Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e Suas Aplicações

Fábio Vieira de Andrade Borges

Goiânia

2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Fábio Vieira de Andrade Borges
E-mail:	fabao.rv@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Estadual de Educação – Rio Verde - GO
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Sigla: CAPES
País: Brasil	UF: DF — CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e Suas Aplicações
Palavras-chave:	Teoria Elementar dos Números, Equações Diofantinas Lineares, Ensino Médio, Soluções inteiras, Resolução de problemas.
Título em outra língua:	Linear Diophantine Equations in Two Incognits and Their Applications
Palavras-chave em outra língua:	Elementary Theory of Numbers, Linear Diophantine Equations, High school, Entire solutions, Problem resolution.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	01/03/2013
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Orientador (a):	Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
E-mail:	paulo@mat.ufg.br
Co-orientador(a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 12 / 04 / 2013

____
Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Fábio Vieira de Andrade Borges

Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e Suas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

B732e

Borges, Fábio Vieira de Andrade.
Equações diofantinas lineares em duas incógnitas e suas aplicações [manuscrito] / Fábio Vieira de Andrade Borges. – 2013.
63 f. : figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de tabelas e figuras.

1. Equações diofantinas lineares – Ensino Médio. 2. Matemática – Resoluções de problemas. I. Título.

CDU: 511.5:373.5

Fábio Vieira de Andrade Borges

Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e Suas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 01 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
UnB

Prof. Dr. Ricardo Nunes de Oliveira
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Fábio Vieira de Andrade Borges graduou-se em Matemática pela Fundação Superior de Rio Verde (FESURV) e atualmente é Professor do Ensino Médio do Colégio Estadual Martins Borges de Rio Verde - GO.

Dedicatória

À **DEUS**, primeiramente, por ter me dado força durante esses dois anos de curso. Por ter me iluminado nas decisões mais difíceis e por ter me guiado ao longo do curso para trilhar o caminho mais correto possível.

A minha mãe, **DORACI**, que sempre confiou em mim e proporcionou esta oportunidade de concretizar e encerrar mais uma caminhada da minha vida. Sei que ela não mediu esforços pra que este sonho se realizasse, sem sua compreensão, ajuda e confiança nada disso seria possível hoje.

Aos meus filhos, **PATRICK LUIZ** e **FÁBIO FILHO**, por ter me proporcionado a maior felicidade deste mundo, pela paciência nos momentos em que estive ausente e pelos momentos felizes juntos e que me enchem de satisfação por ser pai.

A minha querida esposa, **ALESSANDRA**, por toda paciência, compreensão, carinho e amor, me deixando mais tranquilo nos momentos mais difíceis do curso e por me ajudar muitas vezes a achar soluções quando elas pareciam não existir. Sempre dando-me apoio nas minhas decisões, por mais que algumas prejudiquem algumas das partes. Você foi a pessoa que compartilhou comigo os momentos de tristezas e alegrias. Além deste trabalho, dedico todo meu amor a você.

Não conquistaria nada se todos vocês não estivessem ao meu lado. Obrigado, por estarem sempre presentes em todos os momentos, me dando carinho, apoio, incentivo, determinação, fé, e principalmente pelo amor de vocês.

Agradecimentos

Desejo expressar a minha gratidão a todos que contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

À **DEUS**, por me iluminar principalmente nas minhas viagens permitindo que eu concluísse este trabalho.

Ao meu orientador **Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues**, pelo modo como me orientou, me aconselhou, pelas observações e sugestões e por ter acreditado e me guiado à conclusão deste trabalho.

Aos professores **Dr. Ricardo Nunes de Oliveira** e **Dr. Rui Seimetz**, membros da banca examinadora desta dissertação, pelo tempo despendido à leitura e pelas valiosas observações para esta pesquisa.

Aos **professores da UFG** do pólo de Goiânia que participaram do PROFMAT, pela contribuição para a minha formação.

Aos **meus colegas de mestrado** pelo convívio, amizade, ajuda e principalmente pelos momentos felizes que passamos juntos.

Aos **meus colegas de trabalho**, pelo apoio e compreensão até o término deste curso.

A **CAPES**, pelo fornecimento da bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário para a realização deste trabalho.

Por fim, e as mais importantes, minha mãe e esposa, **Doraci** e **Alessandra** pelo apoio, paciência e pelas constantes orações para a concretização deste sonho.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal auxiliar os alunos e professores na resolução e compreensão de problemas envolvendo as *Equações Diofantinas Lineares com Duas Incógnitas* através da elaboração e aplicação de atividades didáticas destinadas a contribuir para o estudo desse tipo de equações. Procurou-se nas tarefas fazer a integração da Aritmética com a Álgebra e a Geometria, utilizando-se de alguns programas computacionais que serviram de suporte para as visualizações gráficas das soluções inteiras.

Nos primeiros capítulos vamos conhecer melhor a essência da *Teoria Elementar dos Números*, pois apresentaremos e demonstraremos as ferramentas matemáticas que serão utilizadas na resolução das Equações Diofantinas Lineares, algumas delas já conhecidas, que é o caso do máximo divisor comum (m.d.c). Em seguida serão introduzidas as equações diofantinas e os métodos de determinação de soluções da mesma para aplicação em resolução de problemas do cotidiano.

A conclusão desse trabalho ressalta a importância da interpretação algébrica e geométrica das Equações Diofantinas Lineares, e que o contato com problemas desta área contribui para que o aluno desenvolva, de forma criativa suas habilidades de raciocínio. É importante enfatizar que esse tema pode ser abordado no Ensino Médio.

Palavras-chave: Teoria Elementar dos Números, Equações Diofantinas Lineares, Ensino médio, Soluções inteiras, Resolução de problemas.

Abstract

The main objective of this assignment is to help students and also teachers with the resolution and understanding of problems involving the *Linear Diophantine Equations with Two Incognits* through the elaboration and application of didactic activities in order to contribute to the study of this kind of equations. Through the tasks it was aimed to dothe integration of Arithmetic with Algebra and Geometry by using some computational programs which worked as support to the graphical visualization of the entire solutions.

In the first chapters the essence of the *Elementary Theory of Numbers* will be better known, since the mathematical tools which will be used to solve linear Diophantine equations will be displayed and demonstrated, some of them already known, like the greatest common divisor (g.d.c). Then the Diophantine equations and theirapplication methods for the solution of daily problems will be introduced.

The Conclusion of this study highlights the importance of algebraic and geometric interpretation of Linear Diophantine Equations, and also emphasizes that the contact with problems of this area contributes to the students reasoning abilities development in a creative way. It is important to emphasize that this issue can be introduced in high school.

Keywords: Elementary Theory of Numbers, Linear Diophantine Equations, High school, Entire solutions, Problem resolution.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho é uma proposta para utilização deste como tema motivador de situações de ensino propícias para o desenvolvimento de várias estratégias de resolução de problemas. O tema *Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e Suas Aplicações* permite inicialmente a partir da estratégia da tentativa e erro, articular outras estratégias de enfoque aritmético, que possibilitam a evolução para o uso da escrita algébrica, como condição otimizadora das circunstâncias dadas no enunciado. Assim o aluno consegue relacionar melhor após algumas atividades a transição entre a Aritmética e a Álgebra.

O Currículo de Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás [9] de matemática apresenta os conteúdos essenciais da *Teoria Elementar dos Números* necessária para abordar as Equações Diofantinas, são eles: os números naturais e inteiros com suas propriedades e operações básicas, números primos e decomposição em fatores primos, algoritmo da divisão, estudo da divisibilidade, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e critérios de divisibilidade.

Entendemos que, no ciclo básico, a aprendizagem de matemática pode ser posta na forma de um projeto de ensino, desde que possibilite a expressão e argumentação do aluno em diferentes linguagens (natural, numérica, algébrica e gráfica), ao enfrentar situações-problema e tomar decisões que extrapolem a capacidade do âmbito original, examinando e percebendo outras possibilidades de enfrentamento dos contextos e possibilitando outros pontos de vista, papéis ressaltados na proposta do ENEM, conforme PCN+ Ensino Médio [3].

Segundo o PCNEM [2], considera-se que:

> No Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los, desenvolvendo de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes,

resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Porém, o que realmente acontece e que após a apresentação dos conteúdos citados, eles são raramente reutilizados no decorrer dos estudos tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio. Então é necessário resgatar esses conceitos antes de aplicar as situações-problema envolvendo as Equações Diofantinas.

Além dos conteúdos necessários para este estudo, encaminhamos uma sequência de atividades baseadas em situações-problema e jogos, ambientados em contextos tematizados nas *Equações Diofantinas Lineares* a duas incógnitas, do tipo $ax + by = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e com soluções inteiras.

Problematização

Entre as orientações educacionais do PCN+ [3], algumas incentivam explorar, no ensino de matemática, situações cotidianas e formas de se desenvolver habilidades de pensamento do estudante. Problemas do tipo, por exemplo: *"Deseja-se comprar produtos de duas marcas A e B, respectivamente por R$ 3,00 e R$ 4,00 cada unidade, desembolsando-se exatamente um total de R$ 20,00. Quantos produtos de cada tipo podem ser comprados?"*, colocam o estudante, em geral, diante de uma situação de desafio do dia-a-dia. Esses problemas permitem ao estudante tomar a iniciativa de elaborar uma estratégia pessoal, um raciocínio próprio de solução, bem como a possibilidade de apreciar, avaliar e comparar sua solução com as diferentes soluções dos demais colegas, enriquecendo suas habilidades mentais.

Uma pessoa poderia obter uma solução deste problema por tentativas; outra, por meio geométrico e, uma terceira, via álgebra. Ao professor, em sala de aula, também se abre a grande oportunidade de explorar as relações entre estas diversas formas de registros para problemas deste tipo. O problema, acima explicitado, poderia ser modelado, via álgebra, pela equação linear: $3x + 4y = 20$, onde x representaria a quantidade de produtos do tipo A e y, a de produtos do tipo B. Este tipo de equação, sozinha, causa certa estranheza e questionamentos e nos leva a tentar responder as questões:

É possível resolver uma equação com duas incógnitas? Existe uma única solução? Como saber se há solução? Se houver várias soluções, aceitam-se todas? Há teoria matemática para o problema?

Justificativa

Este trabalho tem a finalidade de mostrar que podemos e devemos ensinar as equações diofantinas lineares a alunos do Ensino Médio por meio de três etapas estruturais que são o uso de bases históricas, a demonstração de teoremas e a relação desses com temas atuais da matemática. Vários problemas do cotidiano, de fácil compreensão, que são ao mesmo tempo interessantes e importantes, necessitam de soluções inteiras e podem ser abordados pela teoria das equações diofantinas. Embora não faça parte dos conteúdos abordados nos Ensinos Fundamental e Médio diretamente, nosso trabalho afirma que a teoria das equações diofantinas pode ser introduzida aos alunos do Ensino Médio, capacitando-os com uma maneira sistemática de resolução desses problemas, que é muito mais eficaz do que a estratégia de solução por tentativa e erro apresentada costumeiramente.

Pommer [16] aponta que dentre as diversas possibilidades é extremamente importante o uso da estratégia da tentativa e erro, a verificação direta através de cálculos numéricos (mentais ou por escrito), assim como o uso de propriedades e conceitos dos números, de modo a possibilitar que os objetos a serem estudados façam sentido para o aluno. Sabemos que a resolução de equações diofantinas lineares utiliza basicamente conceitos já adquiridos por alunos do Ensino Fundamental, como o de divisor, máximo divisor comum, divisão euclidiana e equação da reta. Claro que esses conteúdos para os professores foram revisados com mais precisão (de um ponto de vista mais formal), reformulados, apresentando mais propriedades e mostrando outras alternativas de abordagem e cálculo, que nos levam a entender e determinar as soluções destas equações mais rapidamente. As questões que são resolvidas pelas equações diofantinas lineares são indispensáveis sendo necessário mostrar aos alunos que podemos trocar o método de tentativa e erro por um método mais eficaz para resolver estas equações.

Dessa forma também este projeto pode servir de pesquisa científica para o aluno bem como pode ser utilizado por professores no desenvolvimento de suas atividades.

Objetivos

Geral

Desenvolver uma pesquisa bibliográfica através do estudo dos conceitos e aplicações que envolvem as Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas.

Específicos

- Fazer um breve estudo da história acerca da vida de Diofanto e das Equações Diofantinas;
- Estudar a solução geral para as Equações Lineares em duas variáveis;
- Estudar aplicações onde utilizam-se Equações Diofantinas Lineares em duas variáveis;

- Pesquisar atividades metodológicas e recursos que permitam ao aluno conjecturar, comparar e estabelecer estratégias mentais na resolução de situações problemas de outras áreas do conhecimento relacionando-as com as Equações Diofantinas;

- Esclarecer que realmente o desenvolvimento do tema não implica amplos conhecimentos teóricos, isto é, envolve conhecimentos já tratados no Ensino Fundamental e, portanto, trata-se de um objeto do saber passível;

- Possibilitar uma abordagem que poderia constar de forma direta nos livros didáticos para o Ensino Médio;

- Construir um espaço de discussão, com professores de Matemática, sobre a necessidade de trabalhar os conceitos das Equações Diofantinas no Ensino Básico;

- Sensibilizar professores do Ensino Médio a incorporar esse conhecimento em suas aulas, dada a sua utilidade e a simplicidade de seu desenvolvimento;

- Possibilitar que os conhecimentos adquiridos neste tema possam servir de base para o desenvolvimento de outros tais como: Equações Polinomiais, Combinatória e Geometria Analítica.

2 Referencial Teórico

2.1 Diofanto e as Equações Diofantinas

Diofanto foi um matemático grego que nasceu na Alexandria - Egito por volta de 200 D.C. Embora pouco se saiba sobre sua vida, Diofanto foi considerado maior algebrista grego de Alexandria e também o verdadeiro precursor da Teoria dos Números, ganhando por alguns, o título de "Pai da Álgebra". Tornou-se conhecido por suas obras, sendo a principal, o tratado intitulado "Arithmetica" (250-275), contendo 13 livros que consistem de 130 problemas de soluções numéricas para equações determinadas (aquelas que possuem uma única solução) e equações indeterminadas (Diofantinas), onde, apenas 6 dos 13 livros originais permanecem disponíveis com o acervo bibliográfico.

Diofanto desenvolveu uma série de soluções para as equações que hoje levam o seu nome. Como exemplo, para a equação $x^n + y^n = z^n$, demonstrou que para $n = 2$, existem inúmeras soluções. No século XVII o matemático Pierre de Fermat (1601-1654), estabeleceu o conhecido *"Último Teorema de Fermat"*, segundo o qual, afirmou que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução em números inteiros para n maior do que 2. Esse problema foi demonstrado séculos depois pelo matemático britânico Andrew Wiles em 1994 e o teorema passou a ser chamado de Teorema de Fermat-Wiles.

Segundo estudiosos, em sua obra "Arithmetica", Diofanto só se interessava por soluções racionais positivas, não aceitando as negativas ou as irracionais. Outras obras lhe trouxeram renome, sendo elas: "Números Poligonais", "Porismos" e "Moriástica", obras que tratam de um trabalho sobre frações, introduzindo o emprego de números fracionários. Os problemas estudados por Diofante são problemas indeterminados que exigem soluções inteiras (ou racionais) positivas e envolvem, em geral, equações de grau superior ao primeiro. Mesmo assim, hoje em dia, equações indeterminadas do primeiro grau, com coeficientes inteiros, são chamadas equações diofantinas em homenagem ao pioneirismo de Diofante nessa área, das quais, veremos mais adiante as suas aplicações.

A título de curiosidade, reproduzimos um problema que apareceu sob forma de poema no quinto ou sexto século. Ele permite calcular quantos anos Diofante viveu:

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida. (BOYER, 1996, p.121 [1]).

Resolvendo, matematicamente esse enigma, a equação que representa o problema será:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Concluímos que ele viveu 84 anos, se caso esse enigma for historicamente exato.

Para o leitor interessado em ler mais sobre Diofanto ver referências [1] e [7].

2.2 Alguns Conceitos de Teoria dos Números

Para a dedução da fórmula geral que fornece o número total de soluções inteiras de uma equação diofantina linear, são necessários alguns conceitos básicos de teoria dos números aos quais faremos uma breve apresentação das definições, proposições e teoremas, exemplificando-os quando necessário. Algumas vezes o leitor irá encontrar o símbolo “$\square$” que indica o fim de uma demonstração.

2.2.1 Divisibilidade em $\mathbb{Z}$

Definição 1. *Sejam a e b dois inteiros, com $a \neq 0$. Diz-se que a divide b se, e somente se, existe um inteiro q tal que $b = aq$.*

Se a divide b também se diz que a é divisor de b, que b é múltiplo de a, que a é um fator de b ou que b é divisível por a.

Note que o q da definição é uma solução da equação $ax = b$. Esta equação pode não ter solução em $\mathbb{Z}$, por exemplo, $3x = 8$ não tem solução em $\mathbb{Z}$, mas sempre tem solução em $\mathbb{Q}$. Logo a definição de divisibilidade não faria sentido em $\mathbb{Q}$. Por esse motivo, só estudamos divisibilidade em $\mathbb{Z}$.

Notação: $a|b$ (a divide b).

Observação: Se $a|b$, então $-a|b$ e se a não divide b escrevemos $a \nmid b$.

Exemplo 1: $5|20$ pois existe um inteiro $k = 4$, tal que, $20 = 4 \cdot 5$

Exemplo 2: $5 \nmid 12$ pois não existe um inteiro k, tal que, $20 = k \cdot 5$

Destacamos três consequências imediatas dessa definição:

(i) Como $a = 1 \cdot a$, então para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $1|a$.

(ii) Como $a = a \cdot 1$, então para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $a|a$.

(iii) Como $0 = a \cdot 0$, então para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $a|0$.

Proposição 1. *Se $a|1$, então $a = \pm 1$.*

Demonstração: De fato, se a divide 1, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = q \cdot a$. O que implica $a = 1$ e $q = 1$ ou $a = -1$ e $q = -1$, ou seja $a = \pm 1$. □

Proposição 2. *Se a, b, c e d são inteiros com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tais que $a|b$ e $c|d$ então $ac|bd$.*

Demonstração: Existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que se $a|b$ então $b = u \cdot a$ e se $c|d$ então $d = v \cdot c$. Multiplicando-se as equações membro a membro temos que $bd = (uv) \cdot ac$ daí $ac|bd$. $\square$

Proposição 3. *Se a, b e c são inteiros com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tais que $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.*

Demonstração: Existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que se $a|b$ então $b = a \cdot u$ e se $b|c$ então $c = b \cdot v$. Logo, $c = a \cdot (uv)$ e assim $a|c$. $\square$

Proposição 4. *Sejam a e b inteiros e diferentes de zero, se $a|b$ e $b|a$ então $a = \pm b$.*

Demonstração: Existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que se $a|b$ então $b = a \cdot u$ e se também $b|a$ então $a = b \cdot v$. Logo $a = a \cdot (uv)$ que implica $uv = 1$, assim $u|1$ e daí temos que $u = \pm 1$ e que $a = \pm b$. $\square$

Proposição 5. *Sejam a e b inteiros e diferentes de zero, se $a|b$ então $|a| \leq |b|$.*

Demonstração: Existe $u \in \mathbb{Z}$ com $u \neq 0$ tal que se $a|b$ então $b = a \cdot u$, ou seja $|b| = |a| \cdot |u|$. Como $u \neq 0$, temos que $|u| \geq 1$, desse modo segue que $|b| \geq |a|$. $\square$

Proposição 6. *Se a, b, c, x e y são inteiros com $a \neq 0$, tais que se $a|b$ e se $a|c$ então $a|(bx + cy)$.*

Demonstração: Existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que se $a|b$ então $b = a \cdot u$ e se $a|c$ então $c = a \cdot v$. Logo, quaisquer que sejam os inteiros x e y temos que $bx + cy = (au)x + (av)y = a(ux) + a(vy) = a(ux + vy)$, o que implica que $a|(bx + cy)$. $\square$

Exemplo 3: Para exemplificar essa proposição note que $5|30$, $5|90$ e, consequentemente $5|(6 \cdot 30 + 4 \cdot 90)$, ou seja, $5|540$.

2.2.2 Máximo Divisor Comum

O conceito de Máximo Divisor Comum é exaustivamente usado nas mais variadas áreas do conhecimento. Com essa ferramenta somos capazes, por exemplo, de prever alinhamentos de corpos celestes; estudar o ciclo de vida de alguns seres vivos; construir, de modo a garantir o mínimo de desperdício, mosaicos de azulejos que podem ser utilizados na arquitetura, entre outros.

Definição 2. *O Máximo Divisor Comum de dois inteiros a e b (com a ou b diferente de zero), denotado por $mdc(a, b)$ ou simplesmente por (a, b), é o maior inteiro que divide a e b.*

As propriedades mais básicas do mdc são as seguintes:

(i) $mdc(a, b) = d \geq 0$

(ii) Se $mdc(a, b) = d$ então tem-se que $d|a$ e $d|b$

(iii) Se $c|a$ e $c|b$ então $c|d = mdc(a, b)$

(iv) $mdc(a, b) = mdc(b, a)$

(v) $mdc(a, 1) = 1$

(vi) Se a e b são primos e $a \neq b$, temos que $mdc(a, b) = 1$

Exemplo 4: Sejam $a = 12$ e $b = 4$. Determine o $mdc(12, 4)$.

Solução: Sabemos que o divisor de um número inteiro é todo o número inteiro que ao dividir tal número, resultará em uma divisão exata. Com essa informação vamos determinar o conjunto dos divisores de $a = 12$ e de $b = 4$, sendo denotados por D_{12} e D_4. Assim, $D_{12} = \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm6, \pm12\}$ e $D_4 = \{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Como o $mdc(12, 4)$ é o maior inteiro que divide 12 e 4, para encontrar o máximo divisor comum entre esses números, basta determinar a intersecção $D_{12} \cap D_4$ e tomar o maior número em módulo desse conjunto. Logo, $D_{12} \cap D_4 = \{\pm1, \pm2, \pm4\}$ e $máx(D_{12} \cap D_4) = 4$. Portanto $mdc(12, 4) = 4$.

2.2.3 Algoritmo de Euclides

Pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides e se desconhece a data de seu nascimento. É provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas e que também ele foi professor do Museu em Alexandria. Euclides escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas; porém, mais da metade do que ele escreveu se perdeu.

Entre as obras que sobreviveram até hoje temos: *Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica*. Os elementos de Euclides não tratam apenas de geometria, mas também de teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). O livro se compõe de quatrocentos e sessenta e cinco proposições distribuídas em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o livro X sobre incomensuráveis e os três últimos tratam sobre geometria no espaço.

O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si; encontramos também uma exposição da teoria das proporções numérica ou pitagórica.

Escrito por Euclides por volta do ano 300 a.C., o tratado matemático "Os elementos" é um dos livros mais importantes do mundo ocidental. Em 2009, a Editora Unesp lançou a primeira tradução completa para o português, feita diretamente do grego durante 15 anos pelo Prof. Dr. Irineu Bicudo, titular do Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP de Rio Claro. Este livro busca resgatar suas obras que são de grande importância para as ciências matemáticas.

Teorema 1. *(Algoritmo da Divisão) Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{Z}$, *com* $b > 0$, *existe um único par de inteiros* q *e* r, *de modo que* $a = bq + r$, *onde* $0 \leq r < b$.

Demonstração: Será divida em duas partes.

1ª) Prova da existência: Seja b um número inteiro positivo não nulo. Se $a \in \mathbb{Z}$, então a é múltiplo de b ou está compreendido entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, $bq \leq a < b \cdot (q+1)$. Se $bq \leq a$, então $a = bq + r$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$. Se $a < b \cdot (q+1)$, temos que $bq + r < bq + b$ e daí $r < b$. Logo, podemos afirmar que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

2ª) Prova da unicidade: Suponhamos que existam inteiros q_1, q_2, r_1, r_2, onde $q_1 \neq q_2$ e $r_1 \neq r_2$, com $r_1 > r_2$ e que satisfaçam às igualdades: $a = bq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < b$ e $a = bq_2 + r_2$, com $0 \leq r_2 < b$. Se $b > r_1$ e $b > r_2$, então $b > r_1 - r_2$ e temos que $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ o que implica que $b \cdot (q_2 - q_1) = r_1 - r_2$. Fazendo $k = (q_2 - q_1)$, temos que $r_1 - r_2 = bk$, com $k \in \mathbb{Z}$, mostrando que $b|(r_1 - r_2)$.

Portanto $b \leq (r_1 - r_2)$ é absurdo, pois contradiz a hipótese. Logo, $r_1 = r_2$ e concluímos também que $b \cdot (q_2 - q_1) = 0$. Se $b \neq 0$, temos $(q_2 - q_1) = 0$, mostrando que $q_2 = q_1$. $\square$

Exemplo 5: Para $a = 47$ e $b = 6$, temos que $47 = 6 \cdot 7 + 5$ que pela prova de existência acima podemos escrever que $6 \cdot 7 < 47 < 6 \cdot 8$.

Exemplo 6: Para dividir o número 54 por 13, determinamos os resultados da subtração do número 54 pelos múltiplos de 13:

$$54 - 1 \cdot 13 = 41,$$

$$54 - 2 \cdot 13 = 28,$$

$$54 - 3 \cdot 13 = 15,$$

$$54 - 4 \cdot 13 = 2,$$

$$54 - 5 \cdot 13 = -11 < 0.$$

Assim, a divisão euclidiana de 54 por 13 se expressa como: $54 = 4 \cdot 13 + 2$.

Lema 1. *Sejam a e b dois inteiros positivos e $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Então $mdc(a, b) = mdc(b, r)$.*

Demonstração: Com efeito, se $a = bq + r$, então $r = a - bq$. Seja k um divisor comum de a e de b; então $k|a$ e $k|b$. Assim, $k|r$, ou seja, k é um divisor comum de b e de r. Reciprocamente, como $a = bq + r$, vem imediatamente que todo divisor comum de b e de r é divisor comum de b e de a. Assim, o conjunto dos divisores comuns de a e de b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e de r. Logo, $mdc(a, b) = mdc(b, r)$. $\square$

Demonstrado esse resultado, podemos enunciar e provar o algoritmo de Euclides:

Teorema 2. *Sejam a e b inteiros positivos, com $a \geq b$. Usando sucessivamente o algoritmo da divisão, segue do lema 1 que o problema de achar o $mdc(a, b)$ reduz-se a achar o $mdc(b, r)$.*

Demonstração: Naturalmente, repetindo esse processo e fazendo divisões sucessivas,teremos:

$$
\begin{gathered}
a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < b \\
b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2 \\
\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \text{ com } 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1}, \text{ com } r_{n+1} = 0
\end{gathered}
$$

Como o resto diminui a cada passo, o processo não pode continuar indefinidamente, e alguma das divisões deve ser exata. Suponhamos então que r_{n+1} seja o primeiro resto nulo, como está indicado antes. Do lema 1, temos que:

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \cdots = mdc(r_{n-1}, r_n)$$

Finalmente, como $r_n | r_{n-1}$ é fácil ver que $mdc(r_{n-1}, r_n) = r_n$, logo, $mdc(a, b) = r_n$. $\square$

Demonstramos que, nesse processo o máximo divisor comum de a e b é o último resto diferente de zero.

Lema 2. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, $mdc(a, b + na) = mdc(a, b - na) = mdc(a, b)$.*

Exemplo 7: Calcule o $mdc(876, 597)$

Como $876 = 1 \cdot 597 + 279$, pelo lema 2, temos que $mdc(876, 597) = mdc(597, 279)$. Mas $597 = 2 \cdot 279 + 39$. Portanto, o lema 2 pode ser aplicado novamente para obtermos $mdc(597, 279) = mdc(279, 39)$.

Continuando o processo, $279 = 7 \cdot 39 + 6$, temos $mdc(279, 39) = mdc(39, 6)$ e de $39 = 6 \cdot 6 + 3$ temos $mdc(39, 6) = mdc(6, 3)$. Finalmente, como $6 = 2 \cdot 3 + 0$ temos $mdc(6, 3) = mdc(3, 0) = 3$.

Assim, $mdc(876, 597) = mdc(597, 279) = mdc(279, 39) = mdc(39, 6) = mdc(6, 3) = mdc(3, 0) = 3$.

É usual o seguinte dispositivo de cálculo no emprego do algoritmo de Euclides para encontrar o $mdc(a, b)$ de acordo com o Teorema 2:

Geralmente, para dividir a por b utilizamos o seguinte esquema:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

Se mudarmos um pouco o esquema para:

$$\begin{array}{r|l} & q \\ \hline a & b \\ \hline & r \end{array}$$

Será fácil dispor os números que intervêm no processo de cálculo do $mdc(a, b)$ que seguem do Teorema 2 e aplicarmos o dispositivo prático:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & \cdots & q_n & q_{n+1} \\ \hline a & b & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} & r_n \\ \hline & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & \cdots & r_n & 0 \end{array}$$

O procedimento exposto se traduz na seguinte REGRA:

Para se "achar" o mdc de dois inteiros a e b positivos, divide-se o maior pelo menor, este pelo primeiro resto obtido, o segundo resto pelo primeiro, e assim sucessivamente até encontrar um resto nulo. O último resto não nulo é o máximo divisor comum procurado.

Teorema 3. *(Gabriel Lamé) Sejam a e b inteiros positivos, com $a \geq b$. Então, o número de divisões do algoritmo de Euclides nunca é superior a cinco vezes o número de algarismos do menor dos números, que neste caso é b.*

Caso o leitor tenha interesse na demonstração do Teorema de Gabriel Lamé veja a referência [4].

Segundo o teorema 3, se b é igual a 99, então o número de divisões no algoritmo de Euclides é no máximo 10, não sendo influenciado por a.

Exemplo 8: Encontre o $mdc(1128, 336)$ aplicando o dispositivo prático.

Aplicando o dispositivo prático, temos:

	3	2	1	4
1128	336	120	96	24
	120	96	24	0

Logo, $mdc(1128, 336) = 24$.

Além de servir de ferramenta computacional para o cálculo do mdc, a divisão euclidiana tem consequências teóricas importantes. O algoritmo de Euclides também pode ser usado para achar a expressão do $mdc(a, b) = r_n$ como combinação linear de a e de b. Para isso basta eliminar sucessivamente os restos $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_3, r_2, r_1$ entre as n primeiras igualdades do Teorema 2.

Vamos comprovar esse fato no caso em que $r_3 | r_2$.

Neste caso,

$$a = b \cdot q_1 + r_1, \text{ logo } r_1 = a - b \cdot q_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2, \text{ logo } r_2 = b - r_1 \cdot q_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3, \text{ logo } r_3 = r_1 - r_2 \cdot q_3$$

Como r_3 divide r_2, temos que $mdc(a,b) = r_3$ e substituindo os valores de r_2 e r_1 obtemos:

$mdc(a,b) = r_3 = r_1 - r_2 \cdot q_3$

$mdc(a,b) = r_3 = r_1 - (a - r_1q_2) \cdot q_3$

$mdc(a,b) = r_3 = (1 + q_2q_3) \cdot r_1 - a \cdot q_3$

$mdc(a,b) = r_3 = (1 + q_2q_3)(b - aq_1) - a \cdot q_3$

$mdc(a,b) = r_3 = (1 + q_2q_3) \cdot b - (1 + q_2q_3) \cdot aq_1 - a \cdot q_3$

$mdc(a,b) = r_3 = (1 + q_2q_3) \cdot b - (q_1 + q_1q_2q_3 + q_3) \cdot a$

Agora basta tomar $\beta = (1 + q_2q_3)$ e $\alpha = (q_1 + q_1q_2q_3 + q_3)$.

Dessa forma, fica demonstrado que $mdc(a,b) = \beta \cdot b - \alpha \cdot a$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Conclusão: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, sempre podemos escrever o $mdc(a,b)$ como uma combinação linear de a e b, ou seja, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a,b) = a \cdot \alpha + b \cdot \beta$.

Teorema 4. *(Teorema de Bézout) Se $d = mdc(a,b)$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, de modo que $ax_0 + by_0 = d$.*

Demonstração: Se $d = mdc(a,b)$, temos que $d|a$ e $d|b$. Seja $c \in \mathbb{Z}$, onde $c|a$ e $c|b$. Pela proposição 6, podemos afirmar que se $c|a$ e $c|b$ então $c|(ax_0 + by_0)$ com $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Então $ax_0 + by_0 = kc$, com $k \in \mathbb{Z}$. Se $d = mdc(a,b)$ e $c|d$ temos que $d = kc$, logo, verificamos que $ax_0 + by_0 = kc = d$. $\square$

Para encontrarmos os inteiros x_0, y_0 usamos o processo das divisões sucessivas (Teorema 2), isolando os restos e fazendo combinações até encontrar a combinação linear desejada: $ax_0 + by_0 = d$.

Exemplo 9: Achar o $mdc(963, 657)$ pelo algoritmo de Euclides e sua expressão como combinação linear de 963 e 657.

Aplicando as divisões sucessivas, temos:

	1	2	6	1	4
963	657	306	45	36	9
	306	45	36	9	0

$$\begin{aligned}
&963 = 657 \cdot 1 + 306, \text{ então } 306 = 963 - 657 \cdot 1 && (1)\\
&657 = 306 \cdot 2 + 45, \text{ então } 45 = 657 - 306 \cdot 2 && (2)\\
&306 = 45 \cdot 6 + 36, \text{ então } 36 = 306 - 45 \cdot 6 && (3)\\
&45 = 36 \cdot 1 + 9, \text{ então } 9 = 45 - 36 \cdot 1 && (4)\\
&36 = 9 \cdot 4 + 0
\end{aligned}$$

Portanto, o $mdc(963, 657) = 9$ e a sua expressão como combinação linear de 963 e 657 se obtém eliminando-se os restos $36, 45$ e 306 entre as quatro primeiras igualdades anteriores do seguinte modo:

$$\overbrace{9 = 45 - 36}^{(4)} = 45 - \overbrace{(306 - 45 \cdot 6)}^{(3)} = -306 + 7 \cdot 45 = -306 + 7 \cdot \overbrace{(657 - 306 \cdot 2)}^{(2)} = 7 \cdot 657 - 15 \cdot 306 =$$

$$7 \cdot 657 - 15 \cdot \overbrace{(963 - 657)}^{(1)} = 963 \cdot (-15) + 657 \cdot 2$$

Assim, a expressão do $mdc(963, 657) = 9$ como combinação linear é:

$$963x + 657y = 9, \text{ onde } x_0 = -15 \text{ e } y_0 = 2.$$

Teorema 5. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a, b \neq 0$. Temos que a e b são primos entre si se, e somente se, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = 1$.*

Demonstração: Se a e b são relativamente primos, então o $mdc(a, b) = 1$ e por conseguinte conforme o Teorema de Bézout, existem inteiros x e y tais que $ax_0 + by_0 = 1$.

Reciprocamente, se existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = 1$ e se, o $mdc(a, b) = d$, então $d|a$ e $d|b$. Logo, $d|(ax_0 + by_0)$ e $d|1$, o que implica que $d = 1$ ou $mdc(a, b) = 1$, isto é, a e b são primos entre si. $\square$

Corolário 1. *Se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $mdc(a,b) = d$, então o $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.*

Demonstração: Preliminarmente, observa-se que $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são inteiros, porque d é um divisor comum de a e b. Posto isso, se o $mdc(a,b) = d$, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = d$, ou seja, dividindo-se ambos os membros desta igualdade por d, temos que:

$$\left(\frac{a}{d}\right)x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)y_0 = 1$$

Logo, pelo Teorema 5, os inteiros $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são primos entre si, isto é, o $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. □

Exemplo 10: Considerando-se os números 12 e 30, sabemos que o $mdc(12, 30) = 6$ e aplicando o Corolário 1, temos que: $mdc\left(\frac{12}{6}, \frac{30}{6}\right) = mdc(2,5) = 1$.

2.3 Equações Diofantinas Lineares

A resolução de muitos problemas de aritmética depende da resolução de equações do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros dados e x e y são incógnitas a serem determinadas em $\mathbb{Z}$. É claro que se $a = 0$ ou $b = 0$ a equação tem resolução imediata. Por exemplo, se $a = 0$ e $b \neq 0$ então existe solução inteira se $b|c$ e, neste caso a solução geral é dada por $x \in \mathbb{Z}$ e $y = \frac{c}{b}$. Análogo para $b = 0$, onde neste caso a solução geral é dada por $y \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{c}{a}$.

Consideremos aqui somente os casos em que $a, b \neq 0$ e dada uma equação da forma $ax + by = c$, as perguntas naturais que se colocam são as seguintes:

1. Quais são as condições para que essa equação possua solução?

2. Quantas são as soluções?

3. Como calcular as soluções, caso existam?

Daremos a seguir respostas a essas perguntas no caso das equações em questão.

Temos que todo par de inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$ é uma solução inteira ou apenas uma solução da equação $ax + by = c$.

Consideremos, por exemplo, a equação diofantina linear com duas incógnitas:

$$3x + 6y = 18$$

Temos:

$$3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 18$$

$$3 \cdot (-6) + 6 \cdot 6 = 18$$

$$3 \cdot 10 + 6 \cdot (-2) = 18$$

Logo, os pares de inteiros:

$$(4, 1), (-6, 6), (10, -2)$$

são algumas das soluções da equação diofantina linear $3x + 6y = 18$.

Existem equações diofantinas lineares que não têm solução. Assim, por exemplo, a equação diofantina linear:

$$2x + 4y = 7$$

não tem solução, porque $2x + 4y$ é um inteiro par quaisquer que sejam os valores inteiros de x e y, enquanto que 7 é um inteiro ímpar (observa-se que $mdc(2, 4) = 2$ que não divide 7).

De modo geral, a equação diofantina linear $ax + by = c$ não tem solução todas as vezes que sendo $d = mdc(a, b)$, temos que d não divide c, como é óbvio.

2.3.1 Condição de Existência da Solução

Teorema 6. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a e b não ambos nulos e seja $d = mdc(a, b)$. A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se e somente se d divide c.*

Demonstração: Vejamos o caso em que $a, b \neq 0$, pois o caso em que $a = 0$ ou $b = 0$ já foi mencionado.

Suponhamos que a equação tenha solução e que existam $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = c$. Como $d|a$ e $d|b$, temos que d divide qualquer combinação linear formada pelos inteiros a e b, portanto, $d|(ax + by)$, ou seja, $d|c$.

E reciprocamente temos por hipótese que $d|c$. Então $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $kd = c$. Usando o Teorema Bézout, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $a\alpha + b\beta = d$. Multiplicando essa igualdade por k obtemos $(a\alpha)k + (b\beta)k = dk$ ou seja $a(\alpha k) + b(\beta k) = c$, o que mostra que $\alpha k = x$ e $\beta k = y$, e assim $(x_0, y_0) = (\alpha k, \beta k)$ é solução da equação $ax + by = c$. $\square$

Observação:

Na Geometria Analítica, a equação $ax + by = c$ representa uma reta r. Ao procurarmos soluções em $\mathbb{Z}$ da equação $ax + by = c$, estamos perguntando se a reta r, por ela representada, contém pontos que tenham ambas as coordenadas inteiras. O Teorema 6 nos diz que existem equações dessa forma sem soluções inteiras, por exemplo, a equação $12x + 8y = 7$ não tem soluções inteiras, já que $mdc(12, 8) = 4$ que não divide 7. Fica, então, provado o fato surpreendente que a reta r de equação $12x + 8y = 7$ consegue evitar todos os pontos do plano cartesiano tal que o par (x, y) tenha coordenadas inteiras.

2.3.2 Soluções da equação $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$.

Teorema 7. *Se d divide c, sendo $d = mdc(a, b)$, e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:*

$$\boxed{x = x_0 + \frac{b}{d}t \quad e \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \text{ com } t \in \mathbb{Z}}$$

Demonstração: Suponhamos que o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e seja x_1, y_1 uma outra solução qualquer desta equação. Então, temos que:

$$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1 \tag{1}$$

e, portanto de (1) obtemos:

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1) \tag{2}$$

Como o $mdc(a, b) = d$, temos que existem inteiros α e β tais que $a = d\alpha$ e $b = d\beta$, com α e β primos entre si conforme Corolário 1. Substituindo estes valores de a e b na equação (2) e em seguida cancelando o fator com d, obtemos:

$$\alpha(x_1 - x_0) = \beta(y_0 - y_1) \tag{3}$$

De (3) concluímos que $\beta|\alpha(x_1 - x_0)$ já que $(y_0 - y_1) \in \mathbb{Z}$, e como o $mdc(\alpha, \beta) = 1$, segue que $\beta \nmid \alpha$. Daí $\beta|(x_1 - x_0)$, isto é existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x_1 - x_0 = \beta t \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3) obtemos:

$$\alpha\beta t = \beta(y_0 - y_1)$$

Daí:

$$y_0 - y_1 = \alpha t$$

Portanto, temos as fórmulas:

$$x_1 - x_0 = \beta t, \quad \text{mas como} \quad \beta = \frac{b}{d} \quad \text{então} \quad x_1 = x_0 + \frac{b}{d}t$$

$$y_0 - y_1 = \alpha t, \quad \text{mas como} \quad \alpha = \frac{a}{d} \quad \text{então} \quad y_1 = y_0 - \frac{a}{d}t$$

$\square$

Estes valores de x_1 e y_1 satisfazem realmente a equação $ax + by = c$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, pois substituindo na equação obtemos:

$$ax_1 + by_1 = a\left[x_0 + \frac{b}{d}t\right] + b\left[y_0 - \frac{a}{d}t\right] = ax_0 + by_0 + \left(\frac{ab}{d} - \frac{ab}{d}\right)t = c + 0 \cdot t = c$$

Observação:

No caso do $mdc(a, b) = d$ e $d|c$, a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções, uma para cada valor arbitrário do inteiro t.

Corolário 2. *Se o $mdc(a, b) = 1$ e se o par x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas:*

$$\boxed{x = x_0 + bt \quad e \quad y = y_0 - at, \text{ com } t \in \mathbb{Z}}$$

Corolário 3. *Toda equação diofantina linear da forma $ax+by = c$, com $mdc(a, b) = d$ onde $d|c$, é equivalente a uma equação do tipo $Ax + By = C$ em que $mdc(A, B) = 1$. Para que isto ocorra basta considerar $A = \frac{a}{d}$, $B = \frac{b}{d}$ e $C = \frac{c}{d}$.*

Uma solução particular da equação diofantina linear se obtém por tentativas ou pelo algoritmo de Euclides. Em ambos os casos a solução geral da equação $ax + by = c$ é obtida usando o Teorema 7 ou o Corolário 2, onde a partir daí, podemos sempre encontrar todas as soluções inteiras dessa equação, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Claro que para propósitos práticos, inclusive, é suficiente considerarmos o caso de uma equação $ax+by = c$ em que $mdc(a, b) = 1$ conforme vimos no Corolário 3. Para isso aplicamos o Corolário e usamos o algoritmo de Euclides de trás para a frente para determinar inteiros n e m tais que $an + bm = mdc(a; b) = 1$ e depois multiplicamos ambos os membros da equação por c, obtendo $a(nc)+b(mc) = c$, dando-nos a solução particular $x_0 = nc$ e $y_0 = mc$. As outras soluções são obtidas aplicando o Corolário 2.

Exemplo 11: Determinar todas as soluções inteiras e positivas da equação diofantina $18x + 5y = 48$.

Solução: Determinemos o $mdc(18, 5)$ pelo algoritmo de Euclides:

	3	1	1	2
18	5	3	2	1
	3	2	1	0

$18 = 5 \cdot 3 + 3$, então $3 = 18 - 5 \cdot 3$

$5 = 3 \cdot 1 + 2$, então $2 = 5 - 3 \cdot 1$

$3 = 2 \cdot 1 + 1$, então $1 = 3 - 2 \cdot 1$

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

Portanto, o $mdc(18, 5) = 1$ e a equação dada tem solução pois $mdc(18, 5) = 1|48$. Agora para escrever 1 como combinação linear de 18 e 5 basta eliminar os restos 2 e 3 das três primeiras igualdades anteriores do seguinte modo:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2(18 - 5 \cdot 3) - 5 = 18 \cdot 2 + 5 \cdot (-7)$$

Isto é:

$$18 \cdot 2 + 5 \cdot (-7) = 1$$

Multiplicando a equação por 48, temos:

$$18 \cdot 96 + 5 \cdot (-336) = 48$$

Logo, o par de inteiros $x_0 = 96$ e $y_0 = -336$ é uma solução particular da equação proposta, e utilizando o Corolário 2 as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 96 + 5t \\ \\ y = y_0 - at = -336 - 18t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

As soluções inteiras e positivas são encontradas escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$x > 0 \text{ e } y > 0, \text{ assim temos que } 96 + 5t > 0 \text{ e } -336 - 18t > 0$$

Isto é:

$$t > -19,2 \quad \text{e} \quad t < -18,6$$

o que implica que $t = -19$ e, portanto:

$$\begin{cases} x = 96 + 5 \cdot (-19) = 1 \\ \\ y = -336 - 18 \cdot (-19) = 6 \end{cases}$$

Assim, o par de inteiros $x = 1$ e $y = 6$ é a única solução inteira e positiva da equação $18x + 5y = 48$.

Exemplo 12: Resolver a equação diofantina linear $39x + 26y = 105$.

Solução: Determinemos o $mdc(39, 26)$ pelo algoritmo de Euclides:

	1	2
39	26	13
	13	0

Assim, o $mdc(39, 26) = 13$ e a equação dada não tem solução em $\mathbb{Z}$ pois $mdc(39, 26) = 13 \nmid 105$.

Exemplo 13: Determinar todas as soluções naturais da equação diofantina linear $28x - 12y = 80$.

Solução: É fácil perceber que o $mdc(28, 12) = 4$ e a equação dada tem solução pois $mdc(28, 12) = 4|80$. Utilizando o Corolário 3 e dividindo a equação $28x - 12y = 80$ por 4, obtemos a equação equivalente: $7x - 3y = 20$ onde $mdc(7, 3) = 1$.

Agora, escrevendo 1 como combinação linear de 7 e 3 temos:

$$7 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1$$

Multiplicando a equação por 20, obtemos:

$$7 \cdot 20 - 3 \cdot 40 = 20$$

Logo, o par de inteiros $x_0 = 20$ e $y_0 = 40$ é uma solução particular da equação proposta, e utilizando o Corolário 2 na equação equivalente $7x - 3y = 20$ já que $mdc(7, 3) = 1$ as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 20 - 3t \\ \\ y = y_0 - at = 40 - 7t \end{cases}, \text{com } t \in \mathbb{Z}.$$

As soluções naturais são encontradas escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \text{ assim temos que } 20 - 3t \geq 0 \text{ e } 40 - 7t \geq 0$$

Isto é:

$$t \leq \frac{20}{3} \approx 6,67 \quad \text{e} \quad t \leq \frac{40}{7} \approx 5,71.$$

O que implica que se $\{t \in \mathbb{Z}; t \leq 5\}$ a equação $28x - 12y = 80$ possui uma infinidade de soluções em $\mathbb{N}$.

3 Aplicações das Equações Diofantinas Lineares

Este capítulo será dividido em três seções:

Na primeira vamos apresentar algumas situações-problema que os alunos do ensino médio encontram em alguns livros didáticos, provas de vestibulares, OBMEP e outros.

Na segunda vamos deixar algumas atividades como sugestão para serem trabalhadas com os alunos em sala de aula para a introdução desse assunto.

E na terceira apresentaremos alguns softwares matemáticos para resolver e esboçar o gráfico dessas equações.

3.1 Problemas Envolvendo Equações Diofantinas Lineares

Problema 1. *Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes? (LA ROQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 39 [12]).*

Solução: As equipes de basquete e vôlei são compostas, respectivamente, de 5 e 6 jogadores. Como precisamos de duas equipes por quadra, modelamos nosso problema através da seguinte equação diofantina:

$12x + 10y = 80$ onde x e y representam, respectivamente, a quantidade de quadras de vôlei e basquete necessárias para acomodar os 80 jogadores.

Temos que o $mdc(12, 10) = 2$ e a equação dada tem solução pois $2|80$. Utilizando o Corolário 3 e dividindo a equação $12x + 10y = 80$ por 2, obtemos a equação equivalente: $6x + 5y = 40$ onde $mdc(6, 5) = 1$.

Escrevendo 1 como combinação linear de 6 e 5 temos:

$$6 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = 1$$

Multiplicando a equação por 40, obtemos:

$$6 \cdot 40 + 5 \cdot (-40) = 40$$

Logo, o par de inteiros $x_0 = 40$ e $y_0 = -40$ é uma solução particular da equação proposta, e utilizando o Corolário 2 na equação equivalente $6x + 5y = 40$ já que $mdc(6, 5) = 1$ as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 40 + 5t \\ \\ y = y_0 - at = -40 - 6t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{Z}.$$

Como o número de quadras é natural devemos restringir nossa resposta de modo que escolhendo t sejam satisfeitas as desigualdades:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \text{ assim temos que } 40 + 5t \geq 0 \text{ e } -40 - 6t \geq 0$$

Isto é:

$$t \geq -8 \quad \text{e} \quad t \leq -\frac{40}{6} \approx -6,67, \quad \text{daí temos que } -8 \leq t \leq -7.$$

O que implica que:

Para $t = -8$, temos 0 quadras de vôlei e 8 quadras de basquete.

Para $t = -7$, temos 5 quadras de vôlei e 2 quadras de basquete.

Problema 2. *Encontrar todos os números naturais N menores do que 10.000 tais que:*

- *O resto da divisão de N por 37 é 9;*

- *O resto da divisão de N por 52 é 15.*

Solução: Dividindo N por 37, obtemos um quociente x e resto 9, ou seja,

$$(i) \quad N = 37x + 9$$

Analogamente, representando o outro quociente por y, temos

$$(ii) \quad N = 52y + 15$$

De (i) e (ii), segue que $37x + 9 = 52y + 15$, ou seja encontramos a equação diofantina linear

$$37x - 52y = 6$$

Inicialmente, é fácil perceber que 37 é primo e não divide 52, então o $mdc(52, 37) = 1$ e como $1|6$ a equação possui solução em $\mathbb{Z}$.

Para escrevermos $1 = mdc(52, 37)$ como combinação linear dos números 52 e 37 vamos recorrer ao algoritmo de Euclides:

	1	2	2	7
52	37	15	7	1
	15	7	1	0

$52 = 1 \cdot 37 + 15$, então $15 = 52 - 1 \cdot 37$

$37 = 2 \cdot 15 + 7$, então $7 = 37 - 2 \cdot 15$

$15 = 2 \cdot 7 + 1$, então $1 = 15 - 2 \cdot 7$

$7 = 7 \cdot 1 + 0$

Daí,

$$1 = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2 \cdot (37 - 2 \cdot 15) = 5 \cdot 15 - 2 \cdot 37 = 5 \cdot (52 - 37) - 2 \cdot 37 = 5 \cdot 52 - 7 \cdot 37.$$

Assim, $1 = mdc(52, 37)$ como combinação linear é representado por:

$$37 \cdot (-7) - 52 \cdot (-5) = 1$$

Multiplicando a equação por 6, segue que

$$37 \cdot (-42) - 52 \cdot (-30) = 6$$

Temos que $x_0 = -42$ e $y_0 = -30$ é uma solução particular da equação proposta, e utilizando o Corolário 2 as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = -42 - 52t \\ y = y_0 - at = -30 - 37t \end{cases} \text{, com } t \in \mathbb{Z}.$$

Para encontrar as soluções da equação em $\mathbb{N}$, basta determinarmos t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \text{, assim temos que } -42 - 52t \geq 0 \text{ e } -30 - 37t \geq 0$$

Temos assim as condições:

$$-42 - 52t \geq 0 \text{, onde } t \leq -\frac{21}{26} \approx -0,808 \text{ e } -30 - 37t \geq 0 \text{, onde } t \leq -\frac{30}{37} \approx -0,812.$$

O que implica que se $\{t \in \mathbb{Z}; t \leq -1\}$ temos que a equação $37x - 52y = 6$ possui uma infinidade de soluções em $\mathbb{N}$.

Retomando à pergunta inicial, os números N que estamos procurando são dados, por:

$$N = 37x + 9 = 37 \cdot (-42 - 52t) + 9 = -1.545 - 1.924t$$

Para que $N < 10.000$, devemos ter

$$-1.545 - 1.924t < 10.000 \text{ daí } t > -\frac{11.545}{1.924} \approx -6,001$$

Logo se $\{t \in \mathbb{Z}; t \geq -6\}$ a equação $N = -1.545 - 1.924t$ nos fornece um número $N < 10.000$.

Agora para que esse número N seja natural e menor que 10.000 devem ser satisfeitas ao mesmo tempo as condições $\{t \in \mathbb{Z}; t \leq -1\}$ e $\{t \in \mathbb{Z}; t \geq -6\}$ que implicam que $t \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\}$.

Assim, os seis possíveis valores naturais para N são: $379, 2303, 4227, 6151, 8075$ e 9.999.

Problema 3. *O valor da entrada de um cinema é R$ 8,00 e da "meia" entrada é de R$ 5,00. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R$ 500,00? (IEZZI, G. et al. p. 52, exercício 36 [11]).*

Solução: Inicialmente vamos identificar as variáveis do problema, seja x o número de pessoas que pagarão o valor integral da entrada, e y o número de pessoas que pagarão o valor da meia entrada. Dessa forma a equação representativa é:

$$8x + 5y = 500$$

Vamos encontrar o $mdc(8, 5)$ pelo algoritmo de Euclides:

	1	1	1	2
8	5	3	2	1
	3	2	1	0

$8 = 1 \cdot 5 + 3$, então $3 = 8 - 1 \cdot 5$

$5 = 1 \cdot 3 + 2$, então $2 = 5 - 1 \cdot 3$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$, então $1 = 3 - 1 \cdot 2$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

Como o $mdc(8, 5) = 1$, a equação apresenta solução pois $mdc(8, 5) = 1|500$. Agora para escrever 1 como combinação linear de 8 e 5 basta eliminar os restos 2 e 3 das três primeiras igualdades anteriores do seguinte modo:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2(8 - 5) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5$$

Isto é:

$$8 \cdot (2) + 5 \cdot (-3) = 1$$

Multiplicando a equação por 500, temos:

$$8 \cdot (1.000) + 5 \cdot (-1.500) = 500$$

Logo, o par de inteiros $x_0 = 1.000$ e $y_0 = -1.500$ é uma solução particular da equação proposta, e utilizando o Corolário 2 as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 1.000 + 5t \\ y = y_0 - at = -1.500 - 8t \end{cases}, \text{com } t \in \mathbb{Z}.$$

O problema requer soluções inteiras e positivas, que serão encontradas escolhendo t de modo que sejam satisfeitas as desigualdades:

$$x > 0 \text{ e } y > 0, \text{ assim temos que } 1.000 + 5t > 0 \text{ e } -1.500 - 8t > 0$$

Isto é:

$$t > -200 \quad \text{e} \quad t < -187,5$$

o que implica que $\{t \in \mathbb{Z}; -200 < t < -187,5\}$. Agora para que encontremos o menor número de pessoas, devemos utilizar o maior valor inteiro de t, então tem-se que $t = -188$.

Daí, obtemos os valores

$$\begin{cases} x = 1.000 + 5 \cdot (-188) = 60 \\ \\ y = -1.500 - 8 \cdot (-188) = 4 \end{cases}$$

Sendo assim, para a bilheteria ser de R$ 500,00 com o menor número de pessoas possível, deve-se ter 60 pessoas que irão pagar R$ 8,00 cada e 4 pessoas que irão pagar R$ 5,00 cada. Assim, nessas condições o menor número de pessoas será 64.

Problema 4. *Se o custo de uma postagem é de* 83 *centavos e os valores dos selos são de* 6 *e* 15 *centavos, como podemos combinar os selos para fazer essa postagem?*

Solução: Se x denota a quantidade de selos de 6 centavos e y denota a quantidade de selos de 15 centavos, então a equação que representa essa situação é:

$$6x + 15y = 83$$

É fácil ver que o $mdc(15, 6) = 3$ e como $3 \nmid 83$ a equação diofantina $6x + 15y = 83$ não possui soluções inteiras e assim o problema de postagem não tem solução.

Problema 5. *Se um trabalhador recebe* 510 *reais em tíquetes de alimentação, com valores de* 20 *reais ou* 50 *reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?*

Solução: Se x denota a quantidade de tíquetes de 20 reais e y a quantidade de tíquetes de 50 reais então a equação é:

$$20x + 50y = 510$$

É fácil perceber que o $mdc(50, 20) = 10$ e a equação dada tem solução pois $mdc(50, 20) = 10|510$. Utilizando o Corolário 3 e dividindo a equação $20x + 50y = 510$ por 10, obtemos a equação equivalente: $2x + 5y = 51$ onde $mdc(5, 2) = 1$.

Agora, escrevendo 1 como combinação linear de 2 e 5 temos:

$$2 \cdot (-2) + 5 \cdot (1) = 1$$

Multiplicando a equação por 51, obtemos:

$$2 \cdot (-102) + 5 \cdot (51) = 51$$

Onde $x_0 = -102$ e $y_0 = 51$ é uma solução particular da equação proposta, e utilizando o Corolário 2 na equação equivalente $2x + 5y = 51$ já que $mdc(5, 2) = 1$ as demais soluções são dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = -102 + 5t \\ \\ y = y_0 - at = 51 - 2t \end{cases} \text{, com } t \in \mathbb{Z}.$$

Na busca de soluções não negativas devem ser satisfeitas as desigualdades:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0, \text{ assim temos que } -102 + 5t \geq 0 \text{ e } 51 - 2t \geq 0$$

Isto é:

$$t \geq 20,4 \quad \text{e} \quad t \leq 25,5$$

o que implica que $\{t \in \mathbb{Z}; 21 \leq t \leq 25\}$, assim $t \in \{21, 22, 23, 24, 25\}$ e temos 5 possibilidades para os carnês, a saber:

Para $t = 21$, temos um carnê com 3 tíquetes de 20 reais e 9 tíquetes de 50 reais.

Para $t = 22$, temos um carnê com 8 tíquetes de 20 reais e 7 tíquetes de 50 reais.

Para $t = 23$, temos um carnê com 13 tíquetes de 20 reais e 5 tíquetes de 50 reais.

Para $t = 24$, temos um carnê com 18 tíquetes de 20 reais e 3 tíquetes de 50 reais.

Para $t = 25$, temos um carnê com 23 tíquetes de 20 reais e 1 tíquetes de 50 reais.

Observação:

A partir daqui deixamos alguns problemas a cargo do leitor para que o mesmo verifique que podem ser aplicados a alunos do Ensino Fundamental e/ou Médio, onde suas respostas estão na seção final.

Problema 6. *Dois irmãos, João e José, pescaram em uma manhã "x" e "y" peixes, respectivamente. Sabendo que $3x + 4y = 61$, determine as possíveis quantidades de peixes que eles conseguiram juntos? (IEZZI et. al, 2004, p. 200 [11]).*

Problema 7. *Camila possui R$ 500,00 depositados num banco. Duas operações bancárias são permitidas, retirar R$ 300,00 e depositar R$ 198,00. Essas operações podem ser repetidas quantas vezes Camila desejar, mas somente o dinheiro inicialmente depositado pode ser usado. Qual o maior valor que Camila pode retirar do banco? (REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS, abril. 2003 [18]).*

Problema 8. *Subindo uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau. Subindo a mesma escada de três em três degraus, sobram dois degraus. Determine quantos degraus possui a escada, sabendo que o seu número é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100. (ARITMÉTICA I - Profmat [10]).*

Problema 9. *Mostre que nenhum número pode deixar resto 5 quando dividido por 12 e resto 4 quando dividido por 15.*

Problema 10. *Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível? (ARITMÉTICA I - Profmat [10]).*

Problema 11. *Um número natural divisível por 3 deixa resto 5 quando dividido por 100.*

(a) Coloque em ordem crescente todos os números de três algarismos com a propriedade acima;

(b) Qual o menor número de 4 algarismos com a propriedade acima? E o maior número de 4 algarismos com a propriedade? (REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS, abril. 2002 [17]).

Problema 12. *João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento? (PEREIRA; WATANABE, 2005, p. 54 [15]).*

Problema 13. *Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue. Uma delas examina 15 amostras de cada vez enquanto a outra examina 25. De quantos modos diferentes essas máquinas podem ser acionadas para examinar 2 mil amostras? (LA ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 39 [12]).*

Problema 14. *Ao entrar num bosque, alguns viajantes avistam 37 montes de maçãs. Após serem retiradas 17 frutas, o restante foi dividido igualmente entre 79 pessoas. Qual pode ter sido a menor parte recebida de cada pessoa? (IEZZI, G. et al. 2003 [11]).*

Problema 15. *Um grupo de pessoas gastou 690 dólares num hotel. Sabendo que apenas alguns dos homens estavam acompanhados pelas esposas e que cada homem gastou 18 dólares e cada mulher gastou 15 dólares, determinar quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel. (FONSECA, 2011, p. 116 [8]).*

Problema 16. *Num determinado lugar a moeda é o mirrél. Suponhamos que só existam moedas de 15 e 7 mirreis e que se queira pagar uma determinada quantia em mirreis. Será que é sempre possível? E se existirem moedas de 12 e 30 mirreis? (FONSECA, 2011, p. 116 [8]).*

Problema 17. *Para participar de um evento comemorativo em um clube, não sócios pagavam R$ 12,00 e sócios R$ 8,00. Sabendo-se que foram arrecadados R$ 908,00 na portaria, quantas pessoas no máximo poderiam estar presentes neste evento? (FONSECA, 2011, p. 116 [8]).*

3.2 Atividades Envolvendo Equações Diofantinas

As atividades abaixo foram propostas no trabalho de POMMER [16] e aplicadas a alunos do Ensino Médio. Creio que tais atividades são de suma importância para a compreensão e introdução das equações diofantinas no contexto do aluno.

Atividade 01 - O Jogo do Sorvete

- O jogo transcorre em quatro rodadas de, no máximo, 3 minutos cada.
- O jogo será disputado entre duas duplas da mesma série.
- Cada dupla registra seus resultados em uma folha separada entregue pelo professor.
- Cada quadra de alunos, das duas duplas, recebe quatro cartas fechadas com os seguintes valores: R$ 8,00; R$ 10,00; R$ 12,00 e R$ 14,00.
- Cada carta corresponde ao valor que deve ser gasto em sorvetes.
- São duas opções de sorvetes de casquinha: bola simples, a R$ 2,00 e bola dupla, a R$ 4,00.
- Existem muitos sabores disponíveis para os pedidos.
- Inicia o jogo a dupla que ganhar na disputa de par ou ímpar.
- A dupla vencedora retira a carta de cima e a mostra para todos.
- A dupla oponente registra o valor da carta e todas as possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, sem as revelar à dupla adversária.
- O jogo continua até o término das cartas, invertendo em cada rodada os papéis das duplas.
- Completando-se as quatro rodadas, cada dupla mostra todos os resultados obtidos à dupla adversária, que deverá conferi-los, dispondo de três minutos para tal tarefa. Caso haja discordância da correção por parte da dupla cujos resultados estejam sendo verificados, será dado um minuto para a réplica, a ser registrada, por escrito.

- Contagem dos pontos: De comum acordo, cada resultado correto vale 1 ponto e cada resultado errado perde 1 ponto. Ganha quem tiver mais pontos.

Na folha que o professor deve entregar aos alunos para a atividade devem constar um modelo da primeira tabela e quatro modelos da segunda, seguem as tabelas abaixo:

Valor da carta sorteada	Possibilidades de compra
R$	
R$	
R$	
R$	

Tabela 1: *Planilha para preenchimento de todas as possibilidades de compra*

<table>
<tr><td>Valor da carta</td><td>Resultados corretos?</td><td colspan="2">Possibilidades de compra</td><td>Réplica</td><td>Pontuação da dupla</td></tr>
<tr><td></td><td>( ) Sim ( ) Não</td><td>Resultados errados</td><td>Resultados faltantes</td><td>( ) Sim ( ) Não</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabela 2: *Planilha de conferência do jogo do sorvete*

Atividade 02 - Jogo das Compras na Quitanda *(Tempo limite = 8 minutos)*

Cada dupla está recebendo um jogo de CARTAS AZUIS e os números indicados nas cartas representam os possíveis valores, em reais, a serem gastos na situação abaixo.

“Uma dona de casa leva uma quantia de R$ 18,00 para uma quitanda, a fim de comprar melão ou mamão, pelos preços unitários de R$ 2,00 e R$ 3,00, respectivamente. Não desejando gastar os R$ 18,00 para estas compras, quais os valores que a dona de casa poderá utilizar para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco?”

Para indicar as respostas, circule na tabela abaixo os números que correspondem aos possíveis valores para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco.

A seguir sobreponha com as cartas azuis os valores circulados.

01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	

Tabela 3: *Planilha de apoio do jogo das compras na quitanda*

Indique, se houver, em ordem crescente, os valores que ela NÃO poderá utilizar para a compra de mamão ou melão, de modo a resultar em troco:

A dupla vencedora será a que encontrar o maior número de resultados corretos no menor tempo.

Atividade 03 - Jogo dos Saques no Caixa Eletrônico *(Tempo limite = 8 minutos cada etapa)*

Este jogo é composto de 4 etapas e vence a dupla que conseguir o maior número de respostas corretas dentro do tempo estipulado de cada etapa.

Usualmente, um caixa eletrônico de banco pode dispor de cédulas (notas) para atender eventuais solicitações de saques. Suponha que todos os caixas possuam suficientes cédulas para emissão.

1ª Etapa: Um usuário deseja fazer um saque e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R$ 5,00 ou R$ 10,00. Consulta o seu saldo e verifica que possui em sua conta, no momento, R$ 61,00. Indeciso, resolve efetuar um saque, mas não deseja zerar o saldo. Marque (com X) na tabela abaixo todos os possíveis saques que poderiam ser realizados pelo usuário. Explique seu raciocínio.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Tabela 4: *Planilha da 1ª etapa do jogo dos saques no caixa eletrônico*

2ª Etapa: Um segundo usuário entra no banco e deseja sacar R$ 145,00 no caixa eletrônico, que, no momento, está disponibilizando notas de R$ 5,00, R$ 10,00, R$ 20,00 ou R$ 50,00. Preencha a 2ª coluna da tabela abaixo, indicando uma das duas possíveis respostas:

- SIM (SIM, é possível efetuar tal saque com as notas indicadas) ou
- NÃO (NÃO é possível efetuar tal saque com as notas indicadas).

Se for possível realizar o saque, escreva na 3ª coluna uma das possíveis maneiras de serem emitidas as notas para o pagamento dos R$ 145,00.

Notas emitidas pelo caixa	É possível? (Sim ou Não)	Escreva uma maneira, se possível
R$ 5,00 e R$ 10,00		
R$ 5,00 e R$ 20,00		
R$ 5,00 e R$ 50,00		
R$ 10,00 e R$ 20,00		
R$ 10,00 e R$ 50,00		
R$ 20,00 e R$ 50,00		

Tabela 5: *Planilha da 2ª etapa do jogo dos saques no caixa eletrônico*

Justifique abaixo a escolha do Não para a 2ª coluna.

3ª Etapa: Uma determinada agência deste banco oferece um serviço de caixa eletrônico com opções específicas, conforme se vê na tabela abaixo.

Caixa eletrônico	Cédulas emitidas
Caixa 1	5 e 10
Caixa 2	10 e 20
Caixa 3	20 e 50
Caixa Especial	2 e 10

Tabela 6: Opções de saque em cada caixa eletrônico

Escreva, na tabela abaixo, todos os possíveis valores dos saques para cada caixa, até a quantia máxima de R$ 50,00.

Caixa eletrônico	Cédulas emitidas	Saques permitidos
Caixa 1	5 e 10	
Caixa 2	10 e 20	
Caixa 3	20 e 50	
Caixa Especial	2 e 10	

Tabela 7: *Planilha da 3ª etapa do jogo dos saques no caixa eletrônico*

4ª Etapa: Um terceiro cliente entra numa agência com serviço de caixa eletrônico específico, indicado na tabela abaixo. Sabendo-se que ele deseja fazer um saque de R$ 1.060,00. Indique na 3ª coluna, escrevendo SIM ou NÃO, qual(is) o(s) caixa(s) eletrônico(s) do banco que permite(m) tal saque e justifique.

Caixa eletrônico	Cédulas emitidas	Saque de R$ 1.060,00
Caixa 1	5 e 10	
Caixa 2	10 e 20	
Caixa 3	20 e 50	
Caixa Especial	2 e 10	

Tabela 8: Planilha da 4ª etapa do jogo dos saques no caixa eletrônico

Atividade 04 - Quantos Pacotes de Café? *(Tempo limite = 5 minutos)*

Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café, o do tipo A (normal) e do tipo B (descafeinado). O preço do pacote da marca A é de R$ 2,00 e do pacote da marca B, R$ 3,00. Sabendo-se que ele gastou exatamente R$ 58,00, qual a equação que representa as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B?

Atividade 05 - Os Saques no Banco *(Tempo limite = 10 minutos)*

Um cliente de um banco deseja sacar R$ 65,00 no caixa eletrônico, que, no momento, está disponibilizando notas de R$ 5,00 e de R$ 20,00.

a) Com quantas cédulas de R$ 5,00 e/ou de R$ 20,00 ele poderá receber o dinheiro?

b) Qual é a equação que representa essa situação?

Atividade 06 - CDs ou DVDs? *(Tempo limite = 10 minutos)*

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês uma certa quantia para a compra de CDs ou DVDs. Se um CD custa R$ 12,00 e um DVD R$ 16,00, quais são as várias possibilidades de aquisição de um deles ou de ambos, gastando-se exatamente R$ 70,00? E qual a equação que representa este problema?

3.3 Utilizando o Maple e o Winplot

Agora iremos utilizar o MAPLE (versão 15) para solucionar algumas equações diofantinas e logo em seguida iremos também fazer a construção de alguns gráficos utilizando o WINPLOT. Pensando em facilitar ao leitor vamos utilizar alguns problemas ou atividades propostas anteriormente.

Exemplo 14: Encontre todas as soluções naturais da equação diofantina $3x + 4y = 61$ (Problema 6), com a ajuda do software MAPLE.

Para que isso possa ser feito utilizaremos o comando **"isolve"** que nos fornece as soluções inteiras da equação em função de um parâmetro, sendo este um número inteiro.

Então ao abrir o MAPLE digitamos o comando "isolve" e em seguida digitamos entre parênteses a equação diofantina linear seguida de uma vírgula para colocarmos o parâmetro desejado, encerrando o comando com ponto e vírgula.

Observe:

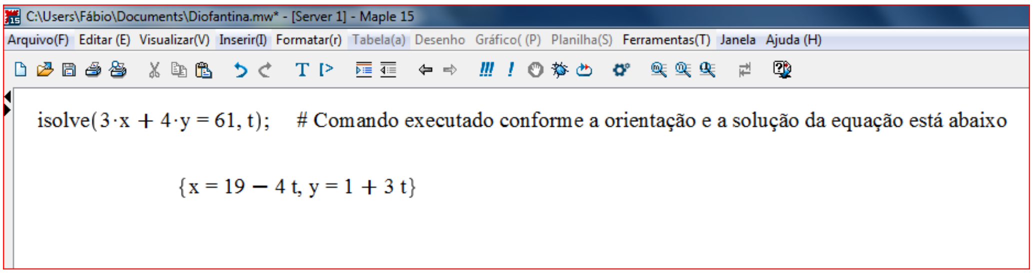

Figura 1: *Utilizando o Maple para encontrar as soluções de uma equação diofantina*

Devem ser satisfeitas as desigualdades:

$$x > 0 \;\text{ e }\; y > 0, \text{ assim temos que } 19 - 4t > 0 \;\text{ e }\; 1 + 3t > 0$$

Isto é:

$$t < \frac{19}{4} = 4,75 \quad \text{e} \quad t > -\frac{1}{3} \approx -0,33.$$

o que implica que $\{t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t \leq 4\}$, assim $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e existem 5 possibilidades para a pescaria e a quantidade de peixes que eles conseguiram juntos foi:

Para $t = 0$, temos que $x = 19$ e $y = 1$ e juntos conseguiram 20 peixes ao todo.

Para $t = 1$, temos que $x = 15$ e $y = 4$ e juntos conseguiram 19 peixes ao todo.

Para $t = 2$, temos que $x = 11$ e $y = 7$ e juntos conseguiram 18 peixes ao todo.

Para $t = 3$, temos que $x = 7$ e $y = 10$ e juntos conseguiram 17 peixes ao todo.

Para $t = 4$, temos que $x = 3$ e $y = 13$ e juntos conseguiram 16 peixes ao todo.

Exemplo 15: Utilizando o MAPLE, resolva o "Problema 12" cuja equação é $12x + 31y = 368$, onde x representa o dia do aniversário de Pedro e y o mês.

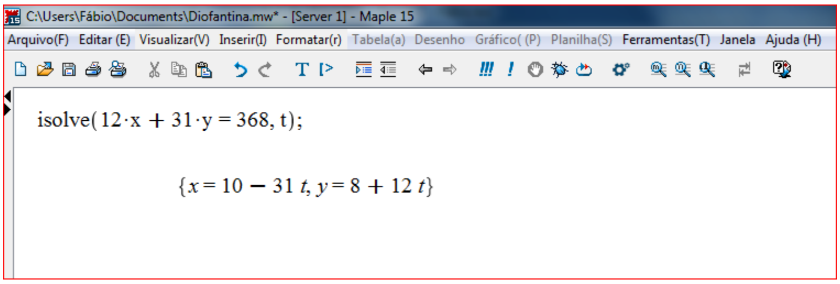

Figura 2: *Soluções da equação diofantina do problema 12 com o auxílio do Maple*

É fácil perceber que o único valor do parâmetro que satisfaz o problema é $t = 0$, pois sabemos que $1 \leq x \leq 31$ e $1 \leq y \leq 12$. Então Pedro nasceu no dia 10 de agosto e o produto pedido é $10 \cdot 8 = 80$.

Exemplo 16: Represente graficamente as soluções inteiras e positivas da equação $20x + 50y = 510$ (Problema 5) com a ajuda do WINPLOT.

No WINPLOT escolhemos a opção plotar gráfico de *"2^a dimensão"*.

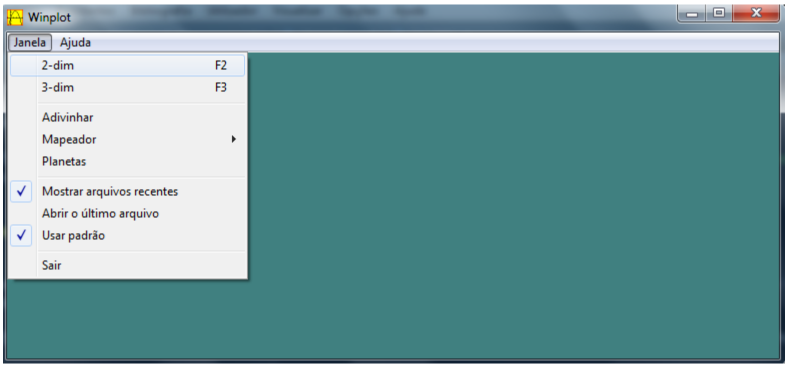

Figura 3: *Tela inicial do Winplot*

Na próxima janela selecione *"Equação"* e depois *"Reta"*.

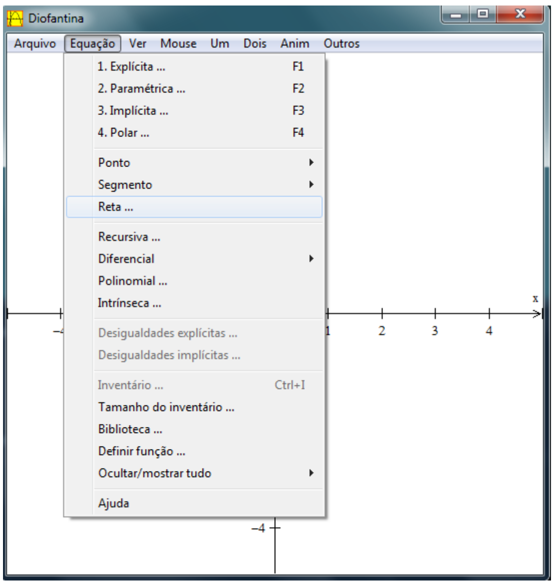

Figura 4: *Instruções para a construção do gráfico de uma reta*

Agora para plotar o gráfico da equação $ax + by = c$, basta digitar seus coeficientes.

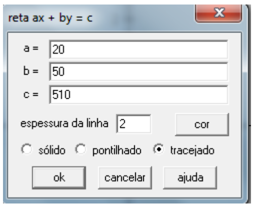

Figura 5: *Inserindo os coeficientes de uma equação diofantina que representa uma reta no plano*

Visualização geométrica do conjunto-solução da equação linear $20x + 50y = 510$ do Problema 5.

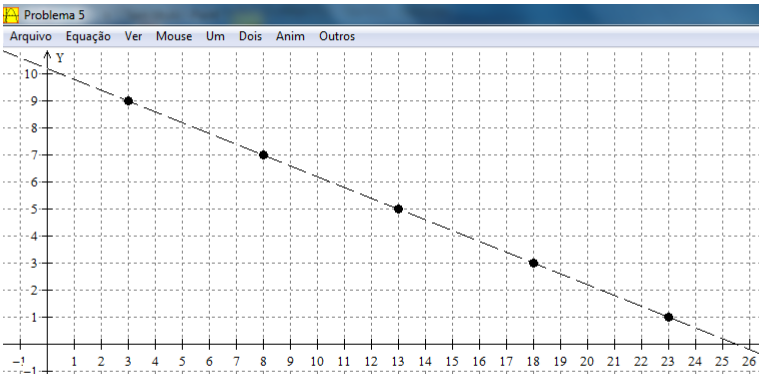

Figura 6: *Representação geométrica das soluções inteiras da equação diofantina do problema 5*

Observa-se que a interpretação geométrica desse problema é um conjunto de pontos alinhados que pertencem a reta de equação $20x + 50y = 510$, conforme mostra o gráfico acima.

Então a partir da solução geral obtida com o MAPLE, podemos atribuir valores inteiros para t e no WINPLOT inserirmos alguns pontos com coordenadas inteiras no gráfico que satisfazem a equação.

Neste caso o problema possui apenas 5 soluções com coordenadas inteiras positivas.

Observação:

Caso a Equação Diofantina Linear tenha solução, observamos que quando o coeficiente angular da reta-suporte $ax + by = c$ for negativo, teremos um número finito de soluções inteiras e positivas. Analogamente, se ele for positivo, a Equação Diofantina Linear terá infinitas soluções inteiras e positivas.

Exemplo 17: Com relação a Atividade 2 - Jogo das Compras na Quitanda é bem simples encontrar suas respostas com o auxílio do WINPLOT. Vamos inicialmente plotar o gráfico da equação $2x + 3y = 18$, onde x e y respectivamente representam as quantidades de melão e mamão.

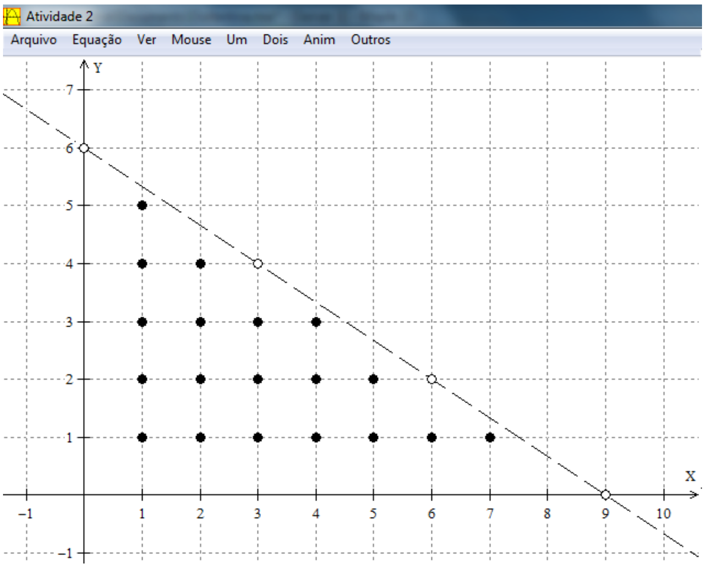

Figura 7: *Conjunto de soluções com coordenadas inteiras da atividade 2*

Observando o gráfico acima verificamos que a compra só resultará em troco quando o par (x, y) satisfazer a condição $2x + 3y < 18$, ou seja, todos os pares com coordenadas inteiras positivas que estão compreendidos entre os eixos coordenados e a reta de equação $2x + 3y = 18$ nos fornecem as soluções pedidas na atividade. Assim a dona de casa poderá fazer 19 compras diferentes resultando em troco.

Exemplo 18: Considere o enunciado do Problema 14. Se cada um dos 37 montes tem x maçãs e após serem retiradas 17 maçãs sobraram-nos r maçãs temos a equação:

$$37x - 17 = r$$

Agora como o restante das maçãs será dividido igualmente entre as 79 pessoas, temos que r é múltiplo de 79 e então é da forma $r = 79y$ onde y e a parte que cabe a cada pessoa com $y \in \mathbb{Z}$. Fazendo a substituição chegamos na equação diofantina linear:

$$37x - 79y = 17$$

Cuja solução no MAPLE é:

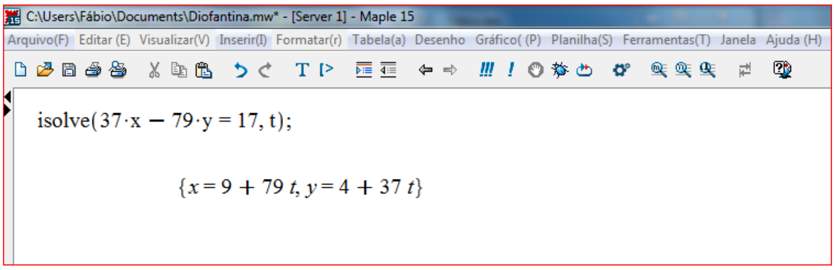

Figura 8: *Soluções da equação diofantina do problema 14 obtidas com o Maple*

Para que possamos repartir a menor quantidade possível para cada pessoa basta fazer $t = 0$ na equação $y = 4 + 37t$. Daí temos que $y = 4$, ou seja, cada uma das pessoas receberá 4 maçãs.

Observando o gráfico da equação diofantina linear $37x - 79y = 17$, temos:

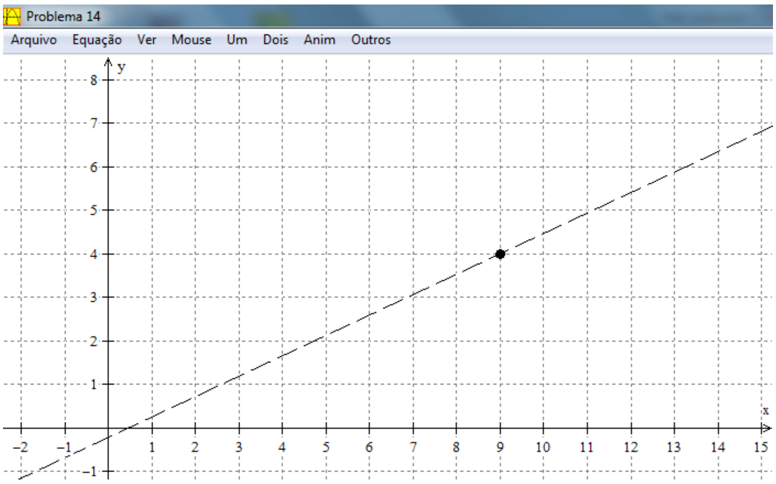

Figura 9: *Representação geométrica da única solução que apresenta as menores coordenadas inteiras*

Essa equação possui uma infinidade de soluções, mas o único par com coordenadas inteiras que nos fornece a menor quantidade de maçãs que podem ser repartidas igualmente entre as 79 pessoas é $(9, 4)$.

Isto é, cada monte possui 9 maçãs e ao serem retiradas 17 dessas frutas cada uma das 79 pessoas ficará com 4 maçãs.

4 Considerações Finais

Espera-se com esse trabalho de conclusão de curso, que após a aplicação de algumas aulas sobre equações diofantinas lineares, o aluno seja capaz de identificar problemas, não só matemáticos mas também de outros ramos do conhecimento, que possam ser modelados e em seguida resolvidos por meio dessas equações.

Ainda sobre os trabalhos desenvolvidos por Monteiro [13] e Pommer [16] que concentraram suas investigações no estudo das equações diofantinas lineares limitado a duas variáveis, obtemos as seguintes informações.

Inicialmente, Monteiro [13] aplicou uma oficina a alunos pertencentes aos três anos do ensino médio do Colégio Tiradentes da Brigada Militar do Rio Grande do Sul. Segundo Monteiro [13] apesar de muitos alunos não se lembrarem dos conteúdos das séries iniciais, a revisão destes conteúdos foi primordial para a aplicação da oficina principalmente o conceito de MDC e Algoritmo da Divisão de Euclides. E que após a oficina a grande maioria dos alunos apesar de serem de séries diferentes compreenderam o método utilizado para encontrar todas as soluções inteiras de uma Equação Diofantina Linear. Ao final da oficina concluiu que o ensino deste conteúdo é totalmente viável para alunos do Ensino Médio, podendo ser, por exemplo, apresentado após o estudo sobre equações de retas, pois uma Equação Diofantina Linear equivale a uma reta, a partir de suas soluções obtemos uma nova interpretação geométrica e algébrica deste conceito.

Agora, no trabalho de Pommer [16] que foi aplicado a alguns alunos do Ensino Médio da Escola Estadual Nossa Senhora Aparecida de São Paulo, foi constatado que a sequência didática realizada mostrou que os alunos do Ensino Médio manifestaram alguns conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares nas situações-problema apresentadas, ao perceberem o caráter discreto das grandezas envolvidas, assim como no fato da existência de diversas possibilidades de aquisição na busca das soluções dos problemas. Pommer [16] constatou que, inicialmente, os alunos utilizaram a estratégia de tentativa e erro para as buscas das soluções inteiras. Porém, alguns alunos desenvolveram outras estratégias como recurso para a resolução dos problemas, seja por meio do uso do conceito de múltiplo e divisores ou pela escrita algébrica, tendo organizado e relacionado tais estratégias com uma ferramenta mais adequada para a busca e organização das possíveis soluções inteiras. Depois de concluídas todas as atividades e jogos propostos, segundo Pommer [16], é possível a alunos de Ensino Médio desenvolver conhecimentos envolvendo Equações Diofantinas Lineares.

Diante das conclusões obtidas, percebemos a importância desse conteúdo que poderia estar no currículo do Ensino Médio, sabendo que a base necessária para trabalhá-lo é abordada desde o Ensino Fundamental. Acredito que ao se falar de equações diofantinas no ensino médio o professor instiga o aluno a relacionar as situações-problemas com equações de reta da forma $ax + by = c$ e dessa forma faça com que o aluno entenda que este tipo de equação facilita a resolução de muitos problemas da vida cotidiana.

Dessa forma, espero que este trabalho possa contribuir para o repensar do processo de ensino-aprendizagem dos assuntos relativos à Teoria Elementar dos Números no Ensino Médio, em especial das Equações Diofantinas Lineares em Duas Incógnitas e possa ajudar discentes e/ou docentes a aprimorar seus conhecimentos sobre este assunto.

Referências

[1] *BOYER, C.B.*, **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1991. 488p.

[2] *BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC), Secretaria de Educação do Ensino Médio*, **PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 1998.

[3] *BRASIL. Ministério da Educação e Cultura (MEC), Secretaria de Educação Fundamental*, **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] *CARVALHO, João B. P.*, **Euclides, Fibonacci e Lamé**. In Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, v. 24, p. 32-40, 1993.

[5] *COSTA, Eduardo S.*, **Equações Diofantinas Lineares e o Professor do Ensino Médio**. 2007. 119 f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

[6] *DANTE, L. R.*, **Coleção Matemática**. 1. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2005.

[7] *EVES, Howard*, **Introdução à História da Matemática**. 3ª reimpressão. São Paulo: Ed. Unicamp, 2008.

[8] *FONSECA, Rubens V.*, **Teoria dos Números** Belém: Universidade do Estado do Pará. 2011.

[9] *GOIÁS*, **Currículo de Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás: Matemática.** Goiás: SEE, 2012.

[10] *HEFEZ, Abramo*, **Elementos de Aritmética.** 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011.

[11] *IEZZI, G. et al.*, **Coleção Matemática, Ciência e Aplicações.** 2. São Paulo: Editora Atual, v.2, 2004.

[12] *LA ROQUE, G., PITOMBEIRA, J.B.*, **Uma Equação Diofantina e Suas Resoluções.** In Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 19, p. 39-47, 1991.

[13] *MONTEIRO, Guilherme F.*, **Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio.** 2010. TCC de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

[14] *OLIVEIRA, Silvio. B.*, **As Equações Diofantinas Lineares e o Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio**. 2006. 102 f. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

[15] *PEREIRA, A.L.; WATANABE, R.*, **Seção: O Leitor Pergunta:** Um probleminha sobre idades. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 1º quadr. 2005.

[16] *POMMER, Wagner M.*, **Equações Diofantinas Lineares:** Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. 2008. Dissertação de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

[17] *REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS.*, **Coletâneas de Problemas.** Goiás: Universidade Federal de Goiás, n. 3, abr. 2002.

[18] *REVISTA DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS.*, **Coletâneas de Problemas.** Goiás: Universidade Federal de Goiás, n. 4, abr. 2003.

A Respostas dos Problemas Propostos

Problema 6: As possíveis quantidades são $16, 17, 18, 19$ e 20 peixes ao todo.

Problema 7: O $mdc(300, 198) = 6$ e $6 \nmid 500$. Então o maior valor possível a ser retirado deve ser divisível por 6, ou seja R$ 498,00.

Problema 8: 77 degraus.

Problema 9: Chega-se a equação $15x - 12y = 1$ onde o $mdc(15, 12) = 3$ e como $3 \nmid 1$ conclui-se que não existe nenhum número que satisfaz as condições do problema.

Problema 10: 67 coelhos e 66 galinhas.

Problema 11: a) $105, 405$ e 705 b) 1.005 e 9.705

Problema 12: O aniversário de Pedro é no dia 10 de agosto, então $10 \cdot 8 = 80$.

Problema 13: 27 possibilidades.

Problema 14: 4 maçãs.

Problema 15: 25 homens e 16 mulheres, 30 homens e 10 mulheres ou 35 homens e 4 mulheres.

Problema 16: Tome $15x + 7y = c$ com $c \in \mathbb{N}$. Para as moedas de 15 e 7 mirreis é sempre possível, pois $mdc(15, 7) = 1$ e $1|c$. Já para a equação $12x + 30y = c$, só é possível pagar quantias que são múltiplas de 6, pois $mdc(12, 30) = 6$ e a equação possui solução somente se $6|c$.

Problema 17: 113 pessoas.