PROFMAT

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ÉRICA GAMBAROTTO JARDIM BERGAMIM

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Maringá

2018

ÉRICA GAMBAROTTO JARDIM BERGAMIM

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Maringá

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Bergamim, Érica Gambarotto Jardim
B493L Lógica matemática : uma proposta de atividades para educação básica / Érica Gambarotto Jardim Bergamim. -- Maringá, 2018.
133 f. : il., color.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2018.

1. Desenvolvimento da lógica. 2. Lógica matemática. 3. Argumentação. 4. Educação básica. I. Martins, Rodrigo, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 511.3

Edilson Damasio CRB9-1.123

ÉRICA GAMBAROTTO JARDIM BERGAMIM

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Rodrigo Martins
Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
Universidade de São Paulo – São Carlos

Luciene Parron G. Arantes
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 24 de setembro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, principalmente ao meu pai (in memoriam), por ter me ensinado que o melhor caminho é o do estudo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que me conduziu para a realização deste mestrado e me iluminou para que conseguisse concluí-lo.

A todos os meus familiares, em especial minha mãe, Maria Antônia de Oliveira Gambarotto, e minha irmã, Francielli de Oliveira Gambarotto, pelo incentivo e apoio durante a realização das disciplinas do curso.

Ao meu marido Adolfo Luiz Jardim Bergamim, por toda paciência em meus momentos de stress e desânimo, sendo verdadeiramente um parceiro, me incentivando e dando força.

À minha sogra Marlene Jardim, pelas constantes orações, encorajamento e torcida para que eu alcançasse um bom desempenho em cada disciplina deste mestrado.

Ao meu professor orientador Rodrigo Martins, pela indicação do tema, pela paciência e pelas discussões valiosas.

A todos os professores que ministraram aulas para a turma do PROFMAT/2016 - UEM. Aprendi muito com cada um deles. Agradeço, em especial, ao professor Eduardo Amorim Neves pelas dicas de estudo e por sua determinação para propiciar que os alunos de fato aprendam.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação desde o Ensino Fundamental até o Superior. Certamente, foram seus exemplos que me fizeram optar por esta profissão tão importante para a sociedade.

Agradeço à Lúcia, secretária do Departamento de Matemática, por sua eficiência e por sempre nos atender com tanto carinho.

A todos os colegas de turma, pelo companheirismo, união e amizade. Agradeço, em especial, às minhas amigas Kátia e Luana que estudaram comigo pelo Skype em tantas noites, fins de semana e feriados, pois sem nossas discussões com certeza não teria conseguido concluir o mestrado. Agradeço também à Danielli pelo companheirismo e incentivo na conclusão da última disciplina.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática por oferecer a oportunidade de realizar este mestrado.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Muito obrigada!

LÓGICA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo mostrar a importância da lógica clássica na argumentação cotidiana e na argumentação matemática. Para tanto, apresenta-se uma proposta de atividades, com sugestão de encaminhamentos que exploram conceitos da lógica matemática baseada em variados contextos e de forma que o aluno tenha oportunidade de aprender seus fundamentos de forma significativa, podendo ser aplicada ainda nas séries da educação básica. Além disso, aborda-se um pouco sobre a história do desenvolvimento da lógica clássica e estudam-se conceitos da lógica matemática com a finalidade de contribuir com o entendimento da fundamentação teórica utilizada para a elaboração das atividades.

Palavras-chave: Desenvolvimento da lógica. Lógica matemática. Argumentação.

MATHEMATICAL LOGIC: A PROPOSAL OF ACTIVITIES FOR BASIC EDUCATION

ABSTRACT

This work aims to show the importance of classical logic in everyday argumentation and mathematical argumentation. For that, a proposal of activities is presented, with suggestion of referrals that explore concepts of the mathematical logic based on diverse contexts and so that the students has the opportunity to learn its fundamentals in a significant way, being able to be applied still in the series of basic education. In addition, it addresses a bit about the history of the development of classical logic and studies concepts of mathematical logic in order to contribute to the understanding of the theoretical basis used for the elaboration of activities.

Keywords: Logic development. Mathematical logic. Argumentation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Frequentemente em nosso cotidiano utilizamos as expressões "É lógico que vai chover", "É lógico que alguma coisa vai acontecer...", etc. Mas, será que realmente é "lógico"? O que, de fato, queremos dizer quando fazemos estas afirmações? Geralmente quando as utilizamos queremos mostrar que alguma informação é evidente e fácil de ser verificada. Em nosso dia a dia fazemos afirmações, suposições e tiramos conclusões o tempo todo. No entanto, na maioria das vezes elas são feitas com base na experiência adquirida. Para prová-las é preciso apresentar justificativas convincentes, é preciso argumentar. Nessas situações, a lógica vem ao encontro para nos ajudar em tal tarefa, pois o ponto central da lógica, enquanto ciência, e do raciocínio dito lógico, é a argumentação.

Outro aspecto importante da lógica é o fato dela ajudar no entendimento da natureza dedutiva da matemática e seus fundamentos. Portanto, o professor precisa estar preparado quanto a esse aspecto, pois dessa forma propiciará condições para que seus alunos aprendam a elaborar justificativas coerentes para argumentar e defender seus pontos de vista em matemática (e também em outras disciplinas).

Neste sentido, de acordo com Matheus e Cândido (2013, p. 1) "o modo como a lógica é incorporada na matemática escolar pode definir o sucesso ou insucesso do desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática". Diante do exposto por estas autoras, justifica-se a elaboração de propostas de atividades em que os alunos sejam motivados a estudar temas da lógica de forma prazerosa e significativa.

Este trabalho foi elaborado visando mostrar a importância da lógica clássica na argumentação cotidiana e na argumentação matemática, além de ilustrar que a mesma pode ser encontrada nos mais variados contextos, favorecendo uma aprendizagem de seus conceitos de forma mais significativa.

Para cumprir com este objetivo, no primeiro capítulo é feito um estudo sobre o desenvolvimento da lógica, iniciando com as contribuições de Aristóteles e o estudos dos silogismos. Em seguida, estuda-se o surgimento da lógica simbólica com Boole e Frege e, posteriormente, estudam-se paradoxos conhecidos que contribuíram para o avanço do desenvolvimento da lógica, bem como apresentam-se as principais ideias das lógicas não clássicas.

No segundo capítulo estuda-se a lógica formal, começando com o Cálculo Proposicional e suas regras de inferência e equivalência. Posteriormente estuda-se e o Cálculo de Predicados, argumentos válidos e o método dedutivo com alguns exemplos da utilização do método dedutivo em demonstrações matemáticas.

Por fim, no terceiro capítulo, apresenta-se uma proposta de atividades em que são explorados conceitos da lógica clássica na argumentação cotidiana, argumentação matemática, em textos da literatura infantil, poemas e na própria legislação brasileira, mostrando que seu ensino vai muito além da construção de tabelas-verdade para determinar valoração de proposições. Além disso, estuda-se a aplicação da lógica na resolução de equações, finalizando com uma tarefa que utiliza a lógica para explicar o processo de resolução de equações irracionais. Algumas das tarefas deste capítulo evidenciam que o estudo de lógica pode ocorrer de forma interdisciplinar e acreditamos que tal característica deve ser amplamente explorada.

CAPÍTULO 1

SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA LÓGICA

A lógica é uma ciência que evoluiu significativamente ao longo do tempo. Sendo assim, o objetivo deste capítulo é apresentar aspectos históricos sobre seu desenvolvimento destacando os feitos e contribuições dos principais matemáticos e cientistas para o surgimento desta ciência e suas transformações.

Para tal, inicia-se explicitando o surgimento do pensamento lógico e a sistematização da Lógica Aristotélica, posteriormente são apresentadas as contribuições de Boole e Frege (dentre outros) com o surgimento de uma lógica simbólica e, por último são apresentadas as contribuições de Hilbert, Gödel, além de expor as principais ideias das lógicas não clássicas.

As ideias apresentadas neste capítulo foram baseadas, principalmente, nas obras de Kneale e Kneale (1980)[17], D'Ottaviano e Feitosa (2003) [13], Assis Neto (2009) [4] e Eves (2004) [15].

1.1 Período Aristotélico

Considera-se relevante mencionar que antes de Aristóteles (no século V a. C.) houveram filósofos gregos, como Sócrates e Platão, que discutiam os princípios de inferências válidas. Platão, com o estudo da dialética, descobriu alguns princípios lógicos válidos. No entanto, não os sistematizou, como fez Aristóteles. De acordo com Kneale e Kneale (1980) os primeiros indícios de pensamento lógico surgiram quando os homens tentaram generalizar argumentos válidos e, a partir de um destes argumentos, extrair uma forma ou um princípio que fosse comum a toda uma classe de argumentos válidos.

Com base na análise e discussão desta ideia, Aristóteles identifica o que denominou de sofisma: argumentos falaciosos que se assemelham com argumentos válidos. Estes argumentos eram exibidos ao público pelos sofistas (classe de tutores privados da Grécia antiga), que ganhavam dinheiro ao fazê-lo. É válido mencionar que nesta época, a lógica não era considerada uma parte da Filosofia, mas era considerada uma habilidade ou arte que poderia ser aprendida (KNEALE; KNEALE, 1980).

Segundo D'Ottaviano e Feitosa (2003) embora os gregos antigos tivessem desenvolvido alguns princípios de lógica, a história da lógica antiga inicia-se propriamente com Aristóteles, no século IV a. C. Aristóteles nasceu na Macedônia e viveu entre 384 a.C. e 322 a.C., foi discípulo de Platão e mestre de Alexandre, o Grande. Ele interessava-se fortemente pelas atividades dos matemáticos, mas antes de tudo ele era filósofo e biólogo.

As principais contribuições de Aristóteles à lógica encontram-se numa série de tratados sobre o raciocínio, organizada por seus alunos, e denominada Órganon, que significa Instrumento da Ciência.

O Órganon é constituído de cinco obras. São elas: Categorias, Da Interpretação, Analíticos Anteriores, Analíticos Posteriores e Tópicos.

O tratado denominado Categorias possui quinze capítulos. De modo breve, pode-se dizer que nesta obra Aristóteles faz uma classificação dos tipos de predicados da seguinte forma: substância, quantidade, qualidade, relação, lugar, tempo, situação, estado, ação, paixão. Para Kneale e Kneale (1980) pode-se afirmar que esta obra trata da classificação de coisas expressas por termos, independente de que posição estes termos ocupem na frase: sujeito ou predicado.

No tratado denominado Da Interpretação, Aristóteles tem o objetivo de determinar pares de frases que são opostas e de que maneira elas o são. Nos quatro primeiros capítulos, discute-se sobre a noção de afirmação, no qual apresenta uma breve contribuição para a filosofia da lógica. As maiores descobertas de Aristóteles estão nos capítulos 5 à 8 deste tratado (KNEALE; KNEALE, 1980).

Infere-se que ao elaborar a tese de que toda frase declarativa é verdadeira ou falsa, Aristóteles já aceitava os princípios que ficaram conhecidos como Princípio do Terceiro Excluído e Princípio da Não Contradição. Kneale e Kneale (1980, p.42) evidenciam esta ideia quando apresentam os seguintes trechos retirados do livro Aristotle's Metaphysics de W.Ross (1924):[1]

> Os princípios da demonstração... como por exemplo que é necessário em cada caso ou afirmar ou negar que é impossível simultaneamente ser e não ser.

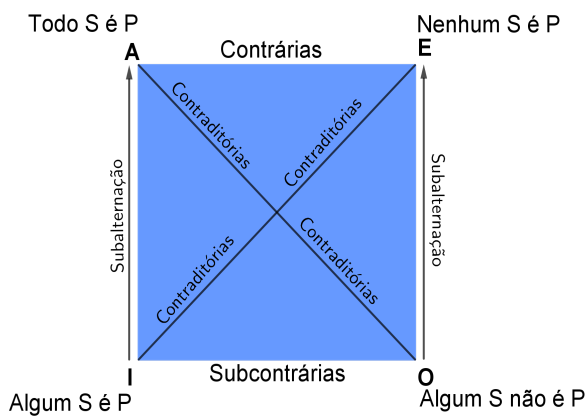
[1]Este autor traduziu o livro Metaphisics de Aristóteles.

> O mais forte de todos os primeiros princípios é que é impossível para a mesma coisa pertencer e não pertencer à mesma coisa ao mesmo tempo no mesmo respeito.
>
> Não é possível que haja qualquer coisa entre as duas partes de uma contradição, mas é necessário ou afirmar ou negar uma coisa de outra.

De modo objetivo podemos dizer que neste tratado Aristóteles classifica as proposições quanto à qualidade e à quantidade. Quanto à qualidade, as proposições podem ser afirmativas ou negativas, representadas, respectivamente, por: *S é P* ou *S não é P*. Quanto à quantidade, as proposições podem ser universais ou particulares. Os exemplos: *Todo S é P*, *Algum S é P* são, respectivamente, proposições universais e particulares.

As relações entre estas proposições são apresentadas no famoso quadrado das oposições de Aristóteles, representado na Figura 1.1, a seguir:

Figura 1.1: O quadrado tradicional de oposições



Fonte: MORTARI, (2016, p. 487)

Neste quadrado, as notações **A**, **E**, **I** e **O**, representam, respectivamente, uma afirmação universal, uma negação universal, uma afirmação particular e uma negação particular. Esses quatro tipos de proposições são chamadas categóricas.

Depois de estudar as proposições, Aristóteles começa a analisar as relações entre elas para formar raciocínios. Isso começa a ser feito no tratado denominado Primeiros Analíticos - o primeiro tratado sistemático de lógica formal. Nele, Aristóteles apresenta os silogismos, que de modo superficial pode ser entendido como a relação dedutiva entre três proposições. [2]

[2]Sobre o silogismo, vide seção 1.1.1 deste capítulo.

Fazendo comparações, há duas diferenças quanto ao modo de expor as ideias nos Primeiros Analíticos em Relação ao Da Interpretação, a saber:

- uso de letras como variáveis para termos;
- quase supressão da forma simples de expressão *B é A* para as formas mais complexas *A pertence a B* e *A é predicado de B*.

Dando continuidade aos estudos sobre silogismos, Segundos Analíticos é um tratado no qual Aristóteles busca apresentar aplicações práticas dos silogismos, tratando das necessidades específicas da demonstração.

Já o tratado denominado Tópicos é o resultado da reflexão sobre o método dialético tal como era aplicado aos problemas de definição e de classificação. Neste tratado Aristóteles apresenta estratégias de caráter geral para serem usadas em competições dialéticas. Com isso, no decorrer das discussões faz algumas distinções de importância considerável para a lógica. Citamos aqui três exemplos: argumenta que a identidade pode ter três sentidos(numérica, específica e genérica); classifica as proposições em éticas, físicas e lógica; distingue indução de raciocínio, apresentando que indução é a passagem do particular para o universal (KNEALE; KNEALE, 1980).

Alguns estudiosos acrescentam mais um tratado à composição do Órganon. Trata-se da obra intitulada Elencos Sofísticos. Consideramos, neste trabalho, concordando com Kneale e Kneale (1980), que Elencos Sofísticos são um apêndice da obra Tópicos e, neste apêndice, Aristóteles apresenta estratégias para criação e reconhecimento de argumentos que não são válidos.

Como parte do Órganon, os Tópicos continuaram a influenciar os filósofos até o século XVII d.C.

Depois de Aristóteles, alguns povos trouxeram algumas contribuições para o desenvolvimento da lógica. Destacamos os Megários e os Estóicos. Segundo Kneale e Kneale (1980) os Megários trouxeram três contribuições importantes: invenção de uma série de paradoxos, reexaminação dos conceitos modais e discussão sobre a natureza das frases declarativas condicionais e os Estóicos foram os primeiros a elaborar de forma detalhada uma teoria da demonstração com proposições condicionais e outras formas de proposição complexa.

Mas, ressaltamos que, contribuições consideráveis para o desenvolvimento da lógica e que se destacaram, surgiram a partir do século XVII d. C.

1.1.1 Silogismo de Aristóteles

O silogismo[3] de Aristóteles foi, historicamente, a primeira teoria lógica que tivemos. Um silogismo é uma regra de inferência que a partir de duas proposições- chamadas premissas deduz uma terceira proposição- chamada conclusão(D'OTTAVIANO, FEITOSA, 2003; MORTARI,2016). No conjunto destas proposições há três termos diferentes e cada um destes ocorre em duas das três proposições. Cada um destes termos recebe um nome, a saber: termo menor (sujeito da conclusão), termo maior (predicado da conclusão) e termo médio (não ocorre na conclusão, mas ocorre nas duas premissas).

A seguir, apresentamos um silogismo:

Exemplo 1.1
PM: *Todos os mamíferos são animais.*
Pm: *Todos os gatos são mamíferos.*
C: *Todos os gatos são animais.*

em que **PM** denota a premissa maior, **Pm** denota a premissa menor e **C** denota a conclusão. Observamos que neste silogismo a premissa maior contém o termo maior (animais) e o termo médio (mamíferos); a premissa menor contém o termo menor (gatos) e o termo médio (mamíferos); a conclusão contém o termo menor (gatos) e o termo maior (animais).

A forma como este silogismo foi apresentado está na forma típica, pois primeiro tem-se a premissa maior, depois a premissa menor e por último a conclusão. Quando os silogismos são apresentados desta forma, podemos identificar seu modo e figura. Identifica-se o modo de um silogismo por meio da análise dos tipos de proposições categóricas que ele contém. Já a figura é identificada por meio da análise do posicionamento do termo médio nas premissas do silogismo e é essa análise que nos ajuda a identificar se um silogismo é válido ou não.

Denotando por P o termo menor, M o termo médio e por G o termo maior, temos que o esquema abaixo representa as quatro possíveis figuras para silogismos.

Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**
M — G	G — **M**	**M** — G	G — **M**
P — **M**	P — **M**	**M** — P	**M** — P
P — G	P — G	P — G	P — G

[3]É importante ressaltar que aqui não é apresentada a versão original da teoria do silogismo de Aristóteles, mas apresentamos uma versão mais aperfeiçoada, feita por lógicos posteriores.

Com base no exposto, notamos que na Figura 1 o termo médio é sujeito da premissa maior e predicado na premissa menor; na Figura 2 o termo médio é predicado na premissa maior e na premissa menor; na Figura 3 o termo médio é sujeito na premissa maior e na premissa menor e, por fim, na Figura 4 o termo médio é predicado na premissa maior e sujeito na premissa menor.

Analisando o silogismo apresentado no Exemplo 1.1 observamos que todas as suas proposições são universais afirmativas. Esse tipo de proposição é denotada pela letra A (conforme quadrado de oposições). Logo, seu modo é denotado por AAA (pois contém três proposições universais afirmativas). Notamos também que esse silogismo pertence à figura 1 (pois o termo médio é sujeito na premissa maior e predicado na premissa menor).

Analisando todas as possibilidades, verificamos que há 256 formas diferentes de silogismos (64 modos combinados com 4 tipos de figuras). No entanto, nem todas essas formas são válidas.

Para entender o que é um silogismo válido, relembremos que um argumento é válido[4] quando qualquer circunstância que torna verdadeiras as premissas torna também verdadeira a conclusão. Desse modo,

> dizemos que uma forma de silogismo é válida se qualquer silogismo que for uma instância (ou seja, um exemplo) dessa forma é um argumento válido. Ou seja, não importa que termos usemos no lugar de P, M e G, o resultado é um argumento válido (MORTARI, 2016, p. 497).

Com base nesta definição, claramente uma forma de silogismo será inválida quando houver pelo menos um exemplo de silogismo desta forma que é inválido.

Vejamos um exemplo de silogismo inválido:

Exemplo 1.2
PM*: Todo homem é mortal.*
Pm*: Nenhum homem é inseto.*
C*: Nenhum inseto é mortal.*

Notemos que o modo do silogismo apresentado no Exemplo 1.2 é AEE, pois a premissa maior é uma proposição universal afirmativa e a premissa menor e conclusão são proposições universais negativas; além disso ele pertence a Figura 3, pois o termo médio é sujeito na premissa maior e na premissa menor. Portanto, este silogismo é da forma AEE-3 (notação que indica o modo e a figura, respectivamente). Ele é inválido, pois as

[4] Estudaremos com mais profundidade a definição de argumento válido no próximo capítulo.

premissas maior e menor são verdadeiras, mas a conclusão é falsa. Qualquer outro silogismo que tenha esta forma será inválido. Portanto, todos os silogismos da forma AEE-3 são inválidos.

Para mostrar que uma forma de silogismo é válida precisa-se mostrar que qualquer exemplo de silogismo desta forma é válido. Para isso, Aristóteles apresentou a teoria de silogismo com uma espécie de sistema axiomático. Este sistema consistiu basicamente na análise de algumas formas de silogismo que intuitivamente consegue-se perceber que são válidas, por exemplo AAA-1, que já foi mostrado. Essas formas seriam os axiomas e as demais formas de silogismo seriam convertidas a estas (MORTARI, 2016).

Com esta ideia Aristóteles encontrou 14 formas válidas de silogismo. Contudo, hoje são identificadas 24 formas de silogismos válidos. Com o decorrer do tempo cada uma destas formas válidas recebeu um nome. Por exemplo o silogismo da forma AAA-1 é conhecido como *Barbara*, o de forma EAE-1 é conhecido como *Celarent*. As vogais destas palavras indicam o modo do silogismo. A Figura 1.2, a seguir, apresenta todos os nomes de formas válidas de silogismo.

Figura 1.2: As formas válidas de um silogismo

Figura 1	**Figura 2**	**Figura 3**	**Figura 4**
Barbara	*Cesare*	*Darapti*	*Bamalip*
Celarent	*Camestres*	*Felapton*	*Calemes*
Darii	*Festino*	*Disamis*	*Dimatis*
Ferio	*Baroco*	*Datisi*	*Fesapo*
Barbari	*Cesarop*	*Bocardo*	*Fresison*
Celaront	*Camestrop*	*Ferison*	*Calemop*

Fonte: Mortari, 2016, p. 500

Algumas regras nos ajudam a determinar se um silogismo é válido ou não. São elas:

> i)se um silogismo tem duas premissas negativas ele é inválido; ii) se um silogismo tem uma premissa negativa, a conclusão deve ser negativa, caso contrário o silogismo é inválido; iii) se uma das premissas for particular, a conclusão tem que ser particular, caso contrário o silogismo é inválido (MORTARI, 2016, p. 507).

De acordo com D'Ottaviano e Feitosa (2003) a teoria do silogismo é considerada por filósofos e historiadores da lógica como a mais importante descoberta em toda a história da lógica formal, pois, além de constituir a primeira teoria dedutiva, constitui também um dos primeiros sistemas axiomáticos construídos.

Conforme o que foi exposto nesta seção, no período aristotélico os estudos sobre a lógica eram desenvolvidos pautando-se totalmente na linguagem corrente. No entanto, com os desafios da modernidade os matemáticos entenderam que era preciso uma linguagem simbólica para o estudo da lógica, desviando-se das ambiguidades da linguagem corrente. Com esse objetivo surgiu o que se chama hoje de lógica simbólica ou lógica matemática. É importante destacar que a Geometria e a Álgebra contribuíram para o desenvolvimento da lógica matemática. A Geometria com noções sobre a sua axiomática e a Álgebra com um modelo para a elaboração de um cálculo lógico. Abordaremos a lógica simbólica na próxima seção.

1.2 Período booleano

Primeiramente ressaltamos que alguns historiadores destacam que o primeiro matemático a ponderar sobre os benefícios de uma lógica simbólica foi Gottfried William Leibniz (1646-1716). Em 1666 ele publicou o trabalho intitulado *De arte combinatória*, onde manifesta acreditar na elaboração de uma linguagem científica universal expressa por meio de um simbolismo reduzido e prático que guiaria o processo de raciocinar (EVES, 2004). No entanto, quem se destaca no desenvolvimento de uma lógica simbólica é George Boole (1815-1864). O período booleano está compreendido entre 1840 e 1910, aproximadamente.

George Boole nasceu na cidade de Lincoln na Inglaterra. Aos 16 anos ele inicia seu contato com a matemática estudando obras de Lagrange, Laplace e Newton e, em 1849, é nomeado professor de matemática do "Queen's College" em Cork, na Irlanda.

Sua obra clássica, publicada em 1847, é intitulada *The mathematical analysis of logic: being an essay towards a calculus of deductive reasoning* que significa Análise matemática da lógica: um ensaio para o cálculo do raciocínio dedutivo. Nesta obra, segundo Assis Neto (2009), ele procura explorar as semelhanças entre as operações básicas da lógica - conjunção e disjunção e as operações algébricas de adição e multiplicação. Na primeira seção de sua obra, Boole deixa claro seus objetivos, conforme trecho apresentado a seguir:

> Quem quer que tenha conhecimento do estado actual da teoria da Álgebra Simbólica, sabe que a validade dos processos usados em análise não depende da interpretação dos símbolos que são utilizados, mas apenas das leis para a sua combinação. Todo o sistema de interpretação que não afecta a verdade das relações supostas é igualmente admissível e é assim que o mesmo processo pode, sob um esquema de interpretação, representar a solução de uma questão sobre as propriedades dos números e sob outra interpretação a solução de um problema geométrico e ainda sob uma terceira um problema de dinâmica ou óptica... Podíamos

> mesmo dizer que a característica definitiva de um cálculo verdadeiro consiste em o seu método se basear sobre o emprego de símbolos, cujas leis de combinação são conhecidas e gerais e cujos resultados admitem uma interpretação consistente. O fato de se ter atribuído uma interpretação quantitativa às formas actuais da Análise é o resultado de circunstâncias pelas quais essas formas determinadas e não deve ser interpretado como uma condição universal da Análise. É fundamentado neste princípio geral que eu me proponho estabelecer um Cálculo Lógico, e pretendo ao mesmo tempo que ele tenha um lugar entre as formas aceites de Análise Matemática, sem considerar nem tanto que seus objectos e pelas suas técnicas tem que estar actualmente isolado. (BOOLE p.41, *apud* KNEALE, KNEALE, 1980, p. 411).

Para que seu objetivo fosse alcançado, Boole estabeleceu alguns critérios. Por exemplo as letras x, y, z, etc representavam classes de coisas. Nessas classes estavam inclusas a classe de todas as coisas, denominada classe universal e representada pelo algarismo 1 e a classe de que nada é membro, denominada classe vazia é representada pelo algarismo 0. De Morgan[5] chamou de universo do discurso aquilo que era representado pelo algarismo 1. Para ele universo do discurso não é a totalidade de todas as coisas, mas um conjunto de uma categoria definida de coisas sobre as quais se falam. Desse modo, quando usamos os termos "homens" e "mulheres" está se determinando duas classes complementares e o universo do discurso é o gênero humano.

No cálculo lógico de Boole a conjunção "x e y" era expressa como a multiplicação xy, ou seja, xy representa a classe das coisas comuns a x e a y. A disjunção "x ou y" é representada por $x + y$, ou seja, $x + y$ representa a classe das coisas que estão em x ou estão em y. Já a negação "não x" era representada por $1 - x$, e as coisas que estão em x, mas não estão em y era representada por $x - y$ (ASSIS NETO, 2009).

De acordo com essa simbologia de Boole, se x for a classe das mulheres e y for a classe dos professores, xy seria a classe das mulheres que são professoras e $x + y$ seria a classe de todas as mulheres reunidas com a classe de todos os professores.

Em 1854 Boole publica a obra *The Laws of Thought* (As leis do pensamento), cuja principal novidade em relação a primeira obra, é a aplicação das ideias de Boole ao cálculo das probabilidades (KNEALE; KNEALE, 1980). Mas, nesta obra os princípios básicos de suas ideias são apresentadas na proposição I, conforme trecho a seguir:

> Todas as operações da Linguagem, tomada como um instrumento de raciocínio, podem ser consideradas como um sistema de signos composto

[5] Augustus De Morgan (1806-1871) foi um matemático e lógico britânico famoso por ter introduzido o conceito de indução matemática e desenvolvido os Teoremas de Morgan.

> dos seguintes elementos: 1) Símbolos literais, como x, y, etc., representando as coisas como objetos de nossas concepções. 2) Sinais de operações, como +, -, x, representando aquelas operações da mente pelas quais as concepções das coisas são combinadas ou transformadas, de modo a formar novas concepções envolvendo os mesmos elementos. 3) O sinal de identidade =. (BOOLE, p. 27 *apud* ASSIS NETO, 2009, p. 24).

Além da simbologia já apresentada, Boole também introduz o símbolo v para designar "alguns" na linguagem corrente. Desse modo, as quatro sentenças lógicas do silogismo de Aristóteles são apresentadas da seguinte forma:

A: Universal Afirmativa: $x = y$.

E: Universal Negativa: $x = 1 - y$.

I: Particular afirmativa: $x = vy$.

O: Particular Negativa: $vx = v(1 - y)$.

Embora Boole tenha sido o primeiro a abordar a lógica de um novo modo: com a utilização de símbolos algébricos, a lógica que se estabelece no século XX segue ideias e estudos de Frege, Cantor, Peano, Russel, entre outros. Podemos dizer que destes, Frege (1848-1925) foi o que mais promoveu avanços no desenvolvimento da lógica com a obra *Begriffsschrift* de 1879. Consideramos relevante ressaltar que seu sistema lógico constituiu as bases da lógica simbólica contemporânea.

Entre 1874 e 1897 George Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos. Em 1874 Cantor publica seu primeiro trabalho sobre a denumerabilidade dos conjuntos infinitos. Em 1895 e 1897,ele publica seus principais trabalhos sobre os números ordinais e cardinais. Para ele, um conjunto podia ser definido como "qualquer coleção de objetos num todo M, definidos e separados de nossa intuição ou pensamento". De modo intuitivo, um conjunto seria uma seleção de elementos, satisfazendo determinada propriedade. A ideia de que qualquer coleção poderia ser considerada um conjunto foi o que desencadeou, no século XX, o surgimento de paradoxos nos fundamentos da nascente teoria de conjuntos (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003).

Friedrich Ludwig Gottlob Frege nasceu na Alemanha. Estudou matemática, física e filosofia da religião. Segundo Assis Neto (2009), ao longo de sua vida, ele publicou 41 trabalhos: 5 livros, 31 artigos e 7 resenhas de livros. Ele foi um admirador das obras de Cantor.

O projeto de Frege consistia na redução da matemática à lógica, pois para ele os conceitos da matemática eram redutíveis a conceitos lógicos e todos os teoremas da matemática eram redutíveis aos teoremas lógicos.

De todos os seus trabalhos publicados, os que mais ficaram conhecidos são os seguintes: *Conceitografia* (1879), *Os fundamentos da aritmética* (1884), *Função e conceito* (1891), *Sobre o Sentido e a Referência* (1892), *Sobre o conceito e o objeto* (1892) e *Leis básicas da aritmética* (1893/1903).

Conceitografia (em alemão *Begriffsschrift*) foi publicada em 1879. Esta foi a primeira obra publicada de Frege e seu objetivo principal era a construção de uma linguagem formalizada do pensamento puro, ou seja, um sistema de notação mais regular do que a linguagem corrente e melhor adaptado para garantir a exatidão na dedução (KNEALE; KNEALE, 1980). Com este intuito busca apresentar quatro pontos que, de acordo com Neto (2009) são: mostrar que os instrumentos que os matemáticos tinham naquela época eram insuficientes para desenvolver seu projeto logicista; fornecer os instrumentos necessários para o desenvolvimento do projeto; esboçar as linhas gerais da concepção do projeto; exemplificar a execução do projeto.

Nesta obra, Frege estabelece algumas noções primitivas. São elas: implicação, quantificação universal, negação, igualdade, argumento e função. Além disso, apresenta nove axiomas e enuncia as regras primitivas de inferência. Desse modo, ele estabelece o que chamamos hoje de cálculo proposicional e cálculo de predicados.

O primeiro símbolo fregiano é o

$$\vdash\!\!\!\longrightarrow$$

Esse símbolo é apresentado à esquerda do símbolo que representa a proposição e é usado para atribuir juízo a uma proposição. Se o traço vertical não é apresentado, significa que o conteúdo expresso pelo símbolo seguinte estava sob consideração, ou seja, ainda não lhe era atribuído um juízo. Por exemplo, se "$\vdash \Gamma$" é a abreviatura da frase declarativa "As diagonais de um losango são perpendiculares" essa abreviatura sem o sinal vertical exprime apenas o pensamento, sem qualquer juízo acerca da correção deste pensamento. Resumidamente, o traço vertical era o traço de juízo e o traço horizontal o traço de conteúdo.

Quando dois conteúdos conceituais permitiam um juízo, consideravam-se quatro possibilidades. Por exemplo, se os conceitos "A" e "B" fossem ambos judicáveis, teríamos as possibilidades:

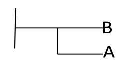
i) B é afirmado, A é afirmado.

ii) B é afirmado, A é negado.

iii) B é negado, A é afirmado.

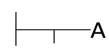
iv) B é negado, A é negado.

Para exprimir a ideia de que B não deve ser negado, enquanto A é afirmado, Frege introduz a notação



significando que a possibilidade iii) não ocorre. Atualmente tal simbologia é apresentada do seguinte modo: A→B. Com isso, observamos que a notação de Frege era lida de baixo para cima, ou seja, na notação dele A é o antecedente e B é o consequente.

A negação é expressa por um pequeno traço vertical ligado à parte inferior do traço de conteúdo como no símbolo



que significa não é verdade que A.

A identidade de conteúdo é representada pelo símbolo ≡. Interpretando as letras "A" e "B" como nomes de qualquer espécie, ou seja, não necessariamente símbolos proposicionais ele estabelece que o símbolo

$$\vdash A \equiv B$$

significando que os nomes A e B têm o mesmo conteúdo conceitual, de modo que A pode sempre ser substituído por B e vice-versa. Um dos motivos que levou Frege a introduzir este símbolo é o fato dele auxiliar nas definições.

Depois Frege define dois outros conceitos primitivos: função e argumento, considerados por ele de muita relevância. Vejamos como ele os define no trecho a seguir:

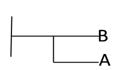
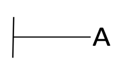
> Suponhamos que um símbolo simples ou complexo ocorre num ou mais lugares numa expressão (cujo conteúdo não é necessariamente um conteúdo possível de um juízo). Se imaginamos o símbolo como substituível por outro (o mesmo de cada vez) numa ou mais de suas ocorrências, então a parte da expressão que é invariante sob a substituição chama-se a função; e a parte substituível, os argumentos da função (FREGE, 1879 *apud* KNEALE; KNEALE, 1980, p. 488).

Para exemplificar, com base nessa citação, consideremos a expressão "a circunstância de um trapézio ser um quadrilátero" da nossa linguagem. Poderíamos substituir a palavra trapézio pela palavra paralelogramo, de modo que a expressão mantivesse as mesmas características da primeira. Podemos, então, considerar "paralelogramo" como um argumento da função "a circunstância de ... ser quadrilátero", assim como trapézio também é um argumento.

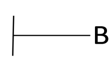
Frege usa a notação $\vdash\Phi(A)$ que significa "A tem a propriedade Φ". Essa notação permite a expressão da generalidade. No entanto, a expressão de generalidade é alcançada de modo mais satisfatório quando ela é usada em conjunto com um novo artifício, o que os lógicos posteriores chamaram de notação de variáveis ligadas. Para distinguir o papel que as letras desempenham quando são usadas como parte desta notação, Frege usa o tipo gótico. Vimos que na expressão de um juízo na notação fregiana, um símbolo à direita do sinal de asserção pode ser sempre considerado como uma função de um dos símbolos que ocorrem nele (KNEALE; KNEALE, 1980). Se este símbolo for substituído por uma letra gótica numa concavidade sobre o traço de conteúdo temos, por exemplo:

Essa expressão é equivalente a "Tudo é Φ". Então, para Frege, isso significa que a função é um fato seja qual for a interpretação que dermos ao argumento. Para Kneale e Kneale (1980) foi assim que surgiu a notação para quantificação universal.

Devido ao seu interesse pelo rigor na dedução, Frege observa que os dois juízos

 e 

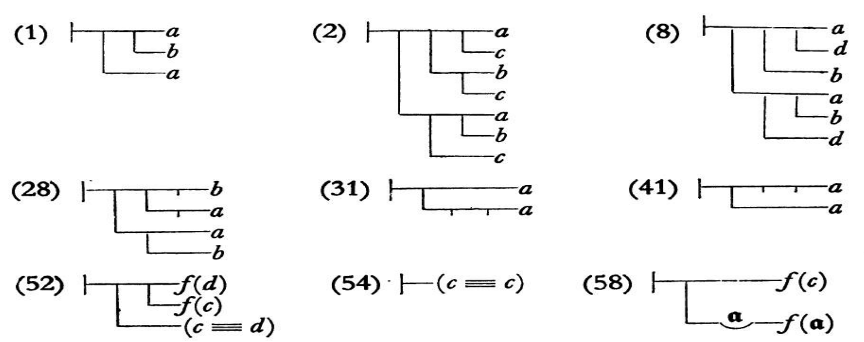
apresentados em conjunto, implicam o juízo



Ele conclui isso porque o primeiro juízo exclui a terceira possibilidade e o segundo juízo exclui a segunda e a quarta possibilidades, restando somente a primeira. Com isso Frege propõe-se a reduzir todas as inferências a este padrão simples (KNEALE; KNEALE, 1980). Ressaltamos que este padrão simples é o que chamamos hoje de *modus ponens* da lógica tradicional.

Ainda em *Conceitografia*, depois que Frege apresenta sua simbologia, se dedica a mostrar como a lógica pode ser apresentada como um sistema dedutivo e com este objetivo ele tenta encontrar alguns princípios lógicos que em conjunto possuam a força de todos os outros. Ele decidiu usar um esquema que contém nove axiomas. Expressando estes axiomas na sua notação e com os números que têm no seu sistema, os nove axiomas de Frege são apresentados, conforme Figura 1.3.

Figura 1.3: Os nove axiomas de Frege



Fonte: KNEALE; KNEALE (1980, p. 493)

Em *Conceitografia*, Frege sempre justifica o caráter lógico de seus axiomas apelando para o princípio da não-contradição.

Na obra *Os fundamentos da aritmética* (em alemão *Die grundlagen der arithmetik*), publicada em 1884, Frege traz em linguagem não técnica a argumentação central de sua tese de redução da aritmética à lógica, juntamente com um minucioso estudo crítico acerca do número e de outras noções da aritmética.

Com a finalidade de executar seu projeto, ele tenta definir todas as noções aritméticas, de modo aceitável e sem usar qualquer terminologia que não seja lógica e depois mostrar que, com estas definições, todo o raciocínio aritmético pode ser reduzido a padrões logicamente válidos. Particularmente, Frege tem que mostrar que para estabelecer a validade da indução matemática, nada além da lógica é necessário, ou seja, o raciocínio pelo qual concluímos que, porque uma propriedade pertence ao número 0 e também ao sucessor de qualquer número que a tenha, tem que, por isso, pertencer a todos os números naturais (KNEALE; KNEALE, 1980).

Depois Frege esboça a demonstração de que para todo o número na sucessão dos números naturais existe um número que lhe segue imediatamente. Neste momento é que ele se refere, de passagem, na possibilidade de reduzir a indução matemática às leis gerais da lógica.

Neste contexto, consideramos importante ressaltar a obra do Matemático Giusepe Peano (1858-1932) que também contribuiu consideravelmente para o desenvolvimento da lógica simbólica. Seu interesse pelos estudos pautava-se nos fundamentos da matemática. Em 1889 ele publica a obra intitulada *Arithmeties Principia Nova Methodo Exposita*, na qual ele apresenta seus famosos axiomas, a saber:

1) 1 é um número.

2) O sucessor de um número é um número.

3) Dois números diferentes têm sucessores diferentes.

4) 1 não é sucessor de nenhum número.

5) Qualquer propriedade que pertence a 1 e também ao sucessor de qualquer número que a tenha, pertence a todos os números naturais.

De acordo com Eves (2004), a motivação para o trabalho de Peano era advinda da vontade de expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico, ao passo que o trabalho de Frege derivava da necessidade de uma fundamentação mais sólida para a matemática. Na obra de Peano também vale destacar o *Formulaire the Mathemátiques*, publicado em 5 volumes, a partir de 1894. Neste trabalho ele apresenta algumas notações que ainda influenciam no desenvolvimento da lógica e da matemática atuais. O trabalho de Frege e Peano influenciou diretamente na obra *Principia Mathematica* desenvolvida por Russel e Whitehead, que será estudada na seção seguinte.

Seguindo com as obras fregeanas, em 1891 ele publica a obra *Função e conceito* (em alemão *Funktion und begriff*). Nesta obra ele generaliza ainda mais a noção de função e introduz a dicotomia função/argumento em sua análise das sentenças.

Em 1992 Frege publica dois artigos: *Sobre o sentido e a referência* (em alemão *Über sinn und bedeutung*) e *Sobre o conceito e o objeto* (em alemão *Über begriff und egenstand*), onde, respectivamente, se propõe a estudar sobre a semântica e procura desfazer os equívocos acerca de sua noção de conceito tal como foi formulada em *Fundamentos da Aritmética.*

Em 1893, quatorze anos depois da publicação do primeiro volume de *Conceitografia*, Frege publica *Leis básicas da Aritmética* (em alemão *Grundgesetze der arithmetik*). De acordo com Alcoforado (2009) nesta obra ele procura concluir de modo rigoroso seu projeto de reduzir a arimética à lógica efetuando todas as demonstrações com rigoroso formalismo. Em 1902 ele conclui o segundo volume desta obra na qual acreditava ter demonstrado que a aritmética é fundamentada na lógica.

Grande parte da lógica contemporânea se deve às obras fregianas. No entanto, os lógicos modernos parecem só reconhecer os méritos das ideias de Frege quando os mesmos começam a discutir os problemas levantados por ele.

Um dos matemáticos que reconheceu a importância dos feitos de Frege foi Bertrand Russell. Na próxima seção reconhecemos tal fato e estudamos as inovações surgidas no século XX que contribuíram para o desenvolvimento da lógica.

1.3 Período atual

Com Bertrand Russel e Alfred North Whitehead, inicia-se o período atual da lógica (a partir de 1910 até os dias atuais), com a obra *Principia Mathematica*.

Alfred North Whitehead nasceu em Ramsgat, na Inglaterra, em 1861 e faleceu em 1947 e Bertrand Arthur William Russel, nasceu em País de Gales em 1862. Bertrand Russel foi discípulo de Whitehead. Ambos concebiam a filosofia sob o ponto de vista matemático. Juntos, no período de 1910 à 1913, publicaram a monumental obra intitulada *Principia mathematica*.

Em 1902, Bertrand Russel descobriu um paradoxo que depende apenas do próprio conceito de conjunto. Russel comunicou a Frege sobre este paradoxo quando ele já estava para publicar o último volume de *As leis básicas da Aritmética*.

Para entender este paradoxo é importante destacar que designa-se por um conjunto como qualquer coleção de objetos(conforme definição de Cantor). Conjuntos podem ser elementos de conjuntos e podem existir conjuntos que são elementos de si mesmos.

Representando por M o conjunto de todos os conjuntos que são membros de si próprios e por N o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios, o paradoxo de Russel consistia em responder a seguinte pergunta: "N é um membro de si próprio ou não?". Analisando os dois casos possíveis, temos: se N é um membro de si próprio, então N é um membro de M e não de N e, portanto, N não é membro de si mesmo; se N não é um membro de si próprio, então N é um membro de N e não de M, ou seja, N é membro de si próprio. Notamos que os dois casos levam a uma contradição (EVES, 2004).

Uma formulação menos extensa do paradoxo de Russel é a seguinte: Seja X um conjunto qualquer. Então, pela definição de N

$$(X \in N) \Leftrightarrow (X \notin X)$$

Para o caso em que X é N tem-se a contradição:

$$(N \in N) \Leftrightarrow (N \notin N)$$

Segundo Eves (2004), o Paradoxo de Russel se popularizou por meio de várias versões. O próprio Russel, em 1919, apresenta-o na versão das dificuldades de um barbeiro de uma pequena cidade que firmou a regra de fazer a barba somente das pessoas da cidade que não se barbeavam a si mesmas. A contradição nesta situação é explicitada quando se tenta responder à seguinte pergunta: O barbeiro barbeia-se a si mesmo? Observamos que se ele não barbeia-se a si mesmo, então ele se enquadra em sua regra; e se ele barbeia-se a si mesmo, então não se encaixa em sua regra.

Apesar do grande avanço no desenvolvimento da lógica no século XIX e início do século XX, os paradoxos da teoria de conjuntos e problemas relativos ao conceito de infinito deixavam aos lógicos questões a serem resolvidas acerca da fundamentação da matemática.

A busca, por exemplo, por solucionar o paradoxo do barbeiro (dentre outros) constituiu a Teoria dos tipos de Russel. Nesta teoria Russel estabelecia, basicamente, que um conjunto de elementos é diferente de cada um de seus elementos. D'Ottaviano e Feitosa (2003) destacam que com a publicação de *Principia Mathematica*, Russel e Whitehead inauguraram um novo período da história da lógica, pois solucionaram o problema dos paradoxos introduzindo a *Teoria ramificada de tipos* na qual apresentam um sistema que incorpora o esquema de notação lógica de Peano e estabelece uma hierarquia de tipos e coleções.

A ideia básica desta obra era a identificação de grande parte da matemática com a lógica por meio da dedução do sistema dos números naturais e por meio de um conjunto de premissas ou postulados da própria lógica.

Outra obra importante deste período (mais propriamente de 1934 a 1939) é intitulada *Fundamentos de Matemática* (em alemão *Grundlagen der Mathematik*) de David Hibert e Paul Bernayz. O objetivo desta obra era tentar construir a matemática por meio do uso da lógica simbólica de uma nova maneira, com o intuito de tornar possível a determinação da consistência da matemática.

David Hilbert nasceu em 1862 na cidade de Königsberg na Rússia e faleceu em 1943. A partir de 1902, Hilbert, em seu programa, tinha por objetivo provar que as dificuldades referentes aos paradoxos da teoria de conjuntos e ao conceito de infinito, podiam ser superadas por meio de uma formalização adequada que permitisse a demonstração metateorética da consistência da aritmética e, portanto, da matemática (D'OTTAVIANO;

FEITOSA, 2003).

Neste contexto, cabe ressaltar que Hilbert foi o fundador do Formalismo (uma das principais filosofias matemáticas), que se consolidou por volta de 1920. Como já mencionado anteriormente, o programa de Hilbert estava vinculado à resolução do problema da consistência, mais precisamente a demonstração da consistência dos vários ramos da matemática era parte necessária e importante para a tese formalista. Para ele somente as demonstrações consistentes garantem a ausência de contradições. De acordo com Eves (2004) Hilbert e Bernays planejaram apresentar de forma detalhada o estudo que chamaram de *Teoria da demonstração*, onde tinham o objetivo de desenvolver um teste de consistência direto em matemática, com aplicações em toda matemática clássica. Entretanto, antes deste estudo ser publicado, Godel provou que é impossível provar a consistência de um sistema dedutivo formal como o de Hilbert.

Ressaltamos que Hilbert foi um dos mais importantes matemáticos da história. No Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris em 1900, ele propôs 23 problemas abertos importantes e que resultaram em grande enriquecimento para a matemática com o trabalho subsequente para resolvê-los.

Kurt Friedrich Gödel foi um matemático que se propôs a estudar estes problemas. Como resultado, destruiu o programa de Hilbert com o famoso *Teorema da Incompletude*, publicado em 1931. De forma resumida, neste trabalho Gödel mostra que nenhum sistema lógico, satisfazendo certas condições muito gerais, pode pretender conter apenas verdades lógicas e a totalidade das verdades lógicas (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003).

Kurt Friedrich Gödel nasceu em 1906 na Áustria. Aos 18 anos ele frequentava cursos de matemática, o que o levou mais tarde a obter o título de mestre em matemática. Em 1978 ele veio a falecer.

Em 1929, em sua tese de doutorado, Godel prova seu *Teorema da Completude* onde mostra que a lógica de primeira ordem é completa (trabalho que foi publicado somente em 1930), ou seja, uma sentença é válida em uma teoria se, e somente se, ela é teorema da teoria.

Entretanto, em 1931, Godel chocou os matemáticos e lógicos da época quando provou seus dois teoremas de consistência e incompletude. No primeiro teorema Godel prova que um sistema não pode ser simultaneamente completo e consistente. No segundo teorema ele prova que se o sistema é consistente, então sua consistência não pode ser provada dentro do próprio sistema [6].

[6]Entende-se por teoria *consistente* uma teoria que não gera contradição e por teoria *completa* uma teoria que permite concluir a veracidade ou falsidade de qualquer sentença pertencente a ela

No que se refere ao desenvolvimento da notação, ressaltamos que a notação que Frege desenvolveu era tanto quanto tediosa e foi ultrapassada por notações que exigem um número menor de símbolos. O sistema mais aceitado é o que foi introduzido por Peano em 1894 na obra *Notations de logique mathématique* (que significa *Notações de lógica matemática*) e, posteriormente, desenvolvida em edições sucessivas do seu *Formulaire the mathématiques* (que significa *Formulário de Matemática*). Mas, há ainda outros sistemas em uso. A Figura 1.4 apresenta os símbolos principais dos sistemas mais conhecidos.

Figura 1.4: Principais símbolos dos sistemas mais conhecidos

	Peano-Russel	Hilbert	Variantes	Lukasiewicz
Negação	$\sim P$	$\bar{P}$	$-P$, $\neg P$	Np
Conjunção	$P . Q$	$P \,\&\, Q$	PQ, $P \wedge Q$	Kpq
Disjunção	$P \vee Q$	$P \vee Q$	PQ	Apq
Condicional	$P \supset Q$	$P \rightarrow Q$		Cpq
Bi-condicional	$P \equiv Q$	$P \sim Q$	$P \leftrightarrow Q$	Epq
Quantificação Universal	$(x)F(x)$	$(x)F(x)$	$\forall x\, F(x)$, $\bigwedge x\, F(x)$	$\Pi x\, \Phi x$
Quantificação Existencial	$(\exists x)F(x)$	$(Ex)\, F(x)$	$\exists x\, F(x)$, $\bigvee x\, F(x)$	$\Sigma x\, \Phi x$

Fonte: KNEALE; KNEALE (1980, p. 527)

Há muitos matemáticos interessados e empenhados em pesquisas no campo da lógica. Com isso, em 1935, foi criado o periódico especializado *Journal of Simbolic Logic* para que esse grupo tivesse a oportunidade de publicar seus trabalhos.

Abordamos agora, mesmo que brevemente, sobre o surgimento das lógicas não-clássicas. Nas primeiras décadas do século XX, matemáticos e filósofos criaram novos sistemas lógicos, diferentes da lógica aristotélica. Surgem então, as lógicas não-clássicas. Apesar das lógicas não clássicas não serem objeto de estudo deste trabalho, consideramos relevante ao menos diferenciá-las e mencioná-las. Com efeito, de acordo com D'ottaviano e Feitosa (2003), podemos afirmar que as lógicas não-clássicas diferenciam-se da lógica clássica por: i) poderem estar baseadas em linguagens mais ricas em formas de expressão; ii) poderem estar baseadas em princípios inteiramente distintos; ou iii) poderem ter uma semântica distinta. A lógica não-clássica pode ser classificada em duas categorias principais: as que são complementares à lógica clássica e as que são alternativas à lógica clássica.

As lógicas complementares não negam os princípios básicos da lógica clássica, além de não questionar sua validade universal. Elas apenas ampliam e complementam seu domínio, geralmente introduzindo novos operadores. Alguns exemplos de lógicas complementares são: lógicas modais (com os operadores modais de necessidade e possibilidade), as lógicas deônticas (com os operadores deônticos proibido, permitido, indiferente e obrigatório), as lógicas do tempo (com operadores temporais), dentre outras.

Alguns exemplos de lógicas alternativas também conhecidas como heterodoxas são: as lógicas polivalentes (não aceitam o princípio do terceiro excluído, ou seja, um proposição admite mais de dois valores de verdade), a lógica intuicionista (a verdade de uma proposição deve ser estabelecida mediante uma prova construtiva), lógica paraconsistente (o princípio da não contradição não é universalmente válido, ou seja,uma proposição e sua negação podem ser ambas verdadeiras).

Ressaltamos, novamente, que o foco deste trabalho é a lógica clássica e, nesta perspectiva, no próximo capítulo apresentamos a lógica clássica e seus elementos.

CAPÍTULO 2

LÓGICA CLÁSSICA

Conforme exposto no final do Capítulo 1, outras lógicas foram apresentadas a partir do surgimento da lógica aristotélica. Contudo, estas lógicas em sua maioria, ou são um complemento da lógica clássica ou negam alguns de seus princípios. Por conta disso, neste trabalho abordamos tópicos da lógica clássica, por considerarmos que é esta a que fundamenta o estudo do raciocínio.

Nesta perspectiva, informalmente, podemos definir a lógica como a ciência que estuda princípios e métodos do raciocínio dedutivo. Tem como objetivo principal elaborar critérios que permitam analisar argumentos e determinar ou não sua validade. Destacamos, com isso, sua importância e o quanto este assunto é relevante para a matemática, pois é a lógica que a fundamenta, uma vez que a matemática não aceita ambiguidades e contradições.

Como o objetivo deste trabalho é mostrar a importância da lógica clássica na argumentação matemática e cotidiana, estudamos, neste capítulo, conceitos da Lógica Proposicional e da Lógica de Predicados.

As ideias apresentadas neste capítulo foram baseadas em obras dos seguintes autores: Mortari (2016) [24], Gerônimo e Franco (2008) [16]; Alencar Filho (2002) [2] e Alves (2016) [3].

2.1 Cálculo proposicional

No primeiro capítulo deste trabalho já foi apresentado que a ideia de validade de um argumento não é determinada pelo seu conteúdo, mas pela sua forma. Desse modo, para analisar a validade de um argumento devemos nos concentrar em seus aspectos formais.

O cálculo proposicional nos permite representar um grande número de formas válidas de argumentos comumente empregadas e demonstrar sua validade ou invalidade.

A lógica proposicional se ocupa da validade de argumentos que envolvem sentenças simples e combinações dessas sentenças simples por meio de operadores. Para evitar as ambiguidades da linguagem natural utilizamos de símbolos para apresentar as proposições.

2.1.1 Proposições e conectivos lógicos

Antes de apresentar a definição de proposição, faz-se necessário entender o que é uma sentença.

Definição 2.1 ***Sentença*** *é um conjunto de palavras ou símbolos pertencentes a uma língua e que expressam uma ideia.*

As sentenças podem ser classificadas das seguintes formas: interrogativas, exclamativas, imperativas e declarativas. No entanto, somente as sentenças declarativas determinam uma proposição, pois somente elas transmitem significados os quais podemos julgar se são verdadeiros ou falsos.

No exemplo a seguir apresentamos, respectivamente, uma sentença interrogativa, exclamativa e imperativa nas quais não é possível atribuir um valor falso ou verdadeiro.

- O que é função?
- A matemática é brilhante!
- Por favor, estude bastante.

Definição 2.2 ***Proposição*** *é uma sentença declarativa que exprime um pensamento que pode ser verdadeiro ou falso e na qual são válidos os seguintes princípios:*

1. *Princípio da identidade: Garante que uma proposição é igual a si mesma.*
2. *Princípio da não-contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.*
3. *Princípio do terceiro excluído: Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa; não existe uma terceira alternativa.*

Denominamos valor lógico de uma proposição a propriedade fundamental que ela tem de ser VERDADEIRA ou FALSA. Os valores lógicos **verdade** e **falsidade** de uma proposição geralmente são indicados pelas letras V e F.

Desse modo, percebemos que os princípios da não-contradição e do terceiro excluído fazem surgir o que se chama *Princípio de Bivalência*, pois estes princípios afirmam que:

Toda proposição admite um, e somente um, dos valores V ou F.

Isso significa que a toda proposição deverá ser associado um, e apenas um, dos valores de verdade. Assim, podemos dizer que atribuir um valor lógico a uma proposição é função, onde o domínio é o conjunto de todas as proposições e o contradomínio são os valores lógicos V e F, conforme definição a seguir:

Definição 2.3 *Uma **valoração v** é uma função do conjunto de todas as fórmulas atômicas de uma linguagem proposicional no conjunto V, F dos valores de verdade.*

Exemplo 2.4 *(**Exemplos de proposições simples**):*

p: Todo quadrado é retângulo.
q: Todo número primo é ímpar.

Analisando as proposições, atribuímos o valor lógico V à proposição p e o valor lógico F à proposição q. Assim, $\boldsymbol{v}(p) = V$ e $\boldsymbol{v}(q) = F$

Observação 2.5 *Denotamos as proposições simples por letras latinas minúsculas e estas letras serão chamadas letras proposicionais atômicas. Caso existam muitas proposições, utilizaremos índices numéricos nas letras, por exemplo:* p_0, p_1, p_2.

As proposições simples podem ser utilizadas para formar outras proposições. Para fazer isso fazemos uso dos conectivos, também chamados de operadores lógicos.

Definição 2.6 ***Conectivos ou operadores lógicos*** *são palavras ou expressões usadas para formar proposições a partir de uma ou mais proposições.*

Existem muitos conectivos nas linguagens naturais. No entanto, no cálculo proposicional são utilizados somente cinco conectivos para formar proposições compostas, conforme quadro a seguir:

Conectivo	**Símbolo**	**Denominação**
É falso que...	$\sim$	Negação
e	$\wedge$	Conjunção
ou	$\vee$	Disjunção
Se..., então...	$\rightarrow$	Condicional
... se, e somente se, ...	$\leftrightarrow$	Bicondicional

Observação 2.7 *Como veremos mais adiante o bicondicional $\leftrightarrow$ é um conectivo facilmente expresso em termos de "$\rightarrow$ e $\wedge$", por isso poderia ser descartado, e mais, em certos casos $\rightarrow$ também pode ser expresso por meio dos conectivos "$\sim$ e $\wedge$" e, em busca de uma teoria com o mínimo de conectivos, poderia também ser descartado, mas neste caso com muito mais dificuldade.*

As proposições são classificadas em dois tipos fundamentais: **simples** (ou atômicas) e **compostas** (ou moleculares). As proposições simples são aquelas que não contêm nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma (veja Exemplo 2.4). Já, as proposições compostas são aquelas formadas pela combinação de duas ou mais proposições, por meio dos conectivos.

Exemplo 2.8 ***(Exemplos de proposições compostas)**:*

1. ***É falso que** dois é um número ímpar.*
2. *Adolfo está na cozinha **ou** (Adolfo) está na sala.*
3. *João estudou **e** foi aprovado na disciplina.*
4. ***Se** chover, **então** ficarei em casa.*

O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por elas univocamente determinado.

Para atribuir um valor de verdade a proposições compostas, seguiremos algumas regras específicas de cada operador lógico. Veremos cada uma delas nesta seção.

Definição 2.9 ***(Negação)**: Dada uma proposição p, a **negação** de p, denotada por $\sim p$, é uma proposição com valor lógico contrário ao valor lógico de p, isto é, se p tem valor lógico verdadeiro, então $\sim p$ tem valor lógico falso e, se p tem valor lógico falso, então $\sim p$ tem valor lógico verdadeiro.*

Para calcular a valoração de uma negação, a regra do cálculo consiste simplesmente na ideia de que o valor da proposição negativa deve ser o oposto do valor da proposição que está sendo negada. Isso nos permite construir a seguinte tabela

p	$\sim p$
V	**F**
F	**V**

Portanto, sendo $\boldsymbol{v}(p)$ a denotação para o valor verdade da proposição p, temos que $\boldsymbol{v}(\sim\text{p}) = \sim\boldsymbol{v}(p)$.

O símbolo de negação pode aparecer mais de uma vez na frente de uma letra proposicional. Por exemplo, $\sim\sim p$ que pode ser lido como: "Não é verdade que não p".

Exemplo 2.10 ***(Exemplos de negação)**:*

- *p: João gosta de matemática.*
- *∼p: João não gosta de matemática/É falso que João gosta de matemática.*
- *q: 10x=30.*
- *∼q: 10x≠30.*
- *r: f é contínua.*
- *∼r: f é descontínua.*

A negação é um operador lógico que modifica o valor lógico de apenas uma proposição, seja ela simples ou composta. Os próximos operadores lógicos que serão apresentados formam proposições compostas a partir de duas outras proposições, sejam elas simples ou compostas. Os símbolos que representam estes conectivos são apresentados entre duas letras proposicionais.

Definição 2.11 ***(Conjunção)**: Sejam p e q proposições, a **conjunção** das proposições p e q denotada por $p \wedge q$, é uma nova proposição que assume o valor lógico verdadeiro somente quando p e q forem verdadeiras simultaneamente.*

De acordo com a Definição 2.11, temos que $p \wedge q$ só será verdadeira se p for verdadeira e q for verdadeira, ou seja, se uma das proposições for falsa, diremos que $p \wedge q$ é falsa, conforme a seguinte tabela:

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Portanto, a conjunção fica determinada pela equação $\boldsymbol{v}(p \wedge q) = \boldsymbol{v}(p) \wedge \boldsymbol{v}(q)$.

Exemplo 2.12 ***(Exemplos de Conjunção)**:*

p: 7 é um número primo.

q: 3 é um número par.

$p \wedge q$: 7 é um número primo e 3 é um número par.

Neste exemplo, temos que $\boldsymbol{v}(p) = V$ e $\boldsymbol{v}(q) = F$. Portanto, $\boldsymbol{v}(p \wedge q) = F$.

Definição 2.13 ***(Disjunção)**: Sejam p e q proposições, a **disjunção** das proposições p e q denotada por $p \vee q$, é uma proposição que assume o valor lógico verdadeiro quando pelo menos uma das duas proposições forem verdadeiras, equivalentemente quando p ou q forem verdadeiras.*

De acordo com a Definição 2.13, temos que $p \vee q$ será falsa se p for falsa e q for falsa, ou seja, se uma das proposições for verdadeira diremos que $p \vee q$ é verdadeira, conforme a tabela seguinte:

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Portanto, a disjunção fica determinada pela equação $\boldsymbol{v}(p \vee q) = \boldsymbol{v}(p) \vee \boldsymbol{v}(q)$.

Exemplo 2.14 ***(Exemplo de disjunção)**:*

p: 7 é um número primo.

q: 3 é um número par.

$p \wedge q$: 7 é um número primo e 3 é um número par.

Neste exemplo, temos que $\boldsymbol{v}(p) = V$ e $\boldsymbol{v}(q) = F$. Portanto, $\boldsymbol{v}(p \vee q) = V$.

No cálculo proposicional o "ou" não exclui a possibilidade de ambas as proposições componentes serem verdadeiras. Este fato é o que caracteriza o "ou" do cálculo proposicional como o "ou" *inclusivo*. O "ou" utilizado na linguagem natural é chamado "ou" *exclusivo*, pois elimina a possibilidade das duas proposições componentes serem verdadeiras. O "ou" *exclusivo* aparece em contextos como o da proposição "Letícia é paranaense ou Letícia é mineira", onde não há possibilidade de Letícia "ser paranaense" e "ser mineira" ao mesmo tempo.

O "ou" inclusivo utilizado no cálculo proposicional é o que será utilizado neste trabalho, a menos que se diga o contrário.

Definição 2.15 ***(Condicional)***: *Sejam p e q proposições, a* ***condicional*** *de p e q, denotada por $p \to q$ onde se lê: "p condiciona q", é proposição que assume o valor falso somente quando p for verdadeira e q for falsa.*

Segundo a Definição 2.15, temos que $p \to q$ será falso somente quando p é verdadeiro e q é falso, conforme a tabela a seguir:

p	q	$p \to q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Portanto, a condicional fica determinada pela equação $\boldsymbol{v}(p \to q) = \boldsymbol{v}(p) \to \boldsymbol{v}(q)$.

Observação 2.16 *Os símbolos $\to, \leftrightarrow$ e os símbolos $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ são distintos, pois os dois primeiros representam uma operação entre proposições e os dois últimos estabelecem uma relação entre as proposições.*

A condicional aparece com grande frequência em vários resultados estudados na Matemática. Por este motivo, vamos estudá-lo mais detalhadamente.

Na condicional $p \to q$ temos que a proposição que aparece antes do símbolo $\to$ é chamada antecedente e a proposição que aparece depois é chamada consequente. Convém destacar que na matemática moderna, porém, utiliza-se o termo hipótese ao invés de antecedente e tese ao invés de consequente.

Nem sempre este conectivo será apresentado na linguagem natural como "se..., então...". Veremos isso tomando como exemplo a proposição p: "N é inteiro" e a proposição q: "N é racional". No quadro abaixo elencamos algumas expressões que representam um mesmo condicional na linguagem natural.

$p \to q$	Linguagem natural
Se p, então q	Se N é inteiro, então N é racional
p implica q	N é inteiro implica que N é racional
p somente se q	N é inteiro somente se N é racional
Dado p, q	Dado que N é inteiro, N é racional
p é condição suficiente para q	N é inteiro é condição suficiente para N é racional
q se p	N é racional se N é inteiro
q desde que p	N é racional desde que N seja inteiro
q sempre que p	N é racional sempre que N é inteiro
q é condição necessária para p	N é racional é condição necessária para N é inteiro

Como vimos nos exemplos do quadro, nem sempre o antecedente aparece primeiro que o consequente. Isso está evidenciado no exemplo de condicional expressa da seguinte forma: "N é racional, se N é inteiro".

Desse modo, é importante destacar que devemos pensar no condicional "se p, então q" de forma que sempre que p é verdadeiro, também é verdadeiro q, ou seja que não é necessário que p seja verdadeiro, mas sim que é suficiente que ele o seja. Com isso, não existe uma situação em que tenhamos o antecedente verdadeiro e o consequente falso. Este fato, pode nos fazer pensar em $p \rightarrow q$ como uma maneira mais simples de expressar $\sim(p \wedge \sim q)$ que é mais formal.

Usaremos $\sim(p \wedge \sim q)$ para mostrar cada valoração da tabela-verdade da condicional, usando somente as operações de negação e conjunção, que já foram definidas.

Na primeira linha, temos que $\boldsymbol{v}(p) =$V, $\boldsymbol{v}(q) =$V.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(\sim(p \wedge \sim q)) &= \sim\boldsymbol{v}(p \wedge \sim q) \\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p) \wedge \boldsymbol{v}(\sim q)) \\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p) \wedge \sim\boldsymbol{v}(q)) \\
&= \sim(\mathrm{V} \wedge \sim\mathrm{V}) \\
&= \sim(\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}) \\
&= \sim(\mathrm{F}) \\
&= \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Na segunda linha, temos que $\boldsymbol{v}(p) =$V, $\boldsymbol{v}(q) =$F.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(\sim(p \wedge \sim q)) &= \sim\boldsymbol{v}(p \wedge \sim q) \\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p) \wedge \boldsymbol{v}(\sim q)) \\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p) \wedge \sim\boldsymbol{v}(q)) \\
&= \sim(\mathrm{V} \wedge \sim\mathrm{F}) \\
&= \sim(\mathrm{V} \wedge \mathrm{V}) \\
&= \sim(\mathrm{V}) \\
&= \mathrm{F}
\end{aligned}$$

Na terceira linha, temos que $\boldsymbol{v}(p) =$ F, $\boldsymbol{v}(q) =$ V.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(\sim(p \wedge \sim q)) &= \sim\boldsymbol{v}(p \wedge \sim q) \\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p) \wedge \boldsymbol{v}(\sim q)) \\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p) \wedge \sim\boldsymbol{v}(q)) \\
&= \sim(\mathrm{F} \wedge \sim\mathrm{V}) \\
&= \sim(\mathrm{F} \wedge \mathrm{F}) \\
&= \sim(\mathrm{F}) \\
&= \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Na quarta linha, temos que $\boldsymbol{v}(p)$ =F, $\boldsymbol{v}(q)$ =F.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(\sim(p\wedge \sim q)) &= \sim\boldsymbol{v}(p\wedge \sim q)\\
&= \sim(\boldsymbol{v}(p)\wedge\boldsymbol{v}(\sim q))\\
&=\sim(\boldsymbol{v}(p)\wedge \sim\boldsymbol{v}(q))\\
&= \sim(\mathrm{F}\wedge \sim\mathrm{F})\\
&= \sim(\mathrm{F}\wedge\mathrm{V})\\
&= \sim(\mathrm{F})\\
&= \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Convém destacar também que o conectivo condicional expressa, com os termos "condição suficiente" e "condição necessária", somente uma relação entre os valores-verdade do antecedente e do consequente, independente de qual proposição sejam eles ou da conexão real que possa existir entre eles. Em casos particulares, o condicional pode expressar relação causa-efeito, mas não necessariamente. Na lógica proposicional não importa se o antecedente tem relação com o consequente, importa somente sua valoração.

Exemplo 2.17 ***(Exemplos de condicional)****:*

1. *p: T é um triângulo equilátero.*

   q: T é um triângulo isósceles.

   p→q: Se T é um triângulo equilátero, então T é um triângulo isósceles.

2. *r: A Terra é plana.*

   s: 5 é um número primo.

   r→s: Se a Terra é plana, então 5 é um número primo.

Assumindo, neste exemplo, que $\boldsymbol{v}(p) = \mathrm{V}$ e $\boldsymbol{v}(q) = \mathrm{V}$, temos que $\boldsymbol{v}(p \to q) = \mathrm{V}$ e assumindo que $\boldsymbol{v}(r) = \mathrm{F}$ e $\boldsymbol{v}(s) = \mathrm{V}$, temos que $\boldsymbol{v}(r \to s) = \mathrm{V}$.

Notemos que na primeira condicional do Exemplo 2.17 há uma relação entre as proposições. Já na segunda condicional não há relação entre antecedente e consequente.

Sabemos que existem proposições que são formadas a partir de proposições condicionais. Elas são formadas mudando a posição do antecedente e do consequente em relação ao operador lógico ou negando antecedente e consequente. Continuando a usar o exemplo do quadro acima, temos que as proposições associadas ao condicional estão apresentadas no quadro seguinte:

Proposição	Símbolo	Linguagem natural
condicional	$p \to q$	Se N é inteiro então N é racional
recíproca	$q \to p$	Se N é racional, então N é inteiro
contrapositiva	$\sim q \to \sim p$	Se N não é racional, então N não é inteiro

Definição 2.18 ***(Bicondicional)****: Sejam p e q proposições, a* ***bicondicional*** *de p e q, denotada por $p \leftrightarrow q$, onde se lê: "p bicondiciona q", é a proposição que assume o valor lógico verdadeiro somente quando p e q forem verdadeiras ou p e q forem falsas.*

A bicondicional afirma que a condicional e sua recíproca são verdadeiras, ou seja, podemos dizer que a bicondicional é uma forma simples de apresentar a conjunção $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Desse modo, a bicondicional só é verdadeira quando os valores de verdade das proposições que a compõe são iguais, conforme tabela:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Portanto, a bicondicional fica determinada pela equação $\boldsymbol{v}(p \leftrightarrow q) = \boldsymbol{v}(p) \leftrightarrow \boldsymbol{v}(q)$.

Exemplo 2.19 ***(Exemplo de bicondicional)****:*

p: $\sqrt{2}$ é um número racional.

q: 13 é um número quadrado perfeito.

p$\leftrightarrow$q: $\sqrt{2}$ é um número racional, se e somente se, 13 é um número quadrado perfeito.

Neste exemplo, temos que $\boldsymbol{v}(p)$ =F, $\boldsymbol{v}(q)$ = F, $\boldsymbol{v}(p \to q)$ = V, $\boldsymbol{v}(q \to p)$ = V. Como $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$, e como já vimos uma conjunção é verdadeira somente se as duas proposições que a compõe também são, temos que, $\boldsymbol{v}(p \leftrightarrow q)$ = V, neste caso.

As proposições que estudamos nesta seção eram de certa forma simples, pois, ou eram proposições atômicas ou utilizavam em sua estrutura apenas um conectivo. Na próxima seção estudaremos proposições mais complexas que em sua composição conterão vários conectivos e utilizarão o parênteses.

2.1.2 Fórmulas bem formadas

Inicialmente, consideramos necessário especificar os símbolos que constituem a linguagem formal do Cálculo Proposicional. São eles:

- Letras proposicionais atômicas: conjuntos das letras minúsculas $(p, q, r, ...)$ utilizadas para designar proposições atômicas.

- Conectivos: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

- Parênteses: ( ).

Uma sequência qualquer destes símbolos do Cálculo Proposicional pode ser uma fórmula. Todavia, é preciso especificar as regras de formação para que uma fórmula seja considerada bem formada, ou seja, de sentido completo. Isto porque no Cálculo Proposicional nem toda fórmula é uma fórmula bem formada[1].

Para evitar uso de letras pertencentes ao vocabulário do Cálculo Proposicional utilizaremos letras latinas maiúsculas $(P, Q, R, ...)$ para denotar as fórmulas e assim enunciar as regras de formação do Cálculo Proposicional.

Definição 2.20 *Uma **fórmula bem formada**, ou simplesmente **fórmula**, da linguagem do Cálculo Proposicional Clássico é uma expressão que pode ser obtida através das seguintes regras:*

1. *Uma letra proposicional sozinha é uma fórmula bem formada.*

2. *Se P é uma fórmula bem formada, então $\sim P$ é uma fórmula bem formada.*

3. *Se P e Q são fórmulas bem formadas, então $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ são fórmulas bem formadas.*

4. *Nada mais é uma fórmula bem formada.*

Na Definição 2.20, notamos que a regra 1 trata das proposições atômicas; as regras 2 e 3 tratam das proposições moleculares; a regra 4 proíbe a existência de outras fórmulas, além das citadas nas regras 1-3.

Quanto ao uso de parênteses, no Cálculo Proposicional, convencionaremos que não será necessário apresentar os parênteses externos.

Definição 2.21 ***Subfórmula imediata***

*Uma **subfórmula imediata** é obtida através das seguintes regras:*

- *fórmulas atômicas não tem subfórmulas imediatas;*

[1] Para melhor compreensão pode-se tomar como exemplo expressões de uma linguagem da aritmética $2 < 5$ e 5-+>. Note que nesta linguagem somente a primeira expressão é bem formada

- *a subfórmula imediata de* $\sim P$ *é* P;

- *as subfórmulas imediatas de* $P\wedge Q$, $P\vee Q$, $P\to Q$ *e* $P\leftrightarrow Q$ *são* P *e* Q.

Conforme Definição 2.20 quaisquer proposições, simples e compostas, podem ser expressas por uma fórmula bem formada. Sendo assim, as ideias de fórmulas e subfórmulas imediatas serão utilizadas na prática, em conjunto com a utilização das tabelas-verdade, para atribuir valor lógico a proposições compostas, obedecendo às regras de valoração apresentadas na definição a seguir:

Definição 2.22 *Seja* $\boldsymbol{v}$ *uma valoração. O valor de verdade de uma proposição molecular qualquer em* $\boldsymbol{v}$ *é dado pelas condições a seguir:*

1. $\boldsymbol{v}(\sim P)=V$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v}(P)=F$;

2. $\boldsymbol{v}(P\wedge Q)=V$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v}(P)=V$ *e* $\boldsymbol{v}(Q)=V$;

3. $\boldsymbol{v}(P\vee Q)=V$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v}(P)=V$ *ou* $\boldsymbol{v}(Q)=V$;

4. $\boldsymbol{v}(P\to Q)=V$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v}(P)=F$ *ou* $\boldsymbol{v}(Q)=V$;

5. $\boldsymbol{v}(P\leftrightarrow Q)=V$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v}(P)=\boldsymbol{v}(Q)$.

Consideramos importante ressaltar que a negação abrange somente a primeira expressão que a segue, exceto quando utiliza-se parênteses. Também é importante observar que a ordem no procedimento para o cálculo proposicional deve sempre primeiramente priorizar o que está entre parênteses. Caso não existam parênteses, primeiro calculamos o valor lógico de negações, depois de conjunções e disjunções, depois de condicionais e bicondicionais.

Diante deste esclarecimento, nota-se por exemplo que a fórmula $p\wedge q\vee \sim p$ não é uma fórmula bem formada, pois as operações de conjunção e disjunção tem a mesma ordem de precedência e sem a utilização de parênteses gera ambiguidade. Veremos isso com mais detalhe na próxima seção.

2.1.3 Proposições compostas e tabelas-verdade

Usualmente temos proposições mais complexas que as atômicas ou que utilizam somente um operador. Vejamos, a seguir, um exemplo simples de tradução da linguagem natural para a linguagem do Cálculo Proposicional.

Se Helena é advogada e é professora, então Helena é italiana.

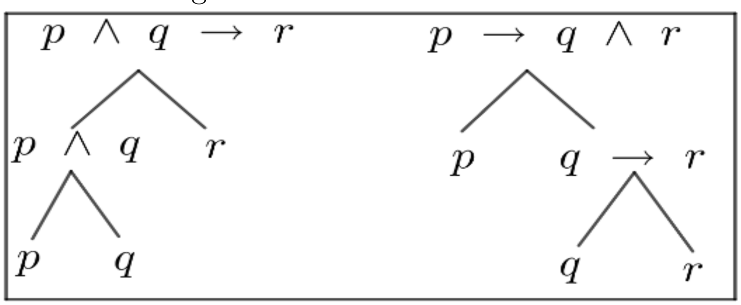
Se utilizarmos as letras proposicionais p, q e r para representar as proposições "Helena é advogada", "Helena é professora" e "Helena é italiana", respectivamente, teríamos na simbologia do cálculo proposicional a seguinte fórmula:

$$(p \wedge q) \to r.$$

Da forma como o parênteses foi posicionado, percebemos que a fórmula é uma condicional em que o antecedente é $(p \wedge q)$ e o consequente é r. Mas, se não tivesse sido colocado o parênteses seria possível fazer esta afirmação?

Não seria, pois sem o parênteses a fórmula dada seria ambígua e poderia ser lida de duas maneiras: "Se Helena é advogada e professora, então é italiana" ou "Helena é advogada e se Helena é professora, então é italiana", conforme figura a seguir:

Figura 2.1: Uso dos Parênteses



Fonte: A autora

Outro ponto importante é refletido na seguinte indagação: Como calcular, em todos os casos possíveis, o valor de uma fórmula para que se possa determinar se, sempre que as premissas são verdadeiras, essa fórmula também é verdadeira? A solução seria examinar todos os casos possíveis, ou seja, examinar todas as valorações, pois cada valoração descreve um modo como o mundo poderia ser: em uma delas A e B são verdadeiras; em outra A é verdadeira e B é falsa, e assim por diante. Mas, seja lá que valoração utilizarmos, as fórmulas podem apenas ser verdadeiras ou falsas. Por isso ao identificarmos a quantidade de proposições atômicas existentes em uma fórmula, conseguimos determinar todas as possíveis valorações da fórmula.

Teorema 2.23 *A tabela verdade de uma proposição P composta por n proposições simples possui 2^n linhas.*

Demonstração: Pelo Princípio do Terceiro Excluído temos que uma proposição(simples ou composta) possui somente dois valores de verdade: a verdade (V) ou a falsidade (F). Desse modo, consideramos a proposição composta $P(p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$. Como P possui n proposições simples e cada uma delas tem somente duas possibilidades de valoração, temos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, que $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n\,vezes} = 2^n$ é o número de valorações possíveis para a proposição P. $\square$

Se tivéssemos uma fórmula com um número n relativamente grande de proposições atômicas, como se faria para listar todos os possíveis valores de verdade para cada proposição atômica? Há um método simples, que consiste na técnica de: na primeira coluna alternar os valores V ou F de 2^{n-1} em 2^{n-1} (V, V, V, ... depois F, F, F, ... depois V,...) até atingir o número 2^n de linhas; na segunda coluna alternar os valores V ou F de 2^{n-2} em 2^{n-2} (V, V,... depois F, F, depois V, V, ...) até atingir o número 2^n de linhas e assim por diante até chegar na coluna da última proposição atômica. Nesta última coluna os valores V ou F serão alternados de $2^0 = 1$ em $2^0 = 1$ (V, F, V, F, ...) até atingir o número 2^n de linhas.

Consideremos, por exemplo, a fórmula:

$$(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q.$$

Vamos elencar todas as suas valorações utilizando a tabela verdade. Primeiramente, utilizamos o método explicitado acima para atribuir valor lógico às proposições atômicas identificadas nesta fórmula (p, q e r). Como são três proposições atômicas, teremos $2^3 = 8$ linhas na tabela. Para completar as colunas do lado direito das proposições atômicas da tabela, precisamos identificar as subfórmulas imediatas de $(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q$, mas antes com as subfórmulas imediatas destas, e assim por diante, na ordem que vai das mais simples para as mais complexas. Ou seja, precisamos fazer a lista de todas as subfórmulas de $(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q$, pois para calcular o valor de qualquer fórmula, precisamos, obviamente, do valor de suas subfórmulas imediatas. Neste exemplo temos que as subfórmulas imediatas são:

$$p, q, r, \sim p, \sim q, \sim p \vee r.$$

Logo, sua tabela-verdade completa com todos os valores possíveis é apresentada da seguinte forma:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee r$	$(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V	**F**
V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	V	**V**
V	F	F	F	V	F	**F**
F	V	V	V	F	V	**F**
F	V	F	V	F	V	**F**
F	F	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	**V**

2.2 Inferência e equivalência lógica

Com a utilização de tabelas-verdade podemos obter algumas regras e identidades que são muito importantes nas demonstrações matemáticas. Antes de conhecê-las é importante destacar que as proposições compostas são classificadas em: tautologias, contradições e contingências. Vamos estudar as características de cada classificação para posteriormente conseguir aplicar estes conceitos na verificação de regras de inferência e equivalência.

2.2.1 Tautologias, contradições e contingências

Definição 2.24 *Seja P uma fórmula qualquer. Então:*

- *P é uma tautologia se, para toda valoração $\boldsymbol{v}(P) = V$;*
- *P é uma contradição se, para toda valoração $\boldsymbol{v}(P) = F$;*
- *P é uma contingência se não for nem tautologia nem contradição, ou seja, se existe pelo menos uma valoração tal que $\boldsymbol{v}(P) = V$ e ao menos uma valoração tal que $\boldsymbol{v}(P) = F$.*

Conforme a Definição 2.24 uma *tautologia* é uma fórmula cujo valor de verdade é sempre verdadeiro, qualquer que seja o valor lógico atribuído às proposições atômicas que compõem esta fórmula. Ou seja, uma *tautologia* é uma fórmula que obtém o valor V em toda e qualquer valoração. Consideremos, por exemplo a tabela-verdade da fórmula $p \vee \sim(p \wedge q)$:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
V	V	V	F	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	V	**V**

Com o exemplo apresentado, observamos que em cada uma das possíveis atribuições de valores lógicos para as fórmulas atômicas p e q a fórmula $p\vee \sim(p \wedge q)$ resulta verdadeira. Portanto, sua verdade não depende dos valores lógicos atribuídos a cada proposição atômica componente da fórmula.

Fórmulas com essa característica são também chamadas de *logicamente verdadeiras* ou *válidas.*

Teorema 2.25 ***(Teorema da substituição para tautologias)*** *Se P(p, q, r,...) é uma tautologia, então P(P_0, Q_0, R_0,...) também é uma tautologia, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0,...*

Demonstração: Consideremos P_0, Q_0, R_0,... proposições quaisquer e $P(p, q, r, ...)$ uma tautologia. Como uma tautologia não depende dos valores lógicos das proposições atômicas que as compõem, temos que a verdade de P não depende dos valores lógicos de $p, q, r, ...$ Logo, substituindo p por P_0, q por Q_0, r por R_0, assim por diante o resultado de P não se altera, isto é, teremos ainda uma tautologia. □

Para ficar mais claro, tomemos a fórmula $\sim(p\wedge \sim p)$. Por meio da tabela-verdade, verificaremos que ela é uma tautologia.

p	$\sim p$	$p\wedge \sim p$	$\sim(p\wedge \sim p)$
V	F	F	**V**
F	V	F	**V**

Agora, vamos substituir a proposição p desta fórmula pela proposição composta $r \wedge s$ e verificar se a fórmula $\sim ((r \wedge s)\wedge \sim (r \wedge s))$ também é uma tautologia.

r	s	$r \wedge s$	$\sim(r \wedge s)$	$(r \wedge s)\wedge \sim(r\wedge s)$	$\sim ((r \wedge s)\wedge \sim (r \wedge s))$
V	V	V	F	F	**V**
V	F	F	V	F	**V**
F	V	F	V	F	**V**
F	F	F	V	F	**V**

Como a última coluna da tabela só apresenta valores lógicos verdadeiros, temos, como queríamos verificar, uma tautologia.

Já uma *contradição*, conforme Definição 2.24, é uma fórmula cujo valor de verdade é sempre falso, qualquer que seja o valor lógico atribuído às proposições atômicas que compõem esta fórmula. Ou seja, uma *contradição* é uma fórmula que obtém o valor lógico F em toda e qualquer valoração. Consideremos, por exemplo, a tabela verdade da fórmula $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
V	V	V	V	F	**F**
V	F	F	V	F	**F**
F	V	F	V	F	**F**
F	F	F	F	V	**F**

Neste exemplo observamos que em cada uma das possíveis atribuições de valores lógicos para as fórmulas atômicas p e q a fórmula $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ resulta falsa. Portanto, sua falsidade não depende dos valores lógicos atribuídos a cada proposição atômica componente da fórmula. Fórmulas com essa característica são também são chamadas *logicamente falsas* ou *inconsistentes*.

Observação 2.26 *Como uma tautologia é sempre verdadeira, sua negação é sempre falsa, ou seja, é uma contradição e vice-versa.*

As fórmulas nem sempre são tautologias ou contradições, pois conforme já apresentado a fórmula $(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim$ q não é nem tautologia, nem contradição, pois esse tipo de fórmula resulta em V em pelo menos uma das linhas e também resulta em F em pelo menos uma das linhas. Esse tipo de fórmula é chamada de *contingência*. Consideremos, por exemplo, a tabela- verdade da fórmula $p \vee q \rightarrow p$:

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	V	**F**
F	F	F	**V**

Notemos que, nesta fórmula, em cada uma das possíveis atribuições de valores lógicos para as fórmulas atômicas p e q a fórmula $p \vee q \rightarrow p$ resulta em verdadeiro ou falso e não somente em um desses valores. Diferentemente das tautologias e contradições, as contingências dependem dos valores lógicos atribuídos às suas proposições atômicas componentes.

2.2.2 Implicação ou inferência lógica

Definição 2.27 ***(Implicação)*** *Uma fórmula P implica logicamente uma fórmula Q se, e somente se, todas as vezes que P for verdadeira, Q também será verdadeira. Ou seja, para toda valoração* ***v*** *tal que* ***v****(P)= V temos que* ***v****(Q)=V.*

Indicamos que a proposição $P(p, q, r, ...)$ implica a proposição $Q(p, q, r, ...)$ por meio da notação $P(p, q, r, ...) \Rightarrow Q(p, q, r, ...)$.

De acordo com a Definição 2.27 temos que, em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

Exemplo 2.28 *(**Lei transitiva ou Lei do Silogismo Hipotético**) A lei transitiva é uma inferência bastante utilizada em matemática. Sua ideia pode ser apresentada da seguinte forma: "p condiciona q" e "q condiciona r" implica "p condiciona r". Na simbologia do Cálculo Proposicional temos $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$.*

Fazemos a verificação desta inferência, utilizando a tabela-verdade, a seguir:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
V	V	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
F	F	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$

Notemos que na sexta coluna e na sétima coluna da tabela-verdade acima, temos $p \to r$ verdadeiro sempre que $(p \to q) \wedge (p \to r)$ é verdadeiro e assim, de acordo com a Definição 2.27 temos uma implicação.

Vejamos uma aplicação das tautologias na determinação de inferência no próximo teorema.

Teorema 2.29 *Sejam p, q, ... proposições quaisquer. A fórmula proposicional P(p, q, ...) implica a fórmula proposicional Q(p, q, ...) se, e somente se, a condicional P(p, q, ...) $\to$ Q(p, q, ...) é uma tautologia.*

Demonstração: Consideremos $P(p, q, ...)$ e $Q(p, q, ...)$ fórmulas proposicionais. Temos que se $P(p, q, ...)$ implica $Q(p, q, ...)$ para quaisquer $p, q, ...$, então pela definição de implicação não ocorrerá simultaneamente os valores lógicos V e F nessas duas proposições, respectivamente. Logo, pela definição da condicional, temos que nas linhas da última coluna de $P(p, q, ...) \to Q(p, q, ...)$ somente conterá o valor lógico V. Portanto, essa condicional é uma tautologia.

Por outro lado, temos que se a condicional $P(p, q, ...) \to Q(p, q, ...)$ é uma tautologia, então as linhas da última coluna desta condicional só contêm valores lógicos V. Então, pela definição de condicional não ocorrerá simultaneamente os valores lógico V e F nas linhas das duas proposições respectivamente. Portanto, temos que $P(p,q,...) \Rightarrow Q(p,q,...)$, para quaisquer $p,q,....$ $\square$

Para exemplificar faremos a verificação de que a lei transitiva é uma implicação lógica utilizando o Teorema 2.29.

Vamos construir a tabela verdade completa de $((p \to q) \wedge (p \to r)) \to (p \to r)$.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to)\wedge(q \to r)$	$((p \to q)\wedge(q \to r))\to(p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	V	F	**V**
V	F	F	F	V	V	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	F	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

Notemos que o condicional $((p \to q)\wedge(q \to r))\to (p \to r)$ gera uma tautologia. Logo, de acordo com o Teorema 2.29 a lei transitiva é uma implicação lógica.

Corolário 2.30 *Se $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$, então também se têm: $P(P_0,\ Q_0,\ R_0,...\ ) \Rightarrow Q(P_0,\ Q_0,\ R_0,...\ )$, quaisquer que sejam as proposições P_0, Q_0, R_0,...*

Demonstração: Por hipótese, temos que $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$. Logo, $P(p,q,r,...)$ $\to Q(p,q,r,...)$ é uma tautologia e pelo Teorema da Substituição para Tautologias, temos que $P(P_0,\ Q_0,\ R_0,...\ ) \to Q(P_0,\ Q_0,\ R_0,...\ )$ também é uma tautologia para quaisquer proposições P_0, Q_0, R_0,... . Portanto, $P(P_0,\ Q_0,\ R_0,...\ ) \Rightarrow Q(P_0,\ Q_0,\ R_0,...\ )$ $\square$

O próximo teorema enunciará as principais regras de inferência lógica utilizadas.

Teorema 2.31 *(**Regras de Inferência**) Sejam p, q, r e s fórmulas quaisquer, t uma tautologia e c uma contradição. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Leis de Adição:*

   (a) $p \Rightarrow p\vee q$.

   (b) $q \Rightarrow p\vee q$.

2. *Leis de Simplificação:*

   (a) $p\wedge q \Rightarrow p$.

(b) $p \wedge q \Rightarrow q$.

3. *Silogismo Disjuntivo:* $(p \wedge q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

4. *Modus Ponens:* $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

5. *Modus Tollens:* $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.

6. *Dilema Construtivo:* $(p \rightarrow q) \wedge r \rightarrow s \Rightarrow (p \vee r) \rightarrow (q \vee s)$.

7. *Dilema Destrutivo:* $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim r)$.

8. *Lei transitiva:* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.

9. *Contradição e Tautologia:*

   (a) $c \Rightarrow p$.

   (b) $p \Rightarrow t$.

10. *Inferência por casos:* $(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p) \Rightarrow (q \vee r) \rightarrow p$.

11. *Inferência por eliminação:* $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \sim r \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

12. *União:* $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Demonstração: Para fazer a demonstração de cada regra de inferência, faremos uso das tabelas-verdade e da definição de implicação lógica apresentada (Definição 2.27).

1. Adição: (a) $p \Rightarrow p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
$\boxed{\text{V}}$	V	$\boxed{\text{V}}$
$\boxed{\text{V}}$	F	$\boxed{\text{V}}$
F	V	V
F	F	F

O caso 1. (b) é feito de modo análogo.

2. Simplificação: (a) $p \wedge q \Rightarrow p$.

p	q	$p \wedge q$
V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	F	F
F	V	F
F	F	F

O caso 2 - (b) é feito de modo análogo.

3. Silogismo Disjuntivo: $(p \wedge q) \wedge \sim p \Rightarrow q$.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	V	F	F

4. Modus Ponens: $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$
V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

5. Modus Tollens: $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	$\boxed{V}$	V	$\boxed{V}$

6. Dilema Construtivo: $(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r) \to (q \vee s)$.

p	q	r	s	$p \to q$	$r \to s$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \to q) \wedge (r \to s)$	$(p \vee r) \to (q \vee s)$
V	V	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	V	F	F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	V	V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	V	F	F	V	V	F	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	V	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	F	F	V	V	F	F	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$

7. Dilema Destrutivo: $(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s) \to (\sim p \wedge \sim r)$.

p	q	r	s	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim s$	$p \to q$	$r \to s$	$\sim q \vee \sim s$	$\sim p \vee \sim r$	$(p \to q) \wedge (r \to s)$	$(\sim q \wedge \sim s) \to (\sim p \wedge \sim r)$
V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$

8. Lei transitiva[2]: $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$.

9. Contradição e Tautologia: são casos triviais, pois uma contradição implica qualquer proposição e uma proposição implica qualquer tautologia.

10. Inferência por casos: $(q \to p) \wedge (r \to p) \Rightarrow (q \vee r) \to p$.

p	q	r	$q \vee r$	$q \to p$	$r \to p$	$(q \to p) \wedge (r \to p)$	$(q \vee r) \to p$
V	V	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	V	F	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	V	V	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
V	F	F	F	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$

11. Inferência por eliminação: $(p \to (q \vee r)) \wedge \sim r \Rightarrow (p \to q)$.

[2] Já foi verificada no exemplo 2.28.

p	q	r	$\sim r$	$q \vee r$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V	$\boxed{\text{V}}$
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	V	$\boxed{\text{V}}$
F	F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	$\boxed{\text{V}}$	V	$\boxed{\text{V}}$

12. União: $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

□

Com o objetivo de deixar mais claro como identificar uma regra de inferência, a seguir apresentamos um exemplo para cada uma das regras de inferência, utilizando para isso a linguagem cotidiana. Em itálico, destacamos a proposição que foi inferida a partir de outras proposições.

- **Adição**

  Solange é professora de matemática.

  Solange é professora de matemática ou Joana é filha de João.

- **Simplificação**

  A seleção brasileira de futebol é campeã da Copa do Mundo e campeã da Copa América.

  A seleção brasileira de futebol é campeã da Copa do mundo.

- **Silogismo disjuntivo**

  A professora de matemática dará uma prova escrita ou trabalho em grupo.

  A professora de matemática não dará trabalho em grupo.

  A professora de matemática dará uma prova escrita.

- **Modus ponens**

  Se Adolfo é casado, então tem uma sogra.

  Adolfo é casado.

  Adolfo tem uma sogra.

- **Modus tollens**

  Se Maria for ao Teatro, então encontrará Joana.

  Maria não encontrou Joana.

  Maria não foi ao Teatro.

- **Dilema construtivo**

  Se tenho um bom salário, então posso viajar.

  Se sou inteligente, então tiro boas notas.

  Se tenho um bom salário ou sou inteligente, então posso viajar ou tirar boas notas.

- **Dilema destrutivo**

  Se tenho um bom salário, então posso viajar.

  Se sou inteligente, então tiro boas notas.

  Se não posso viajar ou não tiro boas notas, então não tenho um bom salário ou não sou inteligente.

- **Lei transitiva**

  Se Mônica é casada, então Mônica tem um esposo.

  Se Mônica tem um esposo, então Mônica tem uma sogra.

  Se Mônica é casada, então Mônica tem uma sogra.

- **Inferência por casos**

  Se sou bonita, então tenho namorado.

  Se tenho dinheiro, então tenho namorado.

  Se sou bonita ou tenho dinheiro, então tenho namorado.

- **Inferência por eliminação**

  Se tenho namorado, então sou bonita ou tenho dinheiro.

  Não tenho dinheiro.

  Se tenho namorado, então sou bonita.

- **União**

  No fim de semana estudei matemática.

  No fim de semana estudei lógica.

  No fim de semana estudei lógica e matemática.

2.2.3 Bi-implicação ou equivalência lógica

Definição 2.32 *(**Bi-implicação**) Sejam P(p, q, r,...) e Q(p, q, r,...) fórmulas proposicionais com as mesmas letras proposicionais. P é equivalente a Q (ou P bi-implica Q) se, e somente se, suas tabelas-verdade forem idênticas. Ou seja, para toda valoração **v**, tem-se que **v**(P)=**v**(Q).*

Indicamos que a proposição $P(p, q, r, ...)$ bi-implica a proposição $Q(p, q, r, ...)$ pela notação $P(p, q, r, ...) \Leftrightarrow Q(p, q, r, ...)$.

Exemplo 2.33 *(**Lei Contrapositiva**) A lei contrapositiva é bastante utilizada nas demonstrações matemáticas. Sua ideia pode ser apresentada da seguinte forma: p condiciona q é equivalente a não q condiciona não p. Na simbologia do Cálculo Proposicional escrevemos:* $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q) \to (\sim p)$.

Faremos a verificação desta equivalência utilizando a tabela-verdade, a seguir:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$(\sim q)\to(\sim p)$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

Na tabela-verdade acima as linhas das colunas das fórmulas $p \to q$ e $(\sim q)\to(\sim p)$ apresentam valorações idênticas. Logo $p \to q \Leftrightarrow (\sim q)\to(\sim p)$.

Vejamos mais uma aplicação das tautologias no teorema a seguir.

Teorema 2.34 *Sejam p, q,... proposições quaisquer. A fórmula proposicional P(p, q,..) é equivalente a fórmula proposicional Q(p, q,...) se, e somente se, a bicondicional P(p, q, r,..)* $\leftrightarrow$ *Q(p, q,...) for tautológica.*

Demonstração: Consideremos $P(p,q,...)$ e $Q(p,q,...)$ fórmulas proposicionais. Temos que, se $P(p,q,...)$ bi-implica $Q(p,q,...)$ para quaisquer $p,q,...$, então pela definição de bi-implicação (Definição 2.32) os valores lógicos das duas proposições são simultaneamente idênticos. Então pela definição de bicondicional (Definição 2.18), nas linhas da última coluna de $P(p,q,...) \leftrightarrow Q(p,q,...)$ somente constará o valor lógico V. Portanto, esta bicondicional é uma tautologia. Por outro lado, temos que, se $P(p,q,...) \leftrightarrow Q(p,q,...)$, é uma tautologia, então as linhas da última coluna da tabela-verdade desta bicondicional só contém valores lógicos V. Logo, pela definição de bicondicional os valores lógicos de $P(p,q,...) \leftrightarrow Q(p,q,...)$ serão sempre ambos verdadeiros ou ambos falsos. Portanto, $P(p,q,...) \Leftrightarrow Q(p,q,...)$. □

Para exemplificar o Teorema 2.34 faremos a verificação de que a lei contrapositiva é uma bi-implicação. Para isso, vamos construir a tabela-verdade de $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\sim q) \rightarrow (\sim p))$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(\sim q)\rightarrow (\sim p)$	$(p \rightarrow q)\leftrightarrow((\sim q)\rightarrow(\sim p))$
V	V	F	F	V	V	**V**
V	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	F	V	V	**V**
F	F	V	V	V	V	**V**

Notemos que a bicondicional $(p \rightarrow q)\leftrightarrow((\sim q)\rightarrow(\sim p))$ gera uma tautologia. Logo, de acordo com o Teorema 2.34 a lei contrapositiva é uma equivalência lógica.

O próximo teorema enunciará as principais equivalências lógicas.

Teorema 2.35 *Sejam p, q, r, s proposições quaisquer e c e t uma contradição e uma tautologia, respectivamente. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Condicional:*

   (a) $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p\wedge(\sim q))$.

   (b) $p\rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p)\vee q$.

2. *Bicondicional:* $(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$.

3. *Lei da Dupla Negação:* $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.

4. *Leis Comutativas:*

   (a) $p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p$.

(b) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.

5. *Leis de Idempotência:*

   (a) $p \vee p \Leftrightarrow p$.

   (b) $p \wedge p \Leftrightarrow p$.

6. *Lei Contrapositiva:* $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \rightarrow (\sim p)$.

7. *Redução ao Absurdo:* $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow c$.

8. *Leis de De Morgan:*

   (a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$.

   (b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$.

9. *Leis Associativas:*

   (a) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

   (b) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

10. *Leis Distributivas:*

    (a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

    (b) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

11. *Contradição:*

    (a) $p \vee c \Leftrightarrow p$.

    (b) $p \wedge c \Leftrightarrow c$.

    (c) $p \wedge (\sim p) \Leftrightarrow c$.

    (d) $\sim c \Leftrightarrow t$.

12. *Tautologia:*

    (a) $p \vee t \Leftrightarrow t$.

    (b) $p \wedge t \Leftrightarrow p$.

    (c) $p \vee \sim p \Leftrightarrow t$.

    (d) $\sim t \Leftrightarrow c$.

13. Lei de importação: $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

Demonstração: Para fazer a demonstração de cada equivalência, fazemos uso das tabelas-verdade e da definição de equivalência lógica apresentada (Definição 2.32). Ressalta-se que para cada tipo de regra de inferência será feita a demonstração de apenas um caso.

1.(a). Condicional: $p \to q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$.

p	q	$\sim q$	$p \to q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim(p \wedge \sim q)$
V	V	F	**V**	F	**V**
V	F	V	**F**	V	**F**
F	V	F	**V**	F	**V**
F	F	V	**V**	F	**V**

2. Bicondicional: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**F**	**F**
F	F	V	V	**V**	**V**

3. Lei da dupla negação: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	**V**
F	V	**F**

4.(a). Lei Comutativa: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**F**	**F**
F	F	**F**	**F**

5.(a) Lei de idempotência: $p \vee p \Leftrightarrow p$.

p	$p \vee p$
V	**V**
F	**F**

6. Lei Contrapositiva: $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q) \to (\sim p)$.

Já foi demonstrada, veja Exemplo 2.33.

7. Redução ao Absurdo: $(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \to c$.

p	q	$\sim q$	$(p \to q)$	$p\wedge \sim q$	c	$(p\wedge \sim q)\to c$
V	V	F	**V**	F	F	**V**
V	F	V	**F**	V	F	**F**
F	V	F	**V**	F	F	**V**
F	F	V	**V**	F	F	**V**

8.(a). Lei de De Morgan: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p)\vee(\sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p)\vee(\sim q)$
V	V	F	F	V	**F**	**F**
V	F	F	V	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F	**V**	**V**
F	F	V	V	F	**V**	**V**

9.(a). Lei Associativa: $(p \wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q)\wedge r$	$p\wedge(q \wedge r)$
V	V	V	V	V	**V**	**V**
V	V	F	V	F	**V**	**V**
V	F	V	F	F	**F**	**F**
V	F	F	F	F	**F**	**F**
F	V	V	F	V	**F**	**F**
F	V	F	F	F	**F**	**F**
F	F	V	F	F	**F**	**F**
F	F	F	F	F	**F**	**F**

10.(a). Lei Distributiva: $p\wedge(q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q)\vee(p \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$p\wedge(q \wedge r)$	$(p \wedge q)\vee(p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	**V**	**V**
V	V	F	V	F	V	**V**	**V**
V	F	V	F	V	V	**V**	**V**
V	F	F	F	F	F	**F**	**F**
F	V	V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	F	F	F	V	**F**	**F**
F	F	V	F	F	V	**F**	**F**
F	F	F	F	F	F	**F**	**F**

11.(a) Contradição: $p \vee c \Leftrightarrow p$.

p	c	$p \vee c$
V	F	**V**
F	F	**F**

12.(a). Tautologia: $p \vee t \Leftrightarrow t$.

p	t	$p \vee t$
V	**V**	**V**
F	**V**	**V**

13. Lei de importação: $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q) \to r$
V	V	V	V	V	**V**	**V**
V	V	V	V	F	**F**	**F**
V	F	V	F	V	**V**	**V**
V	F	F	F	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	**V**	**V**
F	V	F	F	F	**V**	**V**
F	F	V	F	V	**V**	**V**
F	F	F	F	V	**V**	**V**

□

Teorema 2.36 *Se p é equivalente a s, então P(p, q, r,...) é equivalente a P(s, q, r,...).*

Demonstração: Notemos que se $p \Leftrightarrow s$, então p e s possuem, simultaneamente, os mesmos valores lógicos. Logo, ao substituirmos p por s, teremos que as colunas de $P(s, q, r, ...)$ possuirão os mesmos valores lógicos que as colunas de $P(p, q, r, ...)$. Assim, o valor lógico da proposição $P(s, q, r, ...)$ é o mesmo que da proposição $P(p, q, r, ...)$ e pela definição de bicondicional (Definição 2.18) temos que $P(p, q, r...) \leftrightarrow P(s, q, r, ...)$ é uma tautologia, donde segue pelo Teorema 2.34 que $P(p, q, r...) \Leftrightarrow P(s, q, r, ...)$. □

As regras de inferência e equivalência mostradas até aqui serão muito úteis, conforme veremos na seção sobre Método Dedutivo (Seção 2.4). Desse modo, resolvemos apresentá-las de forma resumida na Tabela 2.1. Foram utilizadas letras maiúsculas para denotar as fórmulas proposicionais (que poderão ser quaisquer).

Das regras de inferências apresentadas, algumas se destacam no desenvolvimento das demonstrações em Matemática, a saber: Modus Ponens, Modus Tollens, Silogismo Disjuntivo e Silogismo Hipotético.

O Modus Ponens é utilizado em demonstrações diretas; o Modus Tollens é aplicado em demonstrações por Redução ao Absurdo; o Silogismo Hipotético é utilizado em provas de transitividade em qualquer tipo de relação que possua essa propriedade e o Silogismo Disjuntivo pode ser utilizado para provar que uma propriedade é verdadeira quando esta faz parte de um grupo com somente duas alternativas, bastando provar que a outra alternativa é falsa.

Tabela 2.1: Resumo das Regras de Inferência e Equivalência

QUADRO RESUMO					
REGRAS DE INFERÊNCIA					
1	Adição	$P \Rightarrow P \vee Q$		$Q \Rightarrow P \vee Q$	
2	Simplificação	$P \wedge Q \Rightarrow P$		$P \wedge Q \Rightarrow Q$	
3	Silogismo Disjuntivo	$(P \vee Q) \wedge \sim P \Rightarrow Q$			
4	Modus Ponens	$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$			
5	Modus Tollens	$(P \rightarrow) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$			
6	Dilema Construtivo	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$			
7	Dilema Destrutivo	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow [(\sim Q \vee \sim S) \rightarrow (\sim P \vee \sim R)]$			
8	Lei Transitiva	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$			
9	Contradição e Tautologia	$c \Rightarrow P$		$P \Rightarrow t$	
10	Inferência por Casos	$(Q \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow P) \Rightarrow [(Q \vee R) \rightarrow P]$			
11	Inferência por Eliminação	$[P \rightarrow (Q \vee R)] \wedge \sim R \Rightarrow (P \rightarrow Q)$			
12	União	$P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$			
EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS					
1	Condicional	$P \rightarrow Q \Rightarrow \sim [P \wedge (\sim Q)]$		$P \rightarrow Q \Rightarrow (\sim P) \vee Q$	
2	Bicondicional	$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q)] \wedge (Q \rightarrow P)$			
3	Lei da Dupla Negação	$\sim (\sim P) \Leftrightarrow P$			
4	Leis Comutativas	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$		$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
5	Leis de Idempotência	$P \vee P \Leftrightarrow P$		$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
6	Lei Contrapositiva	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow [(\sim Q) \rightarrow (\sim P)]$			
7	*Reduction Ad Absurdum*	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \rightarrow c$			
8	Leis de De Morgan	$\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow [(\sim P) \vee (\sim Q)]$		$\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow [(\sim P) \wedge (\sim Q)]$	
9	Leis Associativas	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge) R$		$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
10	Leis Distributivas	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$		$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
11	Contradição	$P \vee c \Leftrightarrow P$	$P \wedge c \Leftrightarrow c$	$P \wedge (\sim P) \Leftrightarrow c$	$\sim c \Leftrightarrow t$
12	Tautologia	$P \vee t \Leftrightarrow t$	$P \wedge t \Leftrightarrow P$	$P \vee \sim P \Leftrightarrow t$	$\sim t \Leftrightarrow c$
13	Substituição	$(p \Leftrightarrow s) \Rightarrow [P(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(s,q,r,...)]$			

Fonte: Gerônimo; Franco (2008, p. 38).

2.3 Cálculo de Predicados

A Lógica de Predicados ou Lógica de Primeira Ordem, diferentemente da lógica proposicional, se preocupa com a análise da estrutura interna da proposição. Na lógica de predicados, a mais simples proposição é a que envolve um sujeito e um predicado, na qual o sujeito designa um indivíduo ou objeto e o predicado indica a propriedade deste sujeito.

Ressaltamos que o Cálculo de Predicados possui todas as regras do Cálculo Proposicional (regras de equivalência e inferência) incluindo outras que serão apresentadas no decorrer desta seção.

Para começar, analisemos as sentenças a seguir:

Ele e ela são alunos do curso de Matemática.
Existem números inteiros que são pares.

Estas sentenças possuem termos indefinidos (variáveis) e sentenças com esta característica são chamadas sentenças abertas ou funções proposicionais.

O sujeito lógico envolvido na sentença é denominado variável e os elementos que a variável pode assumir (não necessariamente todos) tornando-a uma proposição, formam o que chamamos de universo de discurso. Apenas por simplificação, utilizamos, quando couber, notação de teoria de conjunto e suporemos este conhecimento prévio do leitor.

Na linguagem do Cálculo de Predicados estão presentes as constantes individuais, as variáveis individuais e as contantes de Predicado. Para denotar as constantes individuais utilizamos, as letras minúsculas latinas de a até t, admitindo a utilização de índices numéricos quando necessário; as variáveis individuais utilizamos as letras minúsculas de u até z, admitindo a utilização de índices numéricos quando necessário; por fim, para denotar as variáveis de predicado utilizamos as letras maiúsculas, também admitindo índices numéricos, quando necessário.

Exemplo 2.37 ***(Sentença aberta com uma variável)***

- *$M(x)$: x é um mamífero.*
- *$P(x)$: x é primo.*

Consideremos que na primeira sentença deste exemplo o universo de discurso são todos os animais e na segunda sentença o universo de discurso são todos os números naturais (denotado por $\mathbb{N}$). M e P nas duas sentenças são variáveis de predicado e representam, respectivamente, os predicados "é mamífero" e "é primo". Sendo assim, pode-se representar na primeira sentença, por exemplo, "coelho é mamífero" por $M(c)$, onde c é uma constante individual do universo de discurso "todos os animais".

Exemplo 2.38 ***(Sentença aberta com duas variáveis)***

- *D(x,y): x estuda com y.*
- *R(u,v): u é divisor de v.*

Consideremos que na primeira sentença o universo de discurso é composto por todas as possíveis duplas formadas com os elementos dos conjuntos A ={Érica, Kátia} e B ={Luana, Daniele} e o universo de discurso da segunda sentença seja constituído de todos os pares ordenados formados pelo conjunto dos números naturais, ou seja, do produto cartesiano $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. D e R nas duas sentenças são variáveis de predicado e representam, respectivamente os predicados "estuda com" e "é divisor de". Sendo assim, podemos representar na primeira sentença, por exemplo, "Érica estuda com Daniele" por $D(e, d)$, onde (e, d) é uma constante individual do universo de discurso $A \times B$.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.39 ***(Sentença aberta com n variáveis)*** *Consideremos os n conjuntos A_1, A_2, A_3, ... ,A_n e o seu produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$. Chamamos de sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ ou apenas sentença aberta em $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ uma expressão P(x_1, x_2, x_3,..., x_n) tal que p(a_1, a_2, a_3,..., a_n) é falsa (F) ou verdadeira (V) para toda n-upla (a_1, a_2, a_3,..., a_n) $\in A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$.*

Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \in A_1\times A_2\times A_3\times ...\times A_n$ é tal que $p(a_1,\ a_2,\ a_3,...,\ a_n)$ é uma proposição verdadeira (V), diz-se que $(a_1,\ a_2,\ a_3,...,\ a_n)$ satisfaz ou verifica $P(x_1,\ x_2,\ x_3,...,\ x_n)$.

No Exemplo 2.37, denotemos por a o número natural 5 e b o número natural 9. Temos que que $P(a)$ é verdadeiro, pois 5 é primo. Mas, $P(b)$ é falso, pois 9 não é primo. Ou seja, $a \in \mathbb{N}$ e $P(a)$ satisfaz $P(x)$, mas $b \in \mathbb{N}$ e $P(b)$ não satisfaz $P(x)$.

No Exemplo 2.38 com j denotando o número natural 2 e k o número natural 10. Temos que $R(j, k)$ é verdadeiro, pois 2 é divisor de 10. Agora, se denotamos o número natural 3 por g e o número natural 14 por h, então $R(g, h)$ é falso, pois 3 não é divisor de 14. Ou seja, $(j, k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $R(j, k)$ satisfaz $R(u, v)$. Mas, $(g, h)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e $R(g, h)$ não satisfaz $R(u, v)$.

Podemos definir formalmente o conjunto verdade de uma sentença aberta com n variáveis da seguinte forma:

Definição 2.40 *Chama-se* ***conjunto-verdade*** *(denotado por* V_p*) de uma sentença aberta* $P(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$ *em* $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ *o conjunto de todas as n-uplas*$(a_1, a_2, a_3,..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ *tais que* $P(a_1, a_2, a_3,..., a_n)$ *é uma proposição verdadeira.*

Simbolicamente, temos:

$V_p = \{x_1, x_2, x_3,..., x_n |\ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge x_3 \in A_3 \wedge ... \wedge x_n \in A_n \wedge p(x_1, x_2, x_3,..., x_n)\}$,

ou, mais simplesmente:

$V_p = \{(x_1, x_2, x_3,..., x_n) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n \mid p(x_1, x_2, x_3,..., x_n)\}$.

Exemplo 2.41 *Dado o conjunto* $A = \{1,2,3,4,5\}$ *e a sentença aberta* $P(x)$ *em* A *definida por "x é primo", o conjunto verdade de P é*

$$V_P = \{x \mid x \in A \wedge x \text{ é primo}\} = \{2,3,5\}.$$

Exemplo 2.42 *Dados os conjuntos* $B=\{1,3,5\}$ *e* $C=\{2,4,6\}$ *e a sentença aberta* $M(x,y)$ *em* $B \times C$ *definida por "x é maior que y", também representada por* $x > y$*. O conjunto verdade de M é*

$$V_M = \{(x,y) \mid x \in B \wedge y \in C \wedge (x > y)\} = \{(3,2), (5,2)\}.$$

Com base nos exemplos apresentados, temos que se $P(x)$ é uma sentença aberta em um conjunto universo U, três casos podem ocorrer:

1. $P(x)$ é verdadeira para todo $x \in U$, isto é, o conjunto verdade V_P coincide com o universo U da variável $x(V_P = U)$. Neste caso, dizemos que $P(x)$ exprime uma condição universal no conjunto U.

2. $P(x)$ é verdadeira somente para alguns $x \in U$, isto é, o conjunto verdade V_P é um subconjunto próprio do universo U da variável $x(V_P \in U)$. Neste caso, dizemos que $P(x)$ exprime uma condição possível no conjunto U.

3. $P(x)$ não é verdadeira para nenhum $x \in U$, isto é o conjunto verdade V_P é vazio ($V_P = \varnothing$). Neste caso, dizemos que $P(x)$ exprime uma condição impossível no conjunto U.

É importante observar que o emprego dos termos universal, possível e impossível dependerá do universo de discurso adotado.

Tome, como exemplo o universo conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$.

Temos que:

- $x - 1 < x$ é universal, pois pode ser verificada para todo número racional.
- $x-1 = x+1$ é impossível, pois não pode ser verificada por nenhum número racional.
- $4x^2-1 = 0$ é possível, pois pode ser verificada somente pelos números racionais $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

Agora, notemos que se o universo de discurso considerado fosse os números inteiros teríamos que $4x^2-1 = 0$ seria impossível, pois não há número inteiro que a satisfaça.

Há duas maneiras formais de transformar uma sentença aberta em uma proposição. Isso ocorrerá por meio da utilização de quantificadores.

Definição 2.43 *(**Quantificador Universal**) Dada uma sentença aberta P(x) em um conjunto A (não vazio), o símbolo $\forall$, referido à variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta P(x) numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme P(x) exprime ou não uma condição universal no conjunto A. A esta operação lógica dá-se o nome de quantificação universal e ao respectivo símbolo $\forall$ o de quantificador universal.*

Conforme a Definição 2.43, quando uma sentença aberta $P(x)$ é universal em um domínio de discurso dizemos que ela é verdadeira para todo valor do domínio de discurso e denotaremos da seguinte forma:

$$\forall x P(x).$$

De uma maneira geral, essa expressão pode ser lida como:

- Para todo x, $P(x)$.
- Para qualquer x, $P(x)$.
- Para cada x, $P(x)$.

Exemplo 2.44 *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto de todos os números naturais e P(x)= x+1 > x uma sentença aberta em $\mathbb{N}$. Temos que $V_P \neq \varnothing$ e $V_P = \mathbb{N}$. Logo,*

$$\forall\ x \in \mathbb{N},\ P(x).$$

Definição 2.45 ***(Quantificador Existencial)*** *Dada uma sentença aberta P(x) em um conjunto A, o símbolo ∃, referido a variável x, representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta P(x), numa proposição, verdadeira ou falsa, conforme P(x) exprime ou não uma condição possível no conjunto A. A esta operação lógica dá-se o nome de quantificação existencial e ao respectivo símbolo ∃ o de quantificador existencial.*

Conforme a Definição 2.45, quando uma sentença aberta $P(x)$ é possível em um domínio de discurso, dizemos que existe um ou mais valores do domínio de discurso que tornam esta sentença verdadeira e denotamos da seguinte forma:

$$\exists x \ P(x).$$

De modo geral, esta expressão pode ser lida como:

- Existe x, tal que $P(x)$.
- Existe ao menos um x, tal que $P(x)$.
- Para algum x, $P(x)$.
- Para pelo menos um x, $P(x)$.

Exemplo 2.46 *Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto de todos os números inteiros e D(x): "x é múltiplo de 3" uma sentença aberta em $\mathbb{Z}$. Temos que $V_D \neq \varnothing$. Logo,*

$$\exists \ x \in \mathbb{Z}, \ D(x).$$

Quando existe um único elemento no universo de discurso, que deixa a proposição $\exists x$ $P(x)$ verdadeira, denotaremos por $\exists! \ P(x)$ e escreveremos:

- Existe um único x, tal que $P(x)$.
- Para um único x, $P(x)$.

Exemplo 2.47 *Consideremos, novamente, o conjunto dos números inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$ e C(x): $x^3 = 8$ uma sentença aberta em $\mathbb{Z}$. Temos que $V_C \neq \varnothing$ e V_C é um conjunto unitário. Logo,*

$$\exists! \ x \in \mathbb{Z}, \ C(x).$$

Sendo assim, os símbolos lógicos do Cálculo de Predicados são aqueles que já vimos no Cálculo Proposicional ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$) com o acréscimo de $\forall$, $\exists$ e $\exists!$.

Observação 2.48 *Em matemática elementar, os quantificadores são frequentemente suprimidos com o objetivo de simplificar a linguagem. Por exemplo, a equação "(x+5)·(x-5) = (x^2-25)" deveria ser escrita como "Para todo número real x, temos (x+5)·(x-5) = (x^2-25)". Em expressões menos formais, nós frequentemente colocamos o quantificador após a declaração. Por exemplo, a proposição "f(x)=0, para todo x" é a mesma coisa que $\forall x$ f(x)=0, veja [16].*

Quanto à negação de quantificadores, há alguns equívocos frequentemente cometidos. Por isso, a seguir abordamos a forma correta de negar proposições com os quantificadores.

Definição 2.49 *Seja P(x) uma proposição com uma variável x em um universo de discurso, define-se a negação dos quantificadores por:*

1. $\sim(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x \sim(P(x))$.
2. $\sim(\exists x\ P(x)) \Leftrightarrow \forall x \sim(P(x))$.

Com isso, notamos que a negação de "$P(x)$ é verdadeira para todo x em um universo de discurso U" é "Existe ao menos um x para o qual $P(x)$ é falsa" e a negação de "Existe x tal que $P(x)$ é verdadeira" é igual a "Para todo x, $P(x)$ é falsa".

Exemplo 2.50 ***(Exemplo de negação)*** *Consideremos a proposição: Todos os números são racionais. De acordo com a Definição 2.49, a negação para esta expressão é: Alguns números não são racionais.*

Ao considerarmos o universo de discurso formado por n elementos denotados por a_1, a_2, a_3, ..., a_n temos que $\forall\ x\ P(x)$ afirma que $P(x)$ é verdadeira para cada um dos elementos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ou seja:

$$\forall\ x\ P(x) \text{ é verdadeira} \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge ... \wedge P(a_n) \text{ é verdadeira.}$$

De modo análogo, temos que $\exists x\ P(x)$ afirma que $P(x)$ é verdadeira para algum dos elementos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ou seja,

$$\exists x\ P(x) \text{ é verdadeira} \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee ... \vee P(a_n) \text{ é verdadeira.}$$

Portanto, a regra de negação de quantificadores é uma generalização das regras de De Morgan, conforme ilustrado a seguir:

$$\begin{gathered}
\sim\forall x P(x) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \sim [\ P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge ... \wedge P(a_n)] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \sim P(a_1) \vee \sim P(a_2) \vee \sim P(a_3) \vee ... \sim P(a_n) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \exists x (\sim P(x)).
\end{gathered}$$

Diante do que foi exposto, verificamos que a negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial e vice-versa.

Quanto à negação de proposições com mais de um quantificador, tem-se que a negação é obtida por meio da aplicação sucessiva das regras de negação para proposições com somente um quantificador.

Exemplo 2.51 ***(Negação de proposições com dois quantificadores de mesma espécie)***

$\sim(\forall x\ \forall y\ P(x,y)) \Leftrightarrow \exists x\ (\sim(\forall y\ P(x,y))) \Leftrightarrow \exists x\ \exists y \sim P(x,y)$.

Exemplo 2.52 ***(Negação de proposições com dois quantificadores de espécies diferentes)***

$\sim(\exists x\ \forall y\ P(x,y)) \Leftrightarrow \forall x\ (\sim(\forall y P(x,y))) \Leftrightarrow \forall x\ \exists y \sim P(x,y))$.

Exemplo 2.53 ***(Negação de proposições com três quantificadores)***

$\sim(\exists x\ \exists y\ \forall z\ P(x,y,z)) \Leftrightarrow \forall x(\sim\ (\exists y\ \forall z\ P(x,y,z))) \Leftrightarrow \forall x\ \forall y\ \exists z(\sim P(x,y,z))$.

A negação de proposições com quantificadores pode ser amplamente utilizada nas aulas de matemática. Vejamos, a seguir, alguns exemplos[3].

Consideremos, por exemplo, que um aluno que está estudando equações afirme que a proposição a seguir é verdadeira

$$\forall\ x\ ((x+1)^2 = x^2 + 1).$$

Para alertá-lo de que está cometendo um equívoco, podemos mostrar que a negação desta proposição é verdadeira, ou seja, que $\exists x\ ((x+1)^2 \neq x^2+1)$ é verdadeira, bastando para isso tomar o valores $x = 1$ ou $x = 2$.

Considere, por exemplo, que outro aluno, afirme que a proposição $\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow x^2 < y^2)$ é verdadeira.

Para convencê-lo de que está enganado, podemos mostrar que a negação desta proposição é verdadeira.

De acordo com o que foi exposto sobre a negação de proposições com dois quantificadores, a negação de ∀x∀y (x < y → $x^2 < y^2$) é construída da seguinte forma:

[3]As situações hipotéticas apresentadas na sequência foram baseadas em notas de aula disponíveis em [5]

$$\sim(\forall x \forall y\ (x < y \to x^2 < y^2)) \Leftrightarrow$$
$$\exists x \sim (\forall y (x < y \to x^2 < y^2)) \Leftrightarrow$$
$$\exists x\ \exists y \sim (x < y \to x^2 < y^2).$$

Mas como $\sim (P \to Q) \Leftrightarrow \sim (\sim P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$,

o último predicado é equivalente a: $\sim(x < y \to x^2 < y^2) \Leftrightarrow (x < y) \wedge (x^2 \geq y^2)$.

Portanto, a negação desejada é: $\exists x \exists y\ ((x < y) \wedge (x^2 \geq y^2))$.

E basta mostrar que é satisfeita para $x = -1$ e $y = 1$, por exemplo.

2.3.1 Fórmulas bem formadas

Assim como no Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados, nem todos os termos e fórmulas são fórmulas bem formadas. Por isso, nesta seção também é preciso especificar as regras de formação do Cálculo de Predicados.

Para denotar as fórmulas, utilizamos letras gregas minúsculas. Assim, por exemplo α pode estar denotando $\forall x P(x)$, como também, $\forall x\ \forall y\ P(x, y) \to \exists z\ Q(z)$.

Definição 2.54 *(**Fórmulas bem formadas**) Numa linguagem de primeira ordem, dizemos que:*

1. *Se P é um símbolo de predicado n-ário para um número natural $n \geq 0$, e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $Pt_1, \ldots, t_n$ é uma fórmula (atômica).*
2. *Se α é uma fórmula, então $\sim\alpha$ é uma fórmula (molecular).*
3. *Se α e β são fórmulas, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas (moleculares).*
4. *Se x é uma variável e α é uma fórmula na qual x ocorre, então $\forall x\ \alpha$ e $\exists x\ \alpha$ são fórmulas (gerais).*
5. *Nada mais é uma fórmula.*

Definição 2.55 *(**Subfórmula imediata**)*

- *Fórmulas atômicas não têm subfórmulas imediatas.*
- *A subfórmula imediata de $\sim \alpha$ é α.*
- *As subfórmulas imediatas de $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$ são α e β.*
- *A subfórmula imediata de $\forall x\alpha$ e de $\exists x\alpha$ é α.*

Com base na Definição 2.54, podemos observar que a fórmula $x\exists xP$ não é uma fórmula bem formada do Cálculo de Predicados (pois não é uma fórmula atômica, nem molecular, nem geral e, portanto, não atende a nenhum dos itens de 1 a 4 da Definição 2.54).

Quanto à subfórmulas imediatas, para ficar mais claro, consideremos a fórmula $(\sim Q(y) \wedge \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow \sim P(y)$. Suas subfórmulas imediatas são $(\sim Q(y) \wedge \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)))$ e $\sim P(y)$.

Quanto ao uso de parênteses, assim como no Cálculo Proposicional, convencionamos que não será necessário apresentar os parênteses externos. No entanto, ressalta-se que sua utilização no Cálculo de Predicados também evita ambiguidades.

O **escopo** de um quantificador é apenas a fórmula que o segue, aquela cujo primeiro símbolo ocorre imediatamente após o quantificador. Por exemplo na fórmula $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ o **escopo** é $(P(x) \rightarrow Q(x))$. Já na fórmula $\forall xP(x) \rightarrow Q(y)$ o **escopo** de $\forall x$ é $P(x)$.

Em vista disso, o modo como uma determinada variável ocorre em uma fórmula determinará se esta variável é **ligada** (também chamada aparente) ou **livre**.

Uma variável x é **ligada**, numa fórmula α, se x ou faz parte de um quantificador ou está no **escopo** de um quantificador para x em α. Isto é, se x ocorre em alguma parte de α que é da forma $\forall x\ \beta$ ou $\exists x\ \beta$.

Exemplo 2.56 ***(Exemplo de variáveis ligadas e livres)***

- *Na fórmula $\forall x$ P(x,y), a variável x é ligada, enquanto a variável y é livre.*
- *Na fórmula $\exists x$ P(x) $\wedge$ $\forall y$ Q(x,y), a variável y é somente ligada, enquanto a variável x é ligada e livre.*

Compreendida a ideia de variáveis livres e variáveis ligadas e a definição de sentença aberta, podemos compreender com mais clareza o que é uma proposição no Cálculo de Predicados.

De um modo geral, dada uma sentença aberta com mais de uma variável, a aplicação de um quantificador referido a uma das variáveis, transforma a sentença aberta dada numa outra sentença aberta com menos uma variável livre. Com isso, a aplicação sucessiva de quantificadores transforma uma sentença aberta com mais de uma variável numa proposição.

Dessa forma, podemos concluir que uma fórmula, no Cálculo de Predicados, é uma proposição se não possui variáveis livres.

Por exemplo, $\forall x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x, y)$ não é uma proposição. Já $\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ \exists y\ Q(x, y)$ é uma proposição.

No Cálculo de Predicados é aceito o **Princípio da Substituição** que consiste em:

Todas as vezes que uma variável ligada é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figure na mesma expressão, obtêm-se uma expressão equivalente, ou seja, considerando o universo de discurso denotado por U, temos que:

$$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \forall y\ P(y)$$
$$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \exists y\ P(y)."$$

Sobre a **comutatividade** dos quantificadores, temos duas regras a levar em consideração na hora de escrever:

- **Quantificadores da mesma espécie podem ser comutados**.

$$\forall x\ \forall y\ P(x, y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ P(x, y).$$
$$\exists x\ \exists y\ P(x, y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ P(x, y).$$

- **Quantificadores de espécies diferentes não podem, em geral, ser comutados**.

  Consideremos o universo de discurso o conjunto H de seres humanos e a sentença aberta "x é filho de y", denotada por $F(x, y)$. Temos que a proposição

$$\forall x\ \exists y\ F(x, y) \text{ é verdadeira.}$$

  Mas, a proposição

$$\exists y\ \forall x\ F(x, y) \text{ é falsa.}$$

Portanto, quantificadores de espécies diferentes não podem ser comutados, pois se o forem, poderão alterar todo o sentido da proposição e, até mesmo, como apresentado, o seu valor de verdade.

2.3.2 Regras de inferência

Primeiramente, é preciso ressaltar que no Cálculo de Predicados não existe um método mecânico que diga sempre se uma fórmula é válida ou não. Por isso, dizemos que o Cálculo de Predicados é indecidível. Tal fato, foi demonstrado em 1936 pelo lógico americano Alonzo Church(1903-1995) (MORTARI, 2016).

Quando se quer determinar a validade de argumentos que envolvem proposições quantificadas as regras para fazer as inferências, baseiam-se no contexto e na interpretação de cada proposição e suas regras particulares.

Sabe-se que, em matemática, muitos resultados usam quantificadores universais ou existenciais para enunciar as propriedades de elementos. Por este motivo, consideramos útil estudar as formas de raciocínio no Cálculo de Predicados. Apresentamos quatro regras de inferência, a saber: *Eliminação do Universal, Introdução do Universal, Introdução do Existencial* e *Eliminação do Existencial.*

Na *Eliminação do Universal* a ideia consiste em: se alguma fórmula vale para todos os indivíduos do universo de discurso, então ela vale para certo indivíduo, em particular.

Exemplo 2.57 *Vamos provar a validade do seguinte argumento:*

$$\forall x\ (H(x) \to M(x)),\ H(s) \vdash M(s).$$

De fato,

1. $\forall x\ (H(x) \to M(x))$ *[Premissa]*

2. $H(s)$ *[Premissa]*

3. $H(s) \to M(s)$ *[Eliminação Universal]*

4. $M(s)$ *[Modus Ponens em 2,3].*

Na *Introdução do Universal* a ideia consiste em: se mostrarmos que uma fórmula α vale para um indivíduo c qualquer do universo de discurso, então ela vale para todo o indivíduo do universo de discurso, desde que: 1) a constante c não ocorra em nenhuma premissa, nem em nenhuma hipótese que esteja valendo na linha onde α ocorre; 2) c seja substituível por x em α. Ou seja, a introdução universal é o resultado da substituição em α de todas as ocorrências da constante c pela variável x.

Exemplo 2.58 *É válido o seguinte argumento:*

$$\forall x(P(x)\rightarrow C(x)), \forall x(C(x) \rightarrow V(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow V(x))$$

De fato,

1. $\forall x(P(x) \rightarrow C(x))$ *[Premissa]*

2. $\forall x(C(x) \rightarrow V(x))$ *[Premissa]*

3. $P(a) \rightarrow C(a)$ *[Eliminação Universal em 1]*

4. $C(a) \rightarrow V(a)$ *[Eliminação Universal em 2]*

5. $P(a) \rightarrow V(a)$ *[Silogismo Hipotético em 3,4]*

6. $\forall x\ P(x) \rightarrow V(x)$ *[Introdução Universal em 5].*

Na *Introdução do Existencial* a ideia consiste em: se uma fórmula α vale para algum indivíduo c, em particular, do universo de discurso, então existe algum indivíduo que torna a fórmula verdadeira. Ou seja, a *Introdução do Existencial* é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências da constante c em α por uma variável x que não ocorra em α.

Exemplo 2.59 *Também é válido o seguinte argumento:*

$$\forall x\ (F(x) \vee G(x)) \vdash \exists x\ (F(x) \vee G(x))$$

De fato,

1. $\forall x\ (F(x) \vee G(x))$ *[Premissa]*

2. $F(a) \vee G(a)$ *[Eliminação Universal em 1]*

3. $\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$ *[Introdução Existencial em 2].*

Por fim, na *Eliminação do Existencial* a ideia consiste em: se temos uma fórmula do tipo $\exists x\ \alpha$, podemos fazer uma hipótese que consiste em eliminar o quantificador $\exists x$ e substituir todas as ocorrências de x em α por uma constante c, que, para todos os efeitos não pode ter ocorrido em lugar nenhum na fórmula. Ou seja, a eliminação do existencial é o resultado da substituição em α de todas as ocorrências da variável x por alguma constante, com a seguinte restrição: a constante c não ocorre em nenhuma premissa, nem em nenhuma hipótese que esteja valendo na linha onde a eliminação do existencial foi introduzida.

Exemplo 2.60 *É válido o argumento, a seguir:*

$$\exists x(F(x) \wedge G(x)) \vdash \exists x F(x).$$

Vejamos que

1. $\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$ *[Premissa]*

2. $F(a) \wedge G(a)$ *[Eliminação Existencial em 1]*

3. $F(a)$ *[Eliminação da conjunção em 2]*

4. $\exists x\ F(x)$ *[Introdução Existencial em 3].*

2.4 Método dedutivo

Conforme foi apresentado na Seção 2.2, demonstrar a validade de proposições por meio da construção de tabelas-verdade é muito trabalhoso. Por conta disso, a verificação da validade de um argumento por meio de tabelas-verdade também é muito trabalhoso e, por este motivo, abordamos métodos mais diretos de se mostrar que uma forma de argumento é válida, baseado nas regras de inferência e equivalência lógica.

Podemos dizer que o raciocínio dedutivo ou método dedutivo obtém uma regra a partir de resultados já conhecidos, além de utilizar também definições previamente estabelecidas. Esse procedimento está baseado na lei transitiva que nos garante a transitividade da inferência e equivalência lógica (GERÔNIMO; FRANCO, 2008).

O método dedutivo necessita de alguns elementos. Em matemática esses elementos são resultados que tem nomes específicos, vejamos a seguir:

- Noções primitivas: noções que são adotadas, sem definição.

- Axiomas ou postulados: resultados que não podem ser demonstrados.

- Propriedades: resultados que estão relacionados especificamente a um determinado objeto matemático.

- Proposições: resultados simples que estão dentro de um contexto.

- Teoremas: resultados não-triviais que abrangem contextos mais gerais.

- Corolários: resultados que são consequências imediatas de teoremas.

- Lemas:resultados que são utilizados para demonstrar outros resultados.

2.4.1 Argumento

Utilizando o método dedutivo, podemos chegar à conclusão por meio da utilização de uma ou mais proposições. Com isso, definimos o conceito de argumento.

Definição 2.61 ***(Argumento)*** *Sejam P_1, P_2, ..., Pn (n≥1) e Q proposições quaisquer, simples ou compostas. Chamamos argumento toda afirmação de que uma determinada sequência finita P_1, P_2, ..., P_n (n≥1) tem como consequência uma proposição final Q.*

Dizemos que P_1, P_2, ..., P_n são premissas ou hipóteses do argumento e a proposição Q é a conclusão ou tese do argumento.

Um argumento de premissas P_1, P_2, ..., P_n e conclusão Q será indicado por

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q.$$

Exemplo 2.62 ***(Não é argumento)***

Todos os professores que fazem pesquisa gostam de ensinar.

Márcia é uma professora que gosta de ensinar.

Existem professores que não fazem pesquisa.

Notemos que não se tem um argumento no conjunto de proposições do Exemplo 2.62, pois nele não está indicado qual das sentenças deverá ser considerada como conclusão.

Exemplo 2.63 ***(Argumento)***

Todos os números primos são pares.

Nove é um número primo.

Portanto, nove é um número par.

Observemos que os argumentos apresentados nos Exemplos 2.62 e 2.63 apresentam três proposições, onde duas são premissas e a outra a conclusão. Argumentos que possuem esta forma são chamados **silogismos** (veja Seção 1.1.1).

Podemos ter argumentos que não fazem o menor sentido (Exemplo 2.63). Mas, a lógica se preocupa com a validade dos argumentos e não com a verdade ou falsidade das premissas e conclusão. A validade de um argumento depende exclusivamente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é válido significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa e as premissas verdadeiras.

Definição 2.64 ***(Argumento válido)*** *Um argumento P_1, P_2, ..., $P_n \vdash Q$ diz-se válido se, e somente se, a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas P_1, P_2, ..., P_n são verdadeiras.*

Vale ressaltar que de acordo com a Definição 2.64, se todas as premissas são verdadeiras, então a conclusão também é verdadeira. Com isso, podemos ter argumentos válidos com premissas falsas e conclusão falsa, premissas falsas e conclusão verdadeira; premissas e conclusão verdadeiras.

Exemplo 2.65 ***(Argumentos Válidos)***

1. *Todo retângulo é paralelogramo.*
   O quadrado é um retângulo.
   Logo, o quadrado é paralelogramo.

   Este é um argumento válido que possui premissas verdadeiras e conclusão verdadeira.

2. *Todos os números racionais são naturais.*
   Todos os números inteiros são racionais.
   Logo, todos os números inteiros são racionais.

   Este é um argumento válido que possui uma premissa falsa e conclusão verdadeira.

3. *Todo número quadrado perfeito é par.*
   25 é um número quadrado perfeito.
   Logo, 25 é par.

   Este é um argumento válido que possui uma premissa falsa e conclusão falsa.

Exemplo 2.66 ***(Argumento inválido)***
Todo múltiplo de 4 é um número par.
10 não é um múltiplo de 4.
Logo, 10 não é par.

Neste exemplo, as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. O fato de que este argumento é inválido pode causar certo desconforto para quem o analisa. No entanto, ele é um bom exemplo para deixar claro que a lógica não trata da veracidade do conteúdo das afirmações mas, sim, da forma com que as afirmações estão relacionadas. Na verdade todo argumento da forma

$$\text{Todo } A \text{ é } B.$$
$$x \text{ não é } A.$$
$$\text{Então, } x \text{ não é } B.$$

é inválido.

Vejamos, agora, como determinar e provar a validade de um argumento.

Exemplo 2.67 ***(Argumento válido)***

P_1: Ter tempo é ter dinheiro.

P_2: Quem não trabalha tem muito tempo.

Q: Portanto, quem não trabalha tem muito dinheiro.

Neste exemplo consideremos a seguinte representação para as proposições atômicas:

p: Ter tempo; q: Ter dinheiro; r: Não trabalhar.

Utilizando a simbologia lógica, as premissas e a conclusão podem ser apresentadas da seguinte forma:

$$P_1\text{: } p \rightarrow q.$$
$$P_2\text{: } r \rightarrow p.$$
$$Q\text{: } r \rightarrow q.$$

Primeiramente, vamos verificar a validade deste argumento, recorrendo ao uso de tabelas-verdade para evidenciar como mostrar a validade por meio da definição de argumento válido (Definição 2.64).

p	q	r	$p \rightarrow q$	$r \rightarrow p$	$P_1 \wedge P_2$	$r \rightarrow q$
V	V	V	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	V	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	$\boxed{\text{V}}$	$\boxed{\text{V}}$

Observemos que na tabela-verdade construída, quando todas as premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Logo, podemos concluir que o argumento é válido.

Seguindo a ideia do que foi feito para mostrar a validade do argumento do Exemplo 2.67, podemos apresentar uma sequência de passos para determinar se um argumento é válido ou não, conforme mostra o quadro a seguir:

1) Determinar as proposições atômicas que compõem as premissas P_1, P_2, ..., P_n e a conclusão Q.

2) Determinar uma legenda para as proposições determinadas no passo 1.

3) Simbolizar as premissas e a conclusão do argumento usando as letras utilizadas no passo 2.

4) Listar, por meio da tabela-verdade, todas as possíveis valorações das proposições atômicas.

5) Completar a construção da tabela-verdade apresentando as possíveis valorações das premissas P_1, P_2, ..., P_n.

6) Completar a construção da tabela-verdade, apresentando todas as possíveis valorações para $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$.

7) Completar a construção da tabela-verdade, apresentando todas as possíveis valorações para a conclusão Q.

8) Analisar na tabela-verdade construída a coluna da proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$ e da conclusão Q, verificando se todas as vezes que aparece a valoração V na coluna de $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$, simultaneamente também aparece a valoração V na conclusão Q.

9) Se a resposta para a pergunta do passo anterior for "sim", concluir que o argumento é válido; se a resposta for "não", concluir que o argumento é inválido.

Vamos supor que temos um argumento que contém 10 proposições atômicas em sua estrutura. A verificação por meio de tabelas-verdade torna-se muito trabalhoso e, pode-se dizer inviável. Diante deste contexto, nota-se a importância de saber utilizar o método dedutivo.

Agora, vamos verificar a validade utilizando regras de equivalência e inferência já apresentadas.

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \to q$	Premissa
2	$r \to p$	Premissa
3	$(r \to p) \wedge (p \to q)$	Lei comutativa em 1 e 2
4	$r \to q$	Lei transitiva em 3

Teorema 2.68 *Um argumento P_1, P_2, ..., $P_n \vdash Q$ é válido se, e somente se,*

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q.$$

Demonstração: Notemos que, pela definição de condicional (Definição 2.18), o único caso em que $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ é falso ocorre quando $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ é verdadeira e Q é falsa. Mas, como por hipótese o argumento é válido, este caso não acontece. Portanto, $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$. Reciprocamente, se $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$ e P_1, P_2, ..., P_n forem verdadeiras, então pela definição de implicação (Definição 2.27) Q é verdadeira e, assim o argumento é válido. $\square$

Diante do que foi exposto, podemos dizer que um argumento é válido se qualquer circunstância que torna as premissas verdadeiras faz com que a conclusão, automaticamente, seja verdadeira.

A seguir, apresentamos mais um exemplo, agora, com um argumento cujas premissas possuem quantificadores.

Exemplo 2.69 *É válido o seguinte argumento:*

P_1*: Todo mamífero possui coração.*

P_2*: Todo cavalo é mamífero.*

Q*: Todo cavalo possui coração.*

Consideremos $M(x) : x$ é mamífero, $H(x) : x$ possui coração, $E(x) : x$ é cavalo. Temos como premissas $\forall x\ (M(x) \to H(x))$ e $\forall x\ (E(x) \to M(x))$. Fazendo a dedução formal chegamos à conclusão $\forall x\ (E(x) \to H(x))$, conforme segue:

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$\forall x\ (M(x) \to H(x))$	Premissa
2	$\forall x\ (E(x) \to M(x))$	Premissa
3	$M(t) \to H(t)$	Eliminação Universal em 1
4	$E(t) \to M(t)$	Eliminação Universal em 2
5	$(E(t) \to M(t)) \wedge M(t) \to H(t)$	Lei comutativa em 3,4
6	$E(t) \to H(t)$	Lei transitiva em 5
7	$\forall x\ (E(x) \to H(x))$	Introdução Universal em 6

2.4.2 Técnicas dedutivas

Basicamente, o método dedutivo consiste em aplicar um conjunto de regras de inferência ao conjunto de premissas, gerando conclusões intermediárias às quais aplicam-se novamente as regras, até atingir a conclusão final desejada. Esse método é chamado de **prova** ou **demonstração**.

Na lógica, para verificar a validade de argumentos, são mais comumente utilizados os seguintes tipos de demonstração: **direta**, **direta condicional**, **indireta** e **contraposição**.

Vale ressaltar que em todos os tipos de demonstrações, em cada passo deve ser dada uma justificativa que indique quais proposições anteriores e regras de inferência e equivalência foram utilizadas para que se chegue a proposição do passo em que se está.

Nesta seção, apresentamos a demonstração de alguns teoremas de variadas áreas da matemática utilizando a demonstração usual e explicitaremos o método formal por meio de quadros que serão organizados da seguinte forma: na primeira coluna serão enumeradas as linhas; na segunda coluna serão colocadas as hipóteses em cada linha e, posteriormente, as proposições obtidas por inferências, equivalências ou resultados conhecidos. Na terceira coluna será apresentada em cada linha a justificativa para se chegar na proposição em que se está.

Definição 2.70 ***(Conceito formal de demonstração)*** *Sejam P_1, P_2, ..., $P_n \vdash Q$ um argumento válido e P_1, P_2, ..., P_n, Q_1, Q_2, ..., Q_p, Q, proposições que fornecem a validade do argumento. Essa sequência é denominada* ***demonstração*** *e a conclusão Q é denominada* ***teorema****.*

Na **demonstração direta** supõe-se que as hipóteses são verdadeiras e usando-se um processo lógico dedutivo deduz-se diretamente a tese.

Exemplo 2.71 ***(Demonstração direta)***

Provar que para quaisquer a, b e c inteiros. Se $b{\cdot}c$ é múltiplo de a e o máximo divisor comum entre a e b é 1, então a é divisor de c.

Demonstração*:*

Suponha que $b{\cdot}c$ é múltiplo de a, logo existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $b{\cdot}c=a{\cdot}e$. Suponha também, que o máximo divisor comum de a e b é 1, então existem $m,n \in \mathbb{Z}$ tais que

$m{\cdot}a + n{\cdot}b = 1$.

Multiplicando por c ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$c = m{\cdot}a{\cdot}c + n{\cdot}b{\cdot}c$.

Substituindo $b{\cdot}c$ por $a{\cdot}e$ nesta última igualdade, temos que

$c = m{\cdot}a{\cdot}c + n{\cdot}a{\cdot}e = a{\cdot}(m{\cdot}c + n{\cdot}e)$.

Portanto, a é divisor de c. $\square$

Linha	Proposição	Justificativa
1	$\forall a$, $\forall b$, $\forall c \in \mathbb{Z}$, $b{\cdot}c$ é múltiplo de a	Hipótese
2	$\forall\ a$, $\forall\ b$, máximo divisor comum de a e b é 1	Hipótese
3	$b{\cdot}c$ é múltiplo de a	Eliminação Universal em 1
4	máximo divisor comum de a e b é 1	Eliminação Universal em 2
5	$b{\cdot}c = a{\cdot}e$	Definição de divisibilidade em 3
6	$m{\cdot}a + n{\cdot}b = 1$	Resultado da Aritmética em 4
7	$m{\cdot}a{\cdot}c + n{\cdot}b{\cdot}c = c$	Multiplicação por c em 6
8	$m{\cdot}a{\cdot}c + n{\cdot}a{\cdot}e$	Substituição de 5 em 7
9	$a{\cdot}(m{\cdot}c + n{\cdot}e)$	Propriedade dos inteiros
10	a divide c	Definição de divisibilidade, na linha 9

Na **demonstração direta condicional** a conclusão do argumento é uma proposição condicional, ou seja, o argumento é do tipo

$$P_1,\ P_2,\ ...,\ P_n \vdash (P{\to}Q).$$

Pelo Teorema 2.64 temos que o argumento P_1, P_2, ..., $P_n \vdash (P{\to}Q)$ é válido se, e somente se, a condicional associada $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \to (P{\to}Q)$ é tautológica. Pela regra de importação esta condicional associada é equivalente à seguinte $((P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \wedge P) \to$ Q.

Desse modo, o argumento P_1, P_2, ..., $P_n \vdash (P{\to}Q)$ é válido se, e somente se, $((P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \wedge P) \to Q$ é válido.

Em síntese, para demonstrar a validade de um argumento cuja conclusão é uma condicional da forma $(P{\to}Q)$,introduz-se P, como premissa adicional e deduz-se Q.

Exemplo 2.72 ***(Demonstração direta condicional)***

Sabendo-se que todo triângulo equilátero é acutângulo. Prove que se um triângulo é retângulo, então ele não é equilátero.

Demonstração*: Suponhamos que um dado triângulo é retângulo. Então, esse triângulo não é acutângulo. Segue desse fato e da hipótese que todo triângulo equilátero é acutângulo que ele não pode ser equilátero. Portanto, se um triângulo é retângulo ele não pode ser equilátero.* $\square$

De modo mais formal, consideremos que as proposições deste resultado no conjunto $T = \{x|x \text{ é triângulo}\}$. Consideremos também, os predicados $E(x) : x$ é equilátero, $A(x) : x$ é acutângulo e $R(x) : x$ é retângulo.

Utilizamos o procedimento formal do método da demonstração direta condicional, apresentado no quadro a seguir:

Linha	**Proposição**	**Justificativa**
1	$\forall x(E(x) \to A(x))$	Hipótese
2	$R(x)\to \sim A(x)$	Hipótese
3	$E(x) \to A(x)$	Eliminação Universal em 1
4	$R(x)$	Hipótese da conclusão
5	$\sim A(x)$	Modus Ponens em 2 e 4
6	$\sim E(x)$	Modus Tollens em 3 e 5
7	$R(x) \to \sim E(x)$	Conjunção em 4, 5 e 6

Utilizamos, na demonstração deste resultado, uma premissa implícita (linha 2) de que um triângulo não pode ser simultaneamente retângulo e acutângulo, ou seja, $R(x)\to \sim A(x)$.

A **demonstração indireta** consiste em provar a validade de um dado argumento P_1, P_2,..., $P_n \vdash Q$, supondo que a negação $\sim Q$ da conclusão é verdadeira e daí deduzir logicamente uma contradição c a partir das premissas P_1, P_2,..., P_n e $\sim Q$, ou seja, demonstrando que é válido o argumento P_1,P_2,..., P_n, $\sim Q \vdash c$.

De fato, pela demonstração condicional, temos que o argumento
P_1, P_2,..., $P_n \vdash \sim Q \to c$ é válido. E, como temos que $\sim Q\to c \Leftrightarrow \sim\sim Q \vee c \Leftrightarrow Q \vee c \Leftrightarrow Q$, segue-se que o argumento dado é válido.

Em síntese, para demonstrar a validade de um argumento utilizando a demonstração indireta, introduzimos $\sim Q$ como premissa adicional e chegamos a uma contradição.

Exemplo 2.73 ***(Demonstração indireta)***

Prove que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração*: Suponhamos que x=$\sqrt{2}$ é um número racional, então $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros e b é não nulo e a fração $\frac{a}{b}$ irredutível, ou seja o máximo divisor comum de a e b é 1. Desse modo, temos $\frac{a^2}{b^2}$=2, ou seja $2{\cdot}b^2$=a^2 e, consequentemente, a^2 é par, logo a também é par. Como a=$\sqrt{2}{\cdot}b$, admitindo que a=$2k$ e $2{\cdot}b^2$=$4{\cdot}k^2$, com k inteiro, obtemos b^2=$2k^2$, ou seja, b^2 é par e, assim, b também é par. Então, $\frac{a}{b}$ não é irredutível, o que é uma contradição. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional.* $\square$

Linha	Proposição	Justificativa
1	$x = \sqrt{2}$	Hipótese
2	a^2 é par $\Leftrightarrow a$ é par	Resultado já provado
3	$x = \frac{a}{b}$, com $\frac{a}{b}$ irredutível	Negação da tese
4	$x^2 = 2$	Elevando ao quadrado em 1
5	$2 \cdot b^2 = a^2$	Igualdade em 3 e 4
6	$a = 2 \cdot k$, com k inteiro	Definição de número par em 2 e 5
7	$b^2 = 2 \cdot k^2$	Operações nos inteiros em 5 e 6
8	b^2 é par	Definição de número par em 7
9	a e b são pares	Resultado de 2,6 e 8
10	a e b são pares e $\frac{a}{b}$ irredutível	Conjunção em 9 e 3

É natural confundir a demonstração indireta com a regra contrapositiva que determina a equivalência entre $p \to q$ e $\sim q \to \sim p$. Devemos notar que este procedimento constitui a troca entre proposições equivalentes e que é demonstrado pelo método direto.

Exemplo 2.74 ***(Demonstração utilizando a contrapositiva)***

Prove que se $n = a \cdot b$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Demonstração*: Sejam a e b inteiros positivos. Suponhamos que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$. Multiplicando estas inequações membro a membro, temos $a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Logo, $a \cdot b > n$. Portanto, se $n = a \cdot b$, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.* □

Para analisar de modo formal esta demonstração, consideremos a formulação em $\mathbb{Z}$ tal que $A(x) : a \leq \sqrt{n}$ e $A(y) : b \leq \sqrt{n}$. Logo, devemos provar a proposição

$\forall x \; \forall y \; A(x, y) \to A(x) \vee A(y)$, onde $A(x, y) : n = a \cdot b$.

Temos que a contrapositiva desta proposição é

$\sim (A(x) \vee A(y)) \to \sim A(x, y)$.

Após aplicar a Lei De Morgan no antecedente temos $\sim A(x) \wedge \sim A(y) \to \sim A(x, y)$. Notemos que utilizar $\sim A(x) \wedge \sim A(y)$ é mais favorável.

Linha	**Proposição**	**Justificativa**
1	∀x ∀y ∼A(x) ∧ ∼A(y)	Hipótese
2	∀x ∼A(x)	Simplificação em 1
3	∀y ∼A(y)	Simplificação em 1
4	$\sim A(x)$: $a > \sqrt{n}$	Eliminação Universal em 2
5	$\sim A(y) : b > \sqrt{n}$	Eliminação Universal em 3
6	$\sim A(x) \wedge \sim A(y)$	Conjunção em 4 e 5
7	$a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$	Multiplicação em 6
8	$\sim A(x, y) : a \cdot b > n$	Propriedade dos números inteiros e transitividade
9	$\sim A(x) \wedge \sim A(y) \rightarrow \sim A(x, y)$	Linha 1 até linha 8
10	$\sim(A(x) \vee A(y)) \rightarrow \sim A(x, y))$	De Morgan no antecedente em 9
11	$A(x, y) \rightarrow A(x) \vee A(y)$	Contraposição em 10

CAPÍTULO 3

PROPOSTA DE ATIVIDADES

Infelizmente, nota-se que conceitos de lógica, frequentemente são deixados de fora do processo de ensino e aprendizagem de estudantes do ensino fundamental e ensino médio. Tal fato é explicitado quando um professor de matemática analisa os livros didáticos que têm à sua disposição como auxílio para suas aulas. Em muitos dos livros nada é abordado sobre lógica, ou quando se aborda é feito em uma seção como um texto complementar, curiosidade, dentre outros; como se a lógica estivesse desvinculada da matemática. Este fato pode acarretar consequências negativas no entendimento da matemática.

Sobre o ensino de Lógica nas séries finais do Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que:

> Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como um assunto a ser tratado explicitamente, alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática. No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal (BRASIL, 1998, p. 49).

Com base neste trecho dos Parâmetros Curriculares Nacionais, nota-se a defesa do ensino de lógica nas aulas de matemática da Educação Básica, já nas séries finais do Ensino Fundamental, proporcionando suporte para o aluno desenvolver habilidades relacionadas à argumentação e produção de justificativas para os argumentos. Assim, ainda de acordo com este documento, no terceiro ciclo do Ensino Fundamental é desejável um trabalho que propicie o desenvolvimento da argumentação, onde os alunos se sintam motivados a não somente produzir respostas, mas produzi-las e justificá-las. Feito este trabalho, "pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas" (BRASIL, 1998, p.71).

Sobre o ensino de lógica matemática no Ensino Médio, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, trazem:

> A ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática são necessários ao aluno do ensino médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática (BRASIL, 2006, v.2, p. 95).

Nesta citação, evidencia-se a importância da lógica no processo de ensino e aprendizagem de matemática para alunos do Ensino Médio. Nesta etapa de ensino é importante que o aluno conheça a estrutura de um sistema dedutivo, para que possa compreender o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração em matemática.

Vale ressaltar que não se trata de decorar demonstrações, mas sim de entender "como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática" (BRASIL, 2002, p.124).

Em Matemática, para provar que uma proposição é verdadeira, devemos mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente. Portanto, faz-se necessário conhecer conceitos de lógica clássica para que, de fato, os alunos possam entender como funciona o processo de "provar" em Matemática.

Além disso, estudar conceitos da lógica clássica pode ajudar o aluno a exercitar a argumentação. Neste sentido, Druk (1998) aponta que a Lógica é um tema com conotações interdisciplinares e que se torna mais rico quando se percebe que ela está presente nas conversas informais, na leitura de jornais e revistas e nas diversas disciplinas do currículo, não sendo, portanto, um objeto exclusivo da Matemática. Sendo assim, o trabalho com a lógica deve ser uma preocupação do docente sempre que algum ponto do conteúdo programático permitir.

Diante do que foi analisado nos documentos norteadores do processo de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Básica, neste capítulo apresentar-se-á uma proposta de ensino, destinada aos alunos da educação básica. Nesta proposta são apresentadas tarefas que, se conduzidas adequadamente, podem proporcionar o entendimento de alguns conceitos fundamentais da lógica clássica, evidenciar sua importância na vida cotidiana e no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Apresentamos uma proposta composta por uma sequência de 10 tarefas, onde em cada tarefa há indicação de trechos deste trabalho onde o professor encontra respaldo teórico para desenvolvimento das tarefas com seus alunos.

3.1 Tarefa 1: A lógica no mundo de Alice

Charles Dogson, que usou o pseudônimo de Lewis Carrol, foi o escritor do livro *Alice no País das Maravilhas.* Este escritor atuou como professor de matemática na Universidade de Oxford por vários anos e, como tal, apresenta conceitos de lógica no livro em que descreve o mundo de fantasias da Alice.

Alguns trechos deste livro evidenciam princípios da lógica clássica, mostrando que ao realizar a análise destes textos é possível ensinar princípios da lógica clássica nas séries do Ensino Fundamental.

Objetivo: Estudar princípios da lógica clássica por meio da análise de trechos de texto do livro **Alice no País das Maravilhas**.

Tarefa 1[1]
Analise os textos abaixo e indique princípios da lógica clássica presentes em cada um dos textos. Justifique sua resposta.

Texto 1
"Quem é você?" perguntou a Lagarta.
Não era um começo de conversa muito animador. Alice respondeu, meio encabulada: "Eu... eu mal sei, Sir, neste exato momento... pelo menos sei quem eu era quando me levantei esta manhã, mas acho que já passei por várias mudanças desde então."
"Que quer dizer com isso?" esbravejou a Lagarta. "Explique-se!"
"Receio não poder me explicar", respondeu Alice, "porque não sou eu mesma, entende?"
"Não entendo", disse a Lagarta.
"Receio não poder ser mais clara", Alice respondeu com muita polidez, "pois eu mesma não consigo entender, para começar; e ser de tantos tamanhos diferentes num dia é muito perturbador."

Texto 2

[1] Os textos 1 e 2 foram retirados, respectivamente, dos capítulos 5 e 11 de As Aventuras de Alice no País das Maravilhas e o texto 3 foi retirado do capítulo 1 de Através do Espelho e o que Alice encontrou por lá. As duas histórias estão disponíveis em [12].

A primeira testemunha era o Chapeleiro.
[...]
"Tire o chapéu", disse o Rei ao Chapeleiro.
"Não é meu", disse o Chapeleiro.
"Roubado!" exclamou o rei, voltando-se para os jurados, que instantaneamente fizeram um apontamento do fato.
"São todos para vender", acrescentou o Chapeleiro à guisa de explicação; "nenhum me pertence. Sou um chapeleiro."

Texto 3
O Rei dizia: "Eu lhe asseguro, minha cara, fiquei gelado até as pontas das minhas suíças!"
Ao que a Rainha respondeu: "Você não usa suíças."

Encaminhamentos

Com esta tarefa é possível fazer uma reflexão sobre os princípios fundamentais de lógica clássica, de modo que os alunos reflitam sobre o significado de cada um.

Antes de iniciar a discussão, o professor deve explicar sobre os princípios da lógica clássica. Para tal, poderá basear-se no que foi apresentado no início do Capítulo 2 deste trabalho. Além disso, para despertar a curiosidade dos alunos, poderá explicar quem foi Lewis Carrol e explicar, de modo objetivo, qual é a história de Alice. Feito isso, os alunos deverão analisar os textos e verificar qual é o princípio da lógica clássica que está presente em cada trecho do livro de Lewis Carrol.

No Texto 1, é possível verificar que está presente o *Princípio da identidade*, que diz que A só pode ser igual a A. Neste trecho, nota-se que Alice está confusa sobre quem de fato é. Essa confusão em sua cabeça decorre do fato de ter mudado de tamanho várias vezes naquele dia. Por isso, ela mesmo se questiona sobre quem de fato é, refletindo sobre sua identidade. De acordo com este princípio o tamanho é fixo, tem que ser fixo. Logo, Alice só pode ser igual a Alice. Muitas vezes, o princípio da identidade parece ser óbvio, pois pressupõe que algo só pode ser o que é. Porém, o contexto desta história evidencia a complexidade que pode estar implícita neste princípio.

No Texto 2, verifica-se que está presente o *Princípio do Terceiro Excluído*, pois o rei interpreta que se o chapéu não é do chapeleiro, então ele é roubado, como se não tivesse uma terceira alternativa. Além disso, a argumentação do rei leva-nos a entender que a negação de "não é meu" é "é roubado". Nesta situação, se chamarmos de A a proposição "O chapéu não é do chapeleiro", $\sim A$ será "O chapeleiro roubou o chapéu", ou seja, só temos as duas opções $A \vee \sim A$.

No Texto 3, evidencia-se uma contradição e a partir dela é possível explorar o *Princípio da não-contradição*. Quando o rei diz que ficou gelado até as pontas de suas suíças, pressupõe-se que ele usa suíças. Mas, a rainha já o desmente dizendo que ele não usa suíças. Neste contexto, se chamarmos de A a afirmação "O rei usa suíças", temos que $\sim A$ é "O rei não usa suíças". Mas, $A \wedge \sim A$ é uma contradição, pois não tem como A e $\sim A$ serem verdadeiras simultaneamente. Com isso, concluímos que o rei não ficou gelado. Aqui o professor pode ressaltar a importância da lógica na análise de argumentos.

3.2 Tarefa 2: A lógica na poesia

Objetivo: Estudar tipos de proposições da lógica clássica por meio da análise dos poemas de Cecília Meireles e Carlos Drummond de Andrade.

Tarefa 2[2]
1) Leia e analise com atenção o poema de Cecília Meireles, intitulado *Ou isto ou aquilo*.

Ou se tem chuva e não se tem sol,
ou se tem sol e não se tem chuva!

Ou se calça a luva e não se põe o anel,
ou se põe o anel e não se calça a luva!

Quem sobe nos ares não fica no chão,
quem fica no chão não sobe nos ares.

É uma grande pena que não se possa
estar ao mesmo tempo nos dois lugares!

Ou guardo o dinheiro e não compro o doce,
ou compro o doce e gasto o dinheiro.

Ou isto ou aquilo: ou isto ou aquilo...
e vivo escolhendo o dia inteiro!

Não sei se brinco, não sei se estudo,
se saio correndo ou fico tranquilo.

Mas não consegui entender ainda
qual é melhor: se é isto ou aquilo.

Agora, faça o que se pede a seguir:

a) Identifique, nos versos deste poema, conectivos da lógica clássica e apresente as proposições que os contém.

b) Faça uma análise do poema e mostre que um dos três princípios da lógica clássica está presente nele. Justifique sua resposta.

[2] A ideia para elaboração desta tarefa é advinda de uma análise lógica que o professor Ledo Vaccaro Machado faz sobre o poema *E Agora José?* de Carlos Drummond de Andrade, para o Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio do IMPA, que está disponível em [19].

2) Leia e analise com atenção o poema *E agora José?* de Carlos Drummond de Andrade.

E agora, José?
A festa acabou,
a luz apagou,
o povo sumiu,
a noite esfriou,
e agora, José?
e agora, você?
você que é sem nome,
que zomba dos outros,
você que faz versos,
que ama, protesta?
e agora, José?

Está sem mulher,
está sem discurso,
está sem carinho,
já não pode beber,
já não pode fumar,
cuspir já não pode,
a noite esfriou,
o dia não veio,
o bonde não veio,
o riso não veio,
não veio a utopia
e tudo acabou
e tudo fugiu
e tudo mofou,
e agora, José?

E agora, José?
Sua doce palavra,
seu instante de febre,
sua gula e jejum,
sua biblioteca,
sua lavra de ouro,
seu terno de vidro,
sua incoerência,
seu ódio — e agora?

Com a chave na mão
quer abrir a porta,
não existe porta;
quer morrer no mar,
mas o mar secou;
quer ir para Minas,
Minas não há mais.
José, e agora?

Se você gritasse,
se você gemesse,
se você tocasse
a valsa vienense,
se você dormisse,
se você cansasse,
se você morresse...
Mas você não morre,
você é duro, José!

Sozinho no escuro
qual bicho-do-mato,
sem teogonia,
sem parede nua
para se encostar,
sem cavalo preto
que fuja a galope,
você marcha, José!
José, para onde?

Agora, faça o que se pede a seguir:
a) Identifique, nos versos deste poema, conectivos da lógica clássica e apresente as proposições que os contém.

b) Faça uma análise do poema e mostre que há contradições presentes nele. Justifique sua resposta.

Encaminhamentos

O professor pode começar explicando sobre os tipos de proposições da lógica clássica. Para tal, poderá basear-se no início do Capítulo 2 deste trabalho. Feito isso deverá propiciar situações que façam os alunos analisar o poema e identificar os tipos de proposições.

A seguir, apresentamos algumas reflexões que podem ser feitas por meio da análise dos poemas.

No poema de Cecília Meirelles, na primeira e segunda estrofe, estão presentes proposições ligadas por conjunções e disjunções. Ambas começam com o conectivo "OU" que dá a ideia de que as proposições presentes em cada verso são excludentes, ou seja, que não é possível que ambas as afirmações sejam verdadeiras ao mesmo tempo. Além disso, nota-se a presença da negação. Utilizando símbolos da lógica clássica e chamando de p : "ter sol"q : "ter chuva", na primeira estrofe teríamos:

Primeiro verso: $p \wedge \sim q$

Segundo verso: $q \wedge \sim p$

Primeira estrofe: $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

A mesma estrutura lógica encontra-se na segunda estrofe do poema.

Apesar de não aparecer explicitamente a expressão " Se..., então...", na terceira estrofe é possível notar a ideia de condição, pois a forma como a estrofe é construída, nos propicia fazer uma releitura da mesma da seguinte forma:

Primeiro verso: Se alguém sobe nos ares, então não fica no chão.

Segundo verso: Se alguém fica no chão, então não sobre nos ares.

Utilizando os símbolos e chamando de p : "Sobe nos ares" e q : "Fica no chão", temos:

Primeiro verso: $p {\rightarrow} {\sim} q$.

Segundo verso: $q {\rightarrow} {\sim} p$.

Terceira estrofe: $(p {\rightarrow} {\sim} q) \vee (q {\rightarrow} {\sim} p)$

Na sétima estrofe, percebe-se uma série de proposições condicionais. Da forma como a estrofe foi construída parece que a autora quis dizer:

Se brinco, então não fico tranquilo.
Se estudo, então não fico tranquilo.
Se saio correndo, então não fico tranquilo.

Ou seja, é como se o OU estivesse incluso na construção da estrofe, indicando que não é possível brincar e ficar tranquilo, estudar e ficar tranquilo, sair correndo e ficar tranquilo.

Essa estrofe deixa claro que ao dizermos sim para uma possibilidade, simultaneamente, estamos dizendo não para as outras, isto é, escolher uma possibilidade, significa ao mesmo tempo, negar as outras opções.

O que a poetisa parece querer deixar claro é a condição de escolha entre duas situações que nós seres humanos sempre estamos submetidos. O poema em questão aborda a ideia de que não existe uma terceira opção. E nos faz questionar o porquê disso. Podemos associar esta ideia de não ter uma terceira alternativa ao princípio do terceiro excluído da lógica clássica $p \vee \sim p$.

No poema de Carlos Drummond de Andrade, o professor pode sugerir que os alunos analisem estrofe por estrofe do poema.

Assim, na primeira estrofe, nota-se a presença do conectivo "e", a conjunção. Pela forma como a estrofe é iniciada, a presença da vírgula no final de cada verso parece indicar a conjunção.

A festa acabou **e** a luz apagou **e** o povo sumiu **e** a noite esfriou.

Na segunda estrofe permanece a mesma estrutura lógica da primeira estrofe: os versos são ligados pela conjunção **e**. Além disso, temos a aparição da negação

$\sim p$: o dia não veio.
$\sim q$: o bonde não veio.
$\sim r$: o riso não veio.
$\sim s$: a utopia não veio.

O conectivo "e" nesta estrofe aumenta a dramaticidade do poema, pois

$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r \wedge \sim s$ aponta que José está sem esperança.

Na quarta estrofe é possível observar contradições lógicas

p: José abre a porta.

Mas, não existe porta.

Logo, $\sim p$: José não abre a porta.

Outras contradições acontecem nos versos:

quer morrer no mar,
mas o mar secou.

e

quer ir para Minas,
Minas não há mais.

Com isso verifica-se que os desejos de José são contradições lógicas, pois p$\wedge \sim p$ só é verdadeira quando ambas as proposições p e $\sim p$ são verdadeiras, o que é impossível pelo princípio da não contradição, pois não acontece de p e $\sim p$ serem verdadeiras ao mesmo tempo.

Na quinta estrofe há proposições condicionais se p então q. Notemos que o consequente nestas proposições está subentendido. Chamando o consequente de t, temos:

$p \rightarrow t$: Se você gritasse, então haveria uma saída.
$q \rightarrow t$: Se você tocasse a valsa vienense, então haveria uma saída.
$r \rightarrow t$: Se você morresse, então haveria uma saída.

Nesta estrofe está subentendido o conectivo "ou", pois na disjunção basta que uma das declarações seja verdadeira para que a proposição seja verdadeira. Basta que p, q ou r seja verdadeira para que tenhamos t verdadeira. Em símbolos: $(p \vee q \vee r) \rightarrow t$. Notemos que o modo como o verbo é apresentado nos três versos acima nos dá a entender que as ações gritar, tocar, morrer não acontecem. Além disso, o poeta nega o último antecedente e, com isso, aponta que não há saída para José.

3.3 Tarefa 3: O "ou" lógico na legislação

Objetivo: Compreender a importância da interpretação do conectivo "ou" na linguagem cotidiana e as consequências do modo de interpretar este conectivo.

Tarefa 3
De acordo com o inciso I, artigo 18 do Código Penal Brasileiro "Diz-se que o crime é doloso, quando o agente quis o resultado **ou** assumiu o risco de produzi-lo" (grifo nosso).

João cometeu um crime e o delegado do caso constatou que, quando o fez, João assumiu o risco de produzi-lo **e**, além disso, quis o resultado produzido.

Com base nos fatos constatados pelo delegado do caso, no que está escrito no código penal e em seus conhecimentos a respeito da lógica formal, responda: o crime cometido por João pode ser caracterizado como crime doloso? Justifique sua resposta.

Encaminhamentos

Nesta tarefa, o professor tem a oportunidade de ressaltar a importância do estudo da lógica, pois dependendo da forma como o inciso I do artigo 18 do Código Penal é interpretado, o crime cometido por João não poderá ser caracterizado como crime doloso.

Vejamos que, se:

a) a lei considera os princípios da lógica formal, então o "ou" apresentado é inclusivo. Isso significa que se chamarmos de p: "João assumiu o risco de produzir o resultado" e q: "João quis o resultado produzido", temos:

Se p for falso e se q for falso, p ou q é falso.
Se p for falso e q for verdadeiro, p ou q é verdadeiro.
Se p for verdadeiro e q for falso, p ou q é verdadeiro.
Se p for verdadeiro e q for verdadeiro, p ou q é verdadeiro.

No caso de João, p e q são verdadeiras. Logo, p ou q é verdadeira e com isso o crime cometido por João caracteriza-se por crime doloso.

b) a lei considera o "ou" da forma como é interpretado na linguagem cotidiana, então o "ou" apresentado é exclusivo. Isso significa que se chamarmos de p: "João assumiu o risco de produzir o resultado" e q: "João quis o resultado produzido" temos:

Se p for falso e se q for falso, p ou q é falso.
Se p for falso e se q for verdadeiro, p ou q é verdadeiro.
Se p for verdadeiro e se q for falso, p ou q é verdadeiro.
Se p for verdadeiro e se q for verdadeiro, p ou q é falso.

No caso de João p e q são verdadeiras. Logo, p ou q é falsa e com isso o crime cometido por João não caracteriza-se por crime doloso, visto que o parágrafo único deste artigo nos apresenta:

"Parágrafo único - Salvo os casos expressos em lei, ninguém pode ser punido por fato previsto como crime, senão quando o pratica dolosamente."

Ao que tudo indica, parece que na lei o "ou" é interpretado como inclusivo, isto é, de acordo com a lógica formal, entendendo apenas que existem casos que o "ou" excludente ocorre por impossibilidade material.

No Código Penal, antes de 2007, o entendimento sobre o significado do "ou" era natural (de acordo com a lógica formal). Apenas em 2007 foi discutido o significado do "ou" inclusivo ou exclusivo na legislação, pois no código penal, artigo 319-A foi acrescentada a expressão "e/ou". Com este acréscimo podemos inferir que o objetivo é deixar claro que o "ou" neste caso é inclusivo. Vejamos o texto deste artigo, a seguir:

Art. 319-A. Deixar o Diretor de Penitenciária e/ou agente público, de cumprir seu dever de vedar ao preso o acesso a aparelho telefônico, de rádio ou similar, que permita a comunicação com outros presos ou com o ambiente externo: (Incluído pela Lei nº 11.466, de 2007).

Mas, seria aceitável que no uso apenas do "ou" o diretor que também é agente público fosse inocentado.

3.4 Tarefa 4: Atribuindo valorações

Objetivo: Compreender as relações entre valorações de proposições simples e as valorações de proposições compostas, bem como entender a utilidade de saber identificar o conectivo principal e utilização dos parênteses.

Tarefa 4

1) (OBRL[3], 2014, Fase 1, nível III) Considere que cada pessoa cujo nome está indicado na tabela abaixo exerça apenas uma profissão. Se a célula que é o cruzamento de uma linha com uma coluna apresenta o valor V, então a pessoa correspondente àquela linha exerce a profissão correspondente àquela coluna; se o valor for F, então a pessoa correspondente à linha não exerce a profissão correspondente àquela coluna.

[3] Olimpíada Brasileira de Raciocínio Lógico.

NOME	DENTISTA	PNEUMOLOGISTA	CARDIOLOGISTA
BRUNO		F	
BÁRBARA			V
BIANCA	F		

Considerando as informações e a tabela apresentada acima, é correto afirmar que:
a) “Bruno não é dentista ou Bianca é cardiologista” é uma proposição composta verdadeira.
b) “Se Bárbara é cardiologista, então Bianca é dentista” é uma proposição composta verdadeira.
c) “Bruno não é pneumologista e Bianca é dentista” é uma proposição composta verdadeira.
d) “Bruno não é dentista e Bianca é cardiologista” é uma proposição composta verdadeira.
e) “Bruno é dentista ou Bárbara é cardiologista” é uma proposição composta verdadeira.

2) (OBRL, 2014, Fase 1, nível 3) Dadas as proposições lógicas simples: **A**, **B**, **C** e **D**, com, respectivamente, os seguintes valores lógicos: **V**, **F**, **V** e **V** com V indicando que a proposição é verdadeira e F indicando que a proposição é falsa. Observe as três proposições compostas abaixo:
I - $\sim B \leftrightarrow C$
II - $\sim A \rightarrow D$
III - $(\sim A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

Os valores lógicos obtidos das seguintes proposições compostas são respectivamente:
a) V,F,F
b) V,V,V
c) V,F,V
d) F,F,V
e) F,V,F

3) (Mortari, 2016) Na fórmula a seguir defina uma valoração (com respeito às letras sentenciais que ocorrem na fórmula) que torne a fórmula verdadeira; depois defina uma outra valoração que torne a fórmula falsa.

$$(B \rightarrow A) \rightarrow \sim (C \leftrightarrow B).$$

Encaminhamentos

Na **questão 1** desta tarefa, o aluno terá oportunidade de aplicar seus conhecimentos a respeito de atribuição de valor lógico para proposições compostas, sendo conhecidas (ou não) as valorações para proposições atômicas que compõem a proposição composta a ser analisada. Nesta tarefa, sugerimos que o professor sempre desafie os alunos a indicarem as possíveis proposições que podem ser retiradas das informações do quadro, bem como sobre as proposições em que não há como atribuir valor lógico, justificando suas respostas. Com base na interpretação do enunciado e do quadro apresentado, o primeiro passo será o aluno identificar as proposições contidas na tabela que são: *Bárbara é cardiologista*, *Bianca não é dentista* e *Bruno não é pneumologista*.

Feito isso, utilizando os conhecimentos sobre conectivos deverá analisar as alternativas. Para tal, com a mediação do professor, pode ser construído o seguinte quadro:

Proposição simples	**Valoração**
Bruno é dentista	?
Bruno é pneumologista	F
Bruno é cardiologista	?
Bárbara é dentista	F
Bárbara é pneumologista	F
Bárbara é cardiologista	V
Bianca é dentista	F
Bianca é pneumologista	?
Bianca é cardiologista	?

O símbolo "?" foi utilizado para indicar que não é possível atribuir valor lógico para a proposição. Analisando cada item desta questão, temos no item (a) da questão 1 uma disjunção. Sendo assim, para que esta seja verdadeira, basta que uma das proposições simples que a compõe também o seja. Mas, com base nas informações apresentadas no quadro, não há como atribuir valor lógico às proposições simples presentes na proposição composta deste item, pois sobre a profissão de Bruno e Bianca a única afirmação que pode se fazer é *"Bruno não é pneumologista"* e *"Bianca não é dentista"*.

No item (b) da questão 1 temos uma condicional. Sendo assim, para que esta seja verdadeira, precisamos analisar três casos: a primeira proposição é verdadeira e a segunda é verdadeira; a primeira proposição é falsa e a segunda também é falsa; a primeira proposição é falsa e a segunda é verdadeira. No entanto, *"Bárbara é cardiologista"* é uma proposição verdadeira e *"Bianca é dentista"* é uma proposição falsa. Logo, essa condicional é falsa.

No item (c) da questão 1 temos uma conjunção. Sendo assim, para que esta proposição seja verdadeira, devemos ter que as duas proposições simples componentes sejam ambas verdadeiras ou ambas falsas. No entanto, *" Bruno não é pneumologista"* é verdadeira, mas *"Bianca é dentista"* é falsa. Logo, esta conjunção é falsa.

No item (d) da questão 1, temos uma conjunção. E, como já analisamos no item (c), para que esta proposição seja verdadeira, deve se ter que as duas proposições simples componentes sejam ambas verdadeiras ou ambas falsas. No entanto, com base nas informações do quadro não há como atribuir valor lógico às proposições *"Bruno não é dentista"* e *"Bianca é cardiologista"*.

No item (e) da questão 1, temos uma disjunção. E, como já analisamos no item (a), basta que uma proposição simples seja verdadeira para que a proposição composta o seja. Notemos que *"Bárbara é cardiologista"* é verdadeira. Portanto, a proposição *"Bruno é dentista"* poderá assumir qualquer valor lógico. Logo, *"Bruno é dentista ou Bárbara é cardiologista"* é uma proposição composta verdadeira. Logo, a alternativa correta é a letra (e).

Na **questão 2** desta tarefa o aluno terá oportunidade de aplicar seus conhecimentos a respeito das proposições lógicas formadas pelos conectivos, sendo conhecidos os valores lógicos das proposições simples que compõem as proposições compostas. O primeiro passo será identificar que a proposição A é verdadeira, a proposição B é falsa e as proposições C e D são ambas verdadeiras. Para realizar esta tarefa, sugerimos que o professor propicie situações em que os alunos desenvolvam raciocínios. Por exemplo, não seria interessante de início indicar que os alunos construam a tabela-verdade, pois dessa forma, poderão somente trabalhar de modo mecânico.

No item I da questão 2, temos uma proposição bicondicional. O professor poderá solicitar que os alunos digam quando é que uma bicondicional é verdadeira. Os alunos deverão perceber que a proposição $\sim$B é verdadeira, pois B é falsa. Como as duas proposições que compõem a bicondicional são verdadeiras, temos que esta bicondicional também é verdadeira.

No item II da questão 2, temos uma condicional. Inicialmente, o professor poderá instigar seus alunos a indicarem quando uma proposição condicional é verdadeira. Feito isso, os alunos deverão perceber que a proposição $\sim$A é falsa. Como a proposição antecedente é falsa e a proposição consequente é verdadeira, esta condicional é verdadeira. Neste item o professor poderá explorar outros conceitos da lógica formal, por exemplo, as proposições condicionais que tem relação de causa e consequência e pedir que os alunos citem exemplos. Poderá, também, pedir que os alunos apresentem a recíproca e a contrapositiva da proposição condicional em questão.

No item III da questão 2, temos uma condicional em que antecedente e consequente são ambas proposições compostas. Sugerimos que o professor propicie discussões com os alunos sobre o que deve ser feito inicialmente para resolver este item da questão. Os alunos deverão notar que a proposição antecedente da proposição composta condicional é uma disjunção e a proposição consequente é uma conjunção. Tendo identificado isso, os alunos deverão verificar que o valor lógico da proposição antecedente é falsa, pois ∼A e falsa e B é falsa; e o valor lógico da proposição consequente é verdadeira, pois antecedente é falso e consequente é verdadeira. Portanto, esta condicional é verdadeira.

Logo, a alternativa correta é a letra (b).

A **questão 3** é bastante interessante, pois não é uma questão rotineira. Exige mais raciocínio e os alunos podem apresentar vários "caminhos" para resolução. Em boa parte dos exercícios de lógica formal, exige-se que os alunos indiquem o valor lógico de proposições compostas a partir do conhecimento do valor lógico das proposições atômicas que compõem as proposições compostas. Se o aluno adere ao uso das tabelas-verdade, temos um processo muito mecânico. Além disso, esta questão exige que os alunos estabeleçam estratégias de resolução. Sugerimos que o professor questione os alunos sobre como poderão iniciar a resolução do problema, o que inicialmente deve ser analisado; com o objetivo de que os alunos identifiquem o conectivo principal de cada proposição composta e depois ir analisando qual a subfórmula mais imediata.

Desse modo, para resolver esta questão os alunos deverão verificar que o conectivo principal é $\rightarrow$ e, portanto, a proposição composta é uma condicional, logo temos as seguintes possibilidades para que esta proposição seja verdadeira:

1º caso: antecedente verdadeiro e consequente verdadeiro;

2º caso: antecedente falso e consequente verdadeiro;

3º caso: antecedente falso e consequente falso.

Analisando a proposição antecedente do **1º caso** (que também é uma proposição condicional), temos que para esta proposição ser verdadeira, as seguintes possibilidades podem ocorrer: B é verdadeira e A é verdadeira; B é falsa e A é verdadeira; B é falsa e A é falsa. Analisando a proposição consequente do **1º caso** (que é a negação de uma bicondicional), temos que, para a negação da bicondicional ser verdadeira, devemos ter a bicondicional falsa, ou seja C e B não podem ter os mesmos valores de verdade. Logo, obtemos as seguintes possibilidades: B é falso e C é verdadeiro; B é verdadeiro e C é falso.

Portanto, considerando somente o **1º caso**, podemos ter as seguintes soluções:

A é verdadeira, B é verdadeira e C é falsa.

A é falsa, B é verdadeira e C é verdadeira.

A é verdadeira, B é falsa, C é verdadeira.

Agora, analisando a proposição antecedente do **2º caso**, tem-se que para esta proposição ser falsa tem-se somente uma possibilidade: B é verdadeira e A é falsa. Analisando a proposição consequente do **2º caso**, temos que para a negação da bicondicional ser verdadeira, devemos ter a bicondicional falsa, ou seja, C e B não podem ter os mesmos valores de verdade. Logo, ocorrem as seguintes possibilidades: B é falso e C é verdadeiro; B é verdadeiro e C é falso.

Portanto, considerando somente o **2º caso**, temos a seguinte solução:

A é falsa, B é verdadeira e C é falsa.

Por fim, analisando a proposição antecedente do **3º caso**, temos que para que esta proposição seja falsa existe somente uma possibilidade: B é verdadeira e A é falsa. Além disso, analisando a proposição do consequente do **3º caso**, temos que para que a negação da bicondicional seja falsa, devemos ter bicondicional verdadeira, ou seja, C e B devem ter os mesmos valores de verdade. Desse modo, chegamos as seguintes possibilidades: B é verdadeiro e C é verdadeiro; B é falso e C é falso.

Portanto, considerando somente o **3º caso**, podemos ter as seguintes soluções:

A é falsa, B é verdadeira e C é verdadeira.

A é falsa, B é verdadeira e C é falsa.

3.5 Tarefa 5: Investigando proposições condicionais

Objetivo: Compreender como fazer afirmações verdadeiras a partir de proposições condicionais utilizando a relação de causa e efeito frequentemente usadas na linguagem cotidiana.

Tarefa 5

1) (Machado e Cunha, 2008) Paulo é uma pessoa de palavra e afirmou: "Se eu for aprovado no concurso para o emprego, voltarei a estudar". O que se pode concluir, caso:
a) Paulo, venha a ser aprovado no concurso.
b) Paulo, não volte a estudar.
c) Paulo venha a ser reprovado no concurso.
d) Paulo volte a estudar.

2) (FGV[4]) Um guarda portuário trabalha na fiscalização das pessoas que transitam pelo porto e conhece a regra: **"Quem tem crachá pode entrar no navio."**
A partir dessa regra, é correto concluir que:
(A) se alguém não pode entrar no navio então não tem crachá.
(B) quem não tem crachá não pode entrar no navio.
(C) se alguém pode entrar no navio então tem crachá.
(D) algumas pessoas com crachá não podem entrar no navio.
(E) uma pessoa tem crachá ou não entra no navio.

3) Considere a proposição verdadeira: **Se um número é múltiplo de 4, então ele é par"** . A partir desta proposição podemos afirmar que:
a) Se um número é par, então é múltiplo de 4.
b) Um número é múltiplo de 4 e não é par.
c) Se um número não é múltiplo de 4, então ele é ímpar.
d) Se um número é ímpar, então não é múltiplo de 4.

Encaminhamentos

Na **questão 1** desta tarefa, o professor poderá explorar as ideias da relação de causa e efeito, bem como as ideias de condição necessária e suficiente.

O alunos deverão, primeiramente, notar que a proposição em questão é uma condicional. A expressão "Paulo é um homem de palavra" significa que Paulo fala a verdade. Para analisar cada caso, os alunos deverão lembrar que a proposição condicional só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso. O antecedente nesta proposição é *"Eu for aprovado no concurso para o emprego"* e o consequente é *"voltarei a estudar"*. O professor poderá enfatizar a supressão da palavra *então* nesta condicional, reforçando que nem sempre as proposições condicionais serão apresentadas da forma "Se..., então..."

Analisando o item (a) desta questão temos que *"Paulo vai ser aprovado no concurso para o emprego"* é uma proposição verdadeira (é o caso que se está considerando) e é a antecedente da condicional. Logo, a segunda proposição (consequente) não pode ser falsa.

Portanto, temos que Paulo voltará a estudar.

Analisando o item (b) desta questão, temos que *"Paulo não voltará a estudar"* é verdadeira (é o caso que se está considerando), logo *"Paulo voltará a estudar"* é falsa e é o consequente da condicional. Para que a proposição condicional seja verdadeira o antecedente deve ser falso. Portanto, podemos concluir que *"Paulo não foi aprovado no concurso"*.

Analisando o item (c) desta questão temos que *"Paulo venha a ser reprovado no concurso"* é verdadeira (é o caso que se está considerando), logo *"Paulo venha a ser aprovado no concurso"* é falsa e é o antecedente da condicional. Logo, a proposição consequente pode ser verdadeira ou falsa, ou seja, Paulo poderá voltar estudar ou não. Com isso nada podemos concluir.

Analisando o item (d) desta questão temos que *"Paulo volte a estudar"* é verdadeira (é o caso que se está considerando) e é o consequente da proposição condicional. Logo, a proposição antecedente pode ser verdadeira ou falsa, ou seja, Paulo foi aprovado no concurso ou não. Com isso nada podemos concluir.

Um aspecto importante que pode ser ressaltado, é que na linguagem cotidiana muitas vezes proposições condicionais são confundidas com proposições bicondicionais.

Não seria surpresa no item c) alguém responder *"Paulo não voltará a estudar"*. Isso acontece porque implicitamente a proposição em questão é interpretada como *"Paulo será aprovado no concurso para o emprego se, e somente se, voltar a estudar"*.

Outro aspecto que pode ser trabalhado é a identificação de condições necessárias e suficientes.

O professor poderá perguntar:

- Ser aprovado no concurso é condição suficiente para Paulo voltar a estudar?

  A resposta deverá ser sim, pois basta que Paulo seja aprovado no concurso para que volte a estudar.

- Ser aprovado no concurso é condição necessária para Paulo voltar a estudar?

  A resposta deverá ser não, pois não é absolutamente preciso que Paulo seja aprovado para que volte a estudar.

- Voltar a estudar é condição necessária para Paulo ser aprovado no concurso?

  A resposta deverá ser sim, pois voltar a estudar é absolutamente preciso para ser aprovado no concurso (no contexto desta questão).

- Voltar a estudar é condição suficiente para Paulo ser aprovado no concurso?

  A reposta deverá ser não, pois não é o bastante voltar a estudar para que seja aprovado no concurso.

Outro aspecto que poderá ser discutido, é que frequentemente proposições simples que compõem as proposições condicionais utilizadas no cotidiano, trazem a ideia de causa e efeito, onde interpreta-se que o consequente decorre do antecedente, ou seja, a proposição antecedente é a causa e a proposição consequente é o efeito. Essa ideia ajuda a entender por que a proposição " Se P então Q" é verdadeira quando a proposição P é falsa, pois não ocorrendo a causa não existe o compromisso de o efeito acontecer.

Na **segunda questão** desta tarefa, os alunos deverão identificar que se trata de uma proposição condicional. Para isso, deverão identificar que esta proposição expressa uma condição: a condição de ter crachá para entrar no navio. Formalmente ela deve ser escrita como:

"Se você tem crachá, então pode entrar no navio." Nesta condicional, que a proposição antecedente é: "Você tem crachá" e a proposição consequente é: "Pode entrar no navio". Com isso, observamos que ter crachá é condição suficiente para entrar no navio e pode entrar no navio é condição necessária para ter crachá.

Com base nas análises feitas na questão 1 desta tarefa, temos que dessa condicional, podemos concluir apenas que:

1) Quem tem crachá, pode entrar no navio. 2) Quem não pode entrar no navio não tem crachá.

Não se pode concluir nada a respeito de quem não tem crachá. E também não se pode concluir nada a respeito de quem entrou no navio.

Com isso, verificamos que a resposta correta é a alternativa (a).

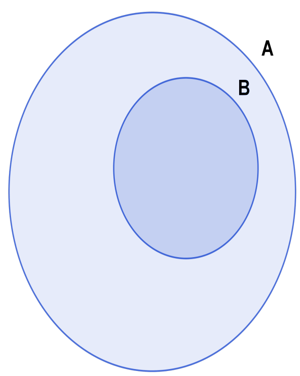
Nesta tarefa, o professor poderá abordar a ideia de equivalências em proposições condicionais, pois note que "Se alguém não pode entrar no navio, então não tem crachá" é a proposição contrapositiva de "Quem tem crachá pode entrar no navio" e estas são proposições equivalentes, ou seja, se construirmos a tabela-verdade das duas proposições atribuindo os mesmos valores lógicos às proposições simples que as compõe, temos que elas terão os mesmos valores de verdade. Usando a simbologia da lógica formal, considerando p: "Quem tem crachá" e q: "Pode entrar no navio", temos que a condicional é representada por $p \rightarrow q$ e a contrapositiva é representada por $\sim q \rightarrow \sim p$.

Para que os alunos façam a validação, o professor poderá solicitar que construam a tabela-verdade das duas proposições.

Outro aspecto que pode ser explorado nesta questão é a identificação da recíproca. O professor pode começar explorando o significado da palavra recíproca (algo presente numa relação entre duas partes, quando, existindo de um lado, existe de igual modo no outro.). Feito isso, terão condições de indicar que a recíproca da condicional desta questão é "Se você pode entrar no navio, então tem crachá" que é representada simbolicamente por $q \rightarrow p$. O professor poderá perguntar para os alunos se a recíproca tem o mesmo valor de verdade da condicional original e deixar que façam reflexões para responder. Para fazer a validação, poderá sugerir que construam a tabela-verdade da recíproca.

Na **terceira questão** desta tarefa, temos uma proposição condicional $p \rightarrow q$ em que p: "Um número é múltiplo de 4." e q: "Um número é par." Sugerimos que o professor faça uma conexão com a Teoria de Conjuntos como nova forma de explicar a ideia de condição necessária e suficiente, baseando-se na relação de inclusão entre conjuntos. Para tal, poderá denotar por A o conjunto formado por todos os números pares e B o conjunto de todos os números que são múltiplos de 4. O professor deverá mostrar aos alunos que a condicional $p \rightarrow q$ exprime a ideia de que o conjunto dos elementos que satisfazem a propriedade p (que foi denotado por B) é subconjunto do conjunto formado pelos elementos que satisfazem a propriedade q (que foi denotado por A), conforme a figura 3.1.

Figura 3.1: Proposição condicional e a relação de inclusão.



Fonte: A autora.

Feito isso, o professor poderá fazer as seguintes perguntas:

- É necessário ser par para ser múltiplo de 4? Esperamos que os alunos respondam que sim, pois analisando a figura tem-se que o conjunto dos números múltiplos de 4 está contido no conjunto dos números pares, ou seja, não se consegue um número que seja múltiplo de 4 e não seja par.

- É suficiente ser par para ser múltiplo de 4? Esperamos que os alunos respondam que não, pois tem-se números que são pares e não são múltiplos de 4, por exemplo: 10, 18.

- É suficiente ser múltiplo de 4 para ser par? Esperamos que os alunos respondam que sim, pois o conjunto dos números múltiplos de 4 está contido no conjunto dos números pares, logo não existe números que são múltiplos de 4 e não sejam pares.
- É necessário ser múltiplo de 4 para ser par? Esperamos que os alunos respondam que não, pois existem elementos que pertencem ao conjunto dos números pares que não pertencem ao conjunto dos números múltiplos de 4.

Feita esta análise, acreditamos que ficará mais fácil assinalar a alternativa correta, pois observando a relação entre os conjuntos, já se consegue descartar alternativas (a), (b) e (c), restando somente a alternativa (d) como possibilidade de resposta.

3.6 Tarefa 6: Negando corretamente!

Objetivo: Entender como utilizar as Regras de De Morgan para negar proposições com um ou mais conectivos, bem como proposições com quantificadores, buscando expor alguns equívocos frequentemente cometidos.

Tarefa 6
1) (IBFC[5]) A negação da frase **"César não é rico ou Pedro é dentista"** é:
a) César é rico ou Pedro não é dentista.
b) César não é rico e Pedro não é dentista.
c) Se César é rico, então Pedro não é dentista.
d) César é rico e Pedro não é dentista.

2) A negação da sentença **"Se você estudou lógica então você acertará esta questão"**, é:
a) se você não acertar esta questão, então você não estudou Lógica;
b) você não estudou Lógica e acertará esta questão.
c) se você estudou Lógica, então não acertará esta questão;
d) você estudou Lógica e não acertará esta questão;
e) você não estudou Lógica e não acertará esta questão.

[5] Instituto Brasileiro de Formação e Capacitação

3) (FCC[6]) Um jornal publicou a seguinte manchete: **"Toda Agência do Banco do Brasil tem déficit de funcionários."** Diante de tal inverdade, o jornal se viu obrigado a retratar-se, publicando uma negação de tal manchete. Das sentenças seguintes, aquela que expressaria de maneira correta a negação da manchete publicada é:
a) Qualquer Agência do Banco do Brasil não têm déficit de funcionários.
b) Nenhuma Agência do Banco do Brasil tem déficit de funcionários.
c) Alguma Agência do Banco do Brasil não tem déficit de funcionários.
d) Existem Agências com déficit de funcionários que não pertencem ao Banco do Brasil.
e) O quadro de funcionários do Banco do Brasil está completo.

4) (Machado e Cunha, 2008) Analise o significado lógico das seguintes frases do cotidiano:
Eu não entendi nada.
Eu não vi ninguém.

Encaminhamentos

Primeiramente destacamos que o professor poderá consultar as Seções 2.2 e 2.3 deste trabalho para se pautar quanto aos conceitos abordados e para melhor condução da tarefa. Na **questão 1** desta tarefa, os alunos deverão analisar a proposição "César não é rico ou Pedro é dentista" e indicar sua negação. Os alunos deverão perceber que esta proposição é uma disjunção, composta pelas proposições: "César não é rico" e "Pedro é dentista". Segundo as Leis de De Morgan, para negar a proposição composta, os alunos deverão negar a primeira proposição, negar o conectivo principal e negar a segunda proposição. A negação da primeira proposição é "César é rico"; a negação de uma disjunção é uma conjunção e a negação da segunda proposição é "Pedro não é dentista". Logo, a negação correta da proposição composta em questão é "César é rico e Pedro não é dentista".

Nesta tarefa, o professor poderá solicitar que os alunos justifiquem a resposta apresentada. Uma possível alternativa seria os alunos construírem a tabela-verdade da proposição em questão e a tabela-verdade de sua negação. Se fizerem isso, notarão que, dadas as mesmas valorações para as proposições simples, os valores de verdade da proposição composta e sua negação serão contrários, ou seja, quando uma for falsa a outra será verdadeira e vice-versa.

Para construir a tabela-verdade, podemos considerar p: " é rico", q: "Pedro é dentista", obtendo:

[6]Fundação Carlos Chagas

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F	**V**	**F**
V	F	F	V	**F**	**V**
F	V	V	F	**V**	**F**
F	F	V	V	**V**	**F**

Na **questão 2** desta tarefa, os alunos deverão analisar a proposição "Se você estudou lógica, então você acertará esta questão" e indicar sua negação. Os alunos deverão notar que esta proposição é uma condicional, composta pelas proposições simples: "Você estudou lógica" e "Você acertará esta questão". De acordo com a regra de equivalência $p{\rightarrow}q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, uma proposição equivalente à condicional apresentada é: Você não estudou lógica ou acertará esta questão, que escrita desta forma é uma disjunção. Notado isso, agora é possível utilizar a Lei de De Morgan para negar a proposição. A negação de "Você não estudou lógica" é "Você estudou lógica", a negação da disjunção é a conjunção e a negação de "Você acertará esta questão" é "Você não acertará esta questão".

Logo, a negação da proposição em questão é "Você estudou lógica e não acertará esta questão" (alternativa (d)).

Nesta tarefa, o professor poderá solicitar que os alunos justifiquem a resposta apresentada. Uma possível alternativa seria os alunos construírem a tabela-verdade da proposição em questão e a tabela-verdade de sua negação. Denotando por p: "Você estudou lógica" e q: "Você acertará esta questão" temos:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p{\rightarrow}q$	$\sim (p{\rightarrow}q)$	$\sim p \vee q$	$p \wedge \sim$q
V	V	F	F	**V**	F	V	**F**
V	F	F	V	**F**	V	F	**V**
F	V	V	F	**V**	F	V	**F**
F	F	V	V	**V**	F	V	**F**

Notemos que, analisando a quinta e oitava colunas, é possível fazer a verificação desejada.

Na **questão 3** desta tarefa, os alunos deverão analisar a proposição "Toda agência do Banco do Brasil tem déficit de funcionários" e apresentar sua negação. Analisando esta proposição, bastaria que os alunos constatassem que em **pelo menos uma** agência do Banco do Brasil não há déficit e eles já teriam argumento suficiente para desmentir o jornal, afinal o jornal tinha dito que **todas** as agências possuem déficit. Portanto, temos que uma forma do aluno expressar a negação desta proposição seria:

"Pelo menos uma agência do Banco do Brasil não tem déficit de funcionários".

Uma outra forma de dizer esta mesma frase seria:

"Alguma agência do Banco do Brasil não tem déficit de funcionários".

Portanto, a alternativa correta é a letra (c).

Nesta questão, o professor pode chamar a atenção para a negação de proposições que contém quantificadores.

Se sairmos nas ruas perguntando qual a negação desta proposição, é muito provável que as pessoas digam que a negação correta é "Nenhuma agência do Banco do Brasil tem déficit de funcionários". É importante que o professor deixe claro que negar uma proposição que contém o quantificador para todo, é apresentar um contraexemplo, ou seja, evidenciar pelo menos um elemento do universo de discurso que não verifica a propriedade dada na proposição.

Agora, se estivéssemos trabalhando com a proposição "Existem agências do Banco do Brasil que tem déficits de funcionários", o professor deveria deixar bem claro que, para negar esta proposição, é necessário mostrar que para todos os elementos do universo de discurso a propriedade na proposição não é verificada, ou seja, neste caso: "Toda agência do Banco do Brasil não tem déficits de funcionários" que, neste caso, sim, pode ser expressa por: "Nenhuma agência do Banco do Brasil possui déficit de funcionários".

A **questão 4** desta tarefa apresenta as frases cotidianas muito utilizadas e que muitas vezes são utilizadas para expressar uma ideia quando na verdade expressam outra ideia. Vamos analisar a primeira frase: "Eu não entendi nada", esta é a negação de "Eu entendi nada". Mas, veja que "Eu entendi nada" é o mesmo que "Nada eu entendi" (foi reformulada deste modo, com a intenção de que seja mais fácil identificar o quantificador) que também é o mesmo que "Toda coisa, eu não entendi" que também é uma negação, pois nega a proposição "Existe coisa que eu entendi".

Portanto, nesta frase cotidiana, temos uma dupla negação $\sim(\sim p)$, onde p é "Existe coisa que eu entendi"; $\sim p$ é "Eu entendi nada".

Na lógica formal a dupla negação de uma proposição é equivalente a esta proposição. Mas, observando a análise feita, será que as pessoas que dizem: "Eu não entendi nada" queriam expressar a ideia "Existe coisa que eu entendi"? Provavelmente não. Logo, seria mais adequado ao invés de dizer "Eu não entendi nada", dizer "Não entendi coisa alguma".

A mesma análise deve ser feita na segunda oração.

3.7 Tarefa 7: Quantificadores nas expressões matemáticas

Objetivo: Compreender a importância da indicação do universo de discurso e do uso de quantificadores em expressões matemáticas.

Tarefa 7
1) Analise as proposições abaixo e utilize os símbolos da lógica clássica para traduzir as sentenças para a linguagem lógica formal.

a) Todo número natural é um número real.

b) Existe número real que não é natural.

c) Alguns números naturais são primos.

d) Nenhum número natural é primo.

2) Verifique se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas e apresente sua negação. Justifique sua resposta.

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 > 0$.

b) Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x - 1 = 0$.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 + 1 \neq 0$.

d) Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 + 2x + 1 = 0$.

3)Acrescente um universo de discurso e quantificadores a cada uma das expressões abaixo, de modo a torná-las proposições verdadeiras.

a) $x + 1 = \frac{3}{2}$.

b) $\sqrt{x} \geq 0$.

c) $x^2 > 0$.

d) $x + 1 < 3$.

Encaminhamentos

Para começar a discussão desta tarefa, o professor pode começar explicando o que são sentenças abertas e o que são quantificadores. Para tal, poderá basear-se na terceira seção do Capítulo 2 deste trabalho.

Na **questão 1** o professor terá a oportunidade de discutir com os alunos sobre como "traduzir" sentenças da linguagem natural, que contém quantificadores, para a linguagem simbólica da lógica formal.

Primeiramente, devemos denotar as proposições. Chamando de

$$P(x): x \text{ é número natural.}$$
$$Q(x): x \text{ é número real.}$$
$$R(x): x \text{ é número primo.}$$

Assim, os itens da questão 1 podem ser traduzidos da seguinte forma:

a) $\forall\, x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

b) $\exists\, x(Q(x) \wedge \sim P(x))$.

c) $\exists\, x(P(x) \wedge R(x))$.

d) $\sim \exists\, x(P(x) \wedge R(x)$.

No item (a) desta tarefa o professor pode abordar a ideia de relação de inclusão de conjuntos, para que os alunos possam entender porque este item pode ser representado por uma proposição condicional. Nos itens (c) e (d) o professor pode discutir com os alunos sobre o significado das palavras "algum" e "nenhum", fazendo com que cheguem à conclusão de que "algum" traz a ideia de que deve existir pelo menos um elemento do universo de discurso e "nenhum" traz a ideia de que não existe elementos no universo de discurso que satisfaça determinada propriedade. Com isso, poderá sistematizar as ideias apresentadas, como no quadro a seguir:

Proposição categórica	**Representação Simbólica**
Todo A é B.	$\forall\, x(A(x) \rightarrow B(x))$
Algum A é B.	$\exists\, x(A(x) \wedge B(x))$
Nenhum A é B.	$\sim \exists\, x(A(x) \wedge B(x))$
Algum A não é B.	$\exists\, x(A(x) \wedge \sim B(x))$

Na **questão 2**, o professor tem a oportunidade de fazer os alunos discutirem sobre quando é que uma proposição que contém quantificadores é falsa. Com isso, surge a oportunidade de explorar contra-exemplos.

Além disso, o professor poderá ressaltar que, para a proposição ser verdadeira, a variável tem que pertencer ao universo de discurso considerado e satisfazer a condição. Os alunos devem chegar às seguintes conclusões:

a) Esta proposição é falsa, porque $0 \in \mathbb{R}$ e $0^2 \not> 0$. Para justificar a resposta, é exibido um elemento do universo de discurso que não atende a condição dada. Isto é um contra-exemplo. A sua negação é dada por: "Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $0^2 \not> 0$.

b) $1 \in \mathbb{N}$ e $1 - 1 = 0$. Portanto, a proposição é verdadeira, pois, de fato existe um elemento no universo de discurso que atende a condição dada. A sua negação é dada por: "Para todo $x \in \mathbb{N}$, temos que $x - 1 \neq 0$".

c) Para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, deste modo, $x^2 + 1 \geq 1$, ou seja, $x^2 + 1 \neq 0$. Portanto, esta proposição é verdadeira. A sua negação é dada por: "Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 1 = 0$.

d) A equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ pode ser escrita da forma $(x+1)^2 = 0$, consequentemente, $x = -1$ é uma raiz de multiplicidade dois, e, sendo assim, não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 + 2x + 1 = 0$. Portanto, a proposição é falsa. A sua negação é dada por: "Para todo $x \in \mathbb{N}$ temos que $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Na **questão 3**, o professor tem a oportunidade de mostrar a importância da indicação do universo de discurso de uma expressão. Possíveis soluções:

a) $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $x + 1 = \dfrac{3}{2}$.

b) $\forall\ x \in \mathbb{N}$ temos que $\sqrt{x} \geq 0$.

c) $\forall\ x \in \mathbb{R}$ temos que $x^2 > 0$.

d) $\exists\ x \in \mathbb{N}$ tal que $x + 1 < 3$.

No item (a), por exemplo, podemos destacar que, se o universo de discurso fosse o conjunto dos números naturais a proposição não seria verdadeira, pois não existe número natural que satisfaça a equação $x + 1 = \dfrac{3}{2}$.

3.8 Tarefa 8: A lógica nas demonstrações matemáticas

Objetivo: Estabelecer relações entre a lógica e a demonstração em matemática.

Tarefa 8[7]

1) Observe a seguinte demonstração:

1. Temos $16 - 36 = 25 - 45$

2. Somamos $\dfrac{81}{4}$ nos dois lados, o que não altera a igualdade.

Assim, $16 - 36 + \dfrac{81}{4} = 25 - 45 + \dfrac{81}{4}$.

3. Isso pode ser escrito da seguinte forma:
$(4 - (\frac{9}{2}))^2 = (5 - (\frac{9}{2}))^2$
4. Tirando a raiz quadrada em ambos os lados temos:
4 - $(\frac{9}{2}) = 5 - (\frac{9}{2})$
5. Somando $\frac{9}{2}$ nos dois lados da igualdade, temos:
$4 = 5$.

Nesta, demonstração, concluímos que:
(A) Desde criança fomos enganados e, de fato, 4 é igual a 5.
(B) Existe algo errado nesta demonstração.
Caso a sua resposta, seja a (A), ou seja, você foi enganado, o que resta é chorar.
Caso sua resposta, seja a (B), ou seja, deve haver algum erro nesta demonstração, mostre onde ele está, justificando sua resposta.

[7] Esta tarefa foi elaborada com base numa lista de exercícios proposta pelo professor Valdeni Soliani Franco e João Roberto Gerônimo, disponível no link http://www.dma.uem.br/jrgeronimo/fundamentos/

2) Considere a afirmação:
Em um triângulo cujos lados medem a, b, c, com $a \geq b \geq c$, sempre temos "$b + c \geq a$" (Desigualdade triangular). Desta forma, analise a proposição abaixo, bem como a prova dada e responda às questões que seguem:

Proposição: Dados dois pontos X e Y em uma circunferência de raio r e centro O. Se X e Y são distintos e não colineares com o centro O da circunferência, temos que a distância entre X e Y, representada por d(X,Y), é sempre menor que 2r.
Prova: De fato, se a distância entre X e Y fosse maior que 2r (já que igual não pode ser, uma vez que os pontos não são colineares), teríamos:
d(X, O) + d(Y, O) > d(X,Y)
r + r > d(X,Y) > 2r
2r > 2r

Desta forma, segue que a distância entre dois pontos distintos não colineares com centro em uma circunferência é sempre menor que o diâmetro da mesma.

a) Identifique hipótese e tese na proposição.
b) Qual a técnica dedutiva utilizada para fazer a demonstração, neste caso? Justifique sua resposta.

Encaminhamentos

Nesta tarefa, o professor tem a oportunidade de mostrar a importância da lógica ao realizar demonstrações em matemática. Na **questão 1**, por exemplo, verificamos que um passo incorreto na demonstração gera erros bem graves. Nesta questão o erro consta na passagem do passo 3 para o passo 4, pois sejam x e y dois números reais quaisquer, a igualdade $x^2 = y^2$ não implica que $x = y$. Poderíamos ter, por exemplo, $4 = x^2 = y^2$ e $x = 2$ e $y = -2$. Se os alunos não conseguirem enxergar que o erro está nesta passagem, o professor pode pedir que verifiquem quanto é $4 - (\frac{9}{2})$ e $5 - (\frac{9}{2})$.

Já na **questão 2**, o professor pode relacionar o processo de determinação da validade de um argumento com a validade de uma demonstração. O primeiro passo é ajudar os alunos a entenderem o que é hipótese e tese de uma proposição. Com isso, eles têm condições de identificar o que tem que ser provado e o que pode ser usado para fazer a prova.

Para desenvolver esta tarefa o professor pode explicar sobre os métodos dedutivos de demonstração, baseando-se na Seção 2.4 do Capítulo 2 deste trabalho.

Nesta questão, a hipótese é: os pontos X e Y na circunferências são distintos e não colineares com o centro O da circunferência e a tese é: a distância entre X e Y é menor que 2r. A técnica dedutiva utilizada é a demonstração por absurdo, pois a tese é negada e com isso se chega a uma contradição.

3.9 Tarefa 9: A lógica dos argumentos

Objetivo: Estudar a importância da lógica clássica na argumentação cotidiana.

Tarefa 9
1) (Machado e Cunha, 2008) Analise as notícias a seguir:
Notícia 1
"Morre, Rachel, 92, a primeira imortal" (O estado de São Paulo, 5/11/2003).

Notícia 2
"No mundo inteiro, as operações da Parmalat estão conseguindo funcionar. Infelizmente, não é o caso do Brasil" (Assessor de Enrico Bondi, O estado de São Paulo, 4/02/2004).

Agora responda: O que se pode concluir a respeito das duas notícias publicadas?

2) (Machado e Cunha, 2008) Analise cada argumento a seguir e indique se eles são válidos ou inválidos.
Argumento 1
Todos os paranaenses são brasileiros.
Joana é paranaense.
Logo, Joana é brasileira.
Argumento 2
Todos os paranaenses são brasileiros.
Clara não é paranaense.
Logo, Clara não é brasileira
Argumento 3
Existem brasileiros que são famosos.
Todas as pessoas famosas são chatas.
Logo, existem brasileiros que são chatos.
Argumento 4
Nenhum garimpeiro é atleta.
Todos os atletas são saudáveis.
Logo, nenhum garimpeiro é saudável.
Argumento 5
Todos os tubarões são antropófagos.
Existem índios que são antropófagos.
Logo, existem índios que são tubarões.

Argumento 6
Todos os peixes são mamíferos.
Todos os mamíferos são aves.
Existem minerais que são peixes.
Logo, existem minerais que são aves.

3) Há cinco suspeitos de um crime: o cozinheiro, a governanta, a empregada, o motorista e o jardineiro. O delegado que está investigando o caso concluiu que três destas cinco pessoas cometeram o crime. Ele já sabe que a governanta e a empregada são culpadas e, com as investigações, chegou às seguintes hipóteses:
P_1: Se o cozinheiro é culpado, então a governanta é inocente.
P_2: Se a empregada é culpada, então o motorista é inocente.
P_3: A governanta e a empregada são culpadas.
P_4: Se o cozinheiro e o motorista são inocentes, então o jardineiro é culpado.
Com base na análise das hipóteses, descubra quem foi a terceira pessoa a cometer o crime.

4) (FGV) O cenário político de uma pequena cidade tem sido movimentado por denúncias a respeito da existência de um esquema de compra de votos dos vereadores. A dúvida quanto a esse esquema persiste em três pontos, correspondentes às proposições P, Q e R, abaixo:
P: O vereador Vítor não participou do esquema.
Q: O prefeito Pérsio não sabia do esquema.
R: O chefe de gabinete do prefeito foi o mentor do esquema.
Os trabalhos de investigação de uma CPI da câmara municipal conduziram às premissas P_1, P_2 e P_3, seguintes:
P_1: Se o vereador Vítor não participou do esquema, então o prefeito Pérsio não sabia do esquema.
P_2: Ou o chefe de gabinete foi o mentor do esquema, ou o prefeito Pérsio sabia do esquema, mas não ambos.
P_3: Se o vereador Vítor não participou do esquema, então o chefe de gabinete não foi o mentor do esquema.
Considerando essa situação hipotética, julgue os itens seguintes, acerca de proposições lógicas.
A partir das premissas P_1, P_2 e P_3, é correto inferir que:
a) o prefeito Pérsio não sabia do esquema.
b) o chefe de gabinete foi o mentor do esquema ou o vereador Vítor participou do esquema.

Encaminhamentos

Nesta tarefa, o professor tem a oportunidade de fazer os alunos refletirem sobre a relação entre conceitos da lógica clássica e a argumentação cotidiana, demonstrando, assim, sua importância. Para embasamento teórico, sugerimos a leitura da Seção 2.2 e Seção 2.4

deste trabalho.

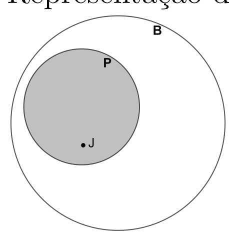
Na **questão 1**, são apresentados exemplos de textos de um importante jornal que apresenta contradições aparentes na informação anunciada. Na notícia 1, se chamarmos de p: "Rachel morre" temos $\sim p$: "Rachel é imortal". Notemos que ocorre $p \wedge \sim p$ nesta notícia, o que, pelos princípios da lógica clássica, a tornaria uma proposição falsa, já que p e $\sim p$ não podem ocorrer ao mesmo tempo.

O mesmo acontece na notícia 2, pois " não é o caso do Brasil" nega "No mundo inteiro, as operações da Parmalat estão conseguindo funcionar". Logo, temos novamente uma proposição não lógica do tipo $p \wedge \sim p$, que é uma contradição.

Na **questão 2**, o professor tem a oportunidade de mostrar para os alunos que é possível analisar a validade de um argumento, utilizando conceitos de relações entre conjuntos para evidenciar a relação entre premissas e conclusão. Vejamos como isso pode ser feito:

No argumento 1, vamos denotar por B o conjunto de todos os brasileiros, por P conjunto de todos os paranaenses e por J o elemento Joana do conjunto P. Temos o seguinte diagrama:

Figura 3.2: Representação do Argumento 1.

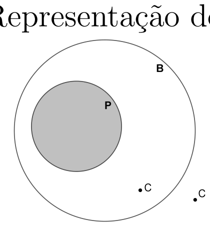


Fonte: A autora.

Visualizando o diagrama da Figura 3.2, verificamos que o argumento 1 é válido, pois ele nos mostra que Joana pertence ao conjunto dos brasileiros.

No argumento 2, vamos denotar por B o conjunto de todos os brasileiros, por P o conjunto de todos os paranaenses e por C o elemento Clara. O elemento Clara pode ou não pertencer ao conjunto B, conforme diagrama da Figura 3.3, a seguir:

Figura 3.3: Representação do Argumento 2.

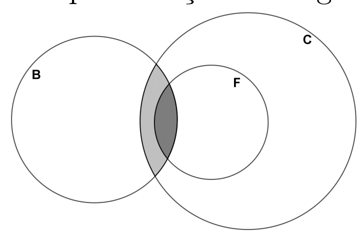


Fonte: A autora.

Com isso, concluímos que o argumento 2 é inválido.

No argumento 3, vamos denotar por B o conjunto de todos os brasileiros, por F o conjunto de todos as pessoas famosas e por C o conjunto de todas as pessoas chatas. Como uma premissa do argumento traz que existem brasileiros que são famosos, temos que o conjuntos B e F possuem interseção, conforme diagrama a seguir:

Figura 3.4: Representação do Argumento 3.

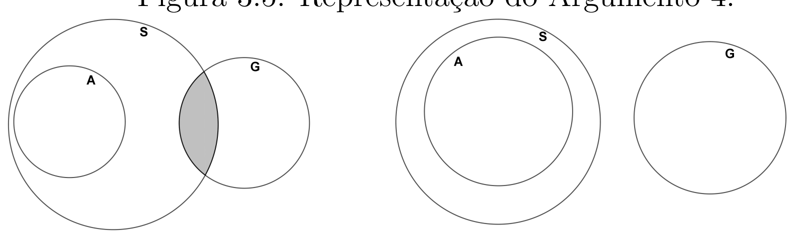


Fonte: A autora.

Visualizando este diagrama, concluímos que o argumento 3 é válido, pois a estrutura do argumento exige que não seja vazia interseção entre os conjuntos B e C.

No argumento 4, vamos denotar por A o conjunto de todos os atletas, por S o conjunto de todas as pessoas saudáveis e por G o conjunto de todas os garimpeiros. De acordo com a relação entre as premissas e a conclusão do argumento, podemos ter dois casos: 1) os conjuntos G e S possuem interseção não vazia, ou 2) os conjuntos G e S possuem interseção vazia, conforme diagramas da Figura 3.5, a seguir:

Figura 3.5: Representação do Argumento 4.

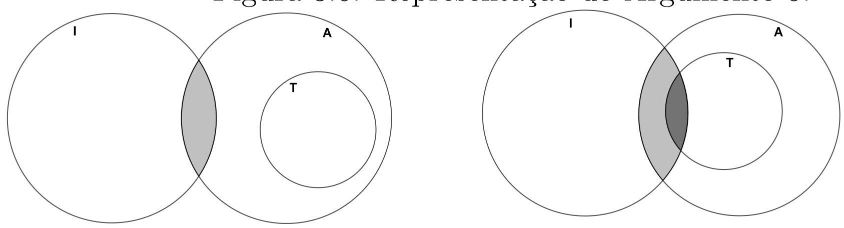


Fonte: A autora.

Logo, podemos concluir que o argumento 4 é inválido, pois existe uma circunstância que torna as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, contrariando a definição de argumento válido.

No argumento 5, vamos denotar por A o conjunto de todos os seres antropófagos, por T o conjunto de todos os tubarões e por I o conjunto de todos os índios. De acordo com a relação entre as premissas e a conclusão do argumento, podemos ter dois casos: 1) os conjuntos T e A possuem interseção vazia, ou 2) os conjuntos T e A possuem interseção não vazia, conforme diagramas da Figura 3.6, a seguir:

Figura 3.6: Representação do Argumento 5.

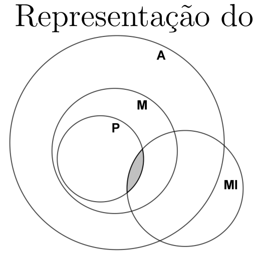


Fonte: A autora.

Logo, podemos concluir que o argumento 5 é inválido, pois existe uma circunstância que torna as premissas verdadeiras e a conclusão falsa, contrariando a definição de argumento válido.

No argumento 6, vamos denotar por A o conjunto de todas as aves, por M o conjunto de todos os mamíferos, por MI o conjunto de todas os minerais e por P o conjunto de todos os peixes. Como uma premissa do argumento traz que existem minerais que são peixes, temos que os conjuntos P e MI possui interseção não vazia, conforme diagramas da Figura 3.7, a seguir:

Figura 3.7: Representação do Argumento 6.



Fonte: A autora.

Analisando o diagrama, concluímos que o argumento 6 é válido, pois admitindo que as premissas são verdadeiras, a conclusão só pode ser verdadeira.

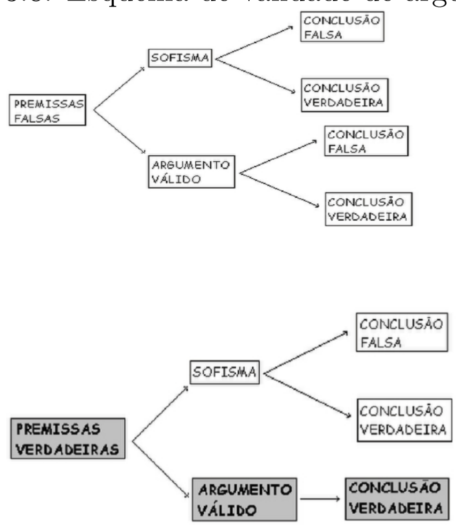
Nesta questão, o professor também poderá explorar com os alunos o fato de que a lógica clássica se preocupa com a forma e não veracidade das premissas e conclusão que compõem um argumento, pois os argumentos 4 e 6 podem causar certo desconforto aos alunos e o professor pode se aproveitar disso para fomentar uma discussão. A seguir, seguem alguns questionamentos:

a) Explique (talvez dando exemplos) o motivo pelo qual qualquer uma das três combinações abaixo é possível em argumentos válidos: 1. Premissas verdadeiras e conclusão verdadeira; 2. Algumas ou todas as premissas falsas e conclusão verdadeira; 3. Algumas ou todas as premissas falsas e conclusão falsa.

b) Os argumentos são válidos em função da sua forma, e não de seu conteúdo. Explique o que isto significa.

Com base na discussão feita, o professor poderá fazer uma sistematização de tudo que foi discutido em um esquema como o que é apresentado na Figura 3.8, a seguir:

Figura 3.8: Esquema de validade de argumentos



Fonte: Machado; Cunha, 2008, p. 25

Na **questão 3**, analisando as hipóteses que o delegado apontou, podemos fazer a identificação das proposições atômicas que compõem as hipóteses da seguinte forma:

p: O cozinheiro é culpado.
q: A governanta é inocente.
r: A empregada é culpada.
s: O motorista é inocente.
x: O jardineiro é culpado.

Feito isso, as premissas podem ser traduzidas para a linguagem simbólica da lógica da seguinte forma:

$$P_1{:}p{\rightarrow}q$$
$$P_2{:}r{\rightarrow}s$$
$$P_3{:}{\sim}q \wedge r$$
$$P_4{:}\ ({\sim}p{\wedge}q){\rightarrow}x$$

Nesta tarefa, o professor deve instigar os alunos para analisarem as premissas e supor o terceiro culpado, para daí sim, fazer a verificação formalmente. Restam três suspeitos:

o cozinheiro, o motorista e o jardineiro. Esperamos que os alunos conjecturem que o cozinheiro é inocente, pelo que está expresso na premissa 1 e o motorista é inocente pelo que está expresso na premissa 2. Logo, resta verificar se o jardineiro é culpado.

Utilizando o método dedutivo conseguimos chegar ao terceiro culpado, conforme quadro a seguir:

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \to q$	Hipótese 1
2	$r \to s$	Hipótese 2
3	$\sim q \wedge r$	Hipótese 3
4	$(\sim p \wedge s) \to x$	Hipótese 4
5	$\sim q$	Simplificação em 3
6	$\sim q \to \sim p$	Contrapositiva em 1
7	$\sim p$	Modus Ponens em 5,6
8	r	Simplificação em 3
9	s	Modus Ponens em 2,8
10	$\sim p \wedge$s	Conjunção em 7,9
11	x	Modus Ponens em 4,10

Logo, o jardineiro é o terceiro culpado. Nesta questão, o professor pode ressaltar a eficiência do método dedutivo, pois utilizando o método da tabela-verdade para fazer a verificação temos uma tabela-verdade enorme visto que o argumento a ser analisado contém 5 proposições atômicas.

Na **questão 4**, notemos que, utilizando os símbolos do enunciado do problema para as proposições que compõem as premissas, concluímos que as premissas podem ser representadas da seguinte forma:

$$P_1\colon\ P \to Q$$
$$P_2\colon\ R \vee \sim Q$$
$$P_3\colon\ P \to \sim R$$

Devemos notar que a disjunção presente na premissa P_2 é exclusiva. Como no item (a) queremos determinar se é correto ou não inferir que o prefeito Pérsio não sabia do esquema, podemos responder esta pergunta, verificando se o argumento que contém como premissas P_1, P_2 e P_3 e conclusão Q é válido. Para tal, podemos construir uma tabela verdade completa contendo todas as premissas do argumento e verificar se quando todas as premissas são simultaneamente verdadeiras a conclusão também o é.

P	Q	R	$\sim Q$	$\sim R$	$P \rightarrow Q$	$R \vee \sim Q$	P$\rightarrow \sim R$	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
V	V	V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	V

Analisando as segunda e última colunas da tabela, verificamos que o argumento não é válido, pois existe um caso em que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ é verdadeira e a conclusão Q é falsa, contrariando a definição de argumento válido.

Da mesma forma, podemos proceder no item (b), verificando se o argumento que contém como premissas P_1, P_2 e P_3 e conclusão $R \vee \sim P$ é válido.

P	Q	R	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim R$	$P \rightarrow Q$	$R \vee \sim Q$	$P \rightarrow \sim R$	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$	$R \vee \sim P$
V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

Analisando a penúltima e última colunas da tabela construída, verificamos que sempre que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ é verdadeira R$\vee \sim$P também é. Logo, por definição este argumento é válido, ou seja, pode inferir que o chefe de gabinete foi o mentor do esquema ou o vereador Vítor participou do esquema.

Por meio do método dedutivo também é possível chegar a esta conclusão, conforme é apresentado no quadro a seguir:

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \to q$	Hipótese1
2	$r \vee \sim q$	Hipótese 2
3	$p \to \sim r$	Hipótese 3
4	$\sim q \to \sim p$	Contrapositiva em 1
5	$r \to \sim p$	Contrapositiva em 3
6	$(\sim q \to \sim p) \wedge (r \to \sim p)$	Conjunção em 4,5
7	$(\sim q \vee r) \to \sim p$	Inferência por casos em 6
8	$\sim q \vee r$	Comutatividade em 2
9	$\sim p$	Modus Ponens em 7,8
10	$\sim p \vee r$	Adição em 9
11	$r \vee \sim p$	Comutatividade em 10

3.10 Tarefa 10: A lógica na resolução de equações

Quando se resolve uma equação é importante ter em mente que cada passo do processo de resolução adotado representa uma implicação lógica (LIMA, 2013).

Para exemplificar, vejamos que para resolver a equação

$$x^2 + x - 6 = 0$$

com x assumindo valores em $\mathbb{R}$, podemos seguir os seguintes passos:

(P) ..... $x^2 + x - 6 = 0$.

(Q) ..... $(x + 3)(x - 2) = 0$.

(R) ..... $x = -3$ ou $x = -2$.

(S) ..... $x \in$\{-3,2\}.

Se chamarmos, respectivamente, de P, Q, R e S as condições impostas sobre o número x em cada uma das linhas acima, os passos que acabamos de seguir significam que

$$\text{P} \Rightarrow \text{Q} \Rightarrow \text{R} \Rightarrow \text{S},$$

isto é, se o número x satisfaz P, então satisfaz Q e assim por diante. Por transitividade a conclusão a tirar é P⇒S, ou seja,

$$\text{Se } x^2 + x - 6 = 0 \text{ então } x \in \{\text{-3,2}\}$$

Vale ressaltar que a sentença acima nos diz que, se esta equação possui raízes reais, elas devem pertencer ao conjunto {-3,2}. No entanto, neste caso, as implicações recíprocas S⇒R⇒Q⇒P são válidas, logo S⇒P. Portanto, P⇔S, ou seja, -3 e 2 são de fato as únicas raízes da equação.

Às vezes em um passo de resolução a implicação não pode ser revertida (ou seja, a recíproca não é verdadeira). Nestes casos, o conjunto obtido no final apenas contém o conjunto das raízes (mas não é igual). Este fato ocorre frequentemente quando se estudam as chamadas equações irracionais e na maioria dos livros didáticos não se apresenta o porquê, pois a conexão entre implicação e equivalência lógica e os passos na resolução de uma equação, na maioria das vezes não é explorada em aulas que abordam resolução de equações, favorecendo a memorização de técnicas de resolução sem compreensão dos procedimentos utilizados. Diante deste cenário, a tarefa abaixo propõe que esta conexão seja explorada, além de apresentar um acréscimo de passo na resolução de equações irracionais que acredita-se propiciar mais significado aos procedimentos de resolução, além de reduzir os cálculos que devem ser feitos.

Tarefa[8]: Aplicação da lógica na resolução de equações irracionais.

Objetivo: Compreender relações lógicas envolvidas no processo de resolução de equações irracionais.

Tarefa 10

Analise a sequência de passos para a resolução da equação $\sqrt{x}+2=x$ em $\mathbb{R}$

$\sqrt{x}+2=x$

$\sqrt{x}=x-2$

$x=(x-2)^2$

$x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$x=4$ ou $x=1$

x∈{1,4}

Agora, responda:

1) Tanto o 1 como o 4 são raízes desta equação? Justifique.
2) Explique o aparecimento de "raízes estranhas" na resolução de equações irracionais.
3) Quais as relações lógicas entre cada etapa de resolução. O que elas significam?
4) Apresente uma maneira de fazer com que todos os passos de resolução desta equação sejam equivalentes.
5) Agora resolva novamente esta equação utilizando passos equivalentes. O que mudou?

Encaminhamentos

Depois de analisados os passos de resolução, esperamos que, na questão 1, os alunos respondam que a resolução está correta, mas que após fazer o teste verificaram que o número 1 não satisfaz a equação.

[8]Esta tarefa foi elaborada, baseando-se nas ideias apresentadas na aula sobre equações do professor Luciano Monteiro do IMPA para o PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio), disponível no link https://www.youtube.com/watch?v=JK1mjqnWhBE

Para responder a questão 2, o professor poderá solicitar que os alunos expliquem por que apareceu o número 1 como possibilidade de solução da equação, sendo que o mesmo não a satisfaz. Provavelmente esta questão vai causar inquietação nos alunos. Para ajudá-los, o professor poderá relembrar que $(-a)^2 = a^2$. Com isso, na equação ao elevar ao quadrado, a igualdade $x = (x-2)^2$ é satisfeita não apenas quando $\sqrt{x} = x - 2$, mas também quando $\sqrt{x} = -(x-2)$, ou seja, $\sqrt{x} = 2 - x$. Este último caso é válido quando $x = 1$ o que explica a "raiz estranha" 1.

Para melhor compreensão, o professor poderá recordar a definição de raiz quadrada.

Definição 3.1 *Seja $x \in \mathbb{R}$; $x \geq 0$, definimos $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow a^2 = x$ e $a \geq 0$.*

Para responder à terceira questão o professor poderá perguntar que relação tem a equação $\sqrt{x} + 2 = x$ e a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$. Alguns alunos poderão responder que são equivalentes. Com isso o professor deverá relembrar que, para serem equivalentes, as duas equações devem ter exatamente as mesmas raízes. E isso, como já foi mostrado, não é o que acontece com estas duas equações.

A relação lógica entre $\sqrt{x} + 2 = x$ e $x^2 - 5x + 4 = 0$ é a implicação, ou seja, se $\sqrt{x} + 2 = x$, então estas soluções pertencem aos conjunto $\{1,4\}$.

Além disso, deve ser notado que todas as implicações são invertíveis, exceto a segunda, conforme explicitado a seguir:

$\sqrt{x} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2$

$\Rightarrow x = (x-2)^2$

$\Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 1$

$\Leftrightarrow x \in \{1,4\}$

Para responder à questão 4, esperamos que os alunos compreendam que basta utilizar a definição de raiz quadrada. Desta forma, todos os passos da resolução serão equivalentes.

Na questão 5 é esperado, com a ajuda do professor, que os alunos apresentem os seguintes passos de resolução:

$\sqrt{x} + 2 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2$

$\Leftrightarrow x = (x-2)^2$ e $x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4$ e $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ e $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 1$ e $x \geq 2$

$\Leftrightarrow x = 4$

Esperamos que os alunos concluam que utilizar a definição para resolução de equações irracionais de índice 2 exige menos cálculos e faz mais sentido.

No entanto, os alunos podem não ser convencidos de que usar este método de resolução de equações irracionais é mais vantajoso. Sendo assim, é interessante que o professor peça que eles resolvam a seguinte equação

$\sqrt{5 - 2\sqrt{3}x - 2x} = 1 - x$ em $\mathbb{R}$ utilizando os dois métodos.

Utilizando a definição de raiz quadrada, poderão apresentar a seguinte sequência de respostas:

$\sqrt{5 - 2\sqrt{3}x - 2x} = 1 - x$

$\Leftrightarrow (5 - 2\sqrt{3}x - 2x = (1 - x)^2)$ e $(1 - x \geq 0)$

$\Leftrightarrow (5 - 2\sqrt{3}x - 2x = 1 - 2x + x^2)$ e $(x \leq 1)$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{3}x - 4 = 0)$ e $(x \leq 1)$

$\Leftrightarrow (x = -\sqrt{3} - \sqrt{7}$ ou $x = -\sqrt{3} + \sqrt{7})$ e $(x \leq 1)$

É fácil ver que $x = -\sqrt{3} - \sqrt{7}$ e $x = -\sqrt{3} + \sqrt{7}$ satisfazem a equação.

Agora, utilizando o método de elevar ao quadrado, eles deverão verificar se as possibilidades encontradas satisfazem a equação e, para isso, deverão substituir x por $-\sqrt{3} - \sqrt{7}$ e verificar se a equação é satisfeita; do mesmo modo deverão substituir x por $-\sqrt{3} + \sqrt{7}$ e verificar se a igualdade é satisfeita. Utilizando este método, o processo de resolução é muito mais trabalhoso e mecânico.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base no que foi exposto neste trabalho, foi possível conhecer como a lógica se desenvolveu desde seu surgimento com Aristóteles, relembrar seus princípios fundamentais e conceitos, bem como propor uma série de tarefas que propiciam a compreensão da importância da lógica clássica na argumentação cotidiana e na argumentação matemática, levando em consideração que estas tarefas podem ser utilizadas em séries finais do ensino fundamental e ensino médio.

O currículo nacional atual não exige explicitamente que a lógica clássica seja estudada na educação básica, mas acreditamos que os conceitos da mesma deveriam ser abordados, uma vez que contribuem para o entendimento de conteúdos da matemática, bem como ajudam o aluno a desenvolver habilidades relacionadas à elaboração de justificativas para as respostas que apresentam, além de proporcionar que sejam mais questionadores.

As tarefas propostas no Capítulo 3 foram elaboradas com a intenção de mostrar que é possível abordar conceitos de lógica nos mais variados contextos, entre eles em poemas, livros de literatura infantil e até na própria legislação. Elas não focaram somente no processo, muitas vezes mecânico, de construir tabelas-verdade para verificação de validade de argumentos, dando oportunidade para o aluno fomentar o processo de reflexão e raciocínio para justificar suas afirmações e analisar, criticamente, argumentos, entendendo o significado de conceitos envolvidos e não somente memorizando técnicas.

Ressaltamos que as atividades aqui apresentadas, podem ser exploradas em oficinas com os alunos ou no decorrer do ensino regular, ficando a critério do professor decidir o momento adequado para desenvolvê-las. Como sugestão, acreditamos que é interessante trabalhar este conteúdo juntamente com o conteúdo de teoria de conjuntos que os alunos estudam no início do Ensino Médio.

Em suma, esperamos que este trabalho sirva de apoio para professores que, assim como nós, acreditam que a lógica deveria ser abordada na educação básica de modo que, ao ser colocado em prática, o aluno conheça que é possível reconhecê-la nos mais variados contextos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALCOFORADO, P. *Lógica e filosofia da linguagem: Gottlob Frege*. 2ª ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009. 248 p.

[2] ALENCAR FILHO, E. de. *Iniciação a lógica matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

[3] ALVES, T. O. *Lógica e sua aplicação na argumentação* 2016, 101 folhas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/3248>. Acesso em: 10 jan., 2018.

[4] ASSIS NETO, F., R. *As lógicas de Aristóteles, Boole e Frege*. Coleção História da Matemática para Professores. V. 12. Belém: SBHMT, 2009.

[5] ANDRADE, D.; CARMELO, E. L. M. *Elementos de Lógica*. Notas de aula, 1999. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos-ps/logica. pdf. Acesso em: 03 mar., 2018.

[6] BOYER, C. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496 p.

[7] BRASIL. Lei n. 10.406, 10 de janeiro de 2002. *Código Civil*. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil-03/leis/2002/L10406.htm>. Acesso em: 10 jun., 2016.

[8] BRASIL. Decreto-lei n. 2.848, de 7 de dezembro de 1940. *Código Penal*. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil-03/decreto-lei/Del2848compilado.htm>. Acesso em: 10 jun., 2016.

[9] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

[10] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio (PCN+). Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

[11] BRASIL. Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

[12] CARROL, L. *Aventuras de Alice no País das Maravilhas e Através do Espelho e o que Alice encontrou por lá.* Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2010.

[13] D'OTTAVIANO, I., M., L.; FEITOSA, H., A.*História da lógica e o surgimento das lógicas não-clássicas.* Coleção História da Matemática para professores. Abril/2003.

[14] DRUK, I. A Linguagem Lógica. *Revista do Professor de Matemática*, 1998 n^{o} 15. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/17/3.htm>. Acesso em: 15 jul., 2018.

[15] EVES, H. *Introdução à história da matemática.* Tradução: Hygino Domingues. Campinas: Editora da Unicamp,2004. 844 p.

[16] GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S.. *Fundamentos de Matemática: Uma introdução a lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções.*Maringá, PR: Eduem, 2008. 296 p.

[17] KNEALE, W.; KNEALE, M.*O desenvolvimento da lógica.*Tradução: M.S. Lorenço. 2 ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. 1980, 788 p.

[18] LIMA, E. L. *Números e funções reais.* Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[19] MACHADO, L. V. *A Lógica em Carlos Drumond de Andrade.* Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio, 2017. Disponível em: <http://strato.impa.br/videos/2017-papmem/jan/sojose.pdf>. Acesso em: 04 jul., 2018.

[20] MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. *Lógica e Linguagem Cotidiana*: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

[21] MATHEUS, A. R; CANDIDO, C. C. A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. *Revista do Professor de Matemática*, 2013. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/6-mc11.pdf> Acesso em: 15 jul., 2018.

[22] MEIRELES, Cecília. *Ou isto ou aquilo*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2002.

[23] MORAIS FILHO, D. C. *Um Convite à Matemática*. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM – Coleção Professor de Matemática, 2013.

[24] MORTARI, C., A.*Introdução à lógica*. 2. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2016. 526 p.