UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
GUILHERMINO PEREIRA TEIXEIRA

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E O ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

VITÓRIA DA CONQUISTA, BA
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GUILHERMINO PEREIRA TEIXEIRA

A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E O ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva.

VITÓRIA DA CONQUISTA, BA
2018

T266i Teixeira, Guilhermino Pereira.
A investigação matemática e o estudo das funções reais: uma experiência com alunos do 1º ano do ensino médio. / Guilhermino Pereira Teixeira, 2018.
119f. il.
Orientador (a): Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2018.
Inclui referências. 116-119.
1. Funções reais. 2. Investigação matemática – Estudo das funções. 3. Investigação matemática – Papel do professor. I. Silva, Maria Deusa Ferreira. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 515.8

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

GUILHERMINO PEREIRA TEIXEIRA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Maria Deusa F Silva

____

Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva. (Orientadora)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Roberta D' Angela Menduni - Bortoloti

____

Prof.ª Dr.ª Roberta D´Angela Menduni-Bortoloti

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Prof.ª Dr.ª Selma Rozane Vieira

Instituto Federal da Bahia – IFBA

VITÓRIA DA CONQUISTA, BA

2018.

GUILHERMINO PEREIRA TEIXEIRA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva. (Orientadora)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof.ª Dr.ª Roberta D´Angela Menduni-Bortoloti

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof.ª Dr.ª Selma Rozane Vieira

Instituto Federal da Bahia – IFBA

VITÓRIA DA CONQUISTA, BA

2018.

"Eu não tenho dúvida nenhuma que dentro de mim há escondido um matemático que não teve chance de acordar."

Paulo Freire

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos e a toda minha família, que com apoio e dedicação não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida e a minha noiva Talita pela ajuda, carinho, cuidado constante.

AGRADECIMENTO

A Deus, pelo dom da vida e da sabedoria, pela saúde, força e determinação fundamentais na superação das dificuldades.

À minha mãe, Anísia, pelo cuidado e amor incondicionais, um exemplo de educadora que me inspirou a seguir o caminho da docência.

Ao meu pai, Edilson, homem humilde e probo, doutor em sabedoria de vida, exemplo de pai que pretendo perpetuar.

Aos meus irmãos, Nilton, Geysa e Jeanny pelo apoio e companheirismo.

À minha noiva, Talita, pelo carinho, cuidado, apoio e compreensão. Sempre ao meu lado incentivando e auxiliando nos momentos de dificuldade.

À direção, professores e alunos da COEDUC, pelo apoio e compreensão durante a realização e conclusão desta pós-graduação.

Aos discentes envolvidos nessa pesquisa, sempre manifestando interesse e dedicação como os estudos e realização das atividades.

À Prof.ª Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva, pela paciência e valiosas contribuições indispensáveis à conclusão desta pesquisa.

Aos amigos do mestrado, em especial a Ednaldo, Hugo, Daniel e Agnaldo, pelo auxílio constante durante as atividades e os exercícios quase insolúveis para mim, pelas orientações e momentos de estudos que foram fundamentais no transcurso desta pós-graduação.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho é resultado da aplicação de aspectos metodológicos da Investigação Matemática (IM) no estudo das Funções reais de uma variável para alunos do 1º ano do ensino Médio do Colégio Interativo COEDUC. Realizado dentro do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT, UESB, Campus de Vitória da Conquista (BA). Ele apresenta considerações a respeito do desenvolvimento de quatro atividades experimentais de caráter investigativo cujo objetivo geral foi avaliar as contribuições da Investigação Matemática no estudo das Funções. Para tal, a pesquisa baseia-se nos principais pressupostos teóricos da IM e desenvolve suas ações seguindo uma metodologia de abordagem qualitativa, enquadra na perspectiva da pesquisa-intervenção. O desenvolvimento da pesquisa teve início com um questionário de sondagem, em que impressões dos alunos com relação à Matemática foram verificadas. Na sequência, foram aplicadas as quatro atividades investigativas, seguindo orientações de dois roteiros de estudos (RE1 e RE2). Essas atividades foram desenvolvidas em grupos, e os resultados apresentados pelos alunos aos demais colegas e à comunidade escolar mediante a realização de seminários. Ao final, cada aluno envolvido na pesquisa respondeu um questionário final, em que relataram aspectos importantes das atividades, apontando pontos positivos e negativos traçando considerações a respeito da Investigação Matemática. Desse questionário, avaliou-se que a Investigação Matemática oferece potencialidades consideráveis ao ensino de Matemática, tornando-a mais substancial e significativa. Essa foi a conclusão a que se chegou com os resultados aferidos durante o estudo direcionado às Funções reais de uma variável.

Palavras chaves: Investigação Matemática, Funções reais, Atividades Investigativas.

ABSTRACT

This work stems from the application of methodological aspects of the Mathematical Investigation (MI) in the study of real functions of a variable for students of the first year of high school from Colégio Interativo COEDUC (an elementary and high school). Performed through the Professional Master's Program in Mathematics in nationwide network (PROFMAT), in the *campus* of Vitória da Conquista (BA), this work presents considerations regarding the development of four experimental activities with an investigative character whose general objective was to evaluate the contributions of the MI in the study of the Functions. In order to do this, the research is based on the main theoretical assumptions of the MI and develops its actions following a methodology of qualitative approach, and fitting itself in the perspective of the intervention research. The development of the research began with a questionnaire in which students' impressions related to Mathematics were verified. The next step was to apply the four research activities, following the guidelines of two study guides (RE1 and RE2). These activities were developed in groups; and the results were presented by the students to the other classmates and to the school community through seminars. At the end, each student involved in the research answered a final questionnaire in which they reported important aspects of the activities, pointing out positive and negative points, and drawing some considerations regarding MI. From this questionnaire, it was evaluated that the MI offers considerable potentialities to the Mathematical teaching, making it more substantial and meaningful. This was the conclusion reached with the results obtained during the study directed to the Real Functions of a variable.

Keywords: Mathematical Investigation, Real Functions, Investigative Activities.

LISTA DE ABREVIATURAS

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IM – Investigação Matemática

PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

PUC - Pontifícia Universidade Católica

QS - Questionário de Sondagem

RE1 - Roteiros de Estudo 01

RE2 - Roteiros de Estudo 02

SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

VCN - Virtual Cálculo Numérico.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais e a motivação.

Filho de dona Anísia - professora primária - e de seu Edilson – lavrador - moradores de Zona Rural de Ituaçu/BA, passei a vida escolar enfrentando barreiras e superando desafios. Cursei o ensino Fundamental I na Escola Municipal Ana Rodrigues Teixeira, localizada no distrito brumadense de Cristalândia a 15 km de distância da casa onde até os dias de hoje moram meus pais. Diariamente, franzino e muito jovem, montava minha bicicleta azul e sob o sol a pino, percorria tal distância para poder estudar. Quanto ao Ensino Médio, as dificuldades foram maiores. Realizei matrícula no Centro Educacional de Tanhaçu (Tanhaçu/BA), distante 30 km da localidade onde morava, na época era essa a cidade mais próxima onde era ofertado o Ensino Médio (Magistério). Incentivado pelos meus pais e sempre muito determinado, assumi o compromisso de acordar às 4 horas da manhã e, após anos, conclui em 2001, em nível médio, o Magistério.

Iniciei minha carreira na docência em 2002. A experiência em sala de aula começou no Colégio Municipal Luís Eduardo Magalhães, localizado no Distrito ituaçuense de Lagoa da Lage. Assumi uma mescla de disciplinas em turmas que iam desde a 5ª série (atual 6º ano) do Ensino Fundamental I ao 3º ano do Ensino Médio (Magistério). Ministrei aulas de Ensino Religioso, Ciências, Física, Química e Matemática (Ensino Fundamental I), Metodologia da Matemática, Biologia e Estrutura da Educação (Ensino Médio).

Após dois anos de docência e influenciado por um amigo, recém concluinte ginasial, prestei vestibular para Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) – Vitoria da Conquista\BA. O curso foi escolhido por dona Anísia que, ao folhear o catálogo de cursos oferecido pela Universidade, não titubeou em sugerir a Pedagogia e assim o fiz. Confesso que uma aprovação em uma universidade pública, aliás, nem tinha noção do que seria uma universidade, era, naquele momento, algo improvável em minhas pretensões.

Ainda assim, viajei a Vitória da Conquista\BA para participar do processo seletivo que aconteceria nos dias 8, 9 e 10 de fevereiro de 2004. Cheguei ao local de realização das provas, o então Centro Integrado de

Educação *Luiz* Navarro de Brito, com bastante tempo de antecedência do horário marcado para início do certame. Sempre muito cauteloso e com poucos hábitos urbanos, tive o cuidado de não pegar ônibus tal era o receio de que uma escolha equivocada da condução me levasse a um local distinto daquele onde realizaria as provas. Meses depois, durante uma das aulas, fui informado pela diretora da escola sobre minha aprovação no vestibular da UESB, ainda assim continuei incrédulo até que recebi o cartão notificando o êxito.

Meses depois de iniciar os estudos, mais exatamente em março de 2005, ingressei, via concurso público, na rede municipal de ensino de Vitória da Conquista, atuando nas séries iniciais, precisamente na 4ª série do Ensino Fundamental I (atual 5º ano). Permaneci por 18 meses na rede quanto solicitei exoneração para assumir funções na Secretaria de Segurança Pública da Bahia.

Durante o curso, sentimentos de angústia começaram a surgir. Estava vivendo um choque entre a prática educacional e a teoria a que estava tendo contato na universidade. Ambas pereciam não falar a mesma língua, não caminhavam em harmonia e não se completavam. Diante disso, algumas inquietações surgiram, por exemplo:

i) De que modo cumprir a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei Federal n. 9.394), aprovada em 20 de dezembro de 1996, que consolida em seu art. 22, assegurar a todos “a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores”, se as turmas eram compostas por quase 40 alunos, seguindo uma modalidade de ensino “ciclada” onde a aprovação era automática conforme a idade e não segundo a obtenção das habilidades e competências necessárias para tal?

ii) De que forma cumprir alguns dos objetivos gerais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a citar: “Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos”, (Brasil, 1997, p. 6), se muitas vezes não havia na sala cadeiras suficientes para todos os alunos, ou ainda, como levar o aluno a “questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação”, (Brasil, 1998, p. 8), utilizando um modelo de ensino tradicional, conteudista e fechado em si mesmo, sobretudo no ensino da matemática?

Estas inquietações me acompanharam mesmo durante o período de afastamento da docência. Quanto retornei, dessa vez especificamente com a disciplina de Matemática no Ensino Fundamental II (6º ao 8º ano) no Colégio Interativo Coeduc (atualmente uma cooperativa educacional de Professores de Vitória da Conquista), passei a buscar estratégias que permitissem uma maior interação disciplina\aluno\professor e, consequentemente, melhores níveis de aprendizagem. Este anseio, por um ensino interativo, permanece até hoje e me acompanha durante as aulas de Matemática, agora no Ensino Médio, desta mesma escola. Esse desejo de desenvolver uma metodologia de ensino mais substancial e ativa, menos burocrática e mecânica, que favoreça a participação e a contextualização tem me acompanhado até os dias atuais. Nesse sentido, tenho buscado práticas pedagógicas e atividades que insiram meus alunos num ambiente em que os conceitos abstratos da Matemática sejam experienciados de forma mais empírica.

O modelo explanação de conteúdo, resolução de exemplo e aplicação de exercícios de fixação não contemplam o grande potencial que a matemática possui no que se refere à capacidade de levar nossos alunos a pensar, refletir, questionar, comparar, articular, produzir e concluir. Não é esse o modelo mais adequado para favorecer o desenvolvimento do caráter investigativo, nato a nós seres humanos e que a escola parece constantemente tolher. Esta colocação está alinhada ao que escreve Ponte:

> As perspectivas absolutistas que encaram o conhecimento matemático como um edifício solidamente alicerçado, construído dedutiva e cumulativamente, qual paradigma do rigor absoluto, contribuíram para a cristalização de um currículo fortemente estruturado em torno dos conteúdos. Como consequência, considerava-se que o papel do professor era a simples exposição clara e rigorosa dos conceitos matemáticos e o treino dos alunos na resolução de exercícios repetitivos. Esta forma de apresentar a disciplina impõe aos alunos uma visão muito limitada e imperfeita da sua natureza (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; PONTURATO, 1998. p. 05)

A mim não é confortável ser um professor que apenas expõe de forma clara e rigorosa os conceitos matemáticos, primeiro que nem sempre se consegue ser claro e rigoroso, segundo, porque o modelo unilateral de ensino tem perdido espaço em meio a uma sociedade tão dinâmica e cíclica. Conforme Ponte, Oliveira, Cunha e Ponturato (1998), hoje o que se exige das pessoas é maior flexibilidade intelectual, capacidade de lidar com diferentes tipos de representações, capacidade de formular problemas, de modelar situações diversificadas e de avaliar criticamente os resultados obtidos usando diferentes metodologias e não apenas executar algoritmos ou procedimentos repetitivos.

A sociedade está em evolução permanente, assim como a própria matemática e o mesmo se pode dizer dos alunos. A escola, evidentemente, precisa acompanhar essas mudanças e se adaptar a esses novos anseios dos indivíduos. Nesse contexto, o ensino da Matemática deve desenvolver potencialidades que dê aos alunos competências e habilidades que lhes permitam compreender, interagir, modificar e contribuir com a sociedade como um todo. Essas potencialidades podem ser desenvolvidas quando os discentes se envolverem em momentos genuinamente matemáticos, momentos que favoreçam aspectos investigativos e interativos dando maior atenção aos processos de criação de saber e não simplesmente ao produto final, ou seja, é preciso redefinir o ensino de Matemática de tal modo que o aluno possa participar ativamente do processo de aprendizagem e não fique polarizado nas carteiras de onde costumam receber informações já processadas pelo professor.

Evidente que essa mudança não é fácil e requer melhor entendimento de vários elementos constituintes do processo de ensino, a concepção do papel do professore, aluno, currículo, espaço físico e do meio onde estão inseridos devem ser considerados na busca de uma educação de melhor qualidade, sobretudo, na Matemática. Diante deste contexto, surgem alguns questionamentos e reflexões: Como remodelar o ensino da matemática para que ele seja mais interativo? De que forma podemos diminuir a distância teoria prática? O que fazer para tornar as aulas mais atrativas e participativas? Quais as formas de se ministrar uma Matemática que tenha de fato significado para os alunos? Ou ainda, como criar um ambiente de aprendizagem em que nossos alunos possam utilizar a teoria e convencê-los da infinidade de aplicações e contribuições da matemática em nossa vida diária? E, principalmente, como fazer com que nossos alunos desenvolvam a curiosidade, senso investigativo, o desejo pelo saber matemático e a simpatia pela disciplina?

Atender a essas inquietações praticando um ensino tradicional e robotizado de Matemática é algo praticamente inalcançável. Daí a necessidade de mobilizar esforço no sentido de ressignificar a prática docente e buscar estratégias que possam viabilizar uma aprendizagem significativa. Foi nesse contexto que algumas possibilidades começaram a despontar, principalmente após ingresso no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), mais precisamente durante a aula da Disciplina Elaboração de Trabalho Monográfico, quando uma fala da Professora Dra. Maria Deusa me chamou a atenção: “investigação Matemática”. Logo nas primeiras leituras percebi que o tema tem ganhado evidência entres os educadores matemáticos e parece projetar um terreno fértil para bons resultados quanto ao ensino da disciplina. O principal ícone deste pensamento metodológico é o Professor Português da Universidade de Lisboa, Dr. João Pedro da Ponte.

E por que o tema me chamou a atenção? Nas palavras de Ponte:

> Na disciplina de matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.23)

Essa definição apresenta um olhar diferenciado para o ensino da Matemática, uma mudança metodológica que tira o aluno da extremidade final do processo de ensino e o coloca no meio das efervescências da produção do saber. É motivado por essa temática que surge a questão central deste trabalho: ***Quais as principais contribuições da Investigação Matemática (IM) no estudo das Funções reais de uma variável para alunos do 1° ano do Ensino Médio?***

Sei que aproximar essa questão de possíveis respostas requer estudo aprofundado dos fundamentos da Investigação Matemática e que serão necessárias mudanças significativas na estrutura das aulas de Matemática a que estamos acostumados ministrar. No entanto, estou esperançoso de que a inclusão do elemento investigativo nas aulas de Matemática criará situações desafiadoras, tanto para os alunos quanto para o professor e promoverá um ambiente de aprendizagem em que o espírito investigativo e exploratório será favorecido. Além disso, acredito que a Investigação Matemática representa uma metodologia capaz de criar situações que potencialize a capacidade reflexiva dos alunos, levando-os a conjecturar, analisar, registrar dados, confrontar ideias, opinar, defender hipóteses e construir conclusões amparadas nas observações e análises feitas a partir do problema proposto, ou seja, os discentes passam a ter maior autonomia durante o processo de aprendizagem e formulação do conhecimento. Nesse contexto, escolhi trabalhar o conteúdo Funções por se tratar de uma temática que ocupa boa parte do programa curricular de Matemática dos alunos da 1ª serie e, além disso, ser o mais adequado ao tipo de atividade investigativa que propus trabalhar, no caso, a observação e interpretação matemática de quatro experimentos.

Diante dessa contextualização e a partir desse questionamento traço os objetivos deste estudo, conforme se seguem.

1.2 Objetivos

1.2.1 Geral

- ✓ Analisar as principais contribuições da Investigação Matemática (IM), no estudo das Funções reais de uma variável para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

1.2.2 Específicos

- ✓ Proporcionar a construção do conceito de Função através de conjecturas e hipóteses levantadas a partir da observação de fenômenos experimentais;
- ✓ Investigar os benefícios de se utilizar a Investigação Matemática enquanto metodologia de ensino;
- ✓ Analisar os níveis de envolvimento e as dificuldades apresentados pelos alunos durante as atividades investigativas.
- ✓ Aproximar, por meio da Investigação Matemática, o conceito matemático de Função a fatos e experiências cotidianas.

- ✓ Promover uma maior participação dos alunos no próprio processo de ensino e aprendizagem de modo a melhorar os níveis de envolvimento e simpatia pela Matemática.

1.3 Os primeiros contatos com a matemática e as angústias.

A Matemática sempre me despertou curiosidade, achava interessante o caráter desafiador com o qual cada problema se apresentava no sentido de provocar a obtenção de uma solução correta. Chegar à resposta correta era, enquanto aluno, o objetivo principal e já me dava por satisfeito caso a tarefa fosse concluída com êxito. O receituário conteúdo-exemplo-exercício sempre foi a regra. Ficava atento às explicações e aos exemplos dados pelo professor para, no momento da resolução dos exercícios e avaliações, obter bons resultados. Sempre acertava os exercícios parecidos ou iguais àqueles que o professor exemplificava, mas se no problema aparecesse algum elemento novo, um raciocínio diferente dos modelos visto anteriormente, raramente eu os acertava. Não quero criminalizar a resolução de exercícios e o treino, nem negar o emprego do formalismo e da técnica, intrínsecas à boa Matemática, e sim, fazer um grifo do quão é improdutivo e pouco contribui com a aprendizagem a pura e simples utilização automatizada desse expediente. Neste ponto, considero a solução de exercício sob a mesma perspectiva de Echeverría & Pozo (1998, p.17),

> De forma sintética, podemos dizer que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas *sobreaprendidas* (ou seja, transformadas em rotinas automatizadas como consequência de uma pratica contínua). Limitando-nos a exercitar uma técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, podem ser resolvidas pelos caminhos ou meios habituais. (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p.17).

Essa sempre foi a rotina das minhas aulas de Matemática durante o Ensino Fundamental I e II e o primeiro ano do ensino Médio e acredito ser a regra da grande maioria de nossas escolas. Esta metodologia de ensino da Matemática a que tive contato não permitia uma análise mais generalizada e contextualizada da disciplina, sempre abordada de maneira fragmentada em conteúdos que, apesar de manter grande inter-relação, sempre foram e são tratados de maneira disjunta.

A esse problema, acrescenta-se a abordagem meramente abstrata com a qual se ministra as aulas, em regra, a disciplina é trabalhada conforme um receituário proposto pelo livro didático, com pouca ou nenhuma interação entre aluno\conteúdo\professor, tornando o processo de ensino e aprendizagem linear e dissociado da realidade fática da qual a Matemática é elemento de fundamental importância. Aliás, acredito que esse seja um problema macro do ensino dessa disciplina, geralmente, grande parte de nós professores, transmitimos aos nossos alunos uma Matemática compartimentada, despida de contextualização, desconexas dentro de seus próprios conceitos, mecânica, repetitiva e monótona. Qual professor de matemática, em sua trajetória docente, nunca ouviu a celebre pergunta: Em que vou usar este conteúdo em minha vida, professor? Este questionamento muitas vezes é respondido com a afirmação de que a Matemática está presente em tudo na nossa vida. No entanto, entre o questionamento do aluno e a afirmação generalizada que costumamos dar, existe uma lacuna enorme, um vácuo deixado pelo ensino meramente abstrato e descontextualizado com o qual se habituou ministrar a disciplina.

A pergunta revela ainda o descompasso entre a forma tradicional do ensino da Matemática e suas incontáveis aplicações no nosso dia a dia. Esse simples questionamento coloca o professor de Matemática, como bem sei, em embaraçosos esforços argumentativos na intenção de convencer o aluno do quão presente a Matemática está em nosso cotidiano. A grande maioria de nossos alunos assim como nós professores acreditamos e sabemos que a Matemática, bem como as demais áreas do conhecimento, tem papel fundamental no desenvolvimento social e tecnológico da humanidade, que os avanços alcançados até hoje são resultado de um conjunto associados de conhecimento acumulado e aperfeiçoado pelo homem, graças à sua incansável curiosidade e senso investigativo. Mas, quando observamos a Matemática ensinada na maioria das salas de aula de nossas escolas, percebemos um imperioso afastamento entre aquilo que se ensina e a grande relação desta disciplina com as situações cotidianas.

É evidente que percepção da Matemática da sala de aula, do ponto de vista do alunado, é fechada em si, restrita aos conteúdos, fórmulas, exercícios, aos exemplos, às avaliações e às notas. Para realçar essa afirmação, antecipo o resultado de um item constante do Questionário de Sondagem aplicado à turma do 1º Ano, no primeiro dia de aula em que os alunos foram questionados sobre a Matemática estudada na escola e 60% disseram que a disciplina não tem muita relação com o cotidiano, outros 20% entenderam fazer parte do dia a dia e que veem situações cotidianas relacionadas ao conteúdo. Aliás, neste último grupo estão os melhores alunos na disciplina. Os demais alunos responderam afirmaram que a Matemática é uma material muito difícil.

Essa constatação não é novidade, nós professores sabemos exatamente que precisamos criar substrato contextual daquilo que ensinamos, aliás, o discurso no meio educacional de que a escola deve aliar teoria e prática já é bem conhecido e faz parte do cotidiano argumentativo dos envolvidos na educação escolar. Porém, o que se vê na prática docente é um evidente descompasso entre os conteúdos ensinados dentro das salas de aula e suas possíveis manifestações e aplicações factuais. O alinhamento destes dois elementos (teoria e prática) ainda não é realidade e prevalece o modelo de explanação de conteúdo, resolução de exemplo e aplicação de exercícios e realização avaliações/provas. Esta receita não contempla o grande potencial que a matemática possui no que se refere à capacidade de levar nossos alunos a pensar, refletir, questionar, comparar, articular, produzir e concluir. Normalmente, a prática do ensino de Matemática, excluindo as poucas exceções, resume-se apenas ao verbo “reproduzir”. Isso, particularmente, gera incômodo enquanto professor de Matemática e vejo na Investigação Matemática um elemento inovador que pode realinhar minha prática docente de tal forma que favoreça aos meus discentes um ambiente em que o *aprender* e o *fazer* matemático se completem.

1.4 Organizações do trabalho

Buscando uma organização adequada e visando um melhor entendimento geral, este trabalho, foi dividido em cinco capítulos conforme descrito abaixo.

No capitulo introdutório, comento sobre as experiências escolares perpassando a trajetória discente até as primeiras experiências como professor, bem como as angústias e motivações que levaram à escolha do tema deste Trabalho. Além disso, fundamento os objetivos geral e específicos e apresento a questão basilar desta pesquisa.

No segundo capítulo apresento as bases teóricas da Investigação Matemática, suas principais caraterísticas e potencialidades para o ensino da matemática. As concepções de Exercício, problemas e atividade investigativas são discutidas, bem como o papel do professor e os mecanismos de avaliação dentro do contexto da Investigação Matemática.

O terceiro capítulo é dedicado aos aspectos metodológicos, nele apresento os elementos da pesquisa-intervenção, de abordagem qualitativa, além de especificar o ambiente de pesquisa e minuciar as etapas desenvolvidas no presente trabalho.

O quarto capítulo dediquei à análise e discussão dos resultados das atividades investigativas, sempre ajustando as colocações conforme a fundamentação teórica e buscando alinhamento com os objetivos central e específicos da pesquisa.

No quinto e último capítulo apresento as considerações finais, explicitando as impressões obtidas mediante a aplicação de atividades de perfil investigativo, enfatizando os pontos que julguei positivos e a dificuldades enfrentadas.

CAPÍTULO 2 – REFERENCIAL TEÓRICO

Nas últimas décadas estamos acompanhando mudanças significativas no sistema educacional. A escola não é mais o recinto destinado à população mais abastarda e o processo de democratização do ensino tem oportunizado uma educação de massa, generalizada e obrigatória a todos. Isso tem posto nas salas de aulas uma caricatura mais real da própria sociedade que agora se encontra mais representada nos ambientes escolares. Porém, esta nova realidade impõe à escola novos desafios à medida que uma representatividade mais real da sociedade implica adaptações que comportem o grande dinamismo com que esta se evolui. Evolução da qual a Matemática tem papel fundamental e aponta para necessidade de cidadãos mais ativos, participativos e que consigam acompanhar e se adaptar às novas situações e problemáticas sociais que, agora, são bem mais constantes que tempos antes.

Desse modo, uma sociedade bem mais dinâmica e interligada impõe ao ensino da Matemática outros desafios, sobretudo quanto ao desenvolvimento das potencialidades matemáticas dos alunos que passa pelo reforço da habilidade de investigar, explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, a capacidade de usar diversos métodos matemáticos para perceber e procurar soluções para situações novas e, ainda, adquirir confiança na sua própria capacidade de fazer Matemática (BROCARDO, 2002).

Diante disso, não parece razoável um ensino de Matemática pautado essencialmente nas técnicas para se realizar cálculos até porque as calculadoras e computadores, disponíveis para a grande maioria das pessoas, já os fazem com precisão e rapidez. Ministrar uma Matemática alinhada exclusivamente à realização de tarefas rotineiras parece desajustada das necessidades de uma sociedade que evolui rapidamente. Essa prática de ensinar Matemática deve dar lugar à prática de fazer Matemática permitindo que os alunos tenham oportunidade de “explorar tarefas de natureza exploratória e investigativa vivendo, ao seu nível de maturidade, o trabalho dos matemáticos profissionais” Brocardo (2002, p. 01). É evidente que o trabalho desenvolvido pelos profissionais da matemática envolve diversas questões e um grau de aprofundamento teórico muito grande, mas o espirito investigador e a curiosidade característicos desse trabalho podem ser explorados nas salas de aulas com o emprego de atividades apropriadas. Esse é o cenário que expõe a necessidade de mudanças nas metodologias do processo de ensino da matemática.

Nesse contexto, surgem teorias metodológicas que apontam para um fazer matemático diferente em sala de aula, dentre as quais, temos a metodologia da **Investigação Matemática** (IM) que ganha evidência enquanto elemento provedor de um ambiente escolar favorável à aprendizagem significativa, integrada e completa da disciplina Matemática. A temática, embrionada em Portugal na década de 80, tem como um de seus principais percursores, o professor Português João Pedro da Ponte que veem prestando grandes contribuições a essa linha de pesquisa em termo mundial. No Brasil, estudiosos como Tiago Emanuel Klüber, Paulo Wichnosk, Maria clara R. Frota têm produzido e publicado trabalhos relevantes sobre essa temática.

2.1 Investigação Matemática – Pressupostos Teóricos

Inicio com a afirmação do professor João Pedro da Ponte "Tradicionalmente, ensino e investigação são actividades distintas. O que o 'investigador' descobre ou inventa, o professor, noutro tempo e noutro contexto, ensina aos seus alunos", Ponte (2003b, p. 01). As palavras do pesquisador retratam bem a metodologia de ensino preponderante na maioria de nossas escolas. A prática docente é marcada por rotinas nas quais os conteúdos trabalhados são aqueles sugeridos pelo livro didático adotado e o método de ensino se restringe a aulas expositivas, a exercícios exemplificativos e a atividades de fixação que serão utilizados como modelos para as avaliações de aprendizagem. No ensino da Matemática essa característica é mais flagrante e mostra claramente como os "nós" de uma educação tradicional, pautada na memorização e mecanização, estão presentes no dia a dia das aulas dessa disciplna.

Nesse contexto, como bem aponta Chagas (2004, p. 244) "a ênfase na disciplina de Matemática é dada ao 'é assim que se faz' ao invés de 'pense um pouco sobre isso' ou 'que relação poderá existir entre este problema e os conhecimentos que você possui, que já foram anteriormente adquiridos por você'?" Essa metodologia tradicional de ensino, além de não ter apresentado resultados significativos, subestima a capacidade mental de nossos alunos, privando-os de desenvolverem suas potencialidades cognitivas, suas capacidades e habilidades. Devemos estar cientes de que o ensino da Matemática, conforme lembra Chaves (2004), deve ser algo mais do que mera transmissão da matéria, deve ser algo mais do que mera cópia dos exercícios resolvidos pelo professor no quadro-negro, deve ser algo mais do que mera memorização.

É difícil contradizer o contexto colocado acima, essa rotina no ensino da Matemática é evidente e tem rendido resultados insatisfatórios do ponto de vista da aprendizagem e dificultando a obtenção de habilidades e competências propostas a esta disciplina. Em novembro de 2015, o Instituto

Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep) realizou a 13ª Edição do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e os números do relatório emitido mostra a dificuldade que o país enfrenta, principalmente no ensino médio. No que pese os avanços no ensino fundamental e a pequena melhora no nível de aprendizagem dos alunos do ensino médio em Português, na Matemática, os resultados dos alunos secundaristas apontam no sentido contrário com uma diminuição da nota média que passou de 270, em 2013, para 267, em 2015 (SAEB, 2015).

Algo está errado com o ensino escolar, principalmente quanto à Matemática. Evidente que as causas para este lastimoso quadro são muitas e algumas são apontadas por Chagas:

> - inadequação do ensino de matemática em relação ao conteúdo, à metodologia de trabalho e ao ambiente em que se encontra inserido o aluno em questão;
> - "má" formação de professores, ou seja, falta de capacitação docente;
> - programas de matemática não flexíveis e muitas vezes baseados em modelos de outros países e, consequentemente, são modelos que muitas vezes não representam a realidade sócio-econômica do país;
> - falta de compreensão e domínio dos pré-requisitos fundamentais que ajudariam este estudante a obter um bom desenvolvimento nas aulas de matemática;
> - desvalorização sócio-econômica dos professores. (CHAGAS, 2004, P. 241)

Dentre os problemas citados, a inadequação do ensino da Matemática, no que se refere aos conteúdos, à metodologia e ao ambiente no qual o aluno se encontra inserido tem contribuído substancialmente para um distanciamento entre discente e uma aprendizagem satisfatória dessa disciplina.

Segundo Ponte (2002, p. 2) "o ensino é mais que uma atividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas. Trata-se, simultaneamente, de uma atividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos". No mesmo sentido Braumann escreve:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detectivesca" indispensável à verdadeira

> fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002, p.5).

Consultando alguns documentos oficiais que regulam, orientam e normatizam a educação brasileira, foram encontrados vários registros que sugerem uma metodologia de ensino mais flexiva, interativa e participativa. Enfatizando o papel relevante da integração do aluno no seu próprio processo de aprendizagem tornando-o agente construtor do seu próprio saber. Os parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Fundamental já evidenciam essa perspectiva e os PCNs do Ensino Médio expressam claramente o aspecto formativo interativo da Matemática, nesse nível de ensino.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria. Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (BRASIL , 2000, p. 40)

Os recortes acima indicam claramente a trilogia que o ensino da Matemática deve assumir, é preciso incrementar à metodologia do ensino da Matemática, esse elemento que tire o aluno da extremidade do processo formativo e o insira na engrenagem produtiva do saber . É necessário redefinir a prática da sala de aula que equivocadamente entende o conteúdo da disciplina Matemática como algo acabado e ver o aluno como um livro em branco onde se tenta imprimir uma aprendizagem estática, de pouco proveito prático e, como se tem visto, com muitas falhas e deficiências. É nesse cenário que a Investigação Matemática tem ganhado espaço e se apresentado como uma boa alternativa metodológica para um melhor ensino dessa disciplina e consequentemente uma aprendizagem mais significativa. Passa-se então a entender melhor essa temática e relacioná-la às alegações anteriores que clamam por um ensino matemático mais ativo e substancial.

Em seu livro Investigação Matemática na sala de aula, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.13) esclarecem o sentido do termo **investigar**: “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito próximo, senão equivalente, temos em português os termos ‘pesquisar’ e ‘inquirir’ ” Os autores afirmam ainda que sob o aspecto matemático, “a investigação vista pelos matemáticos profissionais procura “[...] descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” . Já sob o aspecto mais didático e voltado para o alunado da educação Básica, temos que:

> As investigações matemáticas são parte do que alguns autores designam por “actividade matemática”, o que corresponde a identificar *aprender* Matemática com *fazer* Matemática. Nesta perspectiva, esta ciência é encarada mais como uma forma de gerar conhecimento do que como um corpo de conhecimentos. (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; PONTURATO, 1998, p. 8).

Ainda no objetivo de cristalizar o conceito de Investigação Matemática segue as claras palavras de WICHNOSKI e KLÜBER.

> Pensando a Investigação Matemática no âmbito da Educação Matemática, pode-se entendê-la como sendo uma metodologia de ensino, que busca, por meio de atividades investigativas, conduzir o aluno a pensar e construir o conhecimento de maneira um pouco mais autônoma criando situações que o leve a raciocinar e entender o novo conceito (WICHNOSKI, KLÜBER, 2015, p. 3).

Nesse sentido a Investigação Matemática se apresenta como uma ferramenta promissora no ensino da Matemática uma vez que atrai o aluno para a efervescência do processo de ensino e aprendizagem. As atividades investigativas propõem ao aluno a possibilidade de manusear estratégias próprias de resolução de problemas, dá a ele a oportunidade de criar caminhos, levantar hipóteses que podem ser confirmadas ou refutadas, o importante são as descobertas e as construções feitas ao longo da resolução do problema posto. Não há, a princípio, uma preocupação com o certo ou errado, com a aplicação rigorosa de um determinado procedimento no sentido de obter a solução para determinado problema.

A Investigação Matemática estimula e provoca os alunos no sentido de que estes levantem hipóteses e criem estratégias que possam ser matematicamente justificáveis. É durante esse processo interativo que o aluno terá contato com o verdadeiro trabalho realizado pelos matemáticos profissionais e cientista, ainda que em um nível inferior de complexidade. Se compararmos, por exemplo, a empreitada de Leonhard Euler que em 1736 encontrou a solução para o desafio das sete pontes de Königsberg e a provocação proposta a um jovem estudante primário na qual deveria dizer as dimensões de uma caixa d'água circular que comportasse 120 mil litros de volume interno, teríamos, certamente, muitos elementos convergentes no que diz respeito ao trabalho intelectual depreendido pelos dois. Guardadas as proporções no que se refere á maturidade matemática de ambos e ao grau de complexidade entre os problemas, os dois casos se aproximam pelo caráter investigativo, pela curiosidade e pelo envolvimento que os dois estudiosos dispensaram na busca das soluções.

Essa perspectiva investigativa em Educação Matemática caracteriza-se pelo estilo conjectura-teste-demonstração em que o aluno extrai informações, realiza testes de validação sobre estas informações, refina-as se necessário e, por fim, demonstra e comprova os resultados obtidos, conforme depreendido de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). Ressalte-se que esse aspecto investigativo/participativo da Investigação Matemática se apresenta como forte instrumento para o ensino da Matemática já que promove momentos de estudo genuinamente científicos tão importantes ao desenvolvimento da ciência e da aprendizagem.

Além disso, o elemento investigativo inserido dentro da prática das salas de aula desmonta os modelos preestabelecidos de ensino da matemática baseado em uma rotina composta de aulas expositivas, exercício de fixação e avaliações padronizadas. O aspecto científico das atividades investigativas fica evidente quando Ponte, Brocardo e Oliveira nos diz sobre os quatro momentos principais de uma investigação matemática. São eles:

> 1) Exploração e formulação de questões a serem respondidas,
> 2) Formulação de conjecturas,
> 3) Elaboração Testagem e reformulação,
> 4) Justificação e validação dos resultados (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016, p. 20).

Estes momentos podem ainda incluir diversas atividades como sugere o quadro abaixo:

Quadro 1: Momentos da Investigação Matemática

Exploração e formulação de	▪ Reconhecer uma situação

questões	problemática ▪ Explorar a situação problemática ▪ Formular questões
Conjecturas	▪ Organizar dados ▪ Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	▪ Realizar testes ▪ Refiar uma conjectura
Justificação e avaliação	▪ Justificar uma conjectura ▪ Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 20).

Ao se aproximar do método cientifico a Investigação Matemática propicia uma série de oportunidades de aprendizagem, coloca o aluno efetivamente dentro do processo de elaboração do conhecimento. Ao identificar um problema, levantar hipotéticas soluções, experimentá-las ou reformulá-las e obter (ou não) resultados convincentes os alunos percorrem todo o processo que a ciência se apropria para produzir conhecimento. É exatamente durante essa jornada que os discentes se deparam com situações inquietantes, desafiadoras e inesperadas que os intuirá no espirito investigativo, despertando a curiosidade e tornando o processo de aprendizagem mais prazeroso, envolvente e substancial.

Devemos mencionar ainda que a Investigação Matemática dá aos alunos mais autonomia e os colocam, salvaguardadas as proporções, em momentos de produção matemática similares aos vivenciados pelos matemáticos profissionais, o que os estimula a descobrir o novo (ainda que o novo já seja bem conhecido). Para mais, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 23), a Investigação Matemática “ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa”. Os discentes são convidados a obter respostas para um determinado problema e para isso formulam questões, criam conjeturas, traçam estratégias, realizam testes, provam conclusões, reavaliam possíveis erros e reconsideram os melhores caminhos pra se chegar às soluções mais precisas e coerentes com a boa técnica matemática. É essa dinâmica reflexiva que revela o caráter produtivo e significativo das atividades investigativas.

2.2 Exercícios, problemas e tarefas investigativas.

Tentar circunscrever os limites conceituais de exercício, problemas e atividades investigativas pareceu, diante das várias leituras, um desafio insolúvel. Primeiro porque os conceitos se mostram como contínuos uns dos outros e segundo porque eles podem ser diferentes conforme as especificidades de cada indivíduo que se apresenta frente a um desses três termos, (CUNHA, 2000).

No que pese a dificuldade, considero significativo para este trabalho clarear algumas características que possam demarcar os três conceitos sob o aspecto do ensino de matemática. Para tal, é importante caracterizar o termo "tarefa" que segundo Cunha (2000):

> A palavra 'tarefa' surge como o termo escolhido para traduzir o termo inglês task. Embora o termo 'tarefa' seja deste há muito corrente em psicologia da aprendizagem, alguns autores da educação matemática usaram durante muito tempo a palavra 'actividade' para designar a mesma ideia. No entanto, parece ser mais adequado dizer que a 'tarefa' é a proposta de trabalho que o professor apresenta aos seus alunos, que, pelo seu lado, se envolvem em 'actividade' matemática para a poderem resolver (CUNHA, 2000, p.03)

Assim, entende-se por tarefa a proposta de trabalho e de atividade as ações de quem as propõem realizar. Dessa maneira, os exercícios, os problemas e as tarefas investigativas são elementos que compõem o conjunto de propostas educativas aplicadas pelo professor.

Dentre as tarefas, o exercício é, certamente, o mais utilizado pelos professores de matemática durante suas aulas e representa uma marca do ensino dessa disciplina. Resolver um exercício implica basicamente o domínio e o emprego correto de procedimentos pré-concebidos e seu grau de dificuldade depende da quantidade de procedimentos necessários à sua resolução, dos níveis de instrumentalização do desafiante ou ambos, nas palavras de Echeverría & Pozo:

> De forma sintética, podemos dizer que a realização de exercícios se baseia no uso de habilidades ou técnicas *sobreaprendidas* (ou seja, transformadas em rotinas automatizadas corno conseqüência de urna prática contínua). Limitamo-nos a exercitar uma técnica quando enfrentamos situações ou tarefas já conhecidas, que não representam nada de novo e que, portanto, podem ser resolvidas pelos caminhos ou meios habituais (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 16)

Com relação aos problemas, podemos dizer que são tarefas que exigem um processo de resolução mais laboroso, requer maior reflexão e tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem tomados. São situações mais abertas que cobram dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas e seu próprio conhecimento. Nesse sentido, um problema, conforme a definição clássica citada em Echeverría & Pozo, é "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução" (LESTER, 1983, apud ECHEVERRÍA & POZO, 1998). Essa definição que, segundo os autores, é a que tem maior consenso permite diferenciar um problema de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por outro lado, a resolução de um problema, permite ao aluno aplicar a sua aprendizagem criativamente, numa nova situação, mas o professor ainda mantém muito do seu controle sobre o conteúdo e o modo de ensinar (ERNEST, 1996). Esse controle, conforme será visto, é uma das características que diferem a resolução de problemas de uma tarefa investigativa.

As tarefa investigativa, ou “atividade investigativa” ou ainda “ investigação matemática” conforme sugerem Ponte, Oliveira, Cunha e Ponturato (1998) é um conceito muito próximo da resolução de problemas. Os dois termos costumam ser usados de modo indistintos, pois ambos se referem a processos matemáticos abertos e complexos com forte problematização. No entanto, algumas caraterísticas são especificas e demarcam certa distinção entres os dois conceitos. Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado esclarecem essas características:

> A resolução de problemas envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real. “Actividades investigativas” ou

> “investigações matemáticas” designam, no contexto deste projecto, um tipo de actividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar. São actividades de cunho muito aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos (PONTE, OLIVEIRA, CUNHA, SEGURADO,1998, p. 9)

Outro importante aspecto que as distinguem diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto que na resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente especificada ao aluno, na atividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas, necessitando ser trabalhadas, tornadas mais precisas e transformadas em questões concretas pelo próprio aluno. Corrobora com essa distinção Santos (2013) ao destacar que:

> Desta forma na Resolução de Problemas o professor traz o problema pronto para o aluno, assim o aluno deve encontrar um caminho para resolver o problema com os conhecimentos já existentes, já nas atividades investigativas o professor escolhe uma situação de partida e o aluno que formula o problema de uma dada situação e assim tenta resolver o problema de um modo livre, ou seja, pelo seu próprio caminho (SANTOS, 2013, p. 3).

As atividades de investigação envolvem assim um componente essencial de formulação de problemas, etapa normalmente cumprida pelo professor na resolução de um problema. Dito de outra forma, é elemento constituinte das atividades investigativas a própria criação de problemas, isso permite que os alunos levantem suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir.

No quadro abaixo, apresentado por Pontes (2003b), o autor traz uma comparação entres três tarefas matemáticas onde podemos notar as diferenças entre elas.

Figura 1: Exemplos de tarefas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica: a) $\frac{6}{12} =$ b) $\frac{3 \times (10-7)}{17-2} =$ c) $\frac{\frac{20}{18-9}}{\frac{(15-10)\times 2}{3}} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade. 2. Vê se encontras regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Ponte (2003b, p. 4)

Pelos exemplos, é possível notar bem a diferença entre as três tarefas, percebe-se claramente que as tarefas investigativas são propícias a uma maior reflexão por parte de quem as enfrenta. Um aluno diante de uma atividade investigativa será convidado a pensar em estratégias que lhes forneçam respostas convincentes e matematicamente sustentáveis, enquanto que no problema, o aluno foi direcionado a obter uma solução que aparentemente existe. Na atividade investigativa não é possível afirmar que existe regularidade na tabuada dos nove, podemos levantar uma hipótese e julgar existir, mas essa comprovação será possível depois de analisar os dados e investigar as combinações que podem revelar tal regularidade.

Uma ultima consideração diz respeito à distinção entre atividades investigativas e Investigação Matemática. Os conceitos podem parecer indistintos, mas esta se refere à uma proposta metodologia em que se propõe desenvolver procedimentos de ensino mais abertos e participativos, dentre os quais temos as atividades investigativas que, como relatado, permite uma maior interação do aluno com posturas mais investigativas diante do desafio estudado.

Cumpre lembrar, que as atividades que apresentamos aos alunos durante a realização desta pesquisa preservou as características de uma investigação matemática. Sugerimos a eles atividades extremamente abertas onde tiveram a liberdade e autonomia de pensar as melhores estratégias para solucionar o problema central. Procuramos seguir as palavras de Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado segundo as quais,

> numa investigação parte se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar. A partir daí formulam-se questões, para as quais se procura fazer conjecturas. O teste destas conjecturas e a recolha de mais dados pode levar à formulação de novas conjecturas ou à confirmação das conjecturas iniciais. Neste processo podem surgir também novas questões a investigar, (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; PONTURATO, 1998, p. 10).

Procurou-se preservar esse procedimento, característico da Investigação Matemática, durante a realização das quatro atividades investigativas aplicadas no contexto desta pesquisa.

2.3 O papel do professor e a Investigação Matemática.

O contexto da Investigação Matemática impõe ao professor vários desafios. Um deles está diretamente ligado à sua rotina docente muitas vezes baseada em aulas expositivas das quais as atividades investigativas não encontraram muito amparo. Como vimos, a Metodologia da Investigação Matemática tem uma perspectiva de ensino inovadora, mais aberta, interativa, dinâmica e participativa e nesse cenário o papel do professor também requer adaptações e o torna mais importante do que normalmente era. No entanto, alguns autores alertam a falta de formação adequada dos professores no sentido de inicia-los em atividades investigativas. No mesmo sentido, Ponte acrescenta que

> De um modo geral, os candidatos a professores do curso de formação inicial, tanto das escolas superiores de educação como das universidades não parecem ter uma formação matemática adequada para realizarem autonomamente pequenas investigações matemáticas (PONTE. 2003a, p. 45).

As considerações feitas pelos autores remetem à realidade Portuguesa. No entanto, em nível de Brasil, a situação é similar senão mais latente, conforme depreendemos das palavras de Wichnoski & Klüber

> A formação dos professores e dos futuros professores de matemática, à luz da IM, é uma questão que, apesar da sua grande importância, tem sido pouco discutida na comunidade de educação matemática brasileira, principalmente devido à sua recente emergência, (WICHNOSKI & KLÜBER, 2015b, p. 107).

Ainda, segundo os autores, as práticas relacionadas à IM “nas poucas tentativas em que isso ocorre, geralmente, os sujeitos envolvidos estudam a teoria e, posteriormente, realizam algumas práticas isoladas”,Wichnoski & Klüber (2015b, p. 107). Isso é, segundo os autores, uma prática arriscada, pois carece de uma fundamentação geral e mais aprofundada a respeito do tema no que se refere à formação profissional do professor.

Não resta dúvida de que acrescentar à prática docente atividades inovadoras e diferenciadas, visando uma melhor aprendizagem, é sempre pertinente, no entanto, em se tratando de atividades investigativas, é fundamental que o professor conheça a dimensão do conceito da Metodologia Investigativa. Fora dessa compreensão corremos o risco de camuflar atividades convencionais dando a elas roupagem de investigativa. Além disso, ações pontuais são insuficientes para assegurar ao professor de matemática em formação inicial assumir a perspectiva investigativa em suas aulas.

Essa constatação foi observada por Wichnoski & Klüber (2015b) ao analisar prática de ensino envolvendo a Investigação Matemática ocorrida na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado II, a qual compõe a grade curricular do curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, campus de Cascavel. Segundo eles,

> práticas isoladas, sem um preparo maior, são ineficientes tanto para formar um professor investigador, quanto para formar um aluno investigador. Mais do que ineficientes, elas podem até ser prejudiciais, uma vez que tendem a ser extremamente negativas inicialmente, tornando-se desmotivadoras. (WICHNOSKI & KLÜBER, 2015b, p. 124).

Presume-se que os problemas apontados serão equacionados à medida que a Investigação Matemática se firmar enquanto metodologia de ensino promissora para a educação escolar. As Mudanças latentes atualmente observadas na concepção acerca do que é ensinar Matemática implicarão melhor ajuste dos currículos e da prática docente e o professor será convidado a refletir sobre sua própria postura, ressignificar sua atuação e assumir um papel ativo e investigador. Evidente que os bons resultados ligados à IM não passam apenas pela figura do professor, como bem lembra Wichnoski & Klüber (2015b, p. 124), “é preciso levar em consideração não somente os aspectos que competem ao professor que irá conduzir a prática, mas também aqueles inerentes aos alunos, bem como aspectos conceituais, sociais e culturais do local aonde a prática acontecerá".

Dentre esses aspectos, o professor tem um papel fundamental, principalmente quando acrescenta em seu currículo aspectos da Investigação Matemática. Ponte, Oliveira, Brunheira e Varandas (1999) lembram que o Professor assume vários papéis no decurso da realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, o primeiro deles é criar questões que desafiem os alunos e cuja solução não seja imediata. Elaborar questões assim não é fácil e requer do professor sensibilidade para dosar o grau de dificuldade da atividade e os níveis de informação que passará ao aluno. Sobre isso esclarece Ponte et al,

> Se a questão for considerada por eles como demasiado difícil, é natural que se sintam intimidados e não se disponham a trabalhar nela. Se for por eles considerada como demasiado fácil, é encarada como maçadora e desinteressante. Se o professor der informação a menos, os alunos podem sentir-se "perdidos" e sem saber por onde começar. Se der informação a mais, pode proporcionar pistas desnecessárias, que distraem os alunos do que realmente interessa. Se der a informação estritamente necessária, sem qualquer ambiguidade, dá indirectamente pistas para a resolução da tarefa (PONTE; OLIVEIRA; BRUNHEIRA & VARANDAS 1999, p. 11).

Diante disso, o professor enfrenta múltiplos dilemas e o desenvolvimento das atividades investigativas pode ter de variar de momento para momento, de turma para turma ou mesmo de aluno para aluno. Essa dificuldade, no entanto, abre possibilidade para que o professor continue a desafiar os alunos durante todo o processo investigativo e não apenas no arrancar da atividade. É no desenrolar dos trabalhos que o professor perceberá as necessidades dos alunos e deverá tomar providências no sentido de incentivá-los na investigação.

Avaliar o progresso dos alunos durante a realização de atividades investigativas é outro importante papel exercido pelo professor, é fundamental que, conforme depreende de Ponte, Oliveira, Brunheira & Varandas (1999, p. 13), "no decorrer do trabalho dos alunos, o professor tem de saber se eles compreendem a tarefa proposta, se estão a formular questões e conjecturas, se já as testaram, se são capazes de justificar os seus resultados". Além disso, é preciso ficar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos quanto à compreensão de conceitos importantes relacionadas à atividade desenvolvida. Essa avaliação permite ao professor adotar decisões que vão desde no sentido de prolongar por mais tempo o trabalho ou mesmo avançar para outros momentos da aula.

Outro papel relevante atribuído ao professor é raciocinar matematicamente durante o desenvolvimento da Investigação Matemática, Ponte el al realça e esclarece essa característica ao afirmar que:

> Por muito bem que o professor tenha preparado a aula, podem sempre surgir novas questões matemáticas em que ele ainda não pensou, especialmente se a situação é verdadeiramente aberta e estimulante. Neste caso, pode acabar por se envolver, em frente dos seus alunos, em raciocínio matemático ((PONTE; OLIVEIRA; BRUNHEIRA & VARANDAS 1999, p. 14)

A possibilidade de o professor envolver-se no trabalho investigativo é iminente, pois estamos diante de atividades abertas cuja solução não se sabe, além disso, muitas situações inesperadas podem aparecer o que exigirá do docente uma postura também investigativa. Como foi afirmado, em uma aula investigativa o ponto de chegada não está bem delimitado e o mais salutar é o percurso no qual muitas oportunidades de aprendizagem aparecem, dentre elas, temos as situações que exigem mudança no rumo das hipóteses e ajustes no procedimento.

Finalmente, cabe ao professor o papel de promover a reflexão dos alunos. No decorrer da realização de uma atividade investigativa é importante que os discentes relacionem o trabalho que estão fazendo com o conhecimento que já possam dominar comparando os elementos matemáticos presentes. Essa relação é fundamental ao desenvolvimento de posturas ativas por parte dos alunos uma vez que quando estão diante de investigações matemáticas eles precisam buscar estratégias inovadoras para solucionar o problema, essas estratégias, por sua vez, exigem pensamento matemático reflexivo no sentido de utilizar conhecimento previamente consolidado em uma situação desconhecida e aberta. Ponte, Oliveira, Brunheira & Varandas (1999, p. 22) ressaltam que “os momentos de reflexão e apreciação do trabalho realizado desempenham um papel importante no processo de ensino-aprendizagem e também nas actividades de investigação”. Isso requer que o professor proporcione aos alunos oportunidades adequadas, colocando-lhes questões apropriadas e fomentando a sua capacidade de argumentação e reflexão.

Diante do exposto, é possível reconhecer que o papel desempenhado pelo professor é estratégico e fundamental em qualquer proposta de ensino, sobretudo na Investigação Matemática, pois, conforme acrescenta Fonseca, em atividades assim,

> a variedade de processos em que os alunos se podem envolver, bem como o seu grau de complexidade e até de imprevisibilidade, exigem do professor uma preparação cuidada que vai para além da tarefa que propõe aos alunos, Ou seja, torna-se também necessária uma atitude por parte do professor que deve ser, também ela, de carácter investigativo e uma reflexão sobre os objectivos que se pretendem atingir com a realização de actividades de investigação (FONSECA, 1999, p. 9).

Sendo assim, a realização de atividades de investigação na aula de Matemática requer do professor um preparo significativo das aulas e domínio claro dos objetivos ligados à Investigação Matemática. É necessário ainda, uma mudança no reconhecimento de sua própria postura docente que nesse caso deixa de ser apenas um transmissor de informação e assume papel ativo dentro do processo de aprendizagem.

Por outro lado, carecemos de estudo mais aprofundado e de formação mais bem estruturada acerca do tema Investigação Matemática. Essa abordagem, conforme relatado, tem sido pulverizada pelo Brasil por meio de experiências pontuais o que ainda não faz parte da estrutura curricular da formação de professores. Portanto, antes de modificar a prática, é necessário modificar os projetos voltados à formação inicial de professores, ajustando-os às novas concepções acerca do que é ensinar matemática, e acerca do que é aprender matemática, bem como mudar a forma de como a Investigação Matemática, está sendo apresentada aos professores.

2.4 Avaliações no contexto da Investigação Matemática

As investigações matemáticas são atividades de aprendizagem, e como tal, deve haver avaliação, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). Essa avaliação, no entanto, deve ser diferenciada adequando-se as particularidades dessas atividades que, como vimos, são abertas e voltadas mais para o processo que para o resultado final propriamente dito. Nesse caso, os instrumentos avaliativos devem considerar todo o desenvolvimento das atividades acompanhando o progresso dos alunos de tal forma a identificar se os objetivos da atividade então sendo alcançados ou não. Sobre esses objetivos, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) esclarece que as investigações em Matemática devem levar o aluno a usar o conhecimento matemático na resolução da tarefa proposta, desenvolver a capacidade de investigar e desenvolver o gosto pelo trabalho investigativo. Para isso, o professor dispõe de instrumentos avaliativos de natureza oral ou escrito que podem ser usados quer os alunos trabalhem em grupo ou individualmente.

Um dos instrumentos que o professor pode utilizar é o relatório escrito que, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.109) "é uma produção escrita, realizada por um aluno ou por um grupo de alunos, tendo em vista apresentar um trabalho previamente desenvolvido". No relatório, o professor pode sugerir aos alunos uma reflexão sobre todo o processo desenvolvido até se chegar à conclusão do trabalho, aspectos como a organização dos dados, as conjecturas provadas ou não, os procedimentos adotados, as dificuldades enfrentadas etc, podem ser explorados nos relatórios, isso permitirá ao professor conhecer não apenas o resultado final, mas sim todo o processo investigativo desenvolvido pelo aluno.

Outra opção que o professor pode usar como instrumento de avaliação é a observação informal dos alunos durante a realização da tarefa. A partir dessa observação, é possível, conforme afirma Ponte,

> recolher muita informação sobre as atitudes dos alunos, sobre o modo como eles mobilizam os conhecimentos matemáticos formais ou informais e sobre o seu entendimento do que é uma investigação, do seu papel na respectiva realização e da sua capacidade em leva-la a bom termo (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016, p. 124).

A observação, de maneira geral, é uma ferramenta fundamental na prática docente, é nesse momento que o professor tem a oportunidade de identificar potencialidades e dificuldades dos alunos frente às atividades desenvolvidas, perceber o conhecimento matemático e a forma como ele está sendo utilizado, acompanhar as estratégias adotadas para solucionar os problemas. Além disso, conforme esclarece Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 125) “Ao observar, o professor não tem de se limitar a uma atitude passiva, pelo contrário, pode fazer perguntas aos alunos de modo a perceber melhor o que eles estão fazendo e a forma como estão pensando”. A observação, portanto, é uma boa ferramenta avaliativa e fornece meios para analisar o modo como os alunos reagem às atividades investigativas, são essas informações ajudarão o professor a balizar sua pratica, reafirmar os objetivo e reestruturar as atividades, conforme seja necessário.

O terceiro mecanismo avaliativo disponível ao professor são as apresentações orais. Essa apresentação constitui, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 125) “uma situação de avaliação e também de aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de argumentação”. Muitos elementos podem ser observados durante as apresentações orais, tais como a compreensão do processo investigativo, os processos de raciocínio, as estratégias adotadas, uso de conceitos, a competência de cálculo e a capacidade de comunicação (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016).

Diante do que foi exposto, vale ressaltar a importância de se avaliar as atividades investigativas em suas múltiplas possibilidades, o professor possui várias possibilidades de acompanhar o trabalho dos alunos combinando os instrumentos avaliativos conforme a necessidade. O importante é que os alunos saibam que serão avaliados como em qualquer outra atividade desenvolvida. É preciso também que eles percebam que o processo avaliativo é feito de forma processual e durante toda a realização dos trabalhos, não é apenas o resultado final que será considerado, como habitualmente estão acostumados, e sim todo o desenvolvimento das investigações.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA

3.1 Aspectos Teóricos da Metodologia

A pesquisa é certamente a coluna vertebral da produção científica. É ela que mobiliza esforços no sentido de resolver problemas postos, cujas possíveis respostas permitam compreender melhor a realidade, apontar mudanças e sugerir novas inquietações. Para tanto, é fundamental trilhar processos bem definidos, ter rigor e ser obediente a procedimentos metodológicos adequados. São esses alguns dos elementos que validam e dão credibilidade aos resultados obtidos pelo pesquisador. Antes de prosseguir é necessário esclarecer o significado de pesquisa dentro do universo cientifico que nas palavras de Gil,(2010, p . 02), é:

> [...] procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados.

A pesquisa, portanto, se inicia com uma pergunta, uma dúvida, uma inquietação para a qual se busca resposta. Os motivos que levam à realização de uma pesquisa podem ser vários, desde aqueles de ordem prática aos de mero conhecimento pessoal. Nesse trabalho, o motivo maior da pesquisa está relacionado à baixa aprendizagem em relação à Matemática que reflete em grande aversão dos alunos pela disciplina. Isso revela a necessidade de se analisar estratégias de ensino mais eficientes, prazerosas e interativas. Nesse ponto, pretendemos avaliar as contribuições da Metodologia da Investigação Matemática no processo de ensino e aprendizagem, especificamente quanto ao ensino de Funções de uma variável real. As razões que mobilizam a presente pesquisa, portanto, são de ordem prática cujo objetivo é conhecer e aplicar estratégias pedagógicas mais eficaz e substancial no que se refere à aprendizagem matemática dos alunos.

Nesse sentido, utilizar uma nova modalidade metodológica de ensino e acompanhar seus efeitos, do ponto de vista da aprendizagem, requer conhecer a realidade da sala de aula, as dificuldades enfrentadas pelos alunos, suas angústias, aspirações, potencialidades e necessidades, implicando maior aproximação do pesquisador com o ambiente natural desses discentes.

Desse modo, é preciso compreender o universo como alunos veem a Matemática para poder formular estratégias que melhorem sua compreensão e efetivem seu conhecimento sobre determinado tema ou conteúdo. Diante disso, a abordagem qualitativa mostra-se a mais adequada ao enfrentamento do problema posto pela presente pesquisa já que, conforme Prodanov (2013, p. 70) “a pesquisa qualitativa considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números*".*

Sendo assim, realizar uma pesquisa usando a abordagem qualitativa é o melhor caminho para se compreender o processo de ensino e aprendizagem, que é complexo, envolve muitas variáveis, tanto de ordem subjetiva como de aspectos empíricos. Além disso, a abordagem qualitativa apresenta maior sensibilidade a estas questões, pois:

> Ela se ocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, dos motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAY0, 2002, p 21 - 22).

Ainda, segundo Borba (2004, p. 2) a pesquisa qualitativa:

> [...] prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida[..],

Outra característica da abordagem qualitativa, é não limitar o olhar investigativo apenas para a questão central, uma vez que o caminho percorrido para se chegar a tal destino pode ser tão fecundo quanto o resultado ou produto obtidos. Além disso, na abordagem qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de sua pesquisa. Na pesquisa realizada acumulo as funções de professor e pesquisador, participando ativa e presencialmente de todas as atividades planejadas, mediando, opinando, ouvindo, sugerindo e interagindo com o grupo de alunos com objetivo específico de modificar uma realidade adversa ao ensino da Matemática. Por conta desse papel participativo, esse trabalho, no que se refere ao aspecto procedimental, se enquadra como uma pesquisa- intervenção.

A escolha por um pesquisa-intervenção se deu em função do objetivo principal da pesquisa, analisar as contribuições de uma metodologia de ensino baseada na Investigação Matemática, tendo como cenário o ambiente natural da sala de aula. Portanto, é na condição de pesquisador e professor inserido dentro do próprio objeto de estudo que as atividades investigativas foram desenvolvidas. Esse contato com o objeto e a presença no ambiente de estudo são necessários para intervir e modificar a prática visando melhorar a aprendizagem dos discentes.

Com base nisso, é possível dizer que para modificar uma realidade posta é preciso estar em meio ao processo que a constitui, analisando seus atos cotidianos, as relações estruturantes e seus elementos integrantes. Por isso, que a pesquisa-intervenção se apresentou como a melhor metodologia procedimental para o presente estudo.

Vale ressaltar que a pesquisa- intervenção está sedimentada dentro do contexto das pesquisas participativas. Estas surgem como contraponto às pesquisas tradicionais, centradas na objetividade e na universalidade dos saberes, em que o pesquisador se esquiva ao máximo do objeto investigado, na tentativa de obter resultados supostamente fiéis ao objeto apurado, Rocha (2006). Contudo, estando atenta à problemática envolvendo pesquisador e o objeto pesquisado, as pesquisas participativas são sensíveis ao conhecimento e à aprendizagem produzida durante o transcorrer da pesquisa. Ainda, segundo Rocha (2006, p. 169) “o conhecimento se constrói, assim, entre o saber já elaborado e incorporado nos pressupostos do pesquisador e o fazer enquanto produção contínua que organiza a ação investigativa”.

As considerações acima levaram a intuir que, durante a própria pesquisa, há momentos de aprendizagem que implicam transformações dos sujeitos envolvidos e do próprio pesquisador e, portanto, dentro das pesquisas participativas, não deve o pesquisador assumir uma postura passiva e indiferente diante do objeto investigado, haja vista que o conhecimento e a ação sobre a realidade são constituídos no curso da pesquisa de acordo com as análises e decisões coletivas, dando à comunidade participante uma presença ativa no processo, Rocha (2006). Reforçando essa ideia a autora argumenta que:

> [...] para desenvolver uma metodologia participativa, é necessária uma mudança na postura do pesquisador e dos pesquisados, uma vez que todos são co-autores do processo de diagnóstico da situação-problema e da construção de vias que possam resolver as questões. É um processo contínuo que acontece no curso da vida cotidiana, transformando os sujeitos e demandando desdobramentos de práticas e relações entre os participantes (ROCHA; AGUIAR, 2003, p. 66)

Assim, podemos dizer que a pesquisa participativa se caracteriza pela interação entre pesquisadores e membros das situações investigadas. A descoberta do universo vivido pela população implica compreender, numa perspectiva interna, o ponto de vista dos indivíduos e dos grupos acerca das situações que vivem.

É nesse cenário que a pesquisa-intervenção se apoia e, segundo Rocha (2003, p.66): “A pesquisa-intervenção consiste em uma tendência das pesquisas participativas que busca investigar a vida de coletividades na sua diversidade qualitativa, assumindo uma intervenção de caráter socioanalíti*co”*. Esse procedimento metodológico é realizado em conjunto com população pesquisada visando a modificação processual no objeto pesquisado, por meios das intervenções na rotina diária dos grupos envolvidos. Por isso, a pesquisa-intervenção envolve uma complexidade maior de elementos, sendo uma pesquisa sobre e com as pessoas inseridas dentro de um contexto local, histórico e cultural.

Nesse enquadramento, a pesquisa-intervenção ganha realce ao identificar elementos que devem ser ajustados para melhorar a realidade do grupo ou, como é o caso do presente trabalho, potencializar a aprendizagem de uma turma de alunos do ensino médio. Ratificando essa colocação, temos em Romagnoli (2014) mais uma consideração sobre a natureza da pesquisa intervenção

> [...] se apresenta indissociada de uma intervenção comprometida a dar uma contribuição efetiva para a construção de uma sociedade mais digna, burlando os moldes iluministas que perseguem a neutralidade, a objetividade e a verdade embasada em uma postura apolítica e racional (ROMAGNOLI, 2014, p. 45).

Portanto, diante das argumentações traçadas nesse tópico e dos objetivos propostos, ressaltamos novamente que a pesquisa ora relatada se enquadra como uma pesquisa-intervenção, com abordagem qualitativa.

3.2 Ambiente de pesquisa e sujeitos envolvidos

O presente estudo foi realizado no Colégio Interativo COEDUC, localizado na R. Guilhermino Novais, 13 - Recreio, Vitória da Conquista – BA. O colégio é uma Cooperativa Educacional administrado por um grupo de professores cooperados que compartilham as atribuições pedagógicas, administrativas e financeiras. As atividades foram desenvolvidas durante os meses de março a novembro de 2016 e participaram da pesquisa 13 alunos da 1ª série do Ensino Médio.

A escolha dessa turma se baseou em dois motivos, primeiro por conta do conteúdo Funções ser abordado nessa série de ensino, segundo por se tratar de uma turma para qual ministrei aulas ao longo do ano. O contato direto com esses alunos foi fundamental para avaliar os resultados do trabalho e permitiu acionar as intervenções necessárias no sentido de alcançar os objetivos pretendidos.

3.3 Etapas da pesquisa.

Definidos os aspectos metodológicos que conduziram a pesquisa, faz-se necessário descrever os procedimentos que auxiliaram na produção dos dados, bem como os instrumentos utilizados nessa produção. O desenvolvimento da pesquisa foi dividido em quatro etapas: Aplicação do Questionário de Sondagem (QS), desenvolvimento dos experimentos com base nos Roteiros de Estudo 01 e 02 (RE1 e RE2), apresentação oral dos resultados dos experimentos e aplicação do Questionário Final.

3.3.1 Questionário de Sondagem (QS)

As primeiras ações da pesquisa se deram com a aplicação de um Questionário de Sondagem composto por 13 questões (abertas, fechadas e graduadas) que foram respondidas individualmente pelos alunos. O questionário, segundo Gil (1999), pode ser definido

> como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc. (GIL,1999, p. 128).

Alinhado com a definição, o objetivo principal foi mapear a turma e tentar identificar o perfil dos alunos quanto às experiências vividas com a disciplina Matemática. Aspectos como angústias, antipatia ou simpatia pela matéria, a percepção da matemática no dia a dia e as opiniões quanto ao melhor método de ensino da matemática caracterizaram os quesitos do questionário.

Essas informações iniciais ajudaram a esclarecer noções mais subjetivas dos alunos com relação à Matemática, revelar as marcas deixadas pelo método de ensino com o qual tiveram contato durante o estudo escolar e identificar a forma como os alunos veem Matemática enquanto ciência de vasta aplicação no cotidiano. São informações importantes que permitiu avaliar os resultados obtidos após trabalharmos com estratégias metodológicas intervencionistas amparadas no conceito da Investigação Matemática.

3.3.2 Roteiros de Estudo 01 e 02 (RE1 e RE2), os experimentos

A segunda etapa foi realizada seguindo orientações de dois Relatórios de Estudo. O primeiro (RE1) de caráter mais prático, apresentou procedimentos envolvendo planejamento, execução, aplicação, acompanhamento, analise de quatro atividades experimentais onde os alunos desenvolveram e acompanharam a realização de experimentos relacionados a fenômenos físicos. O segundo (RE2), com caraterísticas mais teóricas pretendeu uma melhor formalização dos conceitos analisados no RE1, ou seja, nesse relatório os discentes tiveram contato com a teoria envolvendo os principais elementos conceituais das Funções reais de uma variável.

As atividades, propostas pelo professor/pesquisador, estão alinhadas com o que as orientações de Ponte et al:

> O trabalho investigativo começa com a formulação de uma questão que nos intriga e para a qual não encontramos resposta imediata. Formular questões desafiantes para um grupo de alunos não é tão simples como parece à primeira vista. Se a questão for considerada por eles como demasiado difícil, é natural que se sintam intimidados e não se disponham a trabalhar nela. Se for por eles considerada como demasiado fácil, é encarada como maçadora e desinteressante. (PONTE, OLIVEIRA, BRUNHEIRA & VARANDAS, 1999, p. 11)

Desse modo, uma aula investigativa requer do docente criatividade no sentido de elaborar, adaptar e selecionar atividades potencialmente ricas e interessantes que contemple seus objetivos e possa realmente desencadear a investigação por parte dos alunos. Além disso, as atividades devem ser significativas a ponto de despertar o interesse e estimular a participação dos alunos.

Buscando atender a essas características as atividades foram elaboradas a partir de quatro fenômenos físicos/naturais:

a) Uma torneira gotejante.
b) A sublimação da naftalina
c) A projeção da sombra de um bastão.
d) A Lei de Boyle-Mariotte.

A escolha dessas atividades foi alinhada ao objetivo de transformar a sala de aula em um ambiente interessante, onde os alunos se sentissem pequenos exploradores e partissem à descoberta. O desafio apresentado a eles por meios dos dois roteiros de estudo consistiu em elaborar simulacros que representassem cada um dos fenômenos citados e por meio de observações, análises e registro de dados fosse possível construir o conceito de Função associado a cada experimento.

Nessa etapa do projeto, a turma foi dividida em quatro grupos e a cada um deles foi dado, primeiro, o Roteiro de Estudo 01. Nele, conforme já mencionado, havia orientações de como elaborar cada um dos experimentos, seguindo uma sequência de passos, cujo objetivo foi, guardada as proporções, aproximar a atividade realizada pelos alunos dos métodos científicos utilizados pela ciência e pelos Pesquisadores e Cientistas. Centrados em uma questão principal: Há regularidades e padrões em cada um dos experimentos? A sequência de quesitos presente nos roteiros teve como foco principal orientar o trabalho e não comprometeu a liberdade dos alunos enquanto agentes investigadores. Foram eles que investigaram o fenômeno, analisaram os dados, discutiram os resultados, conjecturaram e levantaram hipóteses, testaram e reformularam conclusões. Nessa etapa inicial, extremamente importante, é fundamental que os alunos entendam o sentido das atividades propostas e aquilo que deles se espera. Estamos tratando de atividades inovadoras que muito se afastam das tarefas convencionais de matemática, além disso, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 26), “de fato, aqui o aluno não está perante uma questão bem delimitada a que tem de dar uma resposta, fazendo mais ou menos cálculos, mas tem ele próprio, de formular as suas questões com base na situação que lhe é apresentada". É esse o perfil dos problemas apresentados aos alunos, que passamos a detalhar melhor na sequência.

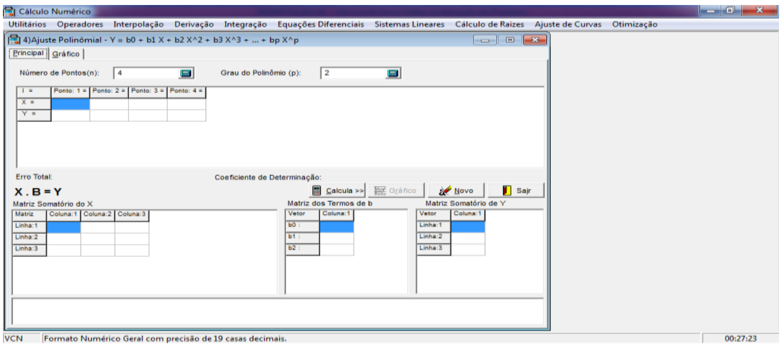
Em linhas gerais, todas as atividades apresentaram um resumo do experimento e orientações de como elaborar o material necessário. Além disso, trouxe um item em que o tema do experimento foi apresentado dentro de uma situação/contexto. O grupo encarregado de investigar o gotejamento, por exemplo, discutiu e apresentou uma pesquisa bibliográfica sobre o desperdício de água no planeta e as possíveis soluções para enfrentar esse problema, mostrando dados e projeções nada animadores para o futuro, caso a água não seja usada de forma mais racional e equilibrada. Além do aspecto matemático, portanto, as atividades alinham problemáticas atuais e aplicações práticas cujo objetivo é aproximar teoria matemática à realidade cotidiana da qual esta Ciência é onipresente.

Com os simuladores e equipamentos prontos, cada grupo aferiu os valores entre as variáveis envolvidas no experimento (massa x tempo no caso da naftalina, volume x pressão no experimento da Lei de Boyle). Os dados foram organizados em tabelas e posteriormente representados em um plano cartesiano, na sequência, cada grupo discutiu a possibilidade de obter ou não um padrão para os dados coletados e tentaram criar modelos matemáticos para tais dados. Essa etapa do desenvolvimento da atividade foi o momento em que os alunos analisaram os resultados da observação e passam a levantar hipóteses sobre a existência ou não de padrões no comportamento das variáveis envolvidas e, em caso afirmativo, deveriam procurar uma relação matemática que melhor se ajuste ao fenômeno estudado. Outra orientação contida no RE1 diz respeito à utilização de recursos computacionais online e softwares capazes de modelar funções a partir de dados fornecidos. Pretendeu-se, com essas ferramentas, permitir que os alunos verificassem se as leis (Funções) obtidas por eles manualmente possuíam semelhança com aquelas geradas pelos recursos computacionais. Para tanto, apresentamos aos alunos duas fermentantes, o *Software* Virtual Cálculo Numérico [1]– (VCN) desenvolvido por uma equipe de professores apoiados pela PUC – Minas e a funcionalidade do Google capaz de gerar gráficos a partir de uma função dada.

O Virtual Cálculo Numérico é um programa gratuito focado em cálculo ou métodos numéricos e apresenta várias funcionalidades, dentre elas a opção Ajuste de Curvas que permite, em meio a outros recursos, modelar funções polinomiais a partir de pares coordenados (x,y) pertencentes a uma curva.

Na tela inicial do Software, nas abas superiores há a opção Ajustes de Curvas. Clicando nessa opção aparecerá, dentre outras, a função Ajuste polinomial. Ao acionar essa ferramenta, aparecerá uma caixa de comando com duas abas, a “Principal”, onde se encontram duas linhas identificadas com X e Y onde deverão ser inseridos os pares associados a essas variáveis e selecionada a opção calcular, o programa apresenta uma sugestão de função polinomial que modela os dados inseridos. A segunda aba “Gráfico” apresenta a plotagem do gráfico associado aos dados lançados e à função obtida.

Figura 2: Tela inicial do VCN



Fonte: Arquivo do autor

As atividades desenvolvidas segundo o RE1, portanto, foram alinhadas com a Metodologia da Investigação Matemática, pois colocaram os alunos diante de situações até então desconhecidas cuja investigação analítica e a curiosidade são elementos utilizados por eles para solucionar a questão dada, ou seja, a princípio não se sabe como e a que proporção a naftalina perde massa ao longo do tempo, não se sabe nem mesmo se há regularidade nessa sublimação. Fora isso, o objetivo das atividades não é apenas encontrar as

---

[1] . O programa pode ser baixado em Educação Superior: Ciências Exatas e da Terra: Matemática: Softwares Educacionais, conforme URI: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/10529 ou executado online

regularidades a partir da qual se modele uma função, o mais importante será o caminho trilhado pelos alunos para alcançar, ou não, a resposta propriamente dita, até porque, é exatamente durante o processo de descoberta que deve surgir os momentos mais fecundos de aprendizagem. Conforme vimos em Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), uma aula investigativa deve aproximar os alunos das práticas vivenciadas pelos verdadeiros cientistas.

O objetivo dos experimentos é exatamente esse, favorecer um ambiente em que os discentes possam experienciar momentos genuinamente matemáticos onde o aprender se processe no dinamismo do fazer matemática e o ensino reflexivo sobreponha à metodologia da memorização. Para isso, as atividades desenvolvidas permitiram aos alunos:

1) Explorar uma questão posta,
2) Elaborar as conjecturas,
3) Testar e reformular conclusões,
4) Justificar e validar os resultados.

Ainda que os quatro experimentos tenham sido, a princípio, selecionados pelo professor/pesquisador, as etapas mais dinâmicas da atividade tais como elaboração do experimento, acompanhamento do fenômeno, registro e análise de dados, testagens e justificativas ficaram a cargo de cada grupo. Desse modo, não foi furtada a autonomia dos alunos nem privados do elemento investigativo inserido nas atividades propostas. A Matemática, conforme Braumann (2002), não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza Matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Sendo assim, parece ser mais interessante e instigador ao aluno tentar compreender uma questão posta (encontrar padrões) usando suas capacidades pessoais que reescrever modelos em forma de exercícios após uma aula expositiva.

O Relatório de estudo 2 (RE2), objetivou uma maior formalização dos resultados obtidos por meio do RE1. O conceito de função foi apresentado de maneira mais rigorosa e pontos importantes como domínio e Imagem de uma função real de duas variáveis foram abordados de forma mais precisa. Nesse relatório, os discentes tiveram contato com uma das principais características da Matemática: o rigor e a precisão de seus conceitos. Como afirma (POLYA, (apud PONTE, 2016, p. 5).

> A Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria Matemática.

Nesse sentido, é fundamental que os discentes percebam que a produção do conhecimento envolve processos formais e segue metodologia rigorosa. É evidente que por se tratar de alunos do primeiro ano do ensino médio, ponderações devem ser feitas no nível de formalismo apresentado. Mas é necessário que os alunos notem a relação existente entre a Matemática formalizada transmitida a eles nas aulas convencionais e a Matemática empírica, presente no dia a dia cuja aplicação é onipresente.

É fundamental que o distanciamento entre a Matemática da sala de aula, apresentada na maioria das vezes apenas formalmente, e sua aplicação prática seja reduzido. Nesse aspecto a investigação matemática se apresenta como uma promissora ferramenta metodológica capaz de aliar a faceta contextual e o formalismo preciso, características constituintes da disciplina Matemática, sobre Isso, Ponte, Oliveira, Brunheira e Varandas (1999) afirmam que

> em lugar de estabelecer uma oposição entre estas duas facetas, é importante perceber como se complementam, sendo a segunda essencial para a criação do conhecimento e a primeira indispensável para o organizar e lhe dar a necessária solidez (PONTE, OLIVEIRA, BRUNHEIRA; VARANDAS, 1999, p. 1)

3.2.3 Apresentação dos resultados das atividades investigativas, conforme produção dos alunos.

Essa etapa do trabalho consistiu na divulgação dos resultados obtidos durante toda a atividade investigativa desenvolvida. Cada grupo organizou a apresentação em *PowerPoint* realçando os principais pontos observados por eles. Relataram como desenvolveram a atividade, apresentaram os experimentos, mostraram as tabelas e os gráficos, o modelo de função obtida algebricamente e computacionalmente, classificaram–na e definiram o domínio, imagem e contradomínio para cada uma delas. Nessa etapa, portanto, foi o momento dos alunos apresentarem aos demais os resultados de seus experimentos. Essa fase é de extrema importância para o sucesso de uma atividade investigativa, conforme Ponte,

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro lado, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar, sem discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. ((PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 41)

Esse, certamente, foi um dos momentos mais fecundos de todo o trabalho. Os alunos tiveram a oportunidade de apresentar suas descobertas, justificar os resultados, foi o momento em que os alunos se posicionaram como agentes de seu próprio conhecimento. Saíram do polo passivo e se integraram ao processo de aprendizagem propriamente dito. Ao professor pesquisador coube o papel de moderador, estimulando os alunos a questionarem, promovendo momentos de reflexão sobre os resultados apresentados e ajustando algumas informações para que os conceitos elaborados fossem corretamente definidos.

3.2.4 Questionário Final

Concluídas as atividades investigativas, aplicamos um Questionário Final, cujo objetivo foi identificar as possíveis influências da Investigação Matemática no processo de aprendizagem dos alunos. Além disso, criamos questões paralelas ao Questionário de Sondagem no intuito de analisar as possíveis mudanças de percepção da Matemática enquanto disciplina, cuja aplicação cotidiana é integralmente observada. Esse questionário, pois, busca avaliar os resultados de um trabalho investigativo apontando possíveis vantagens ou desvantagens para o ensino de Matemática, no caso específico, das funções reais de uma variável real, a alunos do 1º ano do ensino Médio.

CAPÍTUNO 4 - DISCUSSÃO DAS ETAPAS E ANALISE DOS DADOS

4.1 Questionário de Sondagem.

Conforme dito, uma das primeiras ações da presente pesquisa foi a aplicação de um questionário de sondagem, composto por 13 questões (abertas e objetivas) cujo objetivo principal foi mapear a turma e tentar identificar o perfil dos alunos quanto às experiências vividas com a disciplina Matemática. Passamos a pontuar algumas das questões mais relevantes do questionário, principalmente aquelas relacionadas ao modo como os alunos veem a Matemática da sala de aula, suas aplicações em situações do cotidiano e a importância da disciplina no contexto prático.

O primeiro item (Questão 01) refere-se a qual escola o discente cursou ensino fundamental II (6° ao 9° anos). O segundo (Questão 02), pede aos alunos que defina em poucas palavras o conceito de Matemática. Algumas das principais respostas estão aspeadas abaixo.

“Uma maneira de explicar o que está acontecendo em sua volta”

“Algo essencial para sua vida”

“Uma matéria nem difícil nem fácil”

“Base”

“Uma resolução de algum problema”

“Necessidade do cotidiano, prática”

“Um pouco chata”

“Porque sempre utilizamos no dia a dia”

Como podemos perceber, as respostas transitam entre noções mais empíricas, em que a matemática é associada ao cotidiano, e considerações mais técnicas, voltadas para uma noção de matemática atrelada à resolução de problemas e exercícios. Vale ressaltar que os alunos cujas respostas evidenciaram a relação da matemática com o dia a dia foram os mesmo que obtiveram melhor rendimento durante o ano letivo nessa disciplina. Outra observação importante se refere ao fato de alguns alunos (4 alunos) não responderam ao item. Questionados sobre a ausência de respostas eles alegaram não saber responder a questão. Embora seja arriscado afirmar os motivos para isso, algo parece claro: ou os alunos não se dispuseram a responder a questão alegando não saber ou, mais grave ainda, a Matemática realmente não tem uma identidade minimamente formada no campo do conhecimento destes alunos.

O terceiro item (Questão 03) questiona a importância da disciplina Matemática e as justificativas da resposta.

A esse quesito, todos consideraram a disciplina Matemática importante, o que já era esperado. Quanto à justificativa, a grande maioria relaciona a importância da Matemática a aplicações práticas cotidianas. Duas respostas, porém, afirmam que a matemática serve para ajudar a fazer contas e a outra atrela sua importância ao curso superior que o indivíduo pertence cursar futuramente.

“Que ensina a fazer contas”

“Dependendo do que a pessoa for cursar na faculdade é importante”

As duas respostas revelam, a nosso ver, uma noção restrita da Matemática. Sabemos que a importância maior da matemática não é apenas ensinar a fazer contas, conforme revela a primeira resposta. Parece claro que a justificativa dada pelo aluno reflete o resultado de uma prática de ensino matemático concentrada basicamente no *algebrismo* e na aritmética pura e abstrata, desprovida de contextualização e significado. Quanto à segunda Justificativa, observamos que a importância da Matemática, na visão da aluna, está ligada aos anseios acadêmicos do indivíduo.

É verdade que o conhecimento matemático será explorado de forma maior ou menor a depender do curso superior a que se deseja ingressar. Mas a importância da Matemática vai muito além disso. O conhecimento desta ciência utilizado por um engenheiro na construção de um edifício implica benefícios ao professor de língua portuguesa que nele deseje morar. Importante mostrar aos alunos que a Matemática, assim como as demais áreas do saber se apoiam em um contínuo, estão interligadas e integradas e é esse misto de conhecimento articulado que permite avanços da humanidade.

Perceber a Matemática como área do conhecimento útil apenas a determinado setor da sociedade remonta aspectos de um ensino compartimentalizado, em que as disciplinas são vistas isoladamente com pouca ou nenhuma relação interdisciplinar.

As demais respostas justificaram a importância da Matemática à sua aplicação cotidiana, como mostra duas dessas justificativas.

“Porque ela engloba situações diárias muito comuns, as quais requerem o uso da matemática”

“Por ser uma das disciplinas mais aplicadas e mais usada praticamente no dia a dia e mais fácil em colocar em prática seus conhecimentos.”

É importante frisar que reconhecer a importância da Matemática enquanto Ciência amplamente aplicável a situações do dia a dia não é uma característica muito bem explorada no seu processo de ensino escolar. Sabemos que a regra metodológica do ensino escolar na maioria das escolas brasileiras, principalmente na disciplina Matemática, é baseada em aulas expositivas seguidas de exemplos, exercícios e avaliação. Esse roteiro não favorece aulas contextualizadas e interdisciplinares, dificulta a transdisciplinaridade e fecha o olhar matemático do discente a aspectos meramente algébricos e procedimentais da Matemática. Embora os alunos tenham reconhecido a importância da matemática e justificado essa importância às aplicações práticas, ao serem questionados sobre o ensino dessa disciplina na escola a maioria deles, cerca de 60%, afirmaram que a Matemática da escola não tem muita relação com o cotidiano. Esse dado foi registrado pelo item 09 do questionário em que os alunos foram inqueridos sobre a matemática ensinada na sala de aula.

Figura 3: Item 09 do Questionado de Sondagem

09. Sobre a matemática que você estuda na escola.
a) (   ) faz parte do meu dia a dia e sempre vejo situações relacionadas ao conteúdo.
b) (   ) Não tem muita relação com meu cotidiano.
c) (   ) É uma disciplina muito difícil.
d) (   ) Não tenho dificuldade com disciplina.

Fonte: Arquivo do autor

Outros 20% assinalaram a letra *a* e o restante o item c, o item d não foi marcada por nenhum aluno. A maioria, portanto, não vê a Matemática cotidiana como uma extensão da Matemática escolar. Essa constatação, certamente, é resultado de um ensino escolar concentrado basicamente na memorização da matéria. Em Chagas temos considerações a respeito disso.

> Não é raro encontrarmos, dentro do trabalho cotidiano das escolas, professores de matemática ensinando esta disciplina de forma “rotineira”, onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no livro didático adotado e o método de ensino se restringe a aulas expositivas e a exercícios de fixação ou de aprendizagem (CHARGAS, 2004, p. 242).

Isso, ainda segundo a autora, gera um dos principais problemas do ensino, principalmente em matemática, "outro grande problema refere-se ao fato de que matemática é frequentemente tratada como sendo uma área do conhecimento humano desligada da realidade e do cotidiano onde o indivíduo encontra-se inserido" Chargas, (2004, p. 243).

Contrapondo a essa "rotina" tradicional é que a Investigação Matemática se oferece como uma boa alternativa metodológica. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), As investigações Matemáticas são capazes de fornecer uma visão completa da Matemática, estimular a participação do aluno necessária para que ocorra aprendizagem significativa; estimular um modo holístico de pensamento, relacionando muitos tópicos, condição essencial para o raciocínio matemático significativo. Não parece difícil analisar uma torneira gotejando sob o aspecto matemático. Uma pequena gota de água tem volume aparentemente insignificante a observadores desatentos, mas não àqueles que a observe enquanto fenômeno contínuo, cuja modelagem matemática pode dar uma noção exata do enorme desperdício provocado ao logo de dias ou meses. Esse modelo pode ser obtido a partir do conceito de Função. Um aluno ou grupo de alunos desafiados a investigar esse pequeno fenômeno, perceberá a reação matemática existente ali e terá privilégio de experimentar uma aplicação do conteúdo Funções em situações de seu cotidiano.

A questão 13, última a ser discutida, questiona os alunos sobre os meios que poderiam tornar o estudo de Matemática mais interessante e significativo. Abaixo transcrevemos algumas das respostas fornecidas.

" Eu acho que deveria ser por meio de jogos, exercícios em grupos".

"Através de jogos, atividades em grupo, entre outras".

"Utilizando situações do dia a dia. Porque é uma forma de mostrar a importância da Matemática".

"Quanto menos barulho tiver na sala melhor para aprender".

> *“Praticas didáticas, interativa e com conhecimento do cotidiano. Aumenta o interesse do Aluno. O professor ajudar, ser disposto, incentivar e não ser fácil”.*
>
> *“Os professores darem jogos sobre matemática”.*
>
> *“Não serem só dentro da sala, porque tira da rotina normal, descontrai”.*

Notamos opiniões bem diversas em relação à forma mais interessante de se ministrar as aulas de Matemática, no entanto, a utilização de jogos e atividades em grupo parece ter uma relevância maior para melhorar as aulas de matemática. Não observamos nas justificativas dos alunos referência a algum tipo de atividade explicitamente investigativa, sabemos, é claro, que se pode trabalhar a investigação matemática utilizando um grande aparato de atividades, mas não conseguimos identificar os sinais dessa metodologia na maioria das respostas. Há uma única fala em que se pode observar algum elemento da metodologia investigativa, segundo a qual as aulas de matemática seriam mais interessantes com a utilização de “práticas didáticas mais interativas”. Interatividade é um forte elemento que se busca nas atividades de perfil investigativo.

O Questionário de Sondagem, como vimos, apresenta informações que revelam problemas no processo de ensino da Matemática. A dificuldade em reconhecer a disciplina Matemática como algo presente no cotidiano, a visão restrita de que a matéria ensina a fazer contas e o entendimento de que Matemática só é importante a algumas profissões são alguns dos pontos que julgamos problemáticos. Ter ciência desses problemas permitiu articular ações pontuais de modo que esses equívocos fossem sanados ou mesmo atenuados. Essas questões, aliás, são abordadas nos objetivos específicos deste trabalho e foram objeto de enfrentamento durante a realização das atividades investigativas desenvolvidas.

4.2 As Atividades Investigativas

4.2.1 Torneira Gotejante.

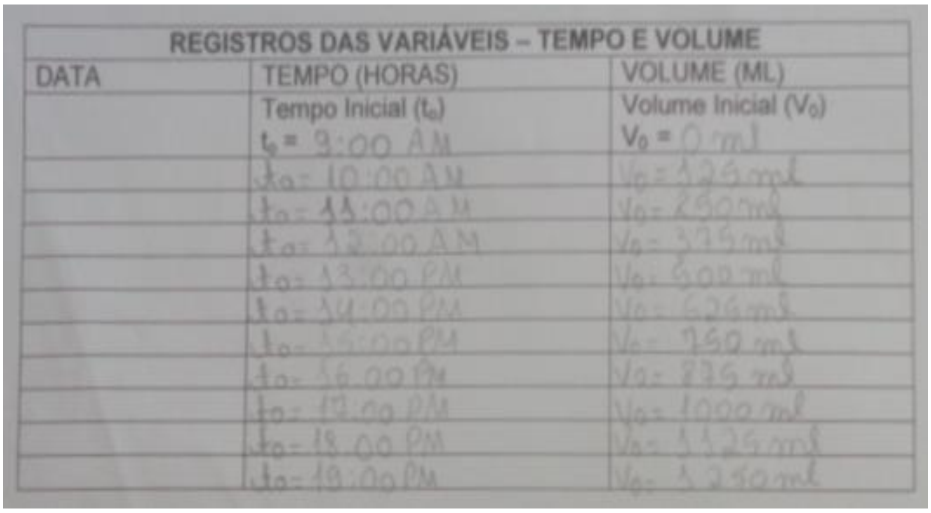
Os responsáveis por estes experimentos elaboraram um sistema composto por uma torneira acoplada a um vasilhame plástico e um tubo aparador graduado em mL. A torneira foi regulada de tal forma a permitir o gotejamento do líquido contido no vasilhame e com isso simular o desperdício de água provocado por registros e torneiras defeituosos. A simulação retrata uma realidade fartamente observada em residências, estabelecimentos comerciais, escolas, órgãos públicos etc. Além do aspecto matemático, foi considerada na atividade a questão social relacionada ao desperdício de água que, como dito, é um problema comumente observado em situações diárias.

Todo o trabalho realizado pelo grupo seguiu orientações contidas no RE1 (Gotejamento). A primeira questão do roteiro sugeriu aos alunos a leitura de um texto referência e posterior reflexão sobre a problemática da má utilização da água. Reproduzimos abaixo essa questão inicial.

Item 01 - O **desperdício de água** é um problema socioambiental de graves consequências para a humanidade, haja vista que, de toda a água disponível na Terra, apenas 3% é originalmente própria para consumo. Todavia, desses 3%, apenas uma menor parte encontra-se em locais de fácil acesso. Por isso, é preciso entender melhor essa questão a fim de encontrar possíveis soluções. Motivado pela leitura do texto “Desperdício de Agua”, disponível em http://brasilescola.uol.com.br/geografia/desperdicio-agua.htm), e utilizando-se de outras fontes de pesquisa, exponha considerações a respeito dos reais problemas que a humanidade pode enfrentar (em muitas partes do mundo já enfrenta) devido ao uso descuidado dos recursos hídricos.

Realizada a pesquisa de caráter contextual, a equipe elaborou o simulador, sempre sob a supervisão e auxilio do professor/pesquisador e seguindo orientações do item 02. Formam utilizados um vasilhame plástico de 20 litros, uma torneira plástica comum, um dosador de 500 ml e ferramentas. Após a montagem do simulador, acrescentou-se água com corante e a torneira foi regulada a permitir o gotejamento que foi aparado no dosador. Os alunos, seguindo orientações do item o do RE1, acompanharam durante 5 horas a evolução do volume de liquido no dosador fazendo registros a cada hora. A observação se iniciou pela manhã na própria sala de aula durante o período de aulas e se estendeu até parte da tarde. Os dados coletados foram registrados em uma tabela (orientação item 3), conforme figura abaixo, e por meio deles os alunos foram provocados a investigar possíveis regularidades nos dados e em se confirmando tal padronização, obter uma função matemática que modelasse o fenômeno observado (gotejamento).

Figura 4: Registro do volume da agua em função do tempo

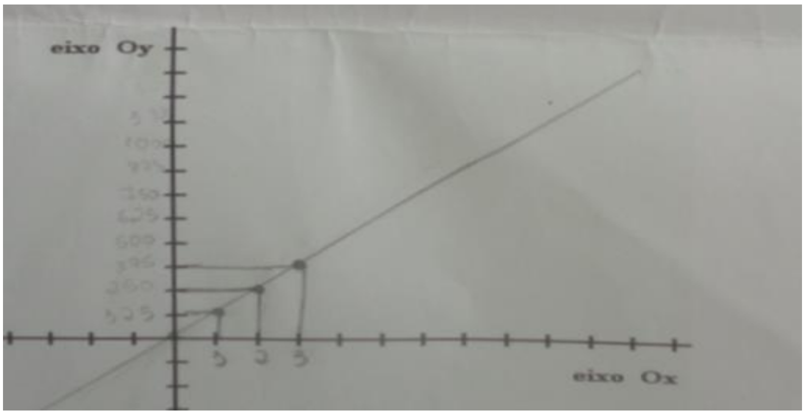


REGISTROS DAS VARIÁVEIS – TEMPO E VOLUME		
DATA	TEMPO (HORAS)	VOLUME (ML)
	Tempo Inicial (t_0) t_0 = 9:00 AM	Volume Inicial (V_0) V_0 = 0 ml
	t_0= 10:00 AM	V_0= 125 ml
	t_0= 11:00 AM	V_0= 250 ml
	t_0= 12:00 AM	V_0= 375 ml
	t_0= 13:00 PM	V_0= 500 ml
	t_0= 14:00 PM	V_0= 625 ml
	t_0= 15:00 PM	V_0= 750 ml
	t_0= 16.00 PM	V_0= 875 ml
	t_0= 17:00 PM	V_0= 1000 ml
	t_0= 18.00 PM	V_0= 1125 ml
	t_0= 19:00 PM	V_0= 1250 ml

Fonte: Arquivo do autor

Após a coleta das informações relacionadas ao tempo e ao volume, os pares coordenados (tempo x volume) foram representados em um plano cartesiano (orientação 4) e a ligação dos pontos resultou em uma reta coerente com o gráfico associado às funções polinomiais de 1º grau. Vale a ressalva de que a reta associada aos dados do experimento não se estende ao 3º quadrante, como mostrado na imagem. Os alunos foram alertados sobre isso e orientados no sentido de existir situações em que seja necessário explorar graficamente todos os quadrantes do plano coordenado, mas não nesse caso em que os valores da tabela são evidentemente positivos.

Figura 5: Gráfico do volume em função do tempo



Fonte: Arquivo do autor

A orientação 5 abordou a padronização dos dados observados, ou seja, os alunos foram questionados sobre a existência de alguma relação de dependência entre as variáveis tempo e volume e, em caso afirmativo, solicitados a descreverem essa relação observada. Abaixo, a transcrição dada pelos alunos.

> *"Sim. Pois a cada medida e a cada hora a quantidade de água desperdiçada evolui e a tendência é aumentar não só a cada uma hora, mas a cada um mês, um ano e etc". (Equipe gotejamento – resposta à orientação 5)*

O padrão crescimento foi facilmente notado pelos alunos conforme se nota na resposta formulada pelo grupo. Na sequência, foram indagados (orientação 06) se era possível determinar a quantidade de água desperdiçada para períodos maiores de tempo, como dia, meses ou mesmo anos e em caso positivo como seria a relação matemática capaz de determinar esses valores. Os alunos assim responderam ao item.

> *"O fluxo de agua é dado em segundos, então precisamos saber quantos segundos tem em um mês. Por isso a função de primeiro foi utilizada e chegamos a conclusão de que 125 mL vezes uma hora é igual 125mL. Por dia 125mL vezes vinte e quatro horas é igual a 3000mL (3 litros) por dia. Por mês 125mL vezes 720 horas é igual a 90.000mL (90 litros) por mês. Uma quatidade grade de agua desperdiçada." (Equipe gotejamento – resposta à orientação 6)*

Observamos que os alunos usaram a ideia de função do primeiro grau para justicar o cálculo realizado. Certamente o conceito de função afim já orbitava o campo de domínio dos alunos por se tratar de uma tema abordado em séries anteriores (9º ano).

Na sequência (orientação 8), o grupo foi desafiado a conjecturar um modelo matemático que representasse o desperdício de água em função do tempo. Essa tarefa foi resolvida com certa faciliade e os alunos apresentaram uma lei que permitiu generaliar a relação volume x tempo. A fórmula definida e a justificativa dada por eles segue os padrões da função Afim conforme se observa.

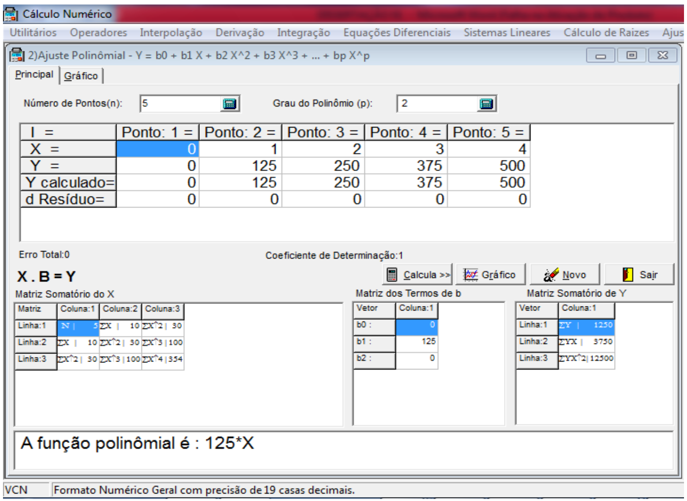
$$Q(t) = \ 125.t$$

> *"A quantidade de água vezes o tempo determinado, mostra a quantidade de água desperdiçada diariamente". (Equipe gotejamento – resposta à orientação 8).*

Os alunos como podem observar, conseguiram modelar uma função matemática capaz de determinar a quantidade de água desperdiçada para um tempo qualquer. Essa função matemática não é, para estes alunos, apenas uma engrenagem com números e letras abstrata, mas sim uma relação matemática carregada de significados e contextualizada. Obter uma lei a partir de observações feitas pelos próprios alunos enriquece a aprendizagem e torna mais fácil o entendimento do conceito de funções reais.

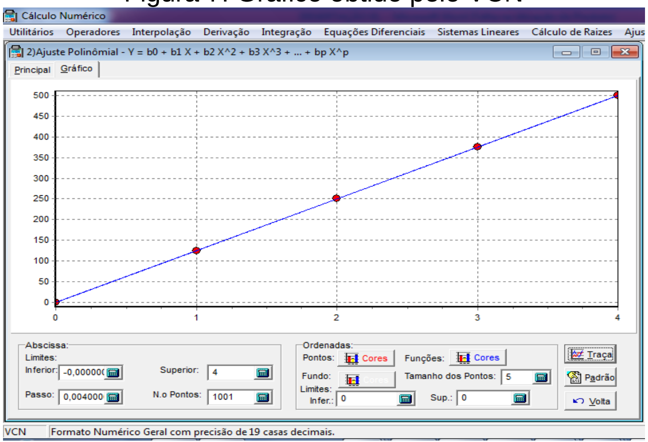
No próximo item (orientação 9) os alunos tiveram a oportunidade de manipular o Software Educacional – Virtual Cálculo Numérico – (VCN) Utilizando essa ferramenta os discentes lançaram os dados observados no experimento e o resultado mostrado no programa foi comparado com as conjecturas e conclusões obtidas ao longo do roteiro de RE1. As figuras 10 e 11 retratam os resultados gerados pelo VCN utilizando cinco pares coordenados.

Figura 6: Função polinomial obtida pelo VCN



Fonte: Arquivo do autor

Figura 7: Gráfico obtido pelo VCN



Fonte: Arquivo do autor

Como pode ser observado, o programa ratifica, como já era esperado, os resultados obtidos pelos alunos durante a observação do experimento. A atividade Roteiro de Estudo 1 foi estruturada seguindo uma linha de passos cujo objetivo foi conduzir os alunos na direção de construir o conceito de função a partir das investigações feitas durante o experimento.

Os discentes tiveram oportunidade de observar o fenômeno, analisar a relação entre as variáveis (tempo e volume), anotar os dados obtidos, tratá-los matematicamente e relacioná-los a um possível padrão de comportamento (função). A atividade desenvolvida, portanto, coloca o aluno no polo ativo da atividade produtiva do conhecimento, desafiando-o a descobrir algo que para eles é inédito naquele momento. Eles realizaram, guardadas as proporções, um trabalho similar aos verdadeiros cientistas. Nessa atividade, procuramos ciar um ambiente carregado de ações genuinamente matemáticas. Ao serem desafiados a resolver o problema posto, os discentes se envolveram ativamente na tarefa, fato que representa condição fundamental da aprendizagem. Esse envolvimento, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) é um dos aspectos mais fortes das atividades de natureza investigativa.

> O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. [...] Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu desenvolvimento na aprendizagem (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016. P. 23).

Após conclusão das atividades proposta no RE1, o grupo recebeu o Relatório de Estudo 2. O objetivo principal desse relatório foi formalizar e aprofundar o conceito de função real de uma variável real. Os alunos tiveram a oportunidade de classificar a função obtida por eles, compreender características importantes como domínio, contradomínio e Imagem, estudar crescimento e decrescimento de uma função. Nesse relatório os discentes tiveram contato com uma das principais características da Matemática: O rigor e a precisão de seus conceitos.

O item 01 do RE2 apresenta três considerações aos alunos:

a) Defina formalmente o conceito de uma função do ponto de vista Matemático.

*"Considere dois conjuntos: o conjunto X com elementos x e o conjunto Y com elementos y. Isto é: F: x → y. Diz-se que a função f de x em y que relaciona cada elemento x em X, um único elemento y = f(x) em Y. Outa maneira de dizer isto é afirmar que f é uma relação binária entre os dois conjuntos" (*Equipe gotejamento*)*

b) As funções podem ser classificadas em grupos denominados de famílias. Essa classificação se dá pelas fórmulas que as definem ou outras caraterísticas comuns.

i. Família do tipo (f(x) = y = m.x + b, com *m* e *b* reis)
ii. Família do tipo ($f(x) = y = x^p$, com p constante)
iii. Família do tipo ($f(x) = y = b^x$, com b > 0)
iv. Polinomiais ($f(x) = y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$)
v.

c) Questiona os discentes sobre a classificação a que pertence a função obtida no experimento.

"Família do tipo f(x) = y = m.x + b, com m e b reis" (Equipe gotejamento)

Esse item que expõe as características gerais de algumas funções reais permitiu aos alunos aprofundamento de seu conceito além de uma classificação precisa da lei obtida por eles. Evidente que foram feitas intervenções nesse momento, esclarecendo dúvidas e melhorando a definição de alguns termos. O mais importante é que os alunos compreenderam a ideia central do conceito de função de uma variável real que é a relação de dependência biunívoca estabelecida por um modelo matemático capaz de determinar os elementos entre dois conjuntos (conjuntos de valores associados a tempo x massa, tempo x volume).

O segundo item, sugere aos alunos que defina precisa e formalmente a função que melhor representou o experimento desenvolvido por eles. Nesse sentido, responderam:

"*Chama-se função polinomial do 1° grau, ou função afim, a qualquer função f em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma f(x) = ax + b, onde a e b são números reais dados e a ≠ 0" (Equipe gotejamento).*

O terceiro item abordou os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. Depois de pesquisarem esses conceitos, o grupo determinou o domínio e a imagem que que melhor representou a função do gotejamento:

"Domínio: (x ϵ $\mathbb{R}$ | x ≥ 0)"

"Imagem: (y ϵ $\mathbb{R}$ | y ≥ 0)"

O domínio e a imagem da função obtida com o experimento, do ponto de vista prático, só admitiram valores positivos conforme foi observado pelos alunos embora tenha extrapolado esses valores na elaboração do gráfico. Esclarecemos, no entanto, que a função afim possui domínio e imagem reais e mesmo que a função do experimento apresente valores positivos, há situações em que os valores negativos podem ser necessários. Outro aspecto ausente na solução dada pelos alunos foi o conceito de contradomínio. Essas lacunas formam corrigidas ao logo das aulas e em momentos em que o conteúdo regular envolvendo o tema foi abordado.

4.2.2 Sublimação da Naftalina

O experimento envolvendo o estudo da sublimação da naftalina seguiu orientações do RE1 (Naftalina). Os componentes do grupo acompanharam diariamente, sempre no mesmo horário e por tempo determinado, a sublimação da naftalina registrando a redução de sua massa. O controle foi realizado por meio de uma balança de precisão e os dados anotados em uma tabela. O objetivo foi fazer com que os alunos conjecturassem possíveis relações matemáticas entre as variáveis massa e tempo envolvidas no experimento.

As primeiras questões (orientações 1 a 3) do roteiro sugeriram aos alunos um estudo da composição química e dos aspectos físicos da Naftalina e relato dos pontos mais relevantes, sobretudo aqueles ligados ao uso descuidado dessa substância. Essa questão inicial, portanto, levantou discussões preliminares envolvendo as principais aplicações da naftalina no dia a dia e alguns problemas de saúde relacionados ao contato periódico com essa substância.

Tomamos o cuidado de manusear a naftalina usando luvas e máscaras, acompanhando os alunos durante todas as pesagens.

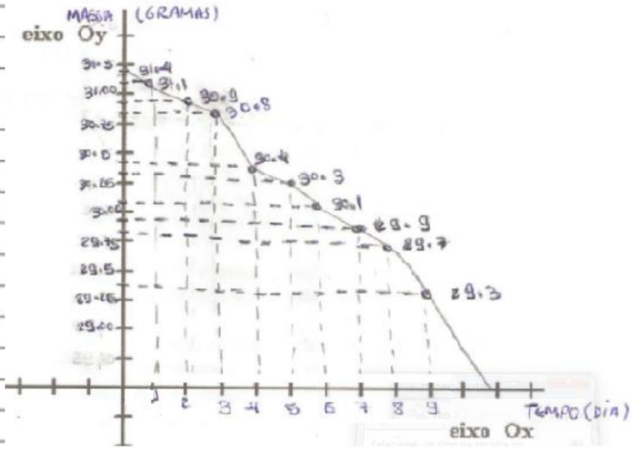
Figura 8: Pesagem da naftalina

Fonte: Arquivo do autor

Foram realizadas 10 (dez) pesagens, sempre no mesmo horário. Essas pesagens foram aferidas na sala de aula, entre os dias 21/05/2016 a 02/06/2016, com exceção de uma realizada no domingo em uma das casas dos componentes da equipe. Os dados (massa e tempo) foram organizados em uma tabela (orientação 4) e posteriormente plotados em um plano cartesiano (orientaçã0 5).

Figura 9: Tabela e curva da sublimação da naftalina

REGISTROS DAS VARIÁVEIS – TEMPO E MASSA		
DATA	TEMPO (DIAS)	MASSA (GRAMAS)
	Tempo Inicial (t_0) To = 0 dia	Massa Inicial (M_0) M_0 = 31.4
21/05	T = 1 dia	31.1
22/05	T = 2 dias	30.9
23/05	T = 3 dias	30.8
24/05	T = 4 dias	30.4
25/05	T = 5 dias	30.3
28/05	T = 6 dias	30.1
29/05	T = 7 dias	29.9
31/05	T = 8 dias	29.7
02/06	T = 9 dias	29.3



Fonte: Arquivo do autor

Observando os dados e o gráfico, percebemos que a sublimação da naftalina não parece ter um padrão de decaimento uniforme. Os próprios discentes perceberam isso e evidentemente sentiram dificuldade em conjecturar um modelo (função) matemático capaz de mapear os pontos do plano cartesiano. O que fica ilustrado na resposta ao quesito 06 que questiona a existência de um padrão de decaimento da massa da naftalina.

> *"A naftalina ela não teve um padrão, pois, a mudança de temperatura contribuio para uma variação do seu peso"* (Equipe naftalina)

Essa dificuldade não implicou prejuízos ao trabalho, aliás, durante a realização de atividade investigativa é perfeitamente aceitável que ocorra situações inesperadas. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016. p. 23) "quando trabalhamos num problema matemático, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original". Essa é a principal característica das atividades investigativas. Segundo Ponte, Oliveira, Cunha e Ponturato (1998) enquanto boa parte das tarefas e problemas matemáticos aplicados nas salas de aulas se preocupam em obter uma solução acabada seguindo procedimentos específicos, as atividades investigativas se preocupam com a compreensão de um domínio problemático. Essa distinção fica bem ilustrada na metáfora geográfica: “o objectivo é a jornada, não o destino” (PIRIE, apud PONTE, 1999, p. 9). A mesma ideia é reforçada por Ernest ao referir que nesta actividade “a ênfase está na exploração de uma terra desconhecida” (ERNEST, apud PONTE, 1999, p. 10), enquanto que na resolução de problemas se procura encontrar um caminho que conduza à solução ou soluções.

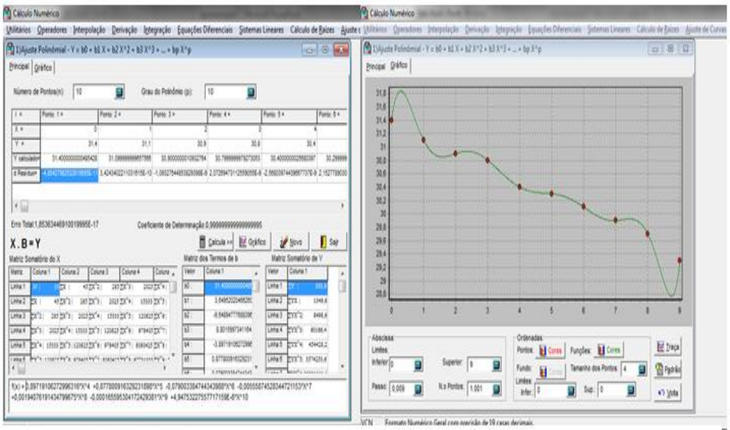
O processo investigativo tem, assim, um carácter mais divergente do que, em geral, a resolução de um problema. Sendo assim, o fato de os dados da tabela e os pontos do plano cartesiano não terem, de início, fornecido um padrão cuja modelagem fosse evidente, nos levou a discutir as causas para a não regularidade da redução da massa da naftalina. Essa discussão foi aprofundada no RE2 (naftalina), conforme veremos mais adiante.

Evidentemente o grupo não conseguiu criar uma função elementar que modelasse o decaimento da massa da naftalina, essa tarefa, aliás, seria manualmente complicada ao mais renomado dos matemáticos. No entanto, utilizando o VCN, os alunos conseguiram ajustar uma função polinomial que aproximou os pontos do plano a uma curva gráfica. Esse momento da investigação se mostrou extremamente produtiva, pois permitiu discussões sobre o próprio conceito de função, a classificação em famílias, grau e aplicações das funções reais. Isso foi possível, pois o VNC permite escolher o grau da função cujos dados se deseja modelar. Com isso, os alunos foram elevando o grau da função gerada pelo programa até obter uma curva de grau 10. Essa função foi a que melhor aproximou os pontos a uma curva, conforme se vê nas figuras abaixo, e ficou definida aproximadamente segundo a lei:

$$f(x) = 0{,}000005.x^{10} - 0{,}0001656x^9 + 0{,}0019x^8 - 0{,}0056x^7 - 0{,}08x^6 + 0{,}88x^5 - 3{,}90x^4 + 8{,}8x^3 - 9{,}65x^2 + 3{,}65x + 31{,}4\ .$$

Vale ressaltar que essa relação matemática foi obtida a partir apenas dos da tabela e é possível que outros modelos sejam também adequados à análise do fenômeno da sublimação. No entanto, o aspecto didático abordado no estudo do modelo obtido forneceu aos alunos os principais elementos conceituais de uma função polinomial.

Figura 10: Função e curva obtidas pelo VCN



Fonte: Arquivo do autor

Essa etapa do trabalho investigativo permitiu aos alunos fundamentar algumas noções do conceito de função, além disso, o trabalho realizado por eles, desde a coleta, tratamento, organização dos dados, busca de padrões e levantamento de hipóteses ajudou a descontruir a noção de Matemática como algo já feito e revelou o quão essa ciência é fundamental na compreensão do mundo e na intervenção sobre ele (BRAUMANN, 2002). Ainda que manualmente não tenha sido possível criar um modelo algébrico, o recurso computacional, ao formular uma expressão matemática, expõe ao grupo o relevante papel da matemática enquanto ciência que consegue fazer uma leitura numérica do mundo e dos fenômenos nele observados. A visão que pretendemos demonstrar é que Matemática não é um conjunto amontoado de números, letras e sinais e sim uma disciplina capaz de compreender o mundo e contribuir na evolução de aspectos sociais, tecnológicos e científicos da humanidade.

Finalizadas as atividades propostas no RE1, avançamos para o Relatório de Estudo 02 cujo objetivo principal foi formalizar e aprofundar o conceito de função real de uma variável. Os alunos tiveram a oportunidade de classificar a função obtida por eles, compreender características importantes como domínio, contradomínio e Imagem, estudar crescimento e decrescimento de uma função. Nesse relatório os discentes tiveram contato com uma das principais características da Matemática: O rigor e a precisão de seus conceitos.

O item 01 do relatório 2 apresenta três considerações aos alunos:

a) Defina formalmente o conceito de uma função do ponto de vista Matemático. Os alunos assim responderam a esse quesito.

*"A função determina uma relação entre os elementos de dois conjuntos e podemos defini-la uma lei de formação, em que, para cada valor de x, temos um valor de f(x). Chamamos cada valor de x de domínio e f(x) ou y de imagem da função"(*Equipe da naftalina)

b) As funções podem ser classificadas em grupos denominados de famílias. Essa classificação se dá pelas fórmulas que as definem ou outras caraterísticas comuns.

vi. Família do tipo (f(x) = y = m.x + b, com *m* e *b* reis)
vii. Família do tipo ($f(x) = y = x^p$, com p constante)
viii. Família do tipo ($f(x) = y = b^x$, com b > 0)
ix. Polinomiais ($f(x) = y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$)

c) Questiona os discentes sobre a classificação a que pertence a função obtida no experimento.

"Polinomiais (f(x) = ***$(f(x) = y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0)$"*** *(*Equipe da naftalina)

Esse item, portanto, expôs as características gerais de algumas das principais famílias de funções reais e contribuiu para o aprofundamento do tema. Evidente que fiz intervenções nesse momento, esclarecendo dúvidas e melhorando a definição de alguns termos.

Uma intervenção relevante foi aquela em que os elementos importantes do conceito de Função foram relacionados às variáveis observadas no experimento, ou seja, frisando que a variável independente, geralmente associada a "x", representa no experimento os valores do tempo (t) ao passo que a massa relaciona-se com os valores de f(x).

Outra consideração importante e que deve ficar evidente para os discentes é que esses dois conjuntos de valores (tempo e massa) se relacionam bionivocamente por meio de uma relação matemática, ou seja, uma Função que, como vimos, foi obtida por meio do recurso computacional VCN.

Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos tiveram a oportunidade de identificar as variáveis envolvidas, analisar como elas se relacionaram, criar hipótese para a irregularidade no decaimento da massa e discutir soluções que poderiam ser adotadas para minimizar influências externas no experimento. Além disso, mesmo a sublimação da naftalina não tendo apresentado um padrão, foi possível obter uma Função que mapeou o conjunto de dados fornecidos por eles.

A Função, resultado do trabalho investigativo depreendido pelo grupo, se apresenta para estes como um produto carregado de significados. Esse elemento contextual presente na lei, certamente facilitará o entendimento do conceito formal de Função. Em geral, os alunos veem esses conceitos de forma abstrata, sem muita relação e com pouco significado para eles. Relacionar conceito matemático a situações práticas sempre favorece a aprendizagem e acrescenta sentido a elementos que em regra são abordados apenas no campo teórico.

O segundo item (orientação 2), sugere aos alunos a definição precisa e formal da função que melhor representou o experimento desenvolvido por eles.

> *“A função determina uma função polinomial que é dada por um polinômio, ou seja, para todo x pertencente ao domínio da função, encontramos o valor de y na imagem”(Equipe da naftalina).*

O terceiro item (orientação 3) aborda os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. Depois de pesquisarem esses conceitos, o grupo determinou o domínio e a imagem que definiram a função da sublimação da Naftalina.

> “Domínio: Representado pelo conjunto A. É um conjunto de valores possíveis da abscissa (x), ou seja, a região do universo em que a função pode ser definida. Contradomínio: representado por todos os valores do conjunto B (y). Imagem: É o conjunto dos valores das ordenadas (y) resultantes das aplicações da função f(x), ou seja, da lei de associação mencionada”.

Evidente que os conceitos apresentados pelos alunos carecem de melhor análise e fundamentação. São conceitos estruturantes das funções e foram discutidos durante as aulas em que esse conceito foi abordado.

Distinguir imagem e contradomínio é uma dos principais cuidados a ser tomado já que não raro eles são encarados como iguais e nem sempre isso é verdade.

O quarto item (orientação 4) sugere aos alunos do grupo que determinem a imagem e o domínio da função obtida no experimento. A solução pode ser vista abaixo.

“Domínio: ($x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq t_f$)”

“Imagem: ($y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 31,1$)”(Equipe da naftalina)

Como podemos observar, o grupo determinou o domínio e imagem dentro da noção real do experimente, ou seja, a imagem representada pela massa da naftalina, no entendimento dos alunos, começa com 31,4 gramas, para a primeira pesagem ($t = 0$ dia) e depois de um tempo qualquer (t_f) a massa, devido ao processo de sublimação, é zero. Não houve menção ao contradomínio, no entanto, é possível afirmar que a função polinomial obtida, ainda que a partir de quantidade pequena de valores, possui contradomínio real.

A solução descrita pelo grupo está adequada ao caso concreto em que o experimento foi observado. Do ponto de vista real não se pode imaginar uma massa da naftalina ou um tempo negativos. Evidente que os conceitos de domínio e imagem da função polinomial, obtida pelos discentes, é mais amplo e envolve todo o conjunto dos números reais. Se olharmos a Função Polinomial apenas do ponto de vista matemático, as variáveis “x” e “y” podem assumir valores reais. Nesse sentido, é importante que os alunos percebam o aspecto mais amplo do campo de existência de uma função. O subconjunto descrito acima é o mais adequado para retratar a situação real observada por eles durante o experimento, mas não são apenas esses os valores que podem assumir o domínio e a imagem da função obtida e é evidente que essas questões foram discutidas e esclarecidas durante a atividade.

As orientações 05 e 06 abordaram a problemática da não regularidade da sublimação, os alunos discutiram as possíveis causas e levantaram algumas hipóteses. Segundo o grupo, podem ter interferido nos resultados: “Fatores externos, como a mudança de clima”. E, na opinião deles, as medidas a serem tomadas para reduzir as influências externas seriam:

> “Colocaríamos a experiências onde os fatores externos não influenciassem tanto sobre o projeto, como em um ambiente onde a temperatura não variasse e não houvesse nem um agente externo para que adquirisse umidade”.

Como podemos observar, as hipóteses levantadas parecem coerentes, apesar de não termos o tempo disponível para testá-las, o fato de refletir sobre as possíveis influências e as ações a serem tomadas para reduzir os problemas encontrados insere os alunos em um ambiente investigativo que estimula a curiosidade, o desafio e a busca por respostas convincentes e matematicamente sustentáveis. Devemos ressaltar também que nem sempre será possível controlar essas variáveis externas, ou pela dificuldade fática de se fazer isso ou mesmo por elas próprias fazerem parte do próprio fenômeno. Reforçamos que a não regularidade na sublimação da naftalina não frustrou o objetivo da atividade. Conforme comentamos anteriormente, a atividade investigativa é marcada por um processo de construção continua de conhecimento, chegar ou não à solução inicialmente pretendida é uma mera consequência que não pode ser encarada como algo melhor ou pior que o processo como um todo.

O conhecimento produzido pelo homem até a atualidade não foi obtido de forma linear e imediata. Nas aulas em que se aplicam atividades investigativas, conforme lembra Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) a variabilidade de percursos que os alunos seguem, os avanços e recuos, as divergências, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis. Desse modo, o fato de os alunos não terem encontrado regularidade na sublimação da naftalina, abriu espaço para discussões mais amplas e levantamento de novas hipóteses, além disso, abordamos a importância do rigor metodológico durante o estudo de um determinado tema, os cuidados que a metodologia científica requer para que não se chegue a conclusões equivocadas diante de um problema analisado.

4.2.3 A projeção da sombra.

O experimento consistiu em observar rigorosamente, ao longo do dia, o comprimento da sombra projetada por um bastão de um metro de comprimento. A atividade foi realizada na quadra poliesportiva da própria escola e os três componentes da equipe fizeram medições periódicas a cada hora do comprimento da sombra projetada registrando os dados em uma tabela.

O grupo realizou a atividade seguindo orientações do Roteiro de Estudo 01 (projeção) que, de início, sugeriu aos alunos uma pesquisa e relato do feito de Tales de Mileto, um dos sete sábios da antiguidade. Por volta do ano 600 A.C., Tales de Mileto surpreendeu o faraó Amasis ao determinar a altura da pirâmide de Quéops, sem escalá-la. A situação descrita apresenta uma aplicação relevante envolvendo projeções, proporções, geometria e realça a importância do tema analisado pelos alunos.   Embora nosso objetivo seja analisar o comportamento da sombra sob o aspecto de uma função, o cálculo realizado por Tales evidencia as inúmeras aplicações da Matemática enquanto ferramenta do desenvolvimento humano.

O quesito 02 (orientação 2) sugere que os alunos façam um pequeno relato dos procedimentos adotados pela equipe para a realização do experimento. Segundo relato:

> *“Para este experimento foi usado uma vara e uma fita métrica. Foi instalada a vara no centro de uma quadra para que nada obstruísse o raio solar. Com a ajuda de uma fita métrica medimos o comprimento da sombra da vara em relação ao sol. As medidas foram feitas a partir das nove horas e teve o seu término às dezesseis horas. A sombra era medida e registrado o comprimento de uma em uma hora*.”(Equipe projeção da sobra)

Figura 11: Aferimento da projeção da sombra

Fonte: Arquivo do autor

As orientações 03 e 04 sugeriram que os alunos registrassem os dados em uma tabela e posteriormente organizasse os pares (tempo x comprimento) em um plano cartesiano.

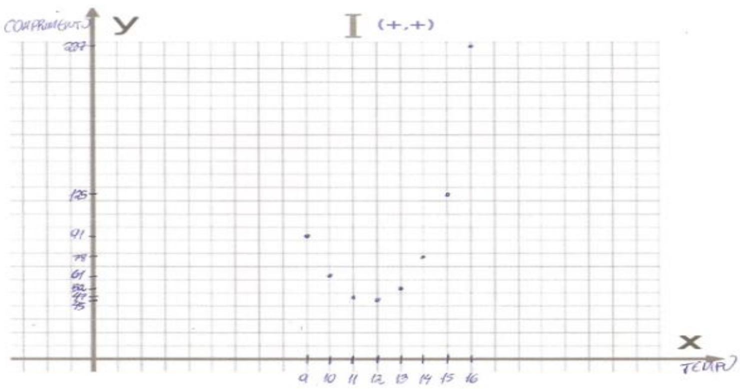
Figura 12: Dados do comprimento da projeção da sombra em função do tempo

REGISTROS DAS VARIÁVEIS – TEMPO E COMPRIMENTO		
DATA	TEMPO (HORAS)	COMPRIMENTO (CM)
	Tempo Inicial (t_0) T_0 =	Comprimento Inicial (C_0) C_0 =
03/09	9 : 00	91cm
03/09	10:00	61 cm
03/09	11:00	47 cm
03/09	12:00	45cm
03/09	13:00	52 cm
03/09	14:00	78 cm
03/09	15:00	135 cm
03/09	16:00	237 cm

Fonte: Arquivo do autor

A distribuição dos pares ordenados revelou que a relação matemática entre o tempo e o comprimento da sombra projetada muito se assemelha com as curvas comuns às funções quadráticas.

Figura 13: Representação do comprimento em função do tempo no plano coordenado.



Fonte: Arquivo do autor

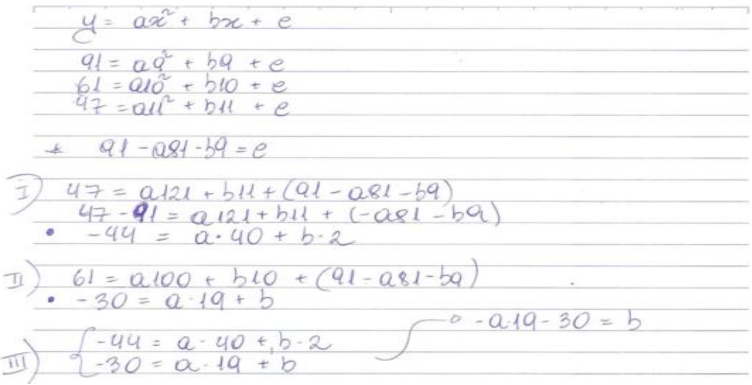
Os alunos logo identificaram que os pontos seguiam um aparente padrão. Ao ligar esses pontos do plano cartesiano, os discentes encontraram uma curva parabólica e após discutirem hipóteses perceberam que possível função candidata a modelar o experimento seria uma função polinomial de segundo grau.

Questionados, nas orientações 05 e 06, sobre a possibilidade de se obter uma lei que relacionasse as variáveis tempo e comprimento, os alunos responderam positivamente conforme relato:

> “Sim, por obedecer e se comportar em uma função do 2º grau. Há uma equação que consegue estimar o comprimento relacionado às horas”. (Equipe projeção da sobra)

A próxima orientação (07) desafiou os alunos a encontrarem a lei (função) capaz de relacionar os pontos do gráfico. No início os alunos encontraram dificuldade para elaborar a função. Nesse momento, fiz algumas intervenções sugerindo aos alunos escolherem três pontos do plano cartesiano (x, y) – (hora, comprimento) substituindo-os na fórmula canônica da função polinomial de segundo grau ($y = ax^2 + bx + c$). Com isso os alunos obtiveram três equações lineares e depois de algum algebrismo, conseguiram determinar os valores dos coeficientes da função candidata à modelagem da projeção da sombra, conforme podemos ver na imagem abaixo.

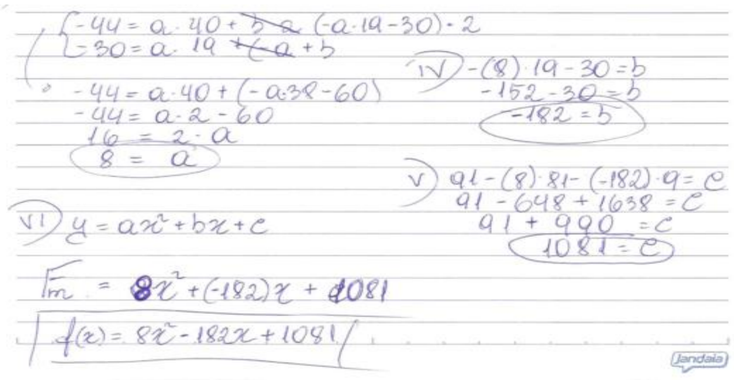
Figura 14: Cálculo da Função associada à projeção da sobra



Fonte: Arquivo do autor

Nessa primeira parte, determinaram três equações lineares usando os pontos (9, 91), (10, 61) e (11, 47). A incógnita *c* foi isolada a partir da primeira equação e substituída nas outras duas, com esse procedimento eles chegaram a um sistema linear mais simples com duas incógnitas e duas equações. Aplicando a esse novo sistema, procedimento semelhante ao anterior, nesse caso, isolando o *b,* os alunos determinaram todos os coeficientes (*a, b* e *c*) da expressão $y = ax^2 + bx + c$. Abaixo temos a sequência da operação.

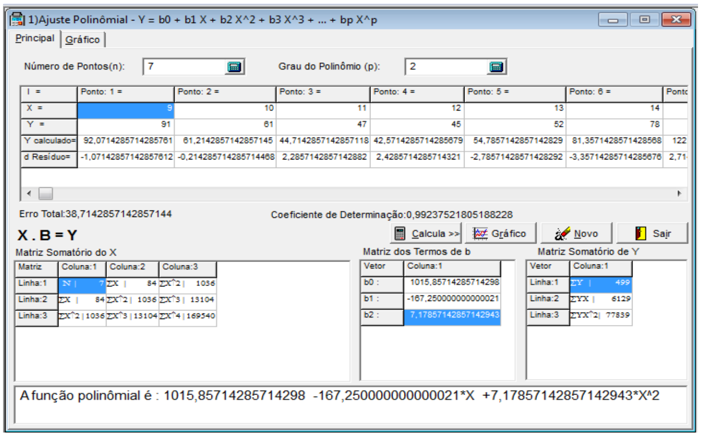
Figura 15: Cálculo da Função associada à projeção da sobra (continuação)



Fonte: Arquivo do autor

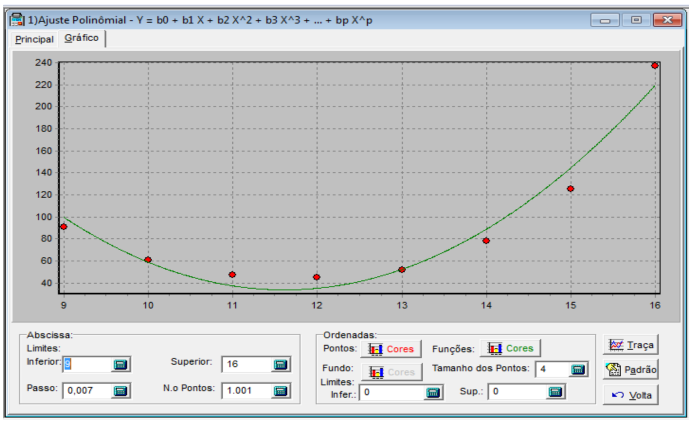
A Função obtida pelo grupo foi corroborada pelo recurso computacional CVN. Ao lançar os sete primeiros pontos coordenados no programa, a função gerada muito se assemelha à obtida manualmente pelos alunos.

Figura 16: Função polinomial quadrática obtida pelo VCN



Fonte: Arquivo do autor

Figura 17: Gráfico da Função polinomial obtida pelo VCN



Fonte: Arquivo do autor

Ao obter algebricamente uma Função $(y = 8x^2 - 182x + 1081)$, relativamente próxima da gerada pelo programa $y = 7{,}178.x^2 - 167{,}25.x + 1015{,}86$), os alunos puderam comprovar o resultado do trabalho investigativo que fizeram e ratificaram as hipóteses levantadas. Esse fato gerou uma evidente satisfação, por parte do grupo.

O envolvimento prestado pelos discentes durante a atividade foi claro, houve um empenho constante, principalmente no momento em que foram desafiados a obter a função e tiveram um retorno positivo de seu trabalho ao perceber que os cálculos realizados estavam coerentes com a situação prática investigada. Estavam ansiosos em obter uma “fórmula” que funcionasse e que fosse “deles”, de seu próprio experimento. Esse momento representou um dos pontos altos da atividade, ver alunos do ensino secundarista envolvidos por um espírito investigativo, movidos por uma curiosidade evidente e focados no seu objeto de estudo representa uma situação clara de produção de conhecimento Matemático. Esse ambiente de aprendizagem chamou os alunos a agirem como verdadeiros matemáticos, pois eles se envolveram na formulação de questões e hipóteses, no cálculo de fórmulas, na testagem, fizeram comparações e confirmações e, além disso, apresentaram e discutiram com os demais colegas os resultados de seu trabalho, (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016).

A equipe conseguiu, guardadas as proporções, manipular uma situação real e, por meio de uma linguagem matemática, retrataram-na em termos numericamente abstratos. Perceber essa caraterística singular que tem a Matemática enquanto linguagem que interpreta fatos reais em termos numéricos, é um ponto importante na formação matemática de nossos alunos. A investigação de uma simples projeção da sombra e a leitura desse fenômeno em linguagem matemática, nesse ponto de vista, permitiu descontruir a imagem equivocada de que a Matemática da sala de aula tem pouca ou nenhuma aplicação prática. Acrescentemos ainda o fato de que houve uma participação ativa dos alunos durante a realização da atividade. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a realização de investigações matemáticas coloca os discentes em um poderoso processo de construção do conhecimento.

Concluída essa atividade de caráter mais investigativo, passamos ao Roteiro de Estudo 2 . O objetivo, como dito, é formalizar o conceito de função e apontar as caraterísticas específicas da lei obtida pelos alunos.

O item 01 do relatório 2 apresenta três considerações aos alunos:

a) Defina formalmente o conceito de uma função do ponto de vista Matemático. Os alunos assim responderam a esse quesito.

*"Considere dois conjuntos A e B, não vazios. Uma relação **f** de A em B é uma função se, somente se, para todo elemento x de A existir, em correspondência, um único elemento y de B, tal que o par (x, y) pertença a **f**."*(Equipe projeção da sobra). (LIMA, 2017, p. 44)

b) As funções podem ser classificadas em grupos denominados de famílias. Essa classificação de dá pelas fórmulas que as definem ou outras caraterísticas comuns.

x. Família do tipo ($f(x) = y = m.x + b$, com *m* e *b* reis)
xi. Família do tipo ($f(x) = y = x^p$, com p constante)
xii. Família do tipo ($f(x) = y = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$)
xiii. Polinomiais ($f(x) = y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$)

c) Questiona os discentes sobre a classificação a que pertence a função obtida no experimento.

***"**Polinomiais ($(f(x) = y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$), nesse caso, uma função polinomial de 2º grau definida como $f(x) = ax^2 + bx + c$"* (Equipe projeção da sobra)

Esse item, portanto, expôs as características gerais das funções reais, permitiu aos alunos aprofundamento de seu conceito. Evidente que foram feitas intervenções nesse momento, esclarecendo dúvidas e melhorando a definição de alguns termos. Nesse momento, foi esclarecido o papel dos conjuntos A e

B, mencionados na definição do item a, e a qual deles pertencem os valores de tempo e comprimento notados no experimento, frisando que a “relação f” de que fala o conceito é a relação matemática obtida por eles e pelo programa. Sendo lembrados, ainda, que para cada hora do dia analisada só há um comprimento associado, ou seja, não é possível, em uma mesma hora (tempo), se obter dois comprimentos para a sombra.

O conceito de Função descrito pelos alunos do grupo foi obtido do material didático adotado pela escola e, como vimos, foi encaixado dentro de uma situação fática investigada pelo discente. Dessa forma, os termos que estruturam o conceito de função receberam comparações empíricas e estão carregados de significados. Essa metodologia investigativa permitiu aos discentes confrontar aquilo que eles produziram com o conhecimento matemático já produzido e registrado nos livros. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

> [Os alunos podem ter] um sabor da Matemática em construção e do trabalho criativo e independente… [Eles podem] generalizar a partir da observação de casos, [usar] argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta (PÓLYA, apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, P. 19)

A fala corrobora o objetivo da atividade e está alinhada à proposta da investigação matemática enquanto metodologia de ensino escolar. Construir um conceito matemático de uma situação concreta é apresentar a Matemática como ferramenta indispensável à interpretação do mundo. Incluir a descoberta, a criação, a investigação e as comparações no processo de aprendizagem, é dar ao aluno oportunidade de construir seu próprio conhecimento e laborar seu espírito criativo e reflexivo.

Na atividade desenvolvida, fica clara a diferença entre resolver um exercício puro e simples e realizar uma atividade com uma forte presença do elemento investigativo. Por exemplo, seria possível solicitar aos alunos resolver um exercício em que se deseje obter uma função polinomial de segundo grau fornecendo-lhes três pares coordenados quaisquer. Esse exercício, do ponto de vista operacional, é o mesmo desenvolvido pelos alunos quando encontraram os coeficientes da Função quadrática associada ao experimento. No entanto, se observarmos a carga conceitual ligada à atividade investigativa, em que os pares (tempo, comprimento) possuem forte representação empírica, podemos considerar que o legado adquirido, no que se refere a aprendizagem e a significação, são bem mais substanciais comparados aos exercícios-padrão.

O segundo item do RE2, sugere aos alunos a definição precisa e formal da função que melhor representou o experimento desenvolvido por eles. A definição dada pelo grupo foi a seguinte.

“Dados os números reais a, b e c, com a ≠ 0, denomina-se função do 2º grau (ou função quadrática) a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na forma: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. O gráfico dessa função é chamado de parábola e é obtido com a ligação dos pontos x e y. O gráfico da sombra e do tempo ficou parecido com um parábola por isso achamos que nossa função é do segundo grau”. (Equipe projeção da sobra).

Na solução, notamos que o grupo percebeu a relação entre a atividade prática e a conceito formal da função quadrática. Sugere-se que os discentes identificaram adequadamente os elementos formais da Função quadrática em seu experimento. Essa identificação é um ponto importante no ensino da matemática, é algo que os professores devem promover sempre, devemos reconsiderar a prática docente que transmite uma matemática exclusivamente apartada das situações cotidianas, sobretudo na educação básica. Esse ensino exclusivamente tecnicista e tradicional ofusca o papel singular que a Matemática exerce enquanto ciência capaz de compreender o mundo e promover sua melhoria.

O terceiro item (orientação 03) abordou os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. Depois de pesquisarem esses conceitos, o grupo determinou o domínio e a imagem que definem a função quadrática.

“Domínio de f: É o conjunto de todos os valores assumidos pela variável independente x. Contradomínio de f ou conjunto de chegada de f: É o conjunto formado por todos os possíveis valores da variável dependente y, quer y tenha correspondente no domínio ou não. Imagem de f: É o subconjunto de contradomínio cujos elementos y têm correspondente x no domínio.” (Equipe projeção da sobra).

O quarto item (orientação 4) sugeriu aos alunos que determinassem a imagem e o domínio da função obtida no experimento, a solução dada pelo grupo é a que segue:

“Domínio e imagem da função do 2º grau”

$D \in \mathbb{R}$

$IM = \{y \in \mathbb{R} / y > yv\}$

“Domínio e imagem do experimento”

$D = (x \in \mathbb{R} \mid 9 \leq x \leq 16)$”

$IM = (y \in \mathbb{R} \mid 45 \leq y \leq 237)$” (Equipe projeção da sobra)

Analisando a solução do item, duas considerações relevantes devem ser feitas. A primeira diz respeito ao conceito de vértice da parábola que influencia na definição da imagem da função quadrática e que foi bem representado no início da solução. A segunda consideração diz respeito ao subconjunto definido pelos alunos como sendo o domínio e a imagem do experimento. Eles se atentaram ao fato de que a imagem da função quadrática está relacionada à ordenada máxima ou mínima da função e utilizaram o menor valor observado no experimento para definir o início inferior (ponto mínimo) da imagem da função.

A atividade desenvolvida, portanto, incorporou de significado o conceito da função quadrática. Facilitou a compreensão de aspectos importantes como domínio, imagem, vértice, concavidade e forneceu elementos para que o estudo desse tipo de função fosse aprofundado de forma mais consistente e substancial ao longo do ano.

4.2.4 Lei de Boyle

Lei de Boyle-Mariotte (geralmente citada somente como Lei de Boyle) enuncia que a uma temperatura constante, o volume de uma certa massa constante de um gás, mantida em um sistema fechado é inversamente proporcional à pressão a qual está submetida. Em outras palavras, ela afirma que o produto da pressão e do volume é uma constante para uma devida massa de gás confinado enquanto a temperatura for constante. As primeiras observações experimentais quantitativas do comportamento dos gases foram realizadas por Robert Boyle (Lismore Castle, 25 de janeiro de 1627 - 31 de dezembro de 1691, filósofo natural anglo-irlandês) e Edme Mariotte (Dijon, c. 1620 — Paris, 12 de Maio de 1684, cientista e padre francês)[2], daí o nome dessa lei.

A Lei de Boyler, foi o fenômeno investigado pelos alunos desse grupo. Assim como fizemos como os outros grupos, sugerimos aos alunos a leitura e análise de um texto em que princípios da Lei de Boyle são aplicados, essa foi a primeira questão do Roteiro de Estudo 01 (Lei de Boyle). O texto explica o funcionamento do motor à combustão interna (Ciclo Otto)[3]. Uma máquina que trabalha com os princípios da termodinâmica e com os conceitos de compressão e expansão (pressão x volume) de fluidos gasosos para gerar força e movimento rotativo. Criado e patenteado por Nikolaus August Otto, por volta do ano de 1866, este motor funciona com um ciclo de quatro tempos e os mesmos princípios são aplicados até os dias atuais. A proposta da leitura, além de revelar uma aplicação dos princípios que foram estudados pelo grupo, procurou demonstrar o caráter interdisciplinar entre as várias áreas do conhecimento, pois relacionou conhecimentos da química, física além dos aspectos matemáticos.

No item dois (orientação 2) os alunos pesquisaram os conceitos de pressão e volume. Como são conceitos importantes dentro da atividade desenvolvida por eles, entendo relevante melhorar o entendimento relativo aos dois termos. Segundo eles:

> “Pressão: é uma palavra que significa força que é exercida sobre alguma coisa. Pode também indicar o ato de comprimir ou pressionar”.
>
> “Volume: é a medida do espaço ocupado pelo sistema”. (Equipe Lei de Boyle).

Para analisar a relação volume x pressão conforme a Lei de Boyle os alunos elaboraram, com auxílio do professor pesquisador, um sistema fechado que recriou o experimento usado pelos cientistas. Utilizamos uma garrada pet, uma seringa graduada em 60mL, uma válvula de retenção, um calibrador em

---

[2] Disponível: http://docplayer.com.br/37902157-Fisico-quimica-i-termodinamica-do-equilibrio.html
[3] Disponível: http://www.infomotor.com.br

libras e uma bomba de ar. A montagem do sistema seguiu os seguintes passos:

01. Recuamos o embolo da seringa até o limite obtendo o maior volume de ar possível no seu interior. Na sequência vedamos o bico da seringa pra evitar passagem do ar interior.
02. Colocamos a seringa dentro garrafa pet em cuja tampa foi instalada a válvula de retenção de ar. Rosqueamos a tampa da garrafa até obter uma vedação completa obtendo assim um sistema fechado.
03. Com auxílio da bomba pressurizamos o sistema e a pressão interna da garrafa pet pressionou o embolo da seringa reduzindo o volume em seu interior. Quanto maior a pressão interna da garrafa, maior foi o deslocamento do embolo e menor o volume do ar preso dentro da seringa.

Figura 18: Aferindo a pressão e o Volume

Fonte: Arquivo do autor

Na orientação 3, solicitamos ao grupo que formulasse um relato do experimento e do procedimento adotado por eles para coletar os dados, seguem abaixo as considerações que fizeram.

> *"Os alunos deste grupo realizaram a seguinte experiência da Lei de Boyle, que a mesma era, que em determinado recipiente que continha uma seringa em mL, quando colocado pressão dentro do recipiente o volume diminuía, ou seja, quanto maior a pressão menor o volume".* (Equipe Lei de Boyle).

Nas orientações 4, e 5, os alunos submeteram o sistema a vários níveis de pressão que foi medida por um calibrador graduado em libras. Para cada nível de pressão foi anotado o volume interno da seringa, os dados foram anotados em uma tabela e revelaram o comportamento inversamente proporcional, conforme esperávamos.

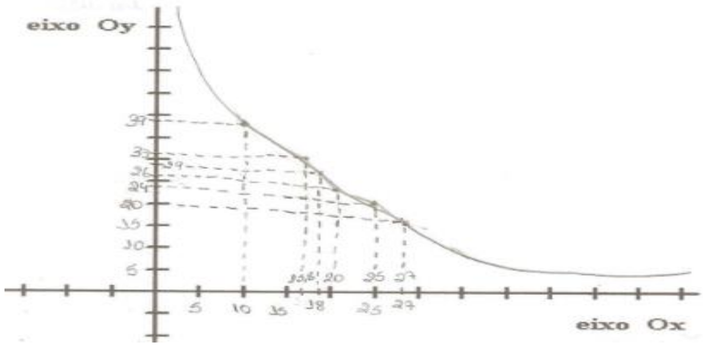
Figura 19: Registro da Pressão e do Volume

REGISTROS DAS VARIÁVEIS – PRESSÃO E VOLUME		
DATA	PRESSÃO (LIBRAS)	VOLUME (ML)
	Pessão Inicial (p_0) Po = 0	Volume Inicial (V_0) V_0 = 60 ml
	10 libras	39 ml
	15,8 libras	33 ml
	18 libras	29 ml
	20 libras	26 ml
	25 libras	24 ml
	27 libras	20 ml

Fonte: arquivo do autor

Os dados da tabela foram representados aos pares no plano cartesiano e a curva resultante ao se ligar os pontos revela a característica inversamente proporcional das variáveis pressão e volume.

Figura 20: Representação gráfica do volume em função da pressão



Fonte: Arquivo do autor

As próximas ações da equipe estão relacionadas à análise e tratamento das informações levantadas. As orientações 6 e 7 de RE1 levaram os alunos a conjecturar um padrão no comportamento das variáveis envolvidas, conforme relatam:

“A função está decrescente em função do volume” e

“A partir dos valores é possível estimar o volume para uma pressão determinada. Observa-se pelo comportamento do gráfico que quanto maior a pressão menor o volume”. (Equipe Lei de Boyle).

A existência dessa relação entre volume e pressão, ao que parece, foi notada pelo grupo. A próxima orientação seguinte provocou os alunos no sentido de identificarem um modelo matemático apropriado ao fenômeno, ou seja, eles foram desafiados a criar uma Função matemática capaz de relacionar os valores de pressão e volume.

Embora fosse evidente a existência de um padrão entre pressão e volume, o grupo não conseguiu, de imediato, decidir qual relação matemática seria a mais adequada à modelagem do fenômeno. Mesmo tendo feito um estudo prévio sobre a Lei de Boyle e visto que as grandezas volume e pressão são inversamente proporcionais, eles partiram da hipótese de que a função capaz de modelar os dados do experimento seria uma exponencial.

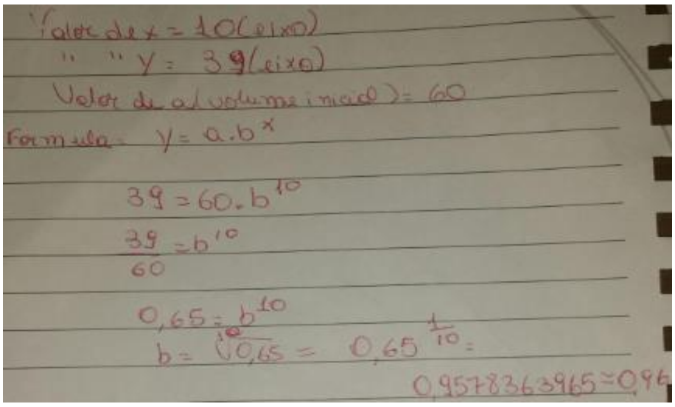
A decisão certamente foi influenciada pelo aspecto da curva obtida no experimento que muito se assemelha ao gráfico das funções exponenciais. Vale ressaltar ainda, que não foi adiantado ao grupo nenhum conceito de função exponencial e a escolha foi uma decisão soberana dos próprios discentes a partir de consultas a materiais didáticos. Esse fato foi notado, mas quando se trabalha com uma atividade investigativa, é preferível que o aluno trabalhe de forma totalmente autônoma, reservado ao professor o papel de regulador da atividade. Cabe a ele, no entanto, ajudar o aluno a compreender o significado de investigar e aprender a fazê-lo, (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016). Além disso, uma atividade investigativa envolve vários processos, dentre eles a formulação, teste e reformulação de conjecturas.

Se a hipótese conjecturada pelo grupo não foi a mais adequada, isso será revelado na fase de teste dessa hipótese. O importante é que os alunos compreendam que durante uma investigação matemática, escolhida uma solução para o problema, devemos tentar comprová-la e, se ao longo do processo ela não se apresentou adequada, devemos reconsiderar, criar novas hipóteses, reaproveitar o que já foi construído e formular uma solução que possa ser validada e aceita matematicamente.

A nós professores, cabe o cuidado de não oferecer aos alunos a direção correta, pois fazendo isso, vamos tirar do discente aquilo que há de mais valioso nas atividades investigativas, a autonomia e o caráter desbravador que são elementos fundamentais do processo reflexivo a que desejamos submeter nossos discentes. Pensando nisso, permitiu-se que os alunos trabalhassem com essa hipótese da função exponencial até que alguma incoerência os convencesse de que não é a exponencial o modelo mais apropriado ao experimento.

A hipótese de que uma função exponencial seria a melhor escolha para modelar os pontos da tabela foi levada adiante pelos alunos e, depois de algum algebrismo, conseguiram chegar a uma lei aparentemente adequada ao estudo que fizeram. Esse processo foi acompanhado e o grupo orientado na formulação da lei que julgou adequada. A função foi obtida a partir de pontos do gráfico, esses valores foram substituídos na fórmula estruturante da função exponencial ($f(x) = y = a.b^x$, com $b > 0$, $b \neq 1$ e $a \in \mathbb{R}$). A manipulação realizada pelos alunos foi bastante engenhosa, primeiro eles consideram o volume inicial da seringa em 60mL (êmbolo todo estendido) obtendo a expressão $y = 60.b^x$, em que ***y*** representa o volume e ***x*** a pressão exercida. Em seguida, escolheram o ponto (10,39) e depois de algumas manipulações e emprego da calculadora, foi possível chegar ao valor aproximado de *b* = 0,96. Conforme se observa na figura 21.

Figura 21: Cálculo da constante b da Função exponencial



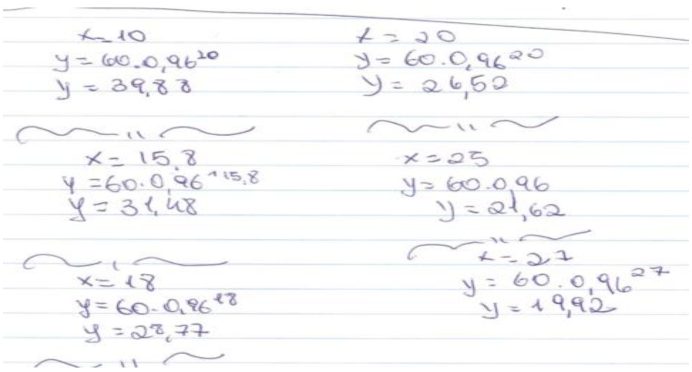
Fonte: Arquivo do autor

Esse procedimento rendeu ao grupo uma função exponencial definida da seguinte forma:

$$“y = 60.0,96^x”$$

Interessante é que a função obtida faz boas aproximações dos valores do gráfico. Durante o teste a que foi submetida, os alunos encontraram os seguintes valores.

Figura 22: Teste da Função exponencial obtida



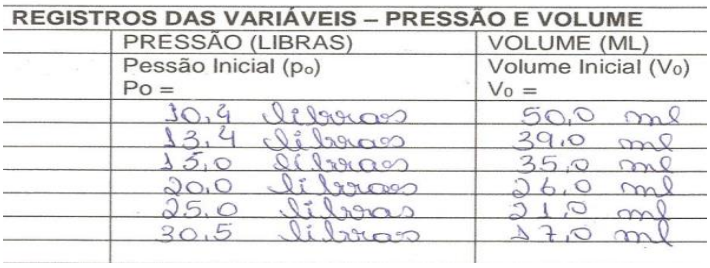
Fonte: Arquivo do autor

Como se vê, se desconsiderarmos as pequenas divergências entre os valores anotados na tabela e os obtidos pela fórmula, poderíamos até aceitar a função como uma lei apropriada à modelagem do experimento. No entanto, sabe-se que a relação volume e pressão dos gases, mantida constante a temperatura, se comporta de maneira inversamente proporcional e uma exponencial não se apresenta como a melhor ferramenta de modelagem desse fenômeno. Além disso, há nas medições feitas pelos alunos dois pontos que não foram bem mensurados. Os pares coordenados (10, 39) e (25,24) apresentaram muita oscilação em relação aos demais. É claro que não é exigido medidas milimétricas, mas é preciso que os valores sejam quantificados com rigor e critério para que os erros sejam os mínimos.

Se estivesse diante de uma atividade convencional de matemática, muito provavelmente o trabalho desenvolvido pelos alunos seria descartado uma vez que o procedimento apresenta “erros”. No entanto, nas aulas investigativas podemos programar o modo de começar, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percurso que os alunos seguem, os seus avanços e recuos e as divergências que surgem entre eles são elementos largamente imprevisíveis numa aula investigativa (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016). Nesse sentindo, sugerimos aos alunos reavaliar a hipótese levantada, melhorar as medidas e aprofundar o entendimento sobre a Lei de Boyler.

Seguindo as orientações o grupo refez a atividade o obteve a tabela e o gráfico conforme figuras 23 e 24.

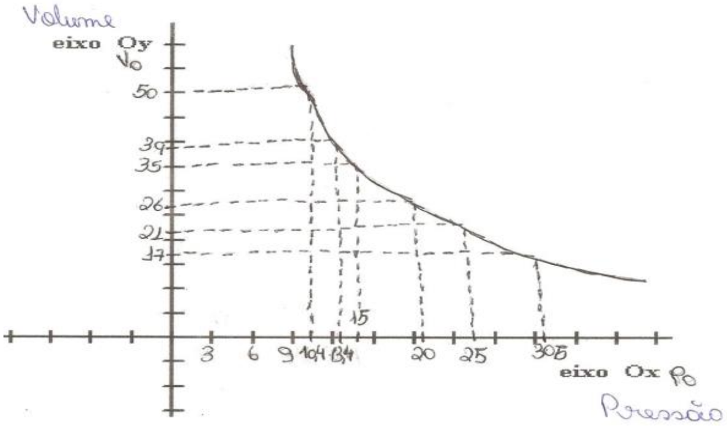
Figura 23: Registro das novas medidas de volume e pressão



REGISTROS DAS VARIÁVEIS – PRESSÃO E VOLUME		
	PRESSÃO (LIBRAS)	VOLUME (ML)
	Pessão Inicial (p_o) Po =	Volume Inicial (V_0) V_0 =
	10,4 libras	50,0 ml
	13,4 libras	39,0 ml
	15,0 libras	35,0 ml
	20,0 libras	26,0 ml
	25,0 libras	21,0 ml
	30,5 libras	17,0 ml

Fonte: Arquivo do autor

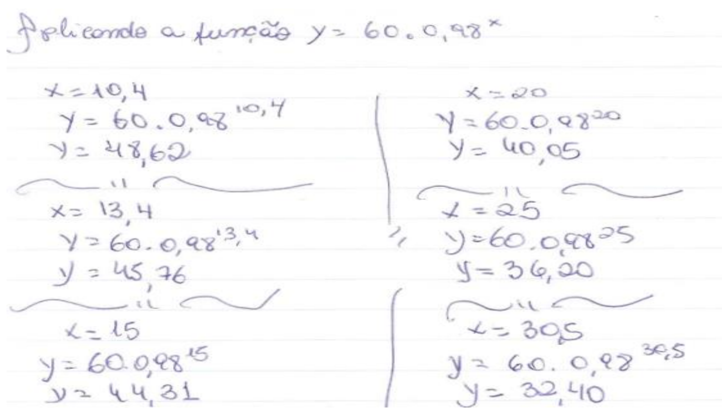
Figura 24: Representação gráfica das novas medidas de volume e pressão



Fonte: Arquivo do autor

Aplicando o mesmo procedimento anterior, ou seja, considerando que os dados seguem um padrão exponencial, os alunos encontraram a função "$y = 60.0{,}98^x$". Essa lei atendeu adequadamente ao primeiro ponto, usado para cálculo da base *b.* No entanto, começou a falhar consideravelmente para os demais valores de pressão e volume. Considerando, por exemplo, a pressão (x = 25) e aplicando a lei, obtiveram y ≅ 36,20mL, o que representa um volume bem destoante dos 21mL obtido na medição.

Figura 25: Teste da nova Função exponencial



Aplicando a função $y = 60.0{,}98^x$

$x = 10{,}4$
$y = 60.0{,}98^{10,4}$
$y = 48{,}62$

$x = 13{,}4$
$y = 60.0{,}98^{13,4}$
$y = 45{,}76$

$x = 15$
$y = 60.0{,}98^{15}$
$y = 44{,}31$

$x = 20$
$y = 60.0{,}98^{20}$
$y = 40{,}05$

$x = 25$
$y = 60.0{,}98^{25}$
$y = 36{,}20$

$x = 30{,}5$
$y = 60.0{,}98^{30,5}$
$y = 32{,}40$

Fonte: Arquivo do autor

Depois do teste feito com a função, os alunos se convenceram de que a função exponencial não foi uma boa alternativa para modelar a Lei de Boyle. Diante disso, eles começaram a levantar novas hipóteses e conjecturar outra estratégia de solução para o problema. Parte da discussão está transcrita abaixo e foi acompanhada pelo professor /pesquisar.

Ana Luiza: - Ué gente, se no texto fala que é inversa, então a função é inversa. E tem função inversa?

Ana Caroline: - Nunca vi falar.

Ana Luiza: - Deve ter, se a gente estudou isso em química, tinha uns gráficos dos gases.

Maria Eduarda: - Bora pesquisar se tem função inversa então. Cadê o módulo. Eu vi alguma coisa de função inversa nele.

A referência feita pela aluna diz respeito à propriedade que algumas funções possuem em admitir inversa. A definição a que eles recorreram pode ser verificada no livro de Álgebra, 1ª série de Gustavo Maximino Lima, a qual transcrevemos abaixo “Considere $f\colon A \to B$ uma função bijetora. Denomina-se $f^{-1}\colon B \to A$ a função inversa de f se, somente se, para qualquer $(x, y) \in f, (y, x) \in f^{-1}$ ". (LIMA, 2017, p. 6)

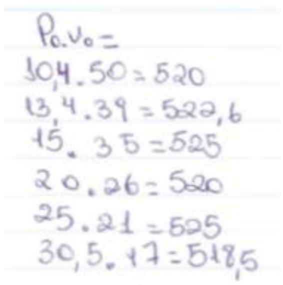
Ana Luiza: - Não entendi nada. (Fazendo referência à definição de função inversa apresentada no material didático adotado pela escola).

Ana Luiza: - Gui (professor/pesquisador), ajuda a gente.

O conceito de função inversa pesquisado apresenta uma linguagem formal e técnica e é de se esperar que os alunos encontrassem dificuldade em entendê-la. Diante disso, foram passadas algumas orientações no que diz respeito à definição escrita no módulo didático. Ressaltei que em Matemática o termo inverter é utilizado para descrever uma função que troca de volta o que uma outra função faz, ou seja, cada uma desfaz o que a outra fez, (ANTON, 2014). Nesse sentido, foi esclarecido aos discentes que as funções inversas, são aquelas obtidas de outras dita invertíveis. Para tanto, é necessário que a função original (invertível) atenda algumas características, dentre as quais ser bijetora. Além disso, as funções que admitem inversas formam um conjunto amplo e inclui uma grade variedade de famílias. As características necessárias a uma função de modo que ela admita inversa não foi aprofundado naquele momento, pois seria objeto de estudo em aulas posteriores.

Na segunda intervenção, foi sugerido aos alunos que multiplicassem os pares cartesianos um a um, ou seja, multiplicasse o volume pela pressão e anotassem os resultados. O produto concentrou-se em torno de um número mais ou menos constante, algo já esperado, pois as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais. Essa caraterística foi identificada pelos alunos conforme se pode ver:

Figura 26: Teste da Constante de Proporcionalidade



Fonte: Arquivo do autor

Ana Luiza: - O valor deu sempre alguma coisa perto de entre 518 e 525.

Professor: - Então tente obter um número que melhor represente todos os valores.

Ana Luiza: - Podemos escolher o que está mais no meio?

Professor: - É uma possibilidade, mas já pensaram em calcular a Média aritmética entre eles?

Ana Luiza: - Pode ser, mas vai dá parecidos os valores.

Após realizarem o cálculo da Média Aritmética entre os produtos, o valor obtido pelos alunos foi a constante 521,85.

Professor: - Se chamarmos o volume de y e a pressão de x, como poderemos relacionar essas variáveis em função do 521,85?

Grupo: - x vezes y é igual a 521,85, ou seja, $x.y = 521{,}85$

Professor: - É possível criar uma relação de dependência entre as grandezas de tal forma que uma esteja em função da outra?

Ana Luiza e Ana Caroline: - Podemos passar um dividindo e isolar.

Anal Luiza: - Passa o x ai fica o y isolado.

Professor: - E qual o resultado dessa operação?

Ana Luiza: - Fica $y = \frac{521{,}85}{x}$

Professor: Podemos chamar essa expressão de função:

Ana Carol: - Acho que sim.

Ana Luiza: - Acho que sim, Gui.

Maria Eduarda: - Também acho que sim.

Professor: - E por que vocês acham que a expressão é uma função?:

Ana Luiza: - Porque o valor de y *depende do valor de* x*, um tá em função do outro.*

Com esse procedimento, os alunos obtiveram uma equação que pode ser expressa como $x.y = k$, sendo k uma constante Real não nula. Nesse caso, pode-se afirmar que a y é uma variável inversamente proporcional a uma variável x se houver uma constante k não nula, denominada constante de proporcionalidade tal que:

$$y = \frac{k}{x}$$

As funções envolvendo grandezas inversamente proporcionais estão associadas à chamada função recíproca (funções do tipo $f(x) = \frac{1}{x}$) e são classificadas como funções de potências, ou seja, funções da família $y = x^n$, em que n é uma constante, (ANTON, 2014). Voltando à atividade, percebemos que os alunos, depois das orientações, estruturaram argumentos coerentes que os levaram a uma solução adequada para o caso investigado. Nesse sentido, é fundamental que eles fundamentem as conclusões obtidas nas bases formais do conceito de função potência e, para isso, foi aplicado o Roteiro de Estudo 02 (Lei de Boyle) que, como dito, tem como objetivos uma melhor formalização do conceito de função e apontar as caraterísticas específicas da lei obtida pelos alunos.

O item 01 do RE2 apresenta três considerações aos alunos:

a) Defina formalmente o conceito de uma função do ponto de vista Matemático. Os alunos assim responderam a esse quesito.

“Definimos função como a relação entre dois ou mais conjuntos, estabelecida por uma lei de formação, isto é, uma regra geral. Os elementos de um grupo devem ser relacionados com os elementos do outro grupo através dessa lei”.(Equipe Lei de Boyle)

b) As funções podem ser classificadas em grupos denominados de famílias. Essa classificação se dá pelas fórmulas que as definem ou outras caraterísticas comuns.

i. Família do tipo (f(x) = y = m.x + b, com *m* e *b* reis)
ii. Família do tipo (f(x) = y = x^p , com p constante)
iii. Família do tipo (f(x) = y = b^x , com b > 0)
iv. Polinomiais **(**f(x) = y = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$)

c) Questiona os discentes se a expressão obtida no experimento é uma função e em caso positivo qual a classificação mais adequada considerando as opções do item b.

Nesse quesito, os alunos sentiram dificuldade de relacionar a lei obtida com uma das classificações fornecidas. Isso fica claro nas falas abaixo.

Ana Luiza: - Gui (professor/pesquisador), a nossa (função) não tem classificação. Quer ver? A nossa deu tipo uma fração e não tem fração nas opções.

Maria Luiza: - Professor, o senhor colocou a classificação da nossa?

Foram feitas então algumas intervenções, relembrando propriedades das potências, principalmente àquelas relacionadas a expoentes inteiros negativos. Perguntei a eles se poderíamos escrever a expressão $y = \frac{521,85}{x}$ da seguinte forma:

$$y = \frac{521,85}{x} \rightarrow y = \frac{1.\ 521,85}{x} \rightarrow y = \left(\frac{1}{x}\right).521,85 \rightarrow y = (x)^{-1}.521,85$$

Ana Luiza: - Ficou parecida com a ii, mas o p é positivo.

Ana Caroline: - E o 521,85 entra onde?

As duas colocações revelam algumas das dificuldades que os alunos têm em compreender estruturas matemáticas escritas em representação mais geral. Foram feitas algumas perguntas ao grupo para que os estudantes pensassem um pouco sobre os termos usados no conceito.

Professor: - Quando afirmamos que o p é uma constante, isso que dizer o quê?

Ana Caroline: - Pelo sentido da palavra é que não vai mudar.

Foi explicado ao grupo que quando usamos uma letra e afirmamos que ela representa uma constante, como é o caso do p, estamos dizendo que essa letra pode ser substituída por um número qualquer, desde que esse número atenda as exigências da expressão da qual faça parte. Na definição da função potência, o p não representa um valor necessariamente positivo e pode assumir valores inteiros negativos, portanto, é perfeitamente possível substituir o p pela constante inteira -1.

Para esclarecer a duvida da aluna Ana Carolina, quanto ao 521,85, fizemos as seguintes construções algébricas.

$$y = (x)^p.k \quad \rightarrow \quad y = (x)^{-1}.1 \rightarrow \quad y = (x)^{-1}$$

$$y = (x)^p.k \rightarrow y = (x)^{-1}.521{,}85 \rightarrow y = 521{,}85.(x)^{-1}$$

A sequência de comparações foi suficiente para que os discentes percebessem que a expressão obtida por eles é, de fato, uma função potência. Além disso, foi salientado que as famílias das funções possuem uma estrutura básica e que outros elementos podem ser acrescidos a ela para que a função se adapte a situações específicas. É o caso, por exemplo, da lei obtida no experimento que precisou ser ajustada para melhor refletir a realidade do fenômeno investigado.

Após essa fundamentação, o grupo concluiu que a expressão obtida com o experimento, trata-se de uma função potência ajustada a fenômenos cujas variáveis pressão e volume se relacionam de forma inversamente proporcional. Feita essa fundamentação, passamos a nos preocupar com a formalização do conceito de Função Potência, mais especificamente com o conceito de Função Recíproca, esse tema foi abordado na orientação 02 do RE2 e abaixo temos a definição descrita pelos alunos.

> *“A chamada Função recíproca é a função da forma f(x) = 1/x, ou seja, o produto xy=1 e x é não nulo porque não está definida a divisão por zero*

e y também é não nulo pois não há número que multiplicado por zero resulte em um”. (Equipe Lei de Boyle)

O conceito nos parece adequado, embora esteja descrito em linguagem não muito formal e foi obtido, conforme revelaM os alunos, no site http://www.oblogdomestre.com.br/2012/03/funcao-reciproca.html.

Precisamente, definimos como função recíproca de x à função f : R∗ → R definida por f(x) = $\frac{1}{x}$, ou seja:

f : R∗ → R

x → $\frac{1}{x}$

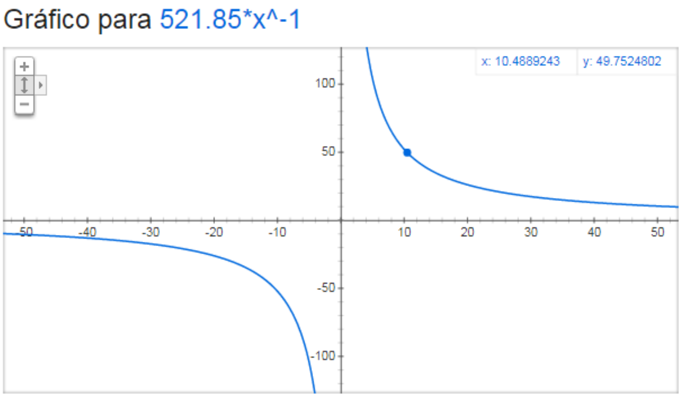
Um passo que consideramos importante é fazer com que os alunos consigam relacionar o conceito apresentado acima com a expressão obtida no experimento. Nesse sentido, o grupo foi questionado se a sequência de operações abaixo descrita estava adequada.

$$y = (x)^p . k \rightarrow y = (x)^{-1} . 521{,}85 \rightarrow y = 521{,}85 . \frac{1}{x}$$

A resposta foi positiva e parece ter ficado claro aos alunos que o fenômeno estudado pode ser representado adequadamente pela função acima definida.

Foi passada, então, a orientação 03 em que a imagem e o domínio da função $y = 521{,}85 . (x)^{-1}$ foram discutidas. Inicialmente, sugerimos aos alunos rescrever a função no campo de pesquisa do google. Esse recurso se mostrou mais apropriado, pois o VCN melhor se aplica a funções polinomiais. Atualmente esse site possui recurso que modela gráficos interativos de uma grande variedade de funções. O resultado da pesquisa gerou o gráfico conforme figura abaixo.

Figura 27: Gráfico da Função reciproca função $y = 521{,}85.(x)^{-1}$



Fonte: https://www.google.com.br/search

A imagem facilita a compreensão dos conceitos do domínio e da imagem da Função em estudo, pois evidencia as regiões em que ela não está bem definida. Conforme dito na definição da Função Recíproca, o valor que x assume é não nulo porque não está definida a divisão por zero e y também é não nulo, pois não há número que multiplicado por zero resulte em um. Esse aspecto foi explorado no questionamento feito:

Professor: - Por que o gráfico da função sofre inclinações ao se aproximar de x e de y?

Ana Luiza: - Eu acho que é porque à medida que o valor de x se aproxima de zero, maior o valor de y aumenta, devido ao x estar no denominador, até ele atingir 0, o que não daria um valor concreto, mas sim infinito.

Ana Carolina: - O gráfico não passa pelo zero, pois o resultado da equação não pode dar zero, porque tem que ter a pressão e o volume.

Pelas declarações, parece ficar claro para os alunos que o valor $x = 0$ pode apresentar alguns problemas do ponto de vista conceitual para a função $y = \frac{521{,}85}{x}$, ou seja, elas notaram que nas proximidades do zero a função não está bem definida. Além disso, parece saliente para eles que, em termos práticos, a pressão e o volume não podem ser iguais a zero, isso reforça a ligação entre o modelo matemático e o fenômeno analisado pelo grupo.

Depois das considerações, foi sugerido ao grupo que pesquisasse a definição de domínio, imagem e contradomínio de uma função. A descrição abaixo, apresentada por eles foi extraída do material didático adotado na escola.

“Domínio de f: É o conjunto de todos os valores assumidos pela variável independente x”.

“Contradomínio de f ou conjunto de chegada de f: É o conjunto formado por todos os possíveis valores da variável dependente y, quer y tenha correspondente no domínio ou não”.

“Imagem de f: É o subconjunto de contradomínio cujos elementos y têm correspondente x no domínio.” (Equipe Lei de Boyle).

A partir da definição acima, que define o domínio, imagem e contradomínio em conceitos gerais, o alunos foram provocados a definir o domínio e da imagem apropriados para a função obtida no experimento. Abaixo temos a descrição dada pelo grupo.

“Dom(f) = $R*$, sem o zero”

“Im(f) = $R*$, sem o zero”

Percebe-se, pela solução acima, que eles identificam a impossibilidade de o zero frequentar o domínio e a imagem da função $y = \frac{521,85}{x}$. Do ponto de vista prático é inviável pensar em volume e pressão iguais a zero, do ponto de vista formal, a função não está definida para estes valores. À medida que tomamos valores para x cada vez mais próximos do zero e positivos, os valores de f(x) tornam-se cada vez maiores e podem ser tão grandes quanto se queira; à medida que tomamos valores para x cada vez mais próximos de zero e negativos, os valores de f(x) se tornam-se cada vez menores e podem ser tão pequenos quanto se queira. Isso ficou evidenciado no gráfico. Outra característica marcante da Função Reciproca é a presença de assíntotas e foi aproveitado o contexto para comentar sobre esse conceito e mostrar que retas y = 0 e x = 0 são chamadas assíntotas horizontal e vertical, respectivamente, do gráfico.

Diante do que foi relatado, pode-se dizer que essa equipe foi a que encontrou maior dificuldade durante a atividade investigativa. Foi necessária uma maior intervenção do professor pesquisador no sentido de mediar algumas estratégias mais adequadas ao estudo do fenômeno. Vale ressaltar, porém, que houve uma preocupação em não fornecer respostas prontas aos alunos e se buscou criar um ambiente aberto, propício à reflexão e à investigação.

As idas e vindas em uma aula investigativa são normais e perfeitamente aceitáveis, é nesse momento que surge a oportunidade de tencionar novas direções, buscar novas estratégias, testar hipóteses, construir e reconstruir modelos em favor de respostas mais apropriadas à situação estudada. Foi o que aconteceu com o grupo, a princípio, convencido de que a Lei Gasosa de Boyler obedecia a um modelo exponencial e, posteriormente, a partir de uma interpretação mais adequada das variáveis e uma melhor releitura dos dados, concluíram pelo modelo inversamente proporcional do qual chegaram à função recíproca.

Os dois relatórios, portanto, tentaram recriar um ambiente fecundo de aprendizagem, pautado em uma metodologia investigativa que forneceu aos alunos a possibilidade de criar e reinventar seu próprio conhecimento.

4.3 Apresentação das atividades

A fase de discussão e apresentação dos resultados é um momento importante de comunicação e partilha de conhecimento. É o momento em que os alunos justificam suas descobertas matemáticas, divulgam os resultados obtidos e compartilham suas ideias. Para atender essa importante fase das aulas investigativas, organizamos um seminário em que cada grupo apresentou aos demais colegas os resultados obtidos no experimento. Essa culminância foi realizada no dia 23 de Novembro de 2016. Na ocasião, foram apresentados os estudos da Naftalina, Projeção da Sombra e Lei de Boyle. A equipe responsável pelo Gotejamento antecipou a divulgação de seus resultados para 08 de Setembro de 2016, nessa data, a escola estava envolvida em uma atividade científica o que representou um momento propício para que os alunos, além de apresentarem a produção de sua investigação, conscientizassem a comunidade escolar dos problemas envolvendo o mau uso da água, sobretudo a questão do desperdício.

Nas apresentações, os grupos enfatizaram resultados e processos mais significativos, sistematizaram as principais ideias e fizeram uma reflexão do trabalho desenvolvido relatando as dificuldades e evidenciando os pontos positivos.

O primeiro grupo a se apresentar foi a turma da projeção da sombra. Os alunos elaboraram o material em *PowerPoint* e após relatarem todo o procedimento realizado no experimento, demonstraram os principais aspectos da função obtida. Explicaram a forma como coletaram os dados, apresentaram a tabela onde eles foram registrados, mostraram a função, o gráfico e falaram sua classificação além de comentarem sobre a dificuldade de se obter essa função manualmente. Na sequência, eles exibiram a função e o gráfico gerado pelo recurso o computacional VCN e frisaram a semelhança entre as duas leis e os dois gráficos. Concluíram a apresentação esclarecendo o domínio e a imagem da função quadrática, abordaram os conceitos de ponto máximo e mínimo e explicaram sobre a sobrejetividade, classificação da qual a função quadrática pertence.

Figura 28: Apresentação dos resultados, projeção da sombra.

Fonte: Arquivo do autor

A equipe da Naftalina também elaborou material em *PowerPoint* e relataram todo o procedimento realizado no experimento, chamaram a atenção sobre os cuidados que se deve ter ao manusear substâncias químicas e relataram pontos da pesquisa que fizeram sobre o uso descuidado da Naftalina. Explicaram como foram feitas as pesagens cujos dados foram registrados em uma tabela e apresentada aos demais. Evidenciaram o fato de não terem obtido uma regularidade no decaimento da massa da naftalina apontando possíveis hipóteses que podem ter provocado essa irregularidade.

Na sequência, eles exibiram a função e o gráfico gerados pelo recurso computacional VCN e esclareceram que aquela foi relação matemática que melhor se aproximou dos pontos da tabela. Classificaram a função e apresentam o domínio e a imagem da mesma.

Figura 29: Apresentação dos resultados, sublimação da naftalina

Fonte: Arquivo do autor

O grupo responsável pelo estudo da Lei de Boyle organizou uma projeção e, assim como os demais, relataram os procedimentos usados na coleta de dados, apresentaram os equipamentos usados para simular o fenômeno e comentaram sobre algumas das aplicações dessa lei em casos reais. Esse grupo, como havíamos comentado, precisou rever a hipótese levantada inicialmente quanto à Função que melhor se ajustava à Lei de Boyle. Elas relataram que inicialmente levantaram a hipótese segundo a qual a Função Exponencial seria o modelo apropriado ao estudo da Lei de Boyle. Esclareceram, no entanto, que depois de reavaliar os resultados e fazer medições mais precisas, concluíram que o modelo exponencial não era o mais adequado.

Após se reunirem e, discutirem novamente os dados e aprofundarem o estudo da Lei, sempre mediado pelo Professor, eles levantaram a hipótese de que a função aplicada ao caso seria uma função Potência, tese que foi confirmada após novas discussões, testes, cálculos. Esclareceram que a nova lei se tratava de um modelo inversamente proporcional e por conta disso o domínio e a imagem não poderiam assumir valores iguais a zero. Um ponto que merece destaque foi a relação que o grupo fez entre as disciplinas de

Matemática e Química. Elas chamaram a atenção para o fato de a Lei de Boyle ser estudada nesta disciplina quando se analisa o comportamento dos gases.

Figura 30: Apresentação dos resultados, Lei de Boyler

Fonte: Arquivo do professor

O grupo responsável pelo estudo do Gotejamento, como havíamos dito, apresentou os resultados durante uma Feira de Ciências, organizada pela escola e realizada em 08 de setembro de 2016. Esse evento foi aberto a toda a comunidade escolar e envolveu todos os professores, alunos e apoiadores. O grupo apresentou o equipamento elaborado para simular a torneira gotejante e explicou o procedimento utilizado para a coleta de dados. Apresentaram a Função afim obtida e o gráfico associado a ela, falaram ainda sobre sua classificação, domínio e imagem. Um ponto marcante da apresentação foi os exemplos práticos usando o modelo matemático obtido no experimento: $q(t) = 125.t$, em que o tempo (t) é dado em horas e $q(t)$ em ml. Eles calcularam o desperdício de água para o período de um mês e fizeram algumas simulações conforme descrito na sequência. Em um mês temos aproximadamente 720 horas, aplicando este valor $(t = 720\,horas)$ na função $q(t) = 125.t$ chegamos a um valor aproximado de 90.000 mL ou 90 litros de água desperdiçada ao mês. Os números começam a ficar mais surpreendentes quando os alunos apresentaram a seguinte situação: Segundo dados de 2010, do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), há em Vitória da Conquista 77.917 domicílios particulares permanentes urbanos. Considerando a situação hipotética em que cada um desses domicílios exista uma torneira gotejando à mesma vazão da torneira do experimento, observe as conclusões a seguir:

01 – Como uma única torneira desperdiça 90 litros (noventa litros) de água por mês, teríamos um desperdício de $90 * 77.917 = 7.012.530\ litros$, ou seja, mais de sete milhões de litros de água seriam desperdiçados na cidade em um mês.

02 – Considerando uma residência em que o consumo mensal seja de 6.000 litros (seis mil litros), os $7.012.530$ de litros seriam suficientes para abastecer essa residência por quase 100 (cem) anos.

$$7.012.530 : 6.000 = 1.168{,}755\ meses$$

Isso equivale a aproximadamente 97,4 anos.

As duas informações apresentas pelo grupo chamaram a atenção de vários visitantes, muitos ouvintes expressaram a relevância da atividade e ficaram surpresos com os números. Muitos relataram a pouca importância que damos ao desperdício e raramente paramos para pensar no estrago que uma simples gota pode fazer ao final de longos períodos. Os alunos acrescentaram que a Matemática nos ajuda a compreender melhor esta e outras situações, além de fornecer uma leitura mais racional e precisa da dimensão de diversos problemas cotidianos.

Figura 31: Apresentação dos resultados, gotejamento.

Fonte: Arquivo do autor

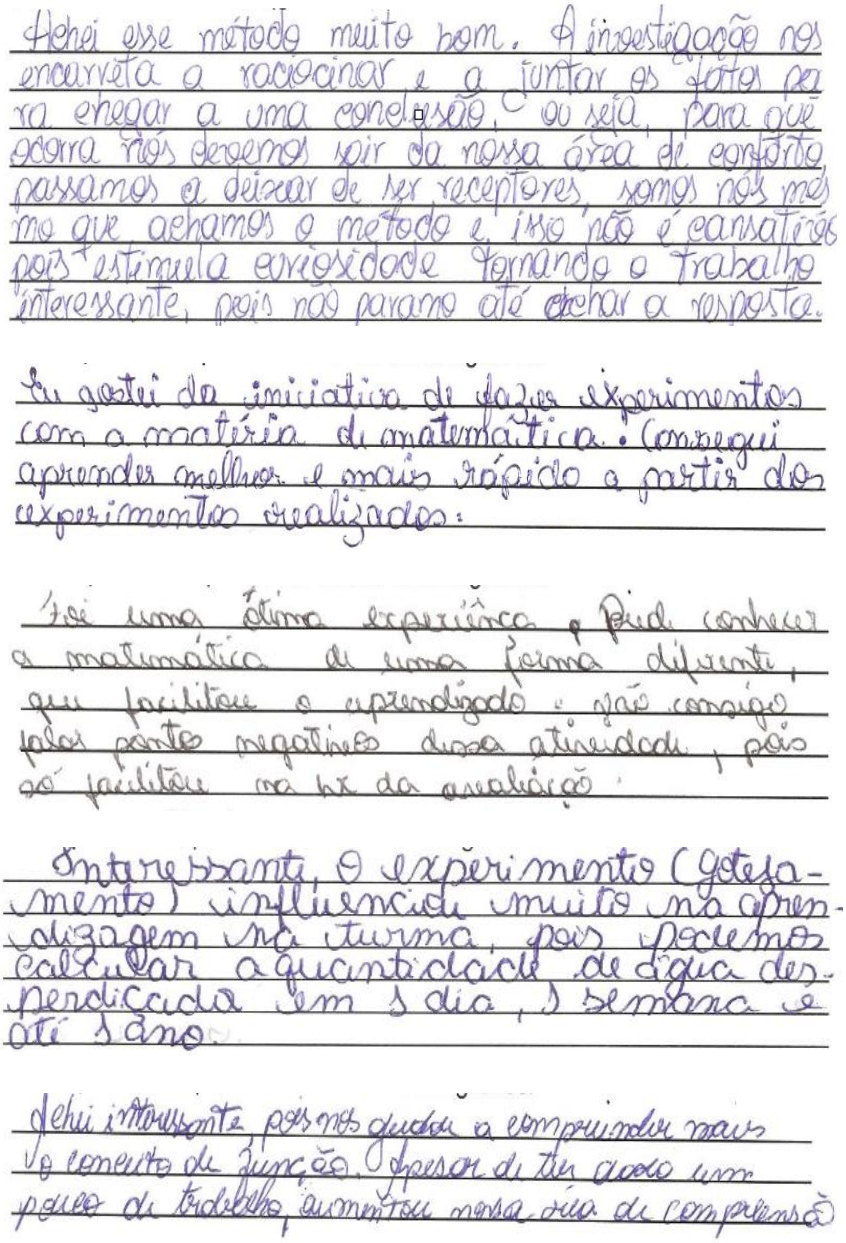
4.4 Relatório Final

As primeiras ações deste trabalho, como vimos na metodologia, se deu com a aplicação do questionário de sondagem cuja preocupação foi fazer uma leitura da turma e de suas percepções quanto à disciplina de Matemática. Na sequência, foram aplicadas as atividades investigativas mediante realização de quatro experimentos, em seguida, melhor reorganização dos resultados obtidos durante as atividades e formalizando o conceito de Função. Além disso, realizamos uma apresentação em que os resultados obtidos ao longo de todo o estudo foram discutidos e "publicizados" a todos os alunos e membros da comunidade escola. Nesse momento de discussão, os alunos tiveram a oportunidade de expor suas conclusões, comentar sobre as dificuldades, demonstrar os cálculos, os gráficos e as funções obtidas.

Chega-se agora à última etapa da pesquisa: Questionário final, momento em que se pretende dialogar com os alunos e verificar a impressão que eles tiveram ao trabalhar com atividades de perfil investigativo. Além isso, deseja-se fazer um paralelo entre o relatório final e o questionário de sondagem e verificar se houve alguma mudança na percepção da disciplina Matemática enquanto disciplina plenamente aplicável em situações práticas. Esse questionário, portanto, cumpre um papel importante enquanto elemento de avaliação do trabalho desenvolvido. Juntamente com a apresentação oral, ele retrata as impressões deixadas pelo trabalho investigativo realizado pelos discentes. Além das questões, solicitou-se aos discentes que elaborassem um pequeno relato das atividades realizadas e do ano letivo como um todo. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 110), "os alunos podem ser convidados a referir no relatório não só as conclusões que tiraram da realização de uma tarefa investigativa, mas também os processos que usaram para chegar a essas conclusões".

O primeiro ponto abordado no Relatório final, contendo três itens (*a, b e c)*, foi sobre a Metodologia da Investigação Matemática, mais precisamente, sobre as atividades desenvolvidas. No item ***a*** foi solicitado aos alunos que expressassem uma opinião sobre elas. Abaixo temos alguns dos relatos.

Figura 32: Relato dos alunos


Achei esse método muito bom. A investigação nos
encarrieta a raciocinar e a juntar os fatos pa
ra chegar a uma conclusão, ou seja, para que
ocorra nós devemos sair da nossa área de conforto,
passamos a deixar de ser receptores, somos nós mes
mo que achamos o método e, isso não é cansativo
pois estimula curiosidade tornando o trabalho
interessante, pois não paramo até achar a resposta.

Eu gostei da iniciativa de fazer experimentos
com a matéria de matemática. Consegui
aprender melhor e mais rápido a partir dos
experimentos realizados.

Foi uma ótima experiência, pude conhecer
a matemática de uma forma diferente,
que facilitou o aprendizado e não consigo
falar pontos negativos dessa atividade, pois
só facilitou na hr da avaliação.

Interessante, o experimento (gotejamento) influenciou muito na apren-
dizagem na turma, pois podemos
calcular a quantidade de água des-
perdiçada em 1 dia, 1 semana e
até 1 ano.

Achei interessante pois nos ajudou a compreender mais
o conceito de função. Apesar de ter dado um
pouco de trabalho, aumentou nossa área de compreensão

Fonte: Arquivo do autor

Pelos relatos, percebe-se que os alunos aprovaram a Metodologia da Investigação Matemática e em alguns trechos é possível ver como essa metodologia ataca pontos que julgamos problemáticos no ensino da Matemática escolar. No primeiro relato, por exemplo, o aluno expõe uma das principais caraterísticas das atividades investigativas: dar autonomia ao aprendiz para que ele crie estratégias de aprendizagem, onde a ele é dada a oportunidade de sair do status passivo e assumir uma postura de agente de seu próprio conhecimento, conforme se vê no trecho destacado: “(...) nós devemos sair da nossa área de conforto e passamos a deixar de ser receptores, somos nós mesmos que achamos o método”[4]. O fragmento revela uma quebra no paradigma das aulas tradicionais, evidencia a importância de inserirmos o aluno no processo de aprendizagem enquanto agente que também constrói conhecimento e ressalta o quanto as atividades investigativas favorecem um ambiente propício à reflexão, questionamentos e estímulo da curiosidade.

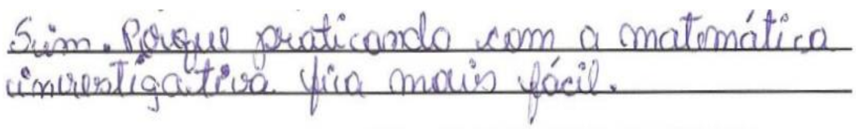
Outra colocação relevante foi o relato segundo o qual a aluna enfatiza a maneira diferente como a Matemática foi apresentada, segundo ela: “(...) pude conhecer a Matemática de outra forma diferente, que facilitou o aprendizado (...)[5]”. Certamente, o trecho expõe a quebra na rotina do ensino da Matemática, marcada quase que exclusivamente por aulas expositivas seguidas de exercícios exemplificativos, atividades e avaliações.

No item b, foi perguntado aos alunos quais as dificuldades enfrentadas durante a realização das atividades.

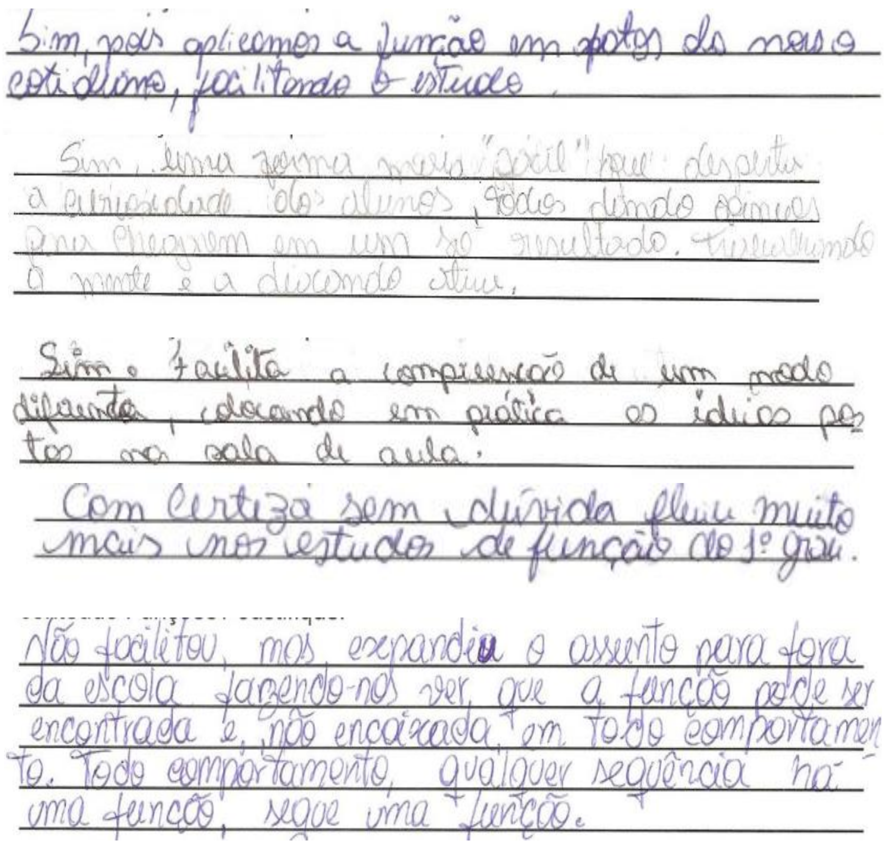
Os experimentos foram diferentes e cada um apresentava variados graus de dificuldade, ora quanto sua execução, ora quanto ao tratamento dos dados. Por esse motivo, alguns grupos não apontaram dificuldades, como foi o caso dos alunos que estudaram o gotejamento. O grupo que ficou responsável pela projeção alegou problemas climáticos, como a nebulosidade que atrapalhou a medição da sombra no exato momento em que deveria ser feita. A equipe da Lei de Boyle ressaltou a dificuldade em encontrar a Função associada ao fenômeno e o Grupo da Naftalina não alegou dificuldade.

O item c perguntou aos alunos se a Metodologia da Investigação Matemática facilitou o estudo do conteúdo Funções. Esse item é relevante, pois aborda o objetivo central deste trabalho. Abaixo segue o recorte das principais considerações feitas pelos alunos.

Figura 33: Relato dos alunos



[4] Relato do aluno integrante da equipe projeção da sombra.
[5] Relato da aluna integrante da equipe sublimação da naftalina.


Sim, pois aplicamos a função em fatos do nosso cotidiano, facilitando o estudo.

Sim, uma forma mais "fácil" que desperta a curiosidade dos alunos, todos tendo formas para chegarem em um só resultado, trabalhando a mente e a discordo atuar.

Sim. Facilita a compreensão de um modo diferente, colocando em prática os idéias pos tos na sala de aula.

Com certeza sem dúvida fluiu muito mais nos estudos de função do 1º grau.

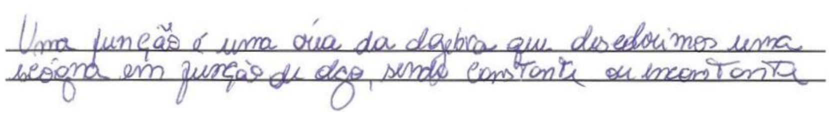
Não facilitou, mas expandiu o assunto para fora da escola fazendo-nos ver que a função pode ser encontrada e, não encaixada em todo comportamento. Todo comportamento, qualquer sequência há uma função, segue uma função.

Fonte: Arquivo do autor

A maioria dos relatos aponta que as atividades investigativas contribuíram para a compreensão do conteúdo Funções. No último relato, no entanto, o aluno afirmou que a atividade não facilitou o estudo do tema funções. Por outro lado, realça o fato de a atividade expandir o conteúdo para além da escola e relata a possibilidade de encontrar funções associadas a comportamentos e sequências. Talvez o conceito de Função, dentro do aspecto matemático, não tenha ficado claro para este aluno. Mas não parece complicado melhorar essa definição, já que ele possui um conjunto de informações associado ao tema função, que foi desenvolvido ao longo da atividade por ele realizada, como foi observado no restante do seu relato.

O quesito 02 do questionário sugeriu aos alunos que definissem, com argumentos próprios, o conceito de Função. Alguns das principais definições estão abaixo.

Figura 34: Relato dos alunos


Uma função é uma área da álgebra que desenvolvimos uma regra em função de algo, sendo constante ou inconstante

Quantidade e tempo.

Todo número em função de outro.
8x8 A em função de B.

São números, valores que crescem ou decrescem, só depende do que é função em que, por exemplo, a distância em função do tempo.

Em meu entendimento, função ~~nos~~ faz compreender ~~porque~~ a causa daquele comportamento, nós faz entender o processo, e nos dá a possibilidade de prever o fim ou a continuação desse processo. Dando uma ideia de voltar ao tempo ainda que estejamos no presente, pois podemos por meio da função, evitar algo que iria dar errado fazendo-o até mesmo dar certo.

Fonte: Arquivo do autor

Analisando os relatos acima, percebe-se certa dificuldade por parte dos alunos em formular o conceito claro do que seja Função. Por outro lado, em se tratando de alunos recém-egressos do ensino fundamental e que normalmente têm dificuldades em organizar e registrar aquilo que fizeram, apresentaram limitações na comunicação matemática, (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016). No entanto, foi identificada a presença de diversos elementos que de certa forma estão associados ao conceito de função. Aspectos como crescimento e decrescimento, relação entre conjunto A e B atrelados à ideia de domínio e contradomínio das funções e noção de previsibilidade relacionada à possibilidade de determinar valores ligados à percepção de tempo futuro, são alguns deles. Além desses elementos, o aspecto central do conceito de Função pode ser identificado em quase todas as definições apresentadas. Se considerarmos a ideia de Função cunhada por Leibniz em 1673, segundo a qual o termo função foi usado para indicar a dependência de uma quantidade em relação a outra, Anton (2014), é possível dizer que os alunos compreenderam o tema.

Essa relação de dependência pode ser identificada na maioria das definições, como podemos perceber nos trechos a seguir: "(...) descobrimos uma lógica em função de outra (...)", "(...) a distância em função do tempo", "todo número em função do outro", "quantidade e tempo". A última definição, no entanto, parece estar mais ligada ao aspecto prático das funções, ou seja, ligada às aplicações e não ao conceito propriamente dito. Esse aluno já havia manifestado certa dificuldade com o entendimento do tema ao afirmar que as atividades não contribuíram para o estudo das Funções. No entanto, conseguir relacionar o conteúdo estudado a casos concretos e perceber a utilização das funções enquanto linguagem que analisa e modela fenômenos, é sim, um grande avanço.

O item 03 do questionário ofereceu aos alunos três considerações quanto às atividades desenvolvidas: Se elas foram mais interessantes que as convencionais (aulas expositivas, testes, exercícios), se preferiam as atividades convencionais ou não perceberam nenhuma diferença entre elas. Além de escolher entres as três opções, os alunos justificaram a escolha. Todos entenderam que as atividades investigativas formam mais interessantes e justificaram a escolha conforme os relatos abaixo.

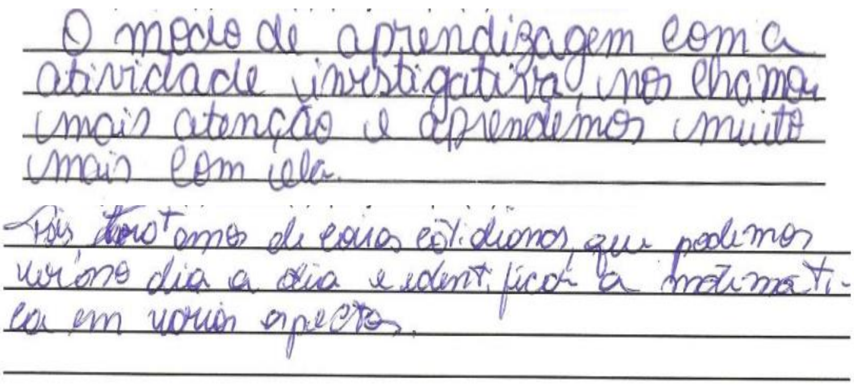
Figura 35: Relato dos alunos

Ela é mais produtiva, pois por ser algo diferente se torna mais interessante e nos dá a oportunidade de pensar para encontrar a direção, fazer o caminho e assim chegar a resposta como os antigos pensadores. Assim, mostra que na matemática, aquela fórmula não é por acaso. Faz saber que a matemática é interpretada e pode interpretar.

Eu achei que é uma forma divertida para aprender a matemática

É diferente e menos cansativo.

Pois conseguimos aprender o assunto de uma forma diferenciada e com mais interatividade.


O meio de aprendizagem com a atividade investigativa nos chama mais atenção e aprendemos muito mais com ela.
Pois tiramos de casos cotidianos, que podemos ver no dia a dia e identificar a matemática em vários aspectos.

Fonte: Arquivo do autor

A análise das justificativas acima permite afirmar que os principais elementos da Metodologia da Investigação Matemática foram notados pelos alunos e a primeira delas evidencia bem o que está sendo afirmado. A justificativa dada pelo aluno resume praticamente todos os aspectos que constituem uma aula investigativa.

As atividades com perfil investigativo, como vimos, ajuda a fazer da sala aula, ou qualquer outro local, um ambiente de aprendizagem que convida o aluno a agir como um genuíno matemático, (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016). Foi exatamente isso que o aluno descreveu ao ressaltar a autonomia que lhe foi dada para pensar e encontrar a direção que o levou à solução do problema. Além disso, parece claro que para ele o conhecimento Matemático não é algo acabado e pronto e por detrás das fórmulas, teoremas e definições há uma lógica muito bem estruturada que dá validade e precisão à Matemática.

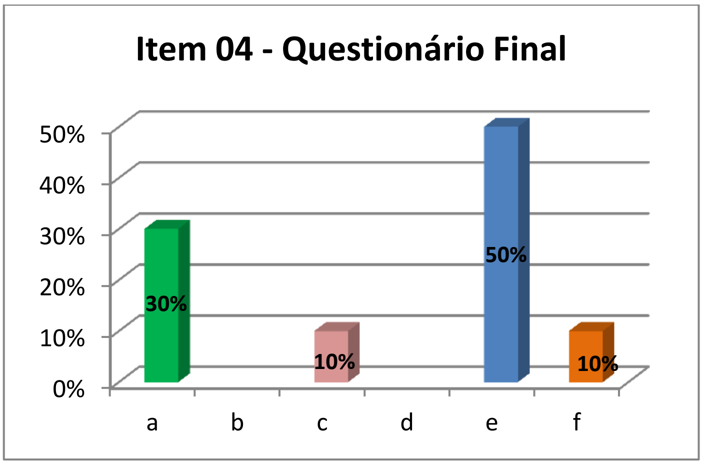
Fazer com que nossos alunos descontruam a ideia de que Matemática é uma disciplina moldada em um amontoado de fórmulas, números, símbolos e letras não é tarefa fácil, mas pode ser facilitada com metodologias de ensino aliadas ao verdadeiro espírito matemático, como é o caso da Metodologia da Investigação Matemática. Além disso, as atividades investigativas, segundo os demais relatos, proporcionou maior interatividade, foi menos cansativa, permitiu relacionar a matemática a situações do nosso dia a dia e representou uma atividade diferente que contribuiu para uma melhor aprendizagem do conteúdo.

O quarto item a ser analisado ofereceu aos alunos seis considerações ligadas à Matemática ensinadas na sala de aula após a realização das atividades investigativas, conforme transcrito abaixo.

a) Faz parte do meu dia a dia e sempre vejo situações relacionadas ao conteúdo.
b) Não tem muita relação com meu cotidiano.
c) É uma disciplina muito difícil e não tem muita importância para mim.
d) Não tenho dificuldade com a disciplina.
e) Passei a gostar e compreender melhor a disciplina.
f) Continuo não gostando da disciplina.

O objetivo foi identificar se, depois de aplicadas as atividades, houve uma melhora na simpatia entre alunos e disciplina e se a presença da matemática em nossa vida cotidiana ficou mais evidente para eles. Vale lembrar que, no Questionário de Sondagem, foi apresentada uma questão semelhante e mais de 60% dos alunos alegaram não perceber relação entre a Matemática da sala de aula e a Matemática do dia a dia. Os dados obtidos estão organizados no gráfico abaixo.

Gráfico 1: Percepção da Matemática ensinada na sala de aula depois da IM



Fonte: Arquivo do autor

Analisando os resultados, é possível fazer duas considerações relevantes. A primeira diz respeito à melhora, mesmo singela, no entendimento de que a Matemática faz parte do dia a dia e notar situações relacionadas aos conteúdos estudados. Antes, 20% dos alunos tinha essa percepção passando a 30% agora. A segunda consideração, essa mais interessante, refere-se ao fato de nenhum aluno ter assinalado a opção segundo a qual a matemática não tem muita relação com o cotidiano (opção b). No Questionário de Sondagem o índice relacionado a este quesito foi de 60%. Isso representa um relevante avanço na percepção da matemática enquanto Disciplina de múltiplas aplicações práticas. Nessa perspectiva, os dados levam a crer numa melhora na relação teoria/prática e revelam uma redução da antipatia com que a maioria dos alunos encara a Disciplina. Aliás, este último ponto ficou bem evidenciado na opção *e*, nela 50% dos alunos afirmaram compreender melhor e gostar mais de Matemática depois das atividades investigativas.

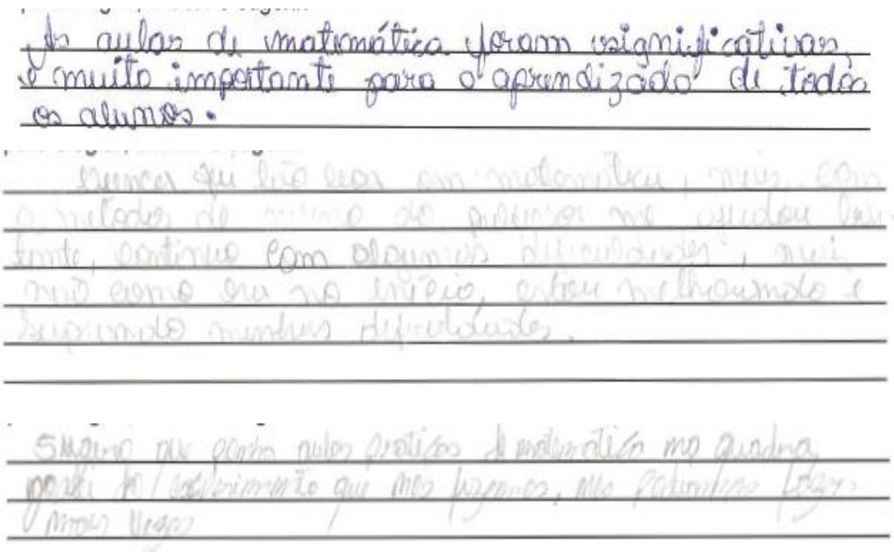
Por último, foi solicitado aos alunos que fizessem um pequeno relato do ano letivo, especificamente sobre a disciplina Matemática e as atividades investigativas desenvolvidas, apontando pontos positivos e negativos observados na condução da matéria. Abaixo estão transcritos os principais relatos dos discentes.

Figura 36: Relato dos alunos

O trabalho de experimentação foi muito bom, mudou a minha maneira de pensar sobre a matemática, que antes em meu entendimento, ela acabava e só era encaixados em pontos que homem fez, como em construções civis, contabilidade financeira, na arte, etc. Mas nunca imaginei que comportamentos naturais, como o crescimento de uma planta, reprodução de animais, o clima, o universo se deve uma regra e que a encontramos, matemática. Todos as minhas críticas são positivas, mas sugiro que tenha mais trabalhos investigativos, mas que aborde questões filosóficas que ainda não conseguimos compreender, que ainda não foram respondidas. Assim fizeram os grandes pensadores, os grandes filósofos, "fizeram" a matemática para explicar muita coisa, o objetivo deles não era "encaixar" a matemática, e sim compreender as questões que eles mesmos se faziam na expectativa que nada é por acaso. Muito obrigada

Foi um ano de muito aprendizado, através das atividades e projetos pude compreender de uma forma diferente a matemática. Pois olhar para ela de outra maneira, com uma nova visão!

As atividades investigativas ajudaram nas aulas de matemática pois foram utilizadas situações cotidianas auxiliaram na compreensão de todo o assunto de função



Fonte: Arquivo do autor

Lendo os relatos, nota-se que as atividades investigativas tornaram as aulas de matemática mais interessantes e produtivas. Essas atividades, conforme pode ser visto, deu à disciplina uma abordagem diferente que favoreceu a aprendizagem e mudou a concepção da Matemática estudada na sala de aula. Além disso, parece que a visão do conhecimento matemático como um conjunto de fatos e procedimentos que trabalham com quantidades, medidas, formas e regras migrou, de certa forma, para um entendimento da Matemática como uma ciência de padrões que se vai construindo por sucessivas tentativas, baseadas na observação e na experimentação, (SANTOS et al, 2002).

Mudar a concepção com a qual os alunos veem a matemática da sala de aula é uma condição necessária ao ensino significativo desta disciplina, segundo Santos

> A visão de que um ensino incidindo sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado das necessidades colocadas por uma sociedade que evolui rapidamente, tem enquadrado e determinado opções e decisões ao nível do desenvolvimento curricular em Matemática (SANTOS el al, 2002, p. 83).

Dentre as opções para melhorar o currículo e consequentemente o ensino matemático, como pode ser visto nos relatos, é a inclusão de atividades de natureza investigativa e exploratória que, ao longo do desenvolvimento deste trabalho, tem mostrado resultados satisfatórios.

CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, a exploração de atividades investigativas foi adotada como metodologia privilegiada no estudo das funções de uma variável para alunos do 1º ano do ensino Médio. Essas atividades foram elaboradas dentro do contexto da Investigação Matemática, tema que tem como principal estudioso o português João Pedro da Ponte e que tem ganhado destaque entre educadores por representar potencialidades para o ensino escolar.

As considerações obtidas com a presente pesquisa retratam os benefícios e algumas das dificuldades em se trabalhar com metodologias inovadoras. No caso da IM percebemos de imediato que seu conceito ainda não está plenamente consolidado entre os professores, principalmente entre os educadores brasileiros. Isso se deve a dois principais motivos: o fato de ser uma proposta nova ainda em estruturação e a ausência dessa temática nos currículos de formação docente. Além disso, as experiências com IM, conforme ressaltamos, ainda está restrita a iniciativas pontuais de alguns professores que se interessam pela proposta e se envolvem em estudos mais aprofundados sobre o tema, como foi o nosso caso.

Outro complicador está relacionado à adequação das atividades investigativas que nada se assemelha às tradicionais listas de exercícios, essas atividades são dotadas de características específicas e devem apresentar problemas abertos, sem uma resposta evidente e é esse perfil desconhecido que provocará o aluno, envolvendo-o em ações investigativas em busca de soluções.

Preparar esse tipo de atividade demanda tempo, conhecimento, organização, planejamento e sua aplicação costuma render ao professor e aos alunos imprevistos que devem ser bem gerenciados. Vale lembrar que a imprevisibilidade é uma característica aceitável e até desejável nas Investigações Matemáticas, pois representa uma situação propícia a maiores aprofundamentos da aprendizagem. No entanto, ela não está relacionada à solução propriamente dita, ou seja, ao enfrentar um problema aberto as hipóteses previamente escolhidas podem não se confirmar exigindo uma mudança no curso da solução elencando novas suposições, a atividade, portanto, deve apresentar um problema solucionável, ainda que solvê-lo implique idas e vindas. Foi o que aconteceu com o experimento da Lei de Boyle em que os alunos realinharam as ações após refutar a hipótese inicial e chegaram à solução adequada.

Acrescento ainda que o trabalho com atividades investigativas exige do professor certos cuidados na condução dos trabalhos. Ele deve se comportar como um mediador acompanhado as ações e sempre preservando as iniciativas dos alunos frente ao problema. Não é benéfica à Investigação Matemática a conduta do professor que direcione explicitamente as estratégias dos alunos, isso tira das atividades investigativas uma de suas principais característica: a autonomia e a criatividade dos discentes.

Com relação aos resultados, podemos dizer que o objetivo principal da pesquisa foi alcançado em proporções satisfatórias, pois a IM contribuiu significativamente para consolidação do conceito de função real por parte de nossos alunos conforme ficou registrado nos relatos do questionário final.

O mesmo pode-se afirmar em relação aos objetivos específicos, certamente os alunos perceberam a relação entre as Funções e os fenômenos cotidianos melhorando o descompasso entre teoria e prática; evidenciaram o papel da Matemática enquanto elemento presente em nosso dia a dia e o quanto ela é fundamental no desenvolvimento da sociedade; se envolveram ativamente na realização das atividades melhorando a aprendizagem e a simpatia pela Matemática. Essas considerações foram observadas durante o desenvolvimento das atividades e ratificadas pelo Questionário Final.

Mesmos diante de tantas dificuldades que envolve o ensino escolar, é possível transformar a realidade de uma sala tornando-a local de múltiplas possibilidades de produção do saber. Essa é a conclusão a que chegamos depois da realização deste trabalho.

Incluir atividades de perfil investigativo, seguindo os pressupostos da Investigação Matemática conforme defendido por estudiosos como Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) requer uma reinvenção do que é ser professor, abandonar algumas práticas enraizadas em modelos tradicionais, descontruir a imagem de que somos o senhor do saber e assumir, ao lado de nossos alunos, uma postura também investigativa.

Do ponto de vista dos alunos, posso dizer que eles tiveram a oportunidade de percorrer as principais etapas da produção do conhecimento, pois a partir do momento em que lhes foi apresentado um problema, se dedicaram à solução do mesmo utilizando estratégias autônomas, levantado hipóteses, registrando e analisando dados, criado expressões matemáticas e testando-as e, por fim, ratificaram conclusões ou refutaram–na por não estar coerente com o problema estudado. Esse processo, guardada as proporções, simula os principais momentos de uma Investigação Matemática e em muito se diverge das atividades convencionais baseadas em exercícios repetitivos nos quais os discente devem obter soluções pontuais.

Nas atividades Investigativas, conforme relatado, a preocupação maior não está centrada em obter o resultado final e sim explorar o percurso feito para se obter tais soluções. É o desenrolar das atividades que representa os momentos mais fecundos de produção do conhecimento e consolidação de aprendizagem. Foi exatamente essa caraterística que procuramos preservar durante a realização desta pesquisa e, a partir dessa prerrogativa e considerando todo o trabalho desenvolvido no estudo das Funções reais de uma variável, concluímos que a Investigação Matemática revelou inúmeras potencialidades para o ensino da Matemática e se apresenta como uma promissora ferramenta metodológica capaz de contribuir para o ensino escolar mais significativo e contextualizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard. Cálculo/Howard Anton, Irl Bivens, Stephens Davis; tradução: Claus Ivo Doering. – 10 ed. – Porto Alegre: Bookman, 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho. ARAÙJO, Jussara de Loiola. Pesquisa qualitativa em educação matemática. Autêntica Editora, 2004.

BRASIL. MEC: Sistema Nacional da Educação Básica. 201 – Aneb e Anresc (Saeb). Disponível em:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/2015/resumo_dos_resultados_saeb_2015.pdf . Acesso em: 25 dez 2016

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 5-24.

BROCARDO, Joana. As investigações na sala de aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 2002.

CHAGAS, E. M. P. F. Educação Matemática na Sala de Aula: problemáticas e possíveis soluções. Millenium - Revista do ISPV - n.º 29 - Junho de 2004. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/31.pdf. Acesso em: 25 nov. 2016.

CHAGAS, Elza Marisa Paiva de Figueiredo. Educação Matemática na Sala de Aula: Problemáticas e Possíveis Soluções. Revista Millenium, 2004. Disponível em: . Acesso em: 03 jun. 2016.

CUNHA, M. H. Saberes profissionais de professores de matemática. Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. *Revista Millenium on-line.* n. 17, 2000. Disponível em: < http://www.ipv.pt/millenium/17_ect5.htm >.

ECHEVERRÍA, Maria P.P.; POZO, Juan.I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J.I. (org) A solução de Problemas. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13-42

ERNEST, Paul. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In.: ABRANTES, P.;LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.). Investigar para aprender matemática. Lisboa, Portugal: Projecto MPT e APM, 1996, p. 25-48.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FONSECA, Helena. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. Actas do ProfMat 99. Lisboa: APM, 1999.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5ª edição. São Paulo: Atlas, 2010. 200 p.

GIL, Antônio Carlos. Métodos e técnicas de pesquisa social. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999

LIMA, Gustavo Maximino, Livro do professor: Álgebra – 1ª série / Gustavo Maximino Lima. – 2. ed. revisada e atualizada para 2017. – Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2016.

MINAYO. Maria Cecília de Souza et al. Pesquisa Social: teoria, método e criatividade. Petrópolis (RJ): Vozes, 2003.

NCTM (1991). Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1989)

PONTE, João Pedro da et al. Histórias de investigações matemáticas. Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, João Pedro da. et al . **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, João Pedro da. et al. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. Quadrante, 7(2), 41-70, 1999.

PONTE, João Pedro da. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. 2003.

PONTE, João Pedro da. **Investigar a nossa própria pratica. In: GTI(Ed.), refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, p.11-34, 2002.

PONTE, João Pedro da. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do profmat. Lisboa: APM, p. 25-39, 2003.

PRODANOV, Cleber Cristiano. Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico] : métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico / Cleber Cristiano Prodanov, Ernani Cesar de Freitas. – 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013

ROCHA, M. L. da. Psicologia e as práticas institucionais: A pesquisa-intervenção em movimento. PSICO, Porto Alegre, v. 37, n. 2, p. 169-174, maio/ago., 2006

ROCHA, M. L.; AGUIAR, K. F. Pesquisa-intervenção e a produção de novas análises. Psicologia: ciência e profissão, Brasília, v. 23, n. 4, p. 64-73, out./dez. 2003.

ROMAGNOLI, R. C. O conceito de implicação e a pesquisa-intervenção institucionalistaPsicol. Soc. vol.26 no.1 Belo Horizonte Jan./Apr. 2014.

SANTOS, C. H. M. . INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS EM SALA DE AULA: PROPONDO E ANALISANDO A APLICAÇÃO DE TAREFAS INVESTIGATIVAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA. In: VIII EPCT - Encontro de Produção Científica e Tecnológica, 2013, Campo Mourão. O MÉTODO CIENTIFICO, 2013.

SANTOS, Leonor et al. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. Dionísio (Orgs). Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores, p. 83-106, 2002.

WICHNOSKI, P. ; KLÜBER, T. E. . Investigação matemática na formação inicial de professores: relato e reflexões. Educação On-Line (PUCRJ) , v. 1, p. 105-125, 2015.

WICHNOSKI, Paulo; KLÜBER, Tiago Emanuel. Uma revisão crítica da tendência Investigação Matemática no Brasil. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática – XIV CIAEM, 14.; 2015, Tuxtla Gutiérrez.