



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de Bauru

Luiz Cesar Maranhão

Aplicação do Método de Linearização de Lyapunov na Análise  
de uma Dinâmica Não Linear Para Controle Populacional do  
Mosquito *Aedes aegypti*

Bauru  
2018

Luiz Cesar Maranhão

Aplicação do Método de Linearização de Lyapunov na Análise  
de uma Dinâmica Não Linear Para Controle Populacional do  
Mosquito *Aedes aegypti*

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

Orientadora:  
Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis

Bauru  
2018

Maranho, Luiz Cesar.

Aplicação do método de linearização de Lyapunov na análise de uma dinâmica não linear para controle populacional do mosquito *Aedes aegypti* / Luiz Cesar Maranhão. -- Bauru, 2018  
75 f.: il.

Orientador: Célia Aparecida dos Reis  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Bauru

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Sistemas não-lineares.  
3. Lyapunov, Funções de. 4. *Aedes aegypti*. I. Título.

CDU – 51(07)

Luiz Cesar Maranhão

Aplicação do Método de Linearização de Lyapunov na Análise  
de uma Dinâmica Não Linear Para Controle Populacional do  
Mosquito *Aedes aegypti*

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Comissão Examinadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Célia Aparecida dos Reis  
UNESP – Bauru  
Orientadora

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho  
UNESP - Bauru

Prof. Dr. Thiago Donda Rodrigues  
UFMS - Paranaíba

Bauru  
20 de Agosto de 2018

*Dedico esse trabalho à minha esposa, Lê,  
meus filhos, Maria Júlia, Davi e Henrique  
e a todos os meus familiares.*

## AGRADECIMENTOS

*“Agradeço a qualquer Deus que exista  
pela minha alma inconquistável.  
Eu sou o senhor do meu destino,  
eu sou o capitão de minh’alma.”*

William Ernest Henley (1875)

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UNESP – Campus de Bauru por todo carinho e dedicação na realização desse trabalho. Em especial a minha orientadora, Profa. Dra. Célia Aparecida dos Reis, que foi quem propiciou a realização desse sonho, me orientando, corrigindo e se dedicando a esse trabalho.

Um obrigado e um abraço à Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza e ao Prof. Dr. Antônio Roberto Balbo, por toda a ajuda e conselhos dados nos momentos mais difíceis.

Aos Professores que formam a banca, pelo tempo e atenção dedicada à correção e análise desse trabalho.

À minha esposa, Alexandra, verdadeiro motor que me impulsiona e me faz nunca desistir.

Aos meus pais, Cesar e Eva, que um dia me disseram: “pode ir, qualquer coisa estamos aqui”.

Aos meus filhos, irmãos e todos familiares que me apoiaram e incentivaram para que eu chegasse a esse momento.

*“Não me entrego sem lutar  
Tenho, ainda, coração  
Não aprendi a me render  
Que caia o inimigo então.”*

Metal Contra as Nuvens – Renato Russo

## RESUMO

O mosquito *Aedes aegypti* é o principal vetor responsável por diversas arboviroses como a dengue, a febre amarela, o vírus zika e a febre chikungunya. Devido a sua resistência, adaptabilidade e proximidade ao homem, o *Aedes aegypti* é atualmente um dos maiores problemas de saúde pública no Brasil e nas Américas. Mesmo com os avanços e investimentos em pesquisas com vacinas, monitoramento, campanhas educativas e diversos tipos de controle deste vetor, ainda não existe um método eficaz para controlar e erradicar o mosquito. Portanto, esse trabalho destina-se ao auxílio na criação de estratégias para controlar esse agente transmissor, mediante a análise do espaço de estados e a estabilidade assintótica de uma dinâmica não linear para controle populacional do *Aedes aegypti* via a técnica de linearização de Lyapunov, além de apresentação de formas de prevenção e combate aos criadouros do mosquito. A dinâmica não linear proposta é uma dinâmica simplificada obtida de um modelo não linear existente na literatura, proposto por Esteva e Yang em 2005 e se baseia no ciclo de vida do mosquito, que é dividido em duas fases: fase imatura ou aquática (ovos, larvas e pupas) e fase alada (mosquitos adultos). Na fase adulta, os mosquitos são divididos em machos, fêmeas imaturas e fêmeas fertilizadas, sendo que a dinâmica proposta nesta dissertação de mestrado é baseada nos estudos efetuados por Reis desde 2016, obtendo um modelo simplificado no qual a soma das densidades das populações de fêmeas imaturas e fêmeas fertilizadas serão consideradas como fêmeas adultas.

Palavras-chave: modelagem matemática; *Aedes aegypti*; dengue; febre amarela; zika; chikungunya; sistemas não lineares; pontos críticos; plano de fase; estabilidade assintótica; primeiro método de Lyapunov.



## ABSTRACT

The mosquito *Aedes aegypti* is the main vector responsible for several arboviruses such as dengue fever, yellow fever, zika virus and chikungunya fever. Due to its resistance, adaptability and proximity to humans, *Aedes aegypti* is currently one of the major public health problems in Brazil and the Americas. Even with the advances and investments in research with vaccines, monitoring, educational campaigns and various types of control of this vector, there is still no effective method to control and eradicate the mosquito. Therefore, this work is intended to aid in the creation of strategies to control this transmitting agent by analyzing the state space and the asymptotic stability of a nonlinear dynamics for population control of *Aedes aegypti* via the Lyapunov linearization technique to present ways of preventing and combating mosquito breeding sites. The proposed nonlinear dynamics is a simplified dynamics obtained from a nonlinear model existing in the literature, proposed by Esteva and Yang in 2005 and based on the life cycle of the mosquito, which is divided into two phases: immature or aquatic phase (eggs, larvae and pupae) and winged phase (adult mosquitoes). In the adult phase, mosquitoes are divided into males, immature females and fertilized females, and the dynamics proposed in this dissertation is based on studies carried out by Reis since 2016, obtaining a simplified model in which the sum of the densities of the populations of females immature and fertilized females will be considered as adult females.

Keywords: mathematical modeling; *Aedes aegypti*; dengue; yellow fever; zika; chikungunya; non-linear systems; critical points; phase plane; asymptotic stability; first method of Lyapunov.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O Mosquito <i>Aedes aegypti</i> .....	13
Figura 2 – <i>Aedes aegypti</i> se espalhou pelas regiões tropicais e subtropicais.....	16
Figura 3 – O ciclo de vida do <i>Aedes aegypti</i> .....	21
Figura 4 – Ovos do <i>Aedes aegypti</i> em contato com o ar.....	22
Figura 5 – Larvas do <i>Aedes aegypti</i> no 4 <sup>o</sup> Estágio.....	23
Figura 6 – <i>Aedes aegypti</i> eclodindo da pupa para a fase adulta....	24
Figura 7 – <i>Aedes aegypti</i> adulto.....	25
Figura 8 – Um Ponto de Centro.....	31
Figura 9 – O Ponto de Sela.....	32
Figura 10 – O Ponto Espiral.....	33
Figura 11 – (a) Nó Impróprio e (b) Nó Próprio.....	34
Figura 12 – Estabilidade de um Ponto Crítico.....	35
Figura 13 – Tipo e Natureza do Ponto Crítico.....	38
Figura 14 – Valores de Parâmetros.....	61
Figura 15 – Densidade de Mosquitos na Fase Aquática – $P_1$ .....	62
Figura 16 – Densidade de Mosquitos Fêmeas – $P_1$ .....	62
Figura 17 – Densidade de Mosquitos Machos – $P_1$ .....	63
Figura 18 – Espaço de Fase do Sistema – $P_1$ .....	64
Figura 19 – Densidade de Mosquitos na Fase Aquática – $P_2$ .....	66
Figura 20 – Densidade de Mosquitos Fêmea – $P_2$ .....	66
Figura 21 – Densidade de Mosquitos Machos – $P_2$ .....	67
Figura 22 – Espaço de Fase do Sistema – $P_2$ .....	68

## SUMÁRIO

<b>Introdução.....</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo 1: O Mosquito <i>Aedes aegypti</i>.....</b>	<b>13</b>
1.1 Origem.....	15
1.2 Ciclo de Vida.....	20
1.3 Controle Vetorial.....	25
<b>Capítulo 2: Fundamentação Teórica.....</b>	<b>27</b>
2.1 Conceitos Básicos.....	27
2.2 Tipos de Pontos Críticos.....	29
2.3 Estabilidade.....	34
2.4 Sistema Não Linear.....	38
2.5 A Técnica de Lyapunov.....	42
<b>Capítulo 3: O Modelo Não Linear Para Controle Populacio- nal do Mosquito <i>Aedes aegypti</i>.....</b>	<b>46</b>
3.1 Modelo de Esteva e Yang.....	46
3.2 Modelo Proposto Simplificado.....	48
3.3 Análise do Plano de Fase do Modelo Proposto.....	50
3.3.1 Determinação dos Pontos Críticos.....	51
3.3.2 Análise da Estabilidade Assintótica do Ponto Crítico $P_1$ ...	53
3.3.3 Análise da Estabilidade Assintótica do Ponto Crítico $P_2$ ...	55
3.4 Simulações Numéricas.....	61
<b>Conclusões.....</b>	<b>69</b>
<b>Referências.....</b>	<b>71</b>

## INTRODUÇÃO

O mosquito *Aedes aegypti* é o principal vetor responsável pela transmissão de doenças como a Dengue, Febre Amarela, Febre Chikungunya e Zika. Não existe um método eficaz para a erradicação destas arboviroses, mesmo com grandes investimentos em pesquisas com vacinas, monitoramento, campanhas educativas e controle.

Só no Brasil, em 2017, foram constatados cerca de 251.711 casos possíveis de Dengue, 171.930 casos possíveis de Chikungunya, 17.594 de vírus Zika e 777 casos de Febre Amarela (BRASIL, 2018).

Segundo Thomé (2007), para controlar essas doenças, tem sido feito diversos estudos sobre o controle do *Aedes aegypti*. Existem quatro principais meios de controle:

- Controle Mecânico: realizado por agentes de saúde e pela população em geral;
- Controle Químico: usados produtos larvicidas e adulticidas;
- Controle Biológico: introdução de inimigos naturais no meio ambiente;
- Controle Genético: utilização de mosquitos estéreis.

Esteva e Yang (2005) propuseram um modelo para analisar o efeito da introdução de insetos machos estéreis no meio ambiente. Esse modelo não linear descreve a dinâmica populacional do *Aedes aegypti*, considerando o ciclo de vida do mosquito dividido em duas fases: aquática e adulta. No modelo, é apresentada a população de insetos na fase aquática (ovos, larvas e pupas) e na fase adulta os mosquitos foram divididos em machos, fêmeas antes de acasalar (imaturas) e fêmeas fertilizadas.

Uma simplificação desse modelo foi proposta por Reis (2017), visando a verificação da eficácia da dinâmica proposta por Esteva e Yang (2005). Nessa simplificação, foram efetuados estudos **com entrada de controle** na fase aquática e na fase adulta os mosquitos foram divididos em machos e fêmeas, sem levar em conta a divisão de fêmeas imaturas e fêmeas fertilizadas.

Neste trabalho de dissertação, propõe-se um estudo da dinâmica proposta por Reis (2017), mas **sem a presença de controle** na fase aquática. A análise desse modelo realizou-se através de uma abordagem introdutória de sistemas dinâmicos, estudando-se os conceitos básicos de sistemas autônomos e a determinação de seus pontos críticos de acordo com a teoria de Lyapunov. Estes conceitos foram utilizados para realizar a análise da estabilidade assintótica de seus pontos críticos e para análise das soluções assintoticamente estáveis do modelo simplificado. Os resultados obtidos foram comprovados através de simulações numéricas realizadas no software MATLAB 2016. Esses dados possibilitaram a construção e análise do espaço de fase e do histórico no tempo relativo às variáveis usadas.

Essa dissertação foi organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1, efetuou-se um estudo sobre a origem do *Aedes aegypti* e sua propagação no Brasil no século XX, o seu ciclo de vida e as principais doenças que ele transmite, mostrando as diferenças entre seus sintomas.

No Capítulo 2 tem-se a fundamentação teórica do método de Linearização de Lyapunov, mediante o estudo de sistemas autônomos

bidimensionais e n-dimensionais necessário para a análise da dinâmica proposta.

No Capítulo 3 apresenta-se o modelo estudado, seus pontos críticos e uma análise da estabilidade assintótica é efetuada em torno desses pontos. Simulações numéricas são realizadas via o software MATLAB 2016.

Em seguida são apresentadas as Conclusões e Referências utilizadas nesse trabalho.

## CAPÍTULO 1

### O MOSQUITO *Aedes aegypti*

O *Aedes aegypti* é o mosquito transmissor de doenças como a dengue, a febre amarela, a febre chikungunya e o vírus Zika. Controlar sua população é um assunto de grande urgência na saúde pública e global. Menor do que os mosquitos comuns, com menos de 1 cm de comprimento, ele é preto com listras brancas no tronco, na cabeça e nas pernas (Figura 1). Essa coloração é fundamental para a realização de camuflagem, uma vez que ele é encontrado em ambientes escuros e próximos ao chão. Suas asas são translúcidas e o ruído que produzem é praticamente inaudível ao ser humano (BRASIL, 2001).



Figura 1: O Mosquito *Aedes aegypti*. Fonte: João P. Burini/PrimalShutter.com

O mosquito se alimenta exclusivamente de substâncias vegetais e açucaradas, como néctar e seiva. Apenas as fêmeas picam, pois realizam a hematofagia, que é a alimentação por sucção do sangue de mamíferos, embora prefiram o sangue humano como fonte de proteína

ao de qualquer outro animal vertebrado. O sangue é um alimento necessário para a maturação dos ovos (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

A fêmea se acasala uma única vez em sua vida e libera seus ovos aos poucos e em lugares diferentes, podendo percorrer até 2500 metros voando. Costumam picar nas primeiras horas da manhã ou ao entardecer, evitando o sol forte, mas mesmo nas horas quentes podem atacar à sombra, dentro ou fora de casa, podendo atacar também durante a noite. O indivíduo não percebe a picada, pois no momento não dói e nem coça (NEVES, 2000).

Nem todo *Aedes aegypti* está infectado com alguma arbovirose. Como apenas as fêmeas picam, com a finalidade de amadurecer seus ovos, elas se tornam infectadas (ou vetores) quando sugam o sangue de alguém já infectado com um desses vírus. A partir deste momento o *Aedes aegypti* terá o vírus instalado em seu corpo, mas ainda não é capaz de transmiti-lo. Durante 10 ou 12 dias, os vírus se disseminam pelo organismo do mosquito, se multiplicam e invadem suas glândulas salivares. A fêmea se torna então infectiva e, somente a partir daí, poderá transmitir o vírus a outra pessoa.

A alta capacidade que o *Aedes aegypti* tem de se adaptar ao ambiente doméstico faz com que ele se torne um inimigo muito eficiente. Originário de áreas silvestres, o inseto se adaptou à zona urbana, incluindo domicílios onde possam encontrar uma condição favorável a sua procriação, a água parada. Também podem ser encontrados na zona rural, transportados de áreas urbanas em recipientes que continham ovos e larvas (ESPÍRITO SANTO, 2018).



Por ser um mosquito urbano, a infestação é mais intensa em regiões com alta densidade populacional, principalmente, em espaços urbanos com ocupação desordenada, onde as fêmeas têm mais oportunidades para alimentação e dispõem de mais criadouros para desovar.

A infestação do mosquito é sempre mais intensa no verão, em função da elevação da temperatura e da intensificação de chuvas, pois são fatores que propiciam a eclosão de ovos do mosquito. Para evitar esta situação, é preciso adotar medidas permanentes para o controle do *Aedes* durante o ano todo, a partir de ações preventivas de eliminação de focos do vetor (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

Os grandes reservatórios, como caixas d'água, galões e tonéis (muito utilizados para armazenagem de água para uso doméstico em locais dotados de infraestrutura urbana precária), são os criadouros que mais produzem *Aedes aegypti* e, portanto, os mais perigosos. Isso não significa que a população possa descuidar da atenção a pequenos reservatórios, como vasos de plantas, calhas entupidas, garrafas, lixo a céu aberto, bandejas de ar-condicionado, poço de elevador, entre outros (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

## 1.1 ORIGEM

O mosquito *Aedes aegypti* é originário do Egito, na África (provavelmente na região nordeste) e de lá espalhou-se pelas regiões tropicais e subtropicais do planeta desde o século XVI, por meio de navios que traficavam escravos, já que os ovos do mosquito podem resistir, sem

estar em contato com a água, por até um ano (Figura 2) (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).



Figura 2: *Aedes aegypti* se espalhou pelas regiões tropicais e subtropicais  
Foto: <http://g1.globo.com/sp/campinas-regiao/noticia/2015/12/do-egito-para-o-mundo-conheca-historia-do-mosquito-aedes-aegypti.html>.

O *Aedes aegypti* é o vetor de várias doenças. Entre elas estão a dengue, a febre amarela, a febre chikungunya e o vírus zika.

As primeiras notícias de uma doença descrita, com as características da dengue são da China, há mais de 1600 anos. Há relatos de epidemias de dengue no Egito e na Ilha de Java, na Indonésia em 1799, e nos Estados Unidos e na Índia, em 1780. Há, porém, dificuldade em confirmar estes relatos, até pela semelhança de alguns dos sintomas com a febre amarela, que é transmitida pelo mesmo inseto (MINISTÉRIO DA SAÚDE, 1996). Relatos da Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS) mostram que a primeira epidemia de dengue no continente americano ocorreu no Peru, no início do século 19,

com surtos no Caribe, Estados Unidos, Colômbia e Venezuela (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

O primeiro relato de epidemia de uma doença semelhante à febre amarela é de um manuscrito maia de 1648 em Yucatan, México. Na Europa, a febre amarela já havia se manifestado antes dos anos 1700, mas foi em 1730, na Península Ibérica, que se deu a primeira epidemia, causando a morte de 2.200 pessoas. Nos séculos XVIII e XIX os Estados Unidos foram acometidos repetidas vezes por epidemias devastadoras, para onde a doença era levada através de navios procedentes das índias Ocidentais e do Caribe. No Brasil, a febre amarela apareceu pela primeira vez em Pernambuco, no ano de 1685, onde permaneceu durante 10 anos. A cidade de Salvador também foi atingida, onde causou cerca de 900 mortes durante os seis anos em que ali esteve. A realização de grandes campanhas de prevenção possibilitou o controle das epidemias, mantendo um período de silêncio epidemiológico por cerca de 150 anos no País (MINISTÉRIO DA SAÚDE, 2008).

O vetor foi descrito cientificamente pela primeira vez em 1757, quando foi denominado *Culex aegypti*, por Fredric Hasselquist em seu tratado “*Iter Palaestinum*” (HASSELQUIST, 1757). Hasselquist forneceu os nomes e a descrição da espécie a seu mentor, Carl Linnaeus, grande taxonomista importante na história da biologia. Seu trabalho foi traduzido para o alemão e publicado em 1762 como “*Reise nach Palästina*” (ROSSETTI, 2016). *Culex* significa “mosquito” e *aegypti*, egípcio, portanto: mosquito egípcio. O gênero *Aedes* só foi descrito em 1818. Logo, verificou-se que a espécie *aegypti*, descrita anos antes, apresenta características morfológicas e biológicas semelhantes às de espécies do gênero *Aedes* – e não às do já conhecido gênero *Culex* (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016). O nome do mosquito passou a ser conhecido

após a reprodução dessas obras e começou a ser chamado de *Aedes aegypti* com H.G Dyar somente em 1920 (ROSSETTI, 2016).

No Brasil, os primeiros relatos de dengue datam do final do século XIX, em Curitiba (PR), e do início do século XX, em Niterói (RJ). No início do século XX, o mosquito já era um problema, mas não por conta da dengue -- na época, a principal preocupação era a transmissão da febre amarela urbana (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016). Diversas epidemias de febre amarela urbana ocorriam no País, levando à morte milhares de pessoas (FRANCO, 1976). Uma primeira campanha pública contra a febre amarela urbana, iniciada por Oswaldo Cruz no Rio de Janeiro (1902-1907), instituiu as brigadas sanitárias (DONALÍSIO, 1999), cuja função era detectar casos de febre amarela e eliminar os focos de *Aedes aegypti*. A campanha obteve bons resultados: eliminou a febre amarela em 1909 na cidade do Rio de Janeiro.

Segundo dados do Ministério da Saúde, a primeira ocorrência do vírus da dengue no país, documentada clínica e laboratorialmente, aconteceu em 1981-1982, em Boa Vista (RR), causada pelos vírus DEN-1 e DEN-4. Anos depois, em 1986, houve epidemias no Rio de Janeiro, cuja real magnitude só ficou conhecida após a realização de inquéritos sorológicos, que evidenciaram a sensibilização de cerca de um milhão de pessoas pelo sorotipo DEN-1. Nesse mesmo ano, essa epidemia se estendeu para outros Estados, como Ceará e Alagoas. No ano seguinte, houve registro de casos, também, nos Estados da Bahia, Minas Gerais, Pernambuco e São Paulo. A partir de então, o dengue tornou-se endêmico em quase todos os Estados que tiveram casos da doença (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

O ano de 2015 foi recordista em dengue: foram 1.649.008 casos no país, maior número registrado na série histórica, iniciada em 1990 (BRASIL, 2018).

Combatida por Oswaldo Cruz no início do século 20 e erradicada dos grandes centros urbanos desde 1942, a febre amarela voltou a assustar os brasileiros em 2017, com a proliferação de casos de febre amarela silvestre durante o ano (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2018).

Em 2014, o *Aedes aegypti* tornou-se o vetor de outra doença relativamente nova no Brasil: a febre chikungunya.

O vírus CHIKV é transmitido pela picada do mosquito infectado. O chikungunya provoca febre alta, dores de cabeça, erupção de pele, conjuntivite e dor nas articulações, podendo esta última durar meses. O tratamento é feito com medicamentos para combater os sintomas da doença. Alguns pacientes precisam fazer fisioterapia para reduzir as dores nas articulações (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

Em 2017, foram registrados 171.930 casos prováveis de febre chikungunya, o que representa uma taxa de incidência de 83,4 casos para cada 100 mil habitantes (BRASIL, 2018).

No início de 2015, o Nordeste brasileiro se deparou com o aumento de casos de uma doença não identificada, caracterizada por um quadro de febre leve, conjuntivite, erupção cutânea e dores nas articulações, que durava até sete dias. As suspeitas médicas eram de dengue e chikungunya. No final de abril, um teste preliminar do Instituto de Ciências da Saúde da Universidade Federal da Bahia

(UFBA) identificou a presença do vírus zika no material biológico coletado dos pacientes. O primeiro caso de zika no Brasil foi anunciado no dia 7 de Maio de 2015 (EBC, 2016).

A infecção, também transmitida pelo *Aedes aegypti*, inicialmente tida como uma enfermidade leve foi tratada como emergência internacional meses mais tarde, em Julho de 2015 diante das primeiras evidências de sua ligação com a síndrome de Guillain-Barré. E em Outubro de 2015, foi notificada a possível associação entre a infecção pelo vírus zika e o aumento de casos de microcefalia no país (EBC, 2016).

Atualmente, considera-se a erradicação do *Aedes aegypti* praticamente impossível, devido ao crescimento da população, à ocupação desordenada do ambiente e à falta de infraestrutura dos grandes centros urbanos.

## **1.2 CICLO DE VIDA**

O ciclo de vida do *Aedes aegypti* é formado por quatro etapas: ovo, larva, pupa e adulto, conforme Figura 3. As etapas: ovo, larva e pupa ocorrem na fase aquática e a etapa adulta ocorre na fase terrestre (alada). Da eclosão do ovo até o mosquito adulto, o período de desenvolvimento é de aproximadamente 10 dias variando de acordo com a temperatura, disponibilidade de alimentos e quantidade de ovos. Quanto maior a temperatura, mais rápido o mosquito se desenvolve e está pronto para picar (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

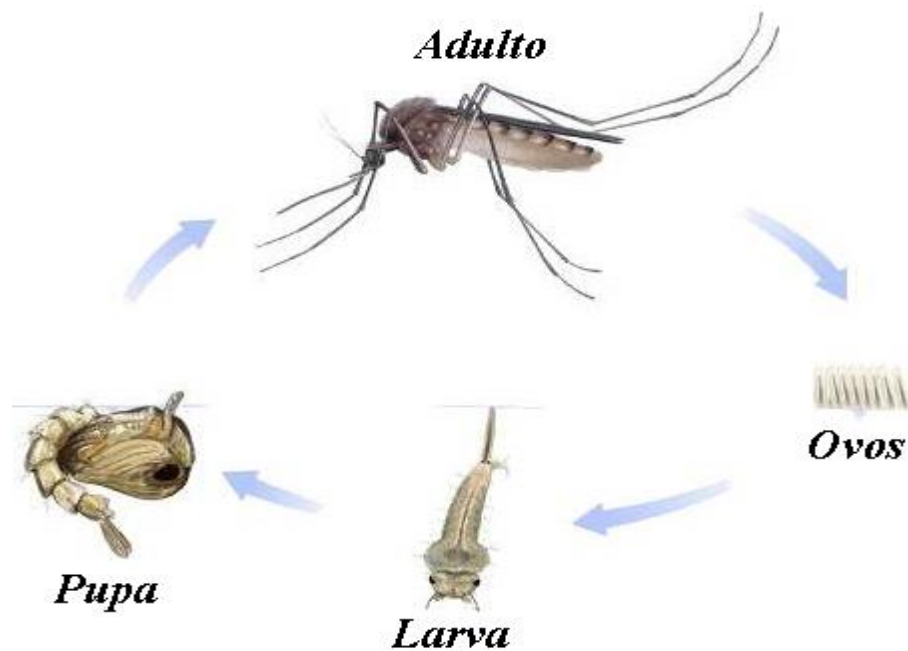


Figura 3: O ciclo de vida do *Aedes aegypti*.

Fonte: (SANTOS, 2016)

O acasalamento do mosquito ocorre através da cópula onde o macho é atraído pelos zumbidos emitidos pelas asas das fêmeas e pode acontecer durante o voo ou numa superfície plana. A reprodução se dá dentro ou ao redor das habitações, logo após o mosquito chegar à fase adulta. Durante seu ciclo de vida, a fêmea acasala uma única vez, pois ela devora o macho após a cópula deixando somente seus órgãos reprodutores, impedindo que outro macho copule novamente (ALVES, 2014). Após o acasalamento ser concretizado, a fêmea guarda o esperma na espermateca e sai à procura de mamíferos, em especial o homem, para realizar a hematofagia (alimentação através do sangue), que é importante para o desenvolvimento dos ovos e sua maturação nos ovários. Geralmente, após três dias da ingestão de sangue, as fêmeas do *Aedes aegypti* estão aptas para a postura dos ovos e então passam a procurar locais para desovar (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

## Ovo

O *Aedes aegypti* põe seus ovos em recipientes como pneus, latas e garrafas vazias, caixas d'água descobertas, ar-condicionado, pratos sob vasos ou qualquer objeto que possa armazenar água da chuva, como bromélias, bambus e buracos de árvore (SECRETARIA DE ESTADO DA SAÚDE, 2018).

A fêmea deposita cerca de 150 a 200 ovos por vez e pode dar origem a 1500 mosquitos durante a sua vida (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016), como mostra a Figura 4.



Figura 4: Ovos do *Aedes aegypti* em contato com o ar.

Foto: Genilton Vieira (IOC, 2016)

## Larva

Após entrar em contato com a água, o ovo se transforma em larva em apenas 2 ou 3 dias (Figura 5).





Figura 5: *Larvas do Aedes aegypti no 4º Estágio*. Foto: Walther Ishikawa

Fonte: [http://www.planetainvertebrados.com.br/index.asp?pagina=artigos\\_ver&id=74](http://www.planetainvertebrados.com.br/index.asp?pagina=artigos_ver&id=74)

Em condições ótimas, o período entre a eclosão e a pupação pode não exceder a cinco dias, contudo, em baixa temperatura e escassez de alimento, o quarto estágio larvário pode prolongar-se por várias semanas, antes de sua transformação em pupa (BRASIL, 2001).

## **Pupa**

É nesta fase que ocorre a metamorfose do estágio larval para o adulto (Figura 6). Quando inativas se mantêm na superfície da água, flutuando, o que facilita a emergência do inseto adulto (BRASIL, 2001).



Figura 6: *Aedes aegypti* eclodindo da pupa para a fase adulta. Foto: Walther Ishikawa  
Fonte: [http://www.planetainvertebrados.com.br/index.asp?pagina=artigos\\_ver&id=74](http://www.planetainvertebrados.com.br/index.asp?pagina=artigos_ver&id=74)

## Adulto

A fase adulta é a mais conhecida pela população, uma vez que é a fase em que o *Aedes aegypti* pode transmitir doenças ao homem. É a fase reprodutora do inseto.

Os mosquitos adultos têm menos de 1cm de comprimento e geralmente os machos são menores que as fêmeas. O *Aedes aegypti* possui corpo delgado, pernas longas, cabeça globosa, tórax comprimido lateralmente e abdômen cilíndrico. O tórax, as pernas, as asas e o abdômen são revestidos por escamas com tonalidade castanho-escura e há presença de anéis prateados na porção basal de cada segmento das pernas. O macho se distingue essencialmente da fêmea por possuir antenas plumosas e palpos mais longos, como mostra a Figura 7 (BRASIL, 2001).

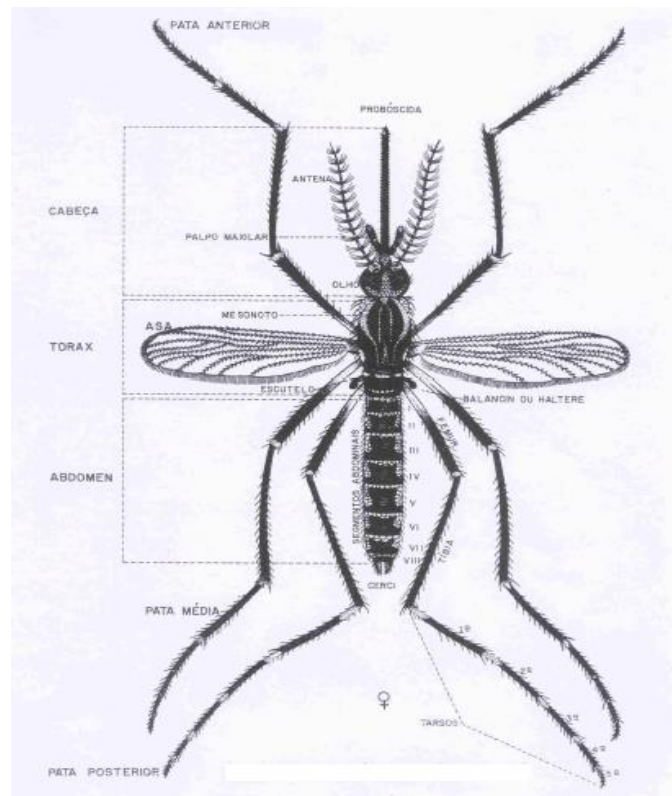


Figura 7: *Aedes aegypti* adulto. Fonte: BRASIL, 2001

### 1.3 CONTROLE VETORIAL

Controlar o mosquito *Aedes aegypti* tem constituído um importante desafio, principalmente nos países em desenvolvimento. Mesmo considerando-se situações em que os recursos destinados ao controle do vetor sejam apropriados para a implementação de programas, muitas vezes não se tem alcançado sucesso. Aspectos relacionados a problemas de infraestrutura das cidades, tais como baixas coberturas na coleta de lixo e intermitência no abastecimento de água, são fatores que comprometem a efetividade dos métodos tradicionais de controle do *Aedes* (HALSTEAD, 1988).

As medidas preventivas para o controle integrado do *Aedes aegypti* são direcionadas principalmente aos criadouros, constituindo-se de ações simples e eficazes, especialmente aquelas que consistem em cuidados a serem adotados pela população. A tecnologia atualmente disponível abrange vários mecanismos de controle para evitar a proliferação desse mosquito. Existem quatro tipos de controles: Mecânico, Químico, Biológico e Genético, sendo os dois primeiros os mais utilizados (FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, 2016).

## CAPÍTULO 2

### FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos que serão utilizados como base para o desenvolvimento da teoria necessária na análise do modelo matemático proposto no Capítulo 3.

#### 2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Os conceitos básicos apresentados nesta seção trata a teoria de sistemas autônomos para dinâmicas bidimensionais e n-dimensional. Serão trabalhados os conceitos de plano de fase, pontos críticos e trajetórias com base em Edwards (1995), Boyce (2006), Shepley (1984) e Slotine (1991).

**Definição 1.1 (EDWARDS, 1995).** *Um sistema autônomo é um sistema de equações diferenciais no qual a variável independente  $t$  não aparece explicitamente.*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

O **vetor de estados** do sistema (1.1) é o par ordenado  $(x, y)$ . Assume-se, de acordo com Edwards (1995), que as funções  $F$  e  $G$  são continuamente diferenciáveis em alguma região  $R$  no plano  $xy$ , chamado

**plano de fase** para o sistema (1.1). Então, de acordo com os teoremas de existência e unicidade de soluções, dado  $t_0$  e qualquer ponto  $(x_0, y_0)$  de  $R$ , existe uma única solução  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  de (1.1) que está definida em algum intervalo aberto  $(a, b)$  contendo  $t_0$  e que satisfaz as condições iniciais.

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.2)$$

As equações  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  descrevem então uma curva solução parametrizada no plano de fase. Qualquer curva solução é chamada de **trajetória** do sistema (1.1), e precisamente uma trajetória passa por cada ponto da região  $R$  (EDWARDS, 1995).

**Definição 1.2 (EDWARDS, 1995).** Um ponto  $(x_0, y_0)$  no sistema autônomo (1.1) é chamado de **ponto crítico** se ambas as funções  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $G(x_0, y_0) = 0$ .

Se  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico do sistema, então as funções constantes  $x(t) \equiv x_0$  e  $y(t) \equiv y_0$  satisfazem as equações em (1.1). A solução constante é chamada de **solução de equilíbrio** do sistema e sua trajetória consiste no ponto único  $(x_0, y_0)$ . Se o sistema for não linear, pode haver mais de um ponto de equilíbrio ou nenhum.

**Definição 1.3 (EDWARDS, 1995).** Um ponto crítico  $(x_0, y_0)$  é chamado **ponto crítico isolado** se existe uma vizinhança deste ponto que não contém outro ponto crítico.

Assumimos no sistema (1.1) que as funções  $F$  e  $G$  são continuamente diferenciáveis numa vizinhança de  $(x_0, y_0)$ .

Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $x_0 = y_0 = 0$ . Caso contrário, faremos as substituições:

$$u = x - x_0 \text{ e } v = y - y_0.$$

Então  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$  e  $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ , de modo que (1.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u + x_0, v + y_0) = F_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = G(u + x_0, v + y_0) = G_1(u, v) \end{cases},$$

que tem  $(0, 0)$  como um ponto crítico isolado (EDWARDS, 1995).

## 2.2 TIPOS DE PONTOS CRÍTICOS

Os pontos críticos mais comuns que o sistema autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}, \quad (1.1)$$

possibilita gerar são: um nó (próprio ou impróprio), um ponto de sela, um centro ou um ponto de espiral (EDWARDS, 1995).

**Definição 2.1 (EDWARDS, 1995).** *Seja  $P$  uma trajetória do sistema (1.1) dado por  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , e  $(0,0)$  ponto crítico desse sistema. Diz-se*

que **P aproxima do ponto crítico (0, 0) quando  $t \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ .**

**Observações:**

i) De forma análoga se define **P aproxima do ponto crítico (0, 0) quando  $t \rightarrow -\infty$ .**

ii) Dizer que **P aproxima do ponto crítico (0, 0) quando  $t \rightarrow +\infty$**  significa que um ponto se deslocando sobre P, no plano x,y se aproxima de (0, 0) quando  $t \rightarrow +\infty$ , independente da trajetória P tomada.

**Definição 2.2 (EDWARDS, 1995).** *Seja P uma trajetória do sistema (1.1) dado por  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , que se aproxima do ponto crítico (0, 0) quando  $t \rightarrow +\infty$ . Diz-se que **P entra no ponto crítico (0, 0) quando  $t \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{f(t)}$  existe ou é  $\pm \infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .***

**Observação:** O quociente  $\frac{g(t)}{f(t)}$  representa a inclinação da reta que passa pelos pontos (0, 0) e  $Q = (x = f(t), y = g(t))$  sobre a trajetória P. Então, dizer que **P entra no ponto crítico (0, 0) quando  $t \rightarrow +\infty$**  significa que a reta que une os pontos (0, 0) e  $Q = (x = f(t), y = g(t))$  converge para uma direção limite quando  $t \rightarrow +\infty$ .

**Definição 2.3 (SHEPLEY, 1984).** *O ponto crítico isolado (0, 0) de (1.1) é um **centro** (Figura 8) se existir uma vizinhança desse ponto que contém um número infinito enumerável de trajetórias fechadas  $P_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), cada um dos quais contendo (0, 0) em seu interior, e que são tais que os diâmetros das trajetórias se aproximam de zero quando  $n \rightarrow +\infty$  e (0,0)*



não é aproximado por nenhuma dessas trajetórias quando  $t \rightarrow +\infty$  ou quando  $t \rightarrow -\infty$ .

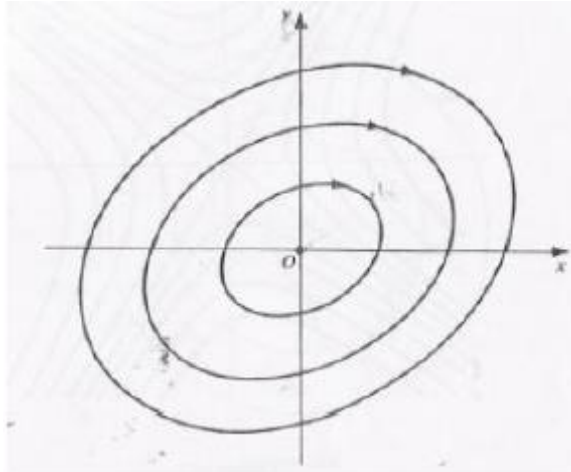


Figura 8. Um Ponto de Centro. Fonte: Shepley (1984)

**Observação:** De acordo com a definição de centro,  $(0,0)$  está circundado por um número infinito de trajetórias, arbitrariamente próximos desse ponto, mas de tal forma que ele não é aproximado por nenhuma trajetória quando  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ , isto é, se  $P_n$  é dado por  $x_n = f_n(t)$  e  $y_n = g_n(t)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , então se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) \neq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) \neq 0$ .

**Definição 2.4 (SHEPLEY, 1984).** O ponto crítico isolado  $(0, 0)$  de (1.1) é chamado de **ponto de sela** (Figura 9) se existir uma vizinhança desse ponto na qual as duas condições seguintes se mantêm:

1. Existem duas trajetórias que se aproximam e entram tangencialmente aos autovetores no ponto  $(0, 0)$  a partir de direções opostas quando  $t \rightarrow +\infty$  e existem duas outras trajetórias que se aproximam e entram no ponto  $(0, 0)$  a partir de direções opostas quando  $t \rightarrow -\infty$ .

2. Em cada um dos quatro domínios entre quaisquer duas das quatro trajetórias em (1) existem infinitas outras trajetórias que estão arbitrariamente próximas de  $(0, 0)$ , os quais se afastam de  $(0, 0)$  tanto quando  $t \rightarrow +\infty$  ou quando  $t \rightarrow -\infty$ .

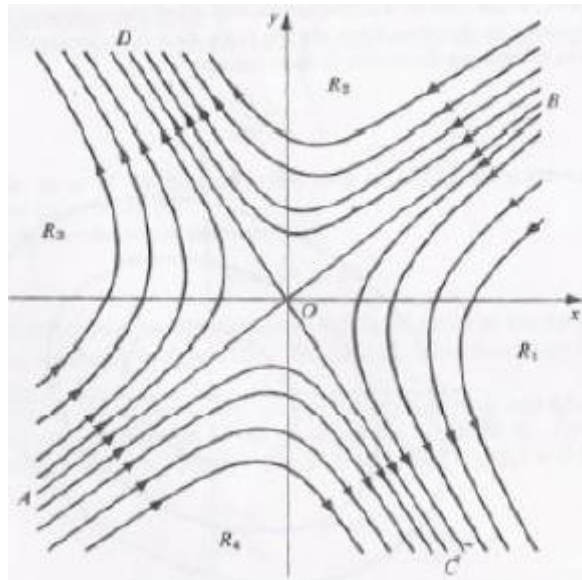


Figura 9. O ponto de Sela. Fonte: Shepley (1984)

**Definição 2.5 (SHEPLEY, 1984).** O ponto crítico isolado  $(0, 0)$  do sistema (1.1) é chamado **ponto espiral** ou **ponto focal** (Figura 10) se existir uma vizinhança desse ponto tal que toda trajetória  $P$  nessa vizinhança tenha as seguintes propriedades:

1.  $P$  é definido para todo  $t > t_0$  (ou para todo  $t < t_0$ ), para algum número  $t_0$ ;
2.  $P$  aproxima de  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  (ou quando  $t \rightarrow -\infty$ );
3.  $P$  aproxima-se de  $(0, 0)$  de maneira espiral, enrolando em torno desse ponto um número infinito de vezes quando  $t \rightarrow +\infty$  (ou quando  $t \rightarrow -\infty$ ).

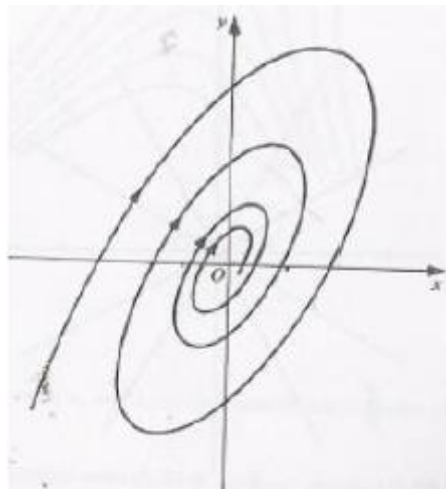


Figura 10. O Ponto Espiral. Fonte: Shepley (1984)

**Definição 2.6 (SHEPLEY, 1984).** O ponto crítico isolado  $(0, 0)$  do sistema (1.1) é chamado **nó** (Figura 11) se existir uma vizinhança desse ponto tal que toda trajetória  $P$  nesta vizinhança tenha as seguintes propriedades:

1.  $P$  é definido para todo  $t > t_0$  (ou para todo  $t < t_0$ ), para algum número  $t_0$ ;
2.  $P$  aproxima de  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  (ou quando  $t \rightarrow -\infty$ ); e
3.  $P$  entra em  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  (ou quando  $t \rightarrow -\infty$ ).

Um **nó impróprio** ocorre se existir dois pares diferentes de trajetórias opostas que sejam tangentes à mesma reta. O **nó** é **próprio** se ele não é impróprio.

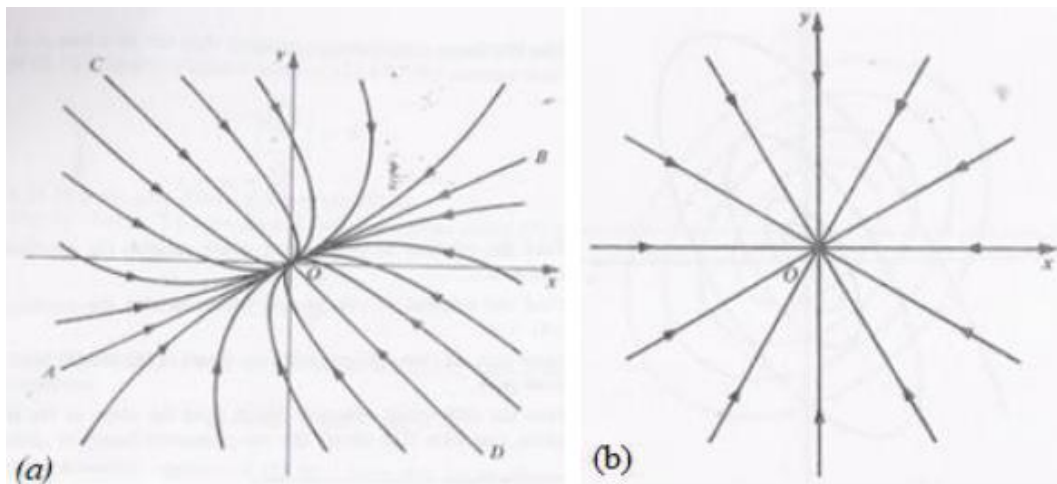


Figura 11. (a) Nó Impróprio e (b) Nó Próprio. Fonte: Shepley (1984)

## 2.3 ESTABILIDADE

Segundo Boyce (2006), a caracterização da natureza de um ponto crítico é usada para estudar o comportamento das soluções de um sistema autônomo, ou seja, se uma solução qualquer tende a se afastar ou se aproximar de uma solução constante desse sistema.

**Definição 3.1 (EDWARDS, 1995).** Um ponto crítico  $(x, y)$  de um sistema autônomo (1.1) é dito **estável** se, o ponto inicial  $(x_0, y_0)$  está suficientemente próximo de  $(x, y)$ , então  $(x(t), y(t))$  permanece próximo de  $(x_0, y_0)$  para todo  $t > 0$ . Em notação vetorial, com  $x(t) = (x(t), y(t))$ , a distância entre o ponto  $x_0 = (x_0, y_0)$  e o ponto crítico  $x = (x, y)$  é

$$|x_0 - x| = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \quad (3.1)$$

Portanto, o ponto crítico  $x$ , é estável desde que para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x_0 - x| < \delta \text{ implica que } |x(t) - x| < \varepsilon \quad (3.1)$$

para todo  $t > 0$ .

O ponto crítico  $(x, y)$  é chamado **instável** se não é estável (EDWARDS, 1995).

**Definição 3.2 (EDWARDS, 1995).** Um ponto crítico  $(x, y)$  de um sistema autônomo (1.1) é considerado **assintoticamente estável** se é estável e, se toda trajetória que começa suficientemente próxima de  $(x, y)$  também se aproxima de  $(x, y)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x_0 - x| < \delta \text{ implica que } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x. \quad (3.2)$$

em que  $x_0 = (x_0, y_0)$ ,  $x = (x, y)$  e  $x(t) = (x(t), y(t))$  é uma solução com  $x(0) = x_0$ .

A Figura 12 ilustra os casos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade.

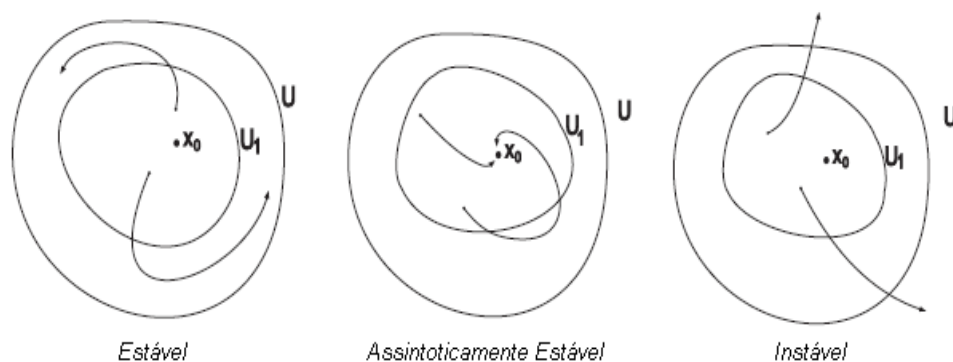


Figura 12: Estabilidade de um Ponto Crítico. Fonte: EDWARDS, 1995

Para a análise da natureza do ponto crítico  $(0, 0)$  e de sua estabilidade, considera-se, inicialmente um sistema linear autônomo da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} . \quad (3.3)$$

O sistema (3.3) pode ser colocado na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ou } \dot{X} = AX . \quad (3.4)$$

O ponto crítico de (3.4) é a origem  $(0, 0)$ . A matriz  $A$  é não singular, ou seja,  $\det(A) \neq 0$ . Portanto  $(0, 0)$  é o único ponto crítico desse sistema, e as funções

$$x = Ae^{\lambda t} \text{ e } y = Be^{\lambda t}, \quad (3.5)$$

são soluções do sistema (3.3) e  $\lambda$  satisfaz a equação:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (3.6)$$

**Definição 3.3 (EDWARDS, 1995).** O polinômio  $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$  é chamado de **polinômio característico** associado à equação diferencial (3.3). A equação

$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$  é denominada **equação característica da equação (3.3)**.

A natureza do ponto crítico  $(0, 0)$  é determinada pelas raízes da equação característica (3.6).

**Teorema 3.1 (EDWARDS, 1995): Natureza do Ponto Crítico**

- i) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, distintas, e de mesmo sinal, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema (3.3) é um **nó**;
- ii) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, distintas, e de sinais contrários, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema (3.3) é um **ponto de sela**;
- iii) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e iguais, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema (3.3) é um **nó**;
- iv) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números complexos conjugados com a parte real diferente de zero, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema (3.3) é um **ponto espiral**;
- v) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são imaginários puros, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema (3.3) é um **centro**.

**Teorema 3.2 (EDWARDS, 1995): Estabilidade Assintótica**

- i) O ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema (3.3) é **assintoticamente estável** se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e ambas negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa;
- ii) **Estável**, mas não assintoticamente estável, se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são imaginárias puras;
- iii) **Instável**, se qualquer uma das raízes  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  são reais e positivas ou se as raízes são complexas conjugadas com parte real positiva.

De uma maneira geral, podemos resumir o tipo e a natureza do ponto crítico na origem de acordo com as raízes da equação característica (5.7) na Figura 13:

Natureza das raízes $\lambda_1$ ou $\lambda_2$	Natureza do ponto crítico (0, 0)	Estabilidade do ponto crítico (0, 0)
Reais, diferentes e de mesmo sinal	Nó	Assintoticamente estável se as raízes forem negativas
		Instável se as raízes forem positivas
Reais, diferentes e de sinais opostos	Ponto de sela	Instável
Reais E Iguais	Nó	Assintoticamente estável se as raízes forem negativas
		Instável se as raízes forem positivas
Complexas conjugadas mas não imaginárias Puras	Ponto de espiral	Assintoticamente estável se a parte real das raízes for negativa
		Instável se a parte real das raízes forem positivas
Imaginárias puras	Centro	Estável, mas não assintoticamente estável

Figura 13. Tipo e Natureza do Ponto Crítico. Fonte: Shepley (1984)

## 2.4 SISTEMA NÃO LINEAR

Um sistema autônomo não linear tem a sua análise baseada num sistema autônomo linear. A análise dos pontos críticos de tais sistemas está relacionada à classificação de um sistema linear associado ao não linear, denominado sistema linear correspondente (BOYCE, 2006).

Na maioria das vezes não é possível determinar a estabilidade de um sistema não linear por meio de soluções explícitas, devemos então



investigar o comportamento das trajetórias do sistema em uma vizinhança de um ponto crítico.

Esta seção trata da teoria de sistemas autônomos não lineares com base em Edwards (1995) e Shepley (1984).

Consideramos agora o sistema autônomo não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y); \end{cases} \quad (4.1)$$

Assumindo que o sistema (4.1) tem um ponto crítico isolado e este ponto é a origem (0,0). Assumindo também que as funções P e Q nos membros direitos de (4.1) são tais que P(x, y) e Q(x, y) podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} P(x, y) = ax + by + P_1(x, y), \\ Q(x, y) = cx + dy + Q_1(x, y), \end{cases} \quad (4.2)$$

em que a, b, c e d são constantes reais e

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

e  $P_1$  e  $Q_1$  têm primeiras derivadas parciais contínuas para todos (x, y), e são tais que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{P_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{Q_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (4.3)$$

Assim, o sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + P_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_1(x, y) \end{cases} \quad (4.4)$$

em que  $a, b, c, d, P_1$  e  $Q_1$  satisfazem os requisitos do sistema acima.

**Definição 4.1 (EDWARDS, 1995).** *Dado o sistema não linear (4.4), o sistema linear associado é dado por*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (4.5)$$

obtido a partir de (4.4), negligenciando os termos não lineares  $P_1(x, y)$  e  $Q_1(x, y)$ . Ambos os sistemas têm um ponto crítico isolado em  $(0, 0)$ .

A condição (4.2) diz que os termos não lineares  $P_1(x, y)$  e  $Q_1(x, y)$  tendem a zero mais rapidamente do que os termos lineares, isto é,  $ax + by$  e  $cx + dy$ . É de se esperar que as trajetórias do sistema (4.5) próximos à origem sejam similares às trajetórias do sistema linear associado.

De uma forma geral, a estabilidade do ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema não linear é similar aos do sistema linear associado.

Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes da equação característica do sistema linear em (4.5) associado com o sistema não linear em (4.4), isto é:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

Então, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 4.1 (SHEPLEY, 1984): Natureza do Ponto Crítico de Sistemas Não Lineares**

**(a)** O ponto crítico  $(0, 0)$  de um sistema não linear é do mesmo tipo que o do sistema linear nos seguintes casos:

- i) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, distintas, e de mesmo sinal, então  $(0, 0)$  é um **nó** no sistema linear e também no sistema não linear.
- ii) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, distintas, e de sinais contrários, então  $(0, 0)$  é um **ponto de sela** do sistema linear e também no sistema não linear.
- iii) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e iguais e o sistema linear não é tal que  $a = d \neq 0$ ,  $b = c = 0$ , então  $(0, 0)$  é um **nó** no sistema linear e também no sistema não linear.
- iv) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números complexos conjugados com a parte real diferente de zero, então  $(0, 0)$  é um **ponto espiral** do sistema linear e também do sistema não linear.

**(b)** O ponto crítico  $(0, 0)$  de um sistema não linear não é necessariamente do mesmo tipo que o sistema linear nos seguintes casos:

- (i) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e iguais e o sistema linear é tal que  $a = d \neq 0$ ,  $b = c = 0$ , então embora  $(0, 0)$  seja um nó do sistema linear, o ponto  $(0, 0)$  pode ser um **nó** ou um **ponto espiral** do sistema não linear.

- (ii) Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são imaginários puros, então embora  $(0, 0)$  seja um **centro** do sistema linear, o ponto  $(0, 0)$  pode ser um **centro** ou um **ponto espiral** do sistema não linear.

**Teorema 4.2 (SHEPLEY, 1984): Estabilidade Assintótica Para Pontos Críticos de Sistemas Não Lineares**

- i) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambas reais e negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema linear associado e do sistema não linear é **assintoticamente estável**;
- ii) Se as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são imaginárias puras, então embora o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema linear associado seja **estável**, ele **não é necessariamente um ponto crítico estável** do sistema não linear. Ele pode ser ou **assintoticamente estável** ou **estável** mas não assintoticamente estável ou **instável**;
- iii) Se uma das raízes  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  são reais e positivas ou se as raízes são complexas conjugadas com parte real positiva, então o ponto crítico  $(0, 0)$  do sistema linear associado e do sistema não linear é **instável**.

## 2.5 A TÉCNICA DE LYAPUNOV

Lyapunov foi o primeiro a teorizar sobre a estabilidade de sistemas de controle não lineares na sua tese de doutorado em 1892, com o título “The General Problem of Motion Stability”. Nele é determinado o comportamento de sistemas não lineares com o auxílio de uma função escalar com características semelhantes à energia associada

ao sistema, conhecida hoje como função de Lyapunov ou método direto de Lyapunov ou, ainda, segundo método (MONTEIRO, 2006).

O matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) foi um dos principais pesquisadores sobre o assunto e um dos precursores dos estudos relacionados a sistemas dinâmicos, tendo inclusive, apresentado os conceitos de plano de fase, ponto crítico, estabilidade e também sobre a existência de ciclos limites para sistemas não lineares. Cabe a Poincaré o método denominado método de Linearização de Lyapunov, conhecido por primeiro método de Lyapunov (MONTEIRO, 2006).

O método de linearização de Lyapunov diz respeito à estabilidade local de um sistema não linear. É uma formalização da intuição que um sistema não linear deve se comportar de maneira similar à sua aproximação linearizada para movimentos de pequena escala. Como todos os sistemas físicos são inerentemente não lineares, o método de linearização de Lyapunov serve como a justificativa fundamental para o uso de técnicas de controle linear na prática, isto é, mostra que o projeto estável por controle linear garante a estabilidade do sistema físico original localmente (SLOTINE, 1991).

A teoria de Lyapunov para sistemas não lineares será tratada nessa seção, de acordo com Bessa (2015) e Slotine (1991).

Considere o sistema autônomo

$$\dot{X} = f(X), \tag{5.1}$$

no qual  $X \in \mathfrak{R}^n$  e  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ .

Considerando  $f(x)$  definida na origem e derivável uma vez, ou seja, de classe  $C^1$ , o sistema (5.1) pode se reescrito como:

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_e} x + g(x), \quad (5.2)$$

em que  $\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_e}$  representa o primeiro termo do desenvolvimento de  $f(x)$  em série de Taylor em torno do ponto crítico  $x_e = 0$  e  $g(x)$  os termos não lineares.

Denotando por  $A$  (uma matriz  $n \times n$  de elementos  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ) a matriz Jacobiana de coeficientes constantes de  $f$  em relação à  $x$  em  $x = 0$

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (5.3)$$

Então, o sistema

$$\dot{x} = Ax \quad (5.4)$$

é chamado de **aproximação linear** do sistema não linear original com ponto de equilíbrio na origem (SLOTINE, 1991).

A relação entre a estabilidade do sistema linear e do sistema não linear é dada a seguir:

**Teorema 5.1 (SLOTINE, 1991): Método de Linearização de Lyapunov**

1. Se o sistema linearizado for estritamente estável (ou seja, se todos os autovalores de  $A$  forem estritamente no plano complexo esquerdo), então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável (para o sistema não linear real).

2. Se o sistema linearizado for instável (isto é, se pelo menos um autovalor de  $A$  for estritamente no plano complexo direito), então o ponto de equilíbrio é instável (para o sistema não linear).

3. Se o sistema linearizado for marginalmente estável (isto é, todos os autovalores de  $A$  estão no plano complexo esquerdo, mas pelo menos um deles está no eixo imaginário), então não se pode concluir nada da aproximação linear, pois o ponto de equilíbrio pode ser estável, assintoticamente estável ou instável para o sistema não linear (SLOTINE, 1991).

## CAPÍTULO 3

### O MODELO NÃO LINEAR PARA CONTROLE POPULACIONAL DO MOSQUITO *Aedes aegypti*

Neste capítulo é descrito o modelo proposto para análise de uma dinâmica não linear usando o método de linearização de Lyapunov, explorando a teoria vista no Capítulo 2.

#### 3.1 O MODELO DE ESTEVA E YANG

O modelo não linear proposto por Esteva e Yang (2005) descreve a dinâmica populacional do *Aedes aegypti*, considerando o ciclo de vida dos mosquitos divididos em fase aquática e fase alada. Na fase aquática os insetos estão nos estágios de ovos, larvas e pupas, e na fase alada há o estágio de mosquitos adultos. Os mosquitos adultos são divididos em machos e fêmeas, que podem ser imaturas (antes de acasalar) ou as fertilizadas.

Denota-se por  $A(t)$  o tamanho da população de mosquitos da fase imatura (aquática) no tempo  $t$ . Os mosquitos adultos são divididos em: fêmeas antes de acasalar (imaturas), denominada  $I(t)$ ; fêmeas fertilizadas (depois de acasalar),  $F(t)$  e machos naturais,  $M(t)$ .

As taxas per capita de mortalidade dos mosquitos serão dadas respectivamente por:  $\mu_A$  (fase imatura);  $\mu_I$  (fêmeas antes de acasalar);  $\mu_F$  (fêmeas fertilizadas) e  $\mu_M$  (machos naturais).



A taxa de oviposição líquida por fêmea fertilizada  $F$  é proporcional à sua densidade, mas também é regulada por um efeito de capacidade que depende de reprodutores disponíveis. Neste modelo, a taxa de oviposição per capita é dada por  $\phi\left(1 - \frac{A}{C}\right)$ , onde  $C$  é a capacidade do meio relacionada à quantidade de nutrientes e espaço disponíveis e  $\phi$  é a taxa de oviposição intrínseca. A população imatura  $A$  torna-se inseto adulto a uma taxa per capita  $\gamma$  sendo uma proporção  $r$  de fêmeas e  $(1-r)$  de machos. O número de fêmeas  $I$  que passam para a fase fertilizada  $F$  dependem principalmente do número de encontros de fêmeas com machos naturais  $M$  e nas correspondentes taxas de acasalamento. Assume-se que  $\beta$  é a taxa de acasalamento das fêmeas imaturas  $I$  com machos naturais  $M$ .

De acordo com os dados acima, o modelo descrito por Esteva e Yang (2005) é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \phi\left(1 - \frac{A}{C}\right)F - (\gamma + \mu_A)A \\ \frac{dI}{dt} = r\gamma A - (\beta + \mu_I)I \\ \frac{dF}{dt} = \beta I - \mu_F F \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)\gamma A - \mu_M M \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo  $(A, I, F, M)$  o vetor de estado e as populações do modelo da equação (1.1) positivas, ou seja,  $\Psi = \{(A, I, F, M) : A, I, F, M \geq 0 \text{ e } 0 \leq A \leq C\}$ .

### 3.2 O MODELO PROPOSTO SIMPLIFICADO

O modelo matemático analisado nesse trabalho é uma dinâmica da população do mosquito *Aedes aegypti* proposto por Reis (2017) e sem a presença de controle. Para isso, o modelo será simplificado, com a população de mosquitos dividida em fase aquática ou imatura e os mosquitos divididos em machos e fêmeas. Este procedimento visa uma simplificação no modelo proposto por Esteva e Yang (2005) e a verificação da eficácia da dinâmica proposta. A técnica de análise do modelo populacional proposta será a linearização da técnica de Lyapunov.

Para o modelo, usaremos a seguinte notação:

$x_1(t) = A(t)$ : é a densidade de indivíduos da população de mosquitos na fase imatura (fase aquática: ovos, larvas e pupas);

$x_2(t) = I(t) + F(t)$ : densidade de indivíduos da população de mosquitos fêmeas na fase adulta, tanto imaturas (antes de acasalar), quanto fertilizadas (depois de acasalar).

$x_3(t) = M(t)$ : densidade de indivíduos da população de mosquitos machos naturais na fase adulta.

Para uniformização da notação utilizada, vamos adotar:

$\mu_1$ : taxa de mortalidade associada à fase imatura.

$\mu_2$ : taxa de mortalidade associada às fêmeas adultas.

$\mu_3$ : taxa de mortalidade associada aos machos adultos.

Com relação ao sistema (1.1), os parâmetros:

$\gamma$ : taxa per capita com que os mosquitos na fase aquática ( $x_1$ ) passam para a fase adulta, sendo que uma proporção  $r$  são de fêmeas e  $(1 - r)$  são de machos.

$\varphi = \beta\phi$ , pois  $\phi$  é a taxa de oviposição intrínseca das fêmeas fertilizadas e  $\beta$  é a taxa de fêmeas que se tornam fertilizadas no instante  $t$ .

Assim, o sistema não linear abaixo é um modelo simplificado para descrever a dinâmica populacional do mosquito *Aedes Aegypti*, sem a presença de controle:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi \left(1 - \frac{x_1}{C}\right) x_2 - (\gamma + \mu_1) x_1 \\ \dot{x}_2 = r\gamma x_1 - \mu_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = (1 - r)\gamma x_1 - \mu_3 x_3 \end{cases}, \quad (2.1)$$

sendo  $(x_1, x_2, x_3)$  o vetor de estado.

O modelo matemático (2.1) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\gamma + \mu_1) x_1 + \varphi x_2 - \frac{\varphi}{C} x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = r\gamma x_1 - \mu_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = (1 - r)\gamma x_1 - \mu_3 x_3 \end{cases}. \quad (2.2)$$

Em (2.2), fazendo:

$$A_1 = -(\gamma + \mu_1) \quad (2.3)$$

$$A_2 = -\frac{\varphi}{C} \quad (2.4)$$

$$A_3 = r\gamma \quad (2.5)$$

$$A_4 = (1-r)\gamma \quad (2.6)$$

e, substituindo as equações (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6), o sistema não linear (2.2) pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + \varphi x_2 + A_2 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = A_3 x_1 - \mu_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = A_4 x_1 - \mu_3 x_3 \end{cases} \quad (2.7)$$

### 3.3 ANÁLISE DO PLANO DE FASE DO MODELO PROPOSTO

A análise do plano de fase do sistema (2.7) da população do *Aedes aegypti*, para um maior entendimento do comportamento das trajetórias, será feita em torno dos seus pontos críticos.

### 3.3.1 Determinação dos Pontos Críticos

Nesta seção iremos determinar os pontos críticos da dinâmica não linear (2.7). Sendo assim, em (2.7) fazendo:

$$\begin{cases} A_1 x_1 + \varphi \cdot x_2 + A_2 x_1 x_2 = 0 \\ A_3 x_1 - \mu_2 x_2 = 0 \\ A_4 x_1 - \mu_3 x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Da terceira equação de (3.1), obtém-se:

$$x_1 = \frac{\mu_3}{A_4} x_3. \quad (3.2)$$

Da segunda equação de (3.1), tem-se que:

$$x_2 = \frac{A_3}{\mu_2} x_1. \quad (3.3)$$

A substituição de (3.2) em (3.3) gera:

$$x_2 = \frac{A_3 \mu_3}{A_4 \mu_2} x_3. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.2) e (3.4) na primeira equação de (3.1), obtém-se a equação  $\frac{A_1 \mu_3}{A_4} x_3 + \frac{\varphi A_3 \mu_3}{A_4 \mu_2} x_3 + \frac{A_2 \mu_3}{A_4} x_3 \frac{A_3 \mu_3}{A_4 \mu_2} x_3 = 0$ , que possui  $x_3$  como fator comum e pondo-o em evidência, tem-se:

$$x_3 \left[ \frac{A_2 A_3 \mu_3^2}{A_4^2 \mu_2} x_3 + \frac{A_1 \mu_2 \mu_3 + \varphi A_3 \mu_3}{A_4 \mu_2} \right] = 0. \quad (3.5)$$

Assim, da equação (3.5), os valores de  $x_3$  são dados por:

$$x_3 = 0 \quad (3.6)$$

ou

$$x_3 = -\frac{A_4(A_1 \mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3 \mu_3}. \quad (3.7)$$

Logo, substituindo (3.6) nas equações (3.2) e (3.4), obtém-se:

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 0,$$

e, substituindo (3.7) nas equações (3.2) e (3.4), tem-se que:

$$x_1 = -\frac{(A_1 \mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3} \quad (3.8)$$

e

$$x_2 = -\frac{(A_1 \mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 \mu_2} \quad (3.9)$$

Portanto, os pontos críticos da dinâmica não linear do sistema (2.7), são dados por:

$$P_1(0,0,0) \text{ e } P_2 \left( -\frac{(A_1 \mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3}, -\frac{(A_1 \mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 \mu_2}, -\frac{A_4(A_1 \mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3 \mu_3} \right).$$

### 3.3.2 Análise da Estabilidade Assintótica do Ponto Crítico $P_1$

A análise da estabilidade assintótica da dinâmica não linear de equação (2.1) será efetuada, primeiramente, em torno do ponto crítico  $P_1 (0, 0, 0)$ .

A matriz Jacobiana aplicada na origem e a equação característica desse sistema são respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \varphi & 0 \\ A_3 & -\mu_2 & 0 \\ A_4 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$(-\mu_3 - \lambda)[\lambda^2 + (\mu_2 - A_1)\lambda - (A_1\mu_2 + A_3\varphi)] = 0. \quad (3.10.1)$$

Assim, seu primeiro autovalor é dado por:

$$\lambda_1 = -\mu_3, \quad (3.11)$$

que é negativo, pois  $\mu_3 > 0$ . Contudo, para encontrar os outros autovalores, temos que resolver a equação

$$\lambda^2 + (\mu_2 - A_1)\lambda - (A_1\mu_2 + A_3\varphi) = 0,$$

cujos discriminante  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = (\mu_2 + A_1)^2 + 4A_3\varphi. \quad (3.12)$$

Substituindo a Equação (2.3) e (2.5) em (3.12), tem-se que:

$$\Delta = (\mu_2 - \gamma - \mu_1)^2 + 4r\gamma\varphi. \quad (3.13)$$

Sendo assim,  $\Delta > 0$  e seus autovalores são dados por

$$\lambda_2 = \frac{-(\mu_2 - \mu_1) - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ ou } \lambda_3 = \frac{-(\mu_2 - \mu_1) + \sqrt{\Delta}}{2}. \quad (3.14)$$

Substituindo a Equação (2.3) em (3.14), geram-se os autovalores

$$\lambda_2 = \frac{-(\mu_2 + \gamma + \mu_1) - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ e } \lambda_3 = \frac{-(\mu_2 + \gamma + \mu_1) + \sqrt{\Delta}}{2},$$

sendo que  $\lambda_2 < 0$ , pois  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$  e  $\gamma > 0$ .

Além disso, para que  $\lambda_3 < 0$ , tem-se que:

$$\frac{-(\mu_2 + \gamma + \mu_1) + \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < (\mu_2 + \gamma + \mu_1) \Leftrightarrow \Delta < (\mu_2 + \gamma + \mu_1)^2 \quad (3.15)$$

Substituindo (3.13) em (3.15), obtém-se

$$(\mu_2 - \gamma - \mu_1)^2 + 4r\gamma\varphi < (\mu_2 + \gamma + \mu_1)^2,$$

assim,  $\lambda_3 < 0$  se, e somente se,

$$\frac{\varphi}{\mu_2} < \frac{(\gamma + \mu_1)}{r\gamma}. \quad (3.15.1)$$



Logo, se, e somente se,  $\frac{\varphi}{\mu_2} < \frac{(\gamma + \mu_1)}{r\gamma}$ , o ponto crítico

$P_1(0, 0, 0)$  gera três autovalores negativos:

$$\lambda_1 = -\mu_3,$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\mu_2 + \gamma + \mu_1) - \sqrt{(\mu_2 - \gamma - \mu_1)^2 + 4r\gamma\varphi}}{2}$$

e

$$\lambda_3 = \frac{-(\mu_2 + \gamma + \mu_1) + \sqrt{(\mu_2 - \gamma - \mu_1)^2 + 4r\gamma\varphi}}{2}.$$

De acordo com a teoria vista no Capítulo 2, o ponto crítico  $P_1$  é assintoticamente estável.

### 3.3.3 Análise da Estabilidade Assintótica do Ponto Crítico $P_2$

Agora a análise da estabilidade assintótica é feita em torno do

ponto crítico  $P_2\left(-\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2A_3}, -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2\mu_2}, -\frac{A_4(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2A_3\mu_3}\right)$ .

Substituindo suas coordenadas por  $P_2(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ , de forma

que

$$-\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2A_3} = x_0^1, \quad (3.16)$$

$$-\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2\mu_2} = x_0^2 \quad \text{e} \quad (3.17)$$

$$-\frac{A_4(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2A_3\mu_3} = x_0^3. \quad (3.18)$$

A substituição da translação

$$y_1 = x_1 - x_0^1 \Rightarrow x_1 = y_1 + x_0^1,$$

$$y_2 = x_2 - x_0^2 \Rightarrow x_2 = y_2 + x_0^2, \quad \text{e}$$

$$y_3 = x_3 - x_0^3 \Rightarrow x_3 = y_3 + x_0^3$$

em (3.1) transforma o  $P_2$  na origem de um novo sistema de coordenadas no espaço de estados, cujo sistema de equações tem a forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = (A_1 + A_2x_0^2)y_1 + (\varphi + A_2x_0^1)y_2 + A_2y_1y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = A_3y_1 - \mu_2y_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = A_4y_1 - \mu_3y_3 \end{cases},$$

que pode ser escrito, substituindo (3.16) e (3.17), na forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{\varphi A_3}{\mu_2}y_1 - \frac{\mu_2 A_1}{A_3}y_2 + A_2y_1y_2 \\ \dot{y}_2 = A_3y_1 - \mu_2y_2 \\ \dot{y}_3 = A_4y_1 - \mu_3y_3 \end{cases}, \quad (3.19)$$

em que  $\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt}$ ,  $\dot{y}_2 = \frac{dy_2}{dt}$  e  $\dot{y}_3 = \frac{dy_3}{dt}$ , e  $(y_1, y_2, y_3)$  é o novo vetor de estados.

A análise do ponto crítico  $P_2$  é feita via técnica de Lyapunov, pois o sistema não linear de equações (3.19) é o sistema de equações (2.7) transladado à origem do espaço  $y_1, y_2, y_3$ . Para isso, considera-se o sistema linear associado à (3.19),

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{\varphi A_3}{\mu_2} y_1 - \frac{\mu_2 A_1}{A_3} y_2 \\ \dot{y}_2 = A_3 y_1 - \mu_2 y_2 \\ \dot{y}_3 = A_4 y_1 - \mu_3 y_3 \end{cases}, \quad (3.20)$$

com matriz Jacobiana aplicada na origem de (3.20) dada por

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi A_3}{\mu_2} & -\frac{\mu_2 A_1}{A_3} & 0 \\ A_3 & -\mu_2 & 0 \\ A_4 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix}. \quad (3.20.1)$$

A equação característica de (3.20) é dada pela expressão:

$$(-\mu_3 - \lambda) \left[ \lambda^2 + \left( \frac{\varphi A_3}{\mu_2} + \mu_2 \right) \lambda + (\varphi A_3 + \mu_2 A_1) \right] = 0.$$

Assim, seu primeiro autovalor é dado por:

$$\lambda_1 = -\mu_3, \quad (3.21)$$

que é negativo, pois  $\mu_3 > 0$ . Agora, para encontrar os outros autovalores, temos que resolver a equação

$$\lambda^2 + \left( \frac{\varphi A_3}{\mu_2} + \mu_2 \right) \lambda + (\varphi A_3 + \mu_2 A_1) = 0$$

cujo discriminante  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = \left( \frac{\varphi A_3}{\mu_2} + \mu_2 \right)^2 - 4(\varphi A_3 + \mu_2 A_1). \quad (3.22)$$

Substituindo a Equação (2.3) e (2.5) em (3.22), tem-se que:

$$\Delta = \left( \frac{\varphi A_3}{\mu_2} - \mu_2 \right)^2 + 4\varphi\mu_2 + 4\mu_1\mu_2. \quad (3.23)$$

Logo,  $\Delta > 0$  e a equação possui dois autovalores distintos dados por

$$\lambda_2 = \frac{-\left( \frac{\varphi A_3}{\mu_2} + \mu_2 \right) - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda_3 = \frac{-\left( \frac{\varphi A_3}{\mu_2} + \mu_2 \right) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.24)$$

Substituindo a Equação (2.5) e (3.23) em (3.24), geram-se os autovalores

$$\lambda_2 = \frac{-\left( \frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} + \mu_2 \right) - \sqrt{\left( \frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} - \mu_2 \right)^2 + 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2}}{2}$$

e

$$\lambda_3 = \frac{-\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} + \mu_2\right) + \sqrt{\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} - \mu_2\right)^2 + 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2}}{2},$$

sendo que  $\lambda_2 < 0$ .

Além disso, para que  $\lambda_3 < 0$ , tem-se que:

$$\frac{-\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} + \mu_2\right) + \sqrt{\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} - \mu_2\right)^2 + 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2}}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} - \mu_2\right)^2 + 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2} < \frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} + \mu_2$$

$$\Leftrightarrow 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2 < 4\varphi r \gamma$$

assim,  $\lambda_3 < 0$  se, e somente se,

$$\frac{\varphi}{\mu_2} > \frac{(\gamma + \mu_1)}{r\gamma}. \quad (3.24.1)$$

Logo, se e somente se,  $\frac{\varphi}{\mu_2} > \frac{(\gamma + \mu_1)}{r\gamma}$ , o ponto crítico

$P_2 \left( -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3}, -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 \mu_2}, -\frac{A_4(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3 \mu_3} \right)$  possui três

autovalores negativos:

$$\lambda_1 = -\mu_3,$$

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} + \mu_2\right) - \sqrt{\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} - \mu_2\right)^2 + 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2}}{2}$$

e

$$\lambda_3 = \frac{-\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} + \mu_2\right) + \sqrt{\left(\frac{\varphi r \gamma}{\mu_2} - \mu_2\right)^2 + 4\gamma\mu_2 + 4\mu_1\mu_2}}{2},$$

Portanto, o ponto crítico  $P_2$  é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema de equações (3.20) sendo, via Lyapunov, um ponto crítico assintoticamente estável do sistema não linear original de equações (3.19) (SLOTINE, 1991).

### 3.4 Simulações Numéricas

Para efetuar as simulações computacionais do modelo populacional não linear, foi utilizado o software MATLAB 2016. Para os resultados numéricos obtidos, considerou-se a densidade de mosquitos na fase aquática, a densidade de mosquitos fêmeas e a densidade de mosquitos machos ao longo do tempo. Os valores utilizados para os parâmetros  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $r$ ,  $C$  e  $\varphi$ , de acordo com Reis (2017), estão dispostos na Figura 14. O parâmetro  $\gamma$ , que é a taxa per capita que o mosquito passa da fase aquática para a fase adulta, será adotado de acordo com as condições de estabilidade estabelecidas na equação (3.15.1) e (3.24.1).

Parâmetro	Descrição	Valor
$\mu_1$	taxa de mortalidade associada à fase imatura	0,0583
$\mu_2$	taxa de mortalidade associada às fêmeas adultas	0,0521
$\mu_3$	taxa de mortalidade associada aos machos adultos	0,06
R	proporção de fêmeas	0,5
C	capacidade do meio ambiente	3
$\varphi$	taxa de oviposição intrínseca	6,353

Figura 14: Valores de Parâmetros  
Fonte: Reis (2017)

#### 3.4.1 – Simulação computacional em torno do ponto crítico $P_1$

As Figuras de 15 a 17 mostram a simulação computacional do ponto crítico  $P_1 = (0, 0, 0)$ , considerando os parâmetros da Figura 18, com

$\gamma = 0,0002$ , satisfazendo as condições de (3.15.1) e a condição inicial  $P_0 = (0.10, 0.10, 0.10)$ , aplicados ao modelo definido em (2.7). A partir disso foram geradas as curvas de resposta no tempo a seguir:

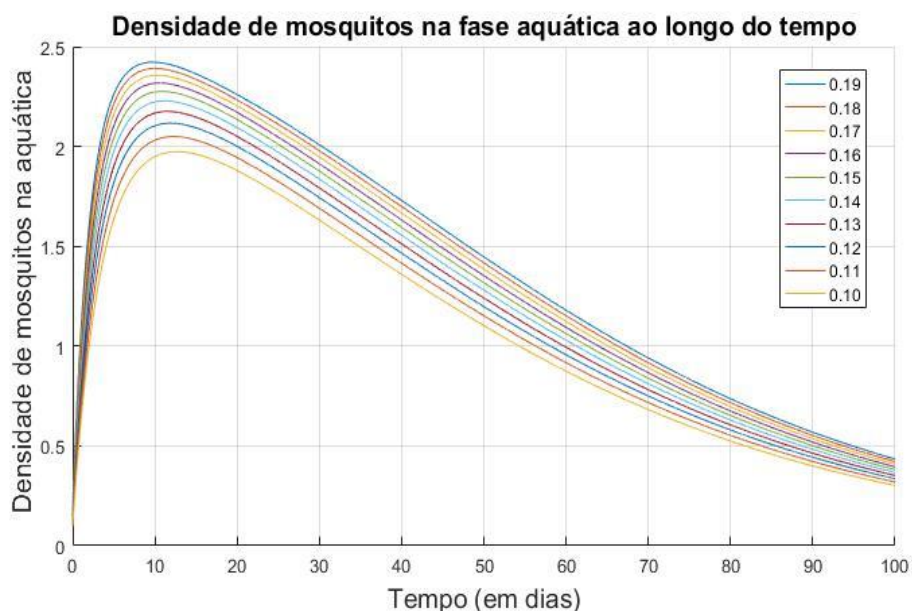


Figura 15: Densidade de mosquitos na fase aquática –  $P_1$

A Figura 15 representa a densidade de mosquitos na fase aquática nos 100 primeiros dias. Observa-se que a densidade atinge seu máximo em 10 dias, diminuindo após este tempo. Isso ocorre devido a estabilidade imposta ao meio, fazendo com que haja diminuição das fêmeas, conseqüentemente, obtém-se uma significativa redução na fase aquática.



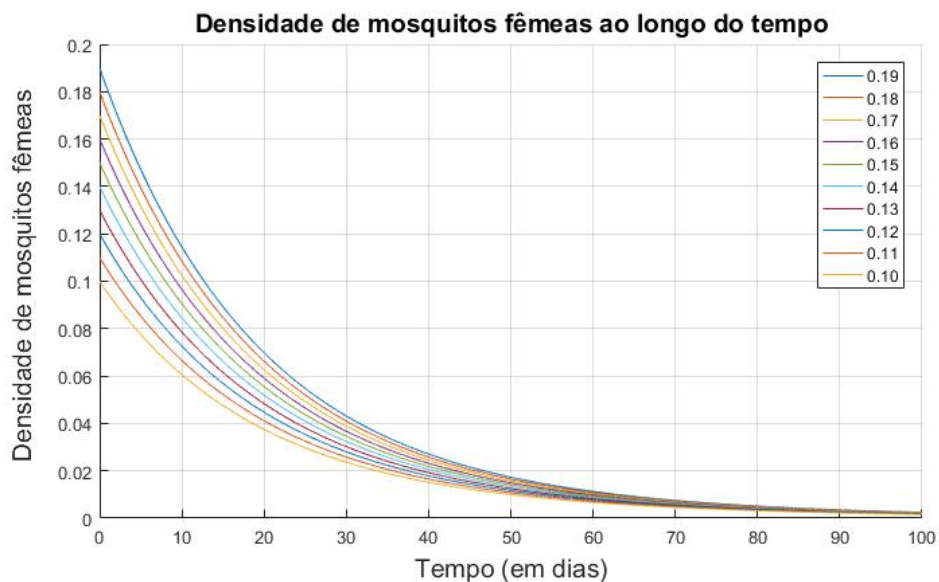


Figura 16: Densidade de mosquitos fêmeas –  $P_1$

A Figura 16 representa a densidade de mosquitos fêmeas nos 100 primeiros dias. A redução na fase aquática se propaga, causando redução em toda fase adulta. Nota-se o decaimento na densidade ao longo dos dias, tendendo a zero e mantendo a população controlada.

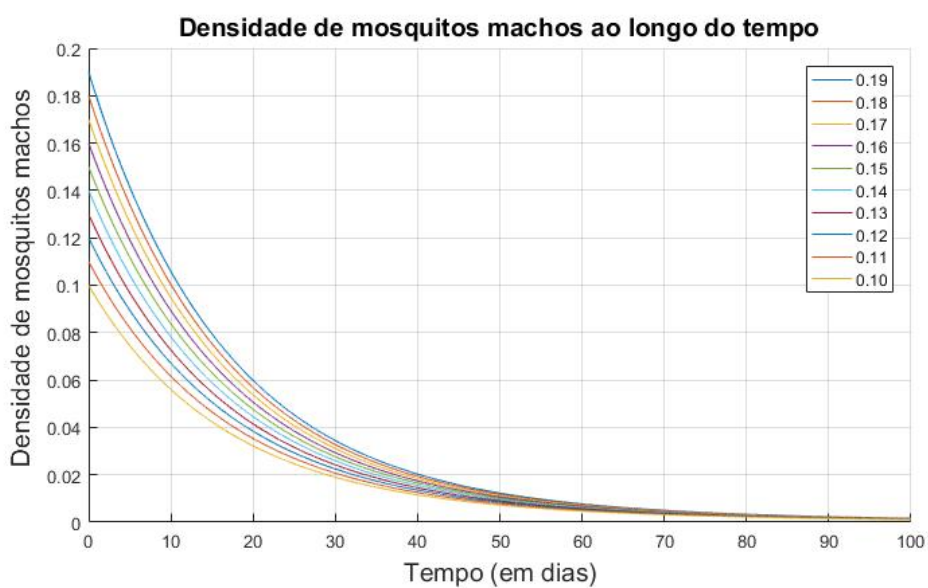


Figura 17: Densidade de mosquitos machos –  $P_1$

A Figura 17 representa a densidade de mosquitos machos nos 100 primeiros dias. Da mesma forma que a redução na fase aquática afeta a densidade de mosquitos fêmeas, isso ocorre também com os machos, acentuado pelo fato da vivência do macho na fase adulta ser curta, pois sua função resume-se a realizar somente a copulação nos primeiros dias da fêmea.

A Figura 18 representa o espaço de fase do sistema (2.7). Nota-se que a curva converge para o ponto de equilíbrio, validando geometricamente a sua estabilidade assintótica.

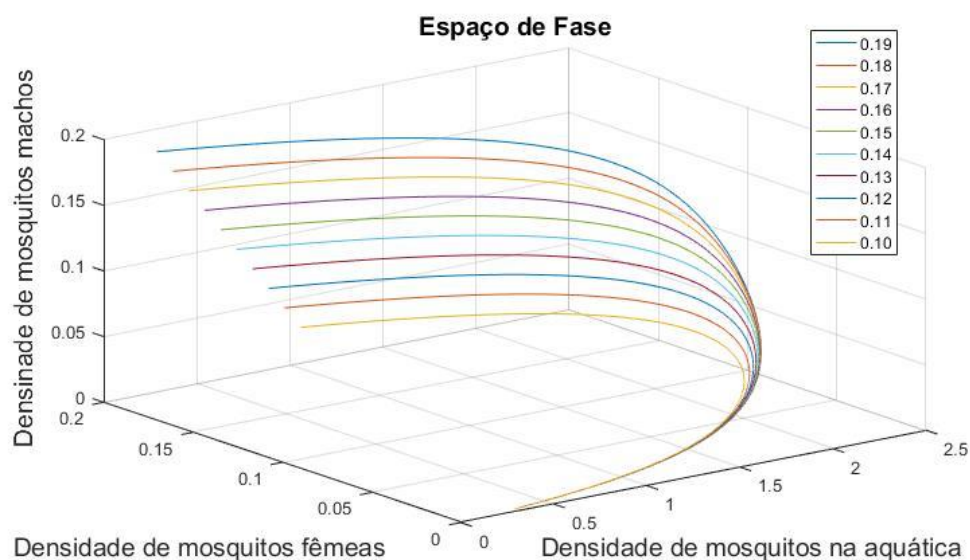


Figura 18: Espaço de fase do sistema –  $P_1$

Utilizando os parâmetros da Figura 14, com  $\gamma = 0,0002$ , tem-se a matriz jacobiana (3.10.1), calculada no ponto crítico  $P_1 = (0, 0, 0)$ , para a análise da estabilidade assintótica:

$$A = \begin{pmatrix} -0,0585 - \lambda & 6,353 & 0 \\ 0,0001 & -0,0521 - \lambda & 0 \\ 0,0001 & 0 & -0,06 - \lambda \end{pmatrix}$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = -0,03 \quad \lambda_2 = -0,06 \quad \lambda_3 = -0,08 \quad (4.1)$$

Desta forma, os autovalores de (4.1) satisfazem a condição de estabilidade assintótica de (2.7).

### 3.4.2 – Simulação computacional em torno do ponto crítico $P_2$

Agora, as Figuras de 19 a 21, relativas ao ponto crítico  $P_2 \left( -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3}, -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 \mu_2}, -\frac{A_4(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3 \mu_3} \right)$ , mostram a simulação computacional com os mesmos parâmetros da Figura 14, a mesma condição inicial  $P_0 = (0.10, 0.10, 0.10)$ , mas com  $\gamma = 0,002$ , satisfazendo as condições de (3.24.1). e a condição inicial  $P_0 = (0.10, 0.10, 0.10)$ , aplicados ao modelo definido em (3.19). A partir disso foram geradas as curvas de resposta no tempo a seguir:

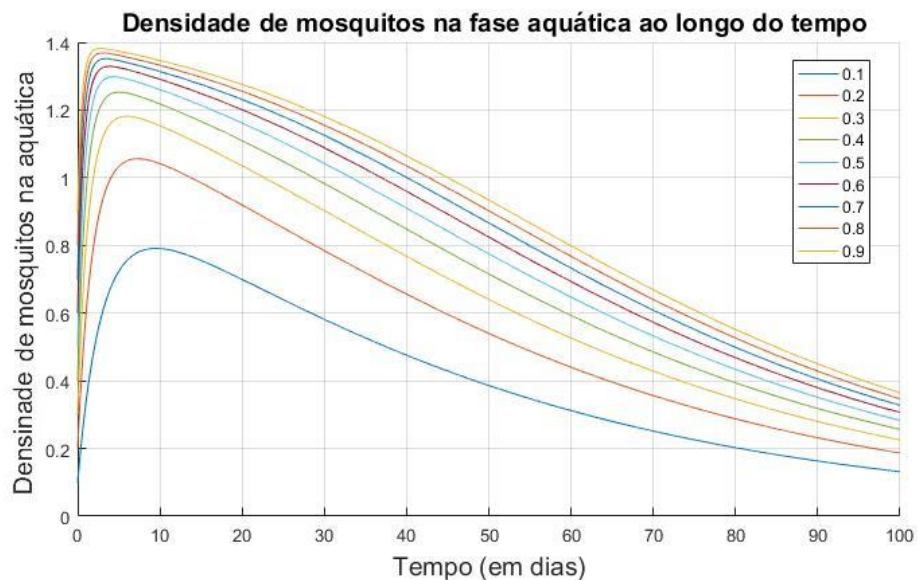


Figura 19: Densidade de mosquitos na fase aquática –  $P_2$

Na Figura 19, observa-se que a densidade atinge seu máximo em menos de 10 dias, decrescendo rapidamente após este tempo. Isso mostra que no ponto crítico  $P_2$ , a curva se estabiliza mais rapidamente comparada ao ponto crítico  $P_1$ . O decréscimo ocorre pelo fato de que os mosquitos diminuem a velocidade de crescimento, morrendo mais mosquitos do que nascem ao longo do tempo.

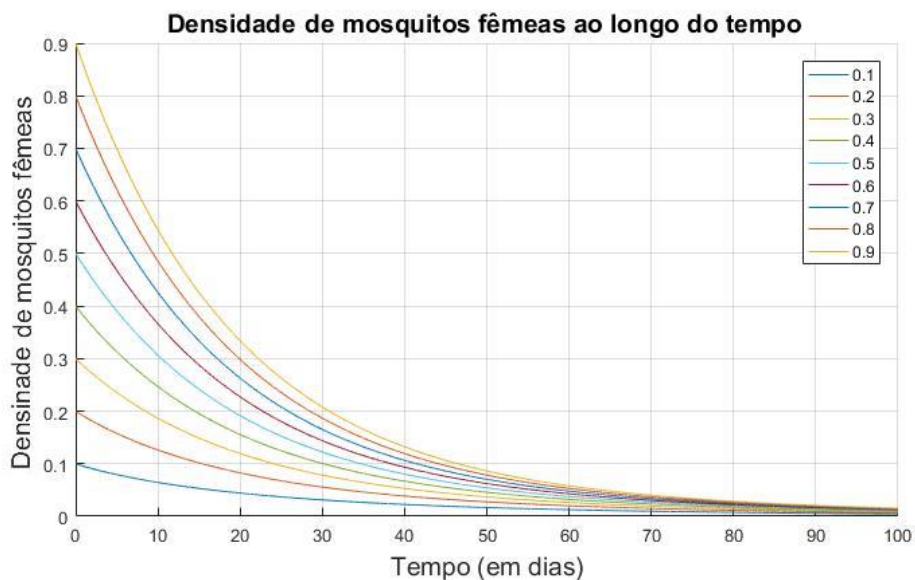


Figura 20: Densidade de mosquitos fêmeas –  $P_2$

Na Figura 20, assim como ocorre na Figura 16, do ponto  $P_1$ , a densidade de mosquitos fêmea sofre um decaimento acentuado devido à redução na densidade da fase aquática, tendendo a zero, mantendo a população controlada.

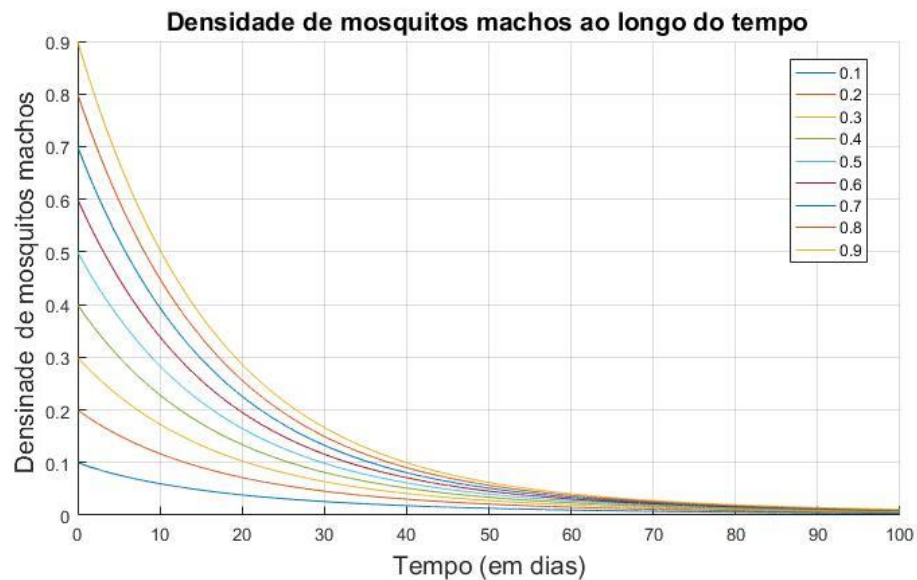


Figura 21: Densidade de mosquitos machos –  $P_2$

Na Figura 21, a densidade de mosquitos machos tende a zero, como ocorre na Figura 17. Isso ocorre pelo decaimento da densidade na fase aquática, porém com maior velocidade.

A Figura 22 representa o espaço de fase do sistema (3.19). Nota-se que a curva converge para o ponto de equilíbrio, validando geometricamente a sua estabilidade assintótica.

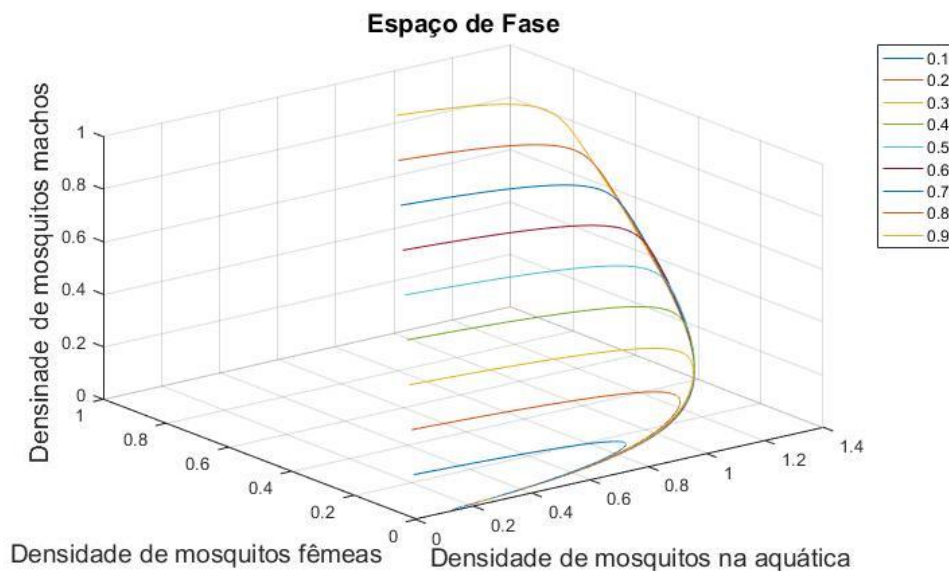


Figura 22: Espaço de fase do sistema –  $P_2$

Utilizando os parâmetros da Figura 14, com  $\gamma = 0,002$ , a matriz jacobiana (3.20.1), para a análise da estabilidade assintótica, calculada no

ponto crítico  $P_2 \left( -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3}, -\frac{(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 \mu_2}, -\frac{A_4(A_1\mu_2 + \varphi A_3)}{A_2 A_3 \mu_3} \right)$ :

$$A = \begin{pmatrix} -0,1219385797 - \lambda & 3,14163 & 0 \\ 0,001 & -0,0521 - \lambda & 0 \\ 0,001 & 0 & -0,06 - \lambda \end{pmatrix}$$

cujas raízes associadas ao polinômio característico são:

$$\lambda_1 = -0,02 \quad \lambda_2 = -0,06 \quad \lambda_3 = -0,1536 \quad (4.1)$$

Desta forma, os autovalores de (4.1) satisfazem a condição de estabilidade assintótica de (3.19).

## CONCLUSÕES

Neste trabalho propôs-se a verificação da eficácia de uma simplificação feita por Reis (2017) no modelo proposto de Esteva e Yang (2005) de uma dinâmica populacional não linear do mosquito *Aedes aegypti* sem a presença de controle. No modelo simplificado, além da fase aquática, considerou-se a fase de mosquitos adultos divididos apenas em machos e fêmeas, sem levar em conta a divisão de fêmeas imaturas e fertilizadas.

Para isso, efetuou-se um estudo da teoria de sistemas dinâmicos não lineares e da técnica de linearização de Lyapunov. No modelo simplificado, foram encontrados dois pontos críticos, sendo um na origem. Foram obtidas condições necessárias e suficientes para analisar as soluções assintoticamente estáveis de cada ponto crítico, e um estudo do espaço de fase desse modelo simplificado, que contempla a estabilidade assintótica desses pontos críticos. Determinou-se, de acordo com o método de linearização de Lyapunov, que o ponto crítico na origem e o segundo ponto, depois de uma translação, eram assintoticamente estáveis, desde que seus parâmetros atendam as condições de estabilidade determinadas.

Para a comprovação dos resultados, simulações numéricas foram apresentadas, com o objetivo de um melhor entendimento do comportamento dinâmico deste sistema. Na análise de cada ponto, foram usados parâmetros estabelecidos por Reis (2017), e condições necessárias e suficientes para que fosse gerado um espaço de fase das soluções de equilíbrio e concluíssemos que os dois pontos críticos encontrados eram assintoticamente estáveis.

Para trabalhos futuros, pretende-se efetuar uma adaptação as curvas soluções para serem trabalhadas na forma de exercícios de logaritmos e exponenciais para o ensino médio, com o objetivo de conscientizar os alunos da necessidade de controle e combate ao *Aedes aegypti*.



## REFERÊNCIAS

- ALVES, L. O. *Aedes aegypti*. **InfoEscola**, [S. l.], 2014. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/insetos/aedes-aegypti/>>. Acesso em: 21 jun. 2018.
- ALVES, L. O. Você sabia? O *Aedes aegypti* foi erradicado do Brasil na década de 1950. **InfoEscola**, [S. l.], 2014. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/curiosidades/voce-sabia-aedes-aegypti-foi-erradicado-do-brasil-na-decada-de-1950/>>. Acesso em: 16 jan. 2018.
- BESSA, G. R. **Teoria da estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações**: modelo presa-predador e competição entre espécies. 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências Exatas. Rio Claro. 2011.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Livro Técnicos e Científicos, 2006.
- BRASIL. Ministério da Saúde. Agência Saúde. **Ministério da Saúde atualiza casos no país**. Brasília, 19 abr. 2018. Disponível em: <<http://portalmms.saude.gov.br/noticias/agencia-saude/43042-febre-amarela-ministerio-da-saude-atualiza-casos-no-pais-7>>. Acesso em: 20 jun. 2018.
- BRASIL. Ministério da Saúde. Fundação Nacional de Saúde (FUNASA). **Instruções para pessoal de combate ao vetor**: manual de normas técnicas. 3.ª ed. rev. Brasília, 2001.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Manual de dengue**: vigilância epidemiológica e atenção ao doente. Brasília, 1996.
- BRASIL. Ministério da Saúde. **Plano Diretor de Erradicação do *Aedes aegypti* do Brasil**. Brasília, 1996.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. **Boletim Epidemiológico**, Brasília, v. 49, n. 24, jun 2018. Disponível em: <<http://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2018/junho/11/2018-022.pdf>>. Acesso: 14 jun. 2018.

DONALÍSIO, M. R. **O dengue no espaço habitado**. São Paulo: Hucitec, 1999.

EBC. – Agência Brasil. **Primeiro caso de zika no Brasil completa um ano neste sábado**. Brasília, 7 maio 2016. Disponível em: <<http://www.ebc.com.br/noticias/saude/2016/05/primeiro-caso-de-zika-no-brasil-completa-um-ano-conheca-os-desafios-no>>. Acesso em: 16 jan. 2018.

EDWARDS JR, C. H, PENNEY, David E. **Equações diferenciais elementares e problemas de contorno**. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1995.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Saúde. O mosquito *Aedes aegypti*. Vitória, 2018. Disponível em: <<http://mosquito.saude.es.gov.br/aedes-aedypti>>. Acesso em: 15 jan. 2018.

ESTEVA, L; e YANG, H. M. Mathematical Model to Assess the Control of *Aedes aegypti* Mosquitoes by the Sterile Insect Technique. **Mathematical Biosciences**. New York, 198: 132-147 (2005)

FRANCO, O. P. **História da Febre Amarela no Brasil**. Rio de Janeiro: Superintendência de Campanhas de Saúde Pública, 1976.

FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ. **Aedes aegypti**: – introdução aos aspectos científicos do vetor. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <<http://www.ioc.fiocruz.br/dengue>>. Acesso em: 12 dez. 2017.

FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ. Agência Fiocruz de Notícias. **Febre Amarela**. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <<https://agencia.fiocruz.br/febre-amarela>>. Acesso em: 17 jan 2018.

- HALSTEAD, S. B. *Aedes aegypti*: why can't we control it? **Bulletin of the Society Vector Ecology**, Santa Ana, 1988;1113(2):304–11.
- HASSELQUIST, F. *Iter palaestinum: eller, Resa til Heliga Landet: förrättad infrån år 1749 til 1752: Carl von Linné (1757)*. **Linnaeus Link**, Stockholm: Rediviva, 1969. (post-soulsby, n. 4565). Disponível em: <<http://www.linnaeuslink.org/records/record/4565>>. Acesso em: 13 set. 2018.
- MONTEIRO, P. M.; COUTO, G. R. **Modelagem e desenvolvimento de controles de sistema termo-hidráulico e interfaces para a aquisição e controle de dados**. Ouro Preto. 2006. Disponível em: <<https://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Modelagem-e-Desenvolvimento-De-Controles-De/26149.html>>. Acesso em: 13 set. 2018.
- NEVES, D. P. et. al.' **Parasitologia humana**. 10. ed. São Paulo: Atheneu, 2000.
- REIS, C. A. et al. Análise do plano de fase de uma dinâmica populacional não linear do *Aedes aegypti*. In: ERMAC, 2016, Bauru. Anais do ERMAC 2016, 2016.
- REIS, C. A. et al. Análise de uma dinâmica populacional não linear simplificada do *Aedes aegypti* via dinâmica zero. In: DINCON, 2017, São José do Rio Preto, SP.
- ROSSETTI, V. *Aedes aegypti* – a epidemiologia da dengue. **Netnature**, [S. I.], 2016. Disponível em: <<https://netnature.wordpress.com/2016/03/08/aedes-aegypti-a-pidemiologia-a-dengue/>>. Acesso em: 15 jan. 2018.
- SANTOS, V. S. Ciclo de vida do *Aedes aegypti*. **Brasil Escola**, [S. I.], 2016. Disponível em: <<http://brasilecola.uol.com.br/animais/ciclo-vida-aedes-aegypti.htm>> Acesso em: 17 jan. 2018.
- SANTOS, V. S. Doenças virais. **Mundo Educação**, [S. I.], 2017. Disponível em: <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/doencas/febre-chikungunya.htm>>. Acesso em: 17 jan. 2018.

SHEPLEY, L. R. **Differential equations**, University of New Hampshire. New Hampshire, 1984.

SLOTINE, J. LI, W. **Applied Nonlinear Control**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.

THOMÉ, R. C. A. Controle ótimo aplicado na estratégia de combate ao *Aedes aegypti* utilizando inseticida e mosquitos estéreis. Campinas, 2007.

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 20 de Agosto de 2018.

---

Luiz Cesar Maranhão