UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Marcos Luchiari Baraldi

Poliedros de Kepler-Poinsot: Uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas.

Bauru

2018

Marcos Luchiari Baraldi

Poliedros de Kepler-Poinsot: Uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas.

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho". Campus de Bauru.

Orientador Prof. Dr. Valter Locci,

Bauru

2018

Baraldi, Marcos Luchiari.
Poliedros de Kepler-Poinsot : Uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas / Marcos Luchiari Baraldi. - Bauru, 2018.
89f. : il., tabs.

Orientador: Dr. Valter Locci.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Faculdade de Ciências

1. Matemática – Estudo e ensino 2. Geometria sólida – Estudo e ensino. 3. Poliedros. 4. Aprendizagem baseada em problemas. 5. Matemática - Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista. “Julio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE

UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marcos Luchiari Baraldi

Poliedros de Kepler-Poinsot: Uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas.

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Comissão Examinadora:

Professor Doutor Valter Locci
Unesp – Bauru
Orientador

Professora Doutora Cristiane Alexandra Lázaro
Unesp – Bauru

Professora Doutora Ana Cláudia de Jesus Golzio
Unicamp – Campinas

Data da defesa, Bauru, 03 de agosto de 2018

Dedicatória

A minha esposa Néia e aos meus queridos filhos, Kimberly, Bruno, Pedro, Maurício e Laura.

Agradecimentos

Primeiramente os agradecimentos vão a Deus, sem o qual nada se realiza, nem mesmo o cair de uma folha.

A família vem ocupar a segunda posição, pois sem sua paciência, apoio e ajuda não teria conseguido chegar ao final.

Aos mestres doutores, que com muito carinho e dedicação, desenvolvem os próprios trabalhos e nos fazem enxergar e crescer com seus conhecimentos que, aos meus olhos, parecem em perfeita harmonia.

Ao meu orientador Valter Locci, que com muito trabalho, paciência e ótimas ideias, fez o meu estudo se tornar cada vez melhor e gratificante, principalmente, ao trazer a possibilidade de concretização da ideia.

A minha coordenadora Tatiana Miguel Rodrigues, que com sensibilidade e doçura fez-me enxergar a luz ao final do túnel, não permitindo esmorecimento, por minha parte, durante todo estudo e trabalho.

Aos amigos de turma, os quais, semanalmente, ajudaram-me a recarregar as baterias e, com palavras de otimismos, tornaram-me mais valente para enfrentar a jornada, agora, vencida.

A minha sempre linda e fiel esposa, Claudinéia (Néia) que com muita paciência, sorriso, meiguice, acompanhou-me durante as viagens e, deu-me frequentemente, incentivo e motivação para que eu mantivesse o foco desse estudo.

Enfim, a todos que, de modo direto ou indireto, auxiliarem-me chegar a até aqui, pois com certeza, sozinho jamais chegaria.

.

Se o ser humano tiver ética, ele é 1.
Se também for inteligente, acrescente 0 e será 10.
Se também for rico, acrescente mais um 0 e será 100.
Se também for belo, acrescente mais um 0 e ele será 1000.
Mas, se perder o 1, que corresponde a ética, então perderá todo seu valor e restarão apenas os zeros.

(Al-Khawarizmi)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma verificação de uma das relações mais importantes da matemática elementar: a relação de Euler. Ela expressa uma relação entre o número vértices, arestas e faces de poliedros convexos, podendo ser estendida aos poliedros estrelados, particularmente aos de Kepler-Poinsot. Para analisar tal relação, a proposta é utilizar material concreto, como jujubas, canudos e varetas de fibra. A princípio é realizada a construção dos poliedros de Platão, canudos rígidos e coloridos, onde é possível verificar com facilidade a veracidade da Relação de Euler. Na sequência utilizam-se as varetas de fibra de vidro 1,4 mm que com a introdução nas arestas dos poliedros, verifica-se facilmente que apenas o dodecaedro e o icosaedro são passíveis da estrelação, por prolongamento das arestas obtendo assim, dois dos poliedros estrelados de Kepler-Poinsot. Por fim, é analisado que a Relação de Euler, também se verifica para esses estrelados. Com tal procedimento fica mais perceptível a não existência de outros poliedros estrelados, pois a partir de sua construção com canudos e a ampliação de suas arestas com varetas fica claro a não intersecção delas. Vale lembrar que tais atividades lúdicas são incentivadas no ensino da matemática e algumas já foram abordadas em dissertações do PROFMAT e em documentos oficiais de ensino no Brasil, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais, no Currículo do Estado de São Paulo, matrizes de referências de avaliações tais como: Saresp (Sistema de avaliação de rendimento escolar do estado de São Paulo), Saeb (Sistema nacional de avaliação do ensino básico) e ENEM (Exame nacional do ensino médio).

Palavras-chave: Aprendizagem matemática. Material concreto. Relação de Euler. Poliedros de Kepler-Poinsot.

ABSTRACT

This paper presents a verification of one of the most important relations of elementary mathematics: Euler's relation. It expresses a relation between the number of vertices, edges and faces of convex polyhedra, and can be extended to the starry polyhedra, particularly to those of Kepler-Poinsot. To analyze this relationship, the proposal is to use concrete material, such as jelly beans, straws and fiber rods. At first the construction of Plato's polyhedrons, rigid and colored straws, is carried out, where it is possible to verify with ease the veracity of the Euler Relation. The 1.4 mm glass fiber rods are then used which, with the introduction of polyhedron edges, can easily be verified that only the dodecahedron and the icosahedron are capable of staring by prolonging the edges, thus obtaining two of the polyhedra starring Kepler-Poinsot. Finally, it is analyzed that the relation of Euler, also is verified for these stars. With such a procedure it is more noticeable the existence of other starry polyhedra, since from its construction with straws and the enlargement of its edges with rods it is clear the non-intersection of them. It is worth remembering that such play activities are encouraged in the teaching of mathematics and some have already been addressed in PROFMAT dissertations and in official teaching documents in Brazil, such as in the National Curriculum Parameters, in the Curriculum of the State of São Paulo, references reference matrices such as: Saresp (System of evaluation of school performance of the state of São Paulo), Saeb (National system of evaluation of basic education) and ENEM (National High School Examination).

Keywords: Learning Mathematics. Concrete material. Euler relation. Kepler-Poinsot polyhedra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Não são novos os problemas que cercam o ensino da matemática, assim como não é novo o mal estar que eles trazem para professores e alunos. Os problemas em ensinar e aprender matemática são muitos, variados e difíceis.

O aluno, ao perceber as dificuldades que possui na aprendizagem da matemática, geralmente começa a apresentar desinteresse, desatenção, como também a agir com irresponsabilidade com os estudos e agressividade no ambiente escolar. A dificuldade de aprendizagem escolar pode ser considerada uma das causas que conduz o aluno ao fracasso.

Durante muitos anos os alunos com dificuldade em aprender eram culpados e responsabilizados pelo fracasso na escola, sofrendo punições e críticas. Contudo, com o avanço da ciência e a realização de inúmeros estudos nesse sentido, sabe-se que essa dificuldade não é uma questão de vontade própria do educando, existindo várias razões que respondem suas causas.

Buscando apresentar uma didática atrativa e eficaz para o ensino, é preciso que o professor seja consciente da importância em criar conexões com os seus alunos, através de atividades diárias, formando e recuperando novos vínculos, mais fortes e positivos.

Na matemática, as ideias são transmitidas através dos símbolos dispostos convencionalmente, que possuem significados. Considerando esses símbolos como o alfabeto matemático, é possível afirmar que sua leitura e escrita fazem parte do contexto geral de alfabetização. Assim, o indivíduo compreendendo o que se lê e escreve a respeito das noções de lógica, aritmética e geometria, adquire as primeiras ideias matemáticas que fazem parte do contexto de alfabetização.

Neste contexto, a compreensão do educador como intercessor, talvez seja a mais importante implicação teórico-metodológica de uma proposta de formação de conceitos em matemática para o processo de construção do conhecimento, criando situações pedagógicas para que o aluno exercite a capacidade de pensar e buscar soluções para os problemas apresentados.

Alguns métodos didáticos têm sido utilizados no ensino da matemática, dentre eles, as atividades lúdicas. Esse recurso pedagógico impulsiona o aluno a buscar conhecimento através de atividades que incentivam o aprendizado aprender. Ademais, as atividades lúdicas são reverenciadas em documentos oficiais de ensino no Brasil, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s, no Currículo do Estado de São Paulo e nas matrizes de referências do Sistema de avaliação de rendimento escolar do estado de São Paulo - Saresp, Sistema nacional de avaliação do ensino básico - SAEB e Exame nacional do ensino médio - ENEM.

O presente estudo, com o objetivo de contribuir com uma didática de fácil compreensão, principalmente para o ensino da geometria, após uma revisão da literatura sobre os Poliedros de Kepler-Poinsot e a Relação de Euler, apresenta um estudo de caso, que buscou além do aprendizado do aluno, despertar no professor a criatividade para ensinar.

Na revisão da literatura, o estudo aborda conceitos e apresenta uma breve biografia de alguns dos matemáticos. Com a matéria investigada, foi possível aplicar a técnica de coleta de dados, com objetivo de observar a postura dos alunos durante a experimentação das atividades, esta incluiu atividades pré-elaboradas com recursos pedagógicos, como por exemplo, o uso de materiais concretos para que os alunos estudem os poliedros e a relação de Euler. As atividades desenvolvidas foram realizadas com um grupo de alunos das 2ª séries do ensino médio, utilizando material concreto, como jujubas, canudos e varetas de fibra de vidro.

Embora seja um método simples e prático de ensinar, é eficiente para o aprendizado da geometria, principalmente para compreensão do aluno da relação de Euler com os poliedros de Kepler-Poinsot.

2. O ENSINO DA MATEMÁTICA CONFORME OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Ao longo do tempo, o ensino da matemática tem passado por sucessivas reformas, entre elas a eliminação de um método mecânico de aprendizagem e a avaliação como processo contínuo no fazer pedagógico.

Para a adequação do ensino, os PCN's vêm desempenhando um importante papel, apresentando propostas às instituições, para que potencializem a capacidade de aprendizagem heterogênea dos indivíduos e consequentemente possam conduzir o ensino para que os mesmos absorvam os conhecimentos transmitidos, bem como facilitando o desenvolvimento de suas capacidades continuamente (NOBREGA et al, 2012).

Antes de abordar sobre os aspectos que envolvem a matemática, vale destacar as palavras de Miguel (2010, p. 317-318), que discorre sobre a aplicação dos PCN's na disciplina da Matemática:

> É num clima de tensão sobre como elaborar referências nacionais para o enfrentamento do problema da aprendizagem matemática, para o encaminhamento dos desafios colocados pela internacionalização e pelas novas características da sociedade brasileira, de urbanização progressiva, que se estabelecem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a área de Matemática. Propondo o seu desenvolvimento conceitual de modo a conduzir o aluno a valorizá-la como instrumento para a compreensão do mundo, estimulando a curiosidade, o espírito investigativo e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas, os Parâmetros Curriculares de Matemática não podem, então, serem considerados como um rompimento com as propostas curriculares que varreram a década de 1980.

Conforme o entendimento do mesmo citado anteriormente, doutor em educação e conhecido por seus conhecimentos e colaborações no desenvolvimento pedagógico, o surgimento dos PCN´s e sua aplicação na disciplina da Matemática, não veio a prejudicar as propostas curriculares anteriores, ao contrário, trouxe uma nova maneira de conduzir o aluno, desenvolvendo sua forma de compreensão e impulsionando sua capacidade intelectual de resolver os problemas, principalmente quando relacionados à matemática.

Neste sentido, o presente capítulo tem por fito destacar alguns dos conceitos e ideias básicas dos PCN´s relacionados com a matemática e trazer algumas reflexões sobre os mesmos.

"É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação" (BRASIL, 1997, p. 26).

2.1 Esboço dos parâmetros curriculares nacionais (PCN's)

Em 20 de dezembro de 1996, foi sancionada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394, instituindo como base de qualidade escolar, os PCN's que padroniza o ensino fundamental e médio no país, constituindo pilares para guiar a educação formal e a própria relação entre escola e sociedade.

Os PCN's têm como função, conforme Brasil (1997a, p.13) "orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros", bem como, buscando auxiliar aquele que se encontra mais distante e com pouco contato com a produção pedagógica atual.

Essas diretrizes têm o objetivo de estruturar e reestruturar os currículos escolares de todo o Brasil, ressalvando que podem ser opcionais para as instituições privadas e obrigatórias para a rede pública.

A respeito, a própria Secretaria da Educação Fundamental, destacou a natureza dos PCN´s:

> Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas (BRASIL, 1997a, p.13).

Os relatores desse documento, também destacaram que a aplicação dos PCN's deve estar em conformidade com a realidade regional, considerando a extensão e a cultura territorial.

> O conjunto das proposições aqui expressas responde à necessidade de referenciais a partir dos quais o sistema educacional do País se organize, a fim de garantir que, respeitadas as diversidades culturais, regionais, étnicas, religiosas e políticas que atravessam uma sociedade múltipla, estratificada e complexa, a educação possa atuar, decisivamente, no processo de construção da cidadania, tendo como meta o ideal de uma crescente igualdade de direitos entre os cidadãos, baseado nos princípios democráticos. Essa igualdade implica necessariamente o acesso à totalidade dos bens públicos, entre os quais o conjunto dos conhecimentos socialmente relevantes (BRASIL, 1997a, p.13).

Recentemente, deve-se observar que, as atualizações das edições vêm demonstrando em suas diretrizes, certa preocupação em estimular cada vez mais os profissionais da área, ou seja, professores, coordenadores e diretores.

Nota-se que os PCN's podem agir como elemento catalisador de ações que buscam a qualidade da educação brasileira, porém, não se pode responsabilizá-los em resolver todos os problemas que afetam a aprendizagem no país, visto que, existe um conjunto de ações que devem ser trabalhadas conjuntamente com os parâmetros curriculares.

> A busca da qualidade impõe a necessidade de investimentos em diferentes frentes, como a formação inicial e continuada de professores, uma política de salários dignos, um plano de carreira, a qualidade do livro didático, de recursos televisivos e de multimídia, a disponibilidade de materiais didáticos. Mas esta qualificação almejada implica colocar também, no centro do debate,

> as atividades escolares de ensino e aprendizagem e a questão curricular como de inegável importância para a política educacional da nação brasileira (BRASIL, 1997a, p.13).

Para melhor compreensão e aplicação dos PCN’s, o documento é dividido em disciplinas que, além de envolver práticas de organização de conteúdo, apresenta desde as formas de abordagem das matérias com os alunos até a aplicação prática das lições ensinadas, como também orienta a melhor conduta a ser adotada pelos educadores em situações diversas.

2.2 Breve histórico do surgimento da matemática

Boyer (1996), ensina que a matemática se desenvolveu a partir das necessidades das pessoas. Os povos antigos praticavam compra e venda, cobravam impostos, mediam propriedades e distâncias, entre outras ações. Com a necessidade de um cálculo para todas as atividades, surge então a matemática, servindo como instrumento para conhecimento do mundo e domínio da natureza.

Corroborando, Eves (2004, p.57) revela que a “matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia”.

Para auxiliar a matemática, surgem alguns instrumentos como o papiro e novas fórmulas, trazendo resultados mais precisos aos cálculos:

> Pequenas pranchas, carregando uma fina camada e cera, juntamente com um estilo, compuseram o material de escrita dos romanos de cerca de dois milênios atrás. Antes e durante o Império Romano usaram-se frequentemente tabuleiros de areia para cálculos simples e para traçados de figuras geométricas. E, obviamente, muito cedo se usaram pedras e argilas para registros escritos. (EVES, 2004, p. 38-39)

Sobre o surgimento de instrumentos que impulsionaram o desenvolvimento da matemática, Ifrah (2001) comenta que os romanos inventaram um instrumento que foi muito utilizado inclusive para cobrança de impostos, o ábaco, que era feito com uma base de madeira, com um número de pedras divididas em colunas, desenvolvido para realizar cálculos manualmente. Contudo, com a noção do zero e com a origem dos algarismos, o ábaco, foi aos poucos deixado de ser usado.

Vale destacar que, em algumas escolas, o ábaco ainda é usado para ensinar aos alunos de séries iniciais as operações de adição e subtração.

2.3 A Matemática como disciplina no currículo escolar

Santos (2007), revela que devido à Revolução Industrial, a matemática só foi inserida como disciplina escolar no final do século XVIII. A base utilizada para o currículo e os livros didáticos, foi enfatizada pelo raciocínio dedutivo do grego Euclides (séc. III a.C.), que ao mesmo tempo em que era determinante para a compreensão da Matemática, era também imprópria para aulas no Ensino Básico. Foi somente no século XX, durante as guerras, que a evolução da matemática realmente ocorreu, porém, ainda que sendo inserida no contexto escolar, a disciplina continuava distante da vida do aluno fora do ambiente escolar. Neste contexto, surgiram movimentos nacionais a partir da década de 20, visando uma reorientação curricular, contudo, sem sucesso na mudança de prática docente, continuando a ser aplicada uma didática elitista.

Com a conscientização da necessidade de uma aprendizagem efetiva, surgem a partir dos anos 60, vários movimentos de mudanças no ensino da matemática

> Nas décadas de 60/70, surge a Matemática Moderna. Ela se apoia na teoria dos conjuntos mantém o foco nos procedimentos e isola a geometria. É muita abstração para o estudante da Educação Básica.
> Nos anos 70, começa o Movimento de Educação Matemática, com a participação de professores do mundo todo organizada em grupos de estudo e pesquisa. Especialistas descobrem como se constrói o conhecimento na criança e estudam formas alternativas de avaliação. Matemáticos não ligados à educação se dividem entre os que apoiam e os que resistem às mudanças.
> Nos anos 80, a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática, com a proposta recomendada pelo documento “Agenda para Ação”.
> Na década de 90, são lançados no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais para as oito séries do Ensino Fundamental. O capítulo dedicado à disciplina é elaborado por integrantes brasileiros do Movimento de Educação Matemática. Segundo os PCN’s ainda são os melhores instrumentos de orientação para todos os professores que querem mudar sua maneira de dar aulas e, com isso, combater o fracasso escolar (SANTOS, 2007).

Atualmente, a matemática é vista como uma ciência abstrata, distante do cotidiano das pessoas, influenciando o ensino da disciplina na educação.

2.4 Aplicação dos PCN’s na matemática

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a matemática é um importante componente para a “construção da cidadania, na medida em que a sociedade utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar" (BRASIL, 1997b, p.19).

Enfatizando sobre a aprendizagem da matemática, os PCN´s afirmam que está relacionada com o entendimento, ou seja, "à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos" (BRASIL, 1997b, p.19).

Assim, a didática deve inserir ferramentas que sejam atrativas para os educandos, principalmente aquelas que são disponibilizadas fora do ambiente escolar, como celulares, jogos digitais, dentre outros.

Porém, é preciso considerar que esses recursos, além de possuir um papel importante no processo de ensino aprendizagem, devem "estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, à base da atividade matemática" (BRASIL, 1997b, p.19).

Portanto, a matemática é considerada nos PCN's, como uma:

> (...) construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda a criança e jovem brasileiro tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite, de fato, sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura (BRASIL, 1998b, p.15).

Para Miguel (2010), a proposta de matemática tenta agrupar algumas tendências modernas no ensino da disciplina, buscando corrigir algumas irregularidades geradas, ou, pela incompreensão na reforma de 1986, ou ainda pela orientação e interpretação dadas aos PCN's.

Asseverando a importância que a disciplina da matemática foi considerada nos PCN´s, Miguel destaca os seguintes aspectos:

> 1) A Matemática e a Língua Materna configuram um par fundamental, mas de caráter complementar;
> 2) A linguagem matemática constitui um conhecimento específico da educação básica, com interfaces importantes tanto para as Ciências Naturais quanto para as Ciências Humanas e para as Linguagens em sentido amplo;
> 3) O tratamento da Matemática como área específica pode facilitar a inserção de recursos tecnológicos fundamentais para a representação de dados e para tratamento da informação (MIGUEL, 2010, p.321).

São nos PCN's que se encontra a discussão dos processos para resolução de vários pontos, como os problemas, a história da matemática, jogos e uso das tecnologias de comunicação como forma de melhorar o ensino da matemática.

Nas discussões que são realizadas nos PCN’s, é adicionado temas colaterais como a ética, a pluralidade cultural, a orientação sexual, meio ambiente, saúde, trabalho e consumo. Para GROENWALD (2013, p.3): “Esses temas são necessários para que o aluno assuma uma posição crítica e consiga proteger–se, através do conhecimento, quando se deparar com certas situações durante a vida”.

Sobre como melhor trabalhar os conteúdos da matemática que desenvolvem a estrutura cognitiva do aluno, os PCN´s orienta:

> (...) o estudo dos números e das operações (no campo da aritmética e da álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da aritmética, da álgebra, da geometria e de outros campos do conhecimento) (BRASIL, 1997b, p.38).

De acordo com os PCN´s, as competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática, estão distribuídas em três domínios da ação humana: a vida em sociedade, a atividade produtiva e a experiência subjetiva (BRASIL, 1997b).

Com base nos aspectos dos domínios descritos nos PCN´s, Lacerda (2013, p. 12) relaciona os principais objetivos que são necessários os alunos alcançarem: Evidenciar aplicações dos conceitos matemáticos apreendidos, apresentando de formas diversas: oral, gráfica, escrita, pictórica, etc:

> Explorar computadores, calculadoras simples e/ou científicas levantando conjunturas e validando os resultados obtidos;
> Desenvolver a capacidade de investigar, entender novas situações matemáticas e construir significados a partir delas;
> Desenvolver a capacidade de estimar, de prever resultados, de realizar aproximações e de apreciar a plausibilidade dos resultados em contexto e de resolução de problemas;
> Observar, identificar, representar e utilizar conhecimentos geométricos, algébricos e aritméticos, estruturando e apresentando relações com o uso de modelos matemáticos para compreender a realidade e agir sobre ela;
> Compreender a matemática como um processo e um corpo de conhecimentos resultantes da criação humana, estabelecendo relação entre a história da matemática e a evolução da humanidade.

Feitas essas considerações, entende-se que a finalidade é desenvolver esses conteúdos da disciplina trabalhando de forma a permitir ao aluno, que posteriormente, use esta aprendizagem para entender a matemática que o circula, compreendendo a utilização de gráficos, dados estatísticos, probabilidade, etc.

2.5 O currículo da matemática no atual contexto escolar

Segundo os PCN's do Ensino Médio, a matemática permite o desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico e probabilístico, o que é claramente expresso nos objetivos educacionais da Resolução do CNE/98 (BRASIL,1998a).

De acordo com Pozo e Gómes (1998), a ideia básica do enfoque construtivista de ensino é que aprender e ensinar é mais do que um mero processo de repetição e acumulação de conhecimentos. Tal entendimento implica no transformar e reconstruir a mente de quem aprende em nível pessoal, apresentando processos e produtos culturais a fim de que possam apropriarse deles.

No Brasil, ainda hoje, a escola continua fortalecida com seus pressupostos, transmitindo conhecimentos com aulas teóricas e exercícios repetitivos, entendendo que esse padrão arcaico é a melhor forma de ensinar e aprender. Contudo, tal padronização torna a compreensão do aprendizado medíocre e o desenvolvimento do pensamento abstrato.

É neste contexto que surge a necessidade de um novo currículo, visando alterar a concepção arcaica e dominante de educação, devendo em sua elaboração ser considerado a formação de atitudes, valores e competências, permitindo que o aluno aplique os conhecimentos aprendidos em novas situações. É um currículo de interação que pode privilegiar a atitude do aluno, sendo o professor o mediador do processo de ensino e aprendizagem (MIGUEL, 2002).

Enfatizando sobre a importância de uma renovação no ensino da matemática, Miguel argumenta:

> Por certo, pensar a renovação da metodologia e dos programas de ensino de Matemática é uma tarefa complexa, condicionada por diversos invariantes, dentre os quais cumpre destacar o papel do professor, as condições de viabilização do trabalho pedagógico, a maneira de pensar, de sentir e de agir em Educação, o momento histórico e as características e o interesse da clientela. É pela reflexão sistemática sobre o fazer pedagógico que aspectos técnicos da reforma fluirão sobre a égide do debate e do confronto de ideias. Implementar a proposta de reorganização curricular em Matemática importa em reeducar o docente, tornando-o corresponsável pela elaboração dos programas e pela renovação da metodologia de ensino de Matemática (MIGUEL, 2012, p. 240).

Somente na medida em que é produzido esse processo de construção de significados e de atribuição de sentido que será possível atingir a aprendizagem de conteúdo específicos, pelo qual justifica sua importância. "[...] contribuir para o crescimento pessoal dos alunos, favorecendo e promovendo o seu desenvolvimento e socialização" (COLL et al.,1998, p.14).

É importante desenvolver na escola todos os tipos de conteúdos, ou seja, fatos e conceitos, procedimentos e atitudes. Esses aspectos devem ser oferecidos aos alunos com atividades inseridas no planejamento, possibilitando o professor trabalhar de forma inter-relacionada com os três tipos de conteúdo (COLL et al.,1998).

Ao compreender que a educação para todos ou educação de massa, é uma maneira de desenvolver uma nação, será estabelecido um currículo dinâmico, que de forma progressiva estará mais presente na sociedade.

Atualmente, a educação brasileira tem como principal objetivo estabelecer uma maior permanência de alunos na escola, bem como que eles possam aplicar os conhecimentos adquiridos em situações da sua vida futura.

Neste sentido, é que não se pode limitar o ensino da matemática apenas em conceitos pré-programados para a disciplina, mas entender que se trata de uma aprendizagem que deve impulsionar o desenvolvimento dos pensamentos, fazendo que o indivíduo reflita de forma abstrata e pela demonstração, que leve a raciocinar através de hipóteses, resolução e elaboração de problemas (CANTORAL et al., 2000).

Além da construção de conceitos a aprendizagem matemática envolve três tipologias de aprendizagens distintas, que em algum aspecto se encontra, a saber: aprendizagem conceitual, aprendizagem de estratégias, aprendizagem algorítmica. Para o autor, a operacionalização, ou seja, o saber fazer, envolve tanto o uso dos conceitos quanto das estratégias efetivando assim o saber demonstrar e saber resolver, bem como as atividades algorítmicas que diz respeito ao saber calcular e saber operar (D'AMORE, 2005).

Segundo os PCN’s do Ensino Médio, a matemática permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações:

> A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos (BRASIL, 2002, p. 9).

Entretanto, por outra vertente, o pensamento matemático inclui uma análise dos tópicos matemáticos, como também uma reflexão dos processos avançados do pensamento, como “abstração, justificação, visualização, estimação e raciocínios”. Todos esses fatores devem ser aplicados sobre uma “rede complexa de conceitos, uns avançados e outros mais elementares” (CANTORAL et al., 2000).

Portanto, com essa breve análise do currículo de matemática que a maioria das escolas ministram, nota-se que há uma necessidade latente de modificá-lo, desenvolvendo conteúdos adequados de modo a proporcionar aos alunos sua própria construção de conhecimentos.

3. MATEMÁTICA E SUAS DIFICULDADES: OS FATORES QUE FAVORECEM SUA SUPERAÇÃO

Os problemas que são apontados no processo de ensino da matemática vêm de longa data. Também não é recente o mal-estar que as dificuldades de ensinar e aprender a matemática provoca em alguns professores e alunos. Como são muitos, variados e difíceis, seria até pretensioso relacionar e abordá-los na sua totalidade.

Portanto, o presente capítulo irá sucintamente analisar a aprendizagem da matemática, bem como suas dificuldades, refletindo os aspectos que favorecem sua superação.

3.1 Alfabetização da matemática

Muitas pessoas consideram a matemática uma ciência para poucos ou para gênios, e pior, muitas vezes a disciplina "está fora do cotidiano escolar, pois por não serem alfabetizados matematicamente, os educandos não percebem a matemática por isso não gostam, e ignoram esta disciplina". Afirmando que a alfabetização é uma ação de alfabetizar, de difundir o ensino da leitura, ou seja, "ensinar a ler, é dar instrução primária". Portanto, entende que uma pessoa que sabe ler é alfabetizada. Explica que a leitura ou o ato de ler é: "[...] percorrer com a vista aquilo que está escrito; interpretar o sentido de, reconhecer, perceber, decifrar, explicar, ver as letras do alfabeto e juntá-las em palavras" (CARVALHO, 2010, p.14).

O desenvolvimento linguístico do indivíduo contribui consideravelmente para a sua aprendizagem, desenvolvendo o uso oral já adquirido, promovendo amadurecimento linguístico, e garantindo a aprendizagem de ler e escrever (DANYLUK, 1991).

Na matemática, a linguagem corresponde aos símbolos dispostos convencionalmente que transmitem ideias e possuem significados. Considerando esses símbolos como o alfabeto matemático, é possível afirmar que sua leitura e escrita fazem parte do contexto geral de alfabetização.

Dispondo uma definição de alfabetização matemática, Danyluk (1991, p.12) entende que trata de um fenômeno “da compreensão, da interpretação e da comunicação dos conteúdos matemáticos ensinados na escola, tidos como iniciais para a construção do conhecimento matemático”.

Portanto, o indivíduo compreendendo o que se lê e escreve a respeito das noções de lógica, aritmética e geometria, adquire as primeiras ideias matemáticas que fazem parte do contexto de alfabetização.

Asseverando, Carvalho enfatiza que um indivíduo alfabetizado em matemática é capaz de “ler e compreender os números, relacionar as unidades de medida, comunicar-se usando os conceitos aprendidos, compreender as operações fundamentais”. Ademais, a matemática pode e deve ser considerada uma ciência de investigação, sendo assim, “estar alfabetizado matematicamente refere-se ao domínio de conceitos elementares da matemática, ou seja, dominar os conteúdos mais simples dessa ciência” (CARVALHO, 2010, p.14).

A alfabetização matemática é um corpo conceitual que se expressa em forma de linguagem, manifestada em um sistema de representações, com seus signos.

> A forma com que estes se articulam na fala, na escrita, nos gráficos, desenhos, em diferentes formatos, buscam comunicar o movimento e as transformações das quantidades e qualidades, das formas e suas relações e aplicações na solução de problemas práticos ou teóricos no desenvolvimento da humanidade. Assim quando trazemos a matemática para dentro da escola, compreendemos como um sistema de representações e a partir desta compreensão organizou o seu ensino, podemos considerar os processos iniciais da apropriação do que chamamos de matemática, tal como entendemos ser a língua materna. À semelhança desta, trata-se de uma Alfabetização Matemática (MOURA, 1996 apud CARVALHO, 2010, p.14).

A matemática pode ser considerada uma atividade humana, que presume a razão e onde são construídos ou desfeitos conceitos. Essas ações visam buscar solução para os diversos problemas que são apresentados pelo “mundo perceptível aos sentidos ou de reflexões teóricas relativas a modelos matemáticos obtidos por meio de generalizações das observações e hipóteses” (VAILATI; PACHECO, [20__] p.3).

A principal característica da matemática é a abstração e a formação de conceitos que são originados pelas representações simbólicas que compõem uma linguagem específica, constituem um dos principais objetivos do seu ensino.

Entretanto, para alguns alunos assimilar essa linguagem se torna um grande obstáculo que por sua vez dão ênfase a diversas questões, como também alimenta a aversão por esta ciência tão fascinante (VAILATI; PACHECO, [20__]).

A matemática se concretiza como um fundamental elemento da sociedade. Isto porque, possui "componente da cultura geral do cidadão que pode ser observada na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeiras e em muitas outras situações do cotidiano" (MIGUEL, 2011, p. 378).

Complementando sua linha de raciocínio, o mesmo afirma que existem perspectivas da ação na situação de ensino e de aprendizagem, apontando para a contextualização, a historicização e o enredamento.

> a) Contextualização: consideração no trabalho pedagógico com Matemática dos aportes socioculturais do alunado para criar condições de se considerar na matemática escolar situações vivenciadas pelos alunos fora da escola, o que se poderia denominar de matemática cultural, isto é, as diversas formas de matematização desenvolvidas pelos diversos grupos sociais, de modo a permitir a interação entre essas duas formas de pensamento matemático.
> b) Historicização: mostrar aos alunos a forma como as ideias matemáticas evoluem e se complementam formando um todo orgânico e flexível, mas rigorosamente articulado, é pressuposto básico para se compreender a Matemática como um processo de construção. Não é possível construir aquilo que está pronto.
> c) Enredamento: organização das ideias matemáticas em articulação com as diversas áreas do conhecimento posto que elas não surgem do nada; pelo contrário, muitas ideias matemáticas nem surgiram em contextos exclusivamente matemáticos como, por exemplo, a bela teoria dos exponenciais (MIGUEL, 2011, p. 378-379).

A compreensão do educador como intercessor talvez seja a mais importante implicação teórico-metodológica de uma proposta de formação de conceitos em matemática para o processo de construção do conhecimento, criando situações pedagógicas para que a criança exercite a capacidade de pensar e buscar soluções para os problemas apresentados.

A respeito, algumas ações que podem contribuir e auxiliar o processo de conhecimento:

> (...) ações sobre os objetos, inventando e descobrindo relações, estruturando o seu pensamento lógico - matemático, especialmente no que respeita às noções de quantidade e medida e exploração sensorial do mundo físico, é que a criança logrará condições para evolução da representação simbólica da Matemática. Número, operações, resolução de problemas, espaço, forma, tempo, etc. não são noções que se desenvolvem nas crianças apenas mediante repetição, por simplesmente ouvir falar (MIGUEL, 2011, p. 379).

Ao buscar analisar as diretrizes gerais do processo de ensino de matemática, não basta apenas se preocupar com a formação de conceitos. É preciso pautar o envolvimento do professor e do aluno para conseguir elaborar uma dinâmica de trabalho pedagógico, considerando também que a base no planejamento deve descansar nos princípios e encaminhamentos metodológicos norteadores dessa ação (MIGUEL, 2011).

3.2 Dificuldades de aprendizagem

Com resultados de várias pesquisas, Smith et al (1997) afirmam que as consequências para os indivíduos com dificuldades na aprendizagem afetam todas as áreas e perduram por toda sua vida. Os problemas detectados por esta deficiência são complexos e seu aparecimento pode ser indício de uma infinidade de fatores.

A dificuldade de aprendizagem é um termo genérico, que se refere a “um grupo heterogêneo de desordens manifestadas por problemas significativos na aquisição e uso das capacidades de escuta, fala, leitura, escrita, raciocínio ou matemáticas” (NATIONAL JOINT COMMITTEE FOR LEARNING DISABILITIES, 1994, p. 65-66)

Não há uma causa única para justificar as dificuldades de aprendizagem. Supõe-se que exista uma base biológica, ou seja, alguma alteração no desenvolvimento cerebral, ou lesão cerebral, e ainda desequilíbrios químicos e hereditariedade. Contudo, os ambientes que detectam com precisão a gravidade do impacto desta dificuldade, é o ambiente-família, a escola e a comunidade.

O indivíduo com dificuldade no aprendizado apresenta um desempenho incoerente com a sua capacidade cognitiva. Comparando esse aluno com as dificuldades também enfrentadas por outros da mesma turma, esse bloqueio se tornará maior e resiste ao seu esforço pessoal.

Várias pesquisas demonstram que as dificuldades de aprendizagem do ensino, podem levar o aluno ao fracasso escolar. Weiss e Cruz (1999), destacando os estudos realizados por Sara Pain, Alicia Fernández, Maria Lucia, ressalta o alto índice de crianças e adolescentes com fracasso na produção escolar, sendo que o ponto central do problema no aprendizado situa-se no próprio ambiente escolar.

Na área da psicologia, os profissionais vêm demonstrando grande preocupação neste sentido. Isto porque, as consequências pelas dificuldades no aprendizado, muitas vezes acompanham o indivíduo pela vida toda.

Á respeito, quando se entende que o aluno recebe um bom ensino, porém, não aprende, a responsabilidade pelo fracasso na aprendizagem recai sobre o próprio aluno.

> Ao pensarmos ser possível ensinar bem sem que haja aprendizagem, a responsabilidade do fracasso escolar recai sobre o próprio aluno. Se ele não entendeu algo, pensamos que ele é lento, burro, desmotivado ou, simplesmente, “sem condições” de aprender (CARRAHER, 1990. p. 17).

O fracasso do aluno não pode jamais ser ignorado pelos educadores. Deve ser compreendido que pode estar relacionado com a forma em que é posicionado frente a diversidade dos alunos.

É necessário que o professor use uma didática atrativa para ensinar, e seja consciente da importância de criar vínculos com os seus alunos através de atividades diárias, formando e recuperando novos vínculos, mais fortes e positivos.

Dentre as dificuldades de aprendizagem, destacam-se os problemas na aprendizagem de Matemática, indicado em todos os níveis de ensino, de geração a geração, como sendo uma disciplina complicada e consequentemente odiada, o que torna difícil ser absorvida pelos alunos.

Neste contexto, é necessário, antes de falar em dificuldades na aprendizagem da matemática, analisar se o problema não está no currículo ou na metodologia utilizada.

3.3 Algumas causas das dificuldades de aprendizagem em matemática

Ao buscar respostas as dificuldades de aprendizagem da matemática, vários profissionais da área de educação, observaram algumas dessas causas. Dentre eles, destaca-se Ivonete Sacramento, pedagoga, psicopedagoga e especialista do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional (PROEJA), que apontou 7 (sete) fatores e seus principais motivos para a dificuldades de aprendizagem da matemática (Tabela 1).

Tabela 1: Fatores e motivos de dificuldades de aprendizagem na matemática.

Fatores	Motivos
Ansiedade e medo de fracasso	Consequência de atitudes transmitidas por pais e professores e da metodologia e dos conteúdos muitas vezes inadequados.
A falta de motivação	Pode ter sido originada na relação da própria família com os estudos. Muitas vezes a falta de conhecimento dos pais faz com que os mesmo não se importem e em relação à ligação da escola com castigos ou a algum tipo de pressão. Questões emocionais.

Ansiedade e agitação	Ocasionados por acontecimentos novos. Ansiedade exagerada causada pelos efeitos de medicamentos que interferem no ânimo ou causam problemas de memória ou concentração. Problemas de maturação do Sistema Nervoso Central. Transtorno de déficit de atenção/hiperatividade – TDAH.
Distúrbios de memória auditiva	Ocorrem por dois motivos: a) A criança não consegue ouvir os enunciados que lhes são passados oralmente, sendo assim, não conseguem guardar os fatos, isto lhe incapacitaria para resolver os problemas matemáticos. b) Problemas de reorganização auditiva: a criança reconhece o número quando ouve, mas tem dificuldade de lembrar se do número com rapidez.
Distúrbios de percepção visual	A criança troca 6 por 9, ou 3 por 8 ou 2 por 5 por exemplo, em razão de não conseguirem se lembrarem da aparência, e consequentemente têm dificuldade em realizar cálculos.
Distúrbios de escrita	Crianças com disgrafia têm dificuldade de escrever letras e números.
Distúrbios de leitura	Os disléxicos e outras crianças com distúrbios de leitura apresentam dificuldade em ler o enunciado do problema, mas podem fazer cálculos quando o problema é lido em voz alta. É bom lembrar que os disléxicos podem ser excelentes matemáticos, tendo habilidade de visualização em três dimensões, que os ajudam a assimilar conceitos, podendo resolver cálculos mentalmente mesmo sem decompor o cálculo. Podem apresentar dificuldade na leitura do problema, mas não na interpretação.

Fonte: SACRAMENTO, 2008.

3.4 A ideia de que a “Matemática é difícil”

É comum ouvir de alunos, principalmente daqueles que são reprovados na disciplina, que “matemática é difícil”. De certa forma, essa justificativa, mesmo sendo insatisfatória, acaba aceita pelo meio social que o aluno vive.

Neste sentido, é importante refletir sobre alguns aspectos que levam o aluno ao fracasso na disciplina de matemática.

Primeiramente, existe um conceito pré-concebido da disciplina, que induz os alunos a interpretar que a matemática é difícil. Silveira (2002) realizou um estudo com alguns professores de matemática, onde constatou dos educadores que para a disciplina ser melhor aceita, ela precisa se tornar fácil, ou seja, os próprios docentes pressupõem que ela seja difícil para os alunos.

É neste contexto, que surgem as justificativas pelo fracasso no ensino da matemática. Os professores, infelizmente, a maioria deles, apontam a culpa pelo fracasso dos alunos nos professores de séries iniciais, afirmando que são despreparados ou ainda por ter escolhido a pedagogia, por não gostar da matemática e assim evitar a disciplina. (SILVEIRA, 2002)

Quanto aos alunos, o estudo revelou que a matemática é assustadora e provoca sentimentos ruins, levando o aluno a ter ódio pela disciplina.

> Ela (a Matemática) é considerada chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la. Como resultado de tantos sentimentos ruins que esta disciplina proporciona ao aluno, somado ao bloqueio em não dominar sua linguagem e não ter acesso ao seu conhecimento vem o sentimento de ódio pela matemática. Ódio, porque ela é difícil (SILVEIRA, 2002, p. 2).

Os alunos também relataram que ao tentarem entender a matemática, “escutam outras vozes, como ecos de ressonância de dizeres que já foram ditos e analisados nas vozes: do professor, das sociedades a que estes professores se filiam e da mídia” (SILVEIRA, 2002, p. 2).

Ao fazer a leitura da matemática, o aluno demonstra possuir outra ideia que já está inserida em sua memória, contudo, ao dizer acaba revelando alterações de sentidos, que são produzidas na medida em que ele interpreta como sujeito aprendiz (SILVEIRA, 2002, p. 2).

O repúdio à matéria, pode ser observado nas frases que são proferidas pelos alunos, que traduz a insatisfação pela matemática, como pelos próprios professores que ao buscar descomplicar a disciplina, demonstram que para eles, a matemática também é complicada:

> (...) “Matemática é chata”, o mesmo que “não gosto de matemática”, tem um sentido do pré-construído “matemática é difícil”. “Matemática é difícil”, o mesmo que dizer “complicado”, foi reconhecido não apenas pelos alunos, como também no contexto histórico da disciplina, bem como, identificado nas atitudes de profissionais de educação que “Para despertar o prazer de aprender Matemática” propõem “a Matemática des-com-pli-ca-da”. Assim, através de seus programas querem despertar um prazer que reconhecem como inexistente com a finalidade de descomplicar o que é complicado (SILVEIRA, 2002, p. 3).

Portanto, a fama de que matemática é difícil não é restrita apenas na ideia dos alunos, ela também ecoa entre os próprios docentes, e acaba confirmando, como essa disciplina e seu discurso pré-construído está de modo natural e inquestionável constituída no ambiente escolar.

3.5 Professores sem capacitação

É certo que professores sem uma capacitação adequada ofereceram mais dificuldades de aprendizagem da matemática para os alunos.

Ao analisar os resultados obtidos no provão aplicado aos licenciados em matemática, no ano de 2003, DRUCK (2004) concluiu que a maioria dos professores de matemática sae da faculdade sem conhecer os conteúdos do que irá lecionar.

Outro aspecto, que deve ser ressaltado, diz respeito a questão salarial e a desvalorização da profissão de professor, desmotivando a procura dos alunos pela graduação.

A consequência da má formação de professores pode ser observada no decorrer das aulas de matemática, que, por desconhecerem certos tópicos, acabam optando em não os ensinar, como é o caso da Geometria e a Trigonometria no ensino médio.

Colaborando com a abordagem, Camargo (2004) enfatiza que:

> A falta de visão sólida da matemática e de suas aplicações conduz à estranhas tentativas de contextualização de situações que para tanto não se prestam. Por outro lado, tópicos que não admitem contextualização, como alguns algebrismos, fundamentais na resolução de problemas, por exemplo, fatoração de polinômios, estão sendo omitidos do ensino. O desconhecimento, por parte do professor, de métodos e processos para acelerar a aprendizagem e eliminar bloqueios, acaba gerando medo, pânico e frustração nos alunos.

Complementando, afirma que toda essa carência de preparo dos docentes também está é impulsionada pela falta de tempo para “dedicar-se aos seus alunos e aos cursos de aprimoramento, uma vez que trabalham, em média, de 8 a 10 horas por dia” (CAMARGO, 2004).

3.6 Fatores que favorecem a superação da dificuldade na matemática

Infelizmente, ainda não existe uma fórmula ou um método certeiro para que a matemática seja explicada e conseguir enfrentar os desafios de ensinar essa disciplina.

Muitos professores, na tentativa de buscar soluções para amenizar as dificuldades dos alunos em aprender a matemática, utilizam de alguns recursos, como por exemplo, jogos, computadores e celulares. Entretanto, antes de optar por algum dos recursos que estão disponíveis, é preciso refletir sobre a importância da matemática na vida do aluno, tendo em mente que ele será o adulto do amanhã vivendo em uma sociedade competitiva, em um mundo onde o conhecimento é um dos bens mais valiosos da pessoa humana.

Vale destacar que, qualquer que seja o recurso adotado, por mais moderno e atrativo ao aluno, ele jamais poderá substituir a base conceitual do ensino da matemática, visto que, os recursos por si só, não garantem a aprendizagem efetiva da disciplina.

É essencial que o professor reflita sobre o importante papel que possui no saber do aluno, ciente que será através do trabalho a ser desenvolvido em sala de aula que o aprendiz irá envolver-se no conhecimento da matéria, sendo estimulado a aprender mais e mais.

Sobre o aprender do aluno, Fiorentini e Miorin (1990, p.3) afirmam que deve ser “significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão, fragmentada e parcial da realidade”.

Os PCN’s discorrem que não existe um padrão de ensino que possa ser identificado como ideal para o aprendizado, principalmente para a matemática. O importante é estar sempre em busca de novas possibilidades de desenvolver as matérias, para uma aprendizagem significativa e eficaz para a vida toda do indivíduo.

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular da matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua pratica. Dentre elas, destaca se a história da matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para construção das estratégias de resolução (BRASIL, 1997b, p. 32).

O ensino da matemática é capaz de desenvolver no aluno raciocínio lógico e, consequentemente, provocá-lo a pensar de forma autônoma e com criatividade para poder solucionar os problemas que surgirem.

Neste contexto, torna-se fundamental que os professores de matemática estabeleçam uma constante atualização dos recursos didáticos, buscando sempre alternativas para motivar os alunos e aumentar a aprendizagem da matéria. Ademais, é dever do educador “desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção, a capacidade de elaborar estratégias, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas” (CHAS, 2014, p.97).

No entendimento de Carraher (1990, p.85), o professor deve refletir sobre seu papel como educador e considerar o modelo cognitivo de educação, pois tem como base o "conhecimento humano incluindo, entre outros assuntos, a questão da aprendizagem, da linguagem, o raciocínio, a memória, a percepção e o pensamento”.

Para melhor compreender a aplicação desse modelo cognitivo de educação, o mesmo autor destaca que a concepção piagetiana considera e dá muita importância ao raciocínio e ao pensamento (cognição), afirmando que a criança tem seu próprio modo de pensar, como suas próprias representações mentais, que não necessariamente se assemelham com a visão do professor ou dos conteúdos apresentados em livros, além de oferecer grande potencial para as descobertas. (CARRAHER, 1990).

Portanto, modelo cognitivo apresenta-se como uma pedagogia moderna e criativa e que resume algumas implicações para o ensino de primeiro grau:

> 1) o educador precisa começar onde a criança está, reconhecendo a seu potencial e limites;
> 2) os erros infantis têm a validade de hipóteses e devem ser discutidos, explorados e incorporados ao processo de descoberta, de aprendizagem;
> 3) e o professor deixa de ser o informante repetidor para investir na seleção de problemas que estimulem o pensamento e o raciocínio, ao invés de sobrecarregar a memória do aluno. (CARRAHER, 1990, p.85)

Diante das necessidades do aluno em obter um maior contato com a matemática de forma atrativa, afastando as dificuldades que possam impedir o aprendizado e assim atingir os resultados, entende-se que, quanto mais cedo o aluno desenvolver o interesse pela disciplina, mais cedo também ele poderá reconhecer facilmente um problema e tomar a decisão certa para solucionar a questão.

Desta forma, o aluno terá mais chances em interagir com as tecnologias atuais, e ter confiança para resolver outros problemas, buscando no conhecimento adquirido, as melhores decisões, o que, consequentemente irá proporcionar maiores chances de conquistar uma carreira promissora.

4. POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT

Um poliedro de Kepler-Poinsot é um poliedro regular não convexo, que apresenta polígonos regulares iguais em todas suas faces e o mesmo número de faces em todos seus vértices.

Existem quatro tipos de poliedro de Kepler-Poinsot: o pequeno dodecaedro estrelado; o grande dodecaedro estrelado; o grande dodecaedro; e o icosaedro estrelado.

O presente capítulo, além de discorrer sobre os aspectos que envolvem os poliedros de Kepler-Poinsot, irá também abordar sobre o desenvolvimento de seu estudo, apresentando sua evolução no decorrer da história da humanidade e principalmente na ciência da matemática.

4.1 Breve histórico do desenvolvimento dos poliedros

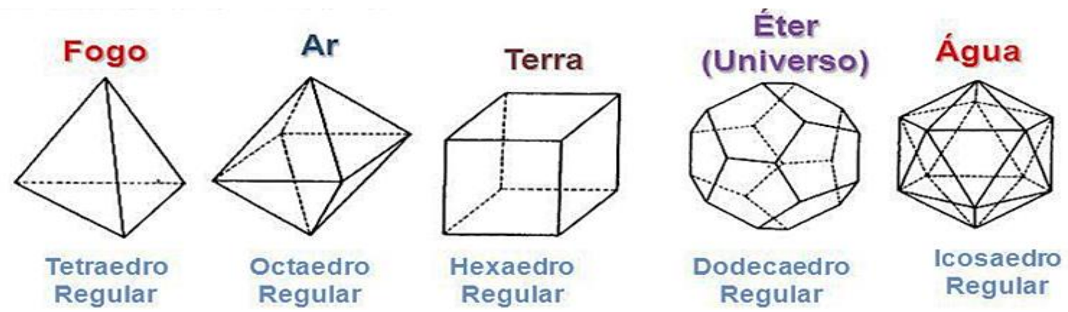
Ao pesquisar sobre a história dos poliedros, observa-se que não há uma data precisa de quando a atenção por eles começou. De acordo com MOREIRA (2017, p.15), o acervo dessa evolução é registrado pela própria “aventura humana do pensamento, da criatividade, da ciência, da filosofia e da arte”.

Neste sentido, alguns pensadores da antiguidade acabaram influenciando o interesse pelos poliedros.

O filosofo Platão (429-347 a.C.) na Grécia Antiga, apresentava relação entre o papel da geometria e a formação do espírito humano, fato que registrou com a frase grega ΑΓΕΩΜΕΤRΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ, ou seja, “Que nenhum ignorante de geometria entre aqui”, estampada no portal de sua academia, fundada em 385 a.C. (KATZ, 2010, p.67).

No entender de Platão, os poliedros regulares, que são aqueles cujas faces e ângulos poliédricos são todos congruentes, relacionam com os elementos da Natureza, de forma que, o tetraedro é relacionado ao fogo, o octaedro ao ar, o cubo a terra, o dodecaedro ao universo e o icosaedro à água (FAUVEL , 2015). (Figura 1).

Figura 1: Elementos da natureza que Platão relacionava com cada poliedro



Fonte: VELA, 2015

Eves (2008) relata que a expressão poliedros de Platão ganhou respeito após o filósofo ter reverenciado os cinco poliedros regulares (convexos) e relaciona-los aos elementos da natureza, em sua obra *“Timeu-Crítias”* escrita por volta de 360 a.C. Há uma corrente doutrinária que defende a ideia que os pitagóricos já conheciam o cubo, o tetraedro e o dodecaedro, como também Teeteto já mencionava o octaedro e o icosaedro em seu diálogo platônico.

Para melhor compreensão da tese formulada por Platão, vale reproduzir a argumentação apresentada pelo filósofo em sua obra, ao relacionar os elementos da natureza com os poliedros:

> Uma vez formados quatro ângulos desse tipo, está composta a primeira figura sólida, que divide um todo esférico em partes iguais e semelhantes. A segunda figura é formada a partir dos mesmos triângulos, combinando-se oito triângulos equiláteros que produzem um só ângulo sólido a partir de quatro ângulos planos; e quando se geram seis ângulos deste tipo, o segundo corpo está deste modo terminado. A terceira figura é constituída pela conjunção de cento e vinte triângulos elementares e de doze ângulos sólidos, cada um dos quais envolvido por cinco triângulos planos equiláteros, e é gerada com vinte bases que são triângulos equiláteros. Engendrados estes sólidos, o outro triângulo elementar foi deixado de parte, e o triângulo isósceles engendrou a natureza do quarto, constituindo quatro triângulos que coincidiram no centro os seus ângulos retos, formando um único quadrilátero equilateral. Quando foram conjugados seis deste tipo, produziu oito ângulos sólidos, sendo cada um deles constituído pela harmonia de três ângulos planos retos; a figura do corpo constituído foi a do cubo, que tem seis faces planas, quadrangulares e equilaterais. Visto que havia ainda uma quinta combinação, o deus utilizou-a para pintar animais no universo. (...) Mas deixemos agora esse assunto e distribuamos os gêneros que foram gerados pelo nosso discurso em fogo, terra, água e ar. Atribuamos à terra a forma cúbica, pois a terra, dos quatro elementos, é o que tem mais dificuldade em mover-se e, dos corpos, o mais adequado para ser moldado – inevitavelmente e com certeza que foi gerado deste modo para que tivesse as bases mais estáveis. (...) Por isso, manteremos a salvo o discurso verossímil se atribuirmos esta forma à terra, e, das que restam, a forma mais difícil de movimentar à água, a que se movimenta melhor ao fogo e a intermédia ao ar; o corpo mais pequeno ao fogo, o maior à água, e o médio ao ar; o que é mais agudo ao fogo, o segundo mais agudo ao ar e o terceiro à água. (...) portanto, de acordo com o raciocínio correto e verossímil, estabeleçamos que a figura sólida da pirâmide é o elemento que gerou o fogo e a sua semente; digamos que, na ordem de geração, o ar é o segundo e a água o terceiro (EVES, 2008, p.143-144).

Na visão de Platão, a matemática representa a verdade e perfeição pois, as formas abstratas e ideias desta são “as únicas coisas que verdadeira e inteiramente existem”, visto que, sendo a matemática a única ciência que as defendia, seria possível “ganhar conhecimento absolutamente certo e objetivo” (LIVIO, 2011, p. 53).

Buscando explicar a linha de raciocínio traçada por Platão ao relacionar os poliedros regulares e os elementos da Natureza, Johann Kepler (1571-1630) embasou seu discurso no volume/superfície dos sólidos e na secura/umidade dos quatro elementos. Para Platão, o dodecaedro está relacionado com o Universo devido a suas doze faces que correspondem às doze seções do zodíaco (EVES, 2008).

Destacando alguma das formas de poliedros que podem ser encontradas na natureza e são base para a relação com os poliedros regulares, conforme a tese de Platão citam-se: os cristais de sulfoantimoneto de sódio com a forma de um tetraedro (Figura 2); os cristais de sal comum que apresentam a forma de um cubo (Figura 3); os cristais de alúmen com o formato de um octaedro (Figura 4); e os radiolários que são esqueletos de animais marinhos que tem formas do dodecaedro e do icosaedro (Figura 5) (EVES, 2008).

Figura 2: Calcopirita

Fonte: BORTOLOSS, 2009

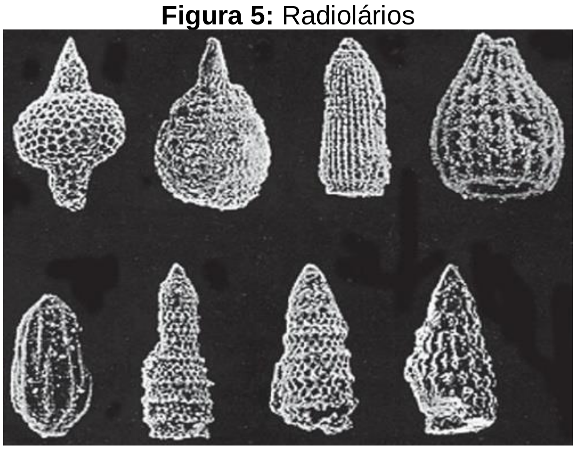
Figura 3: Galena

Fonte: INFOESCOLA,2014

Figura 4: Magnetita

Fonte: MINERALI, [20__]

Figura 5: Radiolários



Fonte: KNOOW.NET, 2015b

Contudo, as formas geométricas dos poliedros regulares não ficaram apenas nos elementos da natureza. Isto porque, ao observar algumas peças encontradas nos achados arqueológicos, datados de 500 a.C., é possível perceber que naquela época essas formas geométricas já eram utilizadas para moldar objetos, como por exemplo, o brinquedo de origem etrusca descoberto em 1887, no monte Loffa, próximo a Pádua, na Itália, que apresentava a forma de um dodecaedro regular (Figura 6).

Figura 6: Brinquedo de pedra com forma de dodecaedro regular em 500 a.C.

Fonte: HEIN, 2011.

Ultrapassando os séculos e reportando para a atualidade, as formas geométricas se tornaram a base para muitas criações, principalmente para a arquitetura e artes que utilizam quase como regra os poliedros regulares.

Como exemplos de obras de arquitetura, citam-se o Obelisco do Parque do Ibirapuera, localizado na cidade de São Paulo, Brasil (Figura 7), e o Conservatório Muttart, em Edmonton no Canadá (Figura 8).

Figura 7: Obelisco do Ibirapuera
São Paulo, Brasil

Fonte: BEMFICA, 2012.

Figura 8: Conservatório Muttart
Edmonton, Canadá

Fonte: WIKIMEDIA COMMONS, 2015.

Nas artes plásticas, dentre as inúmeras peças e obras que apresentam como conceito os poliedros regulares, estão a escultura matemática (Figura 9) e os cinco poliedros em Madri (Figura 10)

Figura 9: Escultura Matemática

Fonte: HISOUR. [20__]

Figura 10: Cinco Poliedros Madri

Fonte: MENDIZÁBAL, 2016

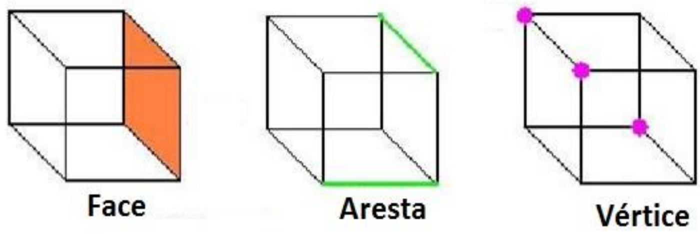
Com esse breve relato sobre a evolução histórica na percepção dos poliedros regulares, nota-se que, a partir do destaque dado por Platão, na Antiga Grécia, essa forma geométrica cada vez mais vem sendo observada e seu conceito aplicado em diversas ciências, principalmente na matemática.

4.2 Definição e nomenclatura dos poliedros

O termo poliedro se origina do grego *polys* (poli) que quer dizer várias e *hédrai* (edro), que significa faces. Este é como um sólido geométrico ou figura geométrica tridimensional no qual é limitada por um número finito de polígonos convexos, com faces formadas por superfícies planas e sem curvas, sendo que a interseção entre duas faces quaisquer, deve ser necessariamente constituída de uma aresta, ou um vértice, ou vazia (LIMA, 2006).

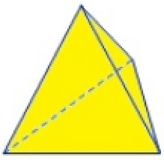
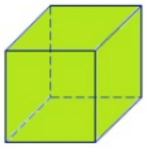
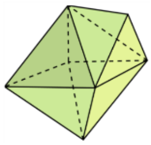
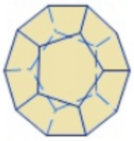
Portanto, considera-se um poliedro, a figura geométrica que apresenta três elementos básicos, face, aresta e vértice. A face é a superfície plana poligonal que limita o poliedro, a aresta é o lado de uma face do poliedro e o vértice é o do polígono da face (Figura 11).

Figura 11: Elementos básicos do poliedro



É com base no número de faces que os poliedros são nomeados. Como exemplo, destacam-se alguns deles (Figura 12):

Figura 12: Nomenclatura de alguns poliedros

	Tetraedro: Poliedro com quatro faces		Hexaedro: Poliedro de seis faces
	Octaedro: Poliedro de oito faces		Decaedro: Poliedro de dez faces
	Dodecaedro Poliedro de doze faces		Icosaedro: Poliedro de vinte faces

Vale ressaltar, que dependendo do número de faces que o poliedro apresentar, eles serão chamados simplesmente pelo número delas, como por exemplo, um poliedro com 28 faces, será chamado de poliedro de 28 faces.

4.3 Quanto à classificação dos poliedros

Os poliedros são classificados em convexos ou não convexos.

De acordo com Moreira, um plano divide o espaço em duas partes, os chamados semiespaços. Caso o plano que preenche cada face coloca todo o poliedro em um mesmo semiespaço, o poliedro será convexo (Figura 13). Quando o plano de pelo menos uma face dividir o poliedro em duas ou mais partes que pertencem a semiespaços diferentes, o poliedro será não convexo (Figura 14) (MOREIRA, 2017).

Figura 13: Poliedro convexo

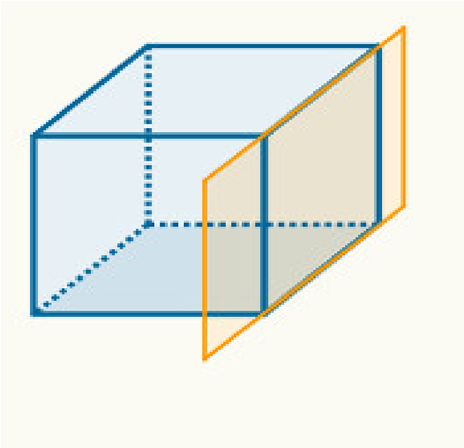
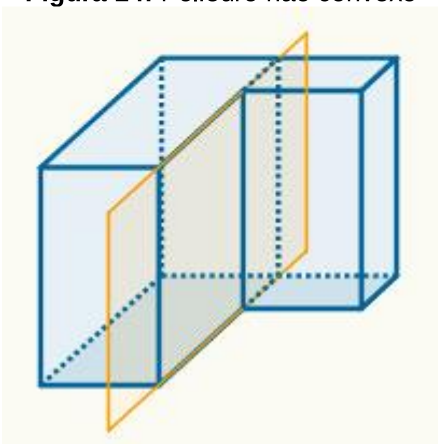


Figura 14: Poliedro não convexo



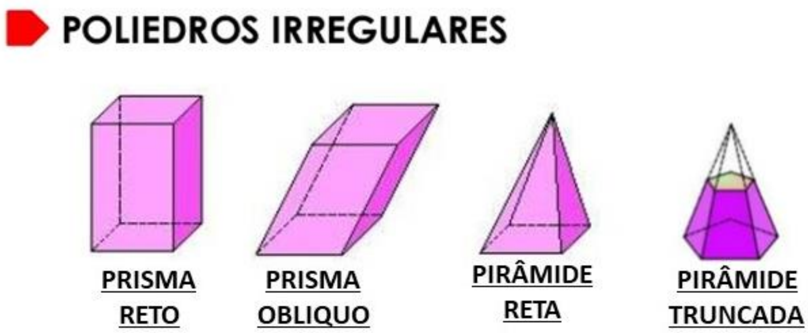
Também são classificados como poliedro regular e poliedro não regular.

O poliedro regular possui como faces polígonos regulares e congruentes e ângulos poliédricos congruentes (Figura 15).

Por sua vez, num poliedro não regular ou irregular, algumas destas duas condições não ocorre podendo ele ter nas faces polígonos regulares e irregulares (Figura 16).

Figura 15: Poliedros regulares

Figura 16: Poliedros irregulares



4.4 Fórmula de Euler

Desenvolvida por Leonhard Euler, em 1758, a fórmula/relação ou teorema de Euler, relaciona o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um poliedro convexo.

Fórmula de Euler: $V - A + F = 2$

Antes de analisar e discutir sobre essa fórmula, e de modo a enriquecer o trabalho, o presente estudo passa a discorrer brevemente sobre a biografia de Leonhard Euler.

4.4.1 Biografia de Leonhard Euler

Considerado um dos maiores matemáticos de sua época, o cientista suíço Leonhard Euler trouxe uma importante colaboração para a maioria dos ramos da matemática, como também para a mecânica, a ótica e astronomia. Dentre suas obras para a ciência da matemática, destacam-se a introdução da função gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas. Euler, foi o primeiro matemático a trabalhar com as funções seno e cosseno e desenvolveu a Geometria Diferencial (EVES, 2008).

Figura 17: Leonhard Euler

Fonte: KNOOW, 2015a.

Nascido na Basileia, Suíça, em 15 de abril de 1707, Leonhard Euler, que era filho de um ministro protestante e de uma dona de casa, com um ano de idade mudou-se com a família para a cidade de Riehen, onde passou grande parte de sua infância. Os primeiros conceitos matemáticos foram ensinados por seu pai e, aos 7 anos de idade, instruído por um professor particular, começou a ler diversos textos (FRAZÃO, 2017b).

Aos 13 anos, em 1720, Euler retorna para sua cidade natal, e matricula-se no curso de Teologia na Universidade da Basileia. Com 16 anos de idade, é graduado Mestre em Artes, sendo aprovado com louvor em 1723, após apresentar uma dissertação, no qual comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes (FRAZÃO, 2017b).

Motivado pelo desejo da família, Euler matricula-se na Faculdade de Teologia, contudo, ainda que muito religioso, não se entusiasmou pelo estudo, dedicando suas horas vagas a matemática. Johan Bernoulli, percebendo o talento para a matemática incentivou Euler a ingressar no curso de matemática e, em 1726, após concluir, recebeu o convite para continuar os estudos na Universidade de São Petersburgo, na Rússia (FRAZÃO, 2017b).

Como não foi chamado para lecionar física na Universidade da Basileia, em 1727, Euler muda-se para a Rússia, filia-se à Academia de Ciências, onde tem a oportunidade de conhecer grandes cientistas, como Jacob Hermann, Daniel Bernoulli, e Christian Goldback (FRAZÃO, 2017b).

Com a suspensão do financiamento para novos cientistas estrangeiros pela Academia de Ciências da Rússia, entre 1727 a 1730, Euler serve a Marinha daquele país, como médico-tenente.

Euler volta a Academia de Ciências da Rússia em 1730, após ser contratado como professor de Física, e em 1732, ocupa a cadeira de professor de matemática no lugar de Daniel Bernoulli. Em 1734, casa-se com a suíça Katharina Gsell, e, embora tenham tido 13 filhos, apenas cinco sobreviveram (FRAZÃO, 2017b).

Durante o período de 1734 a 1737, Euler publica diversos textos, destacando dentre eles, a obra intitulada “Mecânica” (1736-37), onde analisou matematicamente a dinâmica Newtoniana. Reconhecido internacionalmente, Euler recebe a menção honrosa da Academia de Ciências de Paris. A crise econômica na Rússia, fez com que Euler deixasse São Petersburgo em 1741, e seguisse para a Academia de Ciências de Berlim, onde em 1744, foi nomeado diretor da seção de Matemática, permanecendo ali por 25 anos (FRAZÃO, 2017b).

Durante o período que esteve em Berlim, Euler publicou mais de 200 artigos sobre Física, Matemática e Astronomia e 3 livros de Análise Matemática. As mais de 200 cartas que escreveu para a Princesa da Alemanha, e que foram publicadas em 3 volumes, também colaboraram para a compreensão de diversos assuntos, como Filosofia Natural, Religião, Física e Matemática (FRAZÃO, 2017b).

Com uma matemática inovadora, Euler publicou diversos trabalhos, apresentando grandes estudos, como por exemplo, o desenvolvimento do método dos algoritmos, que dentre suas aplicações, cita-se a previsão das fases da lua, com o objetivo de obter informações e elaborar tabelas, facilitando assim, o sistema de navegação. Na matemática moderna, Euler destaca-se por suas contribuições que trouxeram grande avanço nesta ciência.

Em 1766, Euler voltou para a Rússia e faleceu em São Petersburgo, no dia 18 de setembro de 1783. (FRAZÃO, 2017b).

Vale ainda destacar que, mesmo aos 28 anos de idade Leonhard Euler tenha perdido um olho e no final de sua vida estava completamente cego, é impressionante e admirável a produção científica que colecionou. Publicou em vida de 530 trabalhos, e após sua morte, deixou um acervo de manuscritos que foi divulgado pela Academia de São Petersburgo, Rússia, durante 47 anos (EVES, 2008).

4.4.2 Relação de Euler

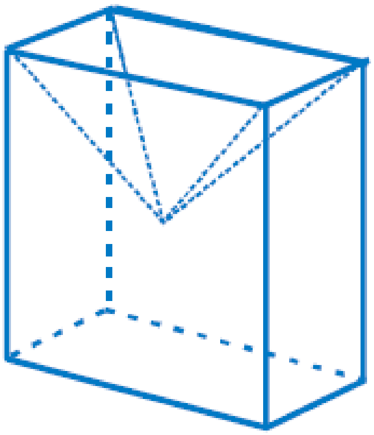
Como já mencionado, a fórmula de Euler relaciona o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um poliedro convexo:

$$V - A + F = 2$$

Antes da fórmula de Euler ser conhecida, Gottfried Wilhelm Leibniz encontrou um estudo datado de 1639, e realizado por Descartes, que apresentava resultados que apontavam a fórmula de Euler, contudo Descartes não percebeu a consequência de seus cálculos (LIMA, 2006).

A figura 18 apresenta um poliedro não convexo que obedece a relação de Euler.

Figura 18: Poliedro não convexo aplicado à relação de Euler



Exemplificando o cálculo, considera para V=9, A=16, F=9 na fórmula de Euler e aplica-se na figura acima (Figura 18). O resultado obtido será: 9 – 16 + 9 = 2.

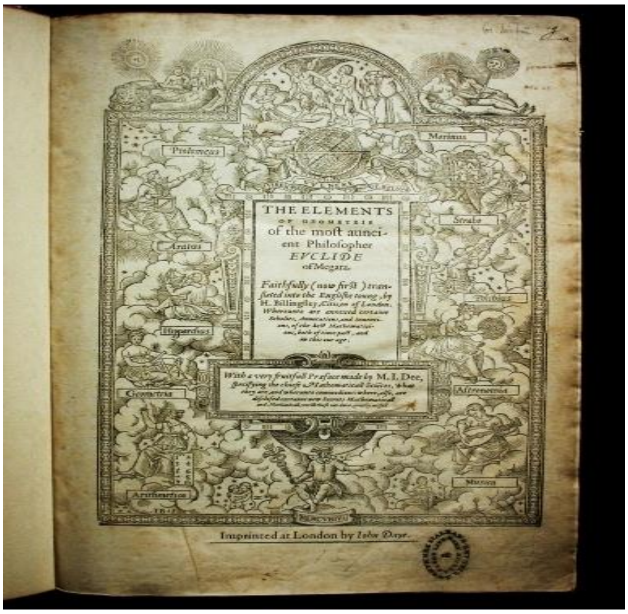
4.5 Poliedros de Platão

Os sólidos platônicos ou poliedros convexos regulares, apresentam em todas suas faces, polígonos regulares congruentes e concorrem em todos seus vértices com o mesmo número de arestas (SÁ, 2012).

Os poliedros de Platão, formado por 5 (cinco) poliedros convexos regulares, são apresentados no Livro XIII, dos Elementos de Euclides.

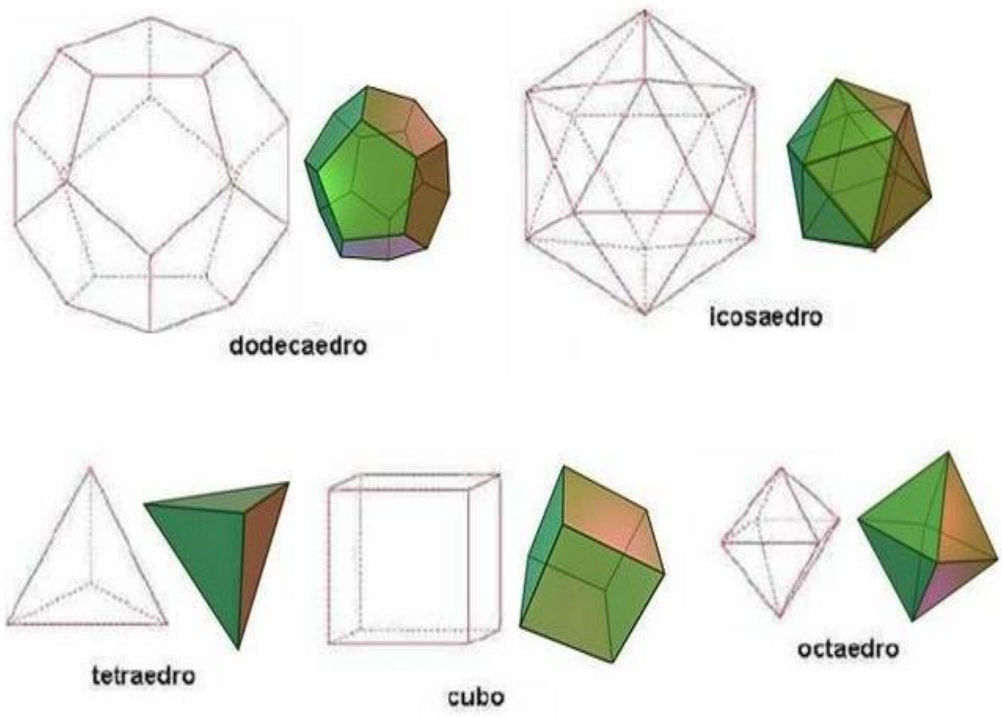
A obra “Os Elementos de Euclides”, escrita pelo grego Euclides, em Alexandria, no século III a.C., é composta de 13 (treze) livros, que apresenta um tratado matemático e geométrico (Figura 19). “Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico” (EVES, 2008, p.167).

Figura 19: Os Elementos de Euclides



Especificamente, o último livro, Livro XIII dos Elementos de Euclides, estabelece de forma metódica a constituição de 5 (cinco) poliedros regulares e rigorosamente nesta ordem, o tetraedro, o octaedro, o cubo (hexaedro), o icosaedro e o dodecaedro, demonstrando como cada uma dessas figuras pode ser inscrita em uma esfera (Figura 20).

Figura 20: Poliedros regulares de Platão



Fonte: FILHO, 2011.

Nas 18 (dezoito) proposições que o último livro apresenta, Euclides trata dos sólidos platônicos, sendo que 6 (seis) delas, determina a razão entre a medida da aresta e o raio da esfera circunscrita de cada um deles.

> Proposição 13: Construir uma pirâmide e contê-la pela esfera dada e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, uma vez e meia o lado da pirâmide.
> Proposição 14: Construir um octaedro e contê-lo por uma esfera, como nas coisas anteriores, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, o dobro do lado do octaedro.
> Proposição 15: Construir um cubo e contê-lo por uma esfera, como a pirâmide, e provar que o diâmetro da esfera é, em potência, o triplo do lado do cubo.
> Proposição 16: Construir um icosaedro e contê-lo por uma esfera, como as figuras anteriormente ditas, e provar que o lado do icosaedro é uma irracional, a chamada menor.
> Proposição 17: Construir um dodecaedro e contê-lo por uma esfera, como as figuras anteriormente ditas, e provar que o lado do dodecaedro é uma irracional, o chamado apótema.
> Proposição 18: Expor os lados das cinco figuras e compará-los entre si (EUCLIDES, 2009, p.577-589).

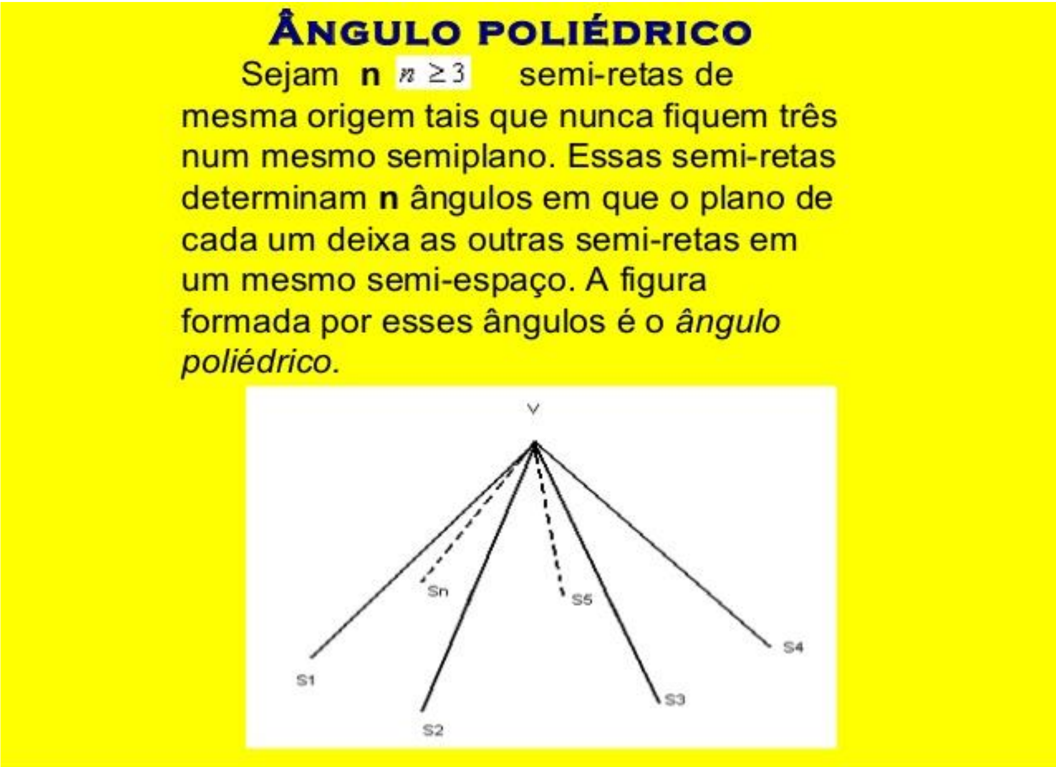
Após defender sua tese nas proposições dos Elementos, Euclides, ao final, destaca que existem apenas 5 (cinco) poliedros regulares, que são inscritíveis em uma esfera, afirmando categoricamente que “exceto as cinco ditas figuras, não será construída outra figura, contida por equiláteras e também equiângulas iguais entre si” (EUCLIDES, 2009, p.592).

Vale ressaltar que, embora Euclides aponte que todos os poliedros regulares convexos sejam inscritíveis em uma esfera, esta característica não pode apenas ser considerada aos cinco Poliedros Regulares de Platão. Isto porque, a linha de raciocínio de Euclides, transcrita na Proposição 21, do Livro XI, dos Elementos, é que um ângulo poliédrico, é formado por 3 (três) ou mais ângulos planos cuja soma deve ser inferior a 4 (quatro) retos, 360º. "Todo ângulo sólido é contido por ângulos planos menores do que quatro retos" (EUCLIDES, 2009, p.499).

Ressalta-se que para Euclides, o ângulo poliédrico é:

> (...) uma figura espacial formada por n semi-retas ($n \geq 3$) de mesma origem não pertencentes ao mesmo semi-plano. As semi-retas determinam n ângulos planos e o plano formado por cada ângulo plano deixa as outras semi-retas em um mesmo semi-espaço (MOREIRA, 2017, p. 15).

Figura 21: Ângulo poliédrico



Fonte: GUIMARÃES, 2010.

Euclides denominou este ângulo poliédrico (Figura 21), de ângulo sólido e explicou que:

> (...) um ângulo sólido não é construído, certamente, por dois triângulos ou, em geral, planos. Mas por três triângulos, o da pirâmide, e por quatro, o do

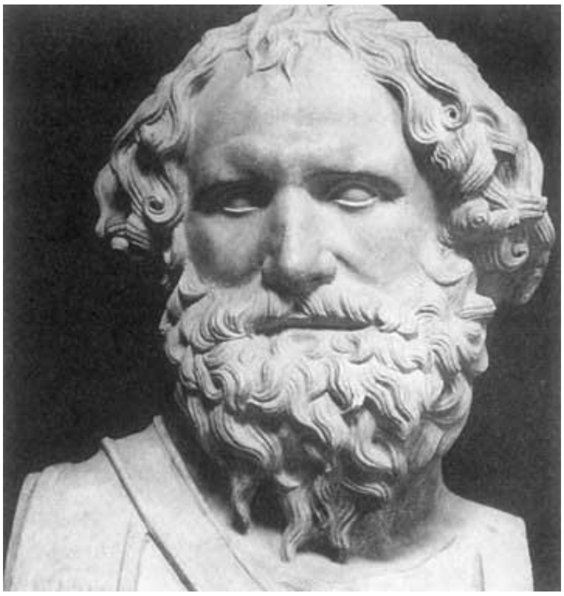
> octaedro, e por cinco, o do icosaedro; mas por seis triângulos tanto equiláteros quanto equiângulos, construídos junto a um ponto, não existirá um ângulo sólido; pois, sendo o ângulo de um triângulo equilátero dois terços de um reto, os seis serão iguais a quatro retos; o que é impossível; pois todo ângulo sólido é contido por um menor do que quatro retos. Pelas mesmas coisas, então, nem um ângulo sólido é construído por mais do que seis ângulos planos. Mas o ângulo do cubo é contido por três quadrados; e por quatro, é impossível; pois, de novo, será quatro retos. Mas por pentágonos equiláteros e equiângulos, certamente por três, o do dodecaedro; e por quatro, é impossível; pois, sendo o ângulo do pentágono equilátero um reto e um quinto, os quatro ângulos serão maiores do que quatro retos; o que é impossível. Nem, por certo, por outras figuras poligonais será contido um ângulo sólido, pelo mesmo absurdo.
> Portanto, exceto as cinco ditas figuras, uma outra figura sólida não será construída, contida por equiláteras e também equiângulas; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p.592).

Neste sentido, é preciso atentar que o ângulo sólido, não é apenas formado por dois triângulos ou planos, mas também por três, quatro e cinco triângulos.

4.6 Poliedros de Arquimedes e seus duais

Nascido por volta de 287 a.C., na Ilha da Sicília, na Grécia, Arquimedes é considerado um dos maiores matemáticos da história (Figura 22).

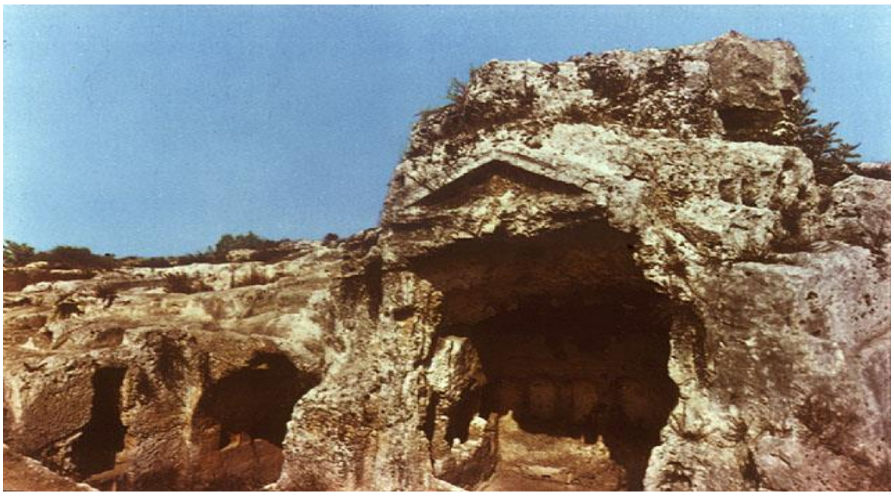
Figura 22: Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.)



Fonte: URPIA, 2011.

Ao morrer, por um golpe de espada de um soldado, em 212 a.C., o General romano Marcelo que comandava a invasão da cidade de Siracusa, por admirar o cientista matemático, atendeu ao desejo de Arquimedes e deu ordens para que em seu túmulo fosse gravado a figura de uma esfera inscrita em um cilindro circular reto (Figura 23) (EVES, 2008)

Figura 23: Túmulo de Arquimedes



Fonte: OLIVEIRA NETO, 2008.

Dentre os relatos da história de Arquimedes, uma em especial é destacada por sua excentricidade. O matemático, ao descobrir a primeira lei da hidrostática, saiu nu pelas ruas de Siracusa gritando “eureca”. À respeito, o termo “eureca” até os dias atuais é muito usado como forma de expressar uma ideia ou descoberta (EVES, 2008).

Os estudos de matemática de Arquimedes demonstram a capacidade do cientista em expor suas descobertas e criações em textos e cálculos que muito se assemelham aos artigos de revistas especializadas modernas. Seus escritos, com linguagem muito objetiva e acabada, apresentam originalidade, habilidade computacional e austeridade em suas demonstrações. Atualmente existem dez trabalhos preservados de Archimedes, porém, há vestígios de outros que ainda estão extraviados. Dentre as contribuições para a matemática, destacam-se os primeiros esboços de alguns dos métodos do cálculo integral (EVES, 2008).

Quanto as contribuições para a geometria, Arquimedes elaborou inúmeros trabalhos, inclusive alguns deles ultrapassaram décadas e até hoje são aplicados no ensino, como por exemplo, na geometria plana e na geometria espacial. Na geometria plana citam-se, a medida de um círculo e a quadratura da parábola e sobre as espirais e na geometria espacial o estudo sobre a Esfera e o Cilindro e sobre os Cones e os Esferóides.

Andre Koch Torres Assis e Ceno Pietro Magnaghi discorrem que em 1906, o filósofo e historiador dinamarquês Johan Ludvig Heiberg, em uma de suas expedições, descobriu uma obra de Archimedes contida em uma carta endereçada a um grande matemático e geógrafo da Grécia Antiga, Eratóstenes (285-194 a. C.), que era o chefe da grande biblioteca de Alexandria e muito respeitado pela tese sobre o raio terrestre, onde relatava sobre o método heurístico que havia elaborado usando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade de figuras geométricas (ASSIS, 2014).

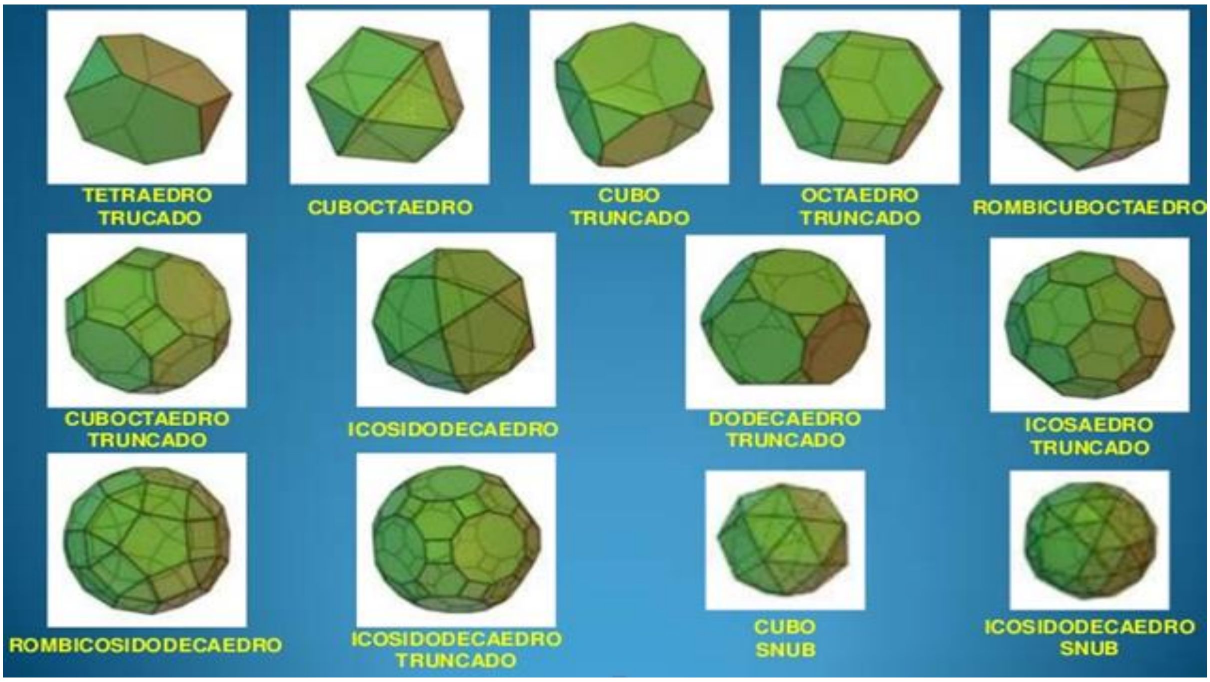
Em um desses estudos, inclusive citado no Livro V, da obra Coleção Matemática de Papus de Alexandria (século III d.C.), Arquimedes trata dos sólidos convexos semirregulares construídos a partir dos sólidos de Platão (EVES, 2008).

Os poliedros apresentados por Arquimedes, no total de 13 (treze), são convexos e semirregulares, possuindo faces regulares e diferentes. Cada vértice apresenta o mesmo número e ordem de polígonos. Por simetria, todo vértice pode ser transformado em outro vértice (CUNDY, 1961).

Originados dos poliedros de Platão, os poliedros de Arquimedes são arranjados por truncamento, ou seja, pelo corte parcial de todos os vértices ou arestas do sólido, formando um outro poliedro (poliedro truncado), ou por snubificação que afasta todas as faces do poliedro, rodando as mesmas de um certo ângulo (normalmente 45º) e preenchendo os espaços vazios resultantes com polígonos (MOREIRA, 2017).

Os poliedros truncados de Arquimedes são 11 (onze), a saber: tetraedro truncado, cuboctaedro, cubo truncado, octaedro truncado, rombicuboctaedro, cuboctaedro truncado, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, rombicosidodecaedro, icosidodecaedro truncado. Já os poliedros obtidos por snubificação são dois: o cubo snub e o icosidodecaedro snub, ambos apresentando sólidos isomórficos, como figuras espelhadas (Figura 24).

Figura 24: Sólidos arquimedianos



Fonte: HENY, 2012.

Em 1619, Johann Kepler apresentou em sua obra *“Harmonices Mundi”*, uma análise detalhada dos sólidos geométricos de Arquimedes, despertando o interesse de vários estudiosos renascentistas, dentre eles, o belga Eugène Charles Catalan, que em 1865 apresentou uma análise dos sólidos geométricos, que ficou conhecido como os sólidos de Catalan.

4.6.1 Os sólidos de Catalan

Eugène Charles Catalan, nascido na cidade de Bruges na Bélgica em 1814 e falecido em 14 de fevereiro de 1894 em Liège, em seu país natal, era um respeitado professor formado pela Universidade de Paris, que se destacou na ciência da matemática, principalmente por suas contribuições na geometria e na elaboração da Teoria dos Números (Figura 25).

Figura 25: Eugène Charles Catalan

Fonte: MATH.INFO, [20__] .

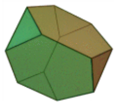
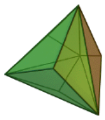
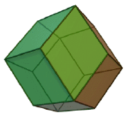
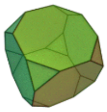
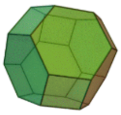
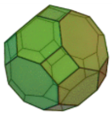
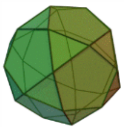
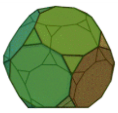
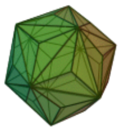
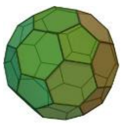
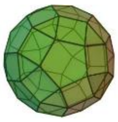
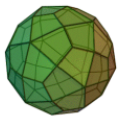
Em 1865, Catalan apresentou um estudo dos sólidos geométricos que ganhou notoriedade no meio acadêmico, ficando conhecido como os sólidos de Catalan.

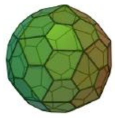
Petter Cromwell explica que os sólidos de Catalan no total de 13 (treze), fazem parte de uma família de poliedros duais dos sólidos de Arquimedes, sendo que cada um dos 13 (trezes) sólidos arquimedianos corresponde a um sólido de Catalan, todos poliedros convexos cujas faces são polígonos não regulares

Os sólidos de Catalan são: Tetraedro Triakis, Dodecaedro Rómbico, Octaedro Triakis, Hexaedro Triakis, Icositetraedro Deltoidal, Dodecaedro Disdiakis, Triacontaedro Róbico, Icosaedro Triakis, Dodecaedro Pentakis, Hexecontaedro Deltoidal, Triacontaedro Disdiakis, Icositetraedro Pentagonal e Hexecontaedro Pentagonal.

Para melhor visualizar esses sólidos, segue tabela comparativa das figuras dos sólidos de Arquimedes e seus duais, os sólidos de Catalan, com o número de faces de cada um (Tabela 2):

Tabela 2: Figuras dos sólidos de Arquimedes e sólidos de Catalan

SOLIDOS DE ARCHIMEDES			SÓLIDOS DE CATALAN		
Sólido	**Faces**	**Figura**	**Sólido**	**Faces**	**Figura**
Tetraedro truncado	8		Tetraedro triakis	12	
Cuboctaedro	14		Dodecaedro rómbico	12	
Cubo truncado	14		Octaedro triakis	24	
Octaedro truncado	14		Hexaedro tetrakis	24	
Rombicuboctaedro	26		Icositetraedro deltoidal	24	
Cuboctaedro truncado	26		Dodecaedro disdiakis	48	
Icosidodecaedro	32		Triacontaedrorómbico	30	
Dodecaedro truncado	32		Icosaedro triakis	60	
Icosaedro truncado	32		Dodecaedro pentakis	60	
Rombicosidodecaedro	62		Hexecontaedro deltoidal	60	
Icosidodecaedro truncado	62		Triacontaedrodisdiakis	120	

Cubo snub	38		Icositetraedro pentagonal	24	
Icosidodecaedrosnub	92		Hexecontaedro pentagonal	60	

Sobre a equação aplicada para obter um sólido dual, é a partir de uma bijeção entre dois sólidos convexos A e B que elas são criadas. Neste sentido, os autores destacam que:

> Dois poliedros convexos A e B são duais um do outro quando há uma bijeção f da família de vértices e faces de A na família de vértices e faces de B, de tal forma que:
> (1) Se V é um vértice de A, então f(V) é uma face de B;
> (2) Se F é uma face de A, então f(F) é um vértice de B;
> (3) V é vértice da face F de A se, e somente se, f(F) é vértice da face f(V) de B (GRÜNBAUM; SHEPHARD, 1988).

4.7 Poliedros de Kepler-Poinsot

Nesta parte do trabalho enfatizaremos a estrelação dos poliedros de Platão e a transformação destes nos poliedros de Kepler-Poinsot.

4.7.1 Biografia e as contribuições de Johannes Kepler

Nascido no dia 27 de dezembro de 1571, na cidade de Weil der Stadt, próximo de Stuttgart, sul da Alemanha e falecido no dia 15 de novembro de 1630, na Baviera, Alemanha, Johannes Kepler foi notório na época, se destacando na Revolução Científica do Século XVII, como um grande matemático e físico, e considerado uma figura fundamental no desenvolvimento da Astronomia e da Filosofia Natural (Figura 26) (LIVIO, 2011).

Seu pai, um soldado mercenário, e sua mãe filha de um dono de hospedaria, aos 4 anos Kepler teve sua infância interrompida pela varíola, doença que predominava como a epidemia do século, que acabou afetando sua visão e os movimentos das mãos (FRAZÃO, 2017a).

Embora com a deficiência visual e as mãos aleijadas, Kepler já despontava como um aluno acima da média. Após concluir a escola primária e os estudos de latim, matriculou-se no seminário de Teologia. Com seu excelente desempenho, em 1589, a Universidade de Tuebingen concede a Kepler uma bolsa de estudos, onde tem o primeiro contato com a tese sobre o movimento do planeta em torno do Sol elaborada por Copérnico (FRAZÃO, 2017a)

Figura 26: Johannes Kepler

Fonte: FRAZÃO, 2017a.

Fascinado pela ciência e matemática, aos 23 anos Kepler desiste de se tornar padre e aceita o convite da Universidade de Graz para ser professor de astronomia. Embora reconhecido como cientista, Kepler continuava atento a astrologia, inclusive registrava diariamente os fatos de vida com as posições das estrelas e dos planetas. Ainda que negasse a aceitar os conceitos que a astrologia era entendida, acreditava que ela influenciava as superstições do passado (FRAZÃO, 2017a).

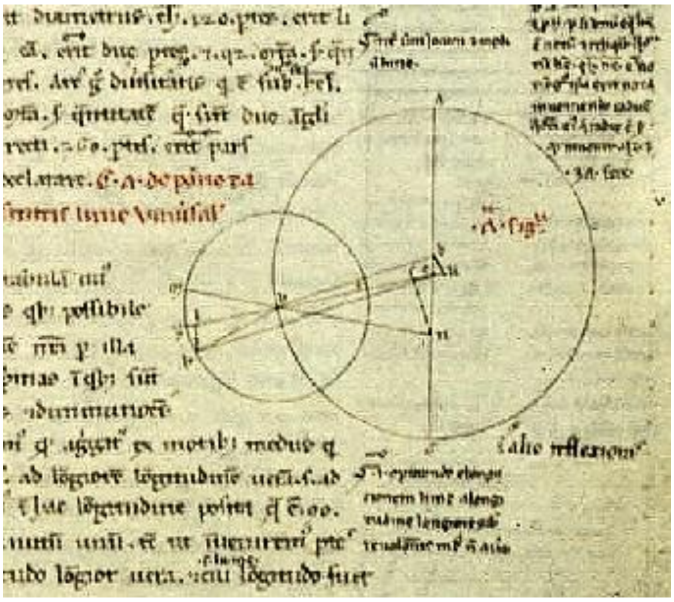
Após algum tempo, Kepler deixa a Universidade de Graz e segue para Praga para unir-se a Tycho Brahe, um astrônomo dinamarquês que se encontrava exilado e era contrário as teses de Copérnico, que defendia a ideia que o Sol sendo o centro do universo violava as leis de Deus e os princípios da Física. Buscando provar que a terra quem era o centro do univ//erso, Brahe fez uma série de observações, principalmente sobre as estrelas, publicando inclusive em 1592, um catálogo de estrelas com apontamentos precisos e detalhados. Contudo, após Kepler expor suas ideias, Brahe reconheceu seu erro e mesmo com a linha de raciocínio diferente, fez de Kepler seu assistente e sucessor (FRAZÃO, 2017a).

Em 1601, Tycho morre e Kepler prossegue com suas observações de astronomia. Com base nas orientações e na análise dos dados de seu precursor, Kepler estuda detalhadamente mais de 228 estrelas e formula as “Leis do Movimento Planetário” que posteriormente foi explicada e apresentada por Isaac Newton pela lei da gravidade.

Os estudos realizados por Kepler foram de grande importância para a humanidade. Kepler descobriu que os planetas se movimentam em torno do Sol em órbitas ovais, bem como constatou que cada planeta ao percorrer pela orbita, muda de velocidade e que a órbita elíptica ganha velocidade conforme aproxima o planeta do Sol. Calculou também o tempo que cada planeta leva para dar a volta ao Sol, sendo que aqueles mais próximos do Sol levam menos tempo do que os mais distantes (FRAZÃO, 2017a).

À respeito, vale destacar que as três Leis que Kepler desenvolveu ao estudar os planetas foram fundamentais para entender a mecânica celeste. A primeira descreve que “Os planetas se movem em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos”. A segunda lei estabeleceu que “O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais”, e a terceira lei determinou que “O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita” (EVES, 2008).

Figura 27: Mecânica celeste desenvolvida por Kepler



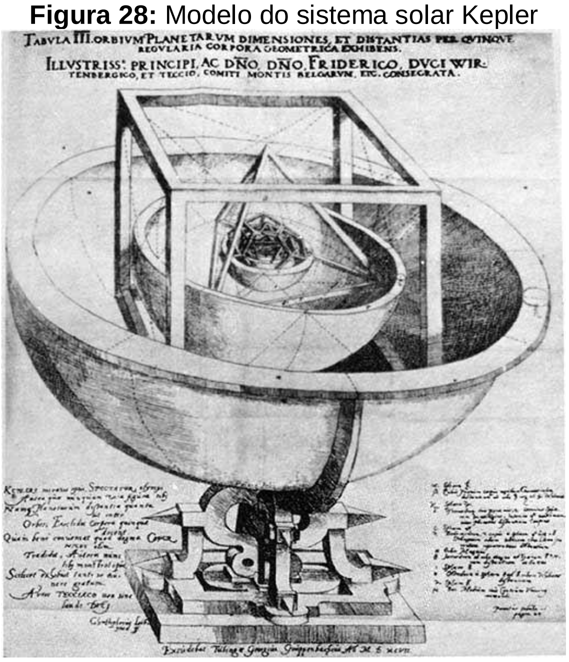
Os estudos de Kepler, também contribuíram para outras áreas correlatas da ciência. Os registros das observações que fez sobre a visão e ótica embasaram teses sobre a refração da luz. Na matemática, sua linha de raciocínio aproximou para a descoberta do cálculo. Apresentou importantes aspectos sobre a gravidade e as marés oceânicas. O princípio do telescópio astronômico foi iniciado por suas considerações.

Kepler trouxe também outras contribuições que vieram a aperfeiçoar os inventos de Galileu Galilei, como o telescópico, e influenciar nas futuras descobertas de Isaac Newton (FRAZÃO, 2017a).

No que tange as contribuições de Kepler para a matemática, essas foram fundamentais para geometria, criando os Poliedros de Kepler-Poinsot.

Ao estudar os movimentos dos 6 (seis) planetas conhecidos na época, ou seja, Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio, Kepler inspirado nos poliedros de Platão, elaborou um modelo do Sistema Solar composto por esferas concêntricas, separadas umas das outras por poliedros regulares (Figura 28) (MOREIRA, 2017)

Figura 28: Modelo do sistema solar Kepler

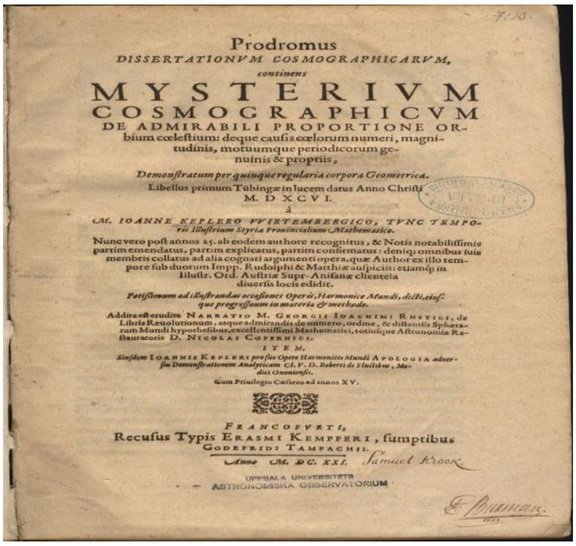


Fonte: PTAK, 2009.

Ao aplicar os poliedros de Platão nos estudos dos planetas, Kepler buscava conhecer “as regras matemáticas que Deus tinha utilizado para criar o universo” (KATZ, 2010)

Após delinear sua linha de raciocínio, Kepler apresentou suas descobertas em seu primeiro livro, publicado em 1596, intitulado “*Mysterium Cosmographicum* (O Segredo do Universo)” (Figura 29).

Figura 29: *Mysterium Cosmographicum* (O Segredo do Universo)

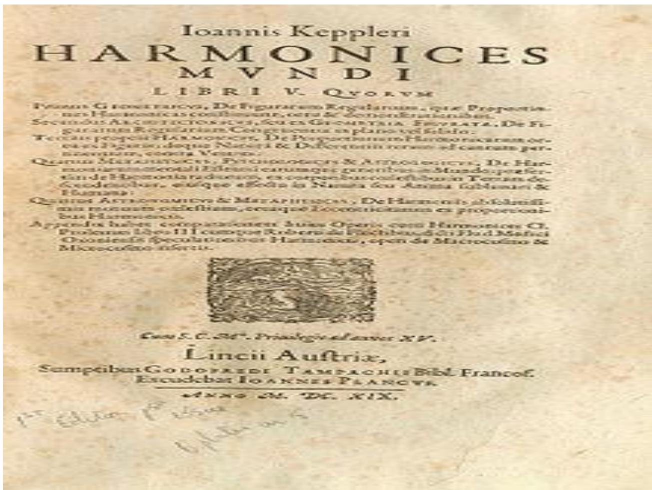

Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM,
continens
MYSTERIVM
COSMOGRAPHICVM
DE ADMIRABILI PROPORTIONE ORbium cœlestium: deque causis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis,
Demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica.
Libellus primum Tübingæ in lucem datus Anno Christi M. D XCVI.
à
M. IOANNE KEPLERO VVIRTEMBERGICO, TVNC TEMPOris Illustrium Styriæ Provincialium Mathematico.
Nunc vero post annos 25. ab eodem authore recognitus, & Notis notabilissimis partim emendatus, partim explicatus, partim confirmatus: deniq; omnibus suis membris collatus ad alia cognati argumenti opera, quæ Author ex illo tempore sub duorum Impp. Rudolphi & Matthiæ auspiciis: etiamq; in Illustr. Ord. Austriæ Supr-Anisanæ clientela diuersis locis edidit.
Potissimum ad illustrandas occasiones Operis, Harmonice Mundi, dicti, eiusque progressuum in materia & methodo.
Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Reuolutionum, atque admirandis de numero, ordine, & distantiis Sphærarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusque Astronomiæ Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.
ITEM.
Eiusdem IOANNIS KEPLERI pro suo Opere Harmonices Mundi APOLOGIA aduersus Demonstrationem Analyticam Cl. V. D. Roberti de Fluctibus, Medici Oxoniensis.
Cum Priuilegio Cæsareo ad annos XV.
FRANCOFVRTI,
Recusus Typis ERASMI KEMPFERI, sumptibus GODEFRIDI TAMPACHII.
Anno M. DC. XXI.
Samuel Krook
UPPSALA UNIVERSITETS
ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

Fonte: GARCIA, 2012.

Neste livro, Kepler traz os seguintes questionamentos e considerações: “Por que é que existem precisamente seis planetas? Porque ‘Deus é sempre um geômetra’, o Supremo Matemático queria separar os planetas com os sólidos regulares” (KATZ, 2012, p.515).

Com objetivo de expor todas suas ideias e descobertas, em 1619, Kepler publica a obra “*Harmonices Mundi*” (Figura 30), e apresenta, dentre outras questões relacionadas a astronomia, música, meteorologia e astrologia, os polígonos regulares e poliedros regulares inclusive, desenhando as figuras que, posteriormente passaram a ser conhecidas como os Sólidos de Kepler.Figura 30:

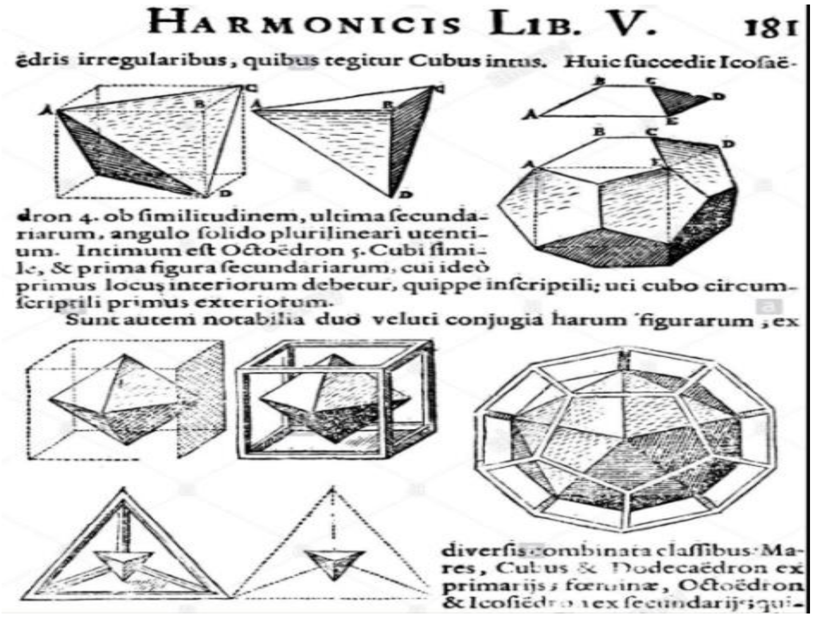
Figura 30 - *Harmonices Mundi*


Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM
Lincii Austriæ,
ANNO M. DC. XIX.

Fonte: WIKIMEDIA COMMONS, 2015

Os traçados dos poliedros regulares, descobertos por Kepler e apresentados no livro *Harmonices Mundi* em 1619, foram 2 (dois) poliedros regulares, não convexos, chamados de pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado (Figura 31).

Figura 31: Poliedros regulares, inseridos no livro *Harmonices Mundi*



Fonte: KUSUKAWA, 1999.

4.7.2 Biografia de Louis Poinsot

Nascido em Paris, França, em 3 de Janeiro de 1777, e falecido nesta mesma cidade em 5 de dezembro de 1859, Louis Poinsot foi um importante matemático, que trouxe contribuições valiosas, principalmente para a geometria (Figura 32).

Figura 32: Louis Poinsot

De 1794 à 1797, Poinsot estudou na escola francesa Ecole Polytechnique e com o objetivo de ser um engenheiro, passou a frequentar a Ecole dês Ponts et Chausée.

Contudo, percebendo que sua vocação era lecionar e não exercer na prática seus conhecimentos investiu na carreira de professor de matemática, onde no período de 1804 a 1809 lecionou no Lycée Boneparte em Paris, passando a partir do dia 1º de novembro de 1809 a ser professor assistente de análise e mecânica na Ecole Polytechnique.

Durante os anos que trabalhou como professor, Poinsot sempre buscou aprofundar seus conhecimentos em geometria, tanto é que reproduziu suas teses em várias publicações como por exemplo, nos artigos apresentados em 1806 que tratou da composição de áreas, em 1809, sobre os polígonos e poliedros, em 1803, sobre a mecânica e estatística, apresentando, inclusive a Teoria do Equilíbrio e Movimento.

Embora dispensado em 1816 pela Ecole Polytechnique foi considerado notório em seus conhecimentos e eleito para a Académie des Science, onde substituiu o matemático italiano Joseph Louis Lagrange.

Até falecer, em 1839, Poinsot trabalhou no Bureau dês Longitudes.

Os estudos que realizou em matemática trouxeram grandes contribuições principalmente para a geometria, estatística e dinâmica.

Ao estudar sobre os sistemas de forças e a atuação em corpos rígidos, Poinsot criou a mecânica geométrica.

Também apresentou muitas investigações no campo da teoria dos números, que influenciaram o desenvolvimento na área das equações diofantinas.

Quanto a sua contribuição para os poliedros, Poinsot apresenta, em seu artigo publicado em 1809, quatro novos poliedros regulares.

Tal o impacto que seu estudo trouxe para a matemática, que em 1846, foi criada na Universidade de Sorbonne, em Paris, a disciplina de geometria avançada.

4.7.3 Os Poliedros de Kepler-Poinsot

Um poliedro é regular não convexo, quando apresenta em todas as suas faces polígonos regulares iguais, e todos seus vértices possuem o mesmo número de faces.

Os quatro poliedros regulares estrelados descobertos por Kepler e Poinsot, passaram a ser conhecidos como Poliedros de Kepler-Poinsot (Tabela 3) (SÁ; ROCHA, 2010).

Tabela 3: Poliedros de Kepler-Poinsot

POLIEDRO	CARACTERÍSTICAS	FIGURA
Pequeno dodecaedro estrelado:	12 faces (pentagramas regulares); 12 vértices e 30 arestas	
Grande dodecaedro estrelado	12 faces (pentagramas regulares); 20 vértices; e 30 arestas	
Grande dodecaedro;	12 faces (pentágonos regulares); 12 vértices; e 30 arestas	
Icosaedro estrelado;	20 faces (triângulos equiláteros); 12 vértices; e 30 arestas.	

5. ATIVIDADES DIDÁTICAS NO ENSINO DA RELAÇÃO DE EULER

Buscando enriquecer os conhecimentos e principalmente contribuir com uma didática de fácil compreensão, esse último capítulo apresenta um estudo de caso, que visa, além do aprendizado do aluno, despertar no professor a criatividade para ensinar. Embora seja um método simples e prático de ensinar, é eficiente para o aluno assimilar e aprender sobre a matéria.

5.1 Procedimentos metodológicos

Buscando alcançar os objetivos, a metodologia refere-se a pesquisa qualitativa aplicada por um estudo de caso.

Minayo (2010) explica que a pesquisa qualitativa apresentada através de um estudo de caso desenvolve-se em três etapas: primeiro a fase exploratória; segundo o trabalho de campo; e terceiro o tratamento do material empírico e documental.

> (...) a fase exploratória, momento em que o pesquisador entra em contato com a situação a ser investigada pra definir o caso, confirmar ou não as questões iniciais, estabelecer os contatos, localizar os sujeitos e definir os procedimentos e instrumentos de coleta de dados; a fase de coleta dos dados ou de delimitação do estudo; e a fase de análise sistemática dos dados, traçadas como linhas gerais para condução desse tipo de pesquisa, podendo ser em algum momento conjugada uma ou mais fase, ou até mesmo sobrepor em outros, variando de acordo com a necessidade e criatividade surgidas no desenrolar da pesquisa. (DEUS; CUNHA; MACIEL 2010, p.6).

Na fase exploratória o estudo buscou aprofundar o conhecimento sobre o tema, desenvolvendo uma revisão bibliográfica sobre os Poliedros e Teorema de Euler. Também nessa etapa foi realizada uma pesquisa em vários livros didáticos, como em artigos, revistas, sites, e outros materiais pertinentes ao assunto, com a finalidade de observar se dispunham de atividades diferenciadas.

Com a matéria investigada, foi possível aplicar a técnica de coleta de dados, com objetivo de observar a postura dos alunos durante a experimentação das atividades. A experimentação incluiu atividades pré-elaboradas com recursos pedagógicos, como por exemplo, o uso de materiais concretos que possibilitou os alunos estudarem os Poliedros e Teorema de Euler.

Por fim, concluídas essas etapas, foi possível analisar e discutir os resultados obtidos com o grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio, da Escola Técnica Estadual Monsenhor Antônio Magliano, da cidade de Garça, estado de São Paulo.

5.2 Dos recursos pedagógicos

Ao observar a literatura, nota-se que há um grande número de estudos que buscam apresentar um processo eficaz para o ensino e aprendizagem da Geometria. Dentre eles, destacam-se os trabalhos realizados por Ana Maria Martensen Roland Kaleff, que buscando auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, principalmente para a Geometria, passou a aplicar novas tecnologias e didáticas. Um dos seus estudos sobre o ensino da Geometria, a Mestre em Matemática constatou que as atividades experimentais concretas, motivam mais os alunos para a matéria. De acordo com Kaleff (2008), atividades com materiais concretos desenvolvem no aluno uma maior habilidade para visualizar o objeto geométrico estudado, estimulando sua criatividade.

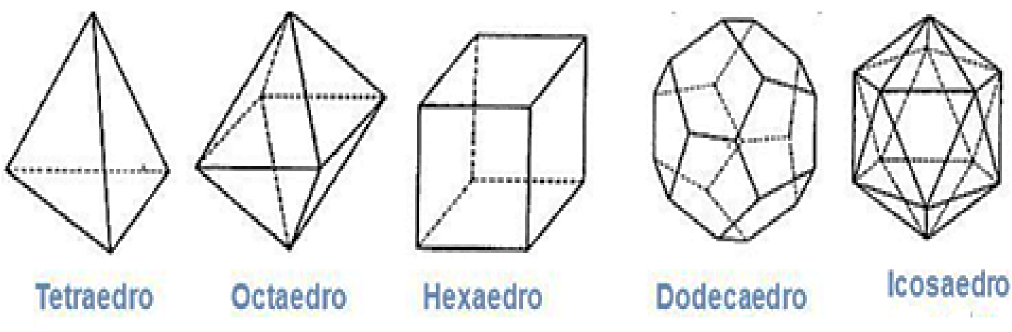
Os materiais concretos devem ser manipuláveis e apresentar as seguintes características:

> • modelar e representar o conceito matemático ou as relações a serem exploradas da forma mais fiel possível;
> • ser atraente e motivador, com vistas a cumprir o seu papel de mediador lúdico no desenvolvimento de habilidades e de conceitos matemáticos;
> • ser apropriado para ser utilizado em diferentes séries ou ciclos de escolaridade e em diferentes níveis cognitivos da formação de um conceito matemático;
> • proporcionar ajuda a fundamentar e a facilitar um caminho para a abstração;
> • proporcionar, na medida do possível, manipulação individual (KALEFF, 2011, p.10).

Acompanhando a mesma linha de raciocínio de Kaleff e considerando as características apresentadas, o estudo de caso optou para sua experimentação oferecer materiais concretos ao grupo de alunos do ensino médio pré-selecionado.

A escolha do material procurou algo comum, simples, barato, divertido e de fácil manuseio. Atendendo essas especificações, optou pela técnica das jujubas ou balas de goma que busca construir esqueletos de poliedros, sendo as jujubas os vértices, e os palitos as arestas. Essa técnica possibilita os alunos construírem algumas das formas dos poliedros como o dodecaedro, o octaedro, icosaedro, o tetraedro e o hexaedro (Figura 33)

Figura 33: Poliedros para as atividades



5.3 Elaboração das atividades

Seguindo as orientações dos PCN´s, foram apresentadas atividades que desenvolvessem nos alunos o raciocínio, a capacidade de resolução de problemas, a comunicação, o senso crítico e a criatividade. Além desses fatores, a didática visou proporcionar um ensino diferente do tradicional para o estudo da Relação de Euler, com utilização de materiais concretos. (BRASIL, 2010)

Mesmo utilizando métodos diferentes e atrativos para o ensino da geometria, cabe ao professor transmitir de uma forma que o aluno não apenas memorize a relação, mas que seja capaz de observar e compreender todo conceito com a prática (SANTOS; NUNES; ROSA, 2000).

Portanto, as atividades elaboradas e desenvolvidas buscaram impulsionar o aluno a analisar o problema, a definir as opções para sua solução, para que trocasse informações com os demais colegas e que houvesse comunicação e socialização dos resultados.

Inicialmente foi pensado em trabalhar com materiais já existentes, como varetas de bambu, mas constatou-se uma grande dificuldade na intersecção de cinco varetas por uma mesma jujuba. Daí, na busca de novos materiais, uma solução possível foi encontrada na construção de pipas dos alunos, varetas de fibra de vidro, bem mais finas, 1,4 mm de espessura.

Com isso, houve uma grande melhora na questão da intersecção. Mas na prática era muito pouco funcional, devido a grande dificuldade dos alunos em acertar a quantidade de graus dos ângulos que deveriam formar entre as varetas, as jujubas não estavam suportando as intersecções e o tempo de construção estava muito demorado, em média duas aulas para um poliedro, nada adequado para o tempo destinado à atividade (Figuras 34 e 35).

Figura 34: Prática 1

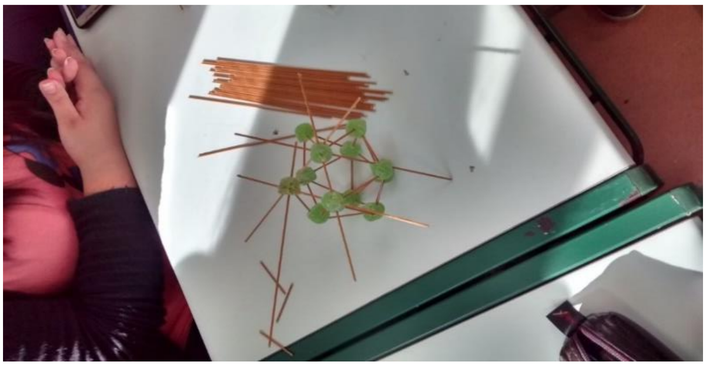
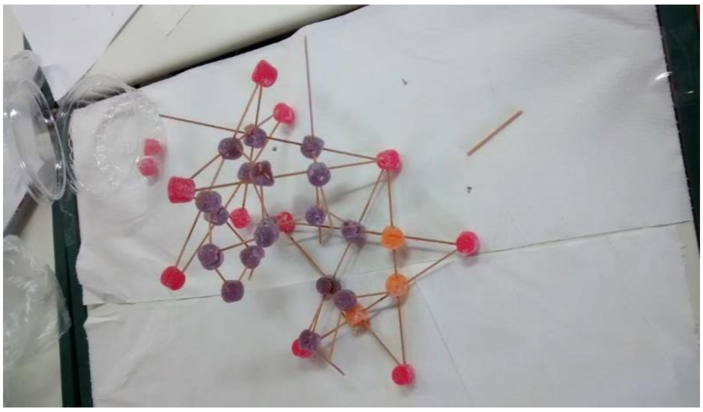


Figura 35: Prática 2



O problema maior nas construções acima estava na localização e marcação do ponto de intersecção das varetas. A solução definitiva foi trocar a jujuba intermediária por uma construção com canudos rígidos dos poliedros, dodecaedro e icosaedro, muito conhecida em diversos trabalhos, atravessados por varetas e unidas nos vértices por jujubas. A experiência de aplicar esta ideia inovadora de usar fibra de vidro mesclada com canudos e jujubas será apresentada na sequência desse trabalho.

5.3.1 Conceitos trabalhados nas atividades

Os conceitos matemáticos trabalhados nas atividades propostas aos alunos incluem o cálculo de áreas de superfície e comprimento das arestas dos poliedros estrelados.

Primeiramente é apresentado o cálculo de áreas de superfície das faces dos poliedros platônicos. Cabe lembrar aqui que esta primeira parte também tem o sentido revisional das fórmulas de cálculo de figuras planas, uma vez que os alunos não veem geometria desde o final do nono ano do ensino fundamental:

Tetraedro é um poliedro de quatro faces triangulares regulares, ou seja, são quatro triângulos equiláteros. Portanto, calculando a área de uma dessas faces, as outras serão congruentes.

Fazendo o uso da fórmula de área do triângulo equilátero de aresta, onde “S_T” representa a área total de superfície do poliedro e *“a”* a aresta do poliedro, é possível conhecer a área de superfície de uma das faces e como são quatro obtém a área total de superfície.

$$S_T = 4.\left(\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\boxed{S_T = a^2.\sqrt{3}}$$

Hexaedro é um poliedro de seis faces quadrangulares regulares, portanto, as faces são seis quadrados e, calculando a área de uma das faces, as outras são congruentes.

Fazendo uso da fórmula, onde "S_T" representa a área total de superfície do poliedro e *"a"* a aresta do poliedro, se conhece a área de superfície de uma das faces, e como são seis é possível obter a área total de superfície.

$$\boxed{S_T = 6\ .\ a^2}$$

Octaedro é um poliedro de oito faces triangulares regulares, ou seja, as faces são oito triângulos equiláteros e, portanto, calculando a área de uma das faces, as outras são análogas uma vez que todas são congruentes.

Fazendo uso da fórmula do triângulo equilátero de aresta, onde "S_T" representa a área total de superfície do poliedro e *"a"* a aresta do poliedro, obtém a área de superfície de uma das faces e, como são oito delas, a área total de superfície.

$$S_T = 8.\left(\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}\right)$$

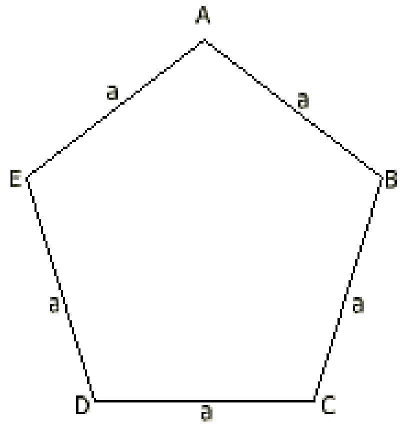
$$\boxed{S_T = 2.a^2.\sqrt{3}}$$

Dodecaedro é um poliedro platônico de 12 faces pentagonais, aproveitando os conceitos trigonométricos já apresentados e trabalhados no primeiro semestre.

Vale ressaltar que para a face pentagonal não é incluído no ensino fundamental uma fórmula pronta para o cálculo de área de superfície. Após analisar alguns materiais sobre o assunto, elaborou-se uma fórmula de cálculo para ser colocada aos alunos.

Inicialmente foi apresentada a figura do pentágono na lousa para os alunos (Figura 36).

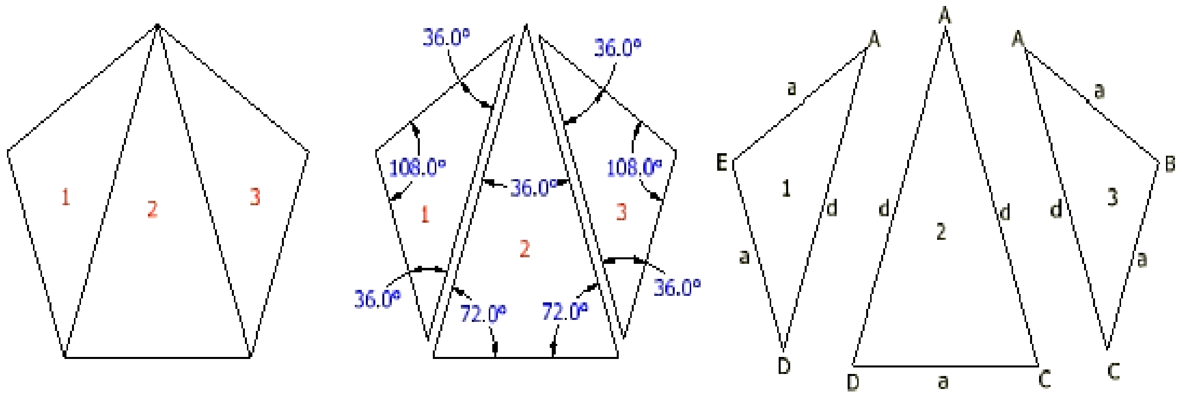
Figura 36: Pentágono



Após foi dada a seguinte explicação:

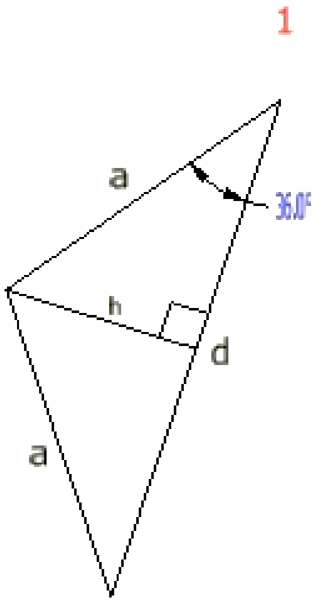
No pentágono, se escolher um de seus vértices e as diagonais que partem desse vértice, é possível dividi-lo em 3 triângulos. Esses três triângulos são caracterizados por dois isósceles e congruentes (1 e 3), pois possuem dois lados do polígono e uma das diagonais, e o terceiro, também isósceles (2), porém, com dois lados formados pelas diagonais, o terceiro lado é um dos lados do polígono (Figura 37).

Figura 37: Pentágono decomposto



Com a decomposição, passa-se a analisar cada um dos triângulos, a iniciar com o triângulo 1 (Figura 38).

Figura 38: Triângulo 1 (decomposição do pentágono)



Aplicando a Lei dos Cossenos[1] no ângulo obtuso do triângulo 1, obtém-se:

$$d^2 = a^2 + a^2 + 2.a.a.|\cos 108°|$$
$$d^2 = 2.a^2 + 2.a^2.\cos 72°$$
$$d^2 = 2.a^2.(1 + sen\ 18°)$$
$$d = a\sqrt{2.(1 + sen\ 18°)}$$

obs.: $|cos 108°| = \cos 72° = sen\ 18°$

No ângulo agudo é realizada a razão trigonométrica, com o seguinte resultado:

$$sen 36º = \frac{h}{a}$$
$$h = a.sen 36°$$

Assim, a área do triângulo 1 pode ser calculada da seguinte forma:

[1] Lei dos cossenos $a^2 = b^2 + c^2 + 2.b.c.\cos \hat{A}$

$$A = \frac{b\ .\ h}{2}$$

$$A = \frac{a.\sqrt{2.(1+sen18°)}\ .\ a.sen36°}{2}$$

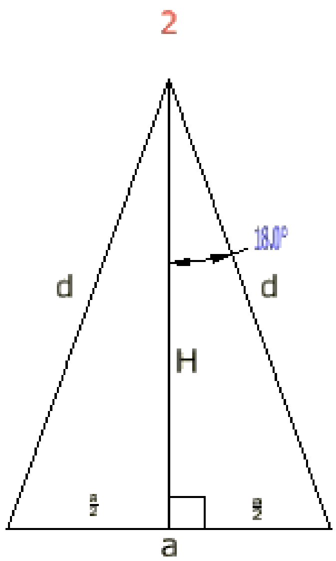
$$A = \frac{a.^2\ .\ sen36°\sqrt{2.(1+sen18°)}}{2}$$

Como são dois desses triângulos (1 e 3) a soma das áreas destes será de:

$$A = a^2.\ sen36°\sqrt{2.(1+\cos 72°)}$$

Conhecidas as áreas do triângulo 1 e 3, passa-se a calcular a área do triângulo 2 (Figura 39).

Figura 39: Triângulo 2



Utilizando a razão trigonométrica no ângulo da base do triângulo 2, obtém:

$$\tan 72° = \frac{h}{\frac{a}{2}} \rightarrow \mathrm{h} = \frac{a.\tan 72°}{2} \rightarrow h = \frac{a.\mathrm{sen}\,72°}{2.\cos 72°} \rightarrow h = \frac{a.\mathrm{sen}\,72°}{2.sen\ 18°}$$

Portanto, a área do triângulo 2 será de:

$$A = \frac{b\,.\,h}{2}$$

$$A = \frac{a\ .\ \dfrac{a\,.\,sen72°}{2\,.\,sen18°}}{2}$$

$$A = \frac{a^2\,.\ sen72°}{4\,.\,sen18°}$$

Conhecidos os resultados dos cálculos dos triângulos, é possível assim obter a área do Pentágono:

$$A = a^2\,.\ sen36°\sqrt{2.(1+sen18°)}\ + \frac{a^2\ .\ sen72°}{4\,.\,sen18°}$$

$$A = a^2\,.\frac{\left(4\ .sen18^{o}.\ sen36°\sqrt{2.(1+sen18°)}\ \ + sen72°\right)}{4sen18°}$$

No caso da área do Dodecaedro, basta multiplicar o resultado obtido no pentágono por 12.

$$\boxed{S_T\ = 3\ .a^2\ .\frac{\left(4\ .sen18^{o}.\ sen36°\sqrt{2.(1+sen18°)}\ \ + sen72°\right)}{sen18°}}$$

Icosaedro é um poliedro de vinte faces triangulares regulares, ou seja, as faces são vinte triângulos equiláteros e, portanto, calculando a área de uma das faces, as outras são congruentes.

Fazendo uso da fórmula do triângulo equilátero, onde “S_T” representa a área total de superfície do poliedro, obtém-se:

$$S_T = 20.\left(\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\boxed{S_T\ = 5\,.\,a^2\ \sqrt{3}}$$

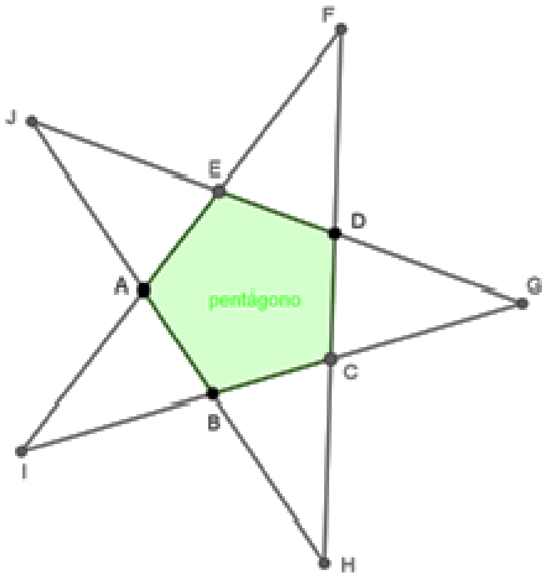
Apresentados os cálculos das áreas de superfície das faces dos poliedros platônicos, passaremos aos cálculos para dois poliedros estrelados escolhidos: pequeno dodecaedro estrelado e o icosaedro estrelado.

5.3.2 Cálculo do comprimento das varetas

A partir do prolongamento dos lados de um pentágono regular pode-se construir um polígono estrelado, chamado pentágono estrelado (Figura 40).

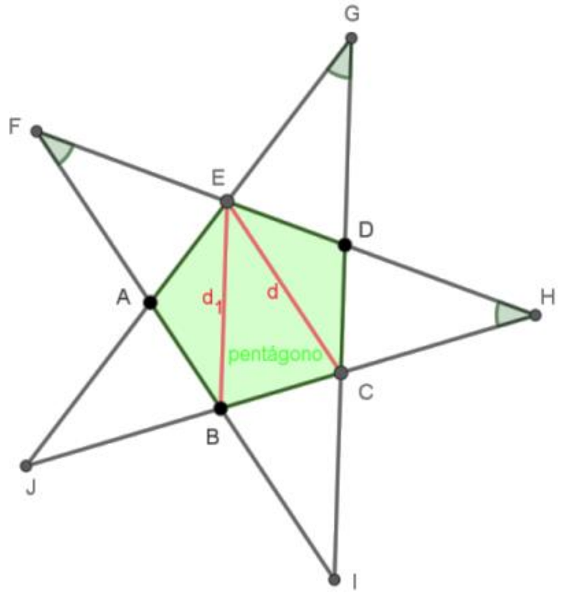
Tal operação será utilizada tanto na construção do pequeno dodecaedro estrelado, quanto na do icosaedro estrelado.

Figura 40: Pentágono estrelado



Para calcular o comprimento das varetas, partiremos da medida de duas diagonais e um dos lados pentágono (Figura 41):

Figura 41: Pentágono estrelado (parâmetros)



Para os triângulos isósceles, devem ser considerados:

Triângulo	Ângulos Internos	Lados
ABE	$\hat{A} = 108^{\circ}$, $\hat{B} = \hat{E} = 36^{\circ}$	$AB = AE = a$ e $BE = d$
ABJ	$\hat{J} = 36^{\circ}$, $\hat{A} = \hat{B} = 72^{\circ}$	$AB = a$ e $JA = JB = d$
BEJ	$\hat{B} = 108^{\circ}$ e $\hat{J} = \hat{E} = 36^{\circ}$	$BE = BJ = d$ e $EJ = a + d$

Considerando essas medidas, destaca-se o cálculo *EJ* = *a* + *d*, concluindo que os lados do pentágono na estrelação, após os dois aumentos, medem d + a + d.

Ademais, assim como já esboçado anteriormente, também deve ser considerado:

$$d = a.\sqrt{2.(1 + sen18^{\circ})}$$

Portanto, cada vareta deverá ter as seguintes medidas:

$$v_a = a + 2d = a + 2.a\sqrt{2.(1 + sen18^{\circ})} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_a = a.(1 + 2.\sqrt{2.(1 + sen18°)}$$

Esses cálculos podem ser usados para uma aplicação prática, onde cada comprimento "*v*" da vareta tem relação com um polígono de aresta "a", ou seja,

$$v_a = 4{,}236.a$$

A relação entre a diagonal d e a aresta a do pentágono regular é uma constante bem conhecida.

5.3.3 O número Phi (Φ)

Desde que começou a ser usado no Parthenon (templo construído no século V, a.C. na Acrópole de Atenas, na Grécia Antiga, dedicado a deusa grega Atenas), número Phi, denotado por Φ vem sendo investigado por muitos matemáticos e por várias razões.

Não diferente a essas pesquisas, o estudo depara-se com a razão áurea, sendo possível encontrar o Φ, se dividir o valor da diagonal do pentágono pela medida de seu lado:

$$\frac{d}{a} = \frac{a.\sqrt{2.(1+sen18°)}}{a} = \sqrt{2.(1+sen18°)} = 1{,}6180339... = \Phi$$

Assim, terá o mesmo valor numérico que:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339...$$

Deste modo, o comprimento da vareta também pode ser expresso por

$$v_a = a(1 + 2.\Phi)$$

5.3.4 Relação de Euler

Para melhor identificação dos poliedros (convexos e não convexos) e facilitar aos alunos aplicarem nos mesmos a Relação de Euler, foi elaborada uma tabela informando o nome dos poliedros, o número de vértices, arestas e faces, como também a fórmula do cálculo para a Relação de Euler (Tabela 4).

Tabela 4: Relação de Euler

Ordem	Nome	Vértices	Arestas	Faces	Relação de Euler V-A+F=2
1	Tetraedro	4	6	4	4 – 6 + 4 = 2
2	Hexaedro	8	12	6	8 – 12 + 6 = 2
3	Octaedro	6	12	8	6 – 12 + 8 = 2
4	Dodecaedro	20	30	12	20 – 30 + 12 = 2
5	Icosaedro	12	30	20	12 – 30 + 20 = 2
6	Pequeno Dodecaedro estrelado	32	90	60	32 – 90 + 60 = 2
7	Icosaedro estrelado	32	90	60	32 – 90 + 60 = 2

Obs. A relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos e muitos não convexos.

5.4 Das atividades realizadas

Após os conceitos discutidos em sala de aula, as atividades foram aplicadas para um grupo de alunos do Ensino Médio, propondo a construção dos poliedros de Platão e de dois estrelados de Kepler-Poinsot, por poderem ser construídos a partir da extensão de suas arestas.

As atividades foram realizadas em três aulas.

5.4.1 Aula preparatória para início das atividades

Uma semana antes de iniciar as atividades, a sala foi dividida em 10 (dez) grupos, com a média de 4 (quatro) alunos para cada grupo.

Dois grupos foram responsáveis em fazer uma pesquisa teórica sobre os matemáticos mais relevantes para o conteúdo de poliedros. O primeiro grupo pesquisou sobre Platão e Euler, e o segundo levantou as informações de Kepler e

Poinsot, ambos investigaram qual período que viveram e quais foram as principais contribuições para o estudo. Um terceiro grupo pesquisou sobre a Relação de Euler.

Na aula seguinte, os três grupos apresentaram para toda classe o material pesquisado, sendo que o terceiro grupo preencheu a tabela desenhada para apresentação da Relação de Euler nos estrelados.

Os demais grupos ficaram responsáveis pela construção dos 5 (cinco) poliedros de Platão, com canudos rígidos. Um desses grupos ficou incumbido de construir o Tetraedro, Hexaedro e o Octaedro, outro o Dodecaedro e os grupos restantes o Icosaedro.

Foram também entregues para cada grupo, uma ficha contendo as instruções das atividades a serem realizadas, com os seguintes dados:

GRUPO 1
Tema Geral: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT
Subtema: Vida e obra de Platão e Euler
Instruções: O grupo deverá apresentar para o professor, por escrito, uma pesquisa em livros e ou internet, sobre o tema e subtema dados. Deverá se programar e preparar para uma apresentação da pesquisa, com no máximo 10 minutos, para a classe na próxima aula.

GRUPO 2
Tema Geral: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT
Subtema: Vida e obra de Kepler e Poinsot
Instruções: 1. O grupo deverá apresentar para o professor, por escrito, uma pesquisa em livros e ou internet, sobre o tema e subtema dados. 2. Deverá se programar e preparar para uma apresentação da pesquisa, com no máximo 10 minutos, para a classe na próxima aula.

GRUPO 3

Tema Geral: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT

Subtema: Relação de Euler

Instruções:

1. O grupo deverá apresentar para o professor, por escrito, uma pesquisa em livros e ou internet, sobre o tema e subtema dados.
2. Deverá se programar e preparar para uma apresentação da pesquisa, com no máximo 10 minutos, para a classe na próxima aula.
3. Deverão desenhar e completar na lousa, os itens de 1 a 5, bem como fazer a verificação para tais poliedros da Relação de Euler. (Tabela 1)
4. Os itens 6 e 7, serão preenchidos a partir do experimento em sala.

Tabela 1:

Ordem	Nome	Vértices	Arestas	Faces	Rel. de Euler: V-A+F=2
1	Tetraedro				
2	Hexaedro				
3	Octaedro				
4	Dodecaedro				
5	Icosaedro				
6	Pequeno dodecaedro estrelado				
7	Icosaedro estrelado				

Obs.: A relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos e muitos não convexos.

GRUPO 4

Tema Geral: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT

Subtema: Construção Poliedros de Platão com canudos

Instruções:

1. Vocês estão recebendo um pote contendo 1 kit, com 90 canudos plásticos, em cores diferentes, algumas varetas de fibra e linha de pesca suficiente;
2. Separe-as, inicialmente, pelas cores dos canudos
3. Com 6 delas monte um Tetraedro;
4. Faça uma contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 1);
5. Com 12 delas monte um Hexaedro;
6. Faça uma contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 2);
7. Com 12 delas monte um Octaedro;
8. Faça uma contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 3);
9. Agora, introduza as varetas, uma a uma, pelos orifícios dos canudos que representam as arestas, verifique se a possibilidade de intersecção entre elas, fora dos vértices dos poliedros.
10. Em caso afirmativo, solicite ao professor jujubas, para colocar em tais intersecções.

GRUPO 5 / GRUPO 6 / GRUPO 7
Tema Geral: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT
Subtema: Construção Poliedros de Platão com canudos
Instruções: 1. Vocês estão recebendo um pote contendo 1 kit, com 30 canudos plásticos e 30 varetas de fibra, 12 jujubas e linha de pesca suficiente 2. Usando os canudos e a linha de pesca, monte um Dodecaedro; 3. Faça uma contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 4); 4. Agora, introduza as varetas, uma a uma, pelos orifícios dos canudos que representam as arestas, verifique se a possibilidade de intersecção entre elas, fora dos vértices dos poliedros. 5. Em caso afirmativo, colocar uma jujuba em tais intersecções. 6. Faça agora uma nova contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 6).

GRUPO 8 / GRUPO 9 / GRUPO 10
Tema Geral: POLIEDROS DE KEPLER-POINSOT
Subtema: Construção Poliedros de Platão com canudos
Instruções: 1. Vocês estão recebendo um pote contendo 1 kit, com 30 canudos plásticos e 30 varetas de fibra, 20 jujubas e linha de pesca suficiente; 2. Usando os canudos e a linha de pesca, monte um Icosaedro; 3. Faça uma contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 5); 4. Agora, introduza as varetas, uma a uma, pelos orifícios dos canudos que representam as arestas, verifique se a possibilidade de intersecção entre elas, fora dos vértices dos poliedros. 5. Em caso afirmativo, colocar uma jujuba em tais intersecções. 6. Faça agora uma nova contagem do número de arestas, vértices e faces e forneça tais dados ao Grupo 3, para que sejam anotados na tabela da lousa (linha 7).

5.4.2 Primeira aula

Os primeiros dez minutos foram reservados para a arrumação da sala em grupos de trabalho, em seguida concedidos dez minutos para que cada um dos grupos 1, 2, 3 e 4 apresentassem suas pesquisas e nos últimos dez foram entregues os kits de trabalho para a próxima atividade.

5.4.3 Segunda aula

Conforme as instruções, foram dados 30 minutos para que os grupos responsáveis pela montagem construíssem seus poliedros com o kit de trabalho entregue na aula anterior.

Desta forma os alunos passaram a montar um tetraedro, um hexaedro, um octaedro, um dodecaedro e um icosaedro, usando para todos eles canudos rígidos com 4 cm de comprimento e linha de pesca, suficiente para a montagem.

Após a montagem, os alunos fizeram a contagem do número de faces, arestas e vértices desses poliedros e repassaram esses dados para os alunos do grupo 3, que anotaram tais dados para a complementação da tabela e, consequentemente, a

5.4.4 Terceira aula

Essa aula foi dedicada à montagem e construção da primeira estrelação dos poliedros pré-estabelecidos para os grupos responsáveis.

Assim que concluídos, o grupo fez uma nova contagem com o poliedro montado, verificando o número de faces, arestas e vértices. Esses dados foram repassados para os alunos do grupo 3, que analisaram sua validade com a Relação de Euler (Tabela 4).

Os registros dos poliedros construídos foram fotografados pelos celulares dos alunos dos grupos1 e 2 (Figuras 42 a 48)

Figura 42: Escala de grupos de trabalho

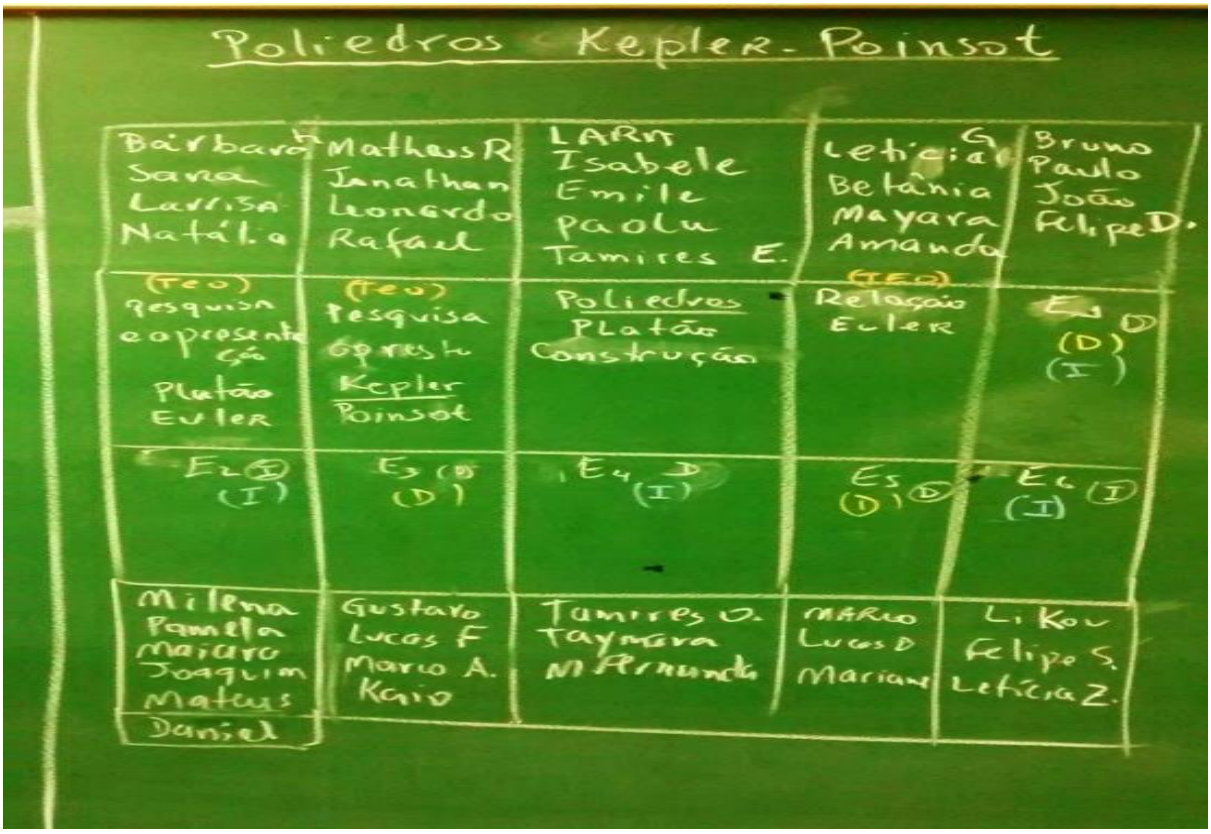


Figura 43: Preparando materiais

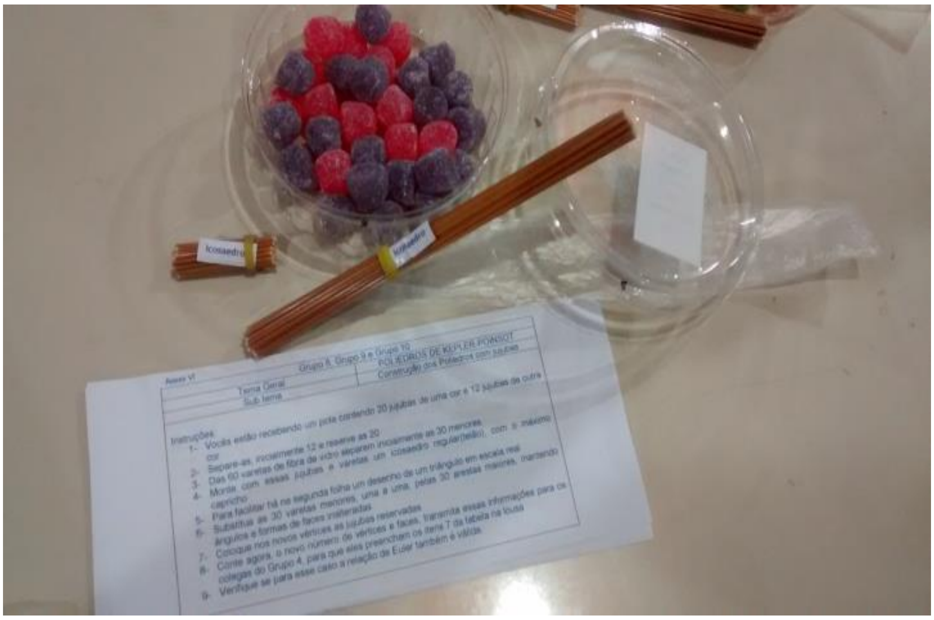


Figura 44: Separação de materiais

Figura 45: Preparo para distribuição

Figura 46: Pequeno dodecaedro estrelado

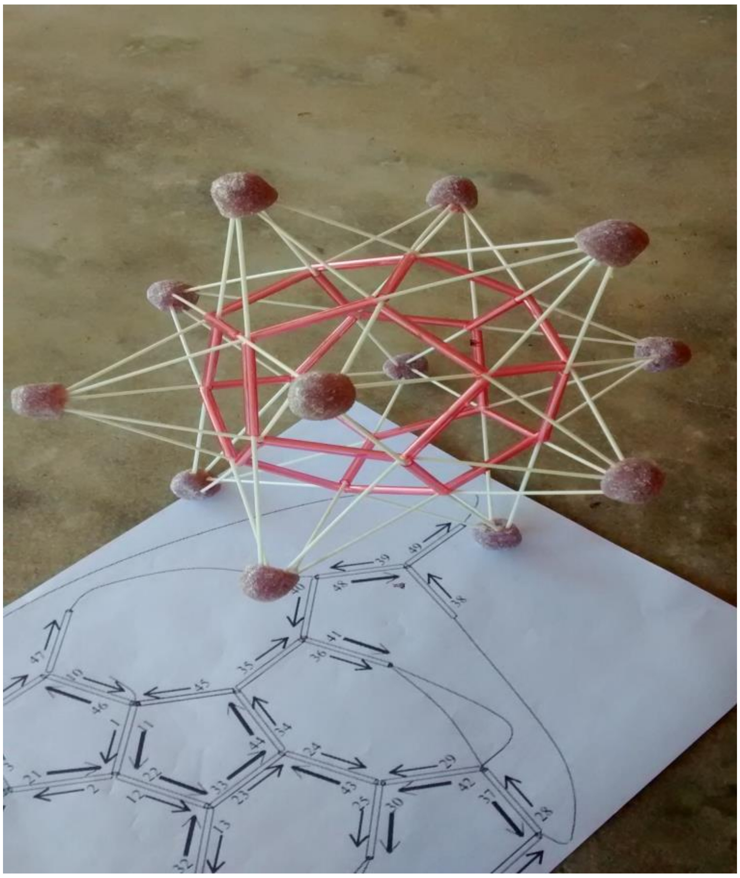


Figura 47: Icosaedro estrelado

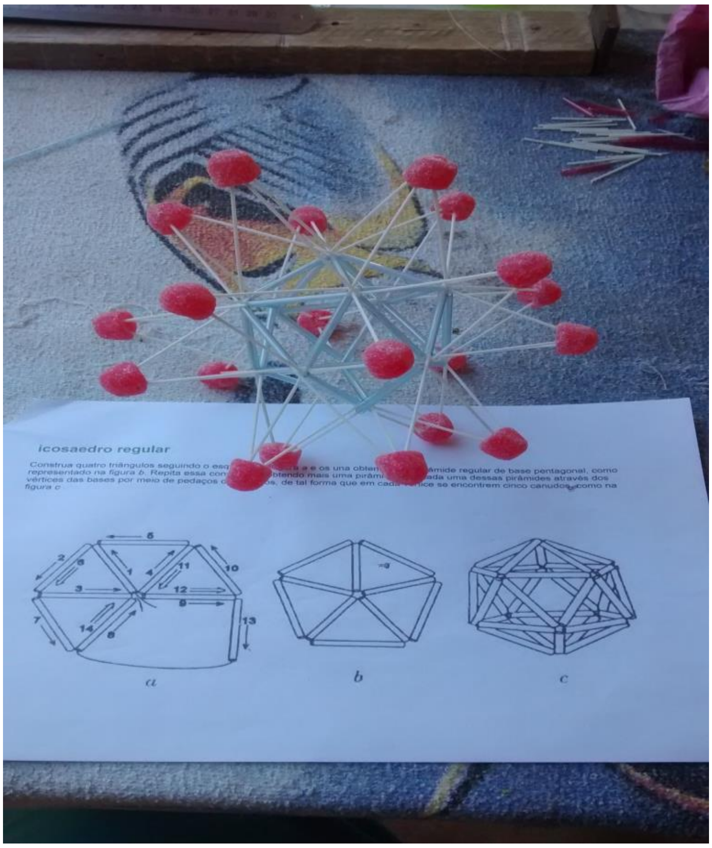
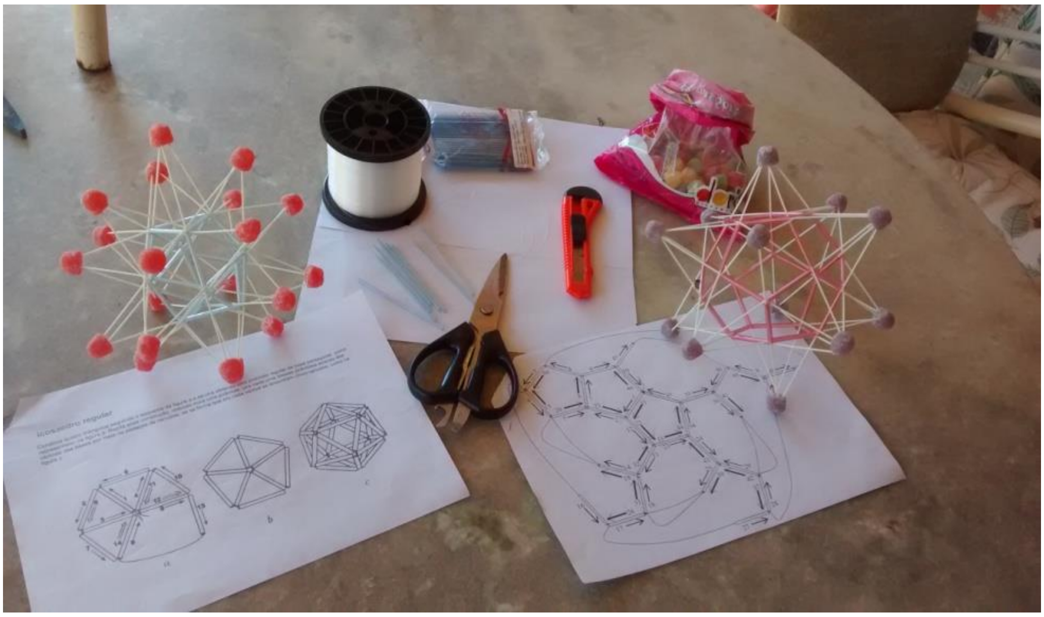


Figura 48: Pequeno dodecaedro estrelado



Os últimos 10 minutos foram utilizados para a reorganização e limpeza da sala de aula.

CONCLUSÃO

Para muitos professores, a ideia de utilizar material concreto para abordar um conteúdo e/ou encerrar soa como um facilitador da aprendizagem. No presente estudo, a experiência de usar esses materiais foi testada e comprovou-se que esse recurso pode ser muito eficiente para o ensino aprendizagem do aluno.

Especificamente na matemática, uma disciplina que poucos aprenderam a admirar e praticar, a atividade desenvolvida trouxe grande satisfação e alegria aos alunos, isto porque, além de compreenderem de forma natural e espontânea a matéria abordada, também aprenderam os conceitos trabalhados.

Neste contexto, percebe-se que os recursos usados na didática do ensino da matemática, no caso os materiais concretos, despertam nos alunos a vontade de aprender.

A atividade desenvolvida neste estudo, além de explanar conceitos e abordar um pouco da biografia de alguns dos matemáticos, facilitou aos alunos compreenderem a relação da geometria plana para a geometria espacial, com o uso dos materiais concretos para a construção dos poliedros.

Por fim, sugere-se aos docentes de matemática que adotem em suas aulas de geometria atividades em grupos explorando além dos conceitos de cálculo de área de superfície, os cálculos de volume para tais poliedros estrelados, inclusive, o cálculo de comprimentos de arestas, para que todos os poliedros de Platão tenham a mesma área e ou volume.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. K. T.; MAGNAGHI, C. P. **O método ilustrado de Arquimedes:** utilizando a lei da alavanca para calcular áreas, volumes e centros de gravidade. Montreal: Apeiron, 2014.

BEMFICA, A. **Poliedros**: arquitetura, aspectos históricos e softwares. 2012. Disponível em: <http://professorandrios.blogspot.com.br/2012/05/poliedros-arquitetura-aspectos.html>. Acesso em: 2 mar. 2018.

BORTOLOSSI. H. J. **Os sólidos platônicos**. 2009. Disponível em: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/15954/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 2 mar. 2018.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Resolução do Conselho Nacional de Educação CEB nº 2, de 7 de abril de 1998**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. 1998a. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb02_98.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas. Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Edição 2015. Brasília-DF. Setembro de 2016. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/imprensa/2015/cartilha_saeb2015.pdf>. Acesso em: 28 ag. 2018

BRASIL. Ministério da Educação: **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio**.** Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998b.

BRASIL Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)**. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 2 nov. 2017

CAMARGO, P. de. **Quando o problema não é o aluno**. Folha on line [sinapse] online. 27 jan. 2004. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u723.shtml>. Acesso em: 2 dez. 2017.

CANTORAL, R. et al. **Desarrollo del pensamiento matemático**. México: Trillas, 2000.

CARRAHER, T. N. (Org.). **Aprender pensando**: contribuições da psicologia cognitiva para a Educação. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 1990.

CARVALHO, L. N. **Um estudo sobre a alfabetização matemática.** 2010. 31 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)- Instituto Superior de Educação, Faculdade Alfredo Nasser, Aparecida de Goiânia, 2010. Disponível em: <http://www.unifan.edu.br/files/pesquisa/UM%20ESTUDO%20SOBRE%20A%20ALFABETIZA%C3%87%C3%83O%20MATEM%C3%81TICA%20-%20LUCAS%20NOGUEIRA.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2017.

CHAS, D. M. P. Matemática e atividades lúdicas: uma metodologia diferenciada. In: SIMPÓSIO EDUCAÇÃO DA MATEMÁTICA EM DEBATE, 1., 2014, Joinville. **Anais...** Joinville: Udesc, 2014. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/matematica/article/view/4748>. Acesso em: 10 dez. 2017.

COLL, C. et al. **Os conteúdos na reforma**: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

CONFINS DO UNIVERSO. **Em busca do conhecimento em geral**. Arquivo para Johannes Kepler. Disponível em: <https://confinsdouniverso.wordpress.com/tag/johannes-kepler/>. Acesso em 7 mar. 2018.

CROMWELL, P. R. **Polyhedra**: one the most the charming chapters of geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

CUNDY, H. M.; ROLLETT, A. P. **Mathematical models.** 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1961.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005.

DANYLUK, O. S. **Alfabetização matemática**: o cotidiano da vida escolar. 2. ed. Caxias do Sul: Educs, 1991.

DEUS, A. M.; CUNHA, D. E. S. L; MACIEL, E. M. Estudo de caso na pesquisa qualitativa em educação: uma metodologia. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 6., 2010, Teresina. **Anais...** Teresina: Universidade Federal do Piauí, 2010. Disponível em: <http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT.1/GT_01_14.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2018.

DRUCK, S. A crise no ensino de matemática no Brasil. **Revista do Professor de Matemática**, v. 53, n. 53, p. 01-05, 2004.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp Editora, 2004.

FAUVEL, J.; GRAY, J. **The history of mathematics**: a reader. Londres: The Open University, 1987.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, Ano 4, n. 7, 1990.

FRAZÃO, D. **Johannes Kepler**. Astrônomo e matemático alemão. Biografia de Johannes Kepler. 2017a. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/johannes_kepler/>. Acesso em: 7 mar. 2018.

FRAZÃO, D. **Leonhard Euler**. Matemático e cientista suíço. E Biografia. 2017b. Disponivel em: <https://www.ebiografia.com/leonhard_euler/>. Acesso em: 1 mar. 2018.

GARCIA, L. N. **O legado de Johannes Kepler**: o defensor da ciência empírica. 2012. Disponível em: <http://dissecandoouniverso.blogspot.com.br/2012/01/o-legado-de-johannes-kepler-o-defensor_10.html>. Acesso em: 8 mar. 2018.

GROENWALD, C. L. O. **Currículo de matemática:** necessidades e alternativas. 2013. Minicurso apresentado ao I Congreso de Educacón Matemática de América Central e El Caribe, República Dominicana, 2013. Disponível em: <http://ciaem-redumate.org/memorias-icemacyc/Minicurso,_Groenwald.pdf>. Acesso em: 2 dez. 2017.

GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. Duality of polyhedra. In: SENECHAL, M.; FLECK, G. (Ed.). **Shaping space**: a polyhedral approach. Basileia: Birkhäuser, 1988.

GUIMARAES, G. **Geometria Espacial**. 2010. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/GledsonGuimares/geometria-espacial-by-gledson>. Acesso em: 4 mar. 2018.

HEIN, A. **El misterio de los dodecaedros romanos**. 2011. Disponível em: <https://latunicadeneso.wordpress.com/2011/06/12/el-misterio-de-los-dodecaedros-romanos/>. Acesso em: 2 mar. 2018.

HENY, L. **Os sólidos platônicos**. 2012. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/LeonardoHenry2012/os-slidos-platnicos>. Acesso em: 5 mar. 2018.

HISOUR.COM. **Escultura Matemática**. [20__] Disponível em: <https://hisour.com/pt/mathematical-sculpture-17978/>. Acesso em: 2 mar. 2018.

IFRAH, G. **A história universal de computar**: do ábaco ao computador de Quantum.New York: John Wiley&filhos, 2001.

INFOESCOLA. **Chumbo**. 2014. Disponível em: <https://www.infoescola.com/elementos-quimicos/chumbo/>. Acesso em: 2 mar. 2018.

KALEFF, A. M. M. R. **Criatividade, educação matemática e laboratórios de ensino**. 2011. Palestra apresentada ao V Encontro Brasiliense de Educação Matemática, Brasília, 2011. Disponível em:

<http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/arquivos/Palestras%202.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2018.

KALEFF, A. M. M. R. **Novas tecnologias no ensino da matemática**: tópicos em ensino de geometria: a sala de aula frente ao laboratório de ensino e à história da geometria. Rio de Janeiro: UAB/CEDERJ, 2008.

KATZ, Victor J. **História da matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KNOOW.NET. Enciclopédia temática. **Euler, Leonard**. 2015a. Disponível em: <http://knoow.net/cienciasexactas/matematica/euler-leonhard/>. Acesso em: 1 mar. 2018.

KNOOW.NET. Enciclopédia Temática. **Radiolaria (Radiolário).** 2015b. Disponível em: <http://knoow.net/ciencterravida/biologia/radiozoa-subfilo-radiolario/>. Acesso em: 2 mar. 2018.

KUSUKAWA, S. **Johannes Kepler.** Departamento de História e Filosofia da Ciência da Universidade de Cambridge. 1999. Disponível em: <http://www.sites.hps.cam.ac.uk/starry/kepler.html>. Acesso em:

LACERDA, G. C. **Alguns conceitos de geometria analítica vistos com o auxílio do Geogebra.** 2013. 81 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro-BA, 2013. Disponível em: <http://www.univasf.edu.br/~tcc/000007/000007b2.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LÍVIO, Mario. **Deus é matemático?** 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

MATH.INFO. **Eugène Catalan**. [20__] Disponível em: <http://www.aprender-mat.info/ingles/historyDetail.htm?id=Catalan>. Acesso em: 5 mar. 2018.

MENDIZÁBAL, A. **Los cinco poliedros regulares em madrid**. 2016. Disponível em: <http://matemolivares.blogia.com/2016/111804-los-cinco-poliedros-regulares-en-madrid..php>. Acesso em: 2 mar. 2018.

MIGUEL, J. C. **Inovações curriculares em matemática**: limites e perspectivas. Universidade de São Paulo-UNESP, 2002. Disponível em: <www.unesp.br/prograd/PDFNE2002/inovacoescurriculares.pdf.> Acesso em: 12 nov. 2017.

MIGUEL, J. C. Da prescrição curricular ao currículo como ação compartilhada: dilemas das tentativas de renovação dos programas de ensino de matemática no estado de São Paulo pós-64. **Ensino em Revista**, v. 17, n. 1, p. 303-326, 2010.

MIGUEL, J. C. **O ensino de matemática na perspectiva da formação de conceitos**: implicações teórico-metodológica. Núcleos de Ensino-PROGRAD-UNESP**.** 2011. Disponível em:

<www.unesp.br/prograd/PDFNE2003/O%20ensino%20de%20matematica.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2017.

MINAYO, M. C. S. (Org**.). Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 29. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

MINERALI.IT. **Humite – Silicati**. [20__] Disponível em: <http://www.minerali.it/scheda-scientifica/566c090c-a79a-4f32-9bd7-bf94f3c14871/humite.aspx>. Acesso em: 2 mar. 2018.

MOREIRA, M. D. D. **Poliedros.** Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. 2017. Disponível em: <http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20208/2017-II/textos/POLIEDROS_Marli%20D.%20D.%20Moreira%20-%20MAT%20208%20-%202017-II.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2018.

NATIONAL JOINT COMMITTEE FOR LEARNING DISABILITIES. **Collective perspectives on issues affecting learning disabilities:** position papers and statements. Austin: Pro-Ed., 1994.

NOBREGA, M. L. et al. A importância dos Parâmetros Curriculares Nacionais na elaboração do Projeto Político Pedagógico. In: REUNIÃO ANUAL DA SBPC, 64., 2012, São Luís, **Anais...** São Luís: UFMA, 2012. Disponível em: <http://www.sbpcnet.org.br/livro/64ra/resumos/resumos/2306.htm>. Acesso em: 2 fev. 2018.

OLIVEIRA NETO, J. A. **Arquimedes.** 2008. Disponível em: <http://www.geocities.ws/jaymeprof/tg/Arquimedes/foto_arquimedes.html>. Acesso em: 3 mar. 2018.

PLATÃO. **Timeu-Crítias.** Tradução do grego, introdução, notas e índices: Rodolfo Lopes. Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos, 2011.

POZO, J. I. M.; CRESPO, M. A. G. **Aprender y enseñar ciencia**: del conocimiento cotidiano al conocimiento científico. Madrid: Morata, 1998.

PTAK, J. F. **The History of Missingand Blank Things:** The Disappeared Solids of Johannes Kepler. [2009]. Disponível em: <http://longstreet.typepad.com/thesciencebookstore/2009/03/jf-ptak-science-books-llc-post-548the-great-joahnnes-kepler-conceived-at-427-on-the-morning--of-his-parents-holy-joining.html>. Acesso em: 8 mar. 2018.

SÁ, C. C.; ROCHA, J. **Treze viagens pelo mundo da matemática.** Porto: U. Porto Editorial, 2010.

SÁ, C. C.; ROCHA, J. (Ed.). **Treze viagens pelo mundo da matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SACRAMENTO, I. **Dificuldades de Aprendizagem em Matemática**: discalculia. 2008. Palestra apresentada ao I Simpósio Internacional do Ensino da Matemática. Salvador-BA, 2008. Disponível em:

<https://www.webartigos.com/artigos/dificuldades-de-aprendizagem-em-matematica/16574>. Acesso em: 2 dez. 2017.

SANTOS, M. C. A.; NUNES, R. C. S; ROSA, I. G. **Cortes em poliedros**. 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/frame.htm>. Acesso em: 28 abr 2018.

SANTOS, R. M. B. dos. **Tic's:** uma tendência no ensino de matemática. Brasil Escola. 2007. Disponível em: <http://meuartigo.brasilescola.uol.com.br/educacao/tics-uma-tendencia-no-ensino-matematica.htm>. Acesso em: 27 nov. 2017.

SILVEIRA, M. R. A. Matemática é difícil: um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos. REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25., 2002, Caxambu. **Anais…** Caxambu: ANPED, 2002.

SMITH, T. E. C. et al. **Children and adults with learning disabilities.** Boston: Allyn and Bacon, 1997.

URPIA, L. **Morte de Arquimedes de Siracusa**. 2011. Disponível em: <http://mortenahistoria.blogspot.com.br/2011/05/morte-de-arquimedes.html>. Acesso em: 4 mar. 2018.

VAILATI, J.S; PACHECO, E.R. [20__] **Usando a história da matemática no ensino da álgebra.** Secretaria da Educação do Paraná. Dia a dia Educação. Portal Educacional do Estado do Paraná. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-4.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2017.

VELA, M. **Poliedros de Platão**. Protagonista. 2015. Disponível em: <http://slideplayer.com.br/slide/3191069/>. Acesso em: 28 fev. 2018.

VITORINO FILHO, P. R. **Geometria espacial**: os poliedros de Platão. Curso Athenas. 2011. Disponível em: <https://cursoathenas.webnode.com.br/news/geometria-espacial-platao/>. Acesso em: 3 mar. 2018.

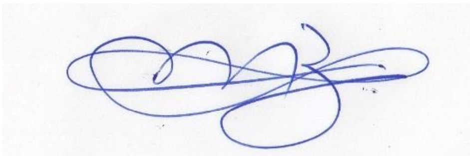
WEISS, A. M. L.; CRUZ, M. L. R. **A informática e os problemas escolares de aprendizagem.** 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 1999.

WIKIMEDIA COMMONS. **Conservatório Muttart Edmonton**. 2015. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Muttart_Conservatory_Edmonton_Alberta_Canada_01.jpg>. Acesso em: 2 mar. 2018.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

Bauru, __03___/__08___/__2018__



Assinatura do autor