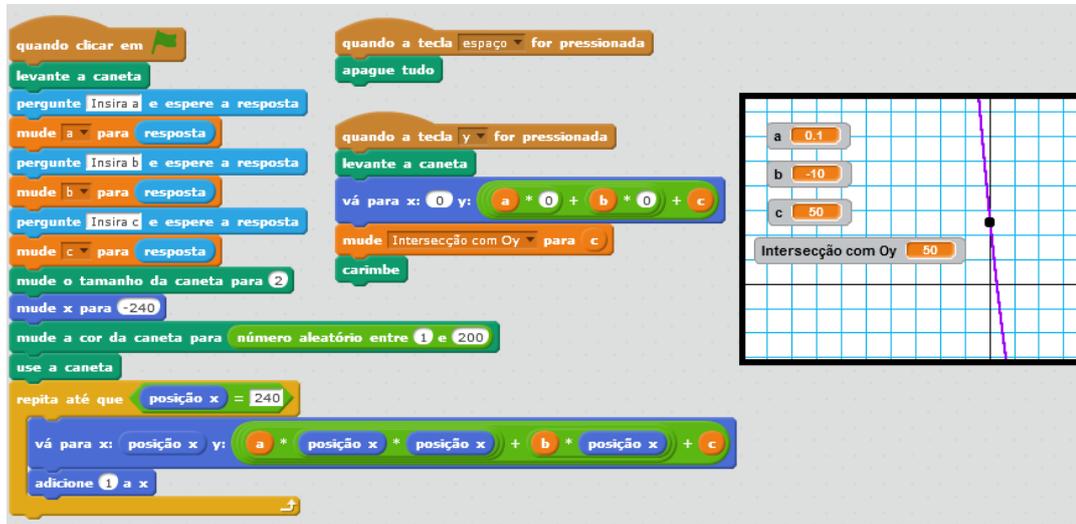
b) Resposta na figura a seguir:

Figura 44. Atividade 6-1. Algoritmo para calcular o ponto de máximo/mínimo de uma função quadrática qualquer.



c)

Figura 45: Atividade 6-1. Algoritmo para o cálculo do ponto de intersecção do gráfico com o eixo Oy.



d) Resposta na figura a seguir:

Figura 46: Atividade 6-1. Comando para mostrar as coordenadas da posição do cursor.



2)

- a) O coeficiente  $a$  indica a abertura da parábola, além de indicar a direção de sua concavidade ( $a < 0 \Rightarrow$  concavidade para cima e  $a > 0 \Rightarrow$  concavidade para baixo).
- b) O coeficiente  $c$  indica a ordenada do ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo y.
- c) As raízes indicam as abscissas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo x.