UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO EGBERTO GOMES DAMASCENO

PARÁBOLA: Uma abordagem utilizando materiais concretos e o *software* GeoGebra

Rio Branco – Acre

2018

FRANCISCO EGBERTO GOMES DAMASCENO

PARÁBOLA: Uma abordagem utilizando materiais concretos e o *software* GeoGebra

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Acre, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wenden Charles de Souza Rodrigues

Rio Branco – Acre

2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

D155p Damasceno, Francisco Egberto Gomes, 1982-

Parábola: uma abordagem utilizando materiais concretos e o software GeoGebra / Francisco Egberto Gomes Damasceno; orientador Prof. Dr. Wenden Charles de Souza Rodrigues. – 2018.

120 f.: il.; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Rio Branco, 2018.

Incluem referências bibliográficas.

1. Parábola. 2. Cônicas. 3. GeoGebra. 4. Materiais concretos. I. Rodrigues, Wenden Charles de Souza. II. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Nádia Batista Vieira CRB-11/882

FRANCISCO EGBERTO GOMES DAMASCENO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional ‑ PROFMAT, da Universidade Federal do Acre, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Wenden Charles de Souza Rodrigues (Orientador)
Universidade Federal do Acre – UFAC

Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza (Membro Interno)
Universidade Federal do Acre – UFAC

Prof. Me. Erasmo Menezes de Souza (Membro Externo)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Acre – IFAC

Ao meu pai Alberto Gomes Damasceno (in memoriam).

À minha mãe Maria Letice.

À minha filha, Isabela Vitória.

À minha esposa Andréia Cosme.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por suprir todas as minhas necessidades e me manter forte nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Alberto Gomes (in memoriam) e Maria Letice, os quais considero Anjos que Deus colocou ao meu lado, pelos valores a mim ensinados e pelo apoio em todos os momentos da minha vida.

À minha esposa Andréia Cosme e minha filha Isabela Vitória, pela compreensão da minha ausência em muitos momentos de suas vidas.

Aos meus irmãos e irmãs, pelo apoio e incentivo.

Aos amigos de turma, Rayfran, Raimundo, Gilvan, Adeval, Ocicley e Diego, pelo apoio e momentos de estudo que vivenciamos.

Ao amigo José Nilton, pela forte parceria que firmamos nos estudos e na vida, a qual foi determinante para minha aprovação no ENQ.

Ao professor e amigo Carlos Ferreira, por abrir as portas da escola em que trabalha para a realização da pesquisa.

Aos meus amigos da Equipe Gestora da Escola Maria Chalub Leite, Eraldo Barreto, Auxiliadora, Evanéa e Laura, por me darem suporte nessa jornada e se desdobrarem para suprir meus momentos de ausência em função dos meus estudos.

Ao PROFMAT, pela excelente condução do Programa e pela valorização dos professores de Matemática.

À UFAC, por ter aderido ao Programa.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Wenden Charles de Souza Rodrigues, por sua dedicação e paciência no decorrer de toda a elaboração deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT, pelas trocas de experiências e pelo conhecimento construído em conjunto, em especial ao Prof. Edcarlos Miranda, Prof. Geirto de Souza, Prof. Manoel Domingos, Prof. José Ivan e Prof. Isaac da Silva.

Aos professores Edcarlos Miranda e Erasmo Menezes que integraram a Comissão Examinadora, pelas valiosas contribuições.

“Deus é o Geômetra Onipotente

para quem o mundo é imenso

problema matemático.”

(Leibniz)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento dos conceitos da cônica parábola, reunindo um leque de informações relativas a essa curva, tais como sua origem, o tratamento que é dado à mesma dentro da Geometria Analítica, suas aplicações no cotidiano, métodos de construção e da apresentação de uma proposta de intervenção desenvolvida em uma turma de 3º ano do Ensino Médio. A referida proposta aborda a construção de parábolas utilizando materiais concretos, como: régua, compasso e esquadro, e o *software* GeoGebra, através da qual buscamos desenvolver uma abordagem dinâmica no sentido de promover uma compreensão significativa a respeito dos conceitos da parábola. Para tanto, partimos de um estudo bibliográfico em que tomamos como referência autores como Boyer (1996), Cajori (2007), Iezzi (2005), De Maio e Chiummo (2008), Venturi (1949), Lindquist e Shulte (1994) e Lorenzato (2010). Discutimos também sobre a importância dos materiais didáticos para a aprendizagem dos alunos, o que nos fez optar pelo uso dos referidos materiais na proposta pedagógica. Participaram da pesquisa trinta alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública da rede estadual, localizada no município de Rio Branco, estado do Acre. Conforme mostraram os resultados, os alunos não têm o hábito de utilizar materiais concretos e nem *softwares* educativos nas aulas, no entanto, pudemos verificar que a maioria deles assimilou os conceitos da parábola após realizarem as atividades de construção utilizando esses recursos.

Palavras-chave: Parábola. Cônicas. GeoGebra. Materiais Concretos.

ABSTRACT

The present master's thesis aims to contribute to the development of concepts of the conic section: parabola, bringing together a range of information on this curved line, such as its origins, the treatment that is given to it within the Analytic Geometry, its applications in daily life, construction methods and the presentation of a proposal for intervention developed in a class of the third year of High School. The proposal addresses the construction of parabolas using concrete materials, for exemple: ruler, geomety compass and set-square, and the GeoGebra software, through which we seek to develop a dynamic approach in order to promote a significant understanding of the concepts of the parabola. To do this, we will be using bibliographical studies, in which we take as a reference authors such as Boyer (1996), Cajori (2007), Iezzi (2005), De Maio e Chiummo (2008), Venturi (1949), Lindquist e Shulte (1994) e Lorenzato (2010). We also discussed about the importance of didactic material for the apprenticeship of the students. What made us opt for the use of the referred materials in the pedagogical proposal. Took part in the research thirty students of the third year of High School from a public school, located in Rio Branco, state of Acre. As have shown the results, students do not have the habit of using concrete materials or even educational software in the classroom, however, We verified most of them assimilated the concepts of the parabola after performing construction activities using these features.

Key Words: Parabola. Conics. GeoGebra. Concrete Materials.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática ocupa uma posição singular na sociedade, pois ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo das pessoas e desempenha um papel fundamental na formação de capacidades intelectuais, além de está presente diretamente no cotidiano, como nas formas dos objetos naturais e nos criados pela ação humana, nas operações financeiras, construções, pesquisas científicas, e em muitas outras situações.

Dentre os ramos da matemática, a geometria se destaca como um campo fértil para desenvolver o conhecimento, já que estimula o raciocínio lógico, desenvolve a prática de cálculos e transmite noções de álgebra. A geometria é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente, o que estimula o estudante a observar, perceber semelhanças e identificar regularidades, uma vez que o espaço no qual estamos inseridos apresenta grande diversidade de objetos geométricos.

Dentro da geometria, destaca-se a geometria analítica, que é um campo matemático no qual são utilizados métodos simbólicos algébricos para representar e resolver problemas geométricos. Uma importante abordagem da geometria analítica é a relação de correspondência que ela estabelece entre equações algébricas e curvas geométricas, e uma dessas relações será o objeto de estudo deste trabalho, pois discorreremos sobre a cônica parábola.

De forma notória, as cônicas se fazem presentes no nosso cotidiano, pois facilmente podemos encontrar suas formas e propriedades na sociedade, como nas construções, nas antenas parabólicas e nos satélites. Os alunos têm contato com a forma parabólica desde o primeiro ano do Ensino Médio, quando em Matemática ele aprende que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, ou quando o professor de física mostra que a trajetória de um objeto em movimento oblíquo, como por exemplo, o arremesso de uma bola de basquete, descreve uma parábola.

O objetivo deste trabalho é colaborar para o desenvolvimento dos conceitos da parábola, buscando apresentar um pouco da história das cônicas, fazer um estudo analítico da parábola, mostrar algumas de suas aplicações na sociedade, explicar algumas formas de construção e, finalmente, apresentar uma proposta de intervenção a ser desenvolvida em uma turma de 3º ano do Ensino Médio.

No primeiro capítulo, apresentamos um breve relato histórico sobre a origem das cônicas, partindo da descoberta acidental dessas curvas quando Menaecmo trabalhava na solução do problema da duplicação do cubo e apresentando os avanços conquistados por Apolônio de Perga, quando este revolucionou os estudos das cônicas. Finalizamos o capítulo discorrendo sobre a fundação da geometria analítica.

No capítulo 2, fizemos um estudo analítico da parábola, destacamos seus elementos, mostramos sua simetria, determinamos suas equações, analisamos a equação geral do 2º grau e ainda, fizemos uma abordagem sobre sua propriedade refletora, sem o rigor de sua demonstração.

No terceiro capítulo, apresentamos algumas aplicações da parábola na sociedade, destacando as aplicações a partir da propriedade refletora, como nas antenas parabólicas, e aquelas que estão presentes na construção civil, como nas pontes pênsis.

No capítulo 4, mostramos alguns métodos de construção de parábolas utilizando materiais concretos, como régua, compasso, papel e lápis, e, em seguida, apresentamos várias maneiras de construir parábolas usando o *software* GeoGebra, que é um *software* educativo gratuito de geometria dinâmica.

No quinto e último capítulo apresentamos uma proposta de intervenção para o estudo da parábola utilizando materiais concretos e o software GeoGebra, a ser desenvolvida em uma turma de 3º ano do Ensino Médio. O objetivo da proposta é promover uma compreensão significativa a respeito dos conceitos da cônica parábola, através de uma abordagem dinâmica capaz de atrair a atenção dos alunos.

1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo apresentaremos um breve relato sobre a história das cônicas, discorrendo sobre suas origens e evolução ao longo do tempo, destacando alguns dos principais nomes que se empenharam no estudo dessas curvas.

1.1 A origem das cônicas

Os historiadores atribuem ao matemático grego Menaecmo (380 a.C. − 320 a.C.), discípulo de Eudóxio de Cnido na Academia de Platão, a descoberta das seções cônicas, por volta de 360 a. C., enquanto tentava solucionar o famoso problema da duplicação do cubo, também chamado de "problema deliano".

De acordo com Roque (2012), conta uma lenda que em 427 a.C., uma peste matou um quarto da população de Atenas, vitimando inclusive Péricles, governador da cidade na época. Então, os atenienses foram ao oráculo de Apolo, em Delos, para consultar como se poderia enfrentar a peste. O oráculo respondeu que o altar de Apolo, que tinha a forma cúbica, deveria ser duplicado. Assim, os atenienses prontamente dobraram as dimensões de cada uma das arestas do altar, mas isso não afastou a peste, pois o que conseguiram foi octuplicar o volume do cubo, o que não era o objetivo.

Desse modo, surgiu o problema deliano, o qual consiste em, dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro.

Roque (2012) relata que essa história deve ter sido criada no contexto da Academia de Platão:

> Com base no testemunho de Eratóstenes de Cirene, que viveu no século III a.C., e em escritos de matemáticos ligados a Platão pode-se conjecturar que essa história deve ter sido fabricada no contexto da Academia de Platão, por volta do século IV a.C. Nessa época, o problema da duplicação do cubo já tinha ganhado notoriedade com os avanços efetuados por Hipócrates. (Roque, 2012, p. 123)

Segundo Boyer (1996), Menaecmo se deparou com as cônicas numa tentativa bem-sucedida por curvas com as propriedades adequadas à duplicação do cubo. O autor afirma, ainda, que provavelmente Menaecmo soubesse que a duplicação também pode ser efetuada por meio de uma hipérbole retangular mais uma parábola:

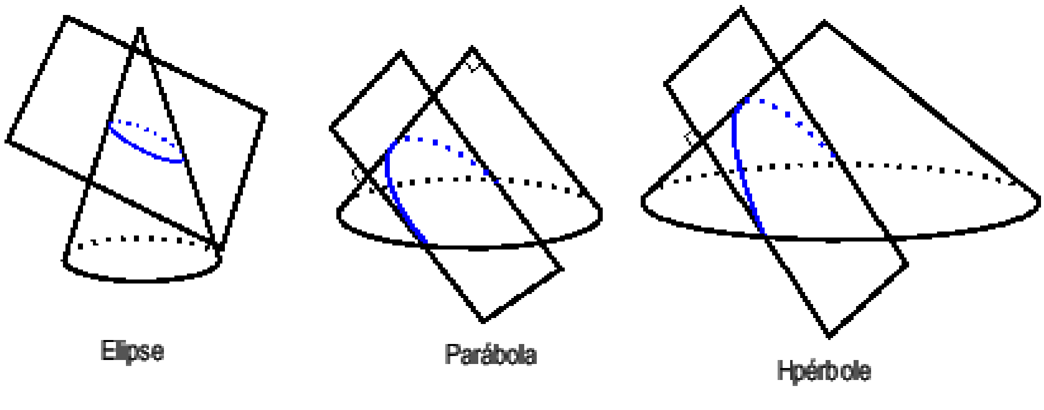
> Se a parábola de equação $y^2 = (a/2)x$ e a hipérbole $xy = a^2$ são colocadas sobre um mesmo sistema de coordenadas, o ponto de intersecção terá coordenadas $x = a\sqrt[3]{2}, y = a/\sqrt[3]{2}$, a abscissa x sendo o lado do cubo procurado. (BOYER, 1996, p. 66)

Para Cajori (2007), Menaecmo criou as seções cônicas, as quais, no decorrer de um único século, elevaram a Geometria a alturas imensas que esta ciência estava destinada a alcançar durante a antiguidade.

O autor afirma que “Menaecmo cortou três espécies de cones, o de “ângulo reto”, o de “ângulo agudo” e o de “ângulo obtuso”, por planos formando ângulos retos com os lados deles, e, assim, obteve três seções que agora chamamos de parábola, elipse e hipérbole.” (CAJORI, 2007, p. 59)

Assim, Menaecmo foi o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérboles são originadas como secções de três diferentes tipos de cones quando cortados por planos não paralelos às suas bases.

Figura 1 – Cônicas obtidas de diferentes cones



Fonte: google imagens (Acesso em 18.07.2018)

1.2 A significativa contribuição de Apolônio de Perga

De acordo com Boyer (1996), após os estudos de Menaecmo, outros matemáticos ampliaram as exposições gerais sobre as cônicas, caso de Aristeu, Euclides e Arquimedes, mas foi Apolônio de Perga quem desenvolveu verdadeiros avanços no assunto, quando escreveu seu célebre tratado "*As cônicas*".

Cajori (2007) relata que Apolônio (262 a.C. − 190 a.C.), conhecido como o "Grande Geômetra", nasceu na cidade de Perga (cidade ao sul do que hoje é a Turquia), estudou na primeira Escola de Alexandria com os sucessores de Euclides e ocupa incontestavelmente o segundo lugar em distinção entre os matemáticos antigos, cuja genialidade fica perto da de seu grande antecessor, Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), considerado o maior matemático da antiguidade.

Segundo os relatos de Boyer (1996), a obra *As cônicas* de Apolônio era formada por oito livros, dos quais apenas os quatro primeiros existem ainda em grego, um livro se perdeu e os outros três foram traduzidos pelo matemático árabe Thabit ibn Qurra, versão esta que se preservou. Em 1710, Edmund Halley deu uma tradução latina dos sete livros e daí então apareceram edições em muitas línguas. Assim como *Os elementos* de Euclides substituíram textos elementares anteriores, em nível mais avançado o tratado sobre *Cônicas* de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das seções cônicas, inclusive *As cônicas* de Euclides: "Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, *Os elementos* de Euclides e *As cônicas* de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus tempos". (BOYER, 1996, p. 99)

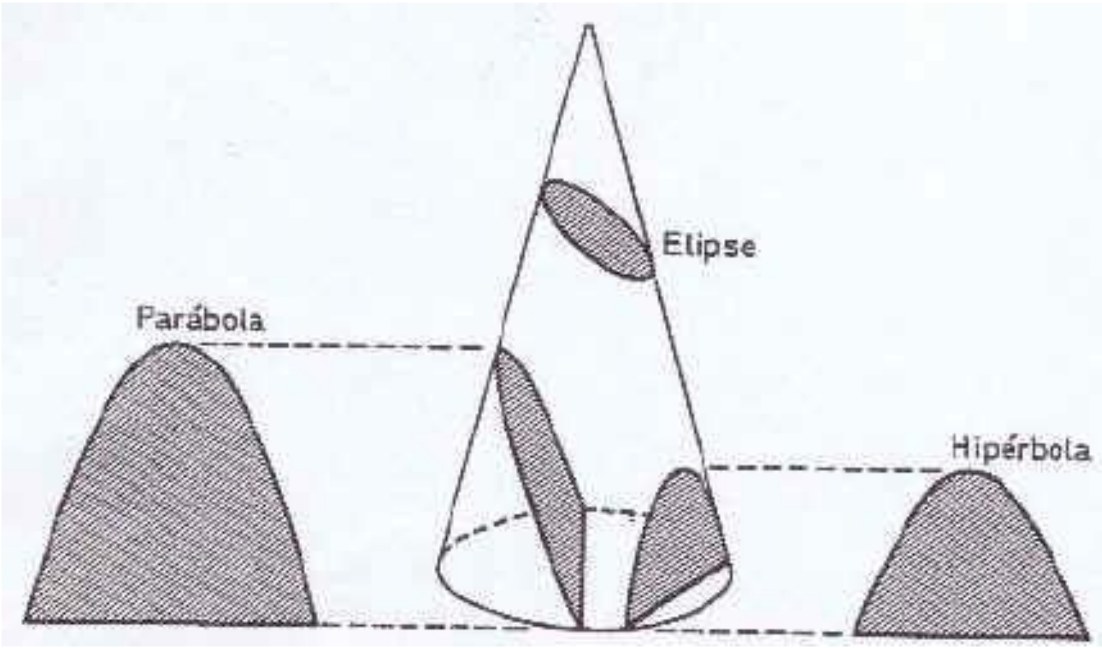
De acordo com Cajori (2007), os primeiros livros do tratado *As cônicas* de Apolônio contêm pouco mais do conteúdo que os mais antigos geômetras fizeram: "Enquanto os três ou quatro primeiros livros estavam baseados nos trabalhos de Menaecmo; Aristeu; Euclides e Arquimedes, os restantes consistem em, praticamente, matéria nova". (CAJORI, 2007, p. 73)

Apolônio definiu as secções cônicas de modo diferente do que tinha sido desenvolvido por Menaecmo e todos os seus sucessores, os quais consideraram somente seções em cones retos obtidas por um plano perpendicular a um de seus elementos, e que as três seções eram, cada uma, obtida de um cone diferente.

> Apolônio introduziu uma generalização importante. Ele produziu todas as seções de um só e único cone, não importando se fosse reto ou escaleno, e com planos que poderiam ser ou não perpendiculares aos elementos do cone. (CAJORI, 2007, p. 73)

Assim, Apolônio mostrou que as três secções poderiam ser obtidas a partir de um único cone, bastando somente variar o ângulo de inclinação do plano da secção.

Figura 2 – Cônicas obtidas de um único cone



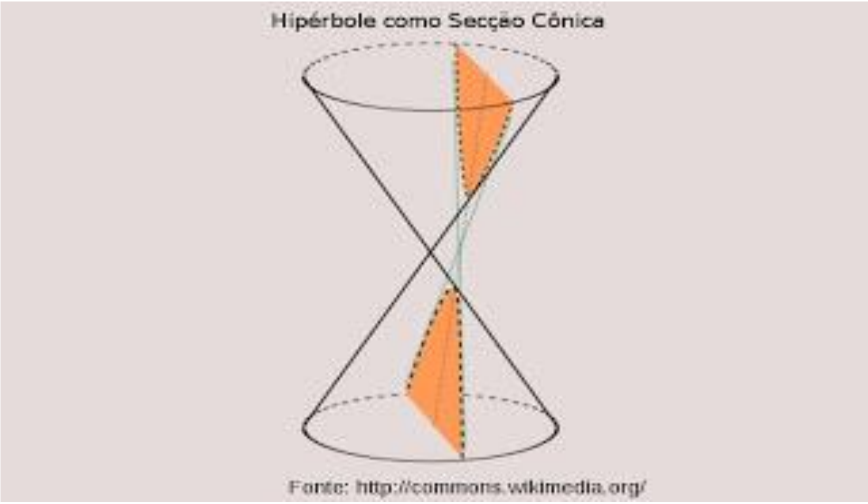
Fonte: google imagens (Acesso em 18.07.2018)

Segundo Boyer (1996), O “Grande Geômetra” ainda expandiu seus estudos ao substituir o cone de uma só folha por um duplo, ou seja, colocou dois cones em sentidos opostos de modo que seus vértices coincidam e seus eixos estejam sobre uma mesma reta, dando assim a mesma definição de cone circular usada até hoje:

> Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. (BOYER, 1996, p. 100)

Essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que conhecemos até hoje:

Figura 3 – Hipérbole de dois ramos



Fonte: google imagens (Acesso em 20.07.2018)

Cajori (2007) atribui a Apolônio os nomes dados às seções cônicas, mas ressalta que as palavras “parábola” e “elipse” são encontradas antes nos trabalhos de Arquimedes, mas sem maiores significações:

> Os velhos nomes das curvas não são agora mais aplicáveis. Em vez de chamar as três curvas, seções, de “ângulo agudo”, de “ângulo reto” e de “ângulo obtuso”, ele as denominou de *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, respectivamente. (CAJORI, 2007, p. 73)

Segundo Boyer (1996), as palavras “elipse”, “parábola” e “hipérbole” não foram inventadas expressamente, foram adotadas de uso anterior, provavelmente pelos pitagóricos na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas: “Apolônio aplicou essas palavras num contexto novo como nomes para as seções planas”. (BOYER, 1996, p. 100)

O tratado de Apolônio de Perga sobre secções cônicas foi tão avançado e completo que além de todos os estudos já apresentadas, ainda traz muitas outras brilhantes descobertas acerca das cônicas.

Conforme descreve Cajori (2007), o “Grande Geômetra” ainda trata ao longo da obra, sobre assíntotas; eixos; proporcionalidade em triângulos, retângulos e quadrados; sistemas e posições relativas de duas cônicas; questões de máximo e de mínimo; similaridade de cônicas; diâmetros conjugados; dentre muitas outras propriedades.

É importante ressaltar que na Geometria de Apolônio a ausência de símbolos e termos técnicos é notável, o que acarreta provas longas e complicadas: “A principal maquinaria usada por Apolônio, bem como os geômetras mais antigos, vem sob o domínio do que tem sido apropriadamente chamado *álgebra geométrica*”. (CAJORI, 2007, p. 73)

1.3 A “fundação” da Geometria Analítica

O tratado de Apolônio é reconhecido pela grandiosidade das suas descobertas, pelos métodos inovadores e por todos os avanços apresentados em relação ao que já se tinha de conhecimento das seções cônicas, porém, as limitações da álgebra geométrica e a ausência de simbolismo algébrico foram fatores determinantes que impossibilitaram Apolônio de ter sido o inventor da Geometria Analítica.

Além disso, a definição e estudo das curvas pelos gregos em comparação com a flexibilidade e extensão do tratamento moderno ficam em posição desfavorável. Na verdade, aos antigos escapou quase completamente o papel que curvas de vários tipos desempenham no mundo que os cercava.

> (...) Que Apolônio, o maior geômetra da antiguidade, não tenha desenvolvido a geometria analítica se deu provavelmente à pobreza de curvas mais do que de idéias. Não são necessários métodos gerais quando os problemas se referem sempre a um caso dentre um número limitado de casos particulares. Além disso, os inventores modernos da geometria analítica tinham toda a álgebra da Renascença à sua disposição, enquanto que Apolônio trabalhava necessariamente com o instrumento mais rigoroso mas menos manejável da álgebra geométrica. (BOYER, 1996, p. 107)

De acordo com Boyer (1996), os métodos de Apolônio, em *As Cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que as vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1.800 anos.

O autor relata que os matemáticos franceses Renê Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665) foram os fundadores da Geometria Analítica. Vale destacar que ambos não trabalharam juntos, mas independentes e, curiosamente, produziram seus trabalhos simultaneamente.

Descartes levou a Geometria Analítica ao conhecimento de seus contemporâneos através da sua obra *La géométrie*, escrita por volta de 1637, a qual praticamente está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra.

> (...) Seu método em *La géométrie* consiste então em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolve-la geometricamente, de modo semelhante ao que usava para quadráticas. (BOYER, 1996, p. 233)

Em 1636, Fermat descobriu o princípio fundamental da Geometria Analítica: “Sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva”. (Boyer, 1996, p. 238)

Em sua obra *Ad locos et solidos isagoge* (1635), Fermat relacionou os trabalhos de Apolônio com as teorias das equações do também matemático francês François Viète (1540-1603). Ele chegou a demonstrar os teoremas enunciados por Apolônio, combinou a álgebra desenvolvida por Viète com a natureza dos lugares geométricos e conclui que todos os lugares geométricos estudados por Apolônio poderiam ser expressos por equações algébricas com duas variáveis.

2 O ESTUDO ANALÍTICO DA PARÁBOLA

Neste capítulo faremos um estudo analítico da parábola, destacando sua definição, elementos, eixo de simetria, equações e sua propriedade refletora.

2.1 Definição de parábola

De acordo com De Maio e Chiummo (2008), parábola é o conjunto de pontos de um plano equidistantes de uma reta r do plano chamada de diretriz, e um ponto F do mesmo plano, dito foco e $F \notin r$.

Em linguagem algébrica, podemos representar a parábola pelo conjunto

$$\Omega = \{P \mid d(P,F) = d(P,r)\}$$

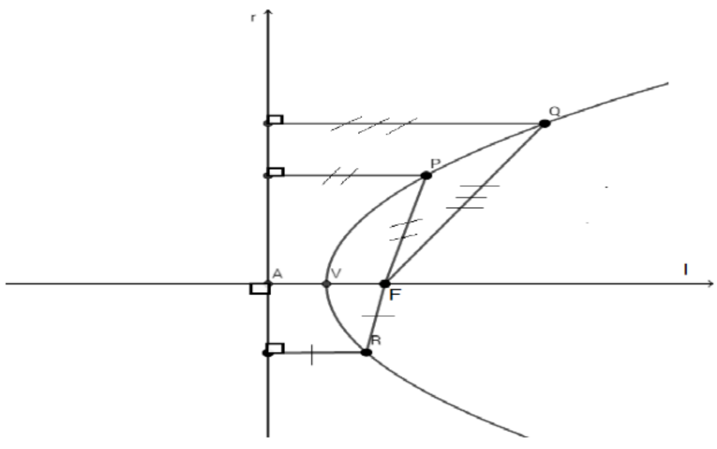
onde P simboliza cada ponto pertencente à parábola Ω, de foco F e diretriz r.

Santos e Ferreira (2009) apresentam a definição de parábola em termos de lugar geométrico: “Parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, denominado foco, e de uma reta fixa, denominada diretriz”. (SANTOS; FERREIRA, 2009, p. 64)

2.2 Elementos de uma parábola

Iezzi (2005) aponta como principais elementos de uma parábola: o foco, a diretriz, a reta focal, o parâmetro e o vértice, conforme ilustra a próxima figura:

Figura 4 - Parábola e seus elementos



Fonte: construída pelo autor

Onde:

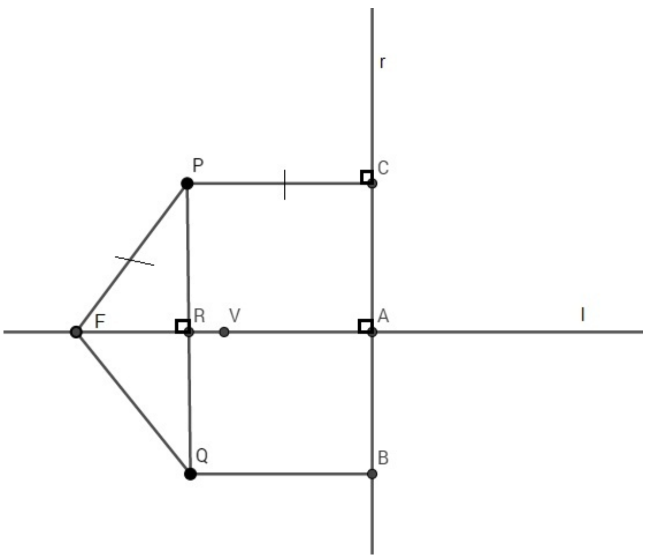
- O ponto F é o foco e a reta r é a diretriz da parábola;
- A reta focal l da parábola ou simplesmente eixo l, é a reta que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz;
- O vértice da parábola é o ponto V da reta focal que equidista de F e de r. Observe que, se A é o ponto onde r intersecta l, então V é o ponto médio do segmento AF;
- O número $2p = d(F,r)$ é chamado parâmetro da parábola, donde podemos verificar que $d(V,F) = d(V,r) = p$, $p \neq 0$.

2.3 A simetria da parábola em relação à sua reta focal

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013), toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

Para mostrar a veracidade dessa afirmação, consideremos uma parábola de foco F, vértice V, reta diretriz r, reta focal l e P um ponto pertencente a essa parábola, conforme a figura 5.

Figura 5 - A simetria da parábola em relação à reta focal



Fonte: construída pelo autor

Seja Q o ponto simétrico ao ponto P em relação à reta focal l. Temos que o segmento PQ é perpendicular à reta focal l e intercepta esta reta no ponto R, tal que R é ponto médio de PQ. Assim, o triângulo PRF é congruente ao triângulo QRF pelo caso LAL, e, portanto, $d(P,F) = d(Q,F)$. Além disso, $d(P,r) = d(R,r) = d(Q,r)$, e como P é um ponto da parábola, então $d(P,F) = d(P,r)$. Logo, $d(Q,F) = d(Q,r)$, ou seja, o ponto Q pertence à parábola, e isso nos permite concluir que a parábola é simétrica em relação à reta focal l.

2.4 Equações canônicas da parábola

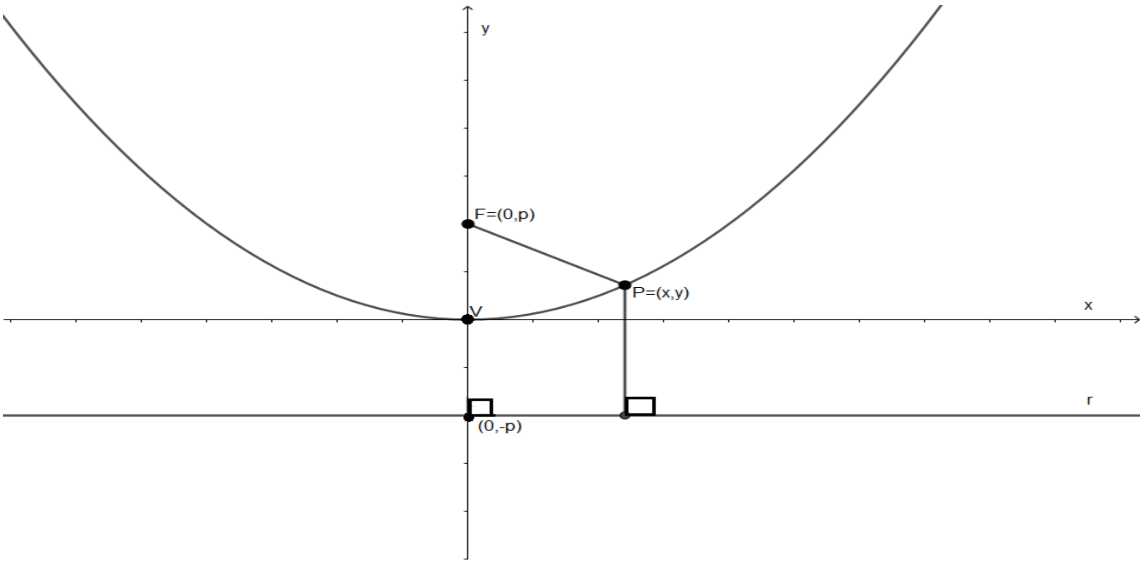
Nesta seção faremos uma análise das equações canônicas (ou equações reduzidas) da parábola. Primeiramente veremos os casos em que o vértice é a origem (0,0) e a reta focal é coincidente com o eixo das ordenadas ou das abscissas, depois apresentaremos os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados. Apresentaremos aqui as equações segundo as definições de Delgado, Frensel e Crissaff (2013).

2.4.1 *Equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo das ordenadas*

Temos dois casos a considerar:

1º Caso: O foco F está acima da diretriz r, conforme ilustra a figura 6.

Figura 6 - Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das ordenadas e foco acima da diretriz



Fonte: construída pelo autor

Temos que o vértice da parábola é a origem, ou seja, $V=(0,0)$. Como $d(F,r)=2p$, então o foco é o ponto $F=(0,p)$ e a diretriz é a reta horizontal de equação: $y=-p$. Assim, como $P=(x,y)$ é um ponto qualquer da parábola, então pela definição desta curva, vem:

$$d(P,F)=d(P,r)\Leftrightarrow\sqrt{(0-x)^2+(p-y)^2}=|y+p|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+p^2-2py+y^2}=y+p$$

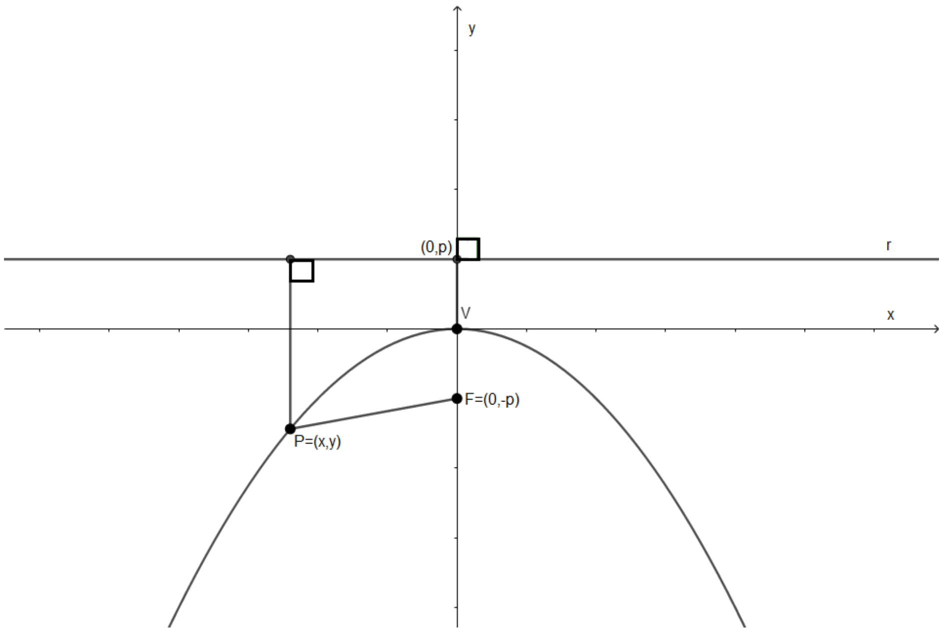
Elevando-se ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos

$$x^2+p^2-2py+y^2=y^2+2py+p^2\Leftrightarrow x^2=4py$$

Observe que a parábola $x^2=4py$ tem sua concavidade para cima.

2º Caso: O foco F está abaixo da diretriz r, conforme a figura 7 ilustra.

Figura 7 - Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das ordenadas e foco abaixo da diretriz



Fonte: construída pelo autor

Neste caso, temos vértice $V=(0,0)$, foco $F=(0,-p)$ e diretriz a reta horizontal cuja equação é $y=p$, já que $d(F,r)=2p$. Como $P=(x,y)$ é um ponto qualquer pertencente à parábola, temos:

$$d(P,F)=d(P,r)\Leftrightarrow \sqrt{(0-x)^2+(-p-y)^2}=|y-p|\Leftrightarrow \sqrt{x^2+p^2+2py+y^2}=y-p$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos

$$x^2+p^2+2py+y^2=y^2-2py+p^2\Leftrightarrow x^2=-4py$$

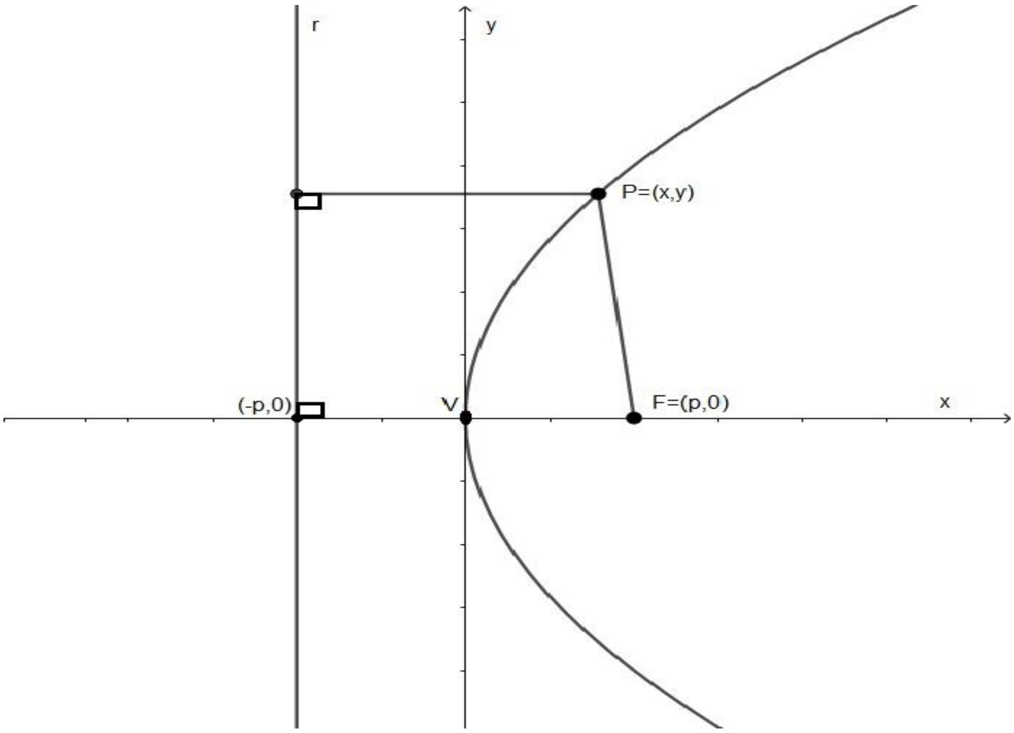
Observe que a parábola $x^2=-4py$ tem sua concavidade para baixo.

2.4.2 *Equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo das abscissas*

Novamente, temos dois casos a considerar:

1º Caso: O foco F está à direita da diretriz r, conforme mostra a figura 8.

Figura 8 - Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das abscissas e foco à direita da diretriz



Fonte: construída pelo autor

Temos que o vértice da parábola é $V=(0{,}0)$. Como $d(F,r)=2p$, então o foco é o ponto $F=(p{,}0)$ e a reta vertical $x=-p$ é a diretriz. Seja $P=(x,y)$ um ponto aleatório da parábola, então pela definição desta curva, vem:

$$d(P,F)=d(P,r) \Leftrightarrow \sqrt{(p-x)^2+(o-y)^2}=|x+p| \Leftrightarrow \sqrt{p^2-2xp+x^2+y^2}=x+p$$

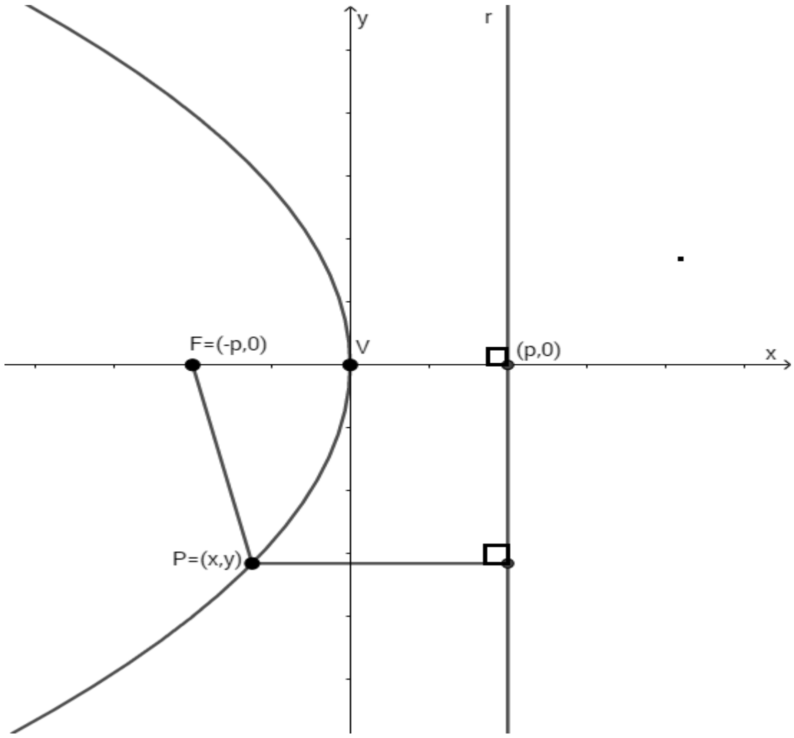
Elevando-se ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos

$$x^2+y^2+p^2-2xp=x^2+2px+p^2 \Leftrightarrow y^2=4px$$

Observe que a parábola $y^2=4px$ tem sua concavidade para a direita.

2º Caso: O foco F está à esquerda da diretriz r, conforme a figura 9.

Figura 9 - Parábola com vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo das abscissas e foco à esquerda da diretriz



Fonte: construída pelo autor

Neste caso, temos $V=(0,0)$ e $d(F,r)=2p$, logo o foco é $F=(-p,0)$ e a reta diretriz é $x=p$, que é uma reta vertical. Como $P=(x,y)$ é um ponto que pertence à curva, então pela definição de parábola, temos que:

$$d(P,F)=d(P,r) \Leftrightarrow \sqrt{(-p-x)^2+(o-y)^2}=|x-p| \Leftrightarrow \sqrt{p^2+2xp+x^2+y^2}=x-p$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos

$$x^2+y^2+p^2+2xp=x^2-2xp+p^2 \Leftrightarrow y^2=-4px$$

Observe que a parábola $y^2=-4px$ tem sua concavidade para a esquerda.

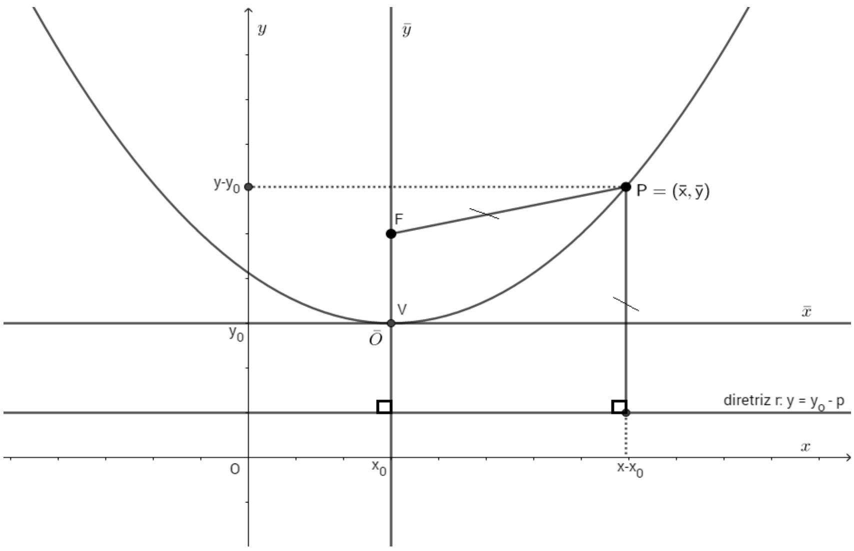
2.4.3 *Equação da parábola com vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela ao eixo das ordenadas*

Para obtermos a forma canônica da parábola de vértice no ponto $V=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$, com origem $\overline{O}=V=(x_0,y_0)$ e eixos $\overline{O}\overline{x}$ e $\overline{O}\overline{y}$ que têm a mesma direção e mesmo sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente.

Vamos considerar dois casos:

1º Caso: O foco F está acima da diretriz r, como representa a figura 10.

Figura 10 - Parábola com vértice no ponto (x_0,y_0),reta focal paralela ao eixo das ordenadas e foco acima da diretriz



Fonte: construída pelo autor

Como $P=(\overline{x},\overline{y})$ representa um ponto da parábola, então no sistema de coordenadas $\overline{x}V\overline{y}$, a equação desta curva é

$$\overline{x}^2=4p\overline{y}$$

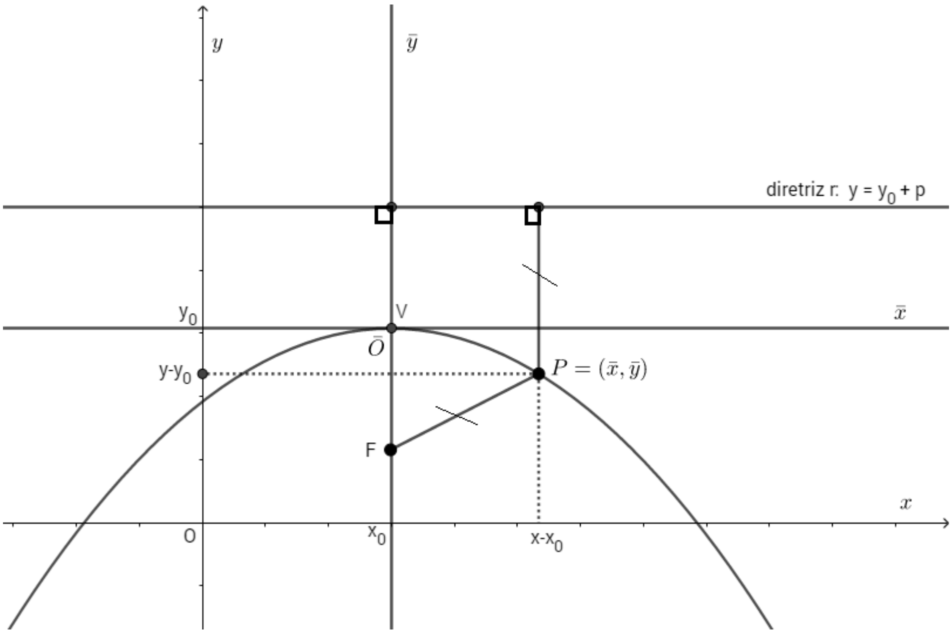
Substituindo $\overline{x}=x-x_0$ e $\overline{y}=y-y_0$ na equação acima, então, no sistema xOy essa parábola tem equação

$$(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$$

Ainda para essa parábola, em relação ao sistema xOy, podemos ver que o foco é o ponto $(x_0, y_0 + p)$ e a diretriz é a reta horizontal r de equação $y = y_0 - p$.

2º Caso: O foco F está abaixo da diretriz r, como representa a figura 11.

Figura 11 - Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0),reta focal paralela ao eixo das ordenadas e foco abaixo da diretriz



Fonte: construída pelo autor

De maneira análoga ao 1º caso, temos que $P = (\bar{x}, \bar{y})$ representa um ponto da curva, então no sistema de coordenadas $\bar{x}V\bar{y}$, a equação desta parábola é

$$\bar{x}^2 = -4p\bar{y}$$

Então, fazendo a substituindo $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$ na equação acima, temos que, no sistema xOy a equação da parábola em estudo é

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

Em relação ao sistema de coordenadas xOy, esta parábola tem foco $F = (x_0, y_0 - p)$ e a sua diretriz é a reta horizontal r de equação $y = y_0 + p$.

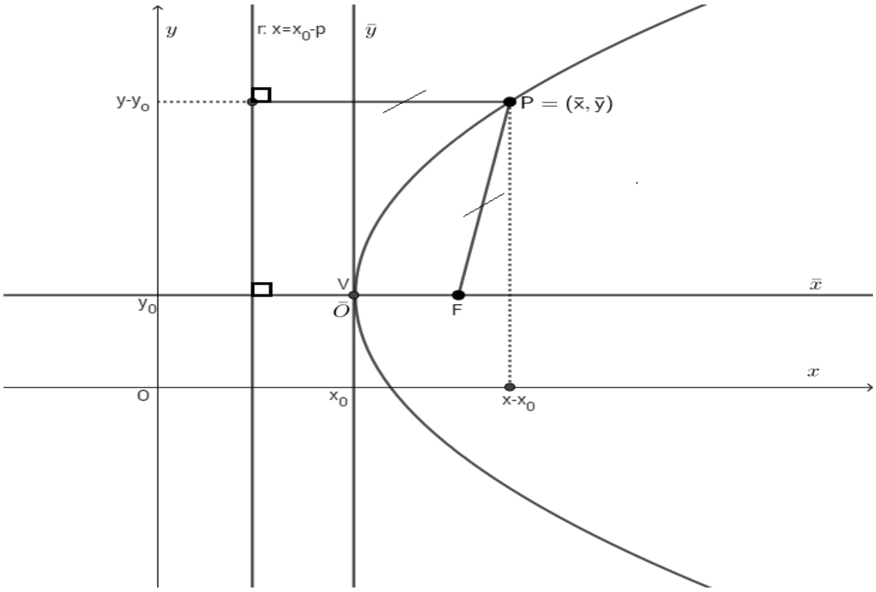
2.4.4 *Equação da parábola com vértice* $V=(x_0,y_0)$ *e reta focal paralela ao eixo das abscissas*

Como no caso anterior, considerando o sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$, com origem $\overline{O}=V=(x_0,y_0)$ e eixos $\overline{O}\overline{x}$ e $\overline{O}\overline{y}$ que têm a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente, podemos obter as equações e os elementos das parábolas com vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox.

Aqui também vamos considerar dois casos:

1º Caso: O foco F está à direita da diretriz r, como representa a figura 12.

Figura 12 - Parábola com vértice no ponto (x_0,y_0), reta focal paralela ao eixo das abscissas e foco à direita da diretriz



Fonte: construída pelo autor

Como $P=(\overline{x},\overline{y})$ é um ponto qualquer da parábola, então no sistema de coordenadas $\overline{x}V\overline{y}$, a equação desta curva é

$$\overline{y}^2=4p\overline{x}$$

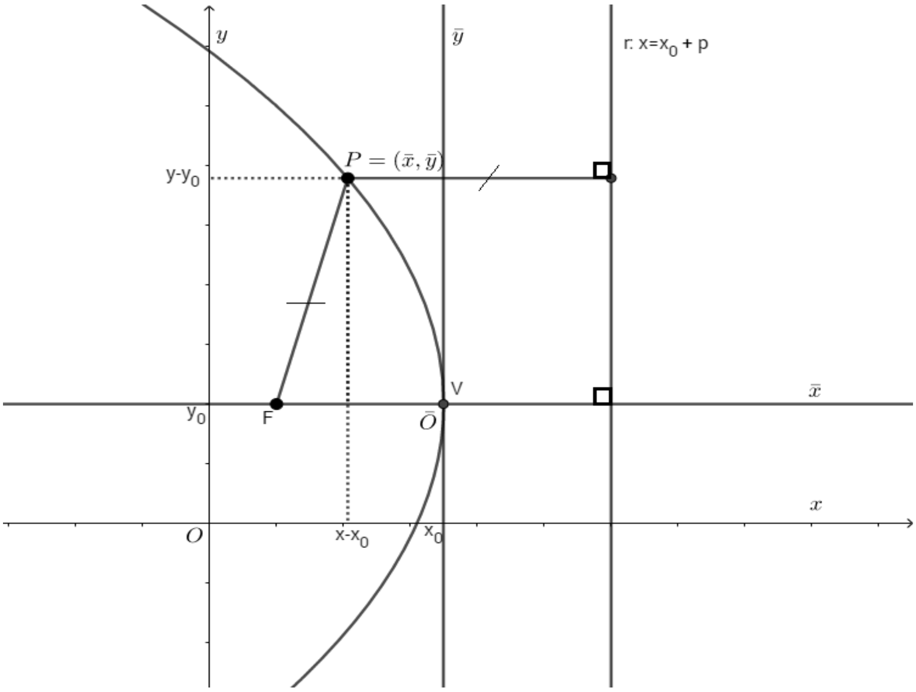
Substituindo $\overline{x}=x-x_0$ e $\overline{y}=y-y_0$ na equação acima, resulta que no sistema xOy essa parábola tem equação

$$(y-y_0)^2=4p(x-x_0)$$

Essa curva, em relação ao sistema xOy, tem foco no ponto $F = (x_0 + p, y_0)$ e sua diretriz é a reta vertical r de equação $x = x_0 - p$.

2º Caso: O foco F está à esquerda da diretriz r, como ilustra a figura 13.

Figura 13 - Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0),reta focal paralela ao eixo das abscissas e foco à esquerda da diretriz



Fonte: construída pelo autor

De maneira análoga ao caso anterior, no sistema de coordenadas $\bar{x}V\bar{y}$, a equação desta parábola é $\bar{y}^2 = -4p\bar{x}$. Logo, no sistema xOy, como $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$, a equação dessa parábola é

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

Considerando ainda esse mesmo sistema cartesiano, podemos ver que essa parábola tem foco $F = (x_0 - p, y_0)$ e sua diretriz é a reta vertical r de equação $x = x_0 + p$.

2.5 Equações paramétricas

De acordo com Winterle (2000), as equações paramétricas da parábola são obtidas a partir das equações reduzidas, bastando fazer $x = t$ ou $y = t$, onde t é chamado parâmetro.

Por exemplo, tomando a equação reduzida $x^2 = \pm 4py$ da parábola cuja reta diretriz é coincidente ao eixo das abscissas (seção 2.4.1), onde x pode assumir qualquer valor real, se fizermos $x = t$, teremos

$$t^2 = \pm 4py$$

que é equivalente a

$$y = \pm \frac{1}{4p} t^2$$

Assim, nesse caso, as equações paramétricas da parábola são dadas por

$$\begin{cases} x = t \\ y = \pm \dfrac{1}{4p} t^2, t \in \Re \end{cases}$$

Relembrando que o sinal $\pm$ indica a concavidade da parábola (+ indica concavidade para cima; $-$ indica concavidade para baixo).

De igual forma, se na equação $y^2 = \pm 4px$ fizermos $y = t$, temos

$$t^2 = \pm 4px$$

Ou seja:

$$x = \pm \frac{1}{4p} t^2$$

E o sistema

$$\begin{cases} y = t \\ x = \pm \dfrac{1}{4p} t^2, t \in \Re \end{cases}$$

constitui equações paramétricas da parábola com vértice na origem e reta diretriz coincidente ao eixo das ordenadas (seção 2.4.2).

Neste caso, o sinal $\pm$ indica se a parábola é côncava para a direita (+) ou para a esquerda ($-$).

Com procedimentos semelhantes, obtemos as equações paramétricas nos casos de o vértice da parábola não serem a origem do sistema e reta diretriz paralela a um dos eixos coordenados.

De Maio e Chiummo (2008) expressam as equações paramétricas da parábola dispondo-as em termos de par ordenado: "Seja a parábola dada por $y^2 = 2.p.x$. Se tomarmos $t = x$, temos $y^2 = 2.p.t \Rightarrow y = \sqrt{2.p.t}$; logo, uma parametrização pode ser dada por $f(t) = (t, \sqrt{2.p.t})$." (DE MAIO; CHIUMMO, 2008, p. 201)

2.6 A equação geral do 2º grau

De acordo com Camargo e Boulos (2005), fixado um sistema ortogonal de coordenadas, chama-se cônica o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ que satisfazem uma equação de 2º gral $g(x, y) = 0$, em que

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \text{, ou seja,}$$

a equação geral de uma cônica é dada por

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

A condição sobre o grau significa que ao menos um dos números a, b, c é diferente de zero.

Dizemos que:

- $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ é uma equação da cônica;
- ax^2, bxy e cy^2 são os termos quadráticos;
- bxy é o termo quadrático misto, para distinguir dos outros dois;
- dx e ey são os termos lineares;
- f é o termo independente.

Nossa abordagem levará em consideração apenas as parábolas com retas focais paralelas a qualquer um dos eixos cartesianos.

Em conformidade com a definição acima, podemos verificar que a equação de toda parábola pode ser escrita na forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$.

Na seção 2.4.3, vimos que a equação reduzida de uma parábola com centro em (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo das ordenadas, é dada pela expressão

$$(x-x_0)^2=\pm 4p(y-y_0)$$

Desenvolvendo a potência no primeiro membro e efetuando a multiplicação no segundo membro, obtemos

$$x^2-2xx_0+x_0{}^2=\pm 4py \mp 4py_0 \Leftrightarrow x^2-2x_0x \mp 4py+x_0{}^2 \pm 4py_0=0$$

que é uma equação da forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, em que

$$a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=-2x_0,\ e=\mp 4p\ e\ f=x_0{}^2 \pm 4py_0$$

De maneira análoga, no caso da reta focal paralela ao eixo das abscissas, a equação é representada por:

$$(y-y_0)^2=\pm 4p(x-x_0)$$

desenvolvendo as operações e agrupando os termos no primeiro membro da equação, tem-se

$$y^2-2y_0y \mp 4px+y_0{}^2 \pm 4px_0=0$$

que é uma equação da forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, em que

$$a=0,\ b=0,\ c=1,\ d=\mp 4p,\ e=-2y_0\ e\ f=y_0{}^2 \pm 4px_0$$

No primeiro caso, $a\neq 0$, $b=0$ e $c=0$ e, no segundo caso, $a=0$, $b=0$ e $c\neq 0$. Portanto, em qualquer caso, $b=0$ e $ac=0$.

Vale ressaltar que toda cônica pode ser representada por uma equação geral do 2º grau, mas nem todas as equações desse tipo representam uma cônica.

Segundo Iezzi (2005), uma equação do 2º grau nas incógnitas x e y pode representar uma circunferência, uma reunião de duas retas, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, um ponto ou um conjunto vazio.

Trazendo para a análise das cônicas, Venturi (1949) afirma que a equação $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ pode ser identificada como uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme o valor do discriminante b^2-4ac, donde,

- Se $b^2-4ac=0,$ a equação representa uma parábola.
- Se $b^2-4ac>0,$ a equação representa uma hipérbole.
- Se $b^2-4ac<0,$ a equação representa uma elipse.

Para Winterle (2000), qualquer parábola cujo eixo coincide ou é paralelo a um dos eixos coordenados, sempre pode ser representada pela equação geral que terá uma das formas

$$ax^2+dx+ey+f=0 \text{ com } a\neq 0,$$

que nada mais é do que a equação geral $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ em que $b=0$ e $c=0$, ou

$$cy^2+dx+ey+f=0 \text{ com } c\neq 0,$$

que é a equação geral $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ em que $a=0$ e $b=0$.

Nas equações acima temos $b=0$ e $c=0$ ou $b=0$ e $a=0$. Agora, analisando a condição $b^2-4ac=0,$ temos que:

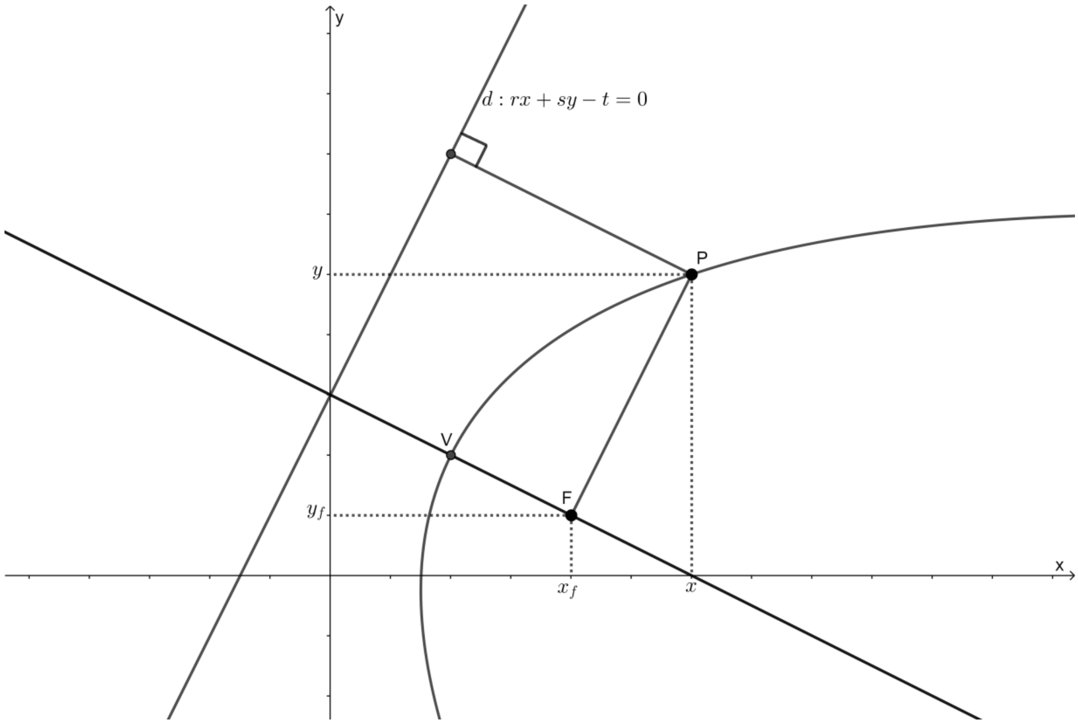
Se $b=0,$ então $ac=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $c=0,$ ou seja, a equação $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ representa uma parábola se, e somente se, $b=0$ e $ac=0$.

2.7 Equação da parábola com vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal não paralela a nenhum dos eixos

Nesta seção, vamos mostrar que a equação de uma parábola com vértice fora da origem e reta focal não paralela a nenhum dos eixos coordenados também tem a forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$.

Consideremos uma parábola de foco $F=(x_f, y_f)$, vértice V, reta diretriz $d: rx+sy-t=o, r\neq 0$ e $s\neq 0$, reta focal l e $P=(x,y)$ um ponto pertencente a essa parábola, conforme a figura 14.

Figura 14 - Parábola com vértice no ponto (x_0, y_0) ereta focal não paralela a nenhum dos eixos



Fonte: construída pelo autor

Aplicando a definição de parábola, temos que

$$d(P,F)=d(P,d)$$

$$\sqrt{(x-x_f)^2+(y-y_f)^2}=\frac{|rx+sy-t|}{\sqrt{r^2+s^2}}$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, vem que

$$(x-x_f)^2+(y-y_f)^2=\frac{(rx+sy-t)^2}{r^2+s^2}$$

Desenvolvendo as potências, obtemos

$$x^2 - 2xx_f + x_f^{\,2} + y^2 - 2yy_f + y_f^{\,2} = \frac{r^2x^2 + 2rsxy - 2rtxy - 2sty + s^2y^2 + t^2}{r^2 + s^2}$$

Multiplicando por $r^2 + s^2$, temos

$$(r^2 + s^2)(x^2 - 2xx_f + x_f^{\,2} + y^2 - 2yy_f + y_f^{\,2}) = r^2x^2 + 2rsxy - 2rtxy - 2sty + s^2y^2 + t^2$$

Efetuando as multiplicações no primeiro membro, vem

$$r^2x^2 - 2r^2x_f x + r^2x_f^{\,2} + r^2y^2 - 2r^2y_f y + r^2y_f^{\,2} + s^2x^2 - 2s^2x_f x + s^2x_f^{\,2} + s^2y^2 - 2s^2y_f y + s^2y_f^{\,2} =$$
$$= r^2x^2 + 2rsxy - 2rtxy - 2sty + s^2y^2 + t^2$$

Somando os termos semelhantes e fazendo os devidos agrupamentos no primeiro membro, temos

$$s^2x^2 + r^2y^2 - 2r^2x_f x - 2s^2x_f x + 2rtx - 2r^2y_f y - 2s^2y_f y - 2sty + 2rsxy + r^2x_f^{\,2} + r^2y_f^{\,2} + s^2x_f^{\,2} + s^2y_f^{\,2} + t^2 = 0$$

Agora, efetuando as fatorações, obtemos

$$s^2x^2 + r^2y^2 + (2rt - 2r^2x_f - 2s^2x_f)x + (-2r^2y_f^{\,2} - 2s^2y_f - 2st)y + 2rsxy + (r^2 + s^2)(x_f^{\,2} + y_f^{\,2}) + t^2 = 0$$

que é equivalente a

$$s^2x^2 + 2rsxy + r^2y^2 + (2rt - 2r^2x_f - 2s^2x_f)x + (-2r^2y_f^{\,2} - 2s^2y_f - 2st)y + \left[(r^2 + s^2)(x_f^{\,2} + y_f^{\,2}) + t^2\right] = 0$$

que é uma equação do tipo $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde

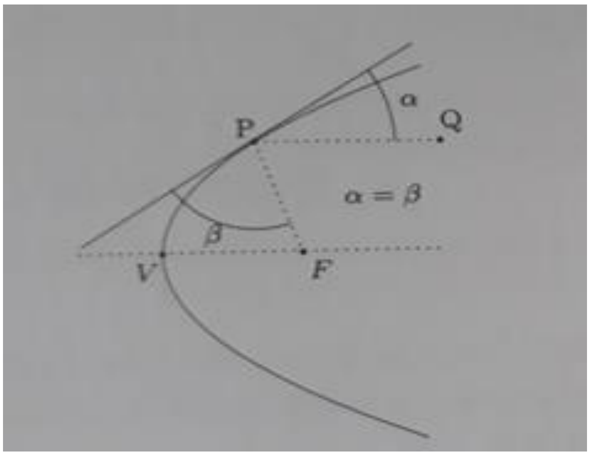
$$a = s^2,\ b = 2rs,\ c = r^2,\ d = 2rt - 2r^2x_f - 2s^2x_f,\ e = -2r^2y_f^{\,2} - 2s^2y_f - 2st \text{ e}$$
$$f = \left[(r^2 + s^2)(x_f^{\,2} + y_f^{\,2}) + t^2\right]$$

2.8 Propriedade refletora da parábola

Muitas das aplicações das seções cônicas se baseiam em suas propriedades de reflexão.

No caso da parábola, de acordo com Santos e Ferreira (2009), se F é o foco e P um ponto qualquer de uma parábola, os ângulos α e β determinados pela reta tangente em P com os segmentos PF e PQ, em que PQ é um segmento paralelo à reta focal da parábola, são iguais (Figura 15).

Figura 15 - Princípio de reflexão da parábola

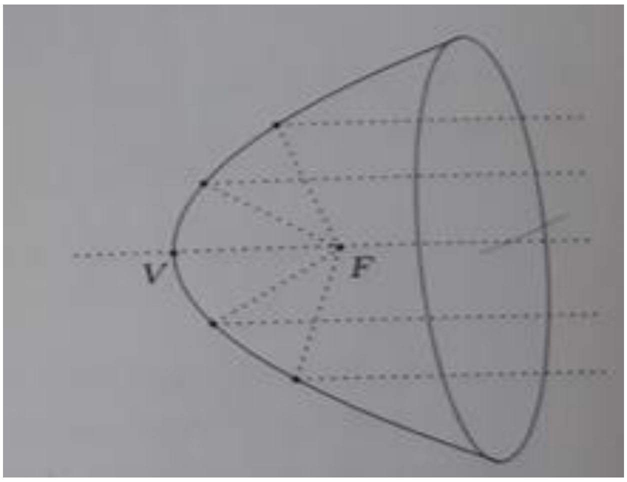


Fonte: Santos e Ferreira (2009)

De Maio e Chiummo (2008) descrevem a propriedade refletora da parábola da seguinte maneira: “Vamos considerar a parábola com o eixo focal no eixo dos x e vértice no eixo dos y. Toda reta paralela ao eixo focal ao refletir na parábola passa pelo foco, e o sentido inverso também é válido.” (DE MAIO; CHIUMMO, 2008, p. 202)

Ilustramos essa afirmação através da figura 16, que representa uma parábola do tipo $y^2 = 4px$, com vértice V e foco F.

Figura 16 - Propriedade de reflexão da parábola



Fonte: Santos e Ferreira (2009)

Em outras palavras, a propriedade nos diz que toda reta ou segmento de reta paralelo à reta focal encontra a parábola num determinado ponto, e, se a partir deste ponto traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo foco.

A propriedade refletora da parábola possui aplicações práticas, entre as quais podemos citar: nas antenas parabólicas, nos telescópios e nos faróis dos automóveis. Falaremos sobre essas e outras aplicações no próximo capítulo.

3 APLICAÇÕES DA PARÁBOLA

Conforme afirmado anteriormente, a propriedade refletora possui relevante importância nas diversas aplicações práticas da parábola, dentre elas vamos destacar as antenas parabólicas, os faróis automotivos, os holofotes e lanternas simples de mão,os telescópios, os fornos solares e o radar parabólico.

3.1 As antenas parabólicas

Segundo Souza (2014), uma das aplicações mais conhecidas da parábola, a antena parabólica é uma superfície denominada parabolóide de revolução. De acordo com Santos e Ferreira (2009), um parabolóide é uma superfície obtida através da rotação de uma parábola ao redor da sua reta focal. Essa superfície preserva a propriedade refletora da parábola em toda sua região, o que garante que toda recepção de sinais paralelos à reta focal será refletida para o foco, bem como todo sinal emitido pelo foco será refletido paralelamente à reta focal.

Figura 17 - Antena parabólica

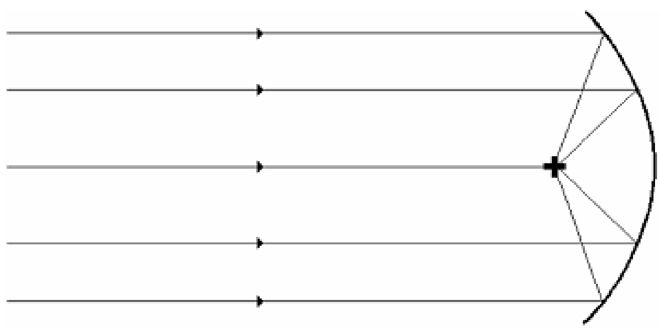
Fonte: Souza (2014)

Podemos observar que o posicionamento do receptor na haste central encontra-se no foco da antena e isso implica que todo sinal recebido na extensão da superfície desse parabolóide é refletido diretamente para o foco, ou seja, para o receptor.

De acordo com Wagner (1997), a antena parabólica capta os sinais emitidos por um satélite, mas estes sinais chegam muito fracos, logo a antena funciona como um amplificador natural de sinais, uma vez que direciona todos os sinais captados para o foco, no caso, para o receptor.

Para cada plano do parabolóide tem-se uma parábola que se comporta da mesma maneira: recebe o sinal e o reflete para o foco, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 18 - Plano receptor parabólico

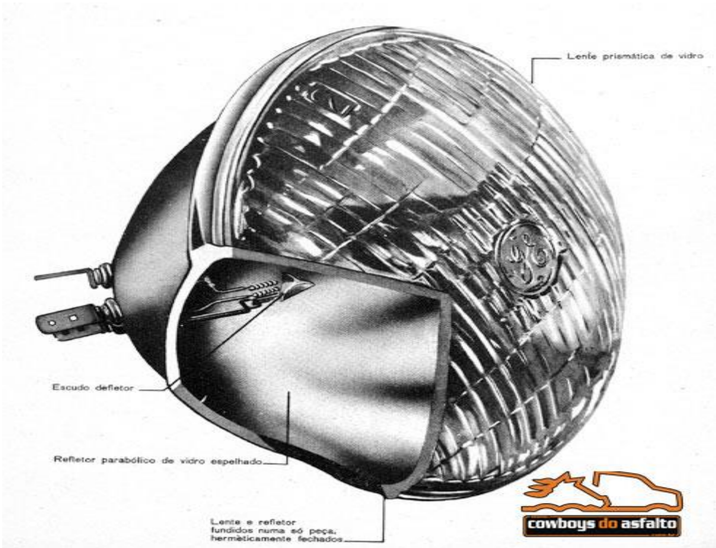


Fonte: Souza (2014)

3.2 Os faróis automotivos

Souza (2014) ainda destaca que outra aplicação prática das parábolas se encontra na fabricação dos faróis automotivos, que também são parabolóides de revolução.

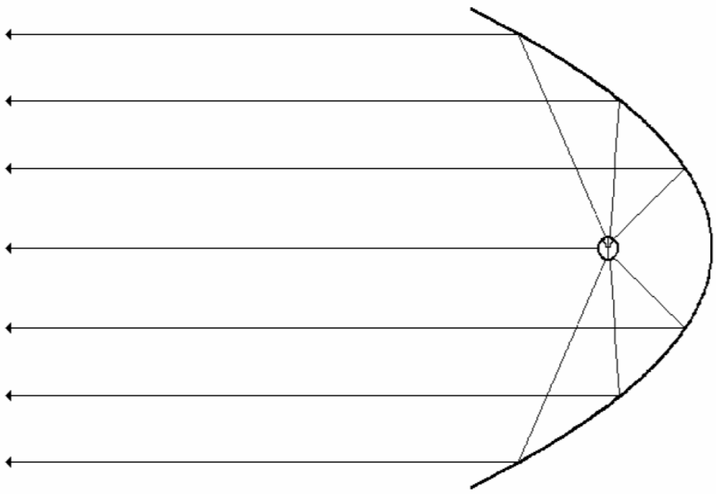
Figura 19 - Farol Parabólico



Fonte: Souza (2014)

O princípio de aplicação é o mesmo das antenas, porém de maneira reversa: no foco do farol parabólico se encontra uma lâmpada que ilumina uma superfície parabolóide espelhada. Esta, por sua vez, reflete os raios de luz paralelos ao seu eixo.

Figura 20 - Plano refletor parabólico



Fonte: Souza (2014)

3.3 Os holofotes e lanternas de mão

Cerqueira (2015) afirma que, de forma semelhante aos faróis dos carros, os holofotes e as lanternas de mão também possuem na sua estrutura um emissor de luz localizado no foco de uma parábola, voltado para um espelho parabólico localizado no fundo do objeto. É esta superfície que irá refletir os raios luminosos, paralelamente ao eixo da parábola.

Figura 21 - Lanterna simples

Fonte: Cerqueira (2015)

3.4 Telescópio refletor parabólico

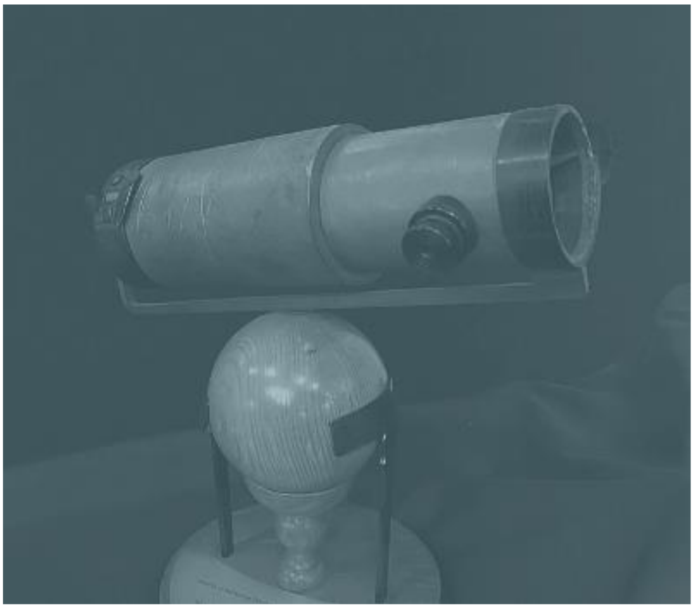
O mesmo princípio também é usado na modelagem de espelhos para certos telescópios para refletir os raios de luz aproximadamente paralelos de estrelas e planetas, de um espelho parabólico para uma lente no foco.

Figura 22 - Telescópio refletor parabólico

Fonte: google imagens (Acesso em 25.07.2018)

De acordo com Delgado, Frensel e Crissaff (2013), Isaac Newton desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico:

Figura 23 - Telescópio refletor de Newton



Fonte: Delgado, Frensel e Crissaff (2013)

3.5 Fornos solares

De acordo com Lindquist e Shulte (1994), Dioclés, em seu livro *Sobre espelhos inflamáveis* (século II a. C.), propôs a seguinte situação:

> (...) para se sacrificar uma vítima diante de uma multidão, ela deveria ser colocada no foco de um espelho parabólico, que acenderia um ponto inflamável visível no corpo. Não se sabe se essa idéia jamais foi posta em prática; todavia, a palavra latina *focus* significa lareira.(LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 212)

Os fornos solares ou fogões parabólicos são feitos a partir de conchas espelhadas com formato de parábola, daí o seu nome. Como a distância do Sol à Terra é de cerca de 150 milhões de quilômetros, quando o feixe de luz solar nos atinge seus raios já estão praticamente paralelos. Os raios solares ao entrarem em contato com a superfície côncava do forno solar são refletidos no espelho e estes se cruzam no ponto focal, local onde se concentra a energia em forma de calor, e consequentemente, tem uma elevação de temperatura, portanto, é nesse local onde a panela ou outro recipiente com alimento deve ser colocado.

Este sistema é extremamente eficiente, podendo gerar calor superior a 300ºC, o que possibilita que alimentos sejam cozidos ou mesmo assados.

Figura 24 - Forno solar

Fonte: google imagens (Acesso em 26.07.2018)

3.6 O radar parabólico

Santos (2016) ainda apresenta mais uma aplicação da propriedade refletora da parábola, o radar parabólico.

> Os radares usam as propriedades óticas das parábolas, similares as citadas anteriormente para antena parabólica e os faróis. Depois que o transmissor amplifica o sinal no nível desejado, ele envia para a antena, que em alguns radares tem a forma de um prato de metal. As ondas eletromagnéticas, depois de geradas e amplificadas, são levadas por guias de onda em direção ao foco do disco parabólico. Disparadas contra a parábola, se propagam para o ambiente. O extremo de saída da guia de onda é localizado no foco da parabólica. Semelhante às ondas luminosas no foco de num espelho parabólico, as ondas de radar se propagam em direção à parábola e por esta são emitidas em unidirecionalmente ao alvo. (SANTOS, 2016, p. 69)

Figura 25 - Radar parabólico

Fonte: Santos (2016)

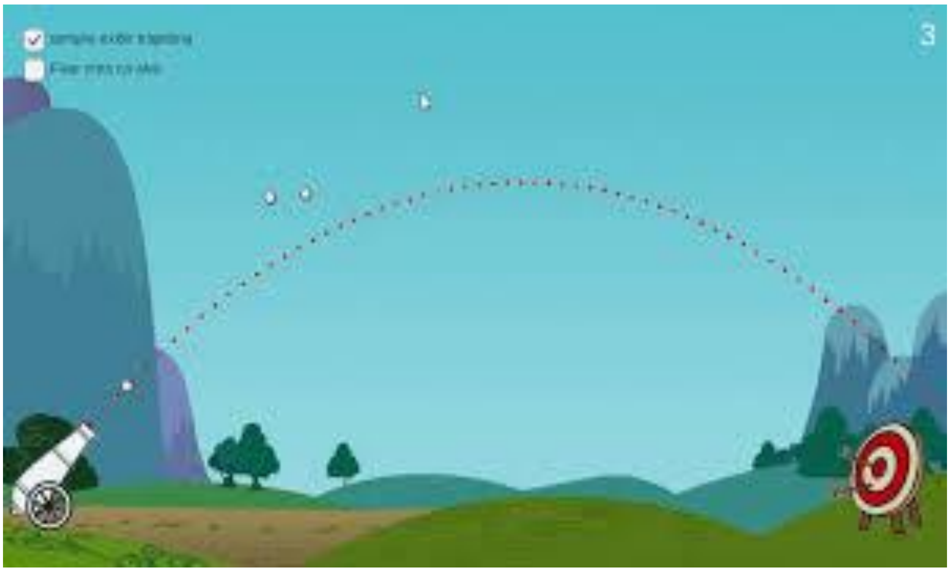
Além dessas, podemos ainda destacar outras aplicações práticas da parábola:

3.7 Em Balística

Balística é a ciência que estuda o movimento dos projéteis lançados ao ar livre, o que geralmente está relacionado ao disparo de projéteis por uma arma de fogo.

De acordo com Venturi (1949), quando se lança um projétil sobre o qual atua somente a força da gravidade, sua trajetória é uma parábola. Delgado, Frensel e Crissaff (2013) atribuem este resultado a Galileu Galilei (1564 - 1642). Antes de Galileu, acreditava-se que a trajetória descrita por um projétil era retilínea.

Figura 26 - Trajetória parabólica de um projétil



Fonte: Google imagens (Acesso em 28.07.2018)

Na Física, quando estudamos o Movimento Uniformemente Variado (M.U.V.), a equação que relaciona o espaço em função do tempo é $S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2}t^2$, a qual é uma função quadrática, pois $a \neq 0$, já que nesta expressão a é a aceleração e no M.U.V. a aceleração é não nula. Assim, o gráfico desta função é uma parábola e conhecendo as propriedades dessa curva, ao resolvermos problemas de Física sobre M.U.V. podemos obter muitas informações tais como alcance, altura máxima e tempo de percurso em lançamentos oblíquos.

3.8 Na Arquitetura e na Engenharia Civil

As formas geométricas são muito utilizadas na Arquitetura e na Engenharia Civil, tanto por questões estéticas e estruturais, quanto pelas soluções que as propriedades matemáticas trazem para resolver questões de otimização de espaços, iluminação e ventilação.

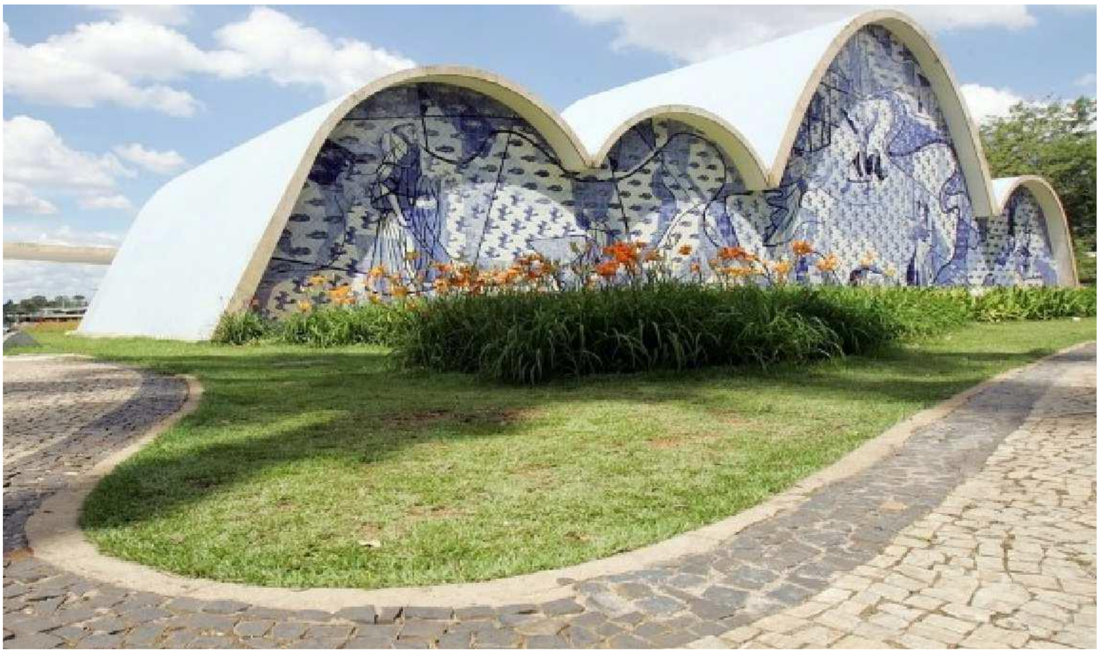
Sobre essa presença das formas geométricas na natureza e em criações do homem, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam:

> Uma das possibilidades mais fascinantes do Ensino da Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teia de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papéis decorativos, mosaicos, pisos, etc. (BRASIL, 1997, p. 128)

Podemos constatara forma parabólica em muitas construções, tanto no Brasil como em outros países.

Cerqueira (2015) destaca algumas dessas construções, como por exemplo, em algumas obras de Oscar Niemeyer, no caso, a igreja da Pampulha em Belo Horizonte (figura 27), os arcos da Marquês de Sapucaí no Rio de Janeiro (figura 28) e a ponte Juscelino Kubitschek em Brasília (figura 29). Já Internacionalmente, cita o Edifício Berliner Bogen, em Hamburgo, Alemanha (figura 30).

Figura 27 - Igreja da Pampulha (Belo Horizonte/MG)



Fonte: Cerqueira (2015)

Figura 28 - Marquês de Sapucaí (Rio de Janeiro/RJ)

Fonte: Cerqueira (2015)

Figura 29 - Ponte Juscelino Kubitschek (Brasília/DF)

Fonte: Cerqueira (2015)

Figura 30 - Edifício Berliner Bogen (Hamburgo, Alemanha)

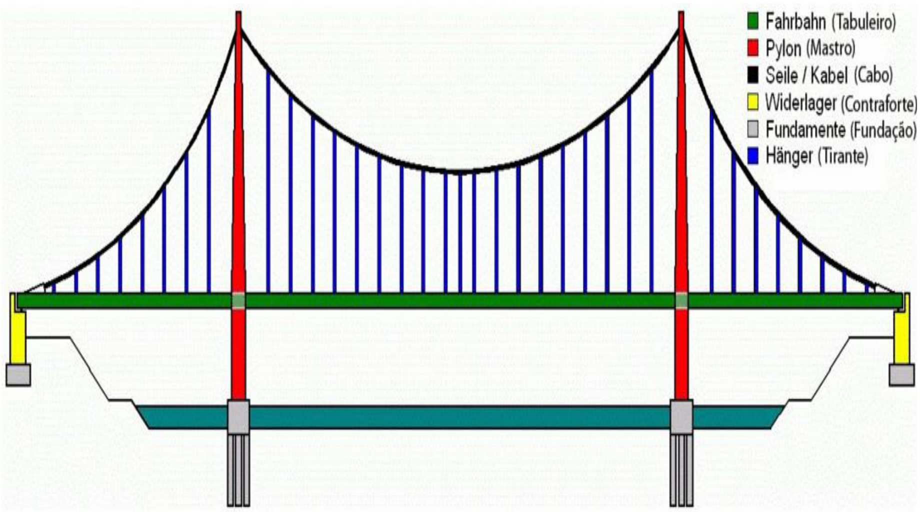
Fonte: Cerqueira (2015)

3.9 Pontes pênsis

Ponte pênsil ou ponte suspensa é um tipo de ponte sustentada por um sistema de cabos e mastros.

Para Dutra (2015), nesta ponte, pelo fato de que os tirantes são espaçados regularmente, a carga da ponte é uniformemente distribuída nos cabos e estes formam uma parábola. De acordo com Venturi (1949) os cabos de uma ponte pênsil assumem a forma de uma curva muito próxima à de uma parábola.

Figura 31 - Esquema de uma ponte pênsil



Fonte: Dutra (2015)

A seguir, temos algumas informações e imagens de pontes pênsis pelo mundo, retiradas de Dutra (2015):

- PONTE AKASHI-KAIKYO

Com 1.991 metros de comprimento no seu vão central, a ponte Akashi-Kaikyo, localizada entre a cidade de Kobe e a ilha Awaji, no estreito de Akashi, no Japão, é a maior ponte pênsil do mundo.

Figura 32 - Ponte Akashi-Kaikyo

Fonte: Dutra (2015)

- PONTE VERRAZANO NARROWS BRIDGE

A Verrazano-Narrows Bridge é uma ponte pênsil com duplo deck que liga os bairros de Staten Island e Brooklyn em Nova York. Ela possui um vão central de 1.298 metros, fazendo dela a oitava maior ponte pênsil do mundo.

Figura 33 - Ponte Verrazano Narrows Bridge

Fonte: Dutra (2015)

- PONTE AFONSO PENNA

Localizada na divisa dos estados brasileiros de Goiás com Minas Gerais, a ponte Pênsil Affonso Penna tem comprimento total de 158 metros. Ligando as cidades de Itumbiara (GO) e Araporã (MG), sobre o rio Paranaíba, é a ponte pênsil mais antiga do Brasil e o principal símbolo da cidade de Itumbiara.

Figura 34 - Ponte Afonso Penna

Fonte: Dutra (2015)

- PONTE HERCÍLIO LUZ

Localizada em Santa Catarina, na cidade de Florianópolis, a ponte Hercílio Luz foi construída com o objetivo de ligar a parte insular da capital do estado, na ilha de Santa Catarina, à sua parte continental. Seu objetivo foi substituir o antigo serviço de ligação por balsas. Com um comprimento total de 821 metros, a ponte Hercílio Luz é uma das maiores pontes pênseis do mundo e a maior do Brasil.

Figura 35 - Ponte Hercílio Luz

Fonte: Dutra (2015)

4 CONSTRUÇÕES DE PARÁBOLAS

Partindo da definição de parábola, mas sem o rigor das demonstrações, buscaremos mostrar de forma simples como construir parábolas utilizando materiais concretos, como régua, compasso, papel, lápis e outros, através de atividades que podem propiciar ao leitor entender de forma mais clara os conceitos desta cônica. Em seguida, usaremos o s*oftware* GeoGebra para ampliar nossos estudos, realizando a construção de parábolas utilizando as ferramentas deste aplicativo, que possibilitam ao estudante desenvolver a criatividade e estimular o raciocínio lógico, manipulando os objetos e podendo visualizá-los imediatamente após realizar alguma modificação.

4.1 Método da dobradura

Construir parábolas pelo método da dobradura consiste numa forma lúdica de mostrar que para se obter essa cônica basta que tenhamos o ponto Foco e a reta Diretriz.

De acordo com Lindquist e Shulte (1994), a construção de cônicas utilizando papel manteiga se constitui num tipo de aula diferente, ou seja, é uma forma agradável de aprender os conceitos dessas curvas. Segundo os autores, o processo para a construção da parábola com papel manteiga se dá da seguinte maneira:

> Para um tipo de aula diferente, dê a cada aluno três folhas de papel-manteiga, de cerca de 30 cm por 22,5 cm. Na primeira folha eles devem traçar uma reta e marcar um ponto fora dessa reta. A seguir, devem dobrar a folha de muitas maneiras diferentes (tantas quantas forem possíveis, em cerca de cinco minutos), de modo que o ponto considerado sempre se sobreponha a diferentes pontos da reta. Cada dobra deverá ser gravada no papel como uma linha visível, e logo aparecerá uma imagem. (LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 203)

Lindquist e Shulte afirmam que a imagem que aparecerá após essa operação é uma parábola, emoldurada por envoltória de tangentes, que será facilmente observada ao se posicionar a folha de papel manteiga contra uma superfície escura.

Para realizar essa tarefa, além do papel manteiga, é necessário utilizar régua e lápis.

A seguir apresentamos de forma mais detalhada esse método de construção da parábola, que comumente é chamado de método da dobradura, fazendo-se necessário realizar os seguintes passos:

1º: Trace uma reta horizontal d , que será a diretriz da parábola;

2º: Marque um ponto F fora dessa reta, que será o foco da parábola;

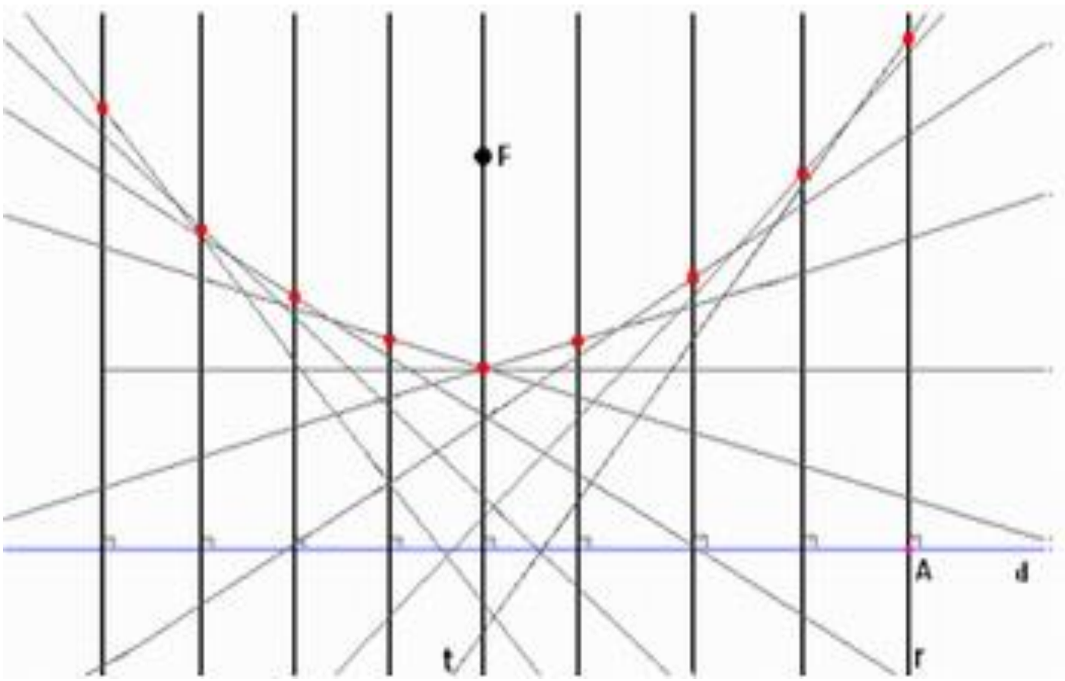
3º: Sobre a reta d , marque um ponto A;

4º: Dobre o papel manteiga de modo a fazer coincidir os pontos A e F ;

5º: Repita esse processo (3º e 4º passos), tomando outros pontos sobre a reta d ;

6º: Realizando essa operação certo número de vezes será possível observar que as dobras tangenciam uma curva que é uma parábola, como mostra a figura seguinte:

Figura 36 - Parábola obtida pelo método da dobradura



Fonte: google imagens (acesso em 01/08/2018)

4.2 Usando régua e compasso

A utilização de régua e compasso pelos alunos pode iniciar ainda no Ensino Fundamental, quando se ensina ângulos e outros conceitos da Geometria Plana. Construir parábolas com esses instrumentos ajuda o aluno a revisar vários conceitos básicos. Os procedimentos para essa tarefa foram adaptados de Peixoto (2013).

Nesta atividade, necessita-se dos seguintes materiais: papel A4, lápis ou caneta, régua e compasso. A construção se dá realizando os seguintes passos:

1º: Trace uma reta horizontal d, que será a diretriz e fora dela marque um ponto F que será o foco da parábola;

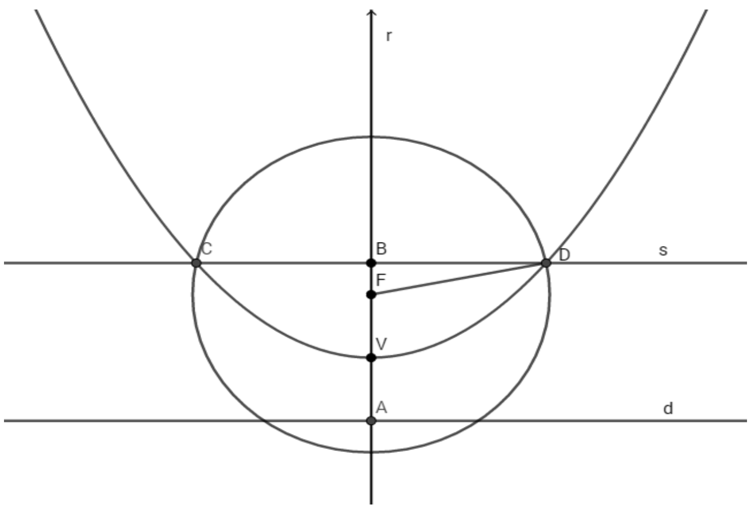
2º: Trace uma reta r perpendicular a diretriz d, passando pelo foco F, em seguida marque o ponto A, o qual é o ponto de interseção entre r e d;

3º: O segmento AF é o parâmetro da parábola. No ponto médio deste seguimento, marque o ponto V, que é o vértice da parábola;

4º: Sobre a semirreta VF marque um ponto B qualquer e em seguida trace a reta s, perpendicular à reta r em B;

5º: Trace o círculo de centro F e raio AB, o qual irá cortar a reta s nos pontos C e D que pertencem à parábola (conforme mostra a figura seguinte), já que por construção $CF = DF = AB$, onde AB é o raio do círculo e $AB = d(C,d) = d(D,d)$;

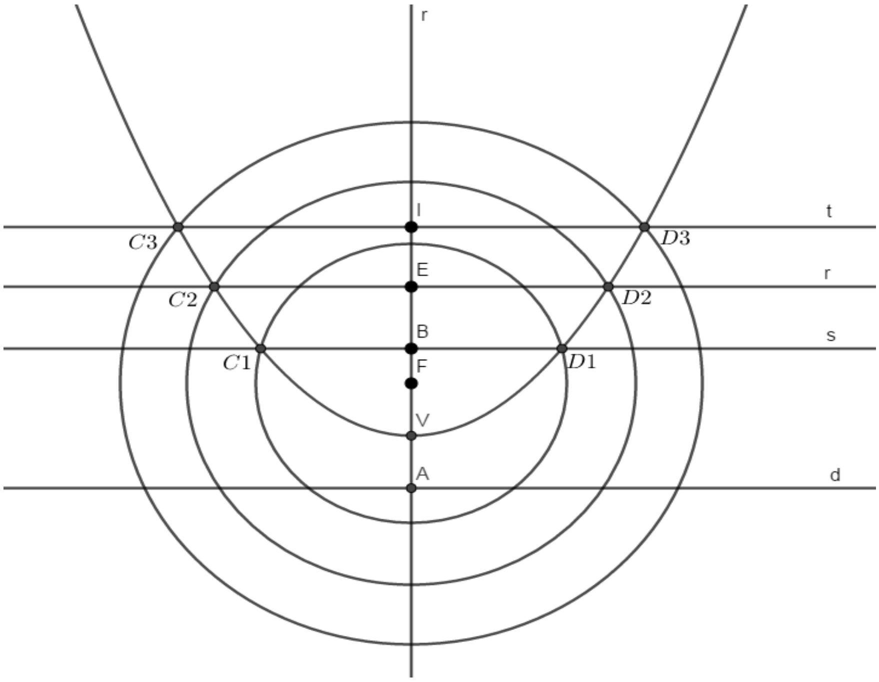
Figura 37 - Construção da parábola com régua e compasso



Fonte: construída pelo autor

6º: Repetindo algumas vezes os passos 4 e 5 (tomando outros pontos sobre a semirreta VF), obtêm-se vários pontos da parábola, que vai tomando forma na medida em que o processo é repetido. A próxima figura ilustra essa situação:

Figura 38 – Parábola construída com régua e compasso



Fonte: construída pelo autor

4.3 Método de Kepler

Peixoto (2013) apresenta outra forma de construir parábolas utilizando materiais concretos, conhecida como Método de Kepler.

Usando régua, esquadro, alfinete, lápis e barbante, a construção se dá realizando os seguintes passos:

1º: Tome a régua como sendo a reta diretriz da parábola e fixe o alfinete onde será o foco da parábola;

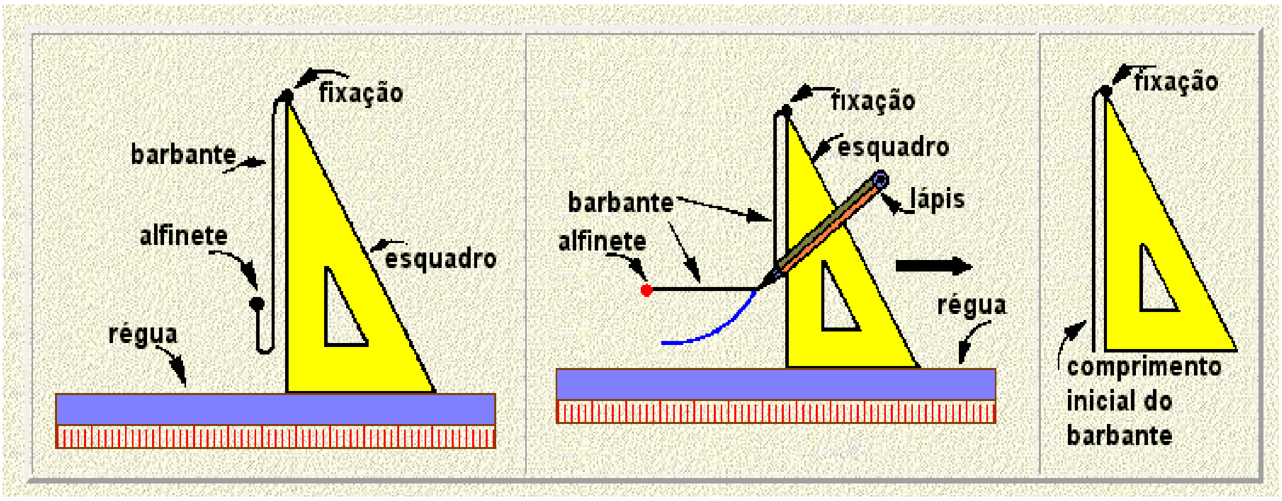
2º: Corte o barbante do tamanho do maior lado do esquadro e amarre uma ponta dele no vértice do esquadro oposto ao menor lado e a outra ponta no alfinete;

3º: Apóie o lado menor do esquadro na régua de modo que o lado maior encoste-se ao alfinete e estique o barbante com o lápis marcando o ponto médio entre o alfinete e a régua (perpendicular à régua), obtendo assim o vértice da parábola;

4º: Deslize o esquadro sobre a régua de modo que a ponta do lápis fique sempre encostada no lado maior do esquadro e mantendo o barbante esticado;

5º: Fazendo o mesmo processo deslizando o esquadro no sentido oposto obtemos a outra parte da parábola (simétrica à obtida anteriormente).

Figura 39 - Método de Kepler para construção da parábola



Fonte: Peixoto (2013)

4.4 Utilizando o *software* GeoGebra

Nos últimos anos, o ensino da Matemática vem passando por mudanças importantes, pois não param de surgir novas metodologias de ensino, principalmente a disponibilidade de recursos como *softwares* educacionais, que ampliam de forma significativa as possibilidades de ensino e aprendizagem. Uma das áreas da Matemática que se beneficia diretamente desses recursos tecnológicos é a Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais reforçam a vantagem dos professores de Matemática usarem os *softwares*: “O uso de alguns *softwares* disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente.” (BRASIL, 1997, p. 128)

Nascimento, Silva e Pinheiro (2014) também apontam para a importância do uso de *softwares* no processo de ensino e aprendizagem, pois contribuem para que o aluno desenvolva a habilidade de visualizar.

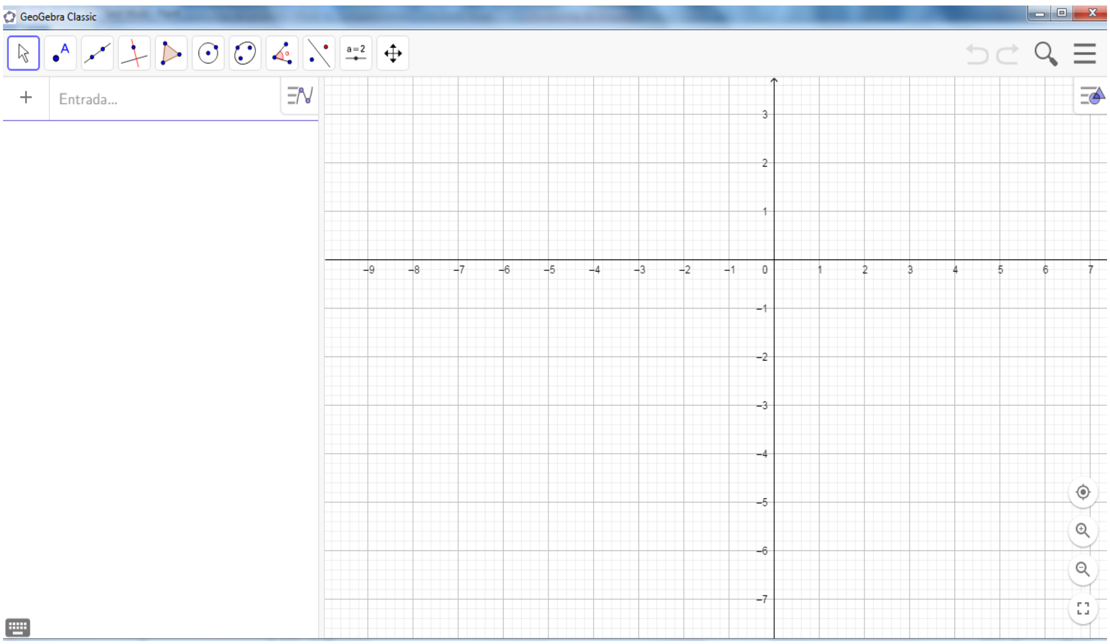
> A Metodologia do uso de *software*, no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica. A habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo. (NASCIMENTO; SILVA; PINHEIRO, 2014, p. 561)

A utilização de *softwares* permite abordar os aspectos dinâmicos da Geometria, especialmente da Geometria Analítica, tornando possível construir lugares geométricos e explorar as suas propriedades, e um desses programas é o GeoGebra.

O GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que reúne geometria, álgebra e cálculo em um único ambiente. Ele permite realizar construções geométricas a partir de uma série de comandos, que podem ser dados tanto no campo de *entrada,* através de equações, pontos, retas, vetores, secções cônicas, etc., assim como utilizando os diversos ícones da barra de ferramentas.

Ao acessar o programa temos uma janela como mostra a imagem seguinte:

Figura 40 - Tela inicial do GeoGebra



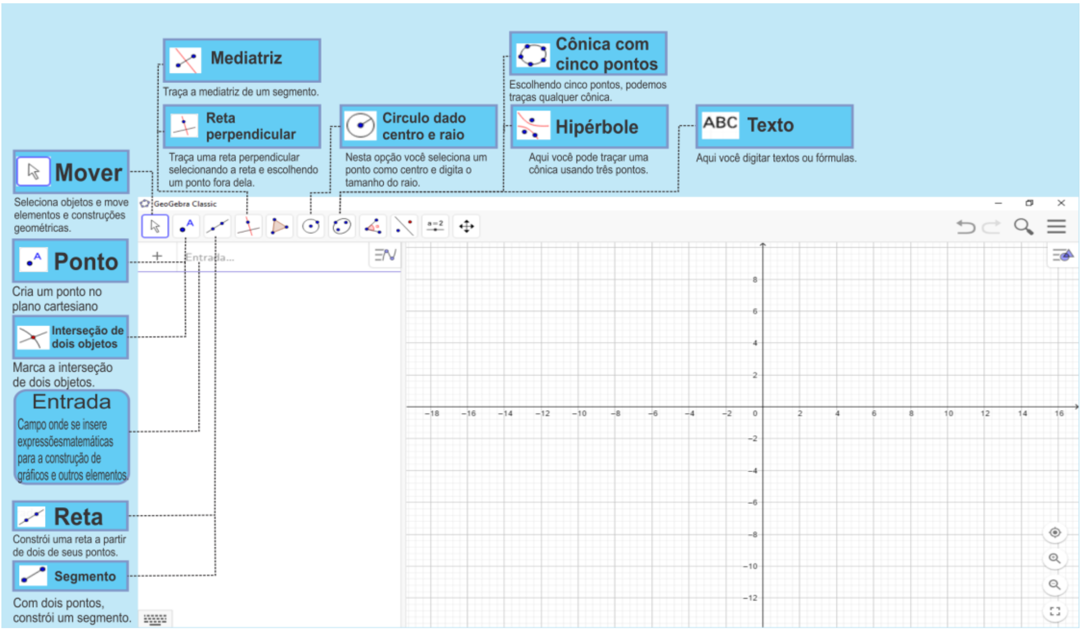
Fonte: construída pelo autor

De acordo com Nascimento, Silva e Pinheiro (2014) o GeoGebra pode ser explorado como um laboratório prático e dinâmico dentro do computador, bastando para isso usá-lo com criatividade.

> Além de ser utilizado para matemática e estatística, não impede de usarmos a criatividade para poder reproduzir novas formas com alguns cliques e algumas pequenas transformações, onde quase seria impossível reproduzir com detalhes no caderno ou quadro de instruções. Assim o GeoGebra funciona como um Laboratório Prático e dinâmico dentro do computador, onde não há necessidade de usar régua, compasso, transferidor e esquadro.(NASCIMENTO; SILVA; PINHEIRO, 2014, p. 561)

A próxima imagem mostra algumas funções do GeoGebra, versão Clássico 6:

Figura 41 - Algumas funções do GeoGebra



Fonte: construída pelo autor

Um benefício significativo do GeoGebra é que as representações geométricas e algébricas podem ser visualizadas simultaneamente na tela principal, pois estão interligadas dinamicamente, ou seja, a cada modificação realizada na estrutura algébrica, a estrutura geométrica se adapta automaticamente e vice-versa, independentemente da forma como elas foram construídas inicialmente.

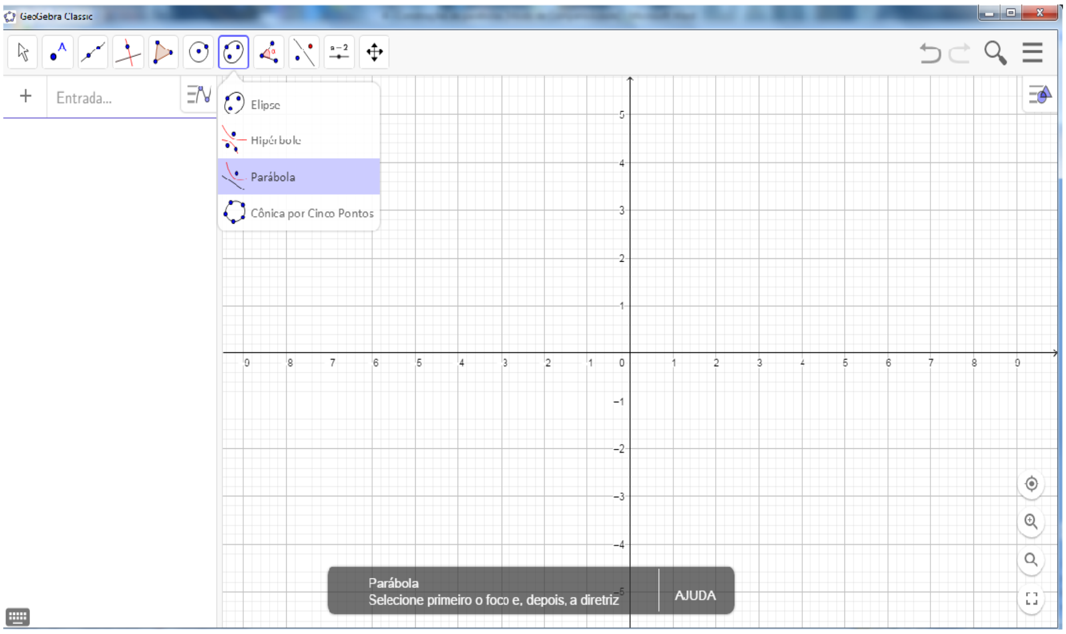
A seguir, realizaremos algumas atividades de construção de parábolas utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra, o que nos permitirá abordar os conceitos,elementos e as representações dessas curvas.

Atividade 1: Utilizado o ícone Elipse

Para construir uma parábola utilizando o ícone *elipse,* devem-se realizar os seguintes passos:

1º: Na barra de ferramentas clique no ícone *elipse* (sétimo ícone da esquerda para a direita). Observe que ao clicar aparecerá também a opção *parábola*, e posicionando o mouse sobre esta opção, surge a seguinte mensagem de ajuda: *selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz* como mostra a figura abaixo:

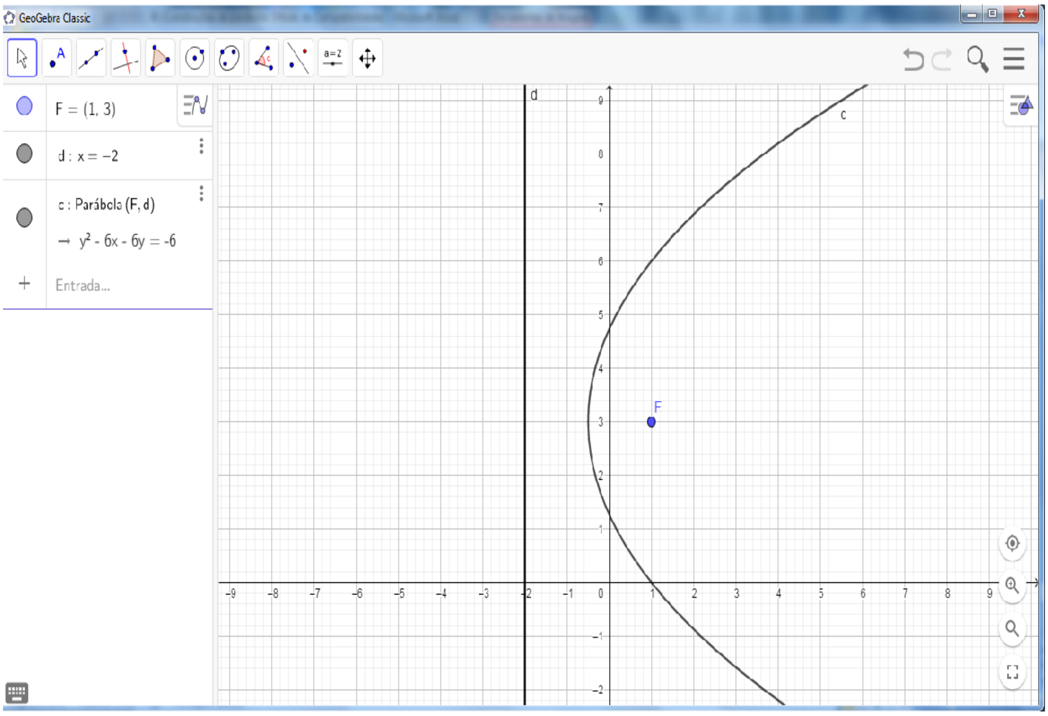
Figura 42 - Construção da parábola utilizando o ícone elipse



Fonte: construída pelo autor

2º: Assim, para construir a parábola utilizando essa ferramenta, devemos construir previamente um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz). Então, vamos criar no *campo de entrada* o ponto $F=(1,3)$ e a reta vertical d de equação $x=-2$. Em seguida, selecione novamente a ferramenta *Parábola*, clique no ponto F e, então, clique na reta d. O resultado é a parábola c, como mostra a próxima imagem:

Figura 43 - Parábola construída utilizando o ícone *elipse*



Fonte: construída pelo autor

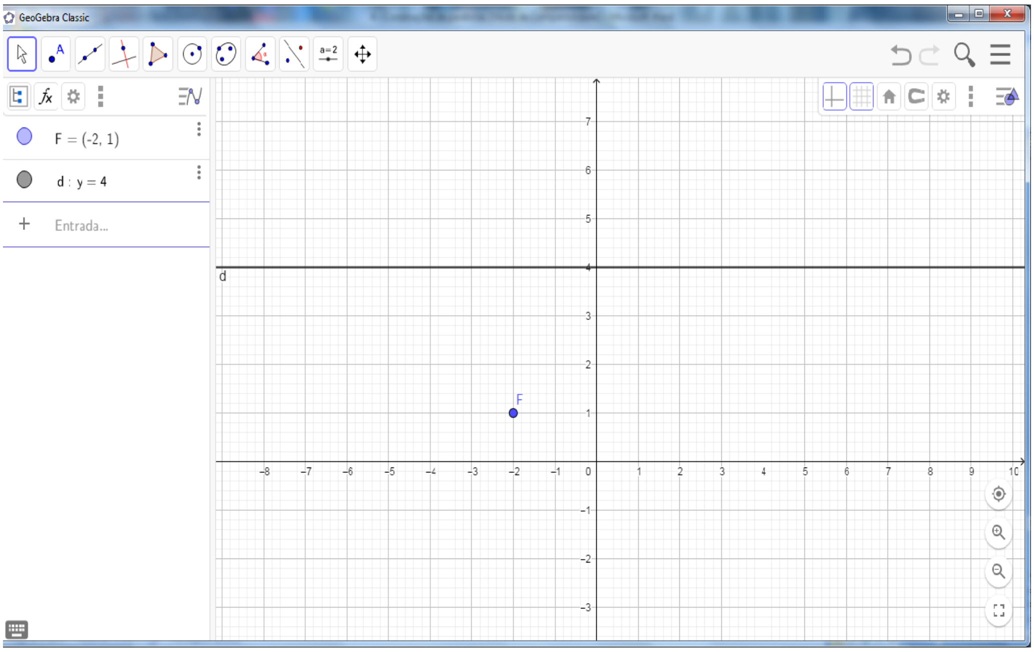
Observe que construímos a parábola selecionando o foco e a diretriz, porém o *software* gerou a equação correspondente: $y^2 - 6x - 6y = -6$.

Atividade 2: Utilizando o comando: *Parábola [<Ponto>, <Reta>]*

Neste caso, os passos para construir a parábola são:

1º: Na caixa de entrada criar o foco F e a reta diretriz d, digamos $F = (-2{,}1)$ e a reta horizontal $d : Y = 4$, conforme mostra a próxima figura:

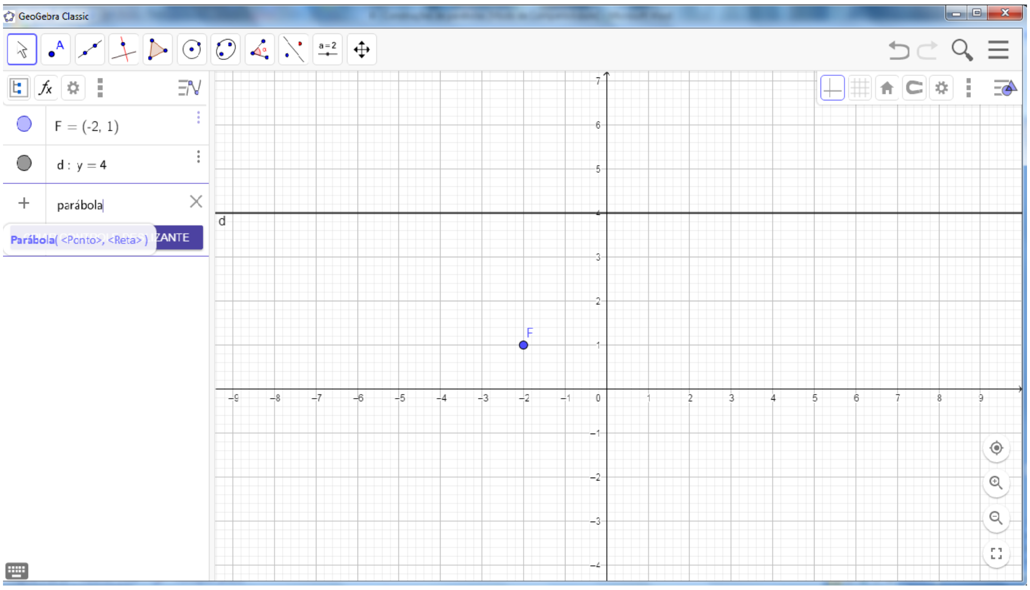
Figura 44 - Construção da parábola utilizando o comando: *Parábola [<Ponto>, <Reta>]*



Fonte: construída pelo autor

2º: Na caixa de entrada, ao digitar *parábola*, observe que aparecerá abaixo a opção *Parábola [<Ponto>, <Reta>],* como mostra a imagem seguinte:

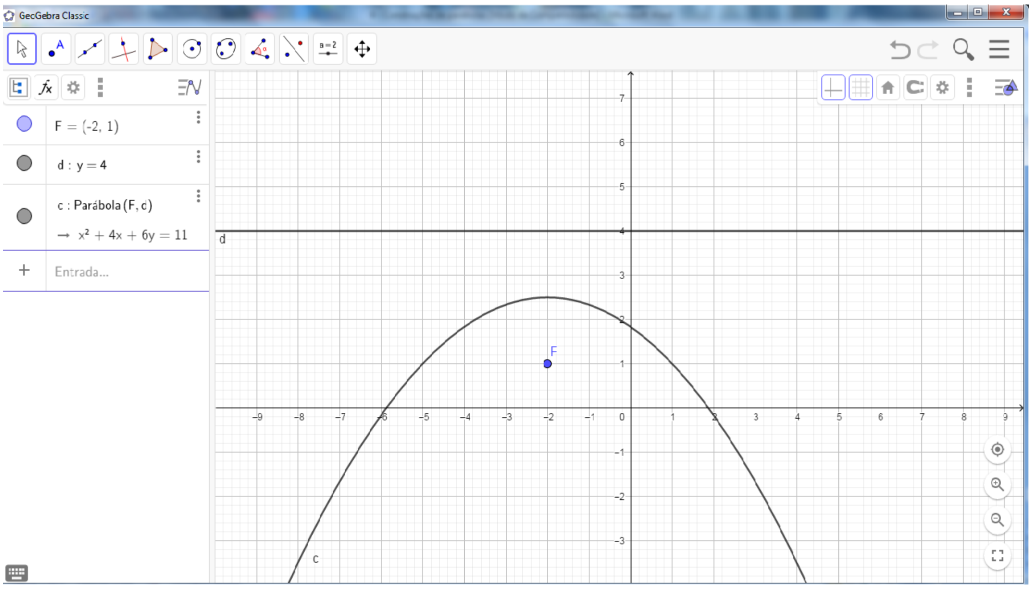
Figura 45 - Comando *Parábola [<Ponto>, <Reta>]*



Fonte: construída pelo autor

3º: Clicando nesta opção, aparecerá na caixa de entrada o comando *Parábola [<Ponto>, <Reta>]*. Então, substitua *<Ponto>* por F (o ponto foco criado no 1º passo) e *<Reta>* por d (a diretriz criada no 1º passo). O resultado será a parábola c conforme mostra a próxima imagem:

Figura 46 - Parábola construída utilizando o comando: *Parábola [<Ponto>, <Reta>]*



Fonte: construída pelo autor

Observe que construímos a parábola com o comando *parábola (F,d)* e automaticamente o GeoGebra exibiu também a equação correspondente: $x^2+4x+6y=11$.

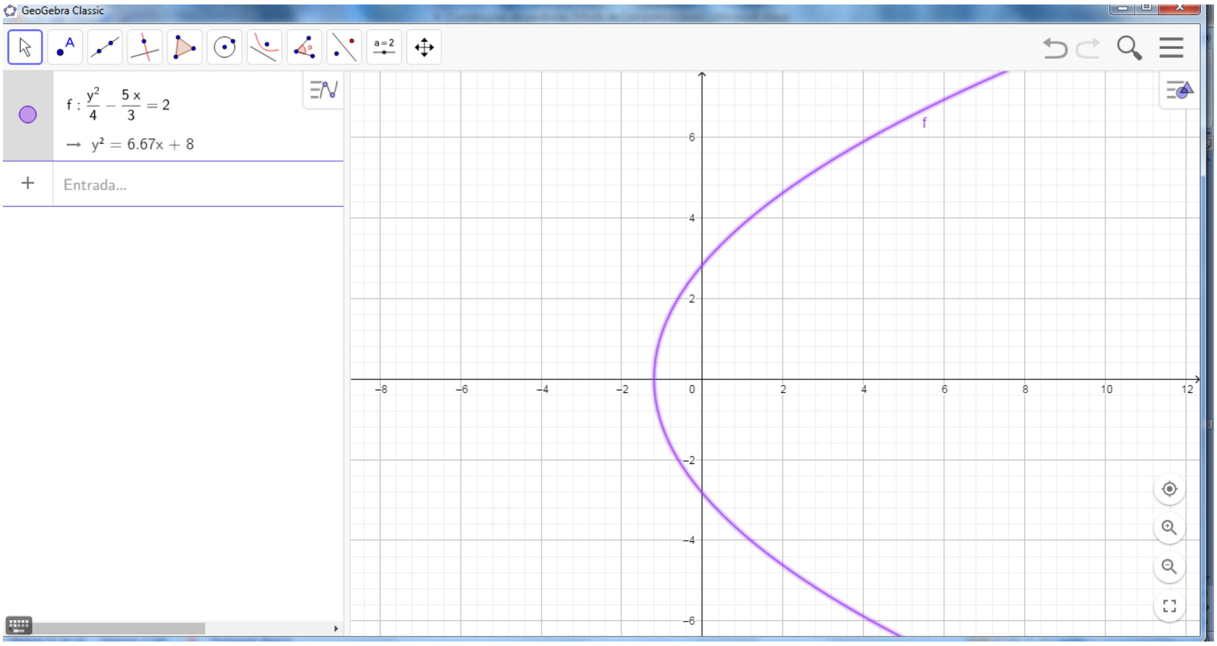
Atividade 3: Através da equação da parábola

Caso a equação da parábola seja conhecida, podemos esboçar seu gráfico. Por exemplo, vamos construir o gráfico da parábola de equação $\frac{y^2}{4}-\frac{5x}{3}=2$. Para isso, vamos realizar os seguintes passos.

1º: Na caixa de entrada, digite a equação $\frac{y^2}{4}-\frac{5x}{3}=2$;

2º: Após digitar a equação, dê *enter* e o gráfico aparecerá imediatamente, conforme ilustra a próxima figura.

Figura 47 - Gráfico da parábola $\frac{y^2}{4} - \frac{5x}{3} = 2$



Fonte: construída pelo autor

Atividade 4: Utilizando o comando *Cônica por Cinco Pontos*

Outra maneira de construir a parábola é utilizando o comando *Cônica por Cinco Pontos*. O passo a passo para esse procedimento é o seguinte:

1º: Na caixa de entrada, construa um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz). No caso, escolhemos $F = (2{,}4)$ e uma reta horizontal $d : y = 1$;

2º: Utilizando a ferramenta *Ponto*, marque sobre a reta diretriz os pontos A, B, C, D e E. Neste exemplo escolhemos $A = (-3{,}1)$, $B = (-1{,}1)$, $C = (1{,}1)$, $D = (4{,}1)$, $E = (7{,}1)$.

3º: Sobre os pontos A, B, C, D e E, trace as retas perpendiculares à reta diretriz utilizando a ferramenta *Reta Perpendicular*;

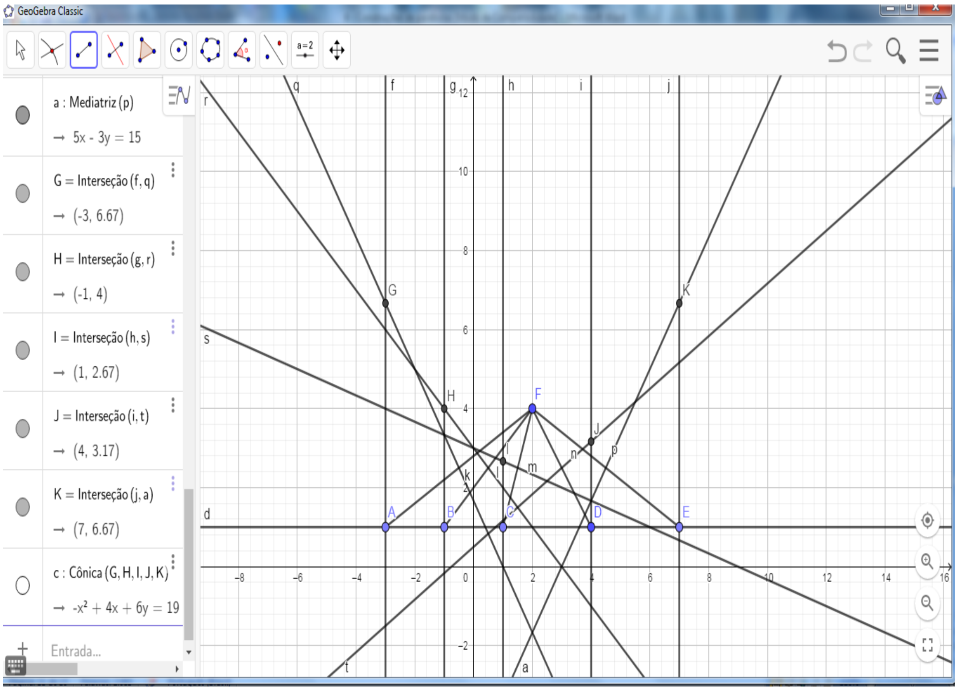
4º: Utilizando a ferramenta *Segmento* trace os segmentos AF, BF, CF, DF e EF, e em seguida trace a mediatriz de cada um deles utilizando a ferramenta *Mediatriz*;

5º: Utilizando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, obtenha o ponto G, tal que G é a interseção da reta perpendicular à reta diretriz que passa pelo ponto A e a mediatriz do segmento AF.

6º: De modo análogo obtenha os pontos H, I, J e K, tais que H é a interseção da reta perpendicular à reta diretriz que passa pelo ponto B e a mediatriz do segmento BF, I é a interseção da reta perpendicular à diretriz que passa pelo ponto C e a mediatriz de CF, J é a interseção da perpendicular à diretriz que passa pelo ponto D e a mediatriz do segmento DF, e K é a interseção da perpendicular à reta diretriz que passa pelo ponto E e a mediatriz de EF;

Após a realização desses procedimentos, deve-se obter o seguinte resultado, ilustrado na figura seguinte:

Figura 48 - Construção da parábola utilizando o comando *Cônica por Cinco Pontos*

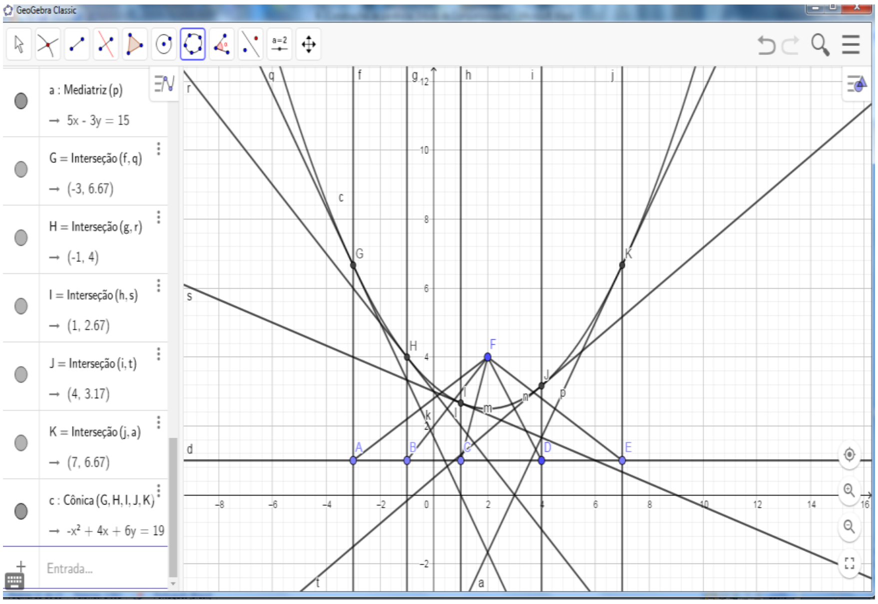


Fonte: construída pelo autor

7º: Observe que $d(G,F) = d(G,d)$, $d(H,F) = d(H,d)$, $d(I,F) = d(I,d)$, $d(J,F) = d(J,d)$ e $d(k,F) = d(k,d)$, ou seja, os pontos G, H, I, J e K pertencem à parábola.

8º: Selecione os pontos G, H, I, J e K e clique na ferramenta *Cônica por Cinco Pontos*. O resultado é a parábola conforme representa a próxima imagem:

Figura 49 - Parábola construída utilizando o comando *Cônica por Cinco Pontos*



Fonte: construída pelo autor

Atividade 5: Através do círculo diretor

A construção da parábola através do círculo diretor utiliza várias ferramentas do GeoGebra. Os passos são os seguintes:

1º: Construa um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz). No caso, escolhemos $F = (3,1)$ e $d : y = 4$;

2º: Utilize a ferramenta *Ponto em Objeto* e marque um ponto A sobre a reta d;

3º: Construa o segmento AF;

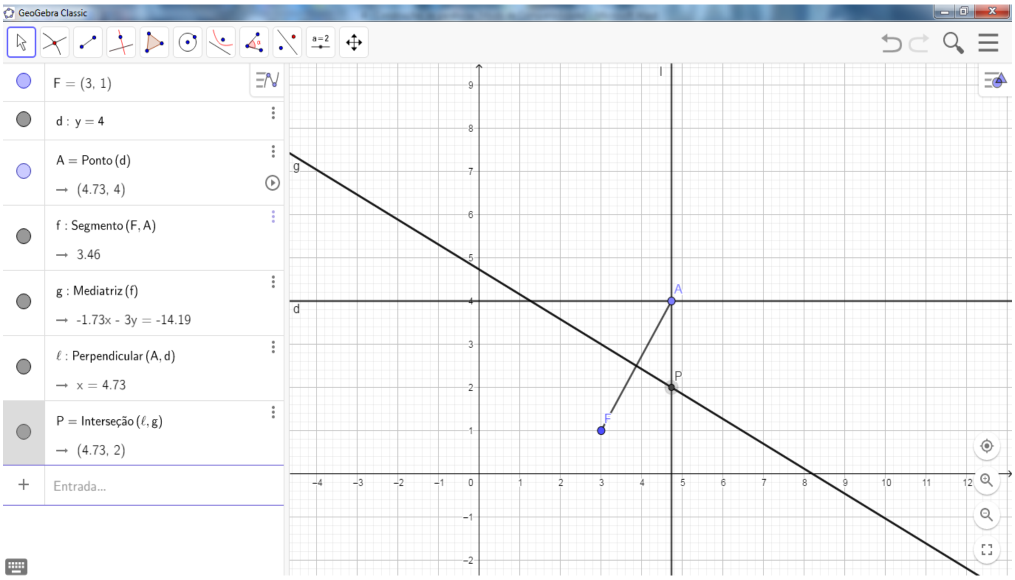
4º: Utilize a ferramenta *Mediatriz* e trace a mediatriz g do segmento AF;

5º: Utilize a ferramenta *Reta Perpendicular* e construa a perpendicular l à reta diretriz d que passa pelo ponto A;

6º: Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, obtenha o ponto P, interseção da mediatriz g e da perpendicular l;

Observe que ao construir um objeto qualquer o GeoGebra imediatamente o nomeia, mas caso deseje mudar esse nome ou representação basta selecionar tal objeto, clicar com o botão direito do mouse e ir na função renomear. A próxima figura ilustra as etapas da construção realizadas até aqui.

Figura 50 - Construção da parábola através do círculo diretor



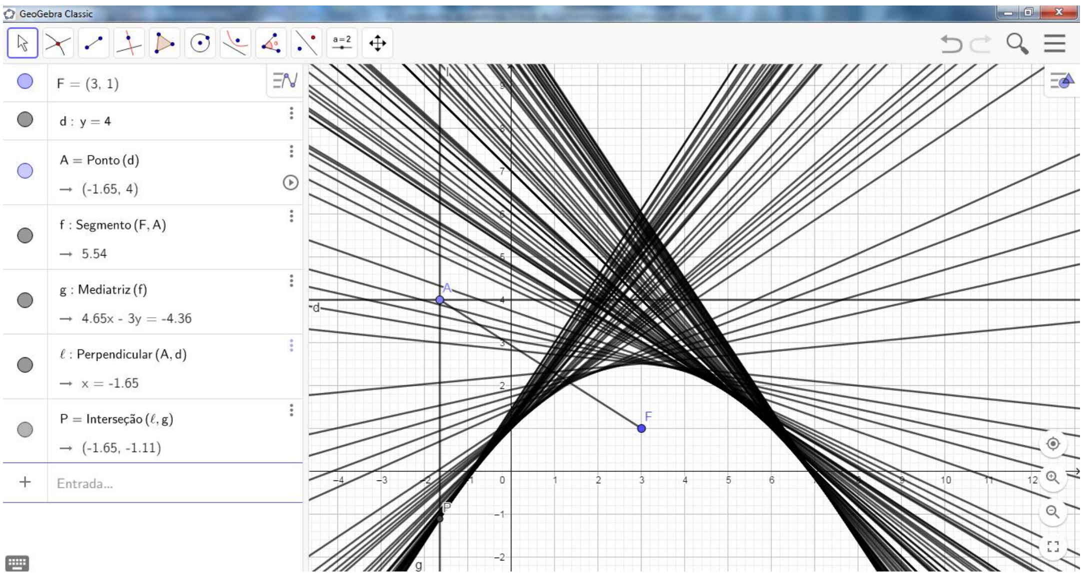
Fonte: construída pelo autor

7º: Ao longo da reta d mova o ponto A e então observe que a trajetória do ponto P forma a parábola;

8º: Selecione a mediatriz g e nela utilize a ferramenta Habilitar Rastro;

9º: Ao mover novamente o ponto A sobre a reta d, o rastro deixado pela reta g forma a parábola, conforme mostra a seguinte imagem:

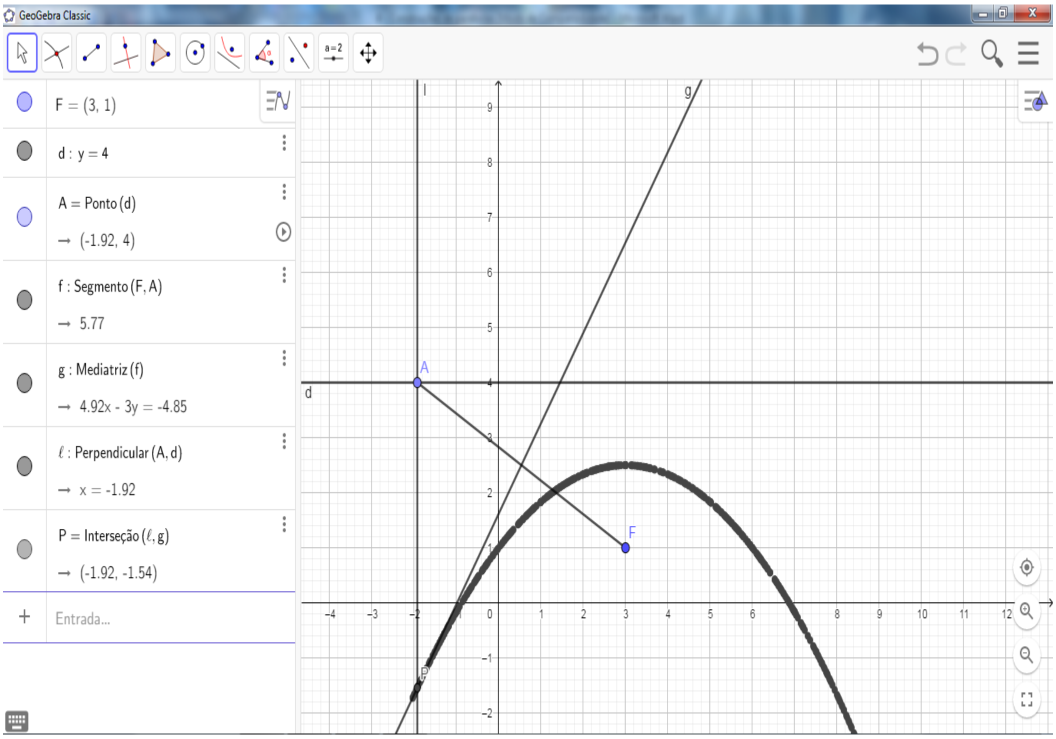
Figura 51 - Parábola construída através do círculo diretor - rastro da mediatriz g



Fonte: construída pelo autor

10º: Outra visualização desta parábola se obtém, caso no passo 8, ao invés de usar o rastro na mediatriz g, se utilize no ponto P, ou seja, selecione o ponto P e nele habilite o rastro. Movendo o ponto A ao longo da reta d, a parábola é representada pelo rastro deixado pelo ponto P, conforme mostra a próxima figura:

Figura 52 - Parábola construída através do círculo diretor – rastro do ponto P



Fonte: construída pelo autor

5 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO: CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE PARÁBOLA ATRAVÉS DE MATERIAIS CONCRETOS E DO SOFTWARE GEOGEBRA

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de abordagem para o estudo da parábola utilizando materiais didáticos concretos e computacionais, com o objetivo de levar os alunos a compreenderem os conceitos dessa cônica, seus elementos e suas propriedades.

No segundo momento, aplicaremos a atividade proposta numa turma de terceiro ano do Ensino Médio de uma Escola Pública de Rio Branco – Acre e, em seguida, apresentaremos os resultados obtidos.

5.1 Justificativa da proposta

Nossa proposta é abordar a construção geométrica da parábola utilizando materiais concretos, como régua e compasso, propondo atividades que contribuam para a compreensão do conceito e dos elementos dessa cônica. Em seguida, buscaremos dinamizar essas construções através do *software* GeoGebra, no intuito de que essa manipulação dos conceitos geométricos possa estimular o aprendizado dos estudantes por desviar um pouco o foco da matemática notacional para este aspecto mais prático.

A Matemática é considerada por muitas pessoas uma das disciplinas mais complicadas de se aprender, e isso se deve em parte pela maneira que os professores a ensinam.

De acordo com Búrigo et al. (2012), é fato que o ensino da Matemática na escola não tem alcançado seus objetivos, triste realidade que se confirma não apenas no desempenho dos candidatos ao vestibular, mas também em outros indicadores tais como os diversos exames organizados pelo Ministério da Educação (MEC), como por exemplo ENEM e Prova Brasil. O autor ressalta que no contexto atual o professor de Matemática precisa dar significado ao que ensina, para que as aulas não se resumam a fórmulas e mecanismos de decorar:

> O aluno de hoje é contestador e a relação docente/aluno mudou nas últimas décadas. A insatisfação dos alunos tem sido verbalizada invocando falta de motivação e de interesse: “Para que aprender isso? Onde vou usar?” Sem entender o significado do que está sendo ensinado, o aluno passa a odiar as aulas de matemática, reduzidas a um monte de fórmulas e mecanismos a decorar, e, traumatizado, esse aluno acumula frustrações e falhas de aprendizagem, e isso prejudica o ambiente da sala de aula de matemática. (BÚRIGO et al., 2012, p. 26)

Mediante esta realidade, faz-se necessário que o professor de Matemática sinta a necessidade de mudar suas estratégias de ensino, busque materiais didáticos adequados ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática e tente contextualizar os conteúdos a serem ensinados, na expectativa de torná-los atraentes, de modo que o aluno entenda o seu significado e reconheça a sua importância. Assim, o professor poderá desenvolver uma “nova” abordagem para ensinar algum conteúdo curricular “antigo” de Matemática.

Para Búrigo et al. (2012, p. 26), “palavras como modelagem, contextualização, tecnologia computacional têm sido valorizadas e utilizadas com muita frequência, quando se trata de atualização e de inovação em estratégias de ensino”.

Lorenzato (2010) destaca a importância dos materiais didáticos (MD) no rendimento escolar do aluno. Ele define material didático como qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem, como por exemplo, um giz, uma calculadora, um filme, um livro, uma transparência, entre outros.

> “(...) Os MD podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam, e, por isso, o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD mais conveniente à aula. (LORENZATO, 2010, p. 18)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também enfatizam a importância dos materiais didáticos no ensino da Matemática:

> Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. (BRASIL, 1997, p. 20)

Por outro lado, Lorenzato (2010) ressalta que apesar da enorme gama de possibilidades de materiais didáticos, estes recursos constituem apenas um dos fatores que interferem no rendimento do estudante, devendo ser utilizados como facilitadores da aprendizagem.

> Por melhor que seja, o MD nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o MD não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor.(LORENZATO, 2010, p. 18)

O autor defende a atuação do professor como fator determinante para o sucesso ou fracasso escolar, e que o professor dispor de diversos materiais didáticos não significa que os alunos alcançarão uma aprendizagem significativa, pois tão importante quanto a escola possuir um vasto conjunto de materiais didáticos é o professor saber utilizá-los corretamente.

> Assim, o professor de matemática, ao planejar sua aula, precisa perguntar-se: será conveniente, ou até mesmo necessário, facilitar a aprendizagem com algum material didático? Com qual? Em outras palavras, o professor está respondendo as questões: "Por que material didático?", "Qual é o material?" e "Quando utilizá-lo?". Em seguida, é preciso perguntar-se: "Como esse material deverá ser utilizado?". Essa última questão é fundamental, embora não suficiente, para que possa ocorrer uma aprendizagem significativa. (LORENZATO, 2010, p. 24)

Os materiais concretos podem auxiliar professores e alunos no processo de ensinar e aprender, visto que sua utilização requer de ambos os conhecimentos sobre como esse recurso didático pode ser utilizado e de que forma irá contribuir no aprendizado dos alunos.

De acordo com Lorenzato (2010), os materiais concretos, também denominados materiais manipuláveis, são objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar, e são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa. O autor afirma que os ambientes onde se faz uso de materiais manipuláveis favorecem a aprendizagem e desenvolvem nos alunos atitudes mais positivas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam que um trabalho constante de observação e construção de formas levará o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre elas, e para consolidar o aprendizado construído nessas observações é necessário que o professor proponha diferentes atividades geométricas. Tal documento enfatiza ainda que:

> As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos, empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa. (BRASIL, 1997, p. 128)

Lorenzato (2010) apresenta uma lista dos estudiosos matemáticos que ao longo dos anos afirmaram a importância do apoio visual para facilitar a aprendizagem. Começa citando Comenius, que por volta de 1.650 escreveu que o ensino deveria ir do concreto ao abstrato, pois conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo. Depois, aponta Locke, em 1.680, que dizia da necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento, e Rousseau, que cerca de cem anos depois recomendou a experiência direta sobre os objetos, visando à aprendizagem, além de muitos outros estudiosos que também reconheceram que o ensino deveria começar pelo concreto.

O autor registra ainda o excepcional matemático Arquimedes, que percebeu a influência do ver e do fazer na aprendizagem. Arquimedes revelou que fazia descobertas mediante a mecânica e depois as demonstrava pela Geometria, confirmando a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes. Nessa linha de pensamento, o autor ainda complementa:

> Desse modo, Arquimedes revelou o modo pelo qual fazia descobertas matemáticas e confirmou a importância das imagens e dos objetos no processo de construção de novos saberes. Nessa mesma linha de pensamento está um antigo provérbio chinês, que diz: “se ouço, esqueço; se vejo, lembro; se faço, compreendo”, o que é confirmado plenamente pela experiência de todos, especialmente daqueles que estão em sala de aula. Enfim, não faltam argumentos favoráveis para que as escolas possuam objetos e imagens a serem utilizados nas aulas, como facilitadores da aprendizagem. (LORENZATO, 2010, p. 5)

Por outro lado, o autor alerta que a opção pela utilização de materiais concretos nas aulas de Matemática não é sinônimo de aulas mais alegres e nem de que os alunos passarão a gostar da disciplina. Segundo o autor, os professores não podem subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico, pois nenhum material é valido por si só: “Por trás de cada material se esconde uma visão de educação, de matemática, de homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica”. (LORENZATO, 2010, p. 79)

O autor enfatiza ainda que:

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-lo refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (LORENZATO, 2010, p. 81)

Nessa perspectiva de tornar o ensino da Matemática mais significativo, surge a utilização das novas tecnologias como recursos didáticos relevantes. Esse uso como instrumento propiciador de aprendizagem vem aumentando de forma cada vez mais rápida na sociedade, fazendo com que os professores assumam a responsabilidade de lidar com uma nova geração de estudantes conectados com novas ferramentas computacionais.

Num mundo cada vez mais interligado e globalizado, onde o acesso à informação acontece de forma cada vez mais veloz, cabe ao professor utilizar essas ferramentas tecnológicas para desenvolver nos alunos o raciocínio lógico e a consciência crítica, tanto para a utilização adequada do instrumento informático, quanto para o aumento da aprendizagem.

A respeito do uso das novas tecnologias na escola como ferramenta para a melhoria da aprendizagem, Toledo (2015) ressalta:

> Há diversas formas de aperfeiçoar a transmissão do conhecimento, desde as aulas em sala,o uso de giz e papel ou, mesmo, métodos extraclasse. Hoje, esses métodos são confrontados com outras formas de ensino existentes, mais inovadoras e de maior eficácia para possibilitar a aprendizagem. Por exemplo, o uso de recursos tecnológicos (computador, recursos multimídias, *softwares* educativos), que auxiliam tanto o professor quanto o aluno durante o processo de aprendizagem, proporcionando condições, ao professor, para ministrar aulas de forma mais criativa, acompanhando as transformações e mudanças que ocorrem quando o aluno passa a exercer sua independência na procura e seleção de informações e na resolução de problemas,tornando-se assim o ator principal na construção do seu conhecimento. (TOLEDO, 2015, p. 26)

Búrigo et al. (2012) também considera o uso dos recursos tecnológicos na escola uma forma inovadora de abordar vários conteúdos de Matemática:

> Com os grandes avanços obtidos na área de recursos computacionais, professores têm se dedicado à construção de objetos de aprendizagem, visando novas abordagens de um grande leque de conteúdos de matemática. Inúmeras simulações de experimentos podem ser exploradas pelos alunos, de modo a beneficiar-se no que tange à compreensão de conteúdos. Restrições inerentes ao uso exclusivo de quadro e giz têm sido superadas pelo uso de *softwares* que permitem visualização gráfica de relações entre as variáveis envolvidas em algum problema.(BÚRIGO et al., 2012, p. 27)

Toledo (2015) define *software* educacional como qualquer programa que proporcione, em sua utilização por professores e alunos, algum objetivo educacional, independente da natureza ou finalidade para o qual tenha sido criado. Afirma ainda que o uso desse recurso pelo professor é ferramenta bastante importante no processo ensino-aprendizagem:

> O educador pode fazer uso dos recursos das novas tecnologias como ferramentas educacionais. Uma dessas ferramentas é o chamado *software* educacional, cuja proposta é dar suporte ao processo de ensino-aprendizagem nos diferentes conteúdos ministrados. Nesse processo, pode ser uma ferramenta extremamente útil, em que o aluno se torna um ser ativo na construção do conhecimento, direcionado pelo professor. (TOLEDO, 2015, p. 31)

Entretanto, Toledo (2015) faz uma observação importante ao chamar a atenção para a escolha do *software* educacional, pois deve estar aliada aos objetivos os quais o professor deseja alcançar e se o mesmo é capacitado para utilizar o software. Segundo o autor:

> A escolha de um *software* educacional está diretamente ligada aos objetivos a serem alcançados. É responsabilidade do professor decidir sobre a qualidade técnica e curricular do produto, baseado em sua capacitação na utilização desses recursos para a transmissão dos conteúdos curriculares. (TOLEDO, 2015, p. 33)

Nessa perspectiva de utilizar *softwares* no intuito de se mostrar outras possibilidades de ensinar Matemática, temos o *software* GeoGebra, que atualmente é uma ferramenta educacional bastante utilizada no ensino dessa disciplina.

De acordo com Nascimento, Silva e Pinheiro (2014), o GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino, do básico ao universitário. Esse programa reúne recursos de geometria, álgebra, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente, assim, tem a vantagem didática e metodológica de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

> O GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. E nele encontramos, também, equações e coordenadas que podem ser inseridas diretamente. Possui também as ferramentas utilizadas em planilhas eletrônicas como Excel e Calc. (NASCIMENTO; SILVA; PINHEIRO, 2014, p. 560)

Nascimento, Silva e Pinheiro ainda apontam outra vantagem da utilização do GeoGebra, que é o estímulo à curiosidade e à pesquisa. Os autores afirmam que:

> O GeoGebra pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (elementos visuais e dinâmicos), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. Usado como um tipo de “simulador” pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e tentativas, onde aprende junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as, cultivando o censo de curiosidade e de pesquisa. (NASCIMENTO; SILVA; PINHEIRO, 2014, p. 561)

Portanto, o uso de materiais concretos e de ferramentas tecnológicas é uma importante alternativa para os professores dinamizarem o ensino da Matemática em sala de aula, visto que podem auxiliar os alunos na construção do próprio conhecimento, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa.

5.2 Plano geral das atividades

➢ **Dados de identificação:**

- Instituição: Universidade Federal do Acre – UFAC;
- Curso: Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT;
- Denominação da Proposta: Construção do conceito de parábola através de materiais concretos e computacionais;
- Público Alvo: 3º ano do Ensino Médio;
- Período de duração: 6 (seis) horas/aula.
- Instituição parceira: Escola Estadual de Ensino integral Glória Perez.

➢ **Objetivo geral:**

- Propor atividades de construção de parábolas utilizando materiais concretos, através do método da dobradura e com a utilização de régua e compasso; e com o uso de recursos computacionais, através do *software* GeoGebra, a fim de melhorar a compreensão dos alunos a respeito dos conceitos dessa cônica.

➢ **Objetivos específicos:**

- Conhecer as seções cônicas parábola, circunferência, elipse e hipérbole como um tipo de curva que é obtida através da interseção de um plano com um cone;
- Diferenciar as cônicas parábola, circunferência, elipse e hipérbole;

- Reconhecer a parábola a partir de sua representação geométrica;
- Identificar os principais elementos da parábola: foco, vértice, reta diretriz e eixo focal;
- Construir parábolas pelo método da dobradura;
- Construir parábolas utilizando régua e compasso;
- Conhecer o *software* GeoGebra;
- Construir parábolas utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra.

➢ **Recursos didáticos:**

- Papel A4, papel manteiga, lápis, caneta, borracha, compasso, régua, esquadro, quadro branco, pincel, projetor de imagens e computador.

5.3 Desenvolvimento da proposta

A seguir, apresentaremos a sequência de atividades que farão parte da proposta pedagógica, composta por seis aulas, utilizando materiais concretos e o *software* GeoGebra para construir parábolas.

Elaboramos a proposta pedagógica tendo como objeto de estudo a seção cônica parábola. Escolheu-se esse tema por entendermos que se trata de um conteúdo em que se nota pouca compreensão dos alunos a respeito de seus conceitos, principalmente quando abordado de forma tradicional pelo professor. Além disso, é um dos muitos conteúdos matemáticos que são possíveis de serem abordados utilizando materiais concretos e computacionais e, ainda, pelo fato da parábola ter muitas aplicações práticas no cotidiano, o que pode aflorar o interesse e participação dos alunos nas abordagens previstas.

A proposta de intervenção será organizada em três momentos, a saber: Revisão de pré-requisitos e mobilização de conhecimentos prévios, Definições e aspectos históricos e Construção de parábolas.

1º Momento: Revisão de pré-requisitos e mobilização de conhecimentos prévios

A preparação para o estudo da parábola será iniciada com uma revisão sobre alguns conteúdos, os chamados pré-requisitos, os quais são base para o estudo dessa curva, tais como: ponto, reta, plano e sistema cartesiano ortogonal.

O professor irá propor situações problemas associadas a esses conteúdos e, na medida em que os alunos forem relembrando o que sabem, o professor realizará intervenções de modo a relembrar os conteúdos, o que poderá ser feito de forma expositiva utilizando o quadro, régua e pincel, buscando a participação dos alunos através de uma abordagem contextualizada.

Após essa etapa, o professor deve realizar uma sondagem a respeito dos saberes que os alunos efetivamente possuem sobre parábola, ou seja, fará a mobilização dos conhecimentos prévios, visto que essa curva é abordada no primeiro ano do ensino médio quando se estuda a função quadrática. O professor poderá elaborar um questionário contendo perguntas que os estimulem a recordar os principais conceitos da função quadrática, como: a expressão genérica da equação do 2º grau, coeficientes da equação, representação geométrica, ponto vértice, concavidade da parábola, etc.

A partir das respostas dos alunos, então será feita uma síntese sobre os principais aspectos da representação gráfica da função quadrática, que é uma parábola côncava para cima ou para baixo, com vértice na origem ou fora dela. Para otimizar o tempo, essa explicação poderá ser feita com a apresentação de slides no projetor de imagens.

2º Momento: Definições e aspectos históricos

Após a revisão de pré-requisitos e mobilização dos conhecimentos prévios, deve-se apresentar as definições das seções cônicas como um tipo de curva que é obtida através da interseção de um plano com um cone.

Em seguida, serão explanados os estudos feitos pelo matemático grego Menaecmus, considerado o descobridor das cônicas, o qual foi o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérboles são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base, enfatizando que cada cônica era obtida de um cone diferente. Salientar que Menaecmus descobriu as seções cônicas enquanto tentava resolver o famoso problema matemático da duplicação do volume do cubo, também conhecido como problema deliano.

Dando continuidade aos aspectos históricos a respeito das cônicas, expor sobre a grande contribuição do matemático Apolônio de Perga, o qual descobriu que poderia extrair as cônicas de um mesmo “tipo” de cone, variando apenas o ângulo de interseção entre o cone e o plano cortante. Destacar que Apolônio de Perga foi o autor do famoso Tratado das Seções Cônicas que é considerado como uma das principais obras científicas da antiguidade, dando-lhe assim, o direito de ser a mais eminente figura da ciência grega no campo da geometria pura.

Após esse momento, o professor deverá tratar da definição de parábola em termos de lugar geométrico, ou seja, definir a parábola como o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a uma reta fixa *r* e a um ponto fixo *F* são iguais, onde o ponto *F* chama-se foco da parábola e a reta *r* é a sua diretriz. Nesse momento, sugerimos que o professor apresente uma ilustração de uma parábola, para que os alunos possam compreender melhor os conceitos abordados até aqui. Em seguida, definir os outros elementos principais da parábola, a saber: o parâmetro, como o segmento cuja medida é a distância do foco à reta diretriz, o ponto vértice, que é o ponto médio do parâmetro; e, o eixo focal, que é o eixo de simetria da parábola, o qual contém o vértice e o foco.

A partir daí, o professor explana sobre a concavidade da parábola, que pode ser para cima, quando o foco está acima da reta diretriz; para baixo, quando o foco está abaixo da reta diretriz; para a direita, quando o foco está à direita da reta diretriz; e para a esquerda, quando o foco está à esquerda da reta diretriz.

Tanto as definições quanto a abordagem acerca da história das cônicas podem ser trabalhadas com a apresentação de slides no projetor de imagens.

3º Momento: construção de parábolas.

Essa é a principal etapa da aula, pois será abordada a construção de parábolas utilizando materiais concretos e as ferramentas do *software* GeoGebra.

Primeiramente o professor irá propor duas atividades práticas: a primeira é a construção da parábola pelo método da dobradura e a segunda utilizando régua e compasso.

Daí, apresentar a primeira atividade: construção da parábola pelo método da dobradura. O professor entregará para os alunos uma espécie de roteiro impresso com o passo a passo desse método de construção da parábola e os materiais necessários: papel manteiga, régua, lápis e borracha. Então, solicitará aos alunos que executem os procedimentos propostos e analisem a figura geométrica que se obterá à medida que o papel for sendo dobrado e vincado.

. À medida que os alunos forem apresentando dificuldades, o professor poderá realizar as devidas intervenções no quadro ou de maneira individual. Espera-se que todos consigam realizar a atividade, por se tratar de uma manipulação simples com os materiais.

Após o trabalho prático dos alunos, verificar se todos finalizaram a tarefa e propor um pequeno questionário impresso de avaliação para os alunos, a fim de registrar quais as impressões dos mesmos a respeito da atividade realizada, se contribuiu para a compreensão do conceito de parábola, se percebeu quando ela fica mais aberta ou mais fechada, se teve dificuldades e quais foram essas, etc.

Concluída essa primeira atividade, então deve-se propor a segunda, que é a construção da parábola com a utilização de régua e compasso. O professor poderá proceder com a mesma metodologia da primeira atividade, entregando primeiramente um roteiro com o passo a passo da construção e os materiais a serem utilizados, que são: régua, esquadro, compasso, lápis, borracha e papel A4. Por ter um nível de dificuldade maior que a primeira tarefa e para incentivar a cooperação entre os alunos, propor que essa atividade seja realizada em dupla. Daí, o professor deve realizar no quadro o passo a passo do roteiro de construção, se atentando para seu ritmo, e pedir que os alunos realizem concomitantemente. Observar se todos estão conseguindo avançar e caso verifique algum aluno com dificuldade, realizar as devidas intervenções de forma individual ou no quadro, já que “a dúvida de um pode ser a dúvida de todos”.

Depois de concluir o passo a passo, verificar as construções das duplas, se todas conseguiram finalizar a tarefa e propor um questionário para avaliar as impressões dos alunos a respeito da atividade realizada, como por exemplo, se eles já tinham usado régua e compasso antes, se tiveram dificuldade para utilizá-los e, principalmente, se a utilização de materiais concretos na construção de parábolas contribuiu para a compreensão do conceito dessa curva.

Para finalizar esse terceiro momento, propõe-se construir parábolas utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra.

Primeiramente, para que os estudantes se familiarizem com o programa, o professor deve apresentar a interface do *software*, mostrar o campo entrada, a janela de visualização e a barra de ferramentas. Recomenda-se que o docente realize algumas construções simples utilizando o campo entrada, como pontos a partir de suas coordenadas e retas a partir de sua equação. Além disso, utilize a janela de visualização para construir alguns polígonos, círculos e retas a partir da marcação de dois pontos.

Considerando que a aula aconteça num ambiente equipado com computador e que a turma esteja acompanhando as explicações com o *software*, à medida que o professor executar os comandos já solicita que os alunos o façam também.

Após esse momento, propor algumas atividades de construção da parábola. Entrega-se para os alunos um roteiro impresso com o passo a passo dos comandos de cada método de construção a ser estudado. Então o professor realiza o procedimento, verifica as possíveis dúvidas e, em seguida, desafia os alunos a realizarem a atividade novamente, mudando os elementos que forem necessários para a construção por cada método (foco, diretriz, pontos, etc.), para verificar o aprendizado da turma.

Os métodos de construção a serem abordados serão: através do ícone "Elipse", utilizando o comando "*Parábola [<Ponto>, Reta>]*" e inserindo a equação da parábola na caixa de entrada, sendo que nessa oportunidade deve-se aproveitar para inserir funções quadráticas e revisar alguns de seus conceitos, como por exemplo, o papel de cada coeficiente da equação na representação geométrica. Dependendo do ritmo da aprendizagem, pode-se propor ainda construir parábolas utilizando a ferramenta "cônica por cinco pontos" e pelo método do "círculo diretor". À medida que os alunos forem apresentando dificuldades, o professor poderá realizar as devidas intervenções.

Concluída essa etapa, verifica-se se todos finalizaram a tarefa e propõe-se um questionário de avaliação para os alunos, a fim de registrar suas impressões a respeito da utilização de *software* como ferramenta de apoio ao ensino, se conheciam o *software* GeoGebra, se o uso do GeoGebra contribuiu para a compreensão do conceito de parábola, etc.

Finalizar a aula questionando os alunos sobre qual forma de abordagem da parábola que eles acharam mais interessante, aquela em que se utilizaram materiais concretos ou quando se fez uso do *software* GeoGebra.

5.4 Aplicação da proposta

Nesta seção, discorreremos como se deu a aplicação da proposta de intervenção, a qual foi organizada em três momentos. Primeiramente, faremos a contextualização da pesquisa e a descrição do perfil dos alunos sujeitos da referida pesquisa. Em seguida, descreveremos todas as etapas da atividade pedagógica, relatando como se sucedeu cada um dos três momentos da atividade sobre o estudo da parábola aqui proposto.

5.4.1 *Contexto da Pesquisa*

A presente pesquisa surgiu a partir de observações feitas em sala de aula em relação a pouca compreensão dos alunos a respeito da cônica parábola, a qual é geralmente abordada de forma tradicional pelo professor, utilizando quadro e giz/pincel. Além disso, a parábola é um dos muitos conteúdos matemáticos que são possíveis de serem abordados utilizando materiais concretos e computacionais, tendo ainda muitas aplicações no nosso cotidiano.

Os participantes dessa pesquisa são alunos do terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Integral Glória Perez, localizada no município de Rio Branco, capital do estado do Acre. A turma é composta por 30 alunos, com faixa etária que varia entre dezesseis e dezessete anos de idade.

Na referida escola os alunos têm nove aulas diárias, funcionando das 7h30min às 17h. Está localizada em uma região de classe média baixa, entretanto, atende alunos de vários bairros periféricos adjacentes.

Diante desse contexto, desenvolvemos uma proposta de intervenção pedagógica direcionada ao estudo da parábola utilizando materiais concretos e através do *software* GeoGebra.

A seguir, discorreremos sobre como se deu a aplicação dessa proposta de intervenção desenvolvida com o grupo de alunos acima descrito.

5.4.2 *Primeiro Momento*

Inicialmente, foi feita uma revisão sobre alguns conteúdos tidos como pré-requisitos para o estudo da parábola: ponto, reta, plano e representação de pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal.

Aos alunos foi proposta a seguinte situação problema: Imagine uma estrela no céu, um raio de luz e um espelho d’água de um lago. A quais elementos matemáticos podemos associar esses “objetos”? O questionamento foi feito de forma oral para que os alunos se sentissem a vontade para participar.

Quanto à estrela, os alunos foram unânimes em dizer que ela se associa a um ponto, assim como associaram o raio de luz a uma reta. Em relação ao espelho d’água de um lago, apenas alguns responderam que representa a ideia de um plano. Então, explanamos a ideia de ponto, reta e plano, fazendo alguns desenhos no quadro branco.

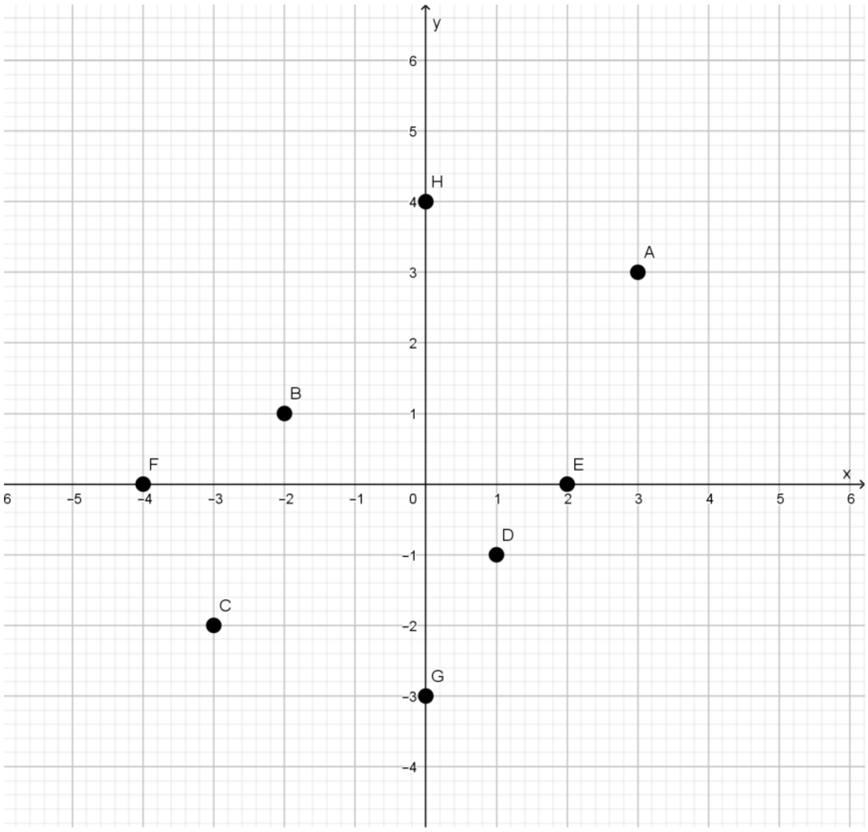
Em seguida, os alunos foram induzidos a refletir sobre outras situações ou objetos que se associam a esses elementos, e algumas respostas foram satisfatórias, como por exemplo: ao um ponto os alunos ilustraram a cabeça de um prego e a marcação que se faz no local exato de uma parede a ser furada para instalação de um relógio; à uma reta alguns alunos relacionaram uma linha esticada e um lápis; e, ao plano, citaram as paredes da sala, o caderno e o quadro branco.

A partir daí, abordamos o conceito de representação de pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal. Pedimos para a turma organizar as trinta carteiras da sala em cinco filas de seis carteiras cada e que eles dissessem o nome do aluno que estava sentado em determinada carteira conforme dávamos as coordenadas da sua posição. A situação proposta provocou descontração, mas foi positiva para relembrar, de forma contextualizada, as coordenadas de um ponto, inclusive, os próprios alunos disseram ser os “pontos” na sala de aula.

Em seguida, utilizamos o quadro branco para realizar uma rápida revisão sobre o sistema cartesiano ortogonal, mostrando que cada ponto do plano corresponde a um único par ordenado (x,y) e cada par ordenado (x,y) está associado a um único ponto do plano.

Para fixar, propomos duas atividades à turma:

1ª: Observando a figura, dê as coordenadas dos pontos A, B, C,D, E, F, G e H.



Respostas

A=(,)

B=(,)

C=(,)

D=(,)

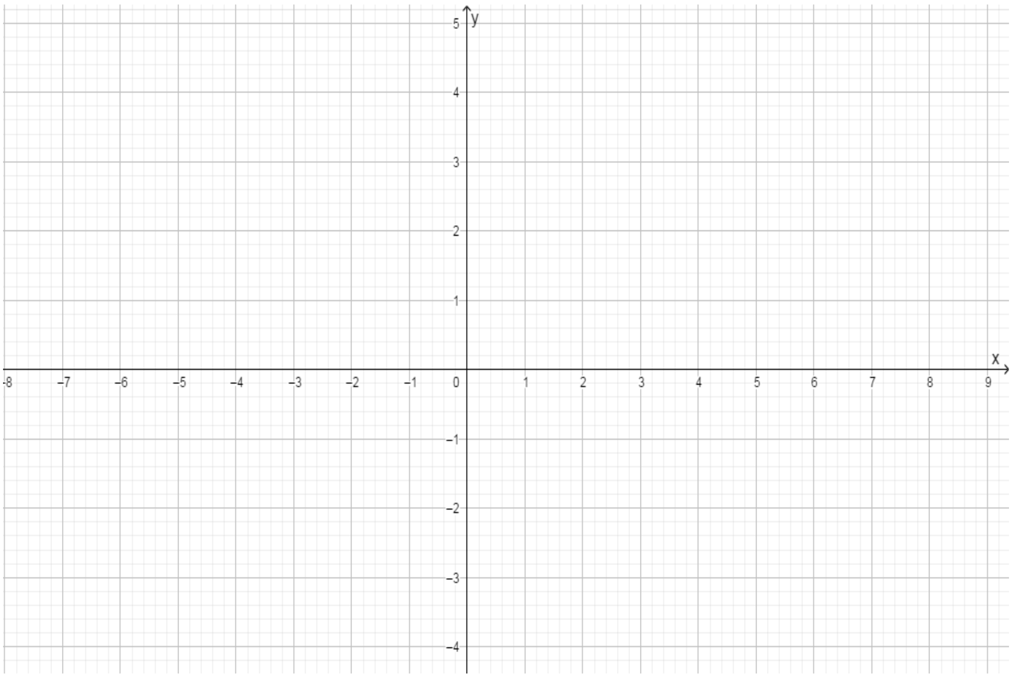
E=(,)

F=(,)

G=(,)

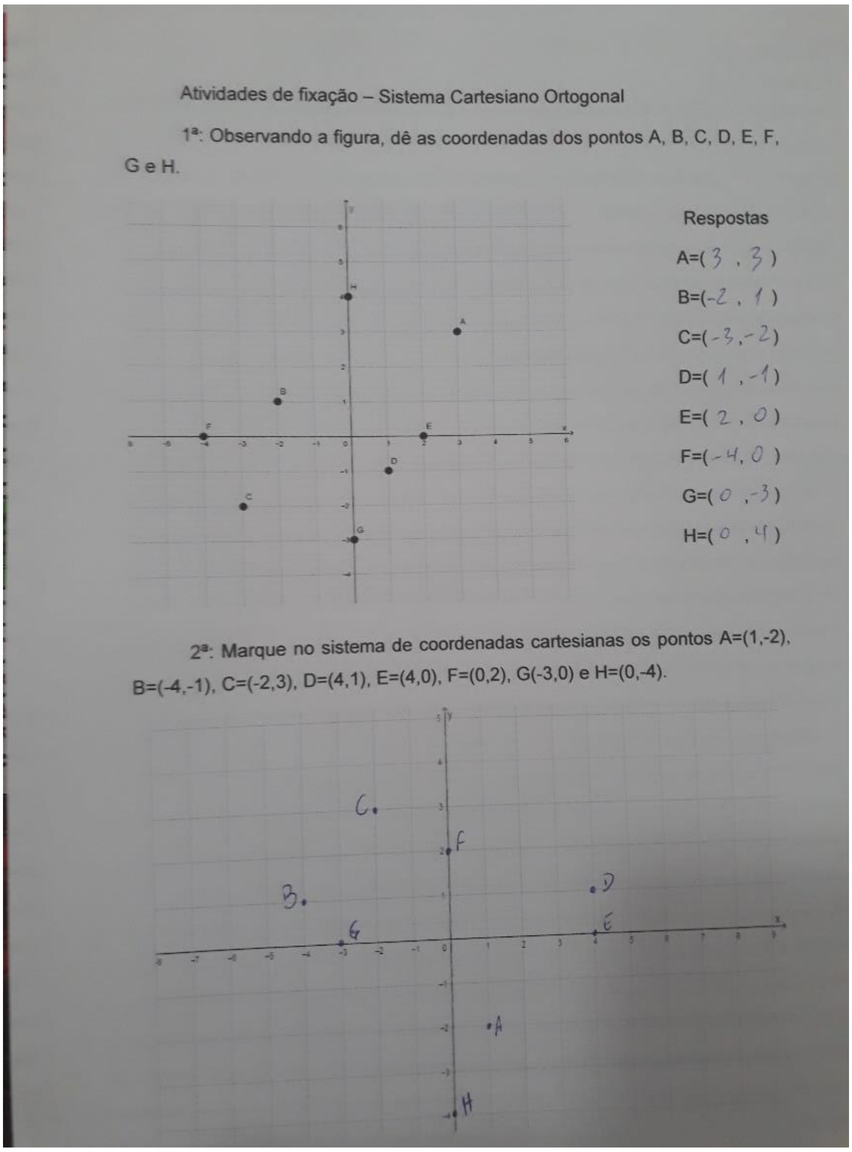
H=(,)

2ª: Marque no sistema de coordenadas cartesianas os pontosA=(1,-2), B=(-4,-1), C=(-2,3), D=(4,1), E=(4,0), F=(0,2), G(-3,0) e H=(0,-4).



As atividades foram realizadas de forma individual com o devido acompanhamento do professor, que ficou circulando na sala realizando intervenções pontuais. Com exceção de uma pequena parcela da turma que mostrou dúvidas em marcar pontos com uma das coordenadas nula, a maioria dos alunos foi capaz de realizar tanto a primeira quanto a segunda atividade sem dificuldades, como podemos verificar na atividade de um aluno conforme a próxima figura.

Figura 53 – Amostra de atividade sobre sistema cartesiano ortogonal


Atividades de fixação – Sistema Cartesiano Ortogonal

1ª: Observando a figura, dê as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.

Respostas

A=(3 , 3)

B=(-2 , 1)

C=(-3,-2)

D=(1 ,-1)

E=(2 , 0)

F=(-4, 0)

G=(0 ,-3)

H=(0 ,4)

2ª: Marque no sistema de coordenadas cartesianas os pontos A=(1,-2), B=(-4,-1), C=(-2,3), D=(4,1), E=(4,0), F=(0,2), G(-3,0) e H=(0,-4).

Fonte: arquivo do autor

Encerramos essa abordagem fazendo a correção das duas atividades no quadro, houve uma boa participação da turma.

Em seguida, o professor tratou da mobilização dos conhecimentos prévios. Iniciou questionando a turma se já havia estudado sobre a função quadrática em séries anteriores, sendo que a maioria respondeu que sim. Então, passamos a instigar os alunos sobre essa função, sobre seu gráfico, e então alguns falaram que se tratava de uma parábola. Para sistematizar essa revisão, propomos um questionário contendo perguntas sobre os principais conceitos da função quadrática. As perguntas foram:

1ª: Qual a definição de uma função quadrática?

2ª: Quais são seus coeficientes?

3ª: Como se chama o gráfico de uma função quadrática?

4ª: Como pode ser a concavidade desse gráfico?

5ª: Como se determinam suas raízes?

6ª: Quem é o ponto vértice de uma parábola e quais suas coordenadas?

O questionário foi projetado no quadro branco e respondido de forma oral pelos alunos, sendo que um ia complementando a resposta do outro e o professor contribuindo fazendo as intervenções.

Quanto à primeira pergunta, poucos alunos recordaram a definição algébrica da função quadrática. Caso semelhante sobre o segundo questionamento, já que a minoria soube dizer quais os coeficientes.

No terceiro e quarto questionamentos, a maior parte da turma respondeu corretamente ao afirmar que o gráfico da função quadrática é uma parábola, e que ela pode ser voltada para cima ou para baixo. Nesse momento, fizemos alguns esboços de parábolas no sistema de coordenadas cartesianas.

Na pergunta número cinco apenas uma pequena parte da turma, de fato uma pequena minoria, ousou falar sobre as raízes, sendo que apenas um aluno citou a chamada fórmula de Bhaskara para determinar as raízes da função.

No sexto questionamento, nenhum aluno foi capaz de falar sobre o ponto vértice.

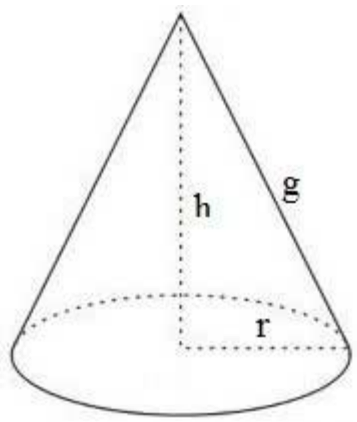
Muitos alunos argumentaram que não estudavam os conceitos da função quadrática há bastante tempo. Após esse momento de discussão, fizemos uma pequena síntese dos conceitos abordados, enfatizando principalmente a representação geométrica da parábola, destacando sua concavidade e o vértice.

5.4.3 *Segundo Momento*

Nesta parte da aula, definimos as seções cônicas, fizemos uma pequena explanação sobre a história das cônicas e definimos a parábola e seus elementos. Para isso, utilizamos o projetor de imagens.

Iniciamos fazendo uma revisão sobre “cone”, relembrando o que o conceito de base e geratriz. Para isso projetamos a seguinte figura:

Figura 54 – Cone e seus elementos



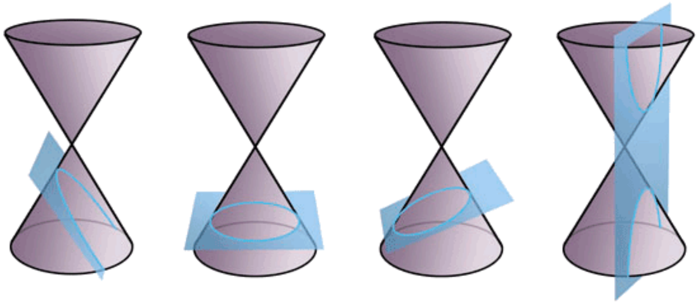
Fonte: google imagens (Acesso em 01/08/2018)

E então apresentamos as definições:

- Base do cone: corresponde ao círculo de raio r;
- Geratriz do cone: representada na figura por g, ela corresponde a medida da lateral do cone, e é formada por qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice e a outra na base.

Depois, definimos as seções cônicas como um tipo de curva que é obtida através da interseção de um plano com um cone. Para facilitar a nossa explanação e a compreensão dos alunos, utilizamos a seguinte ilustração:

Figura 55 - Seções cônicas



Fonte: google imagens (Acesso em 02/08/2018)

Considerando a figura, definimos como surge cada cônica da seguinte maneira:

- Circunferência: surge por meio de uma seção paralela à base do cone;
- Parábola: surge por meio de uma seção paralela apenas a uma geratriz do cone;
- Elipse: surge por meio de uma seção não paralela às bases do cone;
- Hipérbole: surge por meio de uma seção a qual o plano corta ambas as folhas e intersecta as duas geratrizes.

Em seguida, apresentamos alguns slides sobre os aspectos históricos das cônicas, mostrando sua descoberta pelo matemático grego Menaecmus, enquanto tentava resolver o famoso problema da duplicação do volume do cubo, até a grande contribuição do matemático Apolônio de Perga. Enfatizamos que Menaecmus obtia cada cônica a partir de cones diferentes, enquanto Apolônio extraia as cônicas de um mesmo "tipo" de cone, variando apenas o ângulo de interseção entre o cone e o plano cortante. Destacamos que Apolônio foi o autor do famoso Tratado das Seções Cônicas que é considerado como uma das principais obras científicas da antiguidade.

Diante dessa apresentação a maior parte da turma se manteve atenta, enquanto apenas alguns alunos se desconcentraram e pegaram o celular.

Então, projetamos algumas imagens de cônicas e pedimos para a turma classificar cada uma delas. Tivemos boa participação e pudemos observar que a maior parte dos alunos foi capaz de identificar as seções cônicas apresentadas.

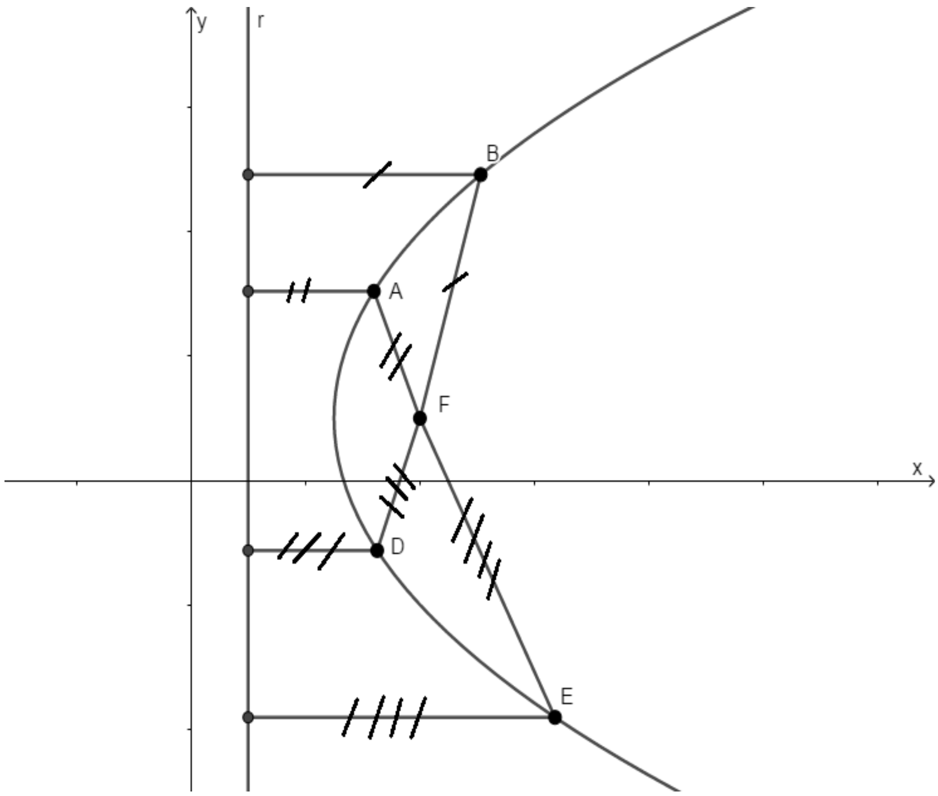
Após esse momento, demos continuidade à aula passando a tratar sobre os conceitos da parábola.

Primeiramente, apresentamos para a turma a definição de parábola como lugar geométrico, da seguinte maneira:

“Parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujas distâncias a uma reta fixa *r* e a um ponto fixo *F* são iguais, onde o ponto *F* chama-se foco da parábola e a reta *r* é a sua diretriz.”

Em seguida, mostramos a seguinte imagem de uma parábola, para facilitar o entendimento da turma.

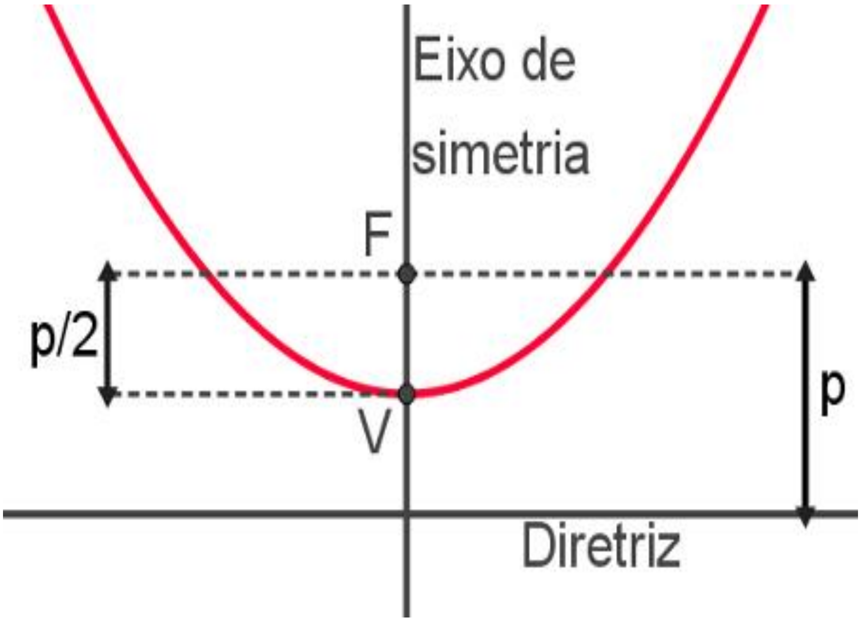
Figura 56 – Parábola como lugar geométrico



Fonte: construída pelo autor

Depois projetamos no quadro a figura seguinte:

Figura 57 – Parábola e seus elementos



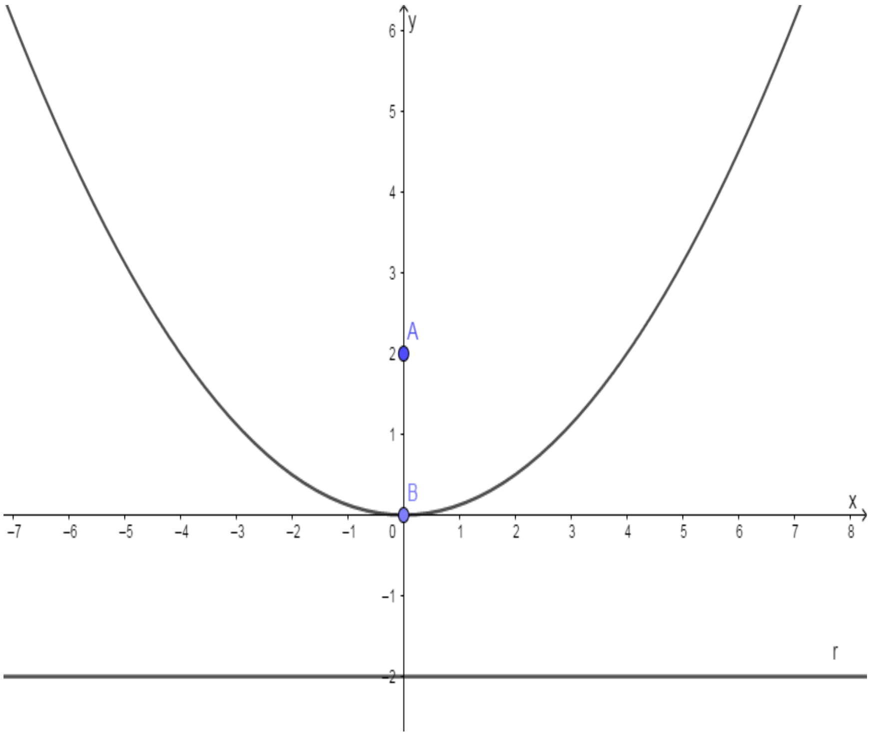
Fonte: google imagens (Acesso em 05/08/2018)

E a partir dela, apresentamos os outros elementos da parábola, definindo-os da seguinte forma:

- Parâmetro: segmento cuja medida é a distância do foco à reta diretriz, na figura está representado por p;
- Vértice: é o ponto médio do parâmetro, representado na figura por V;
- Eixo focal: é o eixo de simetria da parábola, o qual é perpendicular à diretriz e contém o foco e o vértice.

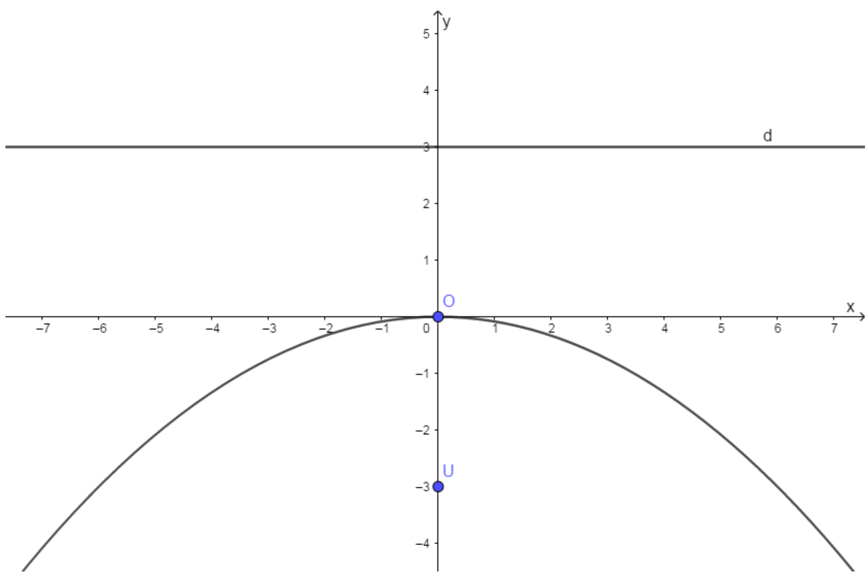
Após as explicações, projetamos algumas imagens de parábolas com centro na origem e também fora dela, para mostrar que a concavidade da parábola não é apenas para cima ou para baixo, como visto na função quadrática, mas também pode ser para a direita ou para a esquerda, dependendo da posição da reta diretriz. As imagens mostradas foram:

Figura 58 – Parábola côncava para cima



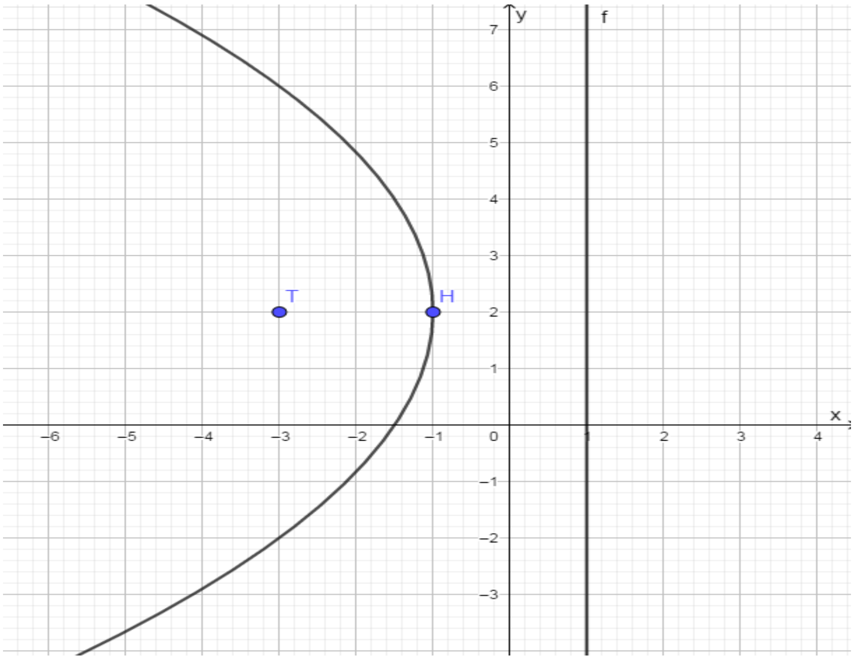
Fonte: construída pelo autor

Figura 59 - Parábola côncava para baixo



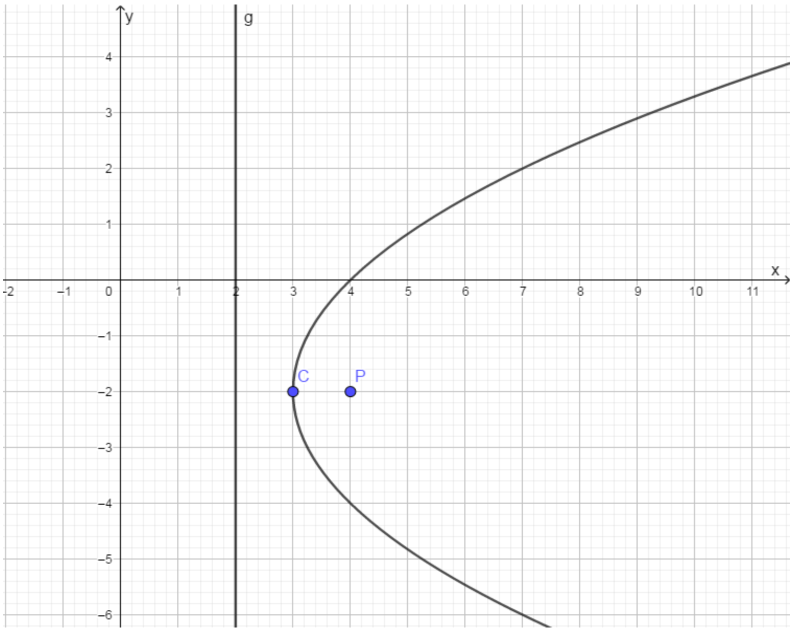
Fonte: construída pelo autor

Figura 60 - Parábola côncava para a esquerda



Fonte: construída pelo autor

Figura 61 - Parábola côncava para a direita



Fonte: construída pelo autor

Então, fizemos os seguintes questionamentos e pedimos para a turma responder de forma oral:

1º: Qual o ponto foco de cada parábola? E quais suas coordenadas?

2º: Qual o ponto vértice de cada parábola? E quais suas coordenadas?

3º: Quanto vale o parâmetro de cada parábola?

4º: Quem é a reta diretriz? Qual sua equação?

5º: Qual a equação do eixo de simetria de cada parábola?

Pela participação dos alunos, pudemos observar que a maior parte deles foi capaz de identificar o ponto foco e o ponto vértice, mas alguns desses tiveram dúvidas para escrever suas coordenadas.

Quanto ao questionamento sobre o parâmetro, a maior parte da turma conseguiu dar sua medida.

Sobre a reta diretriz, a maioria dos alunos rapidamente a identificaram, mas não souberam descrever a equação da reta. Mesma dificuldade tiveram quando questionados sobre a reta do eixo focal. Entretanto, isso já era esperado, pois não revisamos a equação da reta já que nosso objetivo nesta aula é abordar a construção da parábola. Logo, fizemos a correção do questionamento número 5, explicando para a turma quando a reta diretriz ou o eixo focal se tratava de uma reta horizontal ou vertical.

5.4.4 *Terceiro Momento*

Esse foi o momento principal da aula, onde os alunos puderam realizar atividades de construção de parábolas utilizando materiais concretos e as ferramentas do *software* GeoGebra.

Começamos propondo duas atividades utilizando materiais concretos:

Atividade 1: Método da dobradura

Para desenvolver esta atividade os alunos receberam um roteiro impresso com o passo a passo do método e os materiais a serem utilizados: régua, papel manteiga, lápis e borracha. O roteiro continha os seguintes passos:

1º: Na parte inferior da folha, trace uma reta horizontal d, que será a diretriz da parábola;

2º: Acima da reta diretriz, marque um ponto F, que será o foco da parábola;

3º: Sobre a reta d, marque um ponto A;

4º: Dobre o papel manteiga de modo a fazer coincidir os pontos A e F em seguida vinque o papel;

5º: Repita esse processo (3º e 4º passos), tomando mais 15 pontos sobre a reta d.

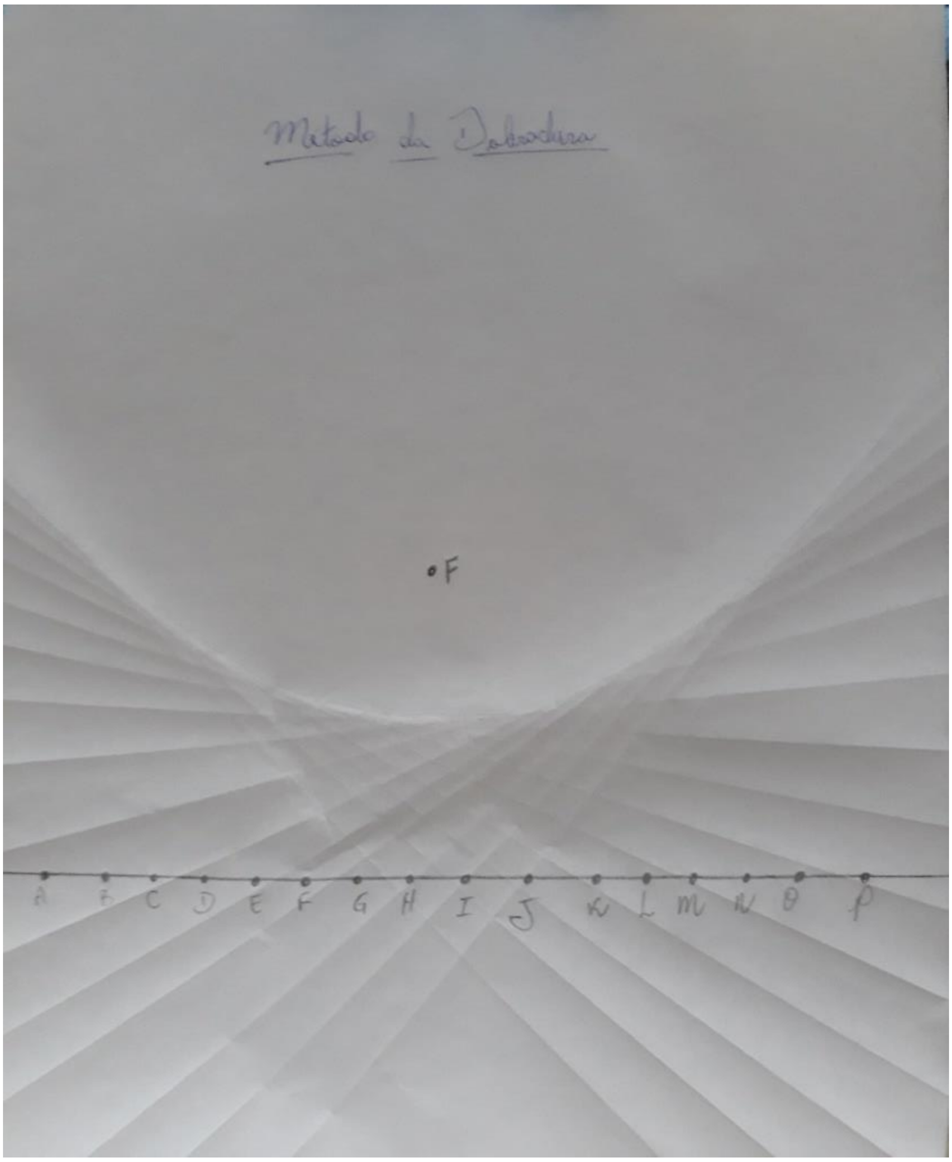
Os alunos foram desafiados a executar os procedimentos propostos e analisar a figura geométrica que se obteria à medida que o papel ia sendo dobrado e vincado.

No desenvolvimento da atividade surgiram alguns questionamentos: “Como vamos colocar o papel, de pé ou deitado? Qual o tamanho da reta? E o ponto fora reta, fica mais perto ou mais longe?” Decidiu-se, então, que a folha seria trabalhada na posição retrato, que a reta seria do tamanho da parte inferior da folha e o ponto seria marcado acima da reta de forma centralizada, longe das extremidades laterais da folha. A localização dos pontos na reta também gerou dúvidas, ficando combinado que os pontos marcados sobre a reta fossem distribuídos de modo que não ficassem com distâncias nem muito grandes e nem muito pequenas entre eles.

Outra dificuldade identificada foi quanto ao entendimento de como realizar a dobra, como sobrepor os pontos. Entretanto, à medida que um aluno compreendia e realizava corretamente o procedimento, os outros alunos iam observando e então conseguiam também realizá-lo.

Conforme os alunos desenvolviam a tarefa, muitos comentavam que as retas que surgiam das marcas produzidas pelo vinco do papel “formavam” uma curva, que ia tomando a forma de uma parábola à medida que iam sobrepondo os pontos e vincando o papel manteiga. Abaixo podemos observar a construção realizada por um aluno.

Figura 62 – Amostra da atividade: método da dobradura



Fonte: arquivo do autor

Após todos concluírem a tarefa, propomos um pequeno questionário de avaliação impresso, a fim de registrar quais as impressões dos mesmos a respeito da atividade realizada. As perguntas foram:

1ª: Depois de realizado esse processo é possível observar que as dobras tangenciam uma curva? De qual curva se trata?

2ª: Compare sua construção com os resultados obtidos por seus colegas de classe. Note que as curvas obtidas não são iguais, algumas são mais abertas e outras mais fechadas. Em sua opinião, porque isso acontece? Quando as curvas são mais abertas? E mais fechadas?

3ª: A construção da parábola pelo método da dobradura contribuiu para a compreensão do conceito dessa curva?

(   ) Sim   (   ) Não

4ª: Quais as dificuldades que você sentiu para realizar a atividade?

Quanto à primeira pergunta, a turma de forma unânime afirmou que as dobras tangenciam uma parábola.

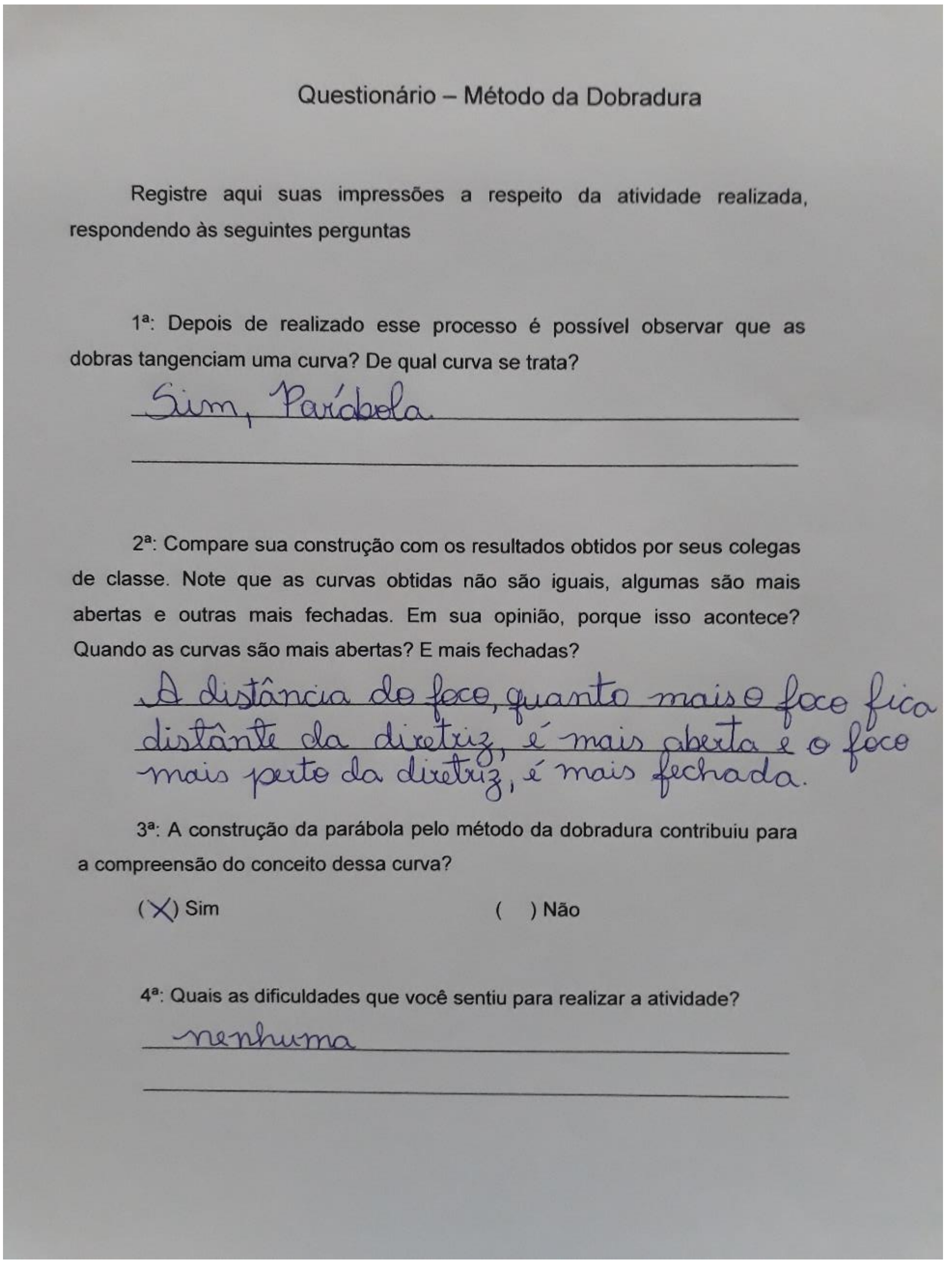
A respeito do questionamento número dois, apenas uma pequena parte dos alunos notou que a abertura da parábola depende da distância entre o foco e a reta diretriz, ou seja, que depende do parâmetro. Então pedimos que eles se juntassem em pequenos grupos para comparar as construções, e daí alguns alunos passaram a comentar que as parábolas são mais abertas quando o foco está mais distante da diretriz e que são mais fechadas quando o foco está mais próximo da diretriz.

Quanto à terceira pergunta, a maioria afirmou positivamente que o método da dobradura contribuiu para a compreensão do conceito de parábola.

No questionamento de número 4, a turma praticamente não mencionou dificuldades.

Alguns alunos justificaram a demora em concluir a tarefa pelo fato de não estarem habituados ao trabalho com materiais manipuláveis, porém, de forma geral, esta atividade foi muito produtiva, pois os alunos se mostraram bastante receptivos à tarefa, participaram ativamente da aula e avaliaram positivamente a atividade de construção da parábola pelo método da dobradura, conforme podemos observar o relato da próxima figura.

Figura 63 – Amostra do questionário de avaliação: método da dobradura



Questionário – Método da Dobradura

Registre aqui suas impressões a respeito da atividade realizada, respondendo às seguintes perguntas

1ª: Depois de realizado esse processo é possível observar que as dobras tangenciam uma curva? De qual curva se trata?

Sim, Parábola

2ª: Compare sua construção com os resultados obtidos por seus colegas de classe. Note que as curvas obtidas não são iguais, algumas são mais abertas e outras mais fechadas. Em sua opinião, porque isso acontece? Quando as curvas são mais abertas? E mais fechadas?

A distância do foco, quanto mais o foco fica distânte da diretriz, é mais aberta e o foco mais perto da diretriz, é mais fechada.

3ª: A construção da parábola pelo método da dobradura contribuiu para a compreensão do conceito dessa curva?

(X) Sim ( ) Não

4ª: Quais as dificuldades que você sentiu para realizar a atividade?

nenhuma

Fonte: arquivo do autor

Atividade 2: Utilizando régua e compasso

Iniciamos a segunda atividade entregando aos alunos um roteiro com o passo a passo da construção e os materiais a serem utilizados: régua, esquadro, compasso, lápis, borracha e papel A4. O roteiro continha os seguintes passos:

1º: Trace uma reta horizontal d, que será a diretriz e fora dela marque um ponto F que será o foco da parábola;

2º: Trace uma reta r perpendicular a diretriz d, passando pelo foco F, em seguida marque o ponto A, o qual é o ponto de interseção entre r e d.

3º: O segmento AF é o parâmetro da parábola. No ponto médio deste seguimento, marque o ponto V, que é o vértice da parábola;

4º: Sobre a semirreta VF marque um ponto B qualquer e em seguida trace a reta s, perpendicular à reta r em B;

5º: Trace o círculo de centro F e raio AB, o qual irá cortar a reta s nos pontos C e D, que pertencem à parábola;

6º: Repita outra vez os passos 4 e 5, tomando outro ponto sobre a semirreta VF, obtendo assim outros dois pontos da parábola;

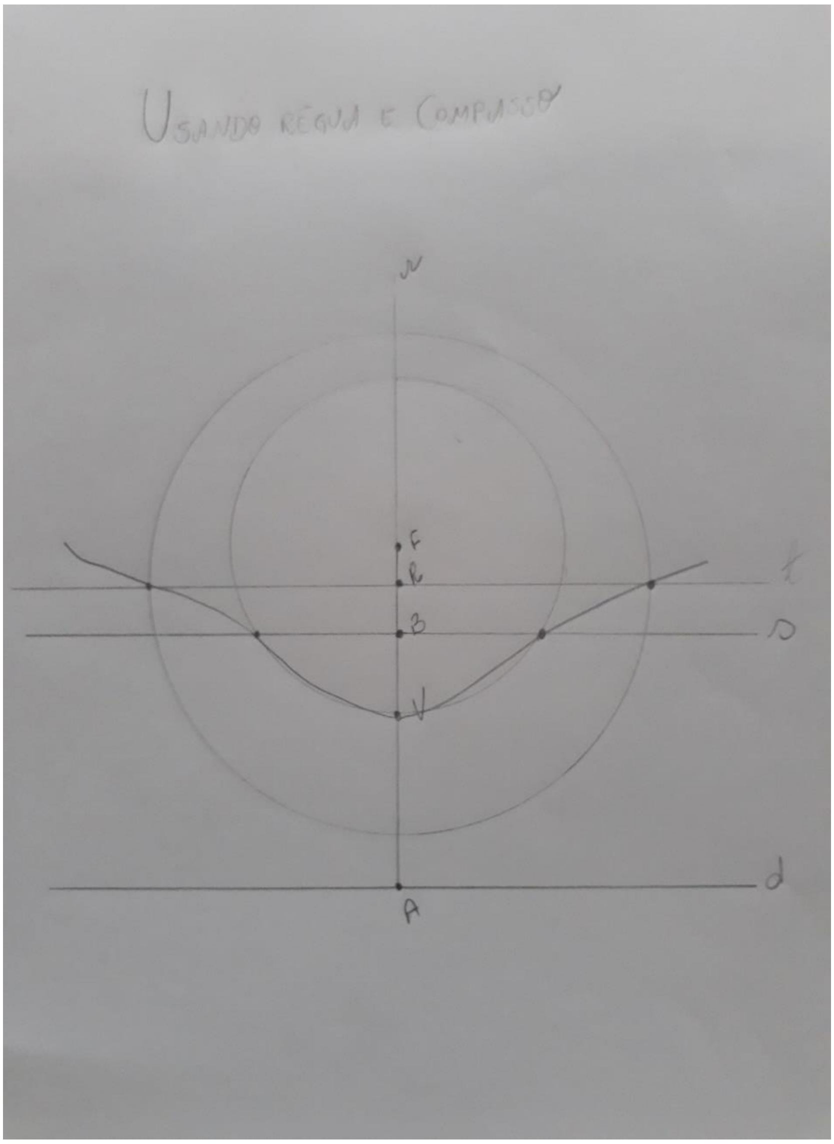
7º Trace a parábola pelos pontos obtidos.

Propomos aos alunos que realizassem essa atividade em dupla e por ter um nível de dificuldade maior que a primeira, optamos por explicar e realizar no quadro o passo a passo da construção e à medida que o professor realizava um procedimento solicitava que os alunos o realizassem em seguida.

O desenvolvimento da tarefa teve um bom andamento até o passo 3. No 4º passo, surgiu a primeira dúvida: onde marcar o ponto B? Acima ou abaixo do foco? Mais perto ou mais distante do vértice? Sugerimos, então, que o marcassem entre o vértice e o foco. No 5º passo a dúvida foi quanto ao raio, pois alguns alunos em vez de considerar a medida AB, usaram AV ou AF. Voltamos a mencionar a medida correta, inclusive, refazendo a atividade desde o começo, pois muitos alunos estavam confusos. No 6º passo as dificuldades apareceram novamente, tanto na posição do ponto sobre a semirreta VF quanto na medida do raio do círculo.

Alguns alunos não conseguiram construir a parábola utilizando régua e compasso. Observamos que em certos desenhos a construção da parábola não ficou correta, principalmente porque os alunos tomaram como centro dos círculos o vértice e não o foco, como deveriam, ou mesmo porque erraram a medida do raio do círculo no passo 5, conforme podemos observar na figura abaixo, que é a construção de um aluno.

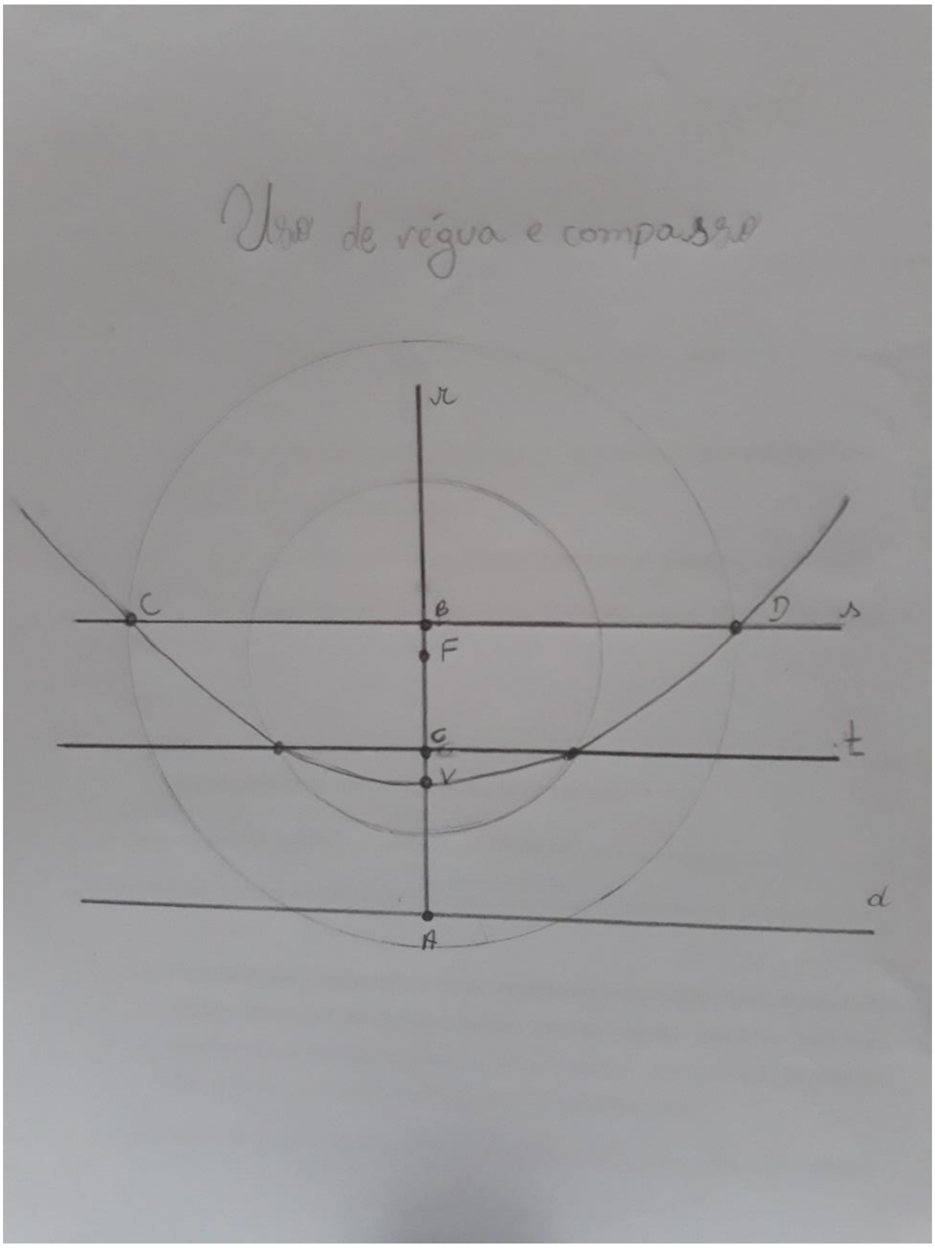
Figura 64 – Amostra da atividade: construção da parábola com régua e compasso – construção incorreta



Fonte: arquivo do autor

Por outro lado, também pudemos constatar que uma parte da turma realizou a tarefa corretamente, conseguiu obter os quatro pontos da parábola e chegou a esboçá-la, conforme mostra a construção de um aluno apresentada na figura seguinte:

Figura 65 – Amostra da atividade: construção da parábola com régua e compasso – construção correta



Fonte: arquivo do autor

Observamos que alguns alunos tiveram dificuldades para manusear o compasso, outros confundiram as medidas dos raios e findou que os resultados esperados não foram alcançados, pois tínhamos a expectativa de que todos realizassem a tarefa e assim fixassem mais ainda os conceitos de parábola e seus elementos.

Para avaliar a atividade, propomos um pequeno questionário impresso para que os estudantes pudessem registrar suas impressões a respeito da tarefa proposta. As perguntas foram:

1ª: Você já havia utilizado régua e compasso antes nas aulas de geometria?

(   ) Sim   (   ) Não

2ª: Quais os conteúdos matemáticos que foram revisados na realização dessa atividade?

3ª: A construção da parábola com régua e compasso contribuiu para a compreensão do conceito dessa curva?

(   ) Sim   (   ) Não

4ª: Quais as dificuldades que você sentiu para realizar a atividade?

Quanto ao primeiro questionamento, a maior parte da turma afirmou que nunca havia utilizado régua e compasso em aulas anteriores, o que nos permite compreender o porquê de terem dificuldade em manusear esse material.

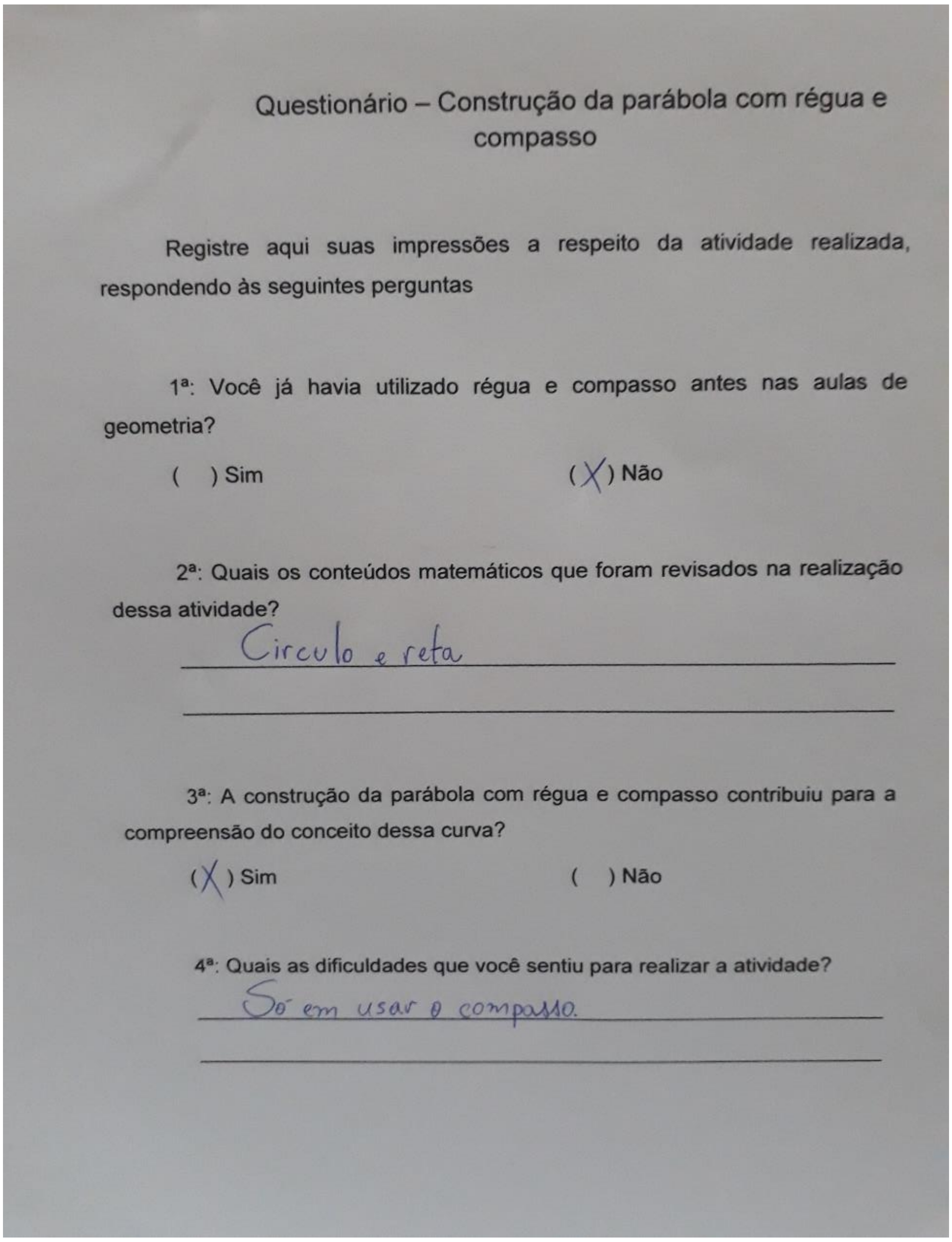
A respeito do segundo questionamento os alunos citaram alguns conteúdos que foram revisados com essa atividade, como ponto, reta e círculo.

Quanto à terceira pergunta, alguns alunos afirmaram positivamente que a construção da parábola utilizando régua e compasso contribuiu para a compreensão do conceito de parábola, entretanto, outros responderam que não, principalmente por não terem concluído a tarefa.

No questionamento número 4, as principais dificuldades apontadas foram: manipulação do compasso e construção dos círculos.

Esta atividade não foi tão produtiva quanto à anterior, apesar de se tratar de procedimentos simples, porém, um pouco mais complexos se comparados ao passos do método da dobradura, entretanto, uma grande parte da turma avaliou como positiva para a compreensão de parábola, conforme mostra a avaliação de um aluno na figura seguinte:

Figura 66 – Amostra do questionário de avaliação: uso de régua e compasso



Questionário – Construção da parábola com régua e compasso

Registre aqui suas impressões a respeito da atividade realizada, respondendo às seguintes perguntas

1ª: Você já havia utilizado régua e compasso antes nas aulas de geometria?

(   ) Sim (X) Não

2ª: Quais os conteúdos matemáticos que foram revisados na realização dessa atividade?

Circulo e reta

3ª: A construção da parábola com régua e compasso contribuiu para a compreensão do conceito dessa curva?

(X) Sim (   ) Não

4ª: Quais as dificuldades que você sentiu para realizar a atividade?

Só em usar o compasso.

Fonte: arquivo do autor

Para avaliar o uso de materiais concretos nos dois métodos abordados para construir parábolas, fizemos duas indagações para a turma:

1ª: Como você avalia a aula ministrada sobre parábola com o auxilio dos materiais concretos utilizados?

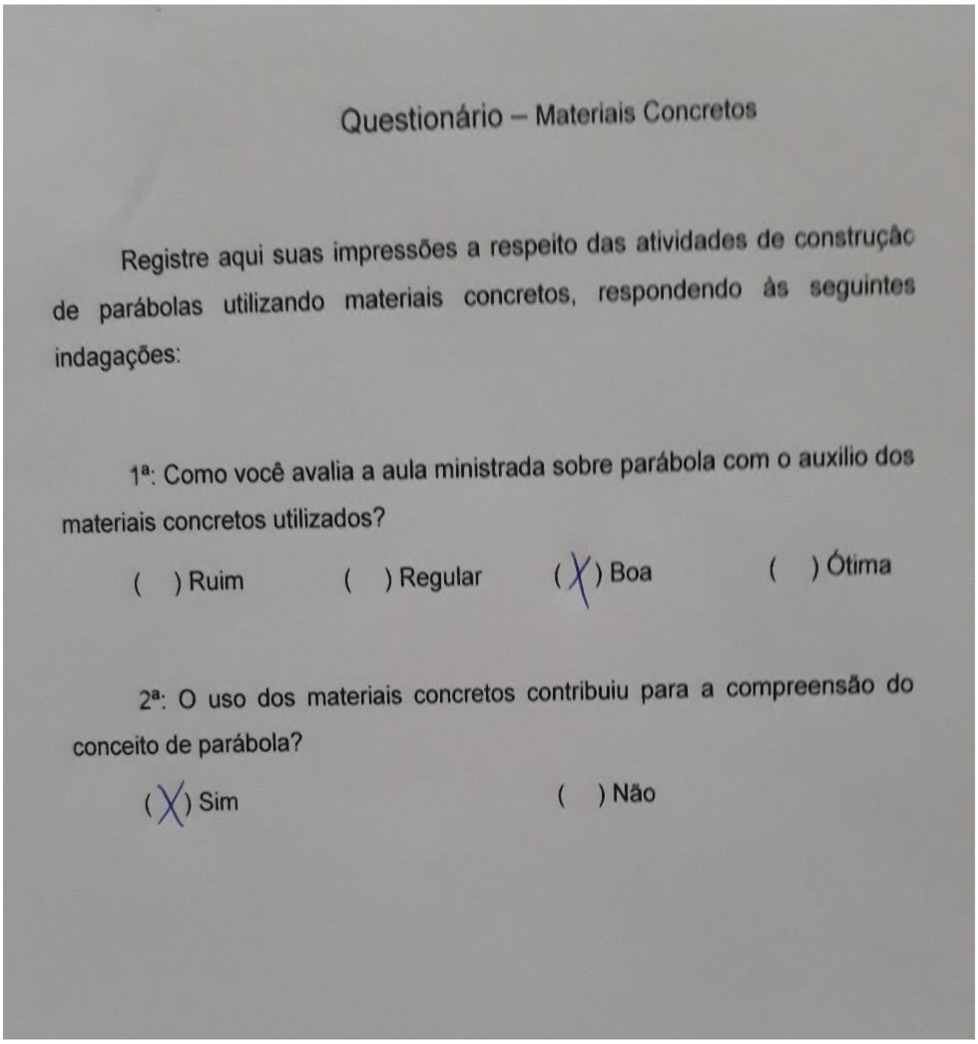
( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa ( ) Ótima

2ª: O uso dos materiais concretos contribuiu para a compreensão do conceito de parábola?

( ) Sim ( ) Não

De forma geral, a maioria dos alunos avaliou a aula como boa ou ótima. Já a respeito da compreensão, a maioria respondeu que sim, que os conceitos sobre a parábola e seus elementos ficaram mais claros após a abordagem com materiais concretos, mas ressaltaram que a avaliação estava considerando principalmente o método da dobradura, que foi uma forma simples de construir a parábola. Abaixo temos uma avaliação de um aluno a respeito da aula.

Figura 67 – Amostra do questionário de avaliação: uso de materiais concretos



Questionário – Materiais Concretos

Registre aqui suas impressões a respeito das atividades de construção de parábolas utilizando materiais concretos, respondendo às seguintes indagações:

1ª: Como você avalia a aula ministrada sobre parábola com o auxilio dos materiais concretos utilizados?

( ) Ruim ( ) Regular (X) Boa ( ) Ótima

2ª: O uso dos materiais concretos contribuiu para a compreensão do conceito de parábola?

(X) Sim ( ) Não

Fonte: arquivo do autor

Dando continuidade a esse terceiro momento da aplicação da proposta, passamos a abordar a construção de parábolas utilizando as ferramentas do *software* GeoGebra, propondo três atividades para a turma.

Como a escola na qual aplicamos a proposta não dispunha de laboratório de informática, os alunos tiveram que acompanhar a aula e desenvolver as atividades em duplas e trios, utilizando 12 netbooks providenciados pelo professor.

Utilizando o projetor de imagens, apresentamos a interface do GeoGebra, mostrando o campo entrada, a janela de visualização e a barra de ferramentas. Realizamos algumas construções simples utilizando o campo entrada, como pontos a partir de suas coordenadas e retas a partir de sua equação. Utilizamos a janela de visualização para construir alguns polígonos, círculos e retas a partir da marcação de dois pontos. À medida que o professor executava os comandos, solicitava que os alunos também os realizassem.

Os alunos se mostraram bastante curiosos a respeito do GeoGebra, se surpreenderam com a dinâmica do *software,* com sua rapidez em apresentar a forma geométrica de pontos, retas e círculos. Então propomos a primeira atividade.

Atividade 1: Construção da parábola através do ícone "Elipse"

Inicialmente, entregamos para os alunos um roteiro impresso com o passo a passo dos comandos a serem executados:

1º: Na barra de ferramentas clique no ícone "elipse". Observe que ao clicar aparecerá também a opção parábola, e posicionando o mouse sobre esta opção, surge a seguinte mensagem de ajuda: *selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz;*

2º: Crie na *caixa de entrada* o ponto $F=(1,3)$ e a reta vertical d de equação $x=-2$. Em seguida, selecione novamente a ferramenta *Parábola*, clique no ponto F e, então, clique na reta d. O resultado é a parábola de foco F e diretriz d.

Então, primeiramente criamos o foco e a diretriz sugerida, explicando cada passo e, em seguida, construímos a parábola utilizando o ícone "elipse". Após mostrar para os alunos os procedimentos, sugerimos então que eles construíssem as parábolas abaixo:

a) de foco $F=(-2,1)$ e diretriz $y=-2$

b) de foco $F=(-2,-2)$ e diretriz $y=3$

c) de foco $F=(3,-1)$ e diretriz $x=-1$

d) de foco $F=(0,1)$ e diretriz $x=3$

Para isso, estipulamos o tempo de vinte minutos e ficamos circulando na sala ajudando os alunos e tirando dúvidas. Observamos que alguns alunos apresentaram dificuldades em manusear o teclado do netbook, outros estavam criando o ponto com letra minúscula e a reta com letra maiúscula. Após realizarmos algumas intervenções, verificamos que a atividade foi bem compreendida pela maioria da turma, pois tiveram êxito nas construções.

Em seguida, apresentamos a segunda atividade.

Atividade 2: Construção da parábola utilizando o comando "*Parábola [<Ponto>, Reta>]*"

Novamente entregamos para os alunos um roteiro impresso com o passo a passo dos comandos a serem executados:

1º: Na caixa de entrada criar o foco F e a reta diretriz d, digamos $F=(-2,1)$ e a reta horizontal $d: y=4$;

2º: Na caixa de entrada, ao digitar *parábola*, observe que aparecerá abaixo a opção *Parábola [<Ponto>, <Reta>],*

3º: Clicando nesta opção, aparecerá na caixa de entrada o comando *Parábola [<Ponto>, <Reta>]*. Então, substitua <*Ponto*>por F (o ponto foco criado no 1º passo) e <*Reta*>por d (a diretriz criada no 1º passo).O resultado será a parábola.

Mais uma vez executamos os passos, explicando cada procedimento. Alguns alunos não entenderam e então, mostramos mais uma vez o processo, e já pedimos para que eles também fossem fazendo ao mesmo tempo. Em seguida, desafiamos a turma a realizar a seguinte questão:

Construa no GeoGebra, utilizando o comando *Parábola [<Ponto>, Reta>]* a parábola:

a) de foco $F=(3,-1)$ e diretriz $x=-2$

b) de foco $F=(0,3)$ e diretriz $y=-1$

c) de foco $F=(2,2)$ e diretriz $x=4$

d) de foco $F=(0,0)$ e diretriz $y=-3$

Nesse exercício houve bastante interação entre os alunos. Enquanto uns realizavam de forma imediata, outros apresentavam dificuldades, mas ao interagir e ver o colega construir de forma correta, iam esclarecendo as dúvidas e realizando de forma certa. De forma geral a turma realizou a tarefa com êxito, sendo que apenas uma pequena parte não concluiu todos os itens sugeridos.

Para concluir, propomos a terceira atividade.

Atividade 3: Construção de parábolas inserindo a equação no campo entrada

Nesse caso, construímos o gráfico da parábola $y^2=5x+2$ mostrando alguns detalhes do GeoGebra, por exemplo, como se insere o expoente na incógnita. Em seguida, propomos a seguinte questão aos alunos:

Para praticar, construa no GeoGebra a parábola de equação:

a) $y^2=2x+3$

b) $x^2=y$

c) $3y^2=-5x-1$

d) $2x^2=-y+5$

Pelo fato dos alunos estarem em grupos, a tarefa proporcionou bastante comunicação entre eles, pois uns iam ajudando os outros na realização da atividade. Observando a prática dos estudantes, vimos algumas dificuldades no manuseio do teclado, provavelmente por falta de prática. Mas aos poucos eles iam digitando cada equação no campo de entrada, observando a concavidade da parábola e identificando o vértice. De forma geral, verificamos que a maioria da turma conseguiu construir as quatro parábolas propostas.

Aproveitamos esse momento ainda para inserir equações de funções quadráticas no campo de entrada, como por exemplo, construímos os gráficos das funções $y = x^2 + 2x - 1$ e $y = -x^2 + 4$, associando os coeficientes com a representação geométrica.

Para avaliar a utilização do *software* GeoGebra na construção de parábolas, aplicamos um questionário com as seguintes indagações:

1ª: Você conhecia o *software* GeoGebra antes da aula ministrada?

( ) Sim ( ) Não

2ª: Você acha que a utilização de *softwares* educativos é importante para o aprendizado de conteúdos?

( ) Sim ( ) Não

3ª: De forma geral, como você avalia a aula ministrada sobre parábola com o auxilio do software GeoGebra?

( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa ( ) Ótima

4ª: O uso do GeoGebra contribuiu para a compreensão do conceito de parábola?

( ) Sim ( ) Não

5ª: As diferentes formas de construir a parábola auxiliaram na fixação dos conceitos dessa curva?

( ) Sim ( ) Não

Quanto ao primeiro questionamento, a turma afirmou de maneira unânime que não conhecia o *software* GeoGebra.

Unanimidade também verificada na segunda indagação, pois todos os alunos afirmaram achar importante a utilização de *softwares* educativos para o aprendizado de conteúdos, lamentaram a ausência de um laboratório de informática na escola.

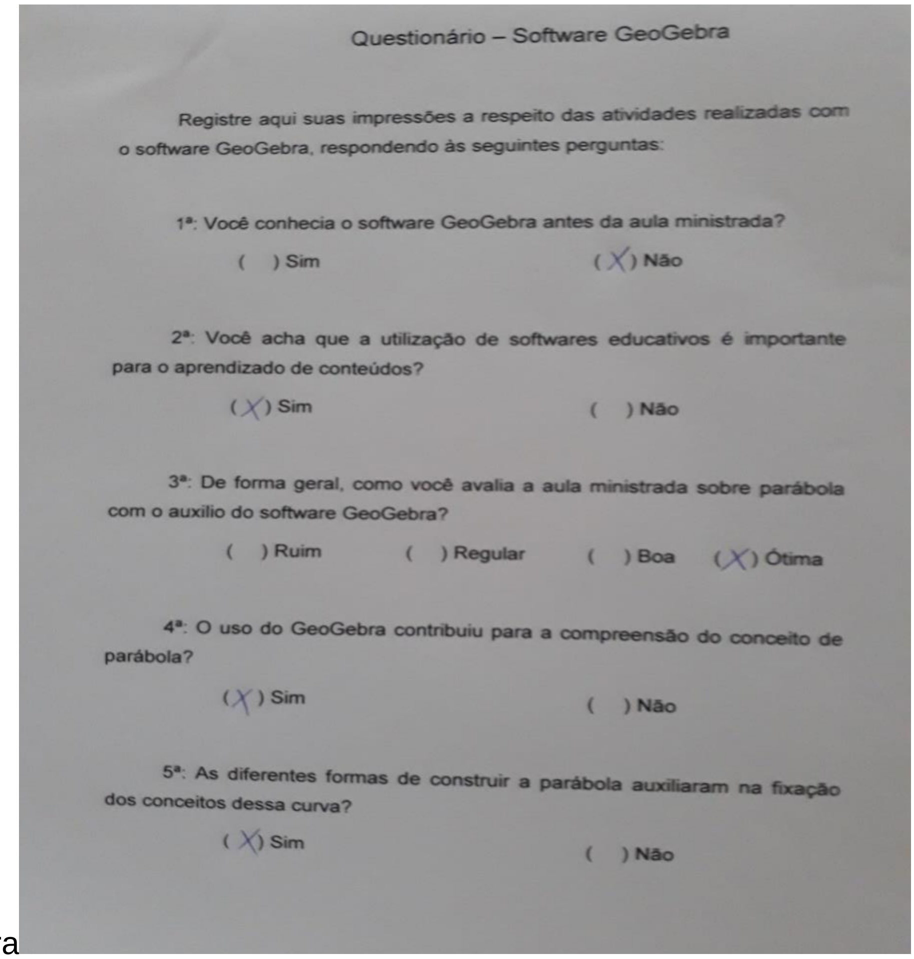
A respeito da terceira pergunta, a maioria da turma avaliou como boa ou ótima a aula ministrada sobre parábola com o auxílio do software GeoGebra, inclusive iam baixar o *software* no computador pessoal para aprender a explorar as outras ferramentas.

Quanto à quarta pergunta, a maioria afirmou positivamente que o uso do GeoGebra contribuiu para a compreensão do conceito de parábola.

No quinto questionamento a maior parte dos alunos afirmou que as diferentes formas de construir a parábola auxiliaram na fixação dos seus conceitos, principalmente no entendimento do que é o foco, a reta diretriz e o conceito da equidistância dos pontos da parábola.

Essa metodologia de utilização do GeoGebra na construção de parábolas foi bastante significativa, visto que a maioria da turma se mostrou receptiva, atraída e curiosa para operar o *software,* os alunos participaram ativamente da aula, dialogaram entre si, se ajudaram, e avaliaram positivamente o uso do *software* para aumentar a compreensão do tema, conforme podemos observar na próxima figura, que contém as respostas do questionário de um aluno:

Figura 68 - Amostra do questionário de avaliação: *software* GeoGebra



Questionário – Software GeoGebra

Registre aqui suas impressões a respeito das atividades realizadas com o software GeoGebra, respondendo às seguintes perguntas:

1ª: Você conhecia o software GeoGebra antes da aula ministrada?

( ) Sim (X) Não

2ª: Você acha que a utilização de softwares educativos é importante para o aprendizado de conteúdos?

(X) Sim ( ) Não

3ª: De forma geral, como você avalia a aula ministrada sobre parábola com o auxílio do software GeoGebra?

( ) Ruim ( ) Regular ( ) Boa (X) Ótima

4ª: O uso do GeoGebra contribuiu para a compreensão do conceito de parábola?

(X) Sim ( ) Não

5ª: As diferentes formas de construir a parábola auxiliaram na fixação dos conceitos dessa curva?

(X) Sim ( ) Não

Fonte: arquivo do autor

Para finalizar a aula questionamos a turma, de forma oral, a avaliar qual a forma de abordagem da parábola eles acharam mais interessante, aquela em que utilizamos materiais concretos ou quando trabalhamos com o *software* GeoGebra. A resposta dos alunos foi unânime: o *software* GeoGebra.

5.5 Análise dos resultados

Ao finalizar a aplicação de todas as atividades da proposta de intervenção podemos afirmar que cada aula nos proporcionou um aprendizado novo. Percebemos que muitos alunos possuíam certo conhecimento sobre a representação geométrica da parábola enquanto gráfico de uma função quadrática e isso contribuiu para o desenvolvimento e a evolução das aulas.

Em relação ao objetivo maior deste trabalho, que é de melhorar a compreensão a respeito dos conceitos de parábola, podemos afirmar que a intervenção pedagógica apresentada conseguiu alcançar êxito, tendo em vista que obtemos resultados bastante positivos.

A aula de maior participação foi aquela em que houve a utilização dos materiais manipuláveis através do método da dobradura, sendo que a de maior empolgação foi aquela em que usamos as ferramentas do *software* GeoGebra para construir parábolas. Os alunos acharam o *software* muito interessante e se mostraram ansiosos para poder explorar suas ferramentas.

Em relação aos dois primeiros objetivos, que eram conhecer e diferenciar as seções cônicas, a boa participação dos alunos na análise das curvas propostas nos leva a concluir que os resultados foram satisfatórios, pois a maior parte da turma foi capaz de identificar se as figuras apresentadas se tratavam de parábola, circunferência, elipse ou hipérbole.

Quanto ao objetivo de reconhecer a parábola a partir de sua representação geométrica, tivemos bom resultado, pois os alunos já possuíam uma noção de parábola oriunda do estudo da função quadrática no primeiro ano do ensino médio e agora são capazes de reconhecer parábolas tanto com concavidade para cima ou para baixo, quanto para a direita e para a esquerda.

O resultado das atividades mostrou que o nosso objetivo de identificar os principais elementos da parábola também foi alcançado, pois diante das parábolas apresentadas, a maioria dos alunos foi capaz de reconhecer o foco, o vértice, a reta diretriz, o eixo focal e o parâmetro.

Tivemos êxito também no objetivo de construir a parábola pelo método da dobradura, e essa foi a parte da aula na qual os alunos participaram ativamente, trabalharam em grupo e praticamente todos concluíram a atividade. De acordo com o questionário proposto, a turma avaliou positivamente a aula ao afirmar que o método da dobradura contribuiu para a compreensão do conceito de parábola.

Em relação ao objetivo de construir parábolas utilizando régua e compasso, este foi parcialmente alcançado, pois apenas uma pequena parte da turma concluiu a atividade proposta. Muitos alunos tiveram dificuldades em manusear corretamente o compasso, outros confundiram as medidas dos raios dos círculos, o que culminou na não conclusão da tarefa. A maior parte dos estudantes afirmou nunca ter utilizado o compasso antes, o que pode ter sido determinante para o desenvolvimento da tarefa.

Quanto ao nosso objetivo de levar os alunos a conhecerem o *software* GeoGebra, o resultado foi muito satisfatório. Foi surpreendente a receptividade que os alunos tiveram com o *software*, como acharam a interface interessante e afirmaram ser uma ferramenta muito estimulante para o aprendizado de geometria. Aprenderam facilmente a construir pontos e retas e, se mostraram curiosos para manipular as demais ferramentas do GeoGebra.

As atividades com o *software* GeoGebra foram desenvolvidas em grupo na própria sala de aula, utilizando doze net books, visto que a escola não dispõe de Laboratório de Informática. Esse momento gerou bastante empolgação e curiosidade na turma, e certamente isso facilitou a realização das tarefas. A execução dos comandos contou com a contribuição do professor, que os realizava e solicitava que os alunos realizassem em seguida. Logo, nosso objetivo de construir parábolas utilizando as ferramentas do GeoGebra foi naturalmente alcançado.

Pudemos constatar ainda que a turma não conhecia o GeoGebra, mas que acham importante a utilização de *softwares* educativos para o aprendizado de conteúdos e que o uso do GeoGebra contribuiu para a compreensão do conceito de parábola. Os alunos lamentaram muito o fato da escola não ter um laboratório de informática, argumentaram que tanto o professor quanto eles perdem a oportunidade de aprofundar vários conteúdos.

Interessante é que ao provocarmos a turma para comparar qual das duas formas de construção da parábola eles acharam mais interessante, ou seja, se com uso de materiais concretos ou com a utilização do *software* GeoGebra, a resposta dos alunos foi unânime: com o *software* GeoGebra.

Assim, foi possível realizar com sucesso o trabalho e obtermos resultados satisfatórios, na medida em que os alunos envolvidos tiveram avanços significativos com relação aos conceitos da cônica parábola.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho é contribuir para a assimilação dos conceitos da cônica parábola. Para isso, explanamos sobre a origem das cônicas, abordamos o tratamento que se dá à parábola na Geometria Analítica, mostramos várias de suas aplicações no cotidiano, detalhamos algumas formas de construção da parábola e, por fim, apresentamos uma proposta de intervenção a ser desenvolvida em uma turma de 3º ano do Ensino Médio.

Além do tratamento analítico, é importante que os alunos conheçam o contexto histórico da origem da parábola e suas aplicações presentes tanto no âmbito da Astronomia, da Física e de outras ciências, quanto na Engenharia, pois dessa forma seu conhecimento ganhará significado real.

Um dos tópicos importantes do trabalho é a apresentação e o detalhamento de alguns métodos de construção de parábolas, dos quais alguns foram selecionados para compor a proposta de intervenção.

A proposta pedagógica é o ponto forte desta pesquisa. Ela foi organizada com a estratégia de utilização de materiais concretos e do *software* GeoGebra para construção de parábolas, através da qual planejamos desenvolver uma abordagem que fugisse da forma tradicional de ensinar e que pudesse atrair a atenção dos alunos. Além disso, nosso objetivo maior foi promover uma compreensão significativa a respeito dos conceitos da cônica parábola.

Os resultados mostraram que o uso de materiais concretos é uma alternativa significativa para os professores no ensino de Geometria, pois possibilita a interação entre os alunos e estimula o raciocínio lógico. Porém, durante a realização das atividades, constatamos que a falta de hábito em manipular esses materiais dificultou a realização das construções das parábolas. É importante que os professores desenvolvam esse tipo de atividade com os alunos desde o Ensino Fundamental, o que permitirá que os estudantes adquiram habilidade para manipular os materiais concretos.

Sobre o uso do GeoGebra, podemos afirmar que alcançamos nossos objetivos, pois os alunos não conheciam esse *software* e o contato com as ferramentas do mesmo proporcionou bastante empolgação na turma, que realizou as construções de parábolas sem grandes dificuldades. Infelizmente a escola não dispunha de Laboratório de Informática, fato que impede professores e alunos de potencializarem a construção do conhecimento.

É importante ressaltar que confrontando as duas metodologias aplicadas, os alunos demonstraram preferência pela utilização do GeoGebra ao uso de materiais concretos. Porém, considerando nosso objetivo maior que consiste em melhorar a compreensão dos alunos a respeito dos conceitos de parábola, podemos afirmar que ambas as metodologias contribuíram para que pudéssemos alcançar o objetivo proposto.

Considerando a pesquisa realizada e a experiência que adquirimos ao longo de vários anos na docência em escolas do ensino básico, podemos afirmar que os materiais concretos e o *software* GeoGebra são ferramentas expressivas que podem dinamizar o ensino de diversos conteúdos matemáticos, em especial nas abordagens geométricas, pois permitem que os alunos interajam entre si e se tornem sujeitos ativos na construção do seu conhecimento, possibilitando aos estudantes que não sejam meros espectadores, mas sim a assumirem o papel de protagonista do seu aprendizado.

Entretanto, para fazer bom uso desses recursos, se faz necessário que o professor saia da sua zona de conforto, adentre a essas formas diferenciadas de ensinar, estudando e buscando se capacitar para fugir dos métodos tradicionais, pois assim dará significado ao que ensina e não permitirá que as aulas se resumam a fórmulas e mecanismos de decorar.

Além disso, é necessário que o poder público fortaleça a estrutura das escolas com construção de laboratórios, aquisição de materiais manipuláveis, equipamentos como projetores de imagem, computadores, lousas digitais etc. É preciso também que as instituições de ensino e o Estado proporcionem formação continuada que capacite os professores para que estes adquiram as habilidades necessárias para utilizar essas ferramentas de ensino, para que as abordagens sejam cada vez mais eficazes e assim potencialize o processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, consideramos como bastante pertinente o trabalho aqui apresentado, pois procuramos trazer ao leitor uma linguagem acessível sobre o tema tratado, ao mesmo tempo em que levantamos a discussão sobre diferentes metodologias de ensino.

Por fim, esperamos que docentes de Matemática que atuam no Ensino Médio ou que lecionam a disciplina Geometria Analítica no Ensino Superior encontrem nesse trabalho subsídios que contribuam positivamente para sua prática pedagógica.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2010.

BOYER, B. C. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 1999.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BÚRIGO, E. Z. et al. (Orgs).**A matemática na escola:** novos conteúdos, novas abordagens. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.

CAJORI, F. **Uma história da matemática.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CERQUEIRA, Adriano A. **Parábola e suas aplicações.** 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

DE MAIO, Waldemar; CHIUMMO, Ana. **Fundamentos de matemática:** Geometrias: geometrias analítica e vetorial: euclidianas e não-euclidianas. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. **Geometria analítica.** Coleção PROFMAT. SBM, 2013.

DUTRA, Sabrina M. de A. **Contextualizando o ensino das parábolas.** 2015. 46 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7:** geometria analítica. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs). **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

LORENZATO, Sérgio. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

NASCIMENTO, E. G. A. do; SILVA, M. J. A. da; PINHEIRO, J. L. **Exposição do GeoGebra para dispositivos móveis e web 2.0 como ferramenta na educação matemática.** In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2014, Birigui.*Anais*...Birigui: SBEM-SP: IFSP, 2014. P. 556-567.

PEIXOTO, H. C. **Tópicos de geometria analítica:** parábola. 2013. 63 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, F. J. dos; FERREIRA, S. F.**Geometria analítica.** Porto Alegre: Bookman, 2009.

SANTOS, J. C. C. dos. **Parábola e suas aplicações no ensino médio.** 2016. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

SATO, J. **As Cônicas e suas Aplicações**: A construção da parábola pelo método da dobradura. p. 32. Disponível em:<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>.Acesso em: 28 de maio de 2018.

SOUZA, L. D. de. **Cônicas e suas propriedades notáveis.** 2014. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

TOLEDO, B. de S. **O uso de *softwares* como ferramenta de ensino-aprendizagem na educação do ensino médio/técnico no Instituto Federal de Minas Gerais.** 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Sistemas de Informação e Gestão do Conhecimento, Universidade FUMEC, Belo Horizonte, 2015.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas.** 5. ed. Curitiba: [s.n.], 1949.

WAGNER, E. **Por que as antenas são parabólicas?.***Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 33, p. 11-15, 1997.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica.** São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.