



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DIÓGENES SANTANA VASCONCELOS

COLORAÇÃO EM GRAFOS E APLICAÇÕES

São Cristóvão – SE
2018

DIÓGENES SANTANA VASCONCELOS

COLORAÇÃO EM GRAFOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós -
Graduação em Matemática PROFMAT da Uni-
versidade Federal de Sergipe como parte dos re-
quisitos para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Allyson dos Santos
Oliveira

São Cristóvão – SE
2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Vasconcelos, Diógenes Santana
V331c Coloração em grafos e aplicações / Diógenes Santana
Vasconcelos ; orientador Allyson dos Santos Oliveira. – São
Cristóvão, 2018.
78 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal
de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Teoria dos grafos – Coloração. 3. Sudoku. I.
Oliveira, Allyson dos Santos, orient. II. Título.

CDU: 519.17



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Coloração em Grafos e Aplicações

por

Diógenes Santana Vasconcelos

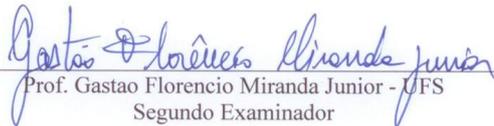
Aprovada pela banca examinadora:



Prof. Allyson dos Santos Oliveira - UFS
Orientador



Prof. Zaqueu Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador



Prof. Gastao Florencio Miranda Junior - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 06 de Setembro de 2018

Dedico esta dissertação as pessoas mais importantes da minha vida: meus pais Maria Edina e Manuel, minha esposa Marjorie Marie, minha filha Manuela e minha irmã Cíntia Valéria.

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus por me conceder o dom da vida, por iluminar minha caminhada e por me fortalecer cada dia mais.

- A minha família, em especial aos meus pais, Maria Edina e Manuel, por todo incentivo dado durante a minha caminhada.

- A minha esposa Marjorie Marie que sempre me encorajou e compreendeu as ausências nos diversos momentos de estudos, obrigado pela companheira fiel que sempre foi, te amo muito.

- A minha filha Manuela, maior presente de Deus e fonte inspiradora para a conclusão deste ciclo.

- Aos meus amigos do curso Profmat, turma 2016, nossa constante amizade, apoio e incentivo contribuíram diretamente nesta conquista.

- A todos os professores do Profmat - UFS pelo conhecimento transmitido. Em especial ao meu orientador Prof. Dr. Allyson.

- A banca examinadora pelas sugestões dadas, que contribuíram para a melhoria deste trabalho.

- A CAPES, pelo apoio financeiro, por meio de bolsas de estudos.

- A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Resumo

Este trabalho traz uma abordagem as noções básicas da Teoria dos Grafos, apresentando contexto histórico, conceitos, definições e exemplos com o intuito de proporcionar ao leitor conhecimentos prévios da teoria. O principal objetivo é efetuar um estudo dos grafos aplicado à coloração mediante o uso do grafo dual e o método do algoritmo guloso. Para tanto, apresentaremos a tentativa de demonstração do Teorema das 4 Cores que fora desenvolvida por Kempe e da prova do Teorema das 5 Cores, feita 11 anos mais tarde por Heawood. Por fim, buscaremos a resolução de algumas situações problemas que serão modeladas através da coloração de vértices.

Palavras-chave: Grafos; Coloração; 4 Cores.

Abstract

This work brings an approach to the basic notions of Graph Theory, presenting historical context, concepts, definitions and examples in order to provide the reader with previous knowledge of the theory. The main objective is to perform a study of the graphs applied to the staining using the dual graph and the method of the greedy algorithm. To do so, we will present the demonstration attempt of the 4-Color Theorem that had been developed by Kempe and the proof of the 5-Color Theorem, made 11 years later by Heawood. Finally, we will seek the resolution of some situations problems that will be modeled through the coloring of vertices.

Keywords: Graphs; Coloring; 4 Colors.

Sumário

Prefácio	1
1 Noções de Grafos	3
1.1 Contexto Histórico	3
1.2 Alguns Conceitos Básicos	5
1.3 Tipos de Grafos - Simples, completo e subgrafos	7
1.4 Grafos Bipartidos, k-Partidos e Bipartidos Completos	12
1.5 Grau do Vértice e Grafos k-regulares	14
1.6 Grafos e Matriz de Adjacência	17
1.7 Isomorfismo	18
1.8 Passeio ou Percorso	20
2 Conexidade	25
2.1 Componentes Conexas e Conexidade	25
3 Grafos Planares	31
3.1 Grafos Planos e Curvas de Jordan	31
3.2 Fórmula de Euler	33

4	Coloração de Mapas e Grafos	39
4.1	Os Mapas e o Grafo Dual	39
4.2	Coloração de Grafos e Mapas	41
4.3	O método do Algoritmo Guloso	42
4.4	O Problema das 4 cores	45
4.5	A demonstração de Kempe	46
4.6	O Problema das 5 Cores	53
5	Aplicações	56
5.1	Sudoku 4×4	56
5.2	A Herança do Califa de Bagdá	59
5.3	Armazenamento de Cães em caixas transportadoras	61
5.4	Cronograma de Recuperação Final	62
	Referências Bibliográficas	64

Lista de Figuras

1.1	Mapa da cidade de Königsberg.	3
1.2	Grafo do Mapa da cidade de Königsberg.	4
1.3	Elementos de um Grafo.	5
1.4	Representação Gráfica.	7
1.5	Representação Gráfica.	7
1.6	Representação Gráfica de um Grafo Simples.	8
1.7	Representação dos Grafos K_1, K_2, K_3 e K_4	9
1.8	Grafo qualquer.	10
1.9	Propriedades de pertinência de Grafos.	10
1.10	Formação de Subgrafo por indução de arestas.	11
1.11	Formação de Subgrafo por indução de vértices.	11
1.12	Grafo Bipartido.	12
1.13	Grafo 3-partido.	13
1.14	Exemplo de Grafos Bipartido Completo.	13
1.15	Representação Gráfica.	15
1.16	Grafos Regulares.	15
1.17	Representação Gráfica.	17

1.18	Grafos isomorfos.	19
1.19	Grafos não isomorfos.	20
1.20	Passeio.	21
1.21	Grafo G	22
1.22	Grafo G	23
1.23	Ilustração do Teorema 1.4.	24
2.1	Conexidade em Grafos.	26
2.2	Retirada da aresta w	27
2.3	Grafo G	28
2.4	Arestas e Vértices de Corte.	29
2.5	Subconjunto de Articulação e Conjunto de Corte.	30
3.1	Problema das três fontes de suprimento.	31
3.2	Grafo planar isomorfo ao seu grafo plano.	32
3.3	Ilustração do Teorema da Curva de Jordan.	33
3.4	Grafo com 9 vértices e 21 arestas.	35
3.5	Grafo e suas faces.	36
4.1	Conjunto de mapas sem coloração.	40
4.2	Conjunto de mapas coloridos.	40
4.3	Mapa e seu grafo dual.	41
4.4	Mapa sem coloração.	42
4.5	Mapa com coloração incorreta.	42

4.6	Grafo dual.	43
4.7	Grafo dual e mapa original coloridos.	44
4.8	Representação de mapas não normais.	47
4.9	Suprimindo um país isolado.	48
4.10	Substituindo ponto de fronteira com mais de 3 vizinhos.	48
4.11	Coloração de um mapa ao eliminar um ponto de fronteira com mais de 3 vizinhos.	48
4.12	Conjunto inevitável de configurações de um mapa pentacromático normal.	50
4.13	Mapa M e mapa M'	51
4.14	Coloração e as cadeias de Kempe.	52
4.15	Remoção do país contendo 5 vizinhos.	54
5.1	Sudoku 4×4	56
5.2	Grafo dual.	57
5.3	Grafo dual colorido e Sudoku 4×4	58
5.4	Sudoku 4×4 resolvido.	58
5.5	Mapa das terras do Califa de Bagdá.	59
5.6	Grafo dual do mapa das terras do Califa de Bagdá.	59
5.7	Grafo dual colorido e Mapa das Terras do Califa já dividido.	60
5.8	Grafo representando raças que não se entendem.	61
5.9	Grafo representando raças que não se entendem.	62
5.10	Grafo dual.	63
5.11	Grafo dual.	63

Prefácio

Cotidianamente, o ser humano se vê em constante necessidade de superar desafios. Numa sociedade de frequentes mudanças, os desafios exigem dos indivíduos cada vez mais dinamismo. Desenvolver uma boa capacidade de adaptação é fundamental para se destacar tanto diante do trabalho, quanto na vida pessoal.

A todo momento, a matemática provoca a humanidade com inesgotáveis fontes de desafios. Muitos deles, aparentemente simples, a exemplo da Teoria dos Grafos, envolve sofisticadas estruturas em seu desenvolvimento.

A mais antiga menção a esta teoria foi feita em 1736, pelo matemático suíço Leonhard Euler, quando o mesmo publicou um artigo explicitando a solução para o problema das setes pontes de Königsberg, criado pelos seus moradores.

No seu surgimento, o problema das sete pontes era visto por muitos como uma frívola adivinhação. Entretanto, durante seus quase três séculos de existência, a Teoria dos Grafos obteve um progresso tanto em suas aplicações como em sua própria complexidade.

Neste sentido, o presente trabalho objetiva recepcionar professores e alunos em seu contato inicial com a Teoria dos Grafos. Para tanto, no primeiro capítulo, trabalharemos os conceitos básicos, bem como definições e tipos de grafos. Abordaremos também as definições de grau do vértice e a representação matricial de um grafo que é bastante utilizada na construção de grafos em computadores. E, finalizando o capítulo, abordaremos as definições de grafos isomorfos e passeios ou percursos. Deste modo, o capítulo serve como material preliminar ou até mesmo como referência para os capítulos posteriores.

No capítulo 2, faremos uma discussão sobre a conexidade e as componentes conexas de um grafo, proporcionando, por exemplo, averiguar o quão é segura ou não uma rede de abastecimento de energia em uma determinada cidade.

No terceiro capítulo, será abordado um estudo sobre planaridade de grafos, fazendo uso da exímia fórmula de Euler e alguns resultados subsequentes, os quais fornecerão ferramentas necessárias para mostrar que um determinado grafo é não planar. A exemplo, mostraremos a não planaridade de um grafo $K_{3,3}$.

O quarto capítulo inicia com uma abordagem sobre coloração de mapas e grafo dual. Em seguida, é realizada uma discussão e um pequeno esboço da prova do Teorema das 4 Cores feita por Alfrad Bray Kempe em 1879 e da demonstração do Teorema das 5 Cores, feita onze anos mais tarde por Percy John Heawood, que na oportunidade aponta um pequeno erro na demonstração de Kempe.

Finalizaremos nosso estudo no quinto capítulo, onde apresentamos algumas aplicações e suas respectivas soluções com base na teoria abordada, principalmente no que tange o Teorema das 4 Cores e a coloração de vértices.

Capítulo 1

Noções de Grafos

Iniciaremos o capítulo apresentando um breve contexto histórico sobre a origem e desenvolvimento da Teoria dos Grafos. Logo em seguida, enunciaremos definições básicas que servirão de premissas para os capítulos vindouros.

1.1 Contexto Histórico

Os estudos pioneiros a Teoria dos Grafos origina-se na cidade de Königsberg, antiga Prússia, hoje conhecida como Kaliningrado, atual Rússia. No ano de 1736, ao vagar pela cidade, o matemático suíço Leonhard Euler fora convocado a buscar a solução para um problema, até então sem solução, constatado por pessoas que lá residiam. O problema basea-se na possibilidade de transitar pela cidade, atravessando as suas setes pontes uma única vez. Estas pontes eram cortadas por encostas do rio Pregel, gerando uma ilha central, conforme Figura 1.1.

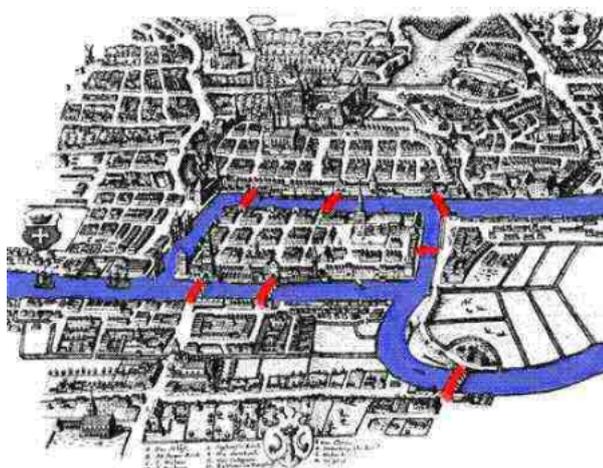


Figura 1.1: Mapa da cidade de Königsberg.

Euler, demonstrou que o problema em questão era inviável. Em sua solução, os pontos correspondiam a parte territorial, enquanto as linhas ligando esses pontos referiam-se às pontes, ver

Figura 1.2.

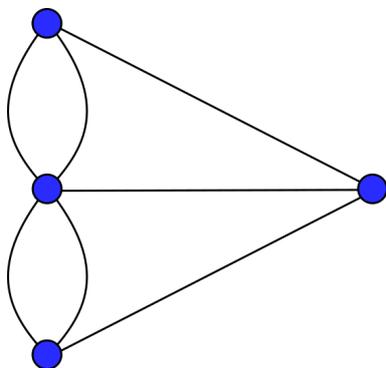


Figura 1.2: Grafo do Mapa da cidade de Königsberg.

Ele percebeu a inviabilidade de transitar por um ponto que contivesse um número ímpar de linhas ligadas a ele sem a repetição de uma das linhas interligadas a este ponto e mostrou que o problema teria solução se, e somente se, a quantidade de linhas conectadas a cada ponto fosse em um número par ou que, contivesse, no máximo, dois pontos com um número ímpar de linhas conectadas a ele. E, neste último caso, o trajeto, necessariamente, deveria começar em um desses pontos e terminar por outro. Após esse marco, dá-se início ao estudo da Teoria dos Grafos.

Se posto em consideração a grandiosa produção científica feita por Euler em pleno século XVIII e a aparente carência em aplicações práticas, a solução do primeiro problema da teoria de grafos passou por despercebida, o que provavelmente influenciou, naquele momento, outros estudiosos a não seguir-lhe os passos.

Neste sentido, ao analisarmos o intervalo entre a demonstração de Euler e os anos finais do século XIX, observaremos o registro de poucos trabalhos referentes a esta teoria. Em 1847, Kirchhoff e Cayley desenvolveram a teoria das árvores. O primeiro, investigou as redes elétricas, o segundo apurou árvores oriundas da enumeração de isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica. Em 1869, Jordan, sob uma ótica unicamente matemática, faz vista também ao campo das árvores. Ainda em 1859, Hamilton propõe um jogo cujo objetivo é transitar por todas as arestas de um dodecaedro regular, de tal modo que um mesmo vértice fosse explorado, exatamente, uma única vez.

Posteriormente, Guthrie apresenta a seu professor, De Morgan, a célebre “conjectura das 4 Cores”, que viera a ser provado por Appel e Haken, em 1976. O problema proposto basea-se em provar que todo mapa desenhado no plano pode vir a ser colorido com, no máximo, quatro cores, de forma que nunca dois países vizinhos fiquem com a mesma cor. Em 1879, Kempe apresentou uma prova para o problema, todavia, pouco mais de uma década, Heawood mostra um erro na conjectura de Kempe, conquistando no processo, uma prova válida para o Teorema das 5 Cores.

Outros autores de grande significância na construção histórica da teoria dos grafos merecem destaque, são eles: Menger (1926) - por demonstrar um valoroso teorema sobre o problema da

desconexão de itinerários em grafos, Kuratowski (1930) - por determinar condições necessárias e suficientes para a planaridade de um grafo e Tutte (1947) - por solucionar o problema da existência de uma cobertura minimal em um grafo.

Já na segunda metade do século XX, “o desenvolvimento da teoria dos grafos veio se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional. Evidentemente, tal desenvolvimento não teria se dado sem a invenção do computador, sem o qual a imensa maioria das aplicações de grafos seria totalmente impossível” (NETTO, 2012). É pertinente constatar que, uma vez “descoberta” a teoria, múltiplas aplicações foram ligeiramente desenvolvidas, sejam no campo das ciências físicas, sejam nas ciências humanas.

1.2 Alguns Conceitos Básicos

Um grafo consiste numa estrutura de abstração de grande utilidade na representação e solução de diferentes tipos de problemas. Tais problemas podem ser convenientemente traduzidos a um conjunto de pontos e de linhas que relacionam alguns ou até mesmos todos os pares de pontos. Os pontos irão representar os elementos do conjunto e serão denominados de **vértices** ou **nós** e as linhas, descritas por **arestas** ou **arcos**, representarão a interrelação entre os elementos do conjunto dado.

A Figura 1.3(a) expõe as possíveis representações para o vértice de um grafo, enquanto as Figuras 1.3(b) e 1.3(c), exibem, respectivamente, as suas formas de ligação e as maneiras pelas quais os vértices se unem às arestas.

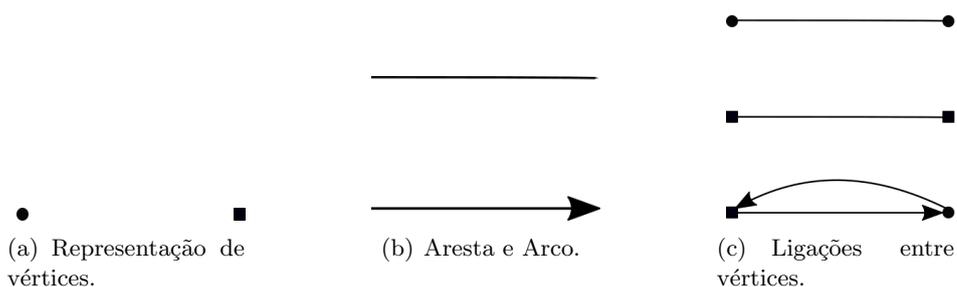


Figura 1.3: Elementos de um Grafo.

Convenientemente, os vértices serão representados pelas últimas letras do alfabeto ($u, v, w, , \dots$) ou até mesmo por (i, j, \dots) ; enquanto as arestas serão designadas por (e, f, g, \dots) . Uma outra notação possível é da variável v_i , com $1 \leq i \leq n$, para denotar os n vértices de um conjunto e da variável a_{ij}

para referenciar a aresta que conecta os vértices i e j . Desde que seja propício, as arestas também poderão ser apresentadas por pares (i, j) , (x_i, x_j) ou $i - j$. Deste modo, temos a seguinte definição para Grafos:

Definição 1.1. *Um grafo $G = (V, E)$ é uma estrutura que representa um conjunto não-vazio V de elementos denominados vértices, um conjunto finito E de elementos chamados arestas e uma função de incidência ψ que relaciona cada aresta “ e ” de G a um par não-ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G , denominados extremos de “ e ”.*

Exemplo 1.1. $G = (V, E)$ é um grafo em que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ e sua função de incidência é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= v_1v_1, & \psi(e_5) &= v_3v_4 \\ \psi(e_2) &= v_1v_2, & \psi(e_6) &= v_1v_4, \\ \psi(e_3) &= v_1v_2, & \psi(e_7) &= v_4v_5, \\ \psi(e_4) &= v_2v_3, & \psi(e_8) &= v_5v_6. \end{aligned}$$

Diante da definição, seja um grafo $G = (V, E)$. Os elementos do conjunto V podem ser referenciados como *vértices*, *nós* ou *pontos* e sua cardinalidade é denominada como **ordem**, simbolizado por $n = |V|$. Já o conjunto E , visto de maneira geral, pode ser entendido por um conjunto de relações de adjacência, onde seus elementos são vistos como *ligações*. Porém, de maneira particular, seus elementos são chamados de *arcos* sempre que se tratar de uma estrutura orientada e de *arestas* nas situações cuja estrutura é não-orientada. Denomina-se de **tamanho** a cardinalidade do conjunto E , de simbologia $m = |E|$. O grafo do Exemplo 1.1 é de ordem $n = 6$ e de tamanho $m = 8$.

Seja e_i uma aresta de E , tal que $\psi(e_i) = uv$, então podemos afirmar que e incide em u e em v por estes serem as suas extremidades e, por conseguinte, u e v são vértices *adjacentes* por estarem conectados a uma mesma aresta. Esse mesmo termo pode ser utilizado para ligações que envolvem um determinado vértice. Se numa aresta, seu vértice de partida coincidir com o vértice de chegada, isto é, se é da forma $\psi(e) = uu$, esta aresta será denominada de *laço*. Para o caso em que diferentes arestas possuam vértices idênticos, elas classificam-se como *arestas paralelas* ou *arestas múltiplas*.

A representação de um Grafo pode ser feita utilizando diagramas, e portanto vale enfatizar que os pontos estarão representando os vértices e as linhas as arestas que conectam os vértices. Na Figura 1.4, temos uma representação gráfica do Grafo do Exemplo 1.1.

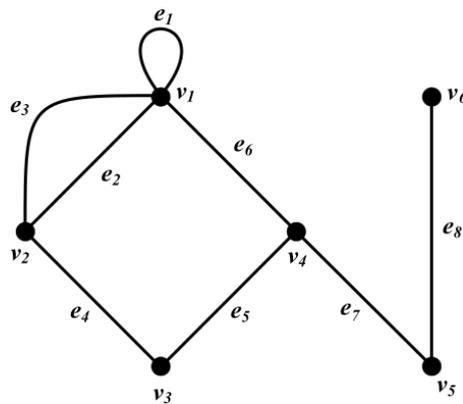


Figura 1.4: Representação Gráfica.

Neste mesmo exemplo, é possível afirmar que a aresta e_1 é um laço pois $\psi(e_1) = v_1v_1$ e que as arestas e_2 e e_3 são arestas paralelas, já que $\psi(e_2) = v_1v_2$ e $\psi(e_3) = v_1v_2$.

Muito embora a utilização do termo *grafo* advir do fato dele possuir uma representação gráfica, esta representação não é feita de maneira exclusiva, ou seja, é possível haver diversas maneiras para exposição de um mesmo grafo. A Figura 1.5 traz uma outra representação do grafo do Exemplo 1.1.

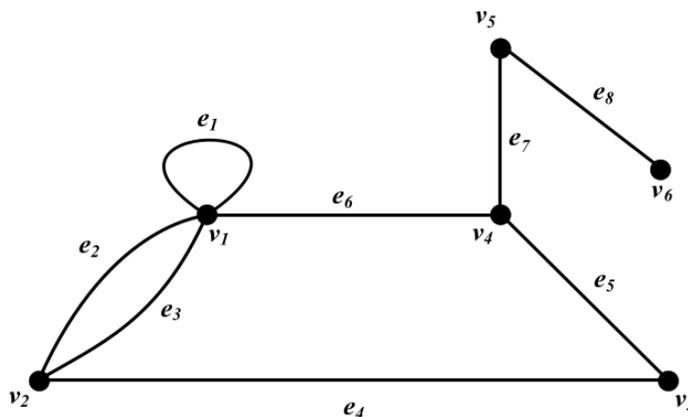


Figura 1.5: Representação Gráfica.

1.3 Tipos de Grafos - Simples, completo e subgrafos

No presente texto, sempre que se fizer menção ao termo *grafo*, estaremos, implicitamente, nos referindo ao conceito de grafo simples, cuja definição é dada a seguir.

Definição 1.2. *Um grafo que é destituído de laços e arestas paralelas, é dito **grafo simples**.*

Outros termos também são usados no estudo de grafos, portanto, torna-se importante a abordagem de suas definições.

Definição 1.3. Atribuiremos o termo **multigrafo** a todo grafo que contiver arestas paralelas e o termo **pseudografo** a todo grafo que possuir ao menos um laço.

Definição 1.4. Se um grafo possui excepcionalmente um único vértice, será classificado como **grafo trivial**.

Definição 1.5. Um grafo constituído apenas por arestas é um **grafo vazio** e um grafo em que não se verificam vértices é dito **grafo nulo**.

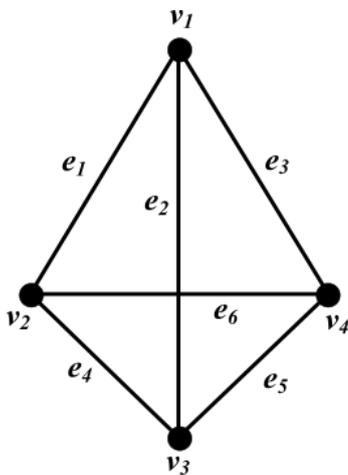


Figura 1.6: Representação Gráfica de um Grafo Simples.

Por conseguinte, analisando os grafos do Exemplo 1.1, poderemos então afirmar que ele não é um grafo simples, pois possui tanto laço, já que $\psi(e_1) = v_1v_1$, como também arestas paralelas, a saber $\psi(e_2) = v_1v_2$ e $\psi(e_3) = v_1v_2$. Como consequência, o grafo citado é tanto um pseudografo como um multigrafo. Em contrapartida, como não é possível detectar arestas paralelas e nem laços no grafo da Figura 1.6, podemos então classificá-lo como grafo simples.

Outro tipo de grafo que é de suma importante em nosso estudo são os grafos completos.

Definição 1.6. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **completo** se é simples e se existe uma aresta associada a cada par de vértice.

Neste caso, se o conjunto V possui uma quantidade n de elementos, o grafo G pode ser representado por K_n .

Vejamos então, na Figura 1.7, alguns exemplos de grafos da forma K_1 , K_2 , K_3 e K_4 .

Teorema 1.1. O número de arestas de um grafo completo $G = (V, E)$ é

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

onde $n = |V|$.

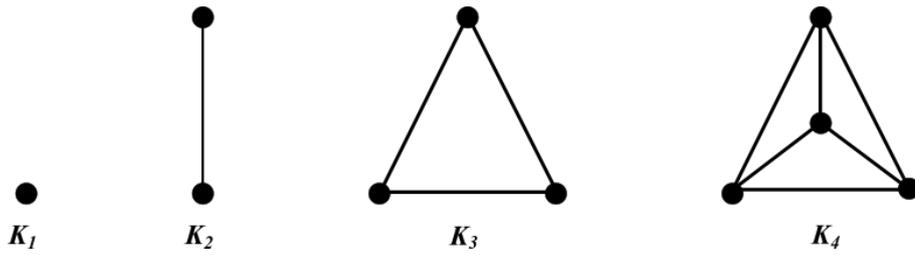


Figura 1.7: Representação dos Grafos K_1, K_2, K_3 e K_4 .

Demonstração. A prova será feita pelo Princípio de Indução Matemática.

Seja G_n um grafo que contém n vértices. Consideremos o caso trivial, isto é, o grafo G_1 . Neste caso, como existe apenas um vértice, é impossível definir uma aresta que não seja um laço. Então, para $n = 1$, segue

$$\frac{n(n-1)}{2} = 0.$$

Supondo que a hipótese é verdadeira para G_n , onde $n \geq 1$, considere o grafo G_{n+1} . Seja v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em G_{n+1} e não em G_n . O número máximo de arestas no grafo G_{n+1} é igual ao número máximo de arestas de G_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértice de G_n . Como esse número de ligações é igual ao número de vértices em G_n , tem-se que o número de arestas de G_{n+1} é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} + n &= \frac{n(n-1) + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Em algumas situações é conveniente distinguir partes de um grafo, isto é subconjuntos de vértices e arestas. Tais subconjuntos serão denominados de subgrafos. Para tanto, temos a seguinte definição:

Definição 1.7. Diz-se que um grafo $H = (W, F)$ é um subgrafo, ou subestrutura, de um grafo $G = (V, E)$, quando $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$ e ψ_H é uma restrição de ψ_G ao conjunto W , ou seja, se $e \in F$ então $\psi_H(e) = \psi_G|_F(e)$, isto é:

$$\begin{aligned} \psi_G|_F : F &\longrightarrow V \times V \\ e &\longmapsto \psi_G|_F(e) = \psi_G(e) \end{aligned}$$

Observação 1.1. Vale ressaltar que H também é definido como um grafo e que, necessariamente, todas as ligações existentes em H estão presentes em G .

Sob estas condições, um grafo $H = (W, F)$ será denominado de **subgrafo próprio** de $G = (V, E)$ se $W \subseteq V$ e $F \subset E$ ou $W \subset V$ e $F \subseteq E$, e uma aresta $(u, v) \in F$ somente se $u, v \in W$. Enquanto um grafo $H = (W, F)$ será denominado de **subgrafo parcial** de $G = (V, E)$ se $W = V$ e $F \subseteq E$ e uma aresta $(u, v) \in F$ somente se $u, v \in W$. A Figura 1.8 expõe um grafo qualquer.

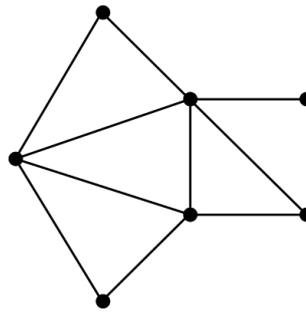
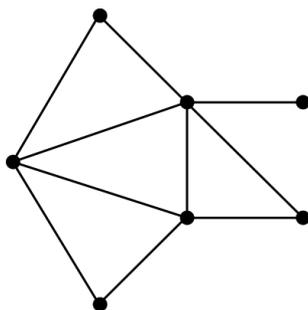
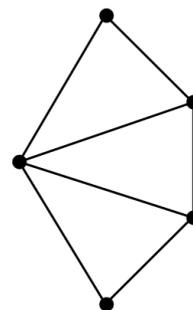


Figura 1.8: Grafo qualquer.

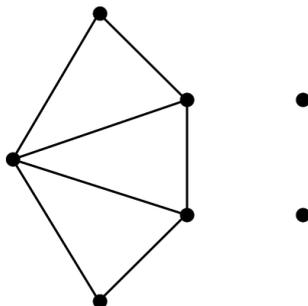
Vejamos agora alguns subgrafos do grafo da Figura 1.8. Na Figura 1.9(a) temos $W = V$ e $F = E$, logo H é um subgrafo parcial de G . Já na Figura 1.9(b), H é um subgrafo próprio de G , uma vez que $W \subset V$ e $F \subset E$. Agora, como nas Figuras 1.9(c) e 1.9(d) tem-se $W = V$ e $F \subset E$, estes são exemplos de subgrafos parciais próprios.



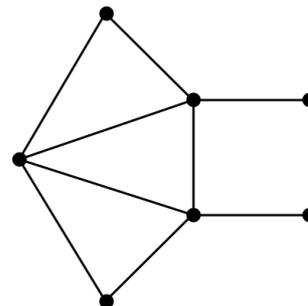
(a) Subgrafo Parcial.



(b) Subgrafo Próprio.



(c) Subgrafo Parcial Próprio.



(d) Subgrafo Parcial Próprio.

Figura 1.9: Propriedades de pertinência de Grafos.

Um critério opcional para a denominação de subgrafos releva a sua forma de indução. Se um subgrafo de G for obtido por um **subconjunto de arestas e seus respectivos vértices**, ele

será denominado **induzido por arestas**, porém se um subgrafo de G pode ser obtido por um **subconjunto de vértices e suas respectivas arestas**, ele classifica-se como **induzido por vértices**.

Temos perante a Figura 1.10 a formação de um subgrafo oriundo de uma indução por arestas sobre um grafo $G = (V, E)$ qualquer. O conjunto indutivo é composto por todas as arestas de E a menos das arestas e_1, e_2, e_3 e e_4 . Logo, todas as demais arestas estão presentes no subgrafo formado e sempre que uma aresta é acrescida ao subgrafo, necessariamente, os seus vértices também serão incluídos. Na Figura 1.10(c) é possível notar o não aparecimento do vértice incidente as arestas e_3 e e_4 , já que nenhuma destas arestas está contida no conjunto de indução. Num subgrafo induzido por arestas, é inviável a existência de vértices isolados.

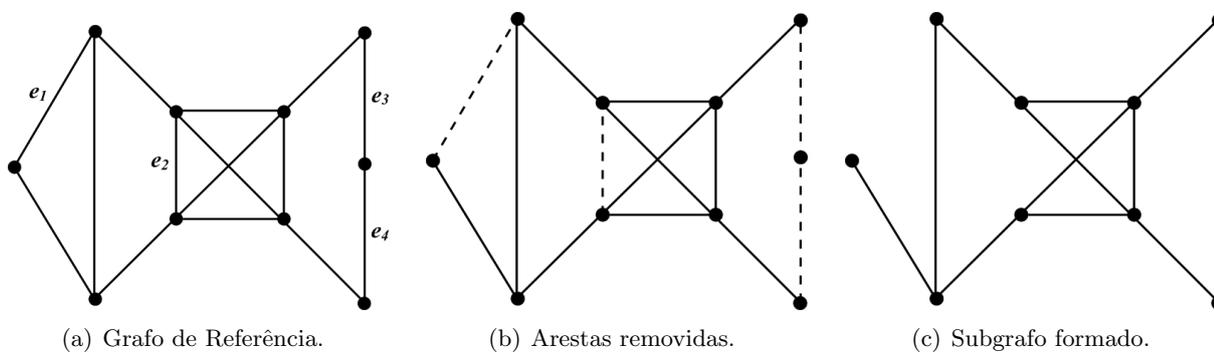


Figura 1.10: Formação de Subgrafo por indução de arestas.

Agora, com base na Figura 1.11 podemos analisar a obtenção de um subgrafo cuja formação se dá por uma indução de vértices. Através da retirada do vértice v destacado na Figura 1.11(a), é formado o conjunto de indução, caracterizado por $V \setminus v$. A Figura 1.11(b), exprime a retirada do vértice e de suas respectivas arestas e a Figura 1.11(c) o subgrafo obtido.

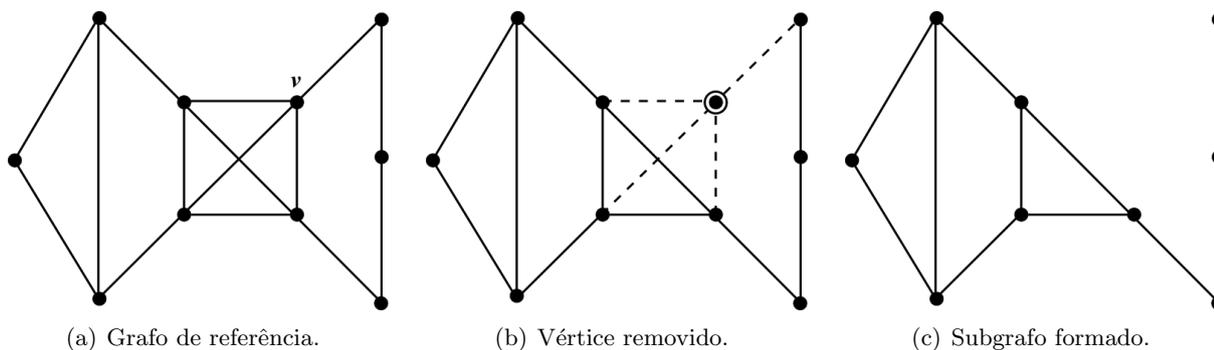


Figura 1.11: Formação de Subgrafo por indução de vértices.

Na indução por vértices, as arestas que são incidentes aos vértices contidos no conjunto de indução também estarão presentes no subgrafo formado. Obviamente, se um vértice não está contido no conjunto de indução, nenhuma das arestas que nele incidem pertencerão ao subgrafo desejado.

Observação 1.2. Se H é um subgrafo de G , então G também pode ser denominado um **supergrafo** de H .

1.4 Grafos Bipartidos, k-Partidos e Bipartidos Completos

Em determinados grafos é possível destacar certas características, fator pelo qual os diferenciam dos demais. Tais características podem ser encaradas como propriedades notáveis ou até mesmo servem para o uso indicativo em algumas modelagens. A exemplo e de uso relevante em nosso estudo, temos os grafos bipartidos.

Definição 1.8. Um grafo $G = (V, E)$ é dito **bipartido** quando seu conjunto de vértices V pode ser dividido em dois conjuntos V_1 e V_2 tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $V_1 \cup V_2 = V$ e somente existem arestas em G ligando algum vértice de V_1 com algum vértice de V_2 e vice-versa.

Exemplo 1.2. Seja $G = (V, E)$ um grafo, com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, tais que:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= v_1v_4, & \psi(e_2) &= v_1v_6, \\ \psi(e_3) &= v_3v_2, & \psi(e_4) &= v_3v_6, \\ \psi(e_5) &= v_5v_2, & \psi(e_6) &= v_5v_4, \end{aligned}$$

cuja representação é dada na Figura 1.12.

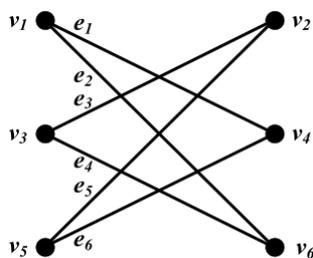


Figura 1.12: Grafo Bipartido.

Agora, tomando os conjuntos $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ e $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$, podemos então afirmar que G é um grafo bipartido, pois $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $V_1 \cup V_2 = V$.

Em termos práticos, uma partição de vértices em um grafo constitui-se por toda e qualquer divisão nos vértices deste grafo, isto é, um agrupamento de vértices, definida de acordo com um determinado critério. Um critério comumente utilizado em partições é o da *não adjacência*, critério este que fora utilizado no Exemplo 1.2.

Assim sendo, sempre que um conjunto de vértices de um grafo for dividido em dois conjuntos ou partições tais que nelas não se identifiquem a presença de vértices adjacentes, estaremos tratando de grafos bipartidos. Para o caso da divisão de vértices em k conjuntos de vértices disjuntos, o grafo é dito *k -partido*.

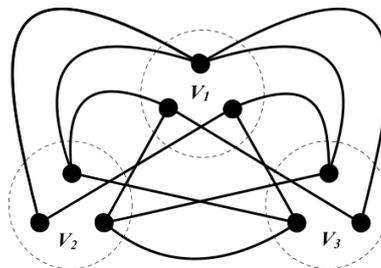


Figura 1.13: Grafo 3-partido.

Exemplo 1.3. Dado $G = (V, E)$ um grafo qualquer cuja representação é abordada na Figura 1.13. O seu conjunto V de vértices foi particionado nos três conjuntos disjuntos V_1, V_2 e V_3 . Como $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$ e $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$, concluímos que G é um grafo 3-partido ou tripartido.

Definição 1.9. Um grafo G *bipartido* é dito *completo* se cada vértice do conjunto V_1 , com p vértices é *adjacente a todos* os q vértices do conjunto V_2 e vice-versa. Neste caso, o grafo será representado pela notação $K_{p,q}$.

Exemplo 1.4. Os grafos da Figura 1.14 são ambos bipartidos completos. Em 1.14(a), o conjunto V_1 é formado pelos vértices v_1, v_3 e v_5 e o conjunto V_2 pelos vértices v_2, v_4 e v_6 , logo este grafo é do tipo $K_{3,3}$. Enquanto em 1.14(b), a bipartição é descrita por $V_1 = \{v_2, v_4\}$ e por $V_2 = \{v_1, v_3, v_5\}$, sendo este um grafo do tipo $K_{2,3}$.

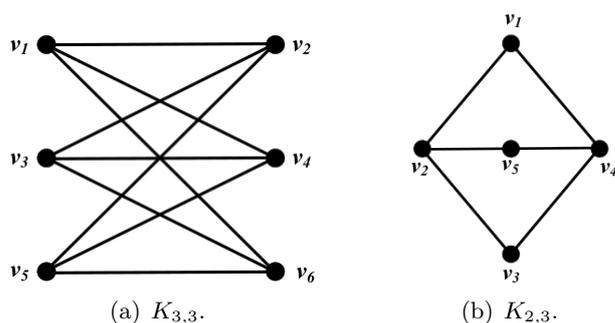


Figura 1.14: Exemplo de Grafos Bipartido Completo.

Proposição 1.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido completo, então existe apenas um bipartição do seu conjunto de vértices.

Demonstração. Suponhamos que V_1, V_2 e $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ sejam duas bipartições do grafo G . Fixemos um vértice $v \in V$ qualquer. Agora, sem perda de generalidade, suponhamos que $v \in V_1$. Como, por hipótese, G é um grafo bipartido completo, temos:

$$V_1 = \{u \in V; uv \notin E\} \quad e \quad V_2 = \{w \in V; vw \in E\}$$

Por outro lado, como $\overline{V}_1, \overline{V}_2$ é também uma bipartição de G e supondo, sem perda de generalidade, que $v \in \overline{V}_1$, então:

$$\overline{V}_1 = \{u \in V; uv \notin E\} \quad e \quad \overline{V}_2 = \{w \in V; vw \in E\}.$$

Portanto, temos que $V_1 = \overline{V}_1$ e $V_2 = \overline{V}_2$. □

1.5 Grau do Vértice e Grafos k-regulares

No estudo dos grafos, ao se analisar o número de arestas incidentes em um determinado vértice, intrinsecamente estaremos observando outra característica de grande significância, cuja definição é abordada a seguir.

Definição 1.10. *O grau de um vértice v , denotado por $d(v)$, em um grafo não direcionado é igual ao número de arestas incidentes no vértice.*

Nesta explanação, quando todos os vértices de um grafo disporem de um grau finito, tal grafo é denotado como grafo finito.

Observação 1.3. *Denota-se por $\delta(G)$ o valor do grau **mínimo** no grafo G e por $\Delta(G)$ o seu valor do grau **máximo**. Em termos de notação, podemos escrever:*

$$\delta(G) = \min\{d(v); v \in V\} \quad e \quad \Delta(G) = \max\{d(v); v \in V\}.$$

Observação 1.4. *Em todo laço, seu número de arestas será contado duas vezes.*

Exemplo 1.5. *Com base na representação gráfica de um grafo G qualquer (Figura 1.15), determinaremos o grau de cada vértice, $\delta(G)$ e $\Delta(G)$.*

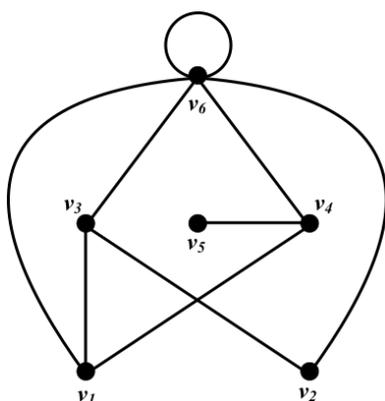


Figura 1.15: Representação Gráfica.

Com o auxílio de sua representação gráfica, torna-se simples definir o grau de cada vértice. A ver,

$$\begin{aligned} d(v_1) &= 3, & d(v_4) &= 3, \\ d(v_2) &= 2, & d(v_5) &= 1, \\ d(v_3) &= 3, & d(v_6) &= 6. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos afirmar que $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 6$.

Por conseguinte, temos a definição formal para grafos regulares.

Definição 1.11. Um grafo G é dito regular de grau k ou k -regular se cada vértice de G possuir grau k .

Alguns nomes particulares são utilizados para grafos regulares de graus 3 e 4. São eles, respectivamente, o *cúbico* e o *quartic*. Temos exemplos de três famosos grafos regulares (Figura 1.16).

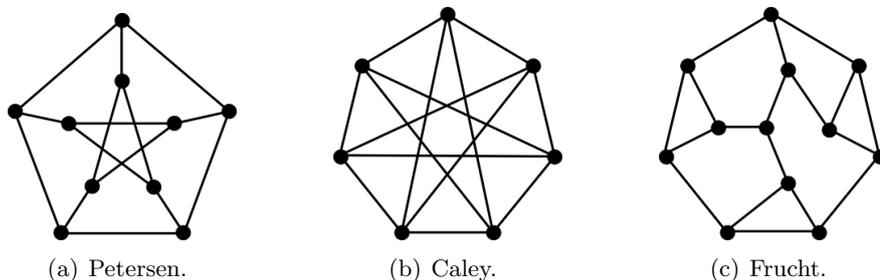


Figura 1.16: Grafos Regulares.

Definição 1.12. A relação entre o número m de arestas e o número n de vértices, muitas vezes denominada **densidade** de G , pode ser medida pela razão $\varepsilon(G)$, tal que:

$$\varepsilon(G) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}d_M(G),$$

onde, $d_M(G)$ é denominada **média dos graus de G** , e é obtida pela expressão:

$$d_M(G) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V} d(v_i)$$

Através desta definição, podemos demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 1.2. A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo.

Demonstração. Pela Definição 1.12, temos que:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}d_M(G) = \varepsilon(G) \tag{1.1}$$

e,

$$d_M(G) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V} d(v_i) \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1), segue:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V} d(v_i),$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2m. \tag{1.3}$$

□

Corolário 1.3. Em todo grafo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Demonstração. Pelo Teorema 1.2, temos que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do mesmo, ou seja, tal soma pode ser representada por um número par. Deste modo, a equação (1.3) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j \in P} d(v_j) + \sum_{k \in I} d(v_k) = 2m, \tag{1.4}$$

onde P representa o conjunto dos vértices de G que possuem grau par e I o conjunto dos vértices de G que possuem grau ímpar. Necessariamente, o primeiro membro da equação (1.4) é par, visto

que seu segundo membro o é. Por outro lado, a primeira parcela do primeiro membro constitui-se por uma soma de graus pares de vértices, sendo portanto par, o que acarreta em a segunda parcela também ser par. Ora, esta parcela possui apenas vértices de graus ímpares. Logo, a soma de vértices de graus ímpares é par. \square

1.6 Grafos e Matriz de Adjacência

Visualmente, o estudo de um grafo por meio de sua representação geométrica assiste o leitor de maneira consideravelmente conveniente. Em contrapartida, computacionalmente, esta forma de representação ainda não é viável. Para tanto, nesta seção, utilizaremos estruturas de dados diferentes para tal exibição, são elas as chamadas matrizes de **adjacência**.

Definição 1.13. *Seja $G = (V, E)$ um grafo, com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada de ordem n é denominada **matriz de adjacência** de G quando:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \psi(e_k) = ij \in E, \\ 0, & \text{se } \psi(e_k) = ij \notin E, \end{cases}$$

tal que $1 \leq k \leq m$.

Resumidamente, os dados estruturais desta matriz de ordem n correspondem a quantidade nula quando não existir ligação entre dois de seus vértices e a quantidade unitária sempre que houver uma presença de arestas entre dois vértices dados.

Exemplo 1.6. *Seja $G = (V, E)$ um grafo, com $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, de modo que:*

$$\begin{array}{llll} \psi(e_1) = v_1v_4, & \psi(e_2) = v_2v_3, & \psi(e_3) = v_1v_3, & \psi(e_4) = v_3v_6, \\ \psi(e_5) = v_4v_6, & \psi(e_6) = v_4v_5, & \psi(e_7) = v_1v_6, & \psi(e_8) = v_2v_6, \end{array}$$

cuja representação gráfica se apresenta na Figura 1.17.

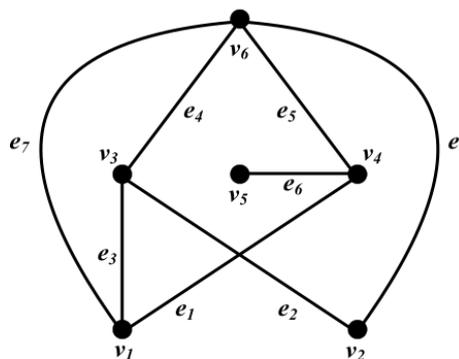


Figura 1.17: Representação Gráfica.

Como o grafo em exercício é de ordem $n = 6$, este terá sua matriz de adjacência também de ordem 6, representa por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação 1.5. Não havendo distinção entre os dois sentidos possíveis de uma aresta qualquer, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, pode-se afirmar que a matriz de adjacência de um grafo simples é uma matriz simétrica. E mais, os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 0 (“zero”) conforme a inexistência de laços ($a_{ii} = 0$).

1.7 Isomorfismo

Essencialmente, o isomorfismo trata-se de um mapeamento relacionando objetos de acordo com suas propriedades ou operações. Na matemática, os isomorfismos são utilizados para a extensão de conhecimentos de um fenômeno para outro, isto é, se dois objetos quaisquer são isomorfos, então toda e qualquer propriedade que é mantida pelo isomorfismo e que é válida para um primeiro objeto, necessariamente será válida para o segundo objeto.

Sob esta vertente, apresentaremos nesta seção um abordagem envolvendo isomorfismo entre grafos. De antemão, torna-se relevante mencionar a igualdade entre eles.

Definição 1.14. Dois grafos não orientados $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ são iguais se, e somente se $V = W$, $E = F$ e $\psi_G = \psi_H$.

Por conseguinte, numa comparação, é comum nos depararmos com conjuntos distintos de vértices e arestas, todavia, em muitos casos é possível estabelecer uma relação que identifique tais conjuntos. Esta relação dá margem a definição de isomorfismo entre grafos. A ver,

Definição 1.15. Dois grafos não orientados $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ são **isomorfos** se existir uma função bijetiva f de V em W , tal que dois vértices u e v são adjacentes em G se, e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H . Deste modo, a função f é denotada como isomorfismo entre G e H .

Observação 1.6. Denotaremos por $G \sim H$ sempre que quisermos afirmar que os grafos G e H são isomorfos.

Exemplo 1.7. A Figura 1.18 aborda a representação gráfica de dois grafos $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$, donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ e $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$. Afirmação: $G \sim H$.

De fato, para a função f , basta tomar:

$$\begin{array}{ll} f(v_1) = w_1, & f(v_5) = w_5, \\ f(v_2) = w_2, & f(v_6) = w_6, \\ f(v_3) = w_4, & f(v_7) = w_8, \\ f(v_4) = w_3, & f(v_8) = w_7. \end{array}$$

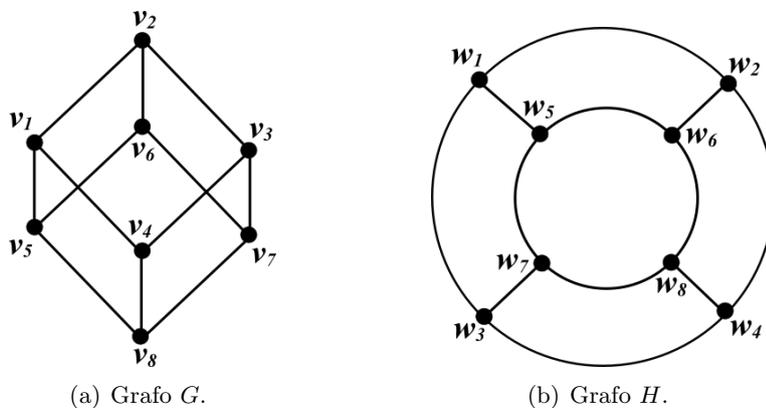


Figura 1.18: Grafos isomorfos.

temos então uma correspondência biunívoca entre V e W . Agora, note que

$$\begin{array}{lll} v_1 \text{ e } v_2, & v_2 \text{ e } v_6, & v_5 \text{ e } v_6, \\ v_1 \text{ e } v_4, & v_3 \text{ e } v_4, & v_5 \text{ e } v_8, \\ v_1 \text{ e } v_5, & v_3 \text{ e } v_7, & v_6 \text{ e } v_7, \\ v_2 \text{ e } v_3, & v_4 \text{ e } v_8, & v_7 \text{ e } v_8. \end{array}$$

são vértices adjacentes em G e que os pares de vértices

$$\begin{array}{lll} f(v_1) = w_1 \text{ e } w_2 = f(v_2), & f(v_2) = w_2 \text{ e } w_6 = f(v_6), & f(v_5) = w_5 \text{ e } w_6 = f(v_6), \\ f(v_1) = w_1 \text{ e } w_3 = f(v_4), & f(v_3) = w_4 \text{ e } w_3 = f(v_4), & f(v_5) = w_5 \text{ e } w_7 = f(v_8), \\ f(v_1) = w_1 \text{ e } w_5 = f(v_5), & f(v_3) = w_4 \text{ e } w_8 = f(v_7), & f(v_6) = w_6 \text{ e } w_8 = f(v_7), \end{array}$$

$$f(v_2) = w_2 \text{ e } w_4 = f(v_3), \quad f(v_4) = w_3 \text{ e } w_7 = f(v_8), \quad f(v_8) = w_7 \text{ e } w_8 = f(v_7).$$

também são adjacentes em H . Portanto, como a relação de adjacência entre os vértices é preservada, podemos afirmar que $G \sim H$.

Observando o grau dos vértices dos grafos do Exemplo 1.7, percebe-se que todo elemento de V possui grau 3 e que este mesmo grau é mantido em todo elemento de W . Neste sentido, apresentaremos a seguinte proposição, que faz garantir tal afirmação.

Proposição 1.2. *Num isomorfismo, os graus dos vértices são preservados.*

Demonstração. Sejam $G = (V, E)$ e $H = (W, F)$ dois grafos isomorfos. Assim, existe uma função bijetiva f de V em W tal que a relação de adjacência entre os vértices é mantida. Agora, tome $v \in V$, com $d_G(v) = k$ e seja $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in V$ o conjunto de todos os vértices adjacentes a v , podemos concluir que os vértices $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$ são adjacentes ao vértice $f(v)$ em H . Mas, pela Definição 1.15, não existem outros vértices de H adjacentes a $f(v)$. Portanto, $d_H(f(v)) = k$. \square

Exemplo 1.8. *Os grafos da Figura 1.19 não são isomorfos.*

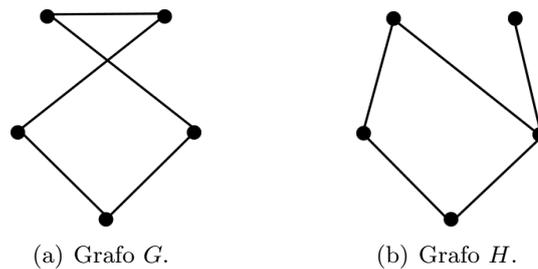


Figura 1.19: Grafos não isomorfos.

Analisando os grafos G e H , é perceptível que ambos possuem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas, entretanto, o grafo H possui um vértice cujo grau é 1 enquanto todos os vértices do grafo G possuem grau 2. Logo, pela Proposição 1.2, os grafos G e H não são isomorfos.

1.8 Passeio ou Percurso

Nesta seção, apuraremos nosso estudo introduzindo a definição de passeio bem como suas demais definições a variar de acordo com suas particularidades. Sequencialmente, abordaremos as noções de comprimento e distância entre vértices e finalizaremos com a demonstração de um teorema de grande relevância.

Definição 1.16. Dado um grafo G , intitularemos de **passeio** ou **percurso** a toda sequência finita e não vazia

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k,$$

de modo que $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ e $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ e a aresta e_i incide sobre os vértices v_{i-1} e v_i , tal que $1 \leq i \leq k$. Os vértices v_0 e v_k são, respectivamente, o vértice inicial e final e os demais são denominados por vértices intermediários do passeio.

Na literatura, outra maneira de descrever o mesmo passeio P é afirmar que este é um passeio entre os vértices v_0 e v_k , ou simplesmente utilizar a notação (v_0, v_k) – passeio. E mais, um passeio será dito **aberto** quando $v_0 \neq v_k$ e **fechado** quando a igualdade for verificada. Particularmente, no estudo de grafos simples, como suas arestas são determinadas pelos seus extremos, poderemos determinar um passeio pela sequência sucessiva de seus vértices, isto é, $P = v_0 v_1 \dots v_k$.

Exemplo 1.9. Conforme destacado na Figura 1.20, o passeio P é dado pela sequência $P = v_1 e_1 v_2 e_2 v_5 e_3 v_4 e_4 v_3 e_5 v_2 e_2 v_5 e_3 v_4$. Nota-se também que este é um passeio aberto, visto que $v_1 \neq v_4$.

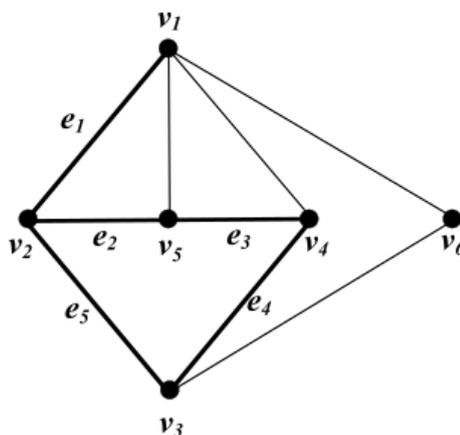


Figura 1.20: Passeio.

No exemplo apresentado, percebe-se a repetição de alguns vértices e de algumas arestas, para o caso em que isso não acontece, temos um outra classificação. Veremos então as definições a seguir:

Definição 1.17. Uma **trilha** é um passeio sem repetição de arestas.

Observação 1.7. Um circuito ou trilha fechada é uma trilha com no mínimo uma aresta, de modo que $v_0 = v_k$.

Definição 1.18. Um **caminho** é uma trilha sem repetição de vértices.

Observação 1.8. Um ciclo ou caminho fechado é um passeio com no mínimo uma aresta onde não existem nem arestas e nem vértices repetidos, a menos dos vértices inicial e final.

Exemplo 1.10. Analisando o grafo da Figura 1.21, podemos extrair não somente um circuito identificado pela sequência $P = v_2v_3v_5v_2v_1v_3v_6v_5v_4v_2$, como também os ciclos $P_1 = v_1v_2v_3$, $P_2 = v_2v_4v_5$ e $P_3 = v_3v_5v_6$.

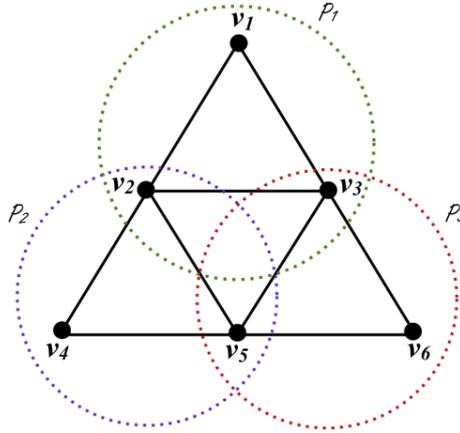


Figura 1.21: Grafo G .

Uma outra maneira de lidar com passeios é promover a união entre eles. Tal união é tratada na proposição a seguir:

Definição 1.19. Sejam $P_1 = u_0e_1u_1e_2\dots e_ku_k$ e $P_2 = v_0f_1v_1f_2\dots f_mv_m$ dois passeios de um grafo G tais que $u_k = v_0$, sua união, denotada por $P_1 + P_2$, é dada pelo passeio

$$P_1 + P_2 = u_0e_1u_1e_2\dots e_ku_kf_1v_1f_2\dots f_mv_m.$$

Exemplo 1.11. Ainda com base na Figura 1.21, ao unirmos o passeio $P_2 = v_2v_4v_5$ e $P_3 = v_3v_5v_6$, uma vez que o vértice v_5 se faz presente em ambos os passeios, obtemos o passeio P' , denotado por:

$$P' = P_2 + P_3 = v_2v_4v_5v_6v_3.$$

Na seção 1.2, definimos como tamanho m de um grafo a cardinalidade de seu conjunto E , ou seja, o tamanho corresponde a quantidade de arestas contidas em determinado grafo. Aproximando tal definição no nosso estudo de passeio, chegamos então a definição de comprimento.

Definição 1.20. Seja P um passeio qualquer de um grafo G , o comprimento de P , denotado por $comp(P)$, é exatamente a quantidade de arestas que o compõe (com eventual repetição). Particularmente, se o passeio for um caminho, seu comprimento coincide com seu número de arestas.

Agora, tomando como suporte a definição de comprimento de passeio, torna-se possível enunciar a definição de distância entre dois vértices. Dada a seguir:

Definição 1.21. A distância entre um par de vértices u e v , denotada por $d(u, v)$, corresponde ao caminho de menor comprimento capaz de ligar u e v . No caso de o caminho não existir, então $d(u, v) = \infty$.

Exemplo 1.12. Sejam G o grafo cuja representação é posta na Figura 1.22 e $P = v_1v_4v_5v_6$ um passeio desse grafo. Como este passeio é também um caminho, o seu comprimento é exatamente igual ao seu número de arestas, isto é, $\text{comp}(P) = 3$.

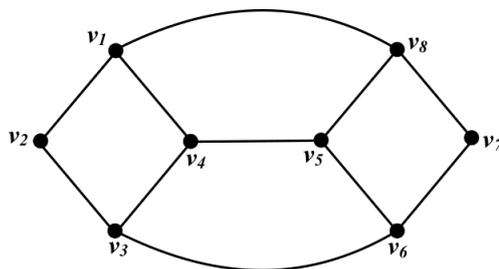


Figura 1.22: Grafo G .

Agora, sobre G , se quisermos a distância entre os vértices v_2 e v_6 , basta tomarmos o passeio $P' = v_2v_3v_6$, pois este é o caminho de menor comprimento entre v_2 e v_6 , ou seja, $d(v_2, v_6) = 2$.

Na seção 1.4, foi realizado um estudo sobre grafos bipartidos. Agora, acrescentando os definições de ciclos e comprimento entre vértices a este estudo, podemos tratar de um teorema de grande relevância no estudo de grafos bipartidos.

Observação 1.9. Ao realizarmos a demonstração do próximo teorema estaremos utilizando o conceito de grafo conexo, cuja definição será dada apenas no próximo capítulo. Entretanto, de antemão, um grafo G é dito conexo se, para qualquer $u, v \in V$, existe um (u, v) -caminho entre eles.

Teorema 1.4. Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se, e somente se, não contém qualquer ciclo de comprimento ímpar.

Demonstração. (\implies) Sejam $G = (V, E)$ um grafo bipartido e V_1 e V_2 sua bipartição. Se G é desprovido de ciclos, nada temos a provar. Agora, seja $C = v_0v_1\dots v_k$ um ciclo de G . Sem perda de generalidade, suponhamos que $v_0 \in V_1$. Como a aresta $v_0v_1 \in E$ e por hipótese G é bipartido, então $v_1 \in V_2$. Apropriando-se do mesmo argumento, segue que $v_2 \in V_1$ e, por indução, $v_{2i} \in V_1$

e $v_{2i+1} \in V_2$. Por outro lado, os vértices v_0 e v_k são adjacentes, o que implica que $v_k \in V_2$. E, portanto, k é da forma $2i + 1$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Mas, como $\text{comp}(C) = k + 1$, temos que C é um ciclo de comprimento par.

(\Leftarrow) Seja G um grafo que não contém ciclo ímpar e que possui, no mínimo, dois vértices. Sem perda de generalidade, suponhamos G conexo, pois caso contrário consideraríamos cada componente conexa separadamente. Agora, tomemos $u \in V$ qualquer e definamos os seguintes conjuntos:

$$X = \{x \in V; d(u, x) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V; d(u, y) \text{ é ímpar}\}.$$

Vamos mostrar que (X, Y) é uma bipartição de G . Suponhamos que v e w são dois vértices contidos no conjunto X e sejam P o (u, v) -caminho de menor comprimento e Q o (u, w) -caminho de menor comprimento. Denotaremos por u_1 o último vértice comum aos caminhos P e Q .

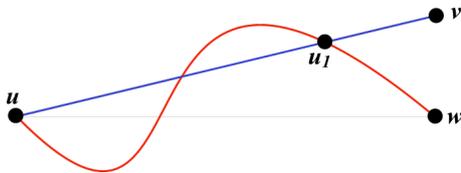


Figura 1.23: Ilustração do Teorema 1.4.

Como P e Q são os caminhos mais curtos de u a v e de u a w , respectivamente, então serão os caminhos mais curtos de u a u_1 , e portanto, possuem o mesmo comprimento. Por outro lado, os caminhos P e Q possuem comprimento par, logo os comprimentos das (u_1, v) -seção P_1 de P e (u_1, w) -seção Q_1 de Q , necessariamente, possuem a mesma paridade. E assim, segue que (v, w) -caminho $P^{-1}Q_1$ é de comprimento par. Se v é adjacente a w , então $P^{-1}Q_1v$ deveria ser de comprimento ímpar, o que contraria nossa hipótese. Portanto, não existem dois vértices de X adjacentes. Analogamente, mostra-se que não existem dois vértices de Y que são adjacentes. Logo, (X, Y) é uma bipartição de G .

□

Capítulo 2

Conexidade

Inicialmente, neste capítulo, faremos uma abordagem acerca da conexidade de um grafo, entendendo esta definição a conexidade entre vértices. Em seguida, discutiremos as componentes conexas de um grafo, bem como as arestas de corte, vértices de corte, subconjuntos de articulação e conjunto de corte.

2.1 Componentes Conexas e Conexidade

A conexidade é um tema que se faz presente em uma gama de aplicações importantes, a citar as comunicações, o planejamento das produções, as logísticas e os transportes. Nestes casos, ela representa um métrica de segurança e uma falha em qualquer um de seus vértices proporciona uma interrupção, ou seja, uma desconexão. Para simular uma falha, é suficiente fazer a remoção de um vértice qualquer.

A noção de **conexidade** está vinculada a viabilidade de transição de um vértice a outro por meio de ligações presentes num determinado grafo. Tais ligações geram uma estrutura contínua, isto é, todos os seus vértices estarão ligados entre si devido a estas ligações.

Para ilustrar tal situação, consideremos o grafo $G_0 = (V, E)$ e, sucessivamente, adicionaremos ligações a ele. Ver Figura 2.1.

Observe que nos grafos que antecedem G_3 não é possível a transição de um vértice dado a qualquer outro vértice. Em outras palavras, existe pelo menos um caso em que tal transição não poderá ser efetivada. Em contrapartida, nos grafos G_3 e G_4 esta transição é sempre viável.

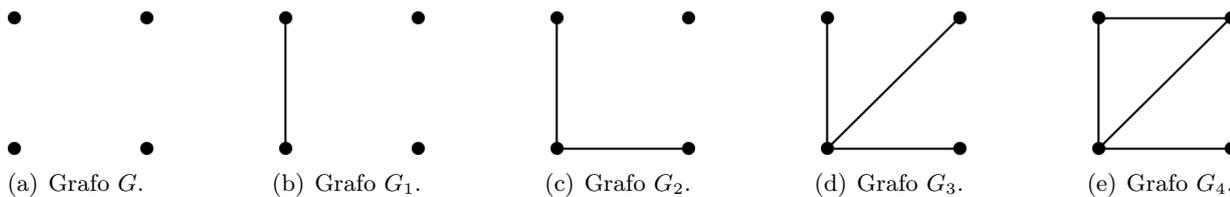


Figura 2.1: Conexidade em Grafos.

Temos, por conseguinte, a definição formal de conexidade de grafos.

Definição 2.1. Um grafo $G = (V, E)$ é dito conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário, é dito desconexo ou não conexo.

Observação 2.1. Um grafo contendo apenas um vértice v é conexo, uma vez que admitamos a existência de um caminho de comprimento nulo, ou melhor, um caminho que não possui arestas.

Neste sentido, segue que apenas os grafos G_3 e G_4 são conexos (Figura 2.1). Agora, admitindo que a conexidade de um grafo está entrelaçada com a existência de um caminho entre os seus vértices, é prudente abordar a definição de conexidade entre vértices através da extensão da Definição 2.1.

Definição 2.2. Seja $G = (V, E)$ um grafo, diremos que os vértices u e v são conectados se existe um caminho em G unindo u e v .

Outro fato de tamanha importância é a existência de um caminho desde que tenhamos a existência de um passeio. Sua fundamentação é feito através do lema a seguir.

Lema 2.1. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $u, v \in V$. Se existe um passeio em G , então existe um caminho em G .

Demonstração. Sejam P um passeio de G , u e v seus vértices inicial e final, respectivamente. Considere os seguintes casos:

Se $comp(P) = 0$, temos um passeio sem nenhuma aresta, e conseqüentemente, o caminho entre u e v também tem comprimento igual a 0.

Se $comp(P) > 0$, temos que considerar o seguinte. Se o passeio de u a v não possuir nenhum vértice que tenha sido visitado duas vezes, então, pelas Definições 1.17 e 1.18, ele corresponde a um caminho entre u e v . Agora, seja w um vértice intermediário de P . Se w tiver sido visitado

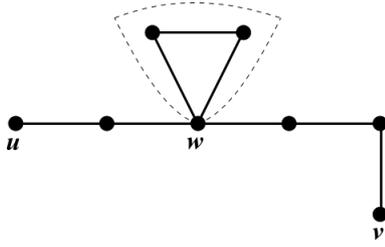


Figura 2.2: Retirada da aresta w .

mais de uma vez, podemos então remover todas as arestas e todos os vértices existentes entre as duas aparições de w . E mais, se houver a existência de outros vértices que tenham sido visitados mais de uma vez, é suficiente repetir o processo. Deste modo, teremos um passeio mais curto onde cada vértice aparece uma única vez. E, portanto, existe um caminho entre u e v .

□

Proposição 2.1. *A conexidade entre pares de vértices em um grafo G é uma relação de equivalência em V , ou seja, para todo $u, v, w \in V$, as seguintes propriedades são válidas:*

- i) u está conectado consigo mesmo (reflexiva);*
- ii) Se u está conectado a v , então v está conectado a u (simétrica);*
- iii) Se u está conectado a v e v está conectado a w , então u está conectado a w (transitiva).*

Demonstração. Sejam u, v e w vértices de V .

i) Todo vértice está conectado consigo mesmo, basta admitir a existência de um caminho nulo entre u e u (Observação 2.1).

ii) Se u está conectado a v , então existe em G um caminho unindo u e v e denotaremos este caminho por $P = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$, onde $v_0 = u$ e $v_n = v$. Por outro lado, observa-se o caminho $P' = v_n e_n v_{n-1} \dots e_1 v_0$, o que permite afirmar que v está conectado a u .

iii) Se u está conectado a v e v está conectado a w , então existem os respectivos caminhos $P' = u_0 e_1 u_1 \dots e_n u_n$ e $P'' = v_0 f_1 v_1 \dots f_m v_m$, onde $u_0 = u$, $u_n = v_0 = v$ e $v_m = w$. Mas, pela Proposição 1.19, temos que a união é dada pelo passeio $P' + P'' = u_0 e_1 u_1 \dots e_n u_n f_1 v_1 \dots f_m v_m$. Porém, em consonância ao Lema 2.1, a existência de um passeio acarreta na existência de um caminho, e portanto, o vértice u está conectado ao vértice w . □

Agora, baseado na proposição anterior, podemos afirmar que a conexidade entre pares de vértices de um grafo é uma relação de equivalência em V , o que permite particionar o conjunto V em classes

de equivalência de modo que dados $u, v \in V$, eles pertencerão a mesma classe de equivalência se, e somente se, o vértice u estiver conectado ao vértice v . Deste modo, denotaremos por componentes conexas os subgrafos induzidos por essas classes de equivalência. Formalmente, temos:

Definição 2.3. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Uma componente conexa C de G é um subgrafo $C = (W, F)$, tal que $W \subset V$ e $F \subset E$ e:*

- C é conexo;
- Para todo $u \in V \setminus W$ e para todo $v \in W$, a aresta $uv \notin E$.

Um fator de valor relevante é a quantidade de componentes conexas de um grafo dado. Então, desde que seja dado um grafo G , atestamos por $C(G)$ como sendo o número de componentes conexas de G . E pela definição anterior, temos que G é um grafo conexo se $C(G) = 1$. Do contrário, G é um grafo desconexo.

Exemplo 2.1. *Analizando a Figura 2.3, é possível verificar que as classes de equivalência sobre V do grafo $G = (V, E)$ são dadas por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ e $\{v_{10}\}$. Portanto, G possui três componentes conexas, isto é, $C(G) = 3$, o que o torna um grafo desconexo.*

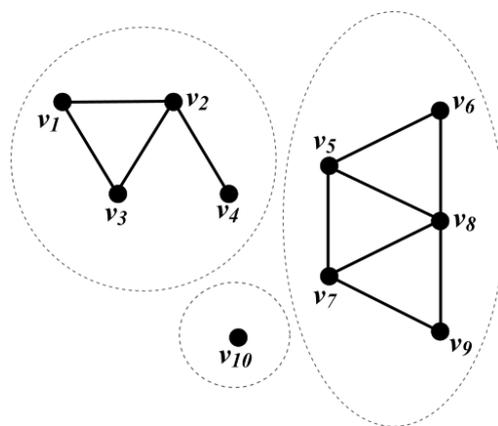


Figura 2.3: Grafo G .

Ainda analisando a Figura 2.3, podemos simplesmente fazer a remoção de um vértice ou até mesmo de uma aresta de uma componente conexa e notar que esta pode continuar conexa ou não. Por exemplo, tomando a componente conexa $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e ao removermos qualquer uma das arestas v_1v_2 , v_2v_3 ou v_1v_3 , a componente mantém-se conexa. Entretanto, optar por remover a aresta v_2v_4 (Figura 2.4(b)) ou simplesmente o vértice v_2 (Figura 2.4(c)), a componente torna-se desconexa.

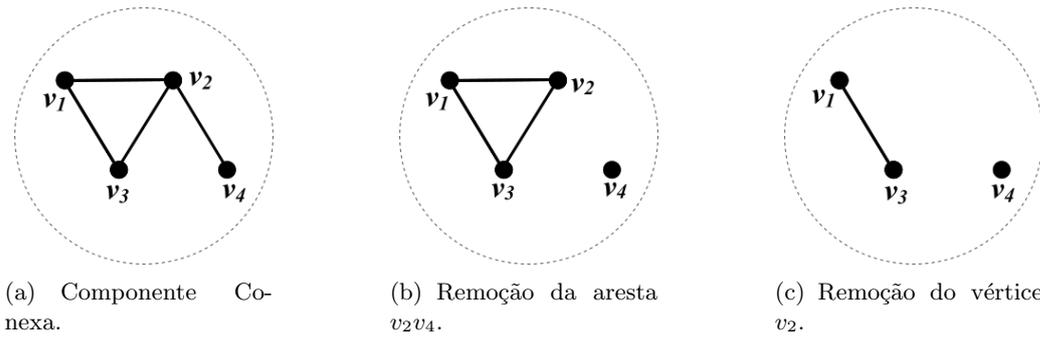


Figura 2.4: Arestas e Vértices de Corte.

Para vértices e arestas que são capazes de dividir em mais componentes, atribuímos os termos de vértices de corte e arestas de corte, cujas definições seguem de maneira mais explícita a seguir:

Definição 2.4. Dado um grafo $G = (V, E)$, um vértice $v \in V$ é dito vértice de corte ou ponto de articulação de G , sempre que $G \setminus v$ possuir um número de componentes conexas superior a G .

Definição 2.5. Dado um grafo $G = (V, E)$, uma aresta $e \in E$ é dita aresta de corte ou ponte de G , sempre que $G \setminus e$ possuir um número de componentes conexas superior a G .

Observação 2.2. Se o grafo $G = (V, E)$ for conexo, a remoção do vértice v (da aresta e) torna $G \setminus v$ ($G \setminus e$) desconexo.

Teorema 2.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Uma aresta $e \in E$ é uma aresta de corte se, e somente se, não está contida em nenhum ciclo.

Demonstração. (\implies) Seja $e \in E$ uma aresta de corte, tais que suas extremidades sejam os vértices x e y . Como, por hipótese, G é conexo, segue que $G \setminus v$ é desconexo (Observação 2.2), e possui duas componentes conexas e disjuntas, o que garante que o vértice x não está conectado ao vértice y em $G \setminus e$. Agora, por contradição, suponhamos que a aresta e esteja contida em um ciclo $C = xey_1y_2 \dots y_kx$. Desta forma, $C_1 = ye_1y_2 \dots y_kx$ é um caminho em $G \setminus e$, contradizendo o fato dos vértices x e y não estarem na mesma componente conexa em $G \setminus e$.

(\impliedby) Seja $e \in E$ uma aresta que não esteja contida em nenhum ciclo de G , tais que suas extremidades sejam os vértices x e y . Afirmação: Não pode haver um caminho ligando x e y em $G \setminus e$. De fato, a existência de um caminho $C = xe_1x_2 \dots x_ny$ em $G \setminus e$ implica a existência de um ciclo $C_1 = xe_1x_2 \dots x_nyex$ em G , contrariando então a nossa hipótese. \square

Contudo, não serão todos os tipos de grafos em que a retirada de um simples vértice ou uma única aresta os tornarão desconexos, entretanto, cabe avaliar se existe um subconjunto de vértices

ou arestas cuja remoção torna um determinado grafo desconexo. As duas definições subsequentes esclarecem esses casos.

Definição 2.6. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $S \subset V$. O conjunto S será dito um subconjunto de articulação em G se ao retirarmos S , obtemos um subgrafo desconexo de G .*

Definição 2.7. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $T \subset E$. O conjunto T será dito um conjunto de corte em G se ao retirarmos T , obtemos um subgrafo desconexo de G .*

Observação 2.3. *Trataremos apenas com subconjuntos de articulação minimal e com conjuntos de corte minimal. Cabe ressaltar que um conjunto minimal é aquele conjunto que não possui subconjunto próprio.*

Exemplo 2.2. *Seja G um grafo conexo cuja representação gráfica se dá na Figura 2.5(a). Temos destacado na Figura 2.5(b) um subconjunto de articulação S em G . Após a retirada desse subconjunto, nos deparamos com um grafo $G - S$ desconexo (Figura 2.5(c)). Já na Figura 2.5(d), esboçamos o grafo G dando ênfase ao conjunto de corte T e logo após a sua remoção, nos defrontamos com o grafo desconexo $G - T$.*

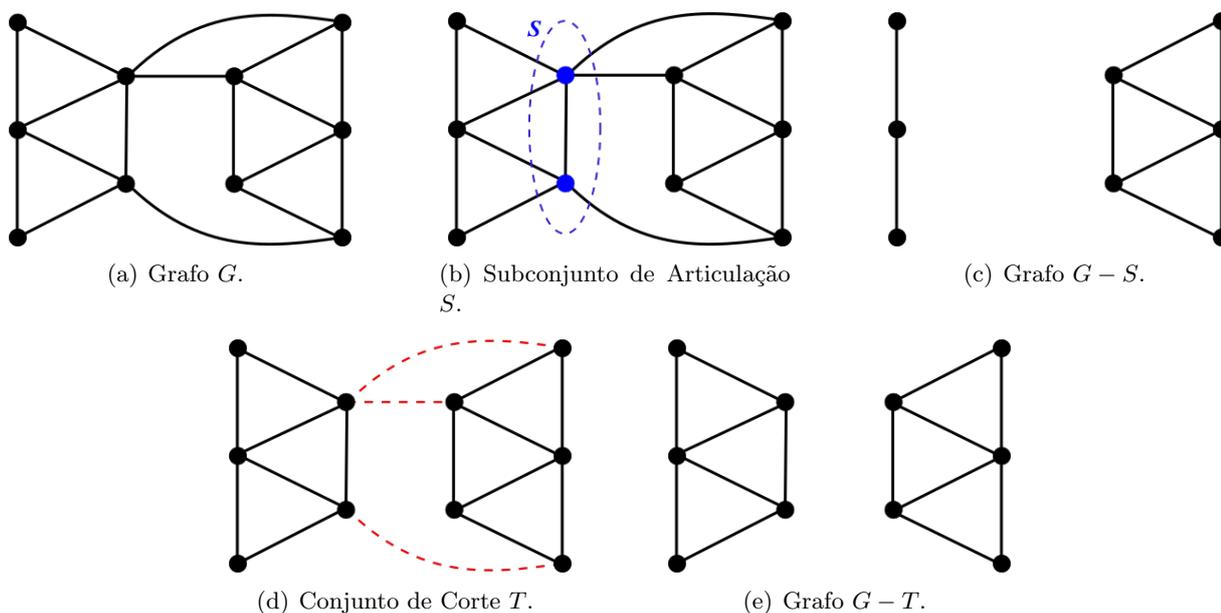


Figura 2.5: Subconjunto de Articulação e Conjunto de Corte.

Capítulo 3

Grafos Planares

No presente capítulo trabalharemos com um grupo bastante seletivo de grafos, os famosos grafos planares. Na discussão será possível perceber que nem todo grafo possui uma representação planar e que uma tarefa mais complexa ainda é garantir a sua planaridade. Assim sendo, abordaremos resultados e faremos uso destes para podermos garantir que um determinado grafo é não planar. Para tanto, a argumentação estará voltada à relação existente entre o número de vértices, faces e arestas de um grafo, podendo destacar a exímia Fórmula de Euler para grafos planares.

3.1 Grafos Planos e Curvas de Jordan

O famoso problema das três casas é uma das ferramentas motivacionais para abordar a planaridade de grafos. O problema é o seguinte:

“Conexões, oriundas numa mesma profundidade, das companhias de água, telefone e energia, deverão se dirigir à três casas. O mapa de abastecimento imprime um grafo com seis vértices e nove arestas, como visto na Figura 3.1. Seria possível descruzar as arestas do grafo? Ou melhor, é possível redesenhá-lo em um plano?”

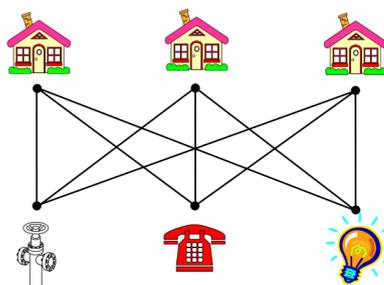


Figura 3.1: Problema das três fontes de suprimento.

Previamente, a resposta é não! Contudo, uma explicação coerente será dada do decorrer do capítulo. Agora, apresentaremos a definição formal desse grafo.

Definição 3.1. Um grafo plano é um grafo desenhado em uma superfície plana, de maneira que duas quaisquer de suas arestas se encontrem apenas em suas extremidades (considerando que elas se encontrem).

Um grafo planar é todo grafo isomorfo a um grafo plano, isto é, pode ser redesenhado na forma de um grafo plano.

Exemplo 3.1. O grafo exposto na Figura 3.2(a) é um grafo planar, que por sua vez é isomorfo ao grafo plano visto em 3.2(b).

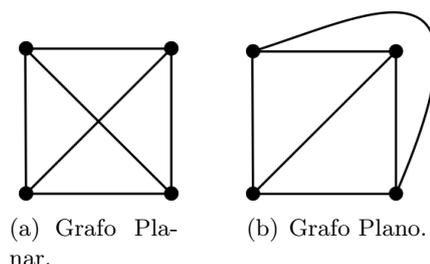


Figura 3.2: Grafo planar isomorfo ao seu grafo plano.

Para uma discussão acerca dos grafos planares faz-se necessário um breve estudo sobre *Curva de Jordan*. A ver,

Definição 3.2. Uma curva de Jordan no plano é uma curva contínua que não intercepta a si própria, cuja origem e término coincidem (isto é, uma curva simples).

Definição 3.3. Seja J uma curva de Jordan no plano. Denotamos por $\text{int } J$ como a parte do plano que é interna à J . Analogamente, denotamos por $\text{ext } J$ a parte do plano que é externa à J . O conjunto de pontos que pertencem a J são excluídos do $\text{int } J$.

Teorema 3.1 (da Curva de Jordan). Qualquer curva simples fechada J no plano particiona-o em duas partes (uma das quais é limitada a outra ilimitada).

Observação 3.1. Embora seja intuitivamente óbvio, O Teorema da Curva de Jordan torna-se bastante complexo quando se quer abordar uma prova formal (ver [9]). Para tanto, vamos admiti-lo como válido.

Em outras palavras, o Teorema da Curva de Jordan revela que se uma determinada curva J é de Jordan e sejam x e y , respectivamente, pontos de $\text{int } J$ e $\text{ext } J$, então qualquer linha (reta ou curva) incidente em x e y intercepta J em algum de seus pontos. A ilustração pode ser analisada na Figura 3.3.

Uma das consequências do Teorema da Curva de Jordan é o fato de que, às custas de suas arestas, um grafo plano fragmenta o plano em um número de regiões, denominadas *faces*. Cada face é obtida por meio de curvas simples fechadas, formadas pelas arestas do grafo. Mais precisamente, se x é um ponto do plano que não pertence ao grafo plano, então a face desse grafo plano contendo x é definida como o conjunto de todos os pontos que, mediante uma linha (reta ou curva), não interceptam qualquer uma de suas arestas e nenhum de seus vértices.

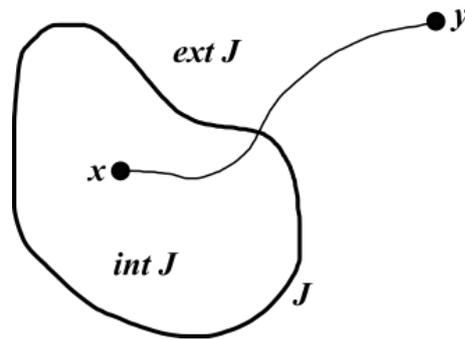


Figura 3.3: Ilustração do Teorema da Curva de Jordan.

3.2 Fórmula de Euler

Muito embora seja possível identificar o montante de vértices e arestas de um grafo por meio de sua definição, a quantidade de faces pode vir a ser algo um pouco mais complexo. A princípio, para podermos fazer esta identificação o grafo precisa ser planar e até o presente instante o único argumento discutido para determinarmos sua planaridade e seu número de faces foi a possibilidade do grafo ser desenhado em uma superfície plana de modo que duas de suas arestas não se encontrem a menos de suas extremidades. Com o propósito de aumentar esta complexidade poderíamos fazer a seguinte pergunta: O total de faces de um grafo está relacionado com alguma representação deste grafo no plano? A solução desta indagação se faz presente na Fórmula de Euler perante o Teorema 3.1, onde explicita que o quantitativo de faces está exclusivamente relacionado com o quantitativo de vértices e arestas e não com sua forma de representação.

Teorema 3.2 (Euler). *Se G é um grafo conexo planar com m arestas, n vértices e f faces, então*

$$n - m + f = 2. \tag{3.1}$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre o número de arestas.

Se $m = 0$, então $n = 1$ e $f = 1$. Assim,

$$1 - 0 + 1 = 2,$$

e, portanto, a equação (3.1) é satisfeita.

Se $m = 1$, então $n = 2$ e $f = 1$. Assim,

$$2 - 1 + 1 = 2,$$

e, portanto, a equação (3.1) é satisfeita.

Agora, suponhamos que a fórmula de Euler seja válida para qualquer grafo com p arestas, tal que $p < m$ e $m > 1$. Sejam G_m um grafo com m arestas e e uma aresta de G_m . Temos então dois casos a serem considerados:

i) A aresta e é de corte.

Se e é uma aresta de corte, temos então que o grafo $G_m - \{e\}$ possui duas componentes conexas C_1 e C_2 , que possuem, respectivamente, $m(C_1)$ e $m(C_2)$ arestas, de modo que $m(C_1)$ e $m(C_2)$ são menores do que m . Assim, pela hipótese indutiva, segue que,

$$\begin{aligned}n(C_1) - m(C_1) + f(C_1) &= 2, \quad e \\n(C_2) - m(C_2) + f(C_2) &= 2.\end{aligned}$$

Mas, por outro lado, $C_1 \cup C_2 \cup e = G_m$. Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}n(G_m) &= n(C_1) + n(C_2), \\m(G_m) &= m(C_1) + m(C_2) + 1 \quad e \\f(G_m) &= f(C_1) + f(C_2) - 1.\end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned}n(G_m) - m(G_m) + f(G_m) &= n(C_1) + n(C_2) - m(C_1) - m(C_2) - 1 + f(C_1) + f(C_2) - 1 \\&= n(C_1) - m(C_1) + f(C_1) + n(C_2) - m(C_2) + f(C_2) - 1 - 1 \\&= 2 + 2 - 2 \\&= 2.\end{aligned}$$

ii) A aresta e não é de corte.

Se a aresta e não é uma aresta de corte, pelo Teorema 2.1, ela está contida em algum ciclo de

G_m e sua remoção unifica duas faces do grafo G_m . Deste modo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}n(G_m) &= n(G_m - \{e\}), \\m(G_m) &= m(G_m - \{e\}) + 1 \text{ e} \\f(G_m) &= f(G_m - \{e\}) + 1.\end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned}n(G_m) - m(G_m) + f(G_m) &= n(G_m - \{e\}) - [m(G_m - \{e\}) + 1] + f(G_m - \{e\}) + 1 \\&= n(G_m - \{e\}) - m(G_m - \{e\}) - 1 + f(G_m - \{e\}) + 1 \\&= n(G_m - \{e\}) - m(G_m - \{e\}) + f(G_m - \{e\}) \\&= 2.\end{aligned}$$

Uma vez que a hipótese indutiva nos garante que $n(G_m - \{e\}) - m(G_m - \{e\}) + f(G_m - \{e\}) = 2$.

□

Futuramente, faremos uso desta fórmula para determinarmos critérios necessários para a planaridade de um grafo dado.

De uma maneira geral, decretar se um grafo é ou não planar não é uma tarefa de simples conclusão. Perante isto, a citada fórmula de Euler é um passo preliminar a fim de nos depararmos com condições algébricas auxiliadoras para este ofício. Contudo, ela por si só não é de muita utilidade, visto que precisamos antes de tudo que o grafo desfrute de uma representação planar para que assim possamos realizar o cálculo e determinar a quantidade de faces.

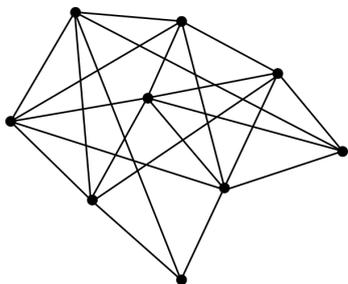


Figura 3.4: Grafo com 9 vértices e 21 arestas.

Analisando a Figura 3.4, utilizando a fórmula de Euler, e sabendo que este grafo é planar, concluiríamos que ele possui 14 faces. Entretanto, sem uma representação planar nada podemos afirmar.

A partir de agora, apresentaremos certas condições capazes de nos auxiliar na verificação de que um grafo é não planar, porém tratam-se apenas de condições necessárias e não suficientes

para a planaridade, podendo haver grafos não planares que as satisfaçam. Portanto, não temos apetrechos para que possamos afirmar que um grafo dado é, de fato, planar.

Definição 3.4. *O grau (ou comprimento) de uma face f de um grafo planar G é igual ao número de arestas da fronteira de f .*

Analisando a Figura 3.5, podemos observar que cada uma de suas quatro faces possuem grau 3, uma vez que a soma dos graus de todas as faces é $4 \cdot 3 = 12$, que é equivalente ao dobro do número de arestas. Isto ocorre exatamente porque as arestas são contabilizadas duas vezes, visto que uma única aresta se faz presente em faces adjacentes. Portanto, em grafos planares a soma dos graus de suas faces é $2m$.

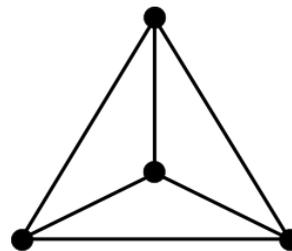


Figura 3.5: Grafo e suas faces.

Lema 3.1. *Sejam f o número de faces de um grafo planar conexo e m seu número de arestas, onde $m \geq 2$. Então,*

$$f \leq \frac{2}{3}m.$$

Demonstração. Observe que o grau de cada face deve ser composto por ao menos três arestas, pois estamos descartando a possibilidade de existência de arestas duplas ou laços. Desta forma, segue que o somatório dos graus das faces é, no mínimo, 3 vezes o número de faces, isto é $3f$. Porém, a soma dos graus das faces é dado por $2m$, logo:

$$2m \geq 3f \iff 3f \leq 2m \iff f \leq \frac{2}{3}m,$$

para todo $m \geq 2$. □

Utilizando como base a fórmula de Euler, é possível determinar outras relações de suma importância na identificação de que um grafo é não planar. A primeira delas apresentaremos agora.

Corolário 3.3. *Se G um grafo planar conexo com m arestas e n vértices, onde $n \geq 3$, então,*

$$m \leq 3n - 6.$$

Demonstração. Do Teorema 3.1, temos que:

$$n - m + f = 2. \tag{3.2}$$

Mas, por outro lado, o Lema 3.1 nos garante que:

$$f \leq \frac{2}{3}m. \quad (3.3)$$

Agora, substituindo (3.3) em (3.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} n - m + \frac{2}{3}m &\geq 2 && (\Leftrightarrow) \\ -\frac{1}{3}m &\geq 2 - n && (\Leftrightarrow) \\ m &\leq 3n - 6. \end{aligned}$$

□

Podemos inferir que a exclusiva dependência do número de arestas e do número de vértices deste corolário torna-o bastante pertinente pois estes itens são facilmente identificáveis. Cabe, mais uma vez, a ressalva de que se o grafo satisfaz esta condição não podemos afirmar nada sobre ele. Todavia, se a condição não é satisfeita, seguramente ele é não planar.

Exemplo 3.2. *O grafo K_5 é não planar. De fato, como já sabemos que ele possui 5 vértices e 10 arestas, segue que:*

$$10 \leq 3 \cdot (5) - 6 = 9,$$

o que é um absurdo! E, portanto, o grafo K_5 é não planar.

Para a segunda relação, adicionaremos mais uma condição. A ver,

Corolário 3.4. *Se G é um grafo planar conexo, com m arestas, n vértices ($n \geq 3$) e sem triângulos (isto é, sem ciclos de comprimento 3). Então*

$$m \leq 2n - 4.$$

Demonstração. Por hipótese, como o grafo G não apresenta ciclos de comprimento 3, necessariamente, todos os seus ciclos apresentam, no mínimo, quatro arestas, isto é, cada face é formada por quatro arestas ou mais. E, portanto, podemos representar a soma das arestas das faces por $4f$. Em vista disso, temos que:

$$4f \leq 2m. \quad (3.4)$$

Agora, manipulando a fórmula de Euler e a equação 3.4, obtemos:

$$\begin{aligned}4n - 4m + 4f &= 8 & (\Leftrightarrow) \\4n - 4m + 2m &\geq 8 & (\Leftrightarrow) \\-2m &\geq -4n + 8 & (\Leftrightarrow) \\m &\leq 2n - 4.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3. *O grafo $K_{3,3}$ é não planar. Antes de provarmos tal afirmação, note que ele possui 6 vértices e 9 arestas. Analisando-o sob a condição do Corolário 3.3, temos:*

$$9 \leq 3 \cdot (6) - 6 = 12,$$

Porém, a veracidade da sentença não nos dá aparato para afirmar algo sobre sua planaridade. Agora, averiguando em conformidade com o Corolário 3.4, segue:

$$9 \leq 2 \cdot (6) - 4 = 8,$$

o que é um absurdo! E, portanto, o grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Teorema 3.5 (Kuratowski). *Um grafo é planar se, e somente se, não contém subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.*

O teorema de Kuratowski traz condições necessárias e suficientes para planaridade de um grafo. Pela sua complexidade, omitiremos sua demonstração. Porém, o leitor interessado pode consultar [8].

Retomando o problema das companhias de abastecimento, podemos modelá-lo da seguinte forma: “Dado um grafo $K_{3,3}$, bipartido e completo, é possível redesenhá-lo num plano de modo que nenhuma de suas arestas se intercepte? Note que, com base no Exemplo 3.3, o grafo $K_{3,3}$ é não planar, logo é impossível esboçarmos o problema das companhias num plano sem que suas arestas se cruzem.

Capítulo 4

Coloração de Mapas e Grafos

Introduzimos este capítulo fazendo menção aos mapas e, a partir deles, adquirimos o seu grafo dual. Em seguida, veremos que efetuar uma coloração num grafo dado é simplesmente delegar cores aos seus elementos, sejam eles arestas ou vértices (em nosso estudo abordaremos apenas a coloração de vértices). Este método exige algumas delimitações como, por exemplo, não colorir vértices adjacentes com uma mesma cor. Finalizado o método, teremos conquistado “**uma**” coloração e não “**a**” coloração.

Dando prosseguimento, o capítulo gira em torno do Teorema das 4 Cores, que por sua vez garante que com o uso de apenas quatro cores poderemos colorir qualquer mapa, de modo que a delimitação acima é atendida. Embora aparentemente simples, após sua conjectura, este teorema durou mais de um século para ser demonstrado e, para tanto, exige longos cálculos desenvolvidos em computadores, ver [1].

Apresentaremos também um esboço das ideias realizadas por Kempe ao tentar demonstrar este grandioso teorema e a posterior sugestão de Heawood, que na verdade sugeriu a demonstração do Teorema das 5 Cores, cujas ideias estavam embasadas nas ideias de Kempe.

4.1 Os Mapas e o Grafo Dual

O interesse e a carência em compreender o mundo instigou o homem a buscar e criar formas para exprimir os principais aspectos gerais dos diversos tipos de paisagens e lugares, sejam eles naturais ou construídos. Diante desta necessidade, surgiu os registros sob forma de desenhos e escritos gráficos, originando assim a cartografia, isto é, ramo da geografia que objetiva agrupar um

conjunto de técnicas, métodos e arte remetidos a construção de mapas.

Os mapas retratam uma representação gráfica de um espaço real em uma superfície plana. Neles, é possível representar diferentes lugares do planeta, partindo do particular como um bairro, cidade ou estado e geral como um país, continente ou o mapa mundi.

Como forma de distinguir cada região que compõe um determinado mapa atribuiremos uma tonalidade a cada uma destas regiões, de maneira que regiões que possuem fronteira não sejam tingidas com uma mesma cor. Cabe frisar que regiões com apenas um ponto em comum não são consideradas vizinhas.

Exemplo 4.1. Na Figura 4.1, temos três mapas, cada um contendo, respectivamente, 6, 5 e 9 regiões que deverão ser coloridas utilizando a menor quantidade possível de cores.

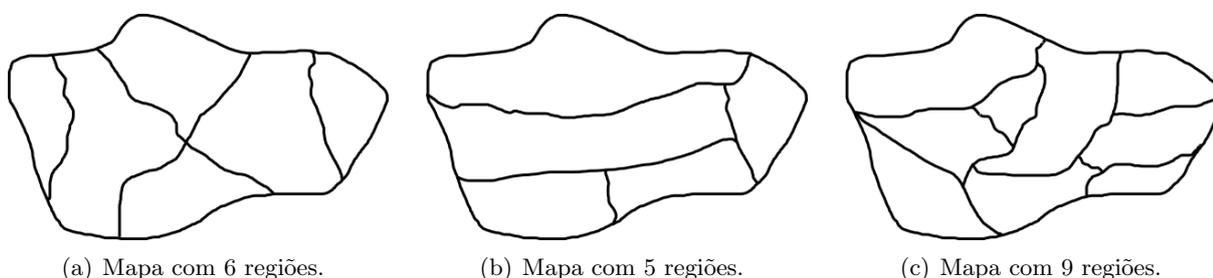


Figura 4.1: Conjunto de mapas sem coloração.

Agora, na Figura 4.2(a) podemos observar uma possível coloração para o mapa da Figura 4.1(a), utilizando assim apenas 2 cores. Como visto em 4.2(b), o mapa da Figura 4.1(b) não consegue ser colorido com apenas duas cores, sendo então necessário acrescentar mais uma cor para uma possível coloração. Já o mapa da Figura 4.1(c) não consegue ser colorido se utilizarmos apenas 3 cores, conforme Figura 4.2(c).

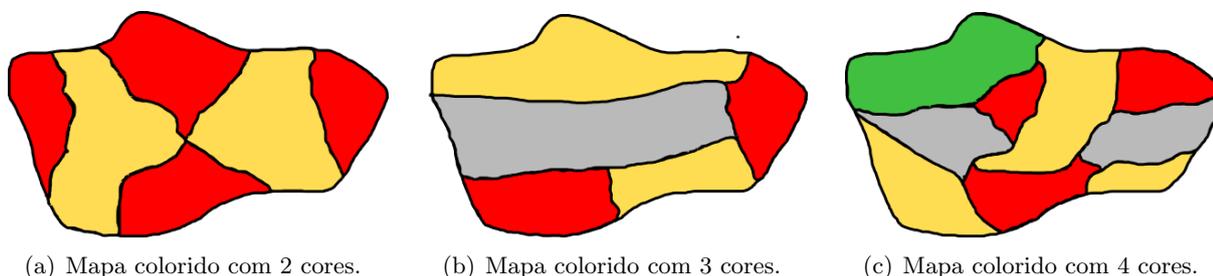


Figura 4.2: Conjunto de mapas coloridos.

Diante do Exemplo 4.1, podemos pensar na seguinte pergunta: Como ele se assemelha com a

teoria dos Grafos? Ou melhor, de que forma ele pode ser modelado fazendo uso da teoria dos Grafos? Responderemos as interrogações anteriores abordando uma forma clássica para esta modelagem, o chamado *grafo dual*.

Definição 4.1. *O grafo dual de um grafo planar G é um grafo em que os vértices representam as regiões a serem coloridas e as arestas existirão desde que as regiões que eles representam façam fronteiras.*

Se pensarmos, por exemplo, no grafo dual de um mapa de uma cidade dividida em bairros, o acesso entre os bairros seriam representados pelas arestas, enquanto cada bairro seria representado por um vértice. Na Figura 4.3, temos, respectivamente, o esboço de um mapa qualquer e seu mapa dual.

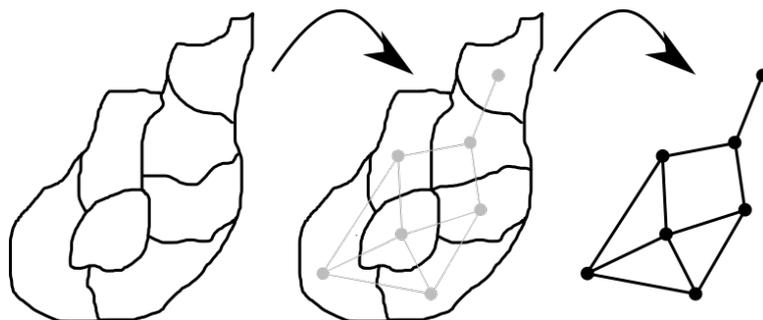


Figura 4.3: Mapa e seu grafo dual.

Sob este enquadramento, o problema de coloração de mapa torna-se equivalente ao problema de coloração de vértices, de modo que vértices adjacentes não admitam a mesma coloração.

4.2 Coloração de Grafos e Mapas

Conforme referido na introdução deste capítulo, o uso de apenas quatro cores é sempre suficiente para a coloração de qualquer mapa. Contudo, traçar um método para utilizar apenas este quantitativo de cores talvez não seja uma ação muito simples.

Na Figura 4.4, temos um mapa ainda sem coloração. Antes de dar continuidade a leitura, propomos ao leitor que tente colori-lo utilizando, no máximo, quatro cores.

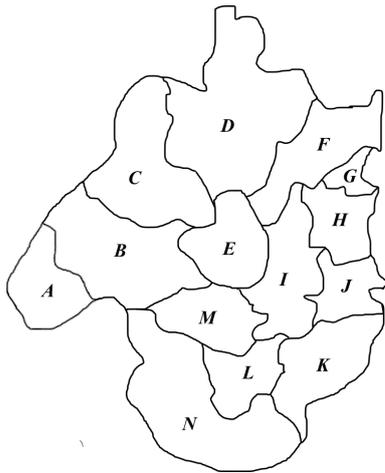


Figura 4.4: Mapa sem coloração.

Colorir as regiões de um mapa sem projetar um método pode vir a ser algo embaraçoso. Em muitos casos, poderemos nos deparar com uma situação semelhante a do mapa da Figura 4.5, onde as cores cinza, verde, amarelo e vermelho não poderão ser utilizadas para colorir a região “E”, pela simples razão de já terem sido aplicadas em regiões vizinhas. E, neste caso, seria indispensável a utilização de uma quinta cor.

Seria este um mapa em que o Teorema da 4 cores não funciona? O resultado é simples: Não! Uma coloração equivocada não é o bastante para “refutar” o resultado. A fim de procedermos com

uma coloração correta, além do grafo dual, faremos uso do método do algoritmo “guloso”, visto a seguir.

4.3 O método do Algoritmo Guloso

Para fazermos uso deste método, faz-se necessário por os vértices em uma sequência não crescente em conformidade com o seu grau. Ao optarmos por esta ordenação, estaremos inicialmente colorindo os vértices com mais restrições, isto é, aqueles que possuem mais vértices adjacentes.

- Algoritmo “guloso” para colorir os vértices de um grafo:

ENTRADA: Sequência não crescente dos vértices conforme o grau de cada vértice.

SAÍDA: Conjuntos T_1, T_2, \dots, T_k , em que vértices contidos num mesmo conjunto serão coloridos com a mesma cor e k determina a quantidade de cores que virão a ser utilizadas numa

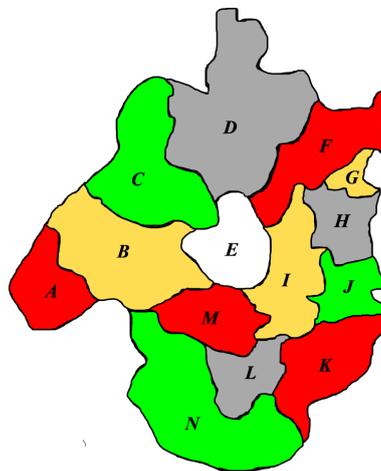


Figura 4.5: Mapa com coloração incorreta.

possível coloração.

1. Listamos, em ordem não crescente, os vértices do grafo dual de acordo com o grau de cada vértice. Caso haja empate, escolha-o de maneira arbitrária;
2. $i = 0$.
3. Se $V \neq \emptyset$ dirija-se ao passo 4 senão ao passo 10;
4. $i = i + 1$;
5. Gere um conjunto T_i contendo apenas o primeiro elemento v_j de V ;
6. Enquanto a sequência contiver vértice v_k não adjacente a qualquer vértice pertencente a T_i , faça:
7. Ponha v_k em T_i ;
8. Remova v_k de V ;
9. Retorne ao passo 3;
10. Fim. A saída serão os k conjuntos, onde T_1, T_2, \dots, T_k serão todos coloridos de cores diferentes.

Para aplicação do algoritmo, faremos uma possível coloração do mapa da Figura 4.4, utilizando somente as quatro cores: amarelo, cinza, verde e vermelho.

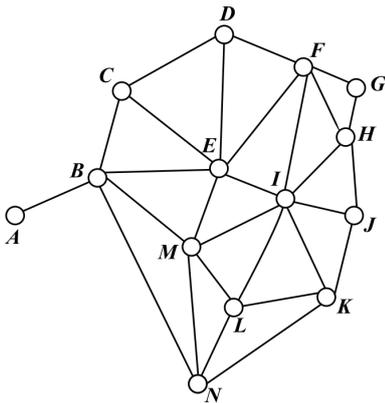


Figura 4.6: Grafo dual.

Inicialmente, na Figura 4.6, expomos o mapa dual e, a partir de agora, colorir os vértices desse grafo é o mesmo que colorir as regiões do mapa;

A sequência, por ordem não crescente de grau de vértice é:

$$V = \{I, E, M, F, B, L, H, K, N, C, D, J, G, A\}.$$

Em seguida, $i = 0$. Como $V \neq \emptyset$, temos $i = 1$. Geramos então o conjunto $T_1 = \{I\}$. Observe que os vértices B, N, C, D, G e A não são adjacentes ao vértice I , entretanto os vértices N, C, A são adjacentes ao vértice B . Logo,

$$T_1 = \{I, B, D, G\} \text{ e } V_1 = \{E, M, F, L, H, K, N, C, J, A\}.$$

Retornando ao passo 3, geraremos o conjunto $T_2 = \{E\}$. Note que os vértices L, H, K, N, J, A não são adjacentes ao vértice E , porém os vértices K, N são adjacentes ao vértice L e o vértice J é adjacente ao vértice H . Logo,

$$T_2 = \{E, L, H, A\} \text{ e } V_2 = \{M, F, K, N, C, J\}.$$

Repetindo o processo, temos:

$$T_3 = \{M, F, K, C\} \text{ e } V_3 = \{N, J\}.$$

E,

$$T_4 = \{N, J\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

Agora, atribuiremos a cor amarela ao conjunto T_1 , a cor cinza ao conjunto T_2 , a cor verde ao conjunto T_3 e a cor vermelha ao conjunto T_4 , o que está representado na Figura 4.7 através do grafo dual e o mapa original já coloridos.

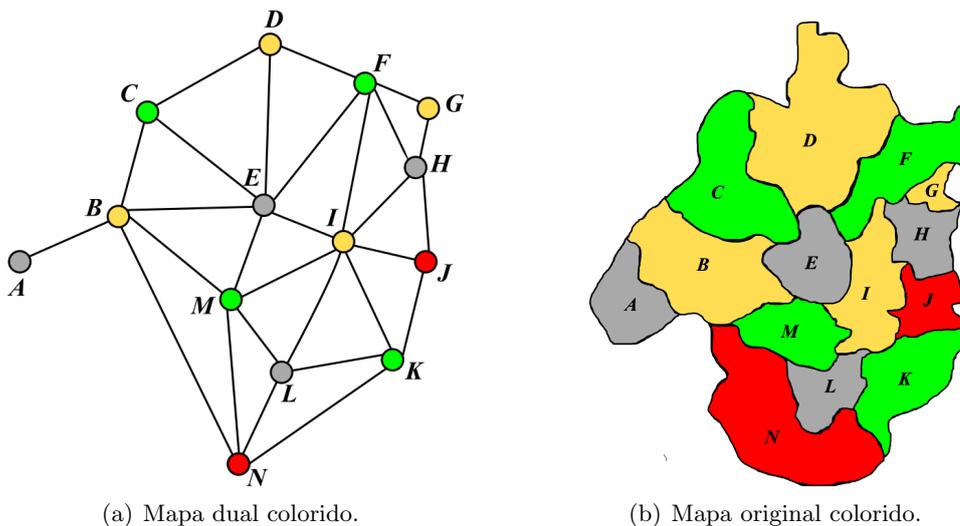


Figura 4.7: Grafo dual e mapa original coloridos.

Definição 4.2. O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G corresponde a menor quantidade de cores necessárias para colorir todos os vértices, de modo que vértices adjacentes não possuam a mesma cor. Se por ventura, o número de cores for exatamente igual a $\chi(G)$, diremos que a coloração é *ótima*.

Se analisarmos a coloração do mapa realizada na Figura 4.7(b), vemos que necessitamos utilizar as quatro cores, logo $\chi(G) = 4$, e esta é uma coloração dita ótima. Vale frisar que uma coloração de um mapa não corresponde a seu número cromático.

4.4 O Problema das 4 cores

Em 1852, o advogado, botânico e também matemático, Francis Guthrie, se depara com o problema de tentar colorir os distritos do mapa inglês sob a condição de que distritos que fizessem fronteira entre si jamais poderiam ser coloridos por uma mesma cor. Após longas reflexões e análises, chegou a conjectura de que para colorir qualquer mapa eram necessários dispor apenas de quatro cores. Com a ajuda do seu irmão caçula, Frederick Guthrie, a conjectura chega ao conhecimento do seu professor Augustus De Morgan. Sentindo-se bastante empolgado com o problema, encaminha-o, por meio de uma carta, ao Sir William Rowan Hamilton. Carta esta que se mantém conservada até os dias atuais em Dublin, nos arquivos do Trinity College. Diferentemente de De Morgan, Hamilton pouco se sentiu motivado e após quatro dias repostou alegando que não tão cedo iria dedicar-se a questão explanada.

Em tempos que se seguem, foi por meio das cartas de De Morgan que a comunidade científica adquiriu conhecimento sobre esta conjectura, abrindo margem a discussão e a alguns desenvolvimentos. Entretanto, após 1860, se considerado a carência de registros sobre o Problema das 4 Cores, por cerca de duas décadas, acredita-se que os matemáticos não manifestaram muito interesse. No que se segue, em 13 de julho de 1878, o problema veio à tona na seção de Matemática da Royal Society quando Arthur Cayley rebuscou se alguém havia determinado uma solução da Conjectura das 4 Cores. Cayley era um exímio advogado mas fazia uso de suas horas vagas dedicando-se ao estudo da matemática. Em 1879, Cayley exibiu uma pequena análise da conjectura nos *Proceedings of the Royal Geographical Society*.

Ainda em meados de 1879, um ex-aluno de Cayley do Trinity College de Cambridge, conhecido como Alfred Bray Kempe, expôs no American Journal of Mathematics uma demonstração do Teorema das 4 Cores. Neste momento, os olhos de vários matemáticos de renome se abriram e foram feitas muitas análises e até mesmo algumas recomendações com o propósito de melhorar a demonstração de Kempe. A partir deste marco, julga-se então demonstrado o Teorema das 4 Cores.

Passados 11 anos de divulgação da demonstração do Teorema das 4 Cores feita por Kempe, o matemático inglês Percy John Heawood publicou um artigo apontando um erro na demonstração de Kempe e suas lamentações por não conseguir apresentar uma demonstração alternativa. Contudo, pode dar sua contribuição no Teorema das 5 Cores, onde afirma que não mais de cinco cores são necessárias para colorir um mapa plano onde territórios que fazem fronteira devem ter cores distintas.

Por mais de um século, diferentes métodos foram desenvolvidos e solucionados sob a intenção de serem utilizados como pré-requisitos para se demonstrar o Teorema da 4 Cores. Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken expulsaram uma demonstração deste teorema. Assim que a notícia se expandiu, diversos professores interromperam suas aulas com o propósito de comemorar o tamanho feito. O entusiasmo encolheu quando foi divulgado a necessidade de uso mais de mil horas de computadores avançados para alcançar o objetivo, uma vez que torna a prova excessivamente extensa para uma verificação à mão bem como um possível erro de difícil percepção.

Nos dias atuais, pode-se afirmar que muito embora seja polêmica, a demonstração feita por Appel e Haken é bem aceita na comunidade matemática. O maior percalço no seu reconhecimento ainda é a vasta quantidade de cálculos inferidos em programas de computador. Cabe também ressaltar alguns matemáticos como Birkhoff, Heesch e John Koch que foram cruciais no desenvolvimento destes programas computacionais que auxiliaram a demonstração de Appel e Haken.

A notória dificuldade de se obter uma demonstração que não esteja vinculada ao uso de computadores é o fomento de alguns matemáticos. Ainda nos anos 90, em Zurique, no Congresso Internacional de Matemática, Paul D. Seymour em conjunto com outros matemáticos expõe uma demonstração mais simplificada do Teorema das 4 Cores. Ainda assim, mesmo levando em consideração a redução no volume de cálculos, a ferramenta computacional se fez presente. Todos aqueles que têm o programa a disposição e que conseguiram acompanhar os fundamentos teóricos poderão reproduzir a demonstração.

O desafio de se obter uma demonstração para o Teorema das 4 Cores que esteja desassociada ao uso de ferramentas computacionais se faz até os dias de hoje!

4.5 A demonstração de Kempe

No decorrer desta seção, faremos uma apresentação da demonstração do Teorema das 4 Cores elaborada por Kempe e publicada em 1879. De antemão, não será feita uma demonstração com todo rigor e sim uma apresentação de sua estrutura, onde serão expostos os principais conceitos e mecanismos em seu desenvolvimento.

Inicialmente, Kempe definiu os então chamados *mapas pentacromáticos*, isto é, são mapas que necessitam de pelo menos cinco cores para serem coloridos. À vista disso, é notório a equivalência entre demonstrar o Teorema das 4 Cores e a não existência de mapas pentacromáticos.

Levando em consideração as diversas particularidades apresentadas pelos mapas, Kempe argumentou que era suficiente mostrar a propriedade para os *mapas normais*. A priori, um mapa é dito normal desde que satisfaça as seguintes condições:

- i) Não contém nenhum país isolado dentro de outro, em outras palavras, um país que contenha um único vizinho;
- ii) Em cada ponto de fronteira se encontram, no máximo, três vizinhos.

Na Figura 4.8, temos o exemplo de dois mapas que não se encaixam nas condições de um mapa normal. Note que em 4.8(a) falha a condição i), enquanto em 4.8(b) a segunda condição não é verificada.

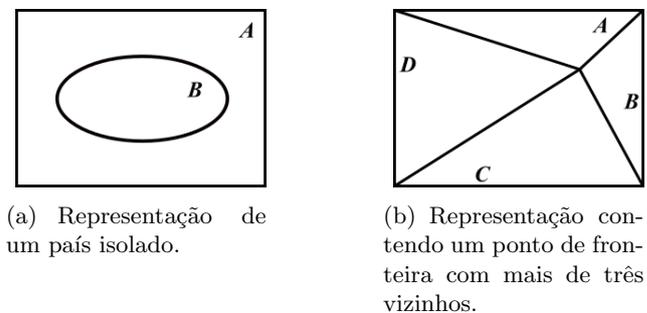


Figura 4.8: Representação de mapas não normais.

Sempre que passarmos para o grafo dual de um mapa e afirmamos que ele é normal, isto significa, por i), que todos os seus vértices apresentam grau maior que 1 e, por ii), que suas faces são todas triangulares.

Segundo Souza (2001), a demonstração de Kempe de que não existem mapas pentacromáticos pode estruturar-se na prova das quatro afirmações seguintes:

1. Se existir algum mapa pentacromático, então também existe um mapa pentacromático normal.
2. Se existe mapa pentacromático normal, então existe mapa pentacromático normal mínimo.
3. Qualquer mapa normal contém pelo menos um país com menos de seis países vizinhos.
4. Nenhum mapa pentacromático normal e mínimo pode conter um país com menos de seis vizinhos.

Por certo, fazendo uso do método da contradição, os itens 3 e 4 nos garantem a não existência de mapas pentacromáticos mínimos. E, em companhia da contrapositiva do item 2, mostraremos que não existem mapas pentacromáticos normais. Por conseguinte, adicionando o item 1 (contrapositiva), podemos afirmar que não existem mapas pentacromáticos.

Agora, vamos constatar cada um dos 4 passos realizados na demonstração de Kempe:

(1) Dado um mapa M , alcançaremos um mapa M' normal realizando os seguintes procedimentos:

- Retiramos todas as configurações que apresentam países isolados, conforme Figura 4.9.

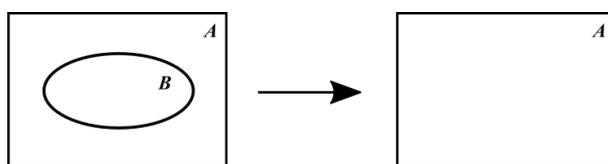


Figura 4.9: Suprimindo um país isolado.

- Acrescentaremos uma nova região em substituição a todo ponto de fronteira que apresente mais de três países vizinhos, conforme Figura 4.10.

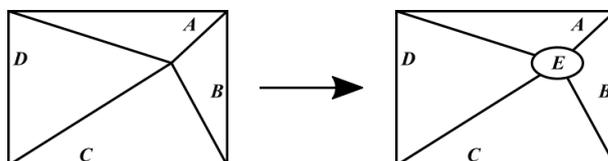


Figura 4.10: Substituindo ponto de fronteira com mais de 3 vizinhos.

Note que havendo a necessidade de executar este último procedimento, obteremos um novo mapa idêntico ao mapa inicial, a menos da nova região, que em nenhuma das hipóteses deve cobrir totalmente qualquer um dos países que compõem a fronteira. Este procedimento deverá ser repetido de acordo com a necessidade de eliminar todos os pontos de fronteira com mais de três países vizinhos.

Em contrapartida, para o caso de países isolados, estes deverão ser coloridos na mesma cor do país em que eles estiverem contidos, muito embora poderia ser colorido com qualquer outra cor utilizada no mapa. E, por conseguinte, a sua retirada não reduz o quantitativo de cores utilizadas em um determinado mapa.

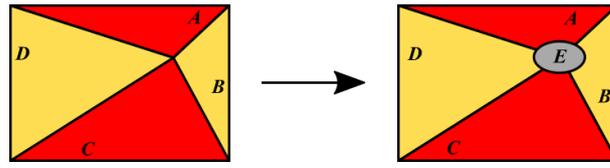


Figura 4.11: Coloração de um mapa ao eliminar um ponto de fronteira com mais de 3 vizinhos.

Deste modo, se o mapa original é pentacromático, o novo mapa será um mapa pentacromático normal.

(2) Para esclarecermos a segunda afirmação, cabe atentarmos ao que Kempe classificava como um mapa pentacromático normal mínimo, isto é, um mapa que contém o menor número de países em meio a todos os mapas pentacromáticos normais.

Logo, se existem mapas pentacromáticos normais, é suficiente selecionar aquele que possui o menor número de países.

(3) Dado um mapa normal, intitulemos por F_i como sendo o número de países que fazem fronteira com i países. Tomando f como o quantitativo de países de um determinado mapa, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 f &= F_2 + F_3 + F_4 + \dots & (\implies) \\
 f &= \sum_i F_i & (4.1)
 \end{aligned}$$

Levando em consideração que cada face ou país com um número i de vizinhos possui sua fronteira integrada por i arestas e que uma mesma aresta é comum a dois países vizinhos, automaticamente, estaremos contando cada aresta duas vezes. Assim, tomando por m o número de arestas, segue que:

$$\begin{aligned}
 2m &= 2F_2 + 3F_3 + \dots & (\implies) \\
 2m &= \sum_i iF_i & (\implies) \\
 m &= \frac{1}{2} \sum_i iF_i & (4.2)
 \end{aligned}$$

Sob outra ótica, como o mapa é normal, pelo que, em cada vértice incidem 3 arestas, e consi-

derando n como o número de vértices, obtemos:

$$\begin{aligned} 2m &= 3n & (\implies) \\ n &= \frac{2}{3}m \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora, pela Fórmula de Euler (equação (3.1)), e pelas equações (4.1), (4.2) e (4.3), temos:

$$\begin{aligned} n - m + f &= 2 & (\implies) \\ \frac{2}{3}m - \frac{1}{2} \sum_i iF_i + \sum_i F_i &= 2 & (\implies) \\ \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_i iF_i \right) - \frac{1}{2} \sum_i iF_i + \sum_i F_i &= 2 & (\implies) \\ \frac{1}{3} \sum_i iF_i - \frac{1}{2} \sum_i iF_i + \sum_i F_i &= 2 & (\implies) \\ 2 \sum_i iF_i - 3 \sum_i iF_i + 6 \sum_i F_i &= 12 & (\implies) \\ 6 \sum_i F_i - \sum_i iF_i &= 12 & (\implies) \\ \sum_i 6F_i - \sum_i iF_i &= 12 & (\implies) \\ \sum_i (6 - i)F_i &= 12 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Analisando a equação (4.4), temos que a soma é igual a 12, o que por sua vez nos garante que alguma das parcelas $(6 - i)F_i$ do primeiro membro é positiva para algum i , com $i < 6$. Neste sentido, podemos inferir a existência de pelo menos um país no mapa que faz fronteira com menos de 6 países vizinhos. Em outros termos, podemos então concluir que qualquer mapa pentacromático normal tem pelo menos uma das seguintes configurações:

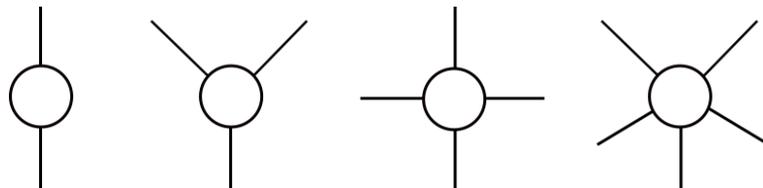


Figura 4.12: Conjunto inevitável de configurações de um mapa pentacromático normal.

Assim sendo, essas configurações estabelecem um conjunto *inevitável* de configurações de qualquer mapa normal, isto é, todo mapa pentacromático normal contém pelo menos uma destas configurações.

(4) No intuito de finalizar a demonstração do teorema, seria suficiente mostrar que nenhum mapa pentacromático normal mínimo pode conter um país com menos de seis vizinhos, posto que isso nega a terceira afirmação. Entretanto, foi neste momento que Kempe equivocou-se na sua demonstração apesar de que uma valiosa parte de seu raciocínio estava correta e que, sucessivamente, fora utilizada na demonstração proferida por Appel e Haken.

Para Kempe, uma configuração faz-se *reduzível* desde que ela não faça parte de um mapa pentacromático normal mínimo. E neste sentido, ele quis provar que todas as configurações presentes na Figura 4.12 eram reduzíveis. De outro modo, Kempe estaria mostrando que nenhum mapa pentacromático normal mínimo contém um país com menos de seis vizinhos.

O equívoco de Kempe esteve presente na prova de que a última configuração era reduzível!

Na intenção de mostrarmos que a primeira configuração da Figura 4.12 é reduzível, vamos supor, por contradição, um mapa M pentacromático normal e mínimo de modo que a referida configuração faça parte dele. Agora, seja M' o mapa herdado pela remoção do país A , conforme ilustração na Figura 4.13.

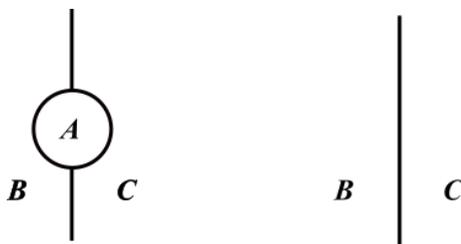


Figura 4.13: Mapa M e mapa M' .

Por hipótese, o mapa M é normal, logo também será normal o mapa M' . Conquanto, o mapa M' possui um país a menos que seu mapa de origem, que ainda por hipótese, é pentacromático mínimo, o que acarreta em M' não ser pentacromático, sendo então necessário apenas quatro cores para colori-lo. E neste caso, todos os países do mapa original podem ser coloridos com apenas quatro cores, desde que o país A não seja colorido com uma das cores que forem atribuídas aos seus vizinhos B e C . Todavia, isso contradiz a hipótese de que o mapa M é pentacromático mínimo. E, portanto, a primeira configuração não está contida em nenhum mapa pentacromático normal e mínimo, isto é, é reduzível.

A demonstração de que a segunda configuração é redutível é um processo análogo ao anterior.

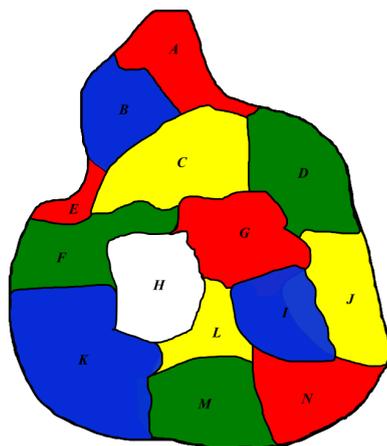
Agora, faremos uso das ideias da *Cadeia de Kempe*, meio pelo qual conseguiremos mostrar que a terceira configuração é redutível. Um subgrafo conexo contendo apenas vértices coloridos com duas cores é dito uma **Cadeia de Kempe**. Por sua vez, este subgrafo deve ser necessariamente *maximal*, isto é, está excluída a possibilidade de acrescentar outro vértice com essas duas cores.

Pela maximalidade da cadeia, regiões vizinhas a qualquer região pertencente a cadeia deverá ser colorida com uma cor distinta das utilizadas na cadeia, proporcionando a possibilidade de troca de cores entre as regiões que fazem parte da cadeia, obtendo assim uma nova coloração do grafo.

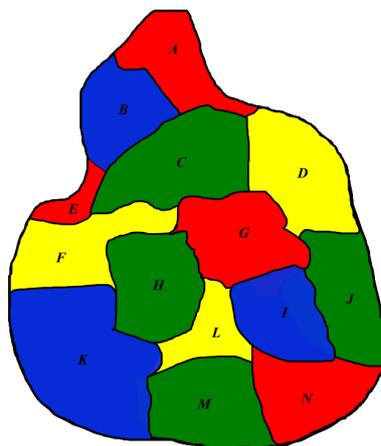
Com base nestas últimas informações, vamos mostrar que a terceira configuração é redutível. Para tanto, suponhamos a existência de um mapa pentacromático mínimo, normal ou não, contendo um país que possui quatro vizinhos. Em seguida, retiraremos tal país e, de maneira similar aos casos anteriores, a minimalidade do mapa original nos garante que a coloração seja feita utilizando apenas 4 cores.

Vamos agora, determinar a cor a ser utilizada para preencher o país retirado.

Se os 4 países vizinhos forem coloridos utilizando apenas 3 cores, basta escolher a quarta cor para colorir o país retirado. Porém, se usufruirmos das quatro cores na coloração dos quatro vizinhos, deveremos proceder conforme o método utilizado na coloração da Figura 4.14(a), cujo país ainda sem cor e com quatro vizinhos é o país *H*.



(a) Mapa contendo um país com 4 vizinhos.



(b) Mapa contendo um país com 4 vizinhos corretamente colorido.

Figura 4.14: Coloração e as cadeias de Kempe.

Imaginando o mapa sem o país H , vamos observar as cores dos mapas opostos em relação ao país H , que são F , verde, e L , amarelo; e K , azul, e G , vermelho.

Observa-se agora, que não existe uma cadeia de Kempe nem de F a L , bem como de G a K . Ocasionalmente, vamos escolher os países opostos F e L e, partindo de F , formaremos um caminho conexo, composto apenas de países nas cores verde e amarelo, que, por sua vez, é formado pelo países F, C, D, J . Como, esses países só fazem fronteira com países coloridos nas cores vermelha e azul, podemos inverter as suas cores, obtendo assim uma nova coloração, conforme Figura 4.14(b).

E, portanto, a vizinhança do país H passa a ser colorida com apenas 3 cores (amarela, vermelha e azul), concedendo a coloração do país H na cor verde.

Logo, o mapa pode ser colorido com 4 cores, contradizendo a hipótese de ser pentacromático. Concluindo assim que tal configuração é redutível.

Para a quarta configuração, foi empregada também as cadeias de Kempe. Diferentemente do êxito obtido ao atestar que as três primeiras configurações eram redutíveis, Kempe falha sutilmente ao demonstrar esta configuração. Falha esta que viera a ser descoberta apenas 11 anos mais tarde por Heawood.

4.6 O Problema das 5 Cores

Decorridos pouco mais de uma década, Heawood publica um artigo apontando um erro na demonstração de Kempe ao discorrer que a quarta configuração é redutível. Entretanto, no mesmo documento, evidencia o fato de não conseguir dissertar uma demonstração alternativa para o Teorema das 4 cores. Em consequência de seus estudos, e fazendo posse dos mesmos argumentos de Kempe, Heawood consegue demonstrar a possibilidade de colorir qualquer mapa fazendo uso de apenas 5 cores distintas.

Teorema 4.1. *Se G é um grafo conexo planar, então $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração. Adotando o mesmo tipo de contradição que Kempe e realizando apenas pequenas alterações nos argumentos, Heawood supõe a existência de mapas que carecem de, no mínimo, 6 cores para serem coloridos e os denomina de mapas *hexacromáticos*.

Assim sendo, segue-se os argumentos na seguinte ordem:

1. Se existir algum mapa hexacromático, então também existe um mapa hexacromático normal.
2. Se existe mapa hexacromático normal, então existe mapa hexacromático normal mínimo.
3. Qualquer mapa normal contém pelo menos um país com menos de seis países vizinhos.
4. Nenhum mapa hexacromático e mínimo pode conter um país com menos de seis países vizinhos.

Os três primeiros argumentos foram solucionados de maneira similar a apresentada por Kempe.

Para o quarto argumento, suponhamos a existência de um mapa hexacromático mínimo contendo um país com menos de seis países vizinhos. Se o determinado país possuir dois, três ou quatro vizinhos, a argumentação de Kempe mantém-se válida, pois podemos obter um novo mapa idêntico ao original a menos deste país. Porém, a minimalidade do mapa original nos garante que o novo mapa pode ser colorido com 5 cores e como o país removido possui, no máximo, quatro vizinhos, podemos agregá-lo novamente ao mapa original, e em seguida, aplicarmos a ele a cor ainda não empregada. O que é uma contradição, uma vez que, hipoteticamente, o mapa original é hexacromático.

Agora, a fim de abordarmos a quarta e última configuração do quarto argumento, faremos uso novamente das cadeias de Kempe.

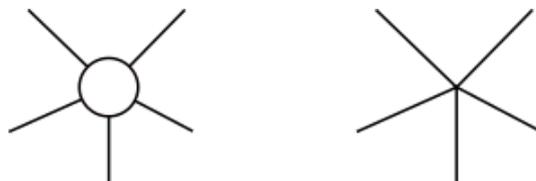


Figura 4.15: Remoção do país contendo 5 vizinhos.

Garantidos novamente pela minimalidade do mapa original, temos que o mapa reduzido pode ser colorido com 5 cores ou menos, já que se os cinco países vizinhos estiverem coloridos apenas com 4 cores, os argumentos antepostos solucionam o problema.

Entretanto, consideraremos agora o caso em que as 5 cores foram empregues na coloração dos cinco países vizinhos do mapa reduzido. Para um melhor entendimento, nomearemos, no sentido horário, os países vizinhos em A, B, C, D e E . Tomemos então dois países não vizinhos A e D e admitamos a ausência de uma cadeia de Kempe entre eles. Analogamente ao procedimento no Teorema das 4 cores, declaremos o caminho conexo, partindo de A , formado apenas pelos países

que foram coloridos nas mesmas cores dos países A e D . Alterando as cores de todos os países deste caminho, obteremos uma nova coloração de modo que o país A passa a obter a mesma cor do país D , sendo então utilizados apenas 4 cores para colorir os 5 países vizinhos, proporcionando então que a cor ainda não utilizada seja empregue na coloração do país retirado, solucionando assim o problema.

Por outro lado, admitindo a existência de uma cadeia de Kempe entre A e D , tome os países B e E . Pela planaridade do grafo dual, não é possível existir uma cadeia de Kempe entre B e E , visto que todo e qualquer caminho entre eles deve interceptar a cadeia existente entre A e D , que é colorida com cores distintas das dos países B e E . Assim, de mesma natureza do argumento anterior, a demonstração faz-se por encerrada.

□

A partir de então, fica estabelecido o Teorema das 5 Cores, considerado um dos mais fortes entre os teoremas de cores por possuir uma certa elegância em sua demonstração matemática e que se mantém importante mesmo depois de encontrado a demonstração com artifícios computacionais do Teorema das 4 Cores.

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo, serão abordados algumas aplicações utilizando os conceitos de grafos vistos nos capítulos anteriores, primordialmente sobre o Teorema das 4 cores e coloração de vértices.

A coloração de vértices apresenta aplicações diversas a problemas que englobam distribuição e elaboração de cronogramas. Aqui, abordaremos a solução de um Sudoku 4×4 , a divisão das terras do Califa de Bagdá para seus quatro herdeiros, o armazenamento de cães em caixas transportadoras e a elaboração de um cronograma de recuperação final em uma escola.

5.1 Sudoku 4×4

O Sudoku é um jogo que se baseia na colocação lógica de números. O jogo objetiva o preenchimento de cada uma das células vazias. Geralmente, as células estão dispostas numa grade 9×9 , constituídas de subgrades 3×3 , denominadas de regiões. O desafio já contém algumas pistas, isto é, alguns números já se apresentam em suas respectivas células, proporcionando uma indução ou dedução dos demais números. Em cada linha, coluna e região não é admissível a repetição de cada um dos números de 1 a 9.

Em nossa aplicação, estaremos detalhando a solução do Sudoku 4×4 por meio do seu grafo dual, aplicando o método do algoritmo guloso.

		<i>1</i>	
	<i>4</i>		
	<i>3</i>		
			<i>2</i>

Figura 5.1: Sudoku 4×4 .

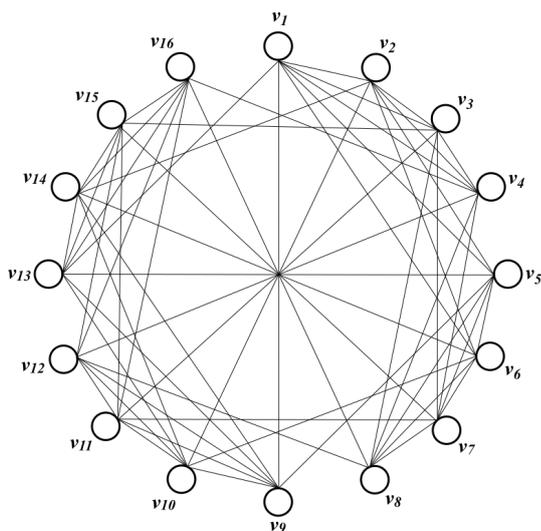


Figura 5.2: Grafo dual.

Note que os vértices v_1, v_2, \dots, v_{16} equivalem a cada uma das células. Por exemplo, o vértice v_4 representa a célula localizada na primeira linha e na quarta coluna. Outrossim, nota-se também a existência de uma aresta conectando os vértices sempre que satisfazem uma das condições a seguir:

1. Localizam-se na mesma linha;
2. Localizam-se na mesma coluna;
3. Localizam-se na mesma subgrade 2×2 .

Ao longo da coloração, cada vértice corresponderá a uma cor e, neste caso, podemos concluir a coloração com quatro cores, visto que estamos buscando a solução de um Sudoku 4×4 .

Sabendo que cada vértice do grafo dual possui grau 7, sem perda de generalidade, tomemos a sequência não crescente

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}.$$

Em seguida, $i = 0$. Como $V \neq \emptyset$, temos $i = 0 + 1$. Assim, tomemos $v_1 \in T_1$. Note que os vértices $v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{14}, v_{15}, v_{16}$ não são adjacentes ao vértice v_1 . Porém, os vértices v_8, v_{11}, v_{15} são adjacentes ao vértice v_7 e os vértices v_{12}, v_{14} são adjacentes ao vértice v_{10} , logo uma possível coloração seriam sobre os vértices v_1, v_7, v_{10}, v_{16} . Todavia, os dados iniciais demandam que pelo menos dois destes vértices sejam coloridos com cores diferentes, já que v_{10} corresponde a célula com o algarismo 3 e v_{16} a célula com o algarismo 2. Então, desconsiderando o vértice v_7 , segue que

$$T_1 = \{v_1, v_8, v_{10}, v_{15}\} \text{ e } V_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}\}.$$

Regressando ao passo 3 do algoritmo, temos que $v_2 \in T_2$, e:

$$T_2 = \{v_2, v_7, v_9, v_{16}\} \text{ e } V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}.$$

Seguindo ao passo 3, temos que $v_3 \in T_3$, e:

$$T_3 = \{v_3, v_5, v_{12}, v_{14}\} \text{ e } V_3 = \{v_4, v_6, v_{11}, v_{13}\}.$$

Retornando mais uma vez ao passo 3, temos que $v_4 \in T_4$, e:

$$T_4 = \{v_4, v_6, v_{11}, v_{13}\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

Por fim, impomos a cor amarelo ao conjunto T_1 , a cor cinza ao conjunto T_2 , a cor verde ao conjunto T_3 e a cor vermelha ao conjunto T_4 , conforme Figura 5.3(a).

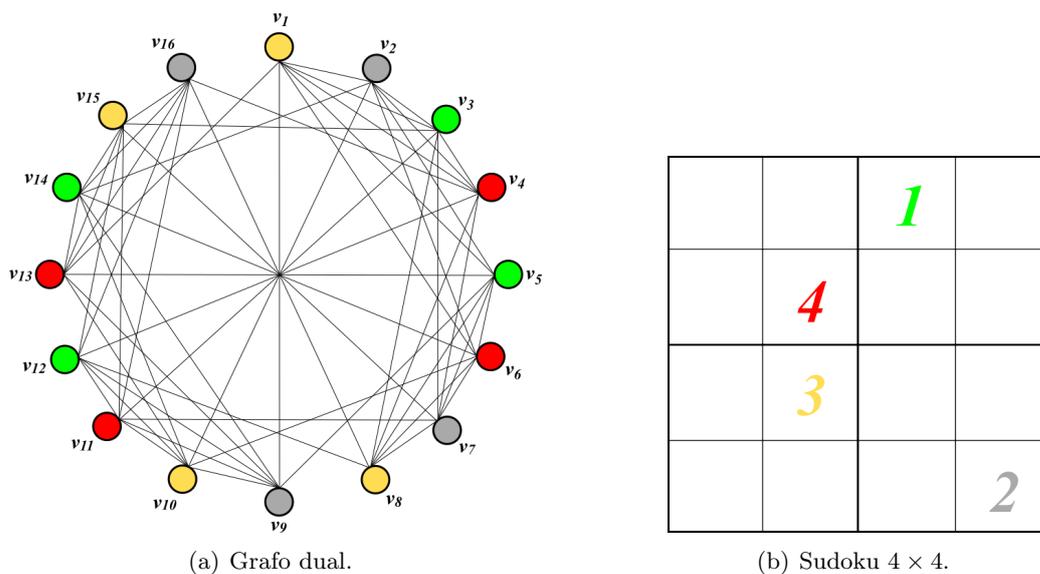


Figura 5.3: Grafo dual colorido e Sudoku 4×4 .

3	2	1	4
1	4	2	3
2	3	4	1
4	1	3	2

Figura 5.4: Sudoku 4×4 resolvido.

Retornando as condições iniciais, temos que o vértice $v_{10} \in T_1$ corresponde a célula com o algarismo 3, assim todas as células do Sudoku que correspondem aos vértices do conjunto T_1 deverão ser preenchidas com o algarismo 3. O mesmo procedimento deve ser tomado quantos aos vértices v_3, v_6 e v_{16} . Ver Figura 5.3(b).

Deste modo, na Figura 5.4, esboçamos o Sudoku 4×4 resolvido.

Observação 5.1. *O mesmo método pode ser empregado para solucionar um Sudoku 9×9 , entretanto seriam necessários nove cores distintas.*

5.2 A Herança do Califa de Bagdá

Há muitos anos, o califa de Bagdá tinha quatro filhos e tinha muito gosto por eles. Para cada filho mandou construir um palácio. O filho mais velho, Abdul, ficou com o terreno 1, Budal com o terreno 2, Cadaf com o terreno 3 e Dubal com o terreno 4, conforme mapa da Figura 5.5.

Antes de morrer, fez um testamento com indicações de como deveriam ser distribuídas suas ricas terras, num total de 20. Cada filho ficaria com o terreno onde tinha seu palácio. Abdul, herdaria também o terreno 9, onde ficava situado o palácio do califa. Os outros terrenos seriam distribuídos de modo que, no final, cada filho ficasse com 5 terrenos. Mas impôs uma condição a cada um dos filhos: os seus 5 terrenos não poderiam ter fronteiras comuns. Por exemplo, Cadaf não podia ficar com o terreno 19. Como esses irmãos fariam a divisão das terras entre si?

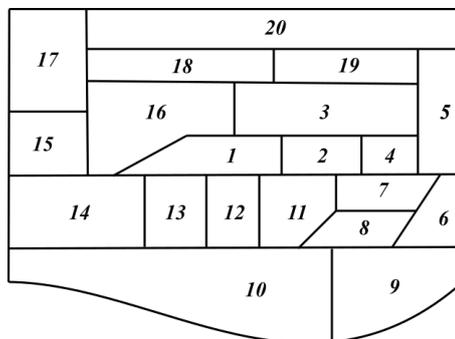


Figura 5.5: Mapa das terras do Califa de Bagdá.

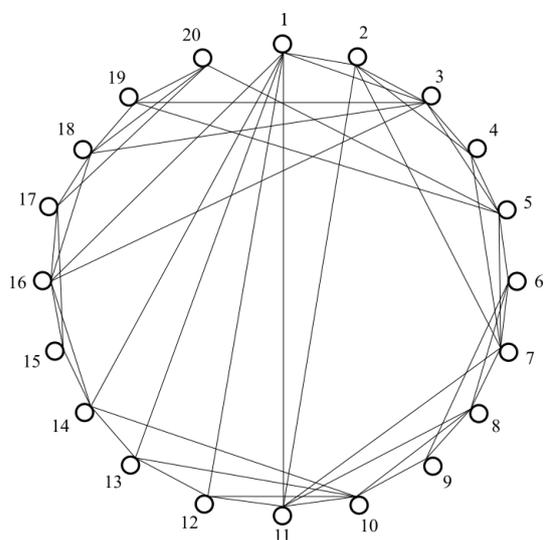


Figura 5.6: Grafo dual do mapa das terras do Califa de Bagdá.

Uma possível solução para o problema dos herdeiros do califa é fazermos uso do algoritmo guloso. Para tanto, esboçaremos o grafo dual do mapa das terras do califa. A partir de então, colorir os vértices do grafo é equivalente a efetivar a divisão das terras para os quatro irmãos obedecendo a exigência de que nenhum irmão pode se apossar de territórios vizinhos.

Analisando o grau de todos os vértices, obtemos a sequência não crescente:

$$V = \{1, 3, 5, 7, 10, 11, 16, 2, 8, 14, 18, 4, 6, 12, 13, 17, 19, 20, 9, 15\}.$$

Em seguida, $i = 0$. Como $V \neq \emptyset$, temos $i = 0 + 1$. Assim, tomemos $1 \in T_1$. Note que os vértices 5, 7, 10, 8, 18, 4, 6, 17, 19, 20, 9, 15 não são adjacentes ao vértice 1. Porém, os vértices 7, 4, 6 são adjacentes ao vértice 5 e os vértices 8, 9 são adjacentes ao vértice 10. Assim, os vértices que satisfazem a condição seriam os vértices 1, 5, 10, 18, 15. Entretanto, não contentaria a exigência do vértice 1 e do vértice 9 possuírem a mesma cor, isto é, terrenos que deverão pertencer ao filho primogênito. Uma coloração possível seria 1, 7, 17, 19, 9. Logo,

$$T_1 = \{1, 7, 17, 19, 9\} \text{ e } V_1 = \{3, 5, 10, 11, 16, 2, 8, 14, 18, 4, 6, 12, 13, 20, 15\}.$$

Retornando ao passo 3 do algoritmo, temos $3 \in T_2$, e assim:

$$T_2 = \{3, 8, 14, 12, 20\} \text{ e } V_2 = \{5, 10, 11, 16, 2, 18, 4, 6, 13, 15\}.$$

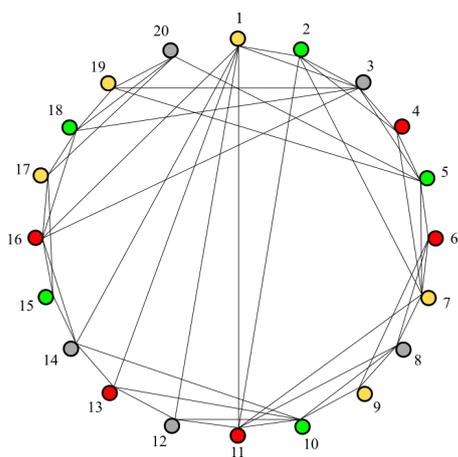
Retornando ao passo 3, segue que $5 \in T_3$, e:

$$T_3 = \{5, 10, 2, 18, 15\} \text{ e } V_3 = \{11, 16, 4, 6, 13\}.$$

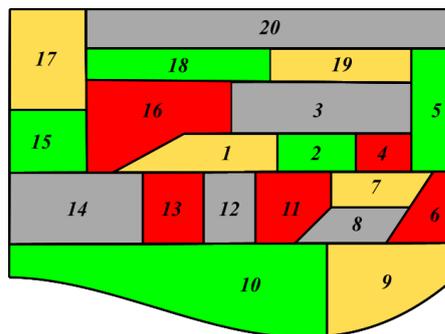
Retornando mais uma vez ao passo 3, tem-se que $11 \in T_4$, e:

$$T_4 = \{11, 16, 4, 6, 13\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

Agora, aos conjuntos T_1, T_2, T_3, T_4 atribuíremos, respectivamente, as cores amarelo, cinza, verde e vermelho, como visto no grafo dual na Figura 5.7(a).



(a) Grafo dual colorido.



(b) Mapa das terras do Califa de Bagdá colorido.

Figura 5.7: Grafo dual colorido e Mapa das Terras do Califa já dividido.

Uma vez finalizada a coloração do grafo dual, automaticamente, a divisão das terras do Califa de Bagdá terá sido concluída com condições preliminares satisfeitas. Portanto, o filho mais velho ficou com os terrenos 1, 7, 17, 19, 9, Budal com os terrenos 3, 8, 14, 12, 20, Cadaf com os terrenos 5, 10, 2, 18, 15 e o filho caçula, Dubal, com os terrenos 11, 16, 4, 6, 13. Ver Figura 5.7(b).

5.3 Armazenamento de Cães em caixas transportadoras

Uma ONG de proteção animal pretende realizar uma feira de adoção em um estacionamento de um supermercado e deseja levar um exemplar de cada raça de cão que lá habita. Por questão de logística, nomeou as raças por $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ e R_7 . Sob a intenção de alugar caixas transportadoras de cães e considerando as necessidades financeiras, pretendem alocar algumas raças numa mesma caixa mas levarão em consideração o fato de que algumas raças quando estão próximas uma da outra causam tumulto. Para tanto, constataram que quaisquer cães das raças R_1, R_2, R_3 e R_7 não conseguem se unir, que os cães da raça R_1 estranham as raças R_4 e R_6 e que o cão da raça R_5 reage aos cães das raças R_4 e R_6 . Diante destas circunstâncias, qual o menor número de caixas transportadores que a ONG deverá alugar?

Inicialmente, para responder o problema da ONG, vamos modelar as constatações coletadas por meio de um grafo, exposto na Figura 5.8. E, em seguida, iremos colorir o grafo, o que é equivalente a determinar a menor quantidade de caixas transportadoras.

Utilizando o algoritmo guloso, obtém-se a sequência não crescente:

$$V = \{R_1, R_2, R_3, R_7, R_4, R_5, R_6\};$$

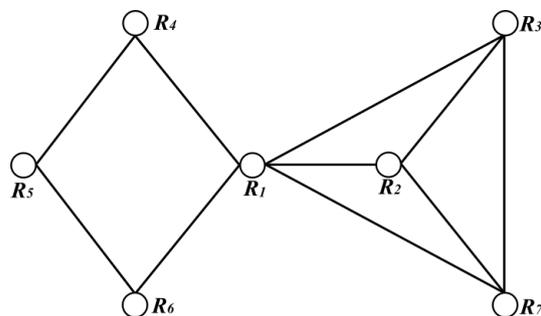


Figura 5.8: Grafo representando raças que não se entendem.

Em seguida, $i = 0$. Como $V \neq \emptyset$, temos $i = 0 + 1$.

Assim, tomemos $R_1 \in T_1$. Note que somente o vértice R_5 não é adjacente ao vértice R_1 . Logo,

$$T_1 = \{R_1, R_5\} \text{ e } V_1 = \{R_2, R_3, R_7, R_4, R_6\}.$$

Voltando ao passo 3 e repetindo o processo, segue:

$$R_2 \in T_2, T_2 = \{R_2, R_4, R_6\} \text{ e } V_2 = \{R_3, R_7\}.$$

$$R_3 \in T_3, T_3 = \{R_3\} \text{ e } V_3 = \{R_7\}.$$

$$R_7 \in T_4, T_4 = \{R_7\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

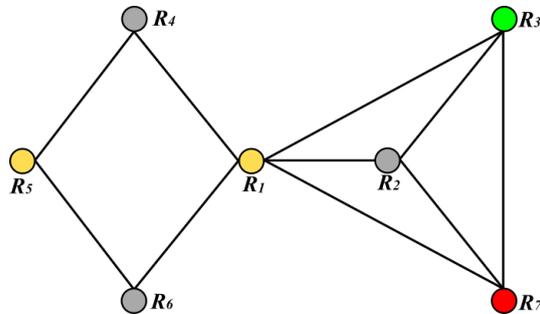


Figura 5.9: Grafo representando raças que não se entendem.

até a feira de doações.

Deste modo, optaremos por colorir o conjunto T_1 de amarelo, o conjunto T_2 de cinza, o conjunto T_3 de verde e o conjunto T_4 de vermelho, conforme Figura 5.9.

Portanto, a necessidade de utilizar quatro cores para efetivar a coloração do grafo nos garante que quatro caixas transportadores serão suficientes para conduzir os cães da ONG

5.4 Cronograma de Recuperação Final

Com o ano letivo de 2017 chegando ao fim, a coordenadora de uma escola pública de ensino médio da capital sergipana coleta as listas, por disciplina, de alunos que necessitarão submeter as recuperações finais. Feito isso e levando em consideração o fato de que existem alunos de recuperação em mais de uma disciplina, se depara com o problema de organizar uma grade com a menor quantidade possível de horários para aplicação das recuperações de Matemática (M), Português (P), História (H), Geografia (G), Física (F), Química (Q) e Biologia (B), de modo que todas sejam aplicadas num mesmo dia. Para solucionar o problema, ela clama pela ajuda do coordenador de área de Matemática e suas tecnologias, mostrando para ele uma tabela indicando as disciplinas que não podem realizar recuperação no mesmo horário.

Disciplina	Não compatível
Matemática	P, H, G e B
Português	H, G, F e B
História	G, Q e B
Geografia	F e Q
Física	Q e B
Química	B

Uma vez conhecendo a teoria dos grafos, o coordenador da área de matemática modela a situação problema para um grafo, cujos vértices representam as disciplinas e as arestas, quando existentes, indicam que um mesmo aluno deverá realizar a recuperação nas duas disciplinas.

No grafo da Figura 5.10, as disciplinas Matemática, Português, História, Geografia, Física, Química e Biologia estão sendo representadas pelos vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ e v_7 , respectivamente.

Em seguida, aplicando o algoritmo guloso, obtém a sequência não crescente:

$$V = \{v_2, v_3, v_4, v_7, v_1, v_5, v_6\}.$$

Em seguida, $i = 0$. Como $V \neq \emptyset$, temos $i = 0 + 1$. Assim, tomemos $v_2 \in T_1$. Note que somente o vértice v_6 não é adjacente ao vértice v_2 . Logo,

$$T_1 = \{v_2, v_6\} \text{ e } V_1 = \{v_3, v_4, v_7, v_1, v_5\}.$$

Voltando ao passo 3 e repetindo o processo, segue:

$$v_3 \in T_2, T_2 = \{v_3, v_5\} \text{ e } V_2 = \{v_4, v_7, v_1\}.$$

$$v_4 \in T_3, T_3 = \{v_4, v_7\} \text{ e } V_3 = \{v_1\}.$$

$$v_1 \in T_4, T_4 = \{v_1\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

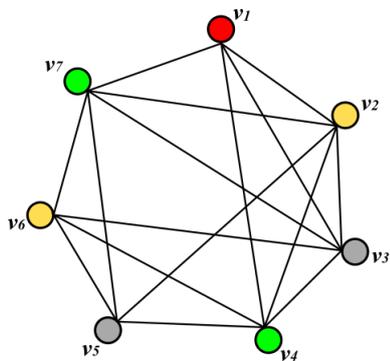


Figura 5.11: Grafo dual.

Neste sentido, uma coloração do grafo consiste em uma grade de horário. Como foram necessários quatro cores para finalizar a coloração, iremos necessitar de uma grade com quatro horários. Escolhendo a cor amarela para o conjunto T_1 , a cor cinza para o conjunto T_2 , a cor verde para o conjunto T_3 e a cor vermelha para o conjunto T_4 , ver Figura 5.11.

Explicitamente, será possível aplicar num mesmo horário as recuperações de Português e Química, História e Física, Geografia e Biologia, e por fim, Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] APPEL, K.; HAKEN, W. e KOCH, J. *Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility*, Illinois J. Math., vol. 21.
- [2] GOLDBARG, Marco; GOLDBARG, Elizabeth. *Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- [3] NETTO, P. O. Boaventura. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 5ª ed. São Paulo: Blucher, 2011.
- [4] NETTO, P. O. Boaventura; JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos: Introdução e prática*. São Paulo: Blucher, 2009.
- [5] NICOLETTI, M. do Carmo; JUNIOR, E. R. Hruschka. *Fundamentos da teoria dos grafos para computação*. Edição Revisada. São Carlos: EdUFSCar, 2011.
- [6] RABUSKE, M. Aguiar. *Introdução à Teoria dos Grafos*. Florianópolis: UFSC, 1992.
- [7] SAMPAIO, J. C. V. *Quatro Cores e Matemática*. [S.l.]: Bahia: Universidade Federal da Bahia, 2004
- [8] SANTOS, E. L. de Santana. *Planaridade de Grafos: O Teorema de Kuratowski*. 2017. 84 f. Dissertação. Departamento de Matemática. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, SE.
- [9] SANTOS, L. A. dos .*O Teorema da Curva de Jordan*. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Matemática. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos - SP: UFSCar, 2010.
- [10] SILVA, B. C. Sá da. *Emparelhamento em Grafos Bipartidos no Ensino Médio*. 2016. 42 f. Dissertação. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, RJ.

- [11] SOUZA, Lurdes. *O Teorema das Quatro Cores*. Millenium - Revista do Instituto Politécnico de Viseu . Viseu, 2001.