UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

Mário Vicente Ferrara

UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO

Maringá-PR
2018

MÁRIO VICENTE FERRARA

Uma proposta para a abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria

Maringá
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Ferrara, Mário Vicente
F374p Uma proposta para a abordagem de funções hiperbólicas no ensino médio / Mário Vicente Ferrara. -- Maringá, 2018.
72 f. : il., color.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Josiane Cristina de Oliveira Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, 2018.

1. Funções hiperbólicas. 2. Educação matemática. 3. Catenária. 4. Ensino médio. 5. Aplicações. I. Faria, Josiane Cristina de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353
Edilson Damasio CRB9-1.123

MÁRIO VICENTE FERRARA

UMA PROPOSTA PARA A ABORDAGEM DE FUNÇÕES HIPERBÓLICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Josiane Faria

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)

Jair da Silva

Prof. Dr. Jair da Silva
Universidade Federal do Paraná – Jandaia do Sul

Claudete Webler

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 10 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial minha orientadora profa Dra. Josiane, meus pais Wilson e Estelina, meu irmão Marcos, também dedico a minha futura esposa Arielli, pelo companherismo e pela compreensão.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

Primeiramente à Deus, Nossa Senhora Aparecida, Santa Rita de Cássia e Santo Expedito, por ter atendito às minhas orações nas viagens intermináveis e nos momentos de angústias.

Aos meus amigos da turma do Profmat, pelas rodas de estudos, trocas de conhecimento e motivação, em especial ao Ângelo por sempre estudar nos mais aleatórios horários, a Cristina, Reginaldo e Fernanda pelas horas intermináveis de estudos para as provas e para a qualificação.

A todos os professores por passarem conhecimento necessário para alcançar meus objetivos.

Agradeço também aos meus grandes amigos que a vida me proporcionou, Douglas e Estéfano, afinal são mais de dez anos de amizade, pois sempre me acolheram com enorme prazer em suas residências no decorrer do curso e também me apoiaram nos momentos difíceis. Ao Eduardo amigo desde a graduação e depois do Profmat também, sempre apoiando e ajudando.

Aos amigos dos locais onde trabalho pela compreensão e ajuda durante todo este tempo.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro, pois sem ele este sonho se tornaria inviável.

“Faça o teu melhor, na condição que você tem,

enquanto você não tem condições melhores,

para fazer melhor ainda!”

Mário Sérgio Cortella.

Resumo

Este trabalho é um estudo sobre as funções hiperbólicas, e seu desenvolvimento foi relizado através da analogia com as funções trigonométricas circulares, contando um pouco de história das funções hiperbólicas desde seu surgimento. Apresenta uma proposta que visa introduzir este conteúdo na matriz curricular de matemática no Ensino Médio, mais precisamente para alunos da 3ª série do Ensino Médio, bem como aplicações como por exemplo a catenária e onde ela está presente, isso se deu através de fotografias onde se usa catenária no planeta Terra. Tal estudo seria possível, haja vista que os alunos já possuem o conhecimento de algumas funções e também o conhecimento de homotetia, trabalhado no Ensino Fundamental, bemo como o conhecimento das secções cônicas, especificamente a hipérbole e essa inserção facilitaria a continuidade do estudo de tais funções em alguns cursos de nível superior.

Palavras chave: Funções Hiperbólicas, Educação Matemática, Catenária, Ensino Médio, Aplicações.

Abstract

This work is a study on hyperbolic functions, and it has been developed through analogy with circular trigonometric functions. This dissertation tells a brief story on hyperbolic functions since its establishment. This work aims to introduce the proposed content in the Mathematics curriculum programme, more precisely for the 3rd grade of High School, as well as hyperbolic functions applications, for instance on pictures of planet Earth's catenary trajectory. Such a study would be possible based on the fact that students already have knowledge of trigonometric functions, and also the knowledge of homothety, which is taught in Elementary School. The knowledge in conic sections, specifically the hyperbole, and the proposed insertion would facilitate the continuity of such functions study in higher education courses.

key words: Hyperbolic Functions, Mathematics Education, Catenary, High school, Applications.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho faremos uma exposição didática acerca da construção das funções hiperbólicas e também sobre sua aplicabilidade a certos problemas físicos que iremos ver no decorrer do trabalho, como por exemplo, a catenária. Também dissertaremos sobre as analogias que existem entre as propriedades das funções hiperbólicas e as das funções trigonométricas.

Textos que oferecem paralelos históricos tendem a creditar o desenvolvimento das funções hiperbólicas ao matemático do século XVIII Johann Lambert. Implícito neste fato é a sugestão de que Lambert e outros estavam interessados nas funções hiperbólicas, a fim de resolver problemas como prever a forma da catenária. O drama dos primeiros anos das funções hiperbólicas são muito mais complicados do que essas linhas de enredo conforme Barnett (2004) escreveu em sua dissertação de mestrado.

> "Lambert observara em diversos pontos em *Memóire*(1761) que estava muito interessado em desenvolver a analogia entre as duas classes de funções, a circular versus hiperbólica, tanto quanto possível sem o uso de quantidades imaginárias, e é a representação geométrica (que é a parametrização) que lhe fornece um meio para este fim."(BARNETT, 2004)

Por mais que a principal razão de Lambert considerar as funções hiperbólicas em 1768 fosse simplesmente para simplificar os cálculos envolvidos na solução de triângulos, Lambert percebeu claramente que não havia necessidade de definir novas funções para essa finalidade; tabelas de logaritmos de valores trigonométricos apropriados poderiam ser usadas para servir o mesmo fim. Mas, ele argumentou, este foi apenas um uso possível para as funções hiperbólicas em matemática.

O único exemplo que ele citou a esse respeito foi a simplificação de métodos de solução para equações. No entanto ele citou que outro matemático do século XVIII havia investigado e estudado, este matemático era Vincenzo de Riccati.

Riccati primeiro tratou funções hiperbólicas em seus dois volumes *Opuscula ad res physicas et mathematicas pertinentium*(1757-1762). Neste trabalho, Riccati empregou uma hipérbole para definir funções que ele chamou de "*sinus hyperbolico*"e "*cosinus hyperbolico*", fazendo isso de maneira análoga ao uso de um círculo para definir funções "*sinus circulare*"e "*cosinus circulare*".

Na obra denominada *Institutiones analyticae*(1765-1767), escrito com a ajuda de Girolamo Saldini, Riccati foi além do que já havia sobre a teoria das funções hiperbólicas, incluiu as fórmulas de adição e outras identidades para funções hiperbólicas nas quais iremos abordar neste presente trabalho e sua relação com a função exponencial.

Embora algumas das ideias em *Institutiones* de Riccati de 1765-1767 também apareceram em 1761 no *Memóire* de Lambert, não podemos afirmar que Riccati estava construindo o trabalho de Lambert. Publicações anteriores de Riccati sugerem apenas que ele estava familiarizado com a analogia entre as funções circulares e hiperbólicas algum tempo antes de Lambert se deparar com a ideia, e certamente não mais tarde.

Por outro lado, embora o primeiro trabalho de Riccati tenha sido publicado vários anos antes de *Memóire* de Lambert, aparentemente Lambert não estava familiarizado com o trabalho de Riccati na época. Provavelmente, ambas as motivações parecem ter sido muito diferentes para trabalharem com as funções hiperbólicas.

Além disso, Lambert parece ter sido não muito convencional em dar crédito aos colegas ao desenharem seu trabalho. De fato, Lambert creditou a Ricatti por desenvolver a terminologia "seno hiperbólico"e "cosseno hiperbólico"quando ele utilizou estes nomes pela primeira vez em sua obra *Observations trigonometriques* de 1768. Assim, aparentemente, parece que foram apenas esses novos nomes e talvez a ideia de usar essas funções para resolver equações, que Lambert utilizou do trabalho de Riccati, achando-as uma nomenclatura adequada para dados matemáticos que ele já havia desenvolvido dentro de uma linha de história de sua própria criação.

Von Braunmühl disse em 1903 em sua obra denominada *História da Trigonometria* que:

> "Na verdade, Gregory St. Vincent, David Gregory e Craig, através da quadratura da hipérbole equilátera, erigiram os fundamentos para as funções hiperbólicas, mesmo sem saber do fato, Isaac Newton tocou nos paralelos entre o círculo e a hipérbole equilátera, e de Moivre parecia ter alguma compreensão que, substituindo o real pelo imaginário, o papel do círculo é substituído pela hipérbole equilátera. Usando considerações geométricas Vincenzo Riccati (1707-1775) foi o primeiro a encontrar a teoria das funções hiperbólicas, como foi reconhecido pelo próprio Lambert."

Por mais que a quantidade de reconhecimento que Lambert ofereceu a Riccati possa ser valorizada aqui, é interessante que Von Braunmühl possa ter discutido o trabalho de Lambert sobre as funções hiperbólicas, sem mencionar mais Riccati, haja vista que ele disse o seguinte:

> "Esta teoria das funções hiperbólicas é apenas de interesse para nós, na medida em que veio em uso no tratamento de problemas trigonométricos, como foi abordado primeiramente por Lambert."

Lambert foi motivado pelo estudo das funções triogonométricas nos interesses matemáticos a partir do momento que eles foram se evoluindo, embora seus interesses ultrapassassem o próprio século em que estavam. O fato é que os trabalhos de Lambert, especialmente aqueles sobre a geometria não euclidiana, foram estudados por seus sucessores matemáticos imediatos, pois eram de mais fácil acesso, pois é mais amplamente disponível e possui traduções para vários idiomas utilizando uma linguagem mais simples do que a de Riccati, por isso torna mais fácil contar a história de Lambert para o estudo das funções hiperbólicas.

O fato é que, desde a antiguidade se estuda as funções hiperbólicas e seus respectivos elementos, por isso abordar seu conceito histórico e suas definições para alunos do ensino médio se torna importante, e por este motivo iremos desenvolver algumas propriedades e mostraremos alguns resultados, para propormos uma maneira de trazer para o universo da sala de aula.

É fato que, no terceiro ano do Ensino Médio, os alunos já viram outros tipos de funções, tais como, polinomial do primeiro grau, quadrática, exponencial, logarítmica, modulares e trigonométricas, desta forma, não vemos restrições para a apresentação das funções hiperbólicas neste estágio, a fim de que os alunos possam ampliar seus conhecimentos em elementos importantes que não são vistos, a começar pelas próprias funções trigonométricas circulares, os quais podem causar dúvidas neles pelo simples fato de se chamarem circulares.

Este trabalho é organizado com as definições de homotetia e transformações de tensão, para que no próximo momento seja apresentado as funções hiperbólicas e suas propriedades, chegando aos resultados que iremos utilizar para elaborar uma proposta de aplicação destas funções no Ensino Médio, cabendo ao professor de cada classe fazer as adaptações necessárias para uma melhor aprendizagem dos alunos.

Capítulo 2

Homotetias e transformação de tensão

Neste capítulo vamos explorar os conceitos de homotetia e transformação de tensão para embasar o estudo que faremos sobre as propriedades das funções hiperbólicas.

2.0.1 Homotetias

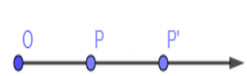
Dizemos que homotetia é uma ampliação, positiva ou negativa, de qualquer ente geométrico, como por exemplo, segmentos de retas, figuras planas, figuras espaciais entre outros. A homotetia é um tipo de transformação geométrica que irá alterar o tamanho de uma figura, porém preserva sua forma e seus ângulos. Para solucionar tais problemas iremos apresentar algumas definições e suas demonstrações.

Estas definições que iremos apresentar encontram-se em um livro para o 9º ano do Ensino Fundamental, ou seja, desde essa etapa do desenvolvimento do aluno ele já se depara com princípios que poderão dar fundamento e base para o aprendizado sobre funções hiperbólicas.

Dante, em sua obra denominada *Projeto Teláris: Matemática*, aborda a homotetia da seguinte forma:

Propriedade 2.0.1. *Chamaremos de homotetia com centro O e razão k positiva toda transformação que leva o ponto P (distinto de O) a um único ponto P' da semirreta $\overrightarrow{OP}$, de modo que $OP' = k.OP$. Ao ponto P' damos o nome de imagem (ou homotético) do ponto P segundo essa homotetia.*

Figura 2.1: Semirreta

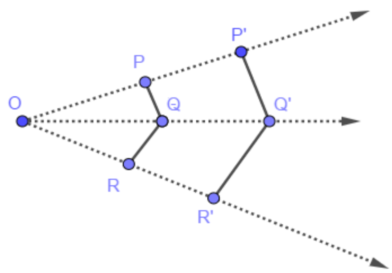


Seguindo a ideia de Dante, agora veremos algumas propriedades de homotetia.

Propriedade 2.0.2. *Em uma homotetia, um segmento de reta é levado a outro segmento de reta paralelo ao primeiro.*

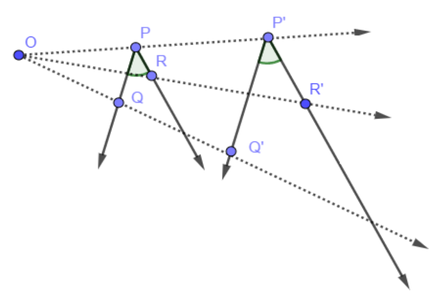
$$\overline{P'Q'} \text{ é paralelo à } \overline{PQ}$$
$$\overline{Q'R'} \text{ é paralelo à } \overline{QR}$$

Figura 2.2: Segmento homotético



Propriedade 2.0.3. *A imagem de um ângulo por meio de uma homotetia é outro ângulo congruente ao original.*

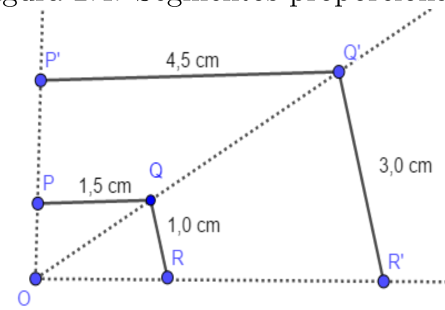
Figura 2.3: Ângulos congruentes através da homotetia



Propriedade 2.0.4. *Em uma homotetia com centro **O** e razão **k**, a razão entre a medida do homotético de um segmento e a medida do próprio segmento é sempre igual a **k**, razão da homotetia.*

A homotetia da Figura 2.4 tem centro **O** e razão $k = 3$, pois $OP' = 3 \cdot OP, OR' = 3 \cdot OR$, e assim por diante.

Figura 2.4: Segmentos proporcionais



Veja agora as razões:

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = 3$$
$$\frac{Q'R'}{QR} = \frac{3}{1} = 3$$

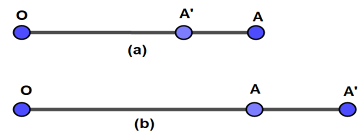
O termo homotetia foi usado pela primeira vez por Michel Chasles. Em 1829, perante a Academia de Bruxelas, expôs sua descoberta de princípios gerais de geometria: dualidade e homografia. Ampliando-os, escreveu em 1837 sua apreciação histórica sobre a origem e o desenvolvimento dos métodos em geometria. Foi professor de mecânica e geodésia de Escola Politécnica de Paris (1841) e mais tarde de geometria superior na Sorbonne. É considerado um dos maiores geômetras de todos os tempos, tendo feito importantes contribuições à ciência.

Felix Klein foi um dos pioneiros no estudo da geometria baseada em grupos de transformações. Na sua conferência "*Erlanger Programm*" mostrou como o conceito de grupo podia ser usada para caracterizar diferentes geometrias. De acordo com Klein, homotetias e semelhanças formavam um grupo denominado de grupo principal da geometria euclidiana e as isometrias eram um subgrupo das semelhanças, pois não alteram as propriedades das figuras.

Máquinas copiadoras, zoom de celular e maquetes, fazem ampliações ou reduções geralmente utilizam a ideia de homotetia como princípio de seu funcionamento.

Propriedade 2.0.5. *Dados um ponto O no plano e um número real positivo k, se A é um outro ponto no plano, transformaremos o ponto A no ponto A' no segmento de reta OA de modo que $\frac{OA'}{OA} = k$, esta transformação será chamada de transformação homotética, o ponto O será o centro de homotetia e k será o raio homotético.*

Figura 2.5: Transformação homotética



Se $k > 1$***, temos que*** $OA' > OA$***.***

Se $k < 1$***, temos que*** $OA' < OA$***.***

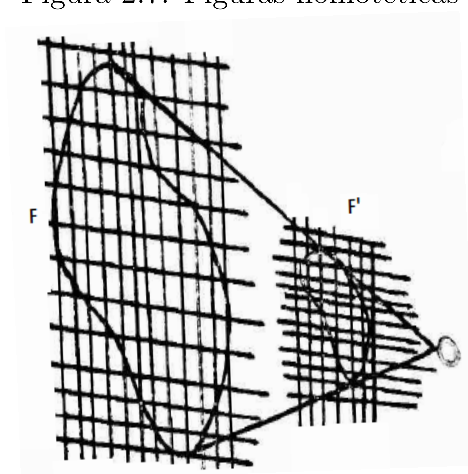
Claramente podemos notar que, se $k = 1$ *teremos que* $OA' = OA$*.*

Em uma transformação homotética, toda figura F *será transformada em uma figura* F'*, similar a* F*, portanto, se* $k < 1$*,* F *é maior que* F'*, sendo assim, se* $k > 1$*,* F' *é maior que* F*.*

Figura 2.6: Figuras homotéticas

Uma transformação homotética altera os comprimentos de todos os segmentos de reta no plano por uma razão constante, a razão homotética k. Também altera as áreas de todas as figuras pela razão constante k^2, ou seja, o quadrado da razão homotética.

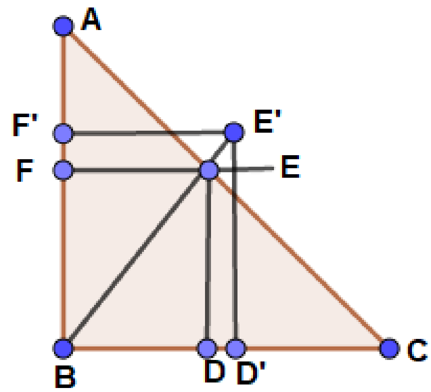
Figura 2.7: Figuras homotéticas



Exemplo: Inscrever em um determinado triângulo retângulo ABC um retângulo $BDEF$

onde os comprimentos desses lados estejam em uma determinada razão.

Figura 2.8: Triângulo retângulo ABC

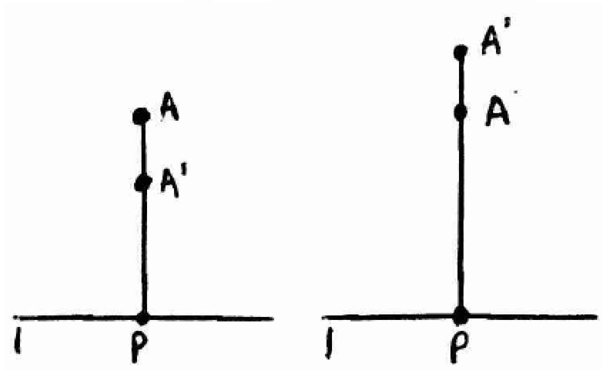


Resolução: Primeiramente, vamos construir um retângulo arbitrário $BD'E'F'$, com os comprimentos de seus lados na razão dada e tal que, o vértice D' e F' estão respectivamente nos lados BC e AB do triângulo dado. Seja E o ponto de interseção do segmento BE' e do lado AC do triângulo. É fácil mostrar que a transformação homotética com B como sendo o centro homotético e $k = \frac{BE}{BE'}$ como sendo a relação homotética que irá transformar o retângulo $BD'E'F'$ no retângulo requerido. A partir disso, podemos facilmente construir o retângulo desejado, conforme mostra a Figura 2.8

2.0.2 Transformações de Tensão

Seja l uma reta contida no plano e P um ponto da reta l do plano. Iremos transformar o ponto A no ponto A', ambos contidos no plano, de forma que A' esteja em PA, que é perpendicular a reta l e ainda $\frac{PA'}{PA} = k$, sendo k uma constante positiva, logo, todo ponto na reta l estará fixo pela transformação.

Figura 2.9: Retas no plano

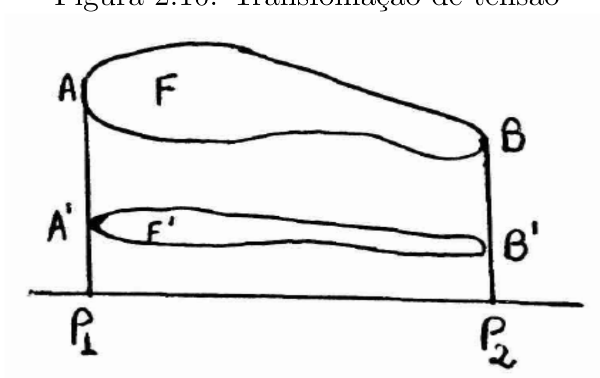


A reta l é chamada de *eixo de tensão*, enquanto k é chamado de *coeficiente de tensão.* Se $k > 1$, temos que $PA' > PA$ (aumento) e também que se $k < 1$ então $PA' < PA$ (compressão).

Uma figura F é transformada por uma tensão em uma nova figura F', que geralmente não é semelhante a F. Na figura abaixo (Figura 2.10) temos $k = \frac{1}{3}$, ou seja:

$$\frac{P_1A'}{P_1A} = \frac{P_2B'}{P_2B} = \cdots = \frac{1}{3}$$

Figura 2.10: Transfomação de tensão

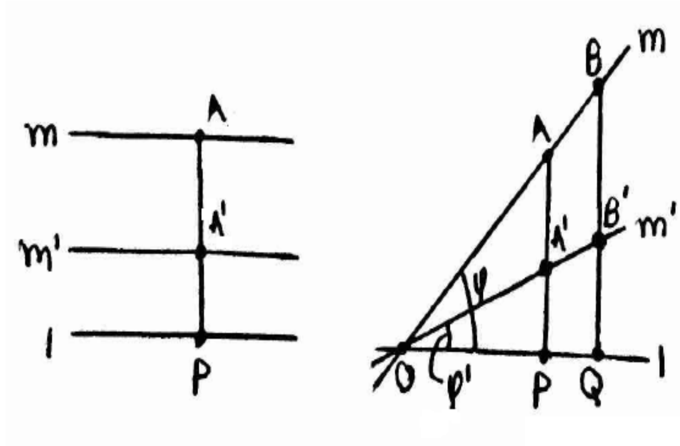


Algumas propriedades de tensões são análogas às propriedades de transformações homotéticas, assim sendo, abordaremos algumas a seguir.

Propriedade 2.0.6. *Uma reta é transformada por tensão em uma reta.*

Demonstração. Suponha que uma tensão tenha um eixo l e um coeficiente k e seja m uma reta qualquer. Se m é paralela a l e d a distância até l, então m será transformada em uma reta m' paralela a l com distância kd de l.

Figura 2.11: Transformação de tensão



Por outro lado, suponha que m e l se interceptam, digamos no ponto O. Durante a transformação de tensão, o ponto O permanece fixo. Seja A um ponto qualquer, diferente de O na reta m, e seja A' o ponto em que A é transformada pela tensão. Então $PA' = k.PA$. Seja B outro ponto na reta m e B' o ponto de encontro da reta m' com o segmento BQ que possui comprimento de B à reta l. Pelo teorema de Tales, os triângulos OQB e OPA são semelhantes, e os triângulos OQB' e OPA' são semelhantes, consequentemente:

$$\frac{QB'}{QB} = \frac{PA'}{PA} = k,$$

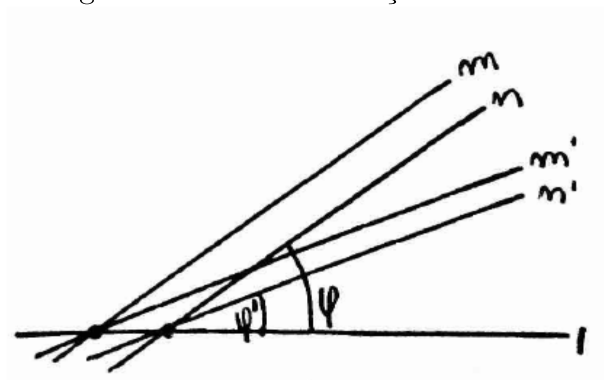
temos $QB' = k.QB$. Portanto nesta última equação podemos notar que a transformação de tensão, transforma o ponto B no ponto B'.

Desde que B seja um ponto arbitrário da reta m, esta reta sofreu uma transformação de tensão pela reta OA', que chamamos de reta m'. □

Propriedade 2.0.7. *Transformação de tensão transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Demonstração. Sejam as retas m e n no plano e paralelas entre si, logo elas não possuem ponto de interseção, neste caso as retas m' e n' nas quais m e n são transformadas por tensão, também não possui pontos em comum (de modo que um ponto em comum a m' e n' só poderia resultar de um ponto em comum às retas m e n), isso mostra que as retas m' e n' só poderão ser paralelas.

Figura 2.12: Transformação de tensão



Note que se φ e φ' são os ângulos formados pela reta original m e a reta m' com o eixo de tensão l, assim observe que:

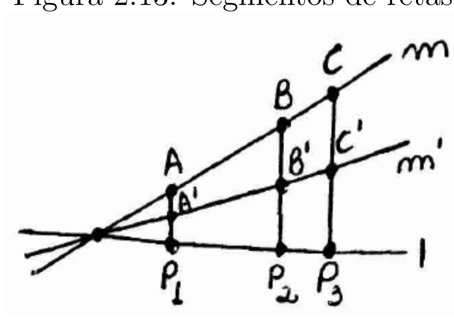
$$tan\varphi' = \frac{PA'}{PO} = \frac{k.PA}{PO} = k.\frac{PA}{PO} = k.tan\varphi.$$

Logo, estas retas paralelas (que interceptam l com o mesmo ângulo φ) são transformadas em retas paralelas (interceptando l com o mesmo ângulo φ'). □

Propriedade 2.0.8. *As proporções de comprimentos de segmentos de retas situados na mesma reta permanecem inalterados pela transformação de tensão.*

Demonstração. De fato, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, logo as proporções são válidas. □

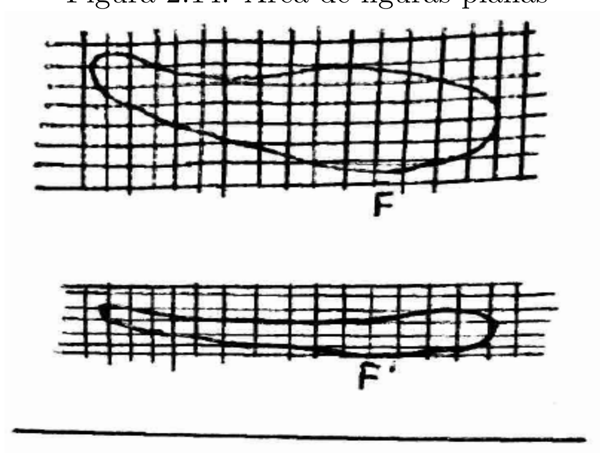
Figura 2.13: Segmentos de retas



Propriedade 2.0.9. *Uma transformação de tensão altera a área de qualquer figura plana, aumentando ou diminuindo sua área de acordo com uma constante k, chamada de coeficiente de tensão.*

Demonstração. Seja F uma figura no plano, considere uma linha de grade em formato de pequenos quadrados cujos lados são paralelos ou perpendiculares ao eixo de tensão. A área de F é aproximadamente o número de quadrados contidos em F multiplicado pela área de cada quadrado. Os quadrados são transformados por tensão em uma linha de grades de retângulos, cujas àreas são obtidas multiplicando-se as áreas dos quadrados por uma constante k (Dois lados paralelos do quadrado não são multiplicados, já os outros paralelos serão multiplicados por k). O número de retângulos em F' será igual ao número de quadrados em F, e a área de F' é aproximadamente o número de retângulos contidos em F' multiplicado pela área do retângulo. Consequentemente a área de F' é igual a área de F multiplicada por k. $\square$

Figura 2.14: Área de figuras planas



Capítulo 3

Funções Hiperbólicas

Neste capítulo iremos construir as funções hiperbólicas. Para tal, os conceitos e propriedades das transformações de tensão e das homotetias apresentadas no capítulo anterior são imprescindíveis. Posteriormente definiremos o conceito de rotação hiperbólica.

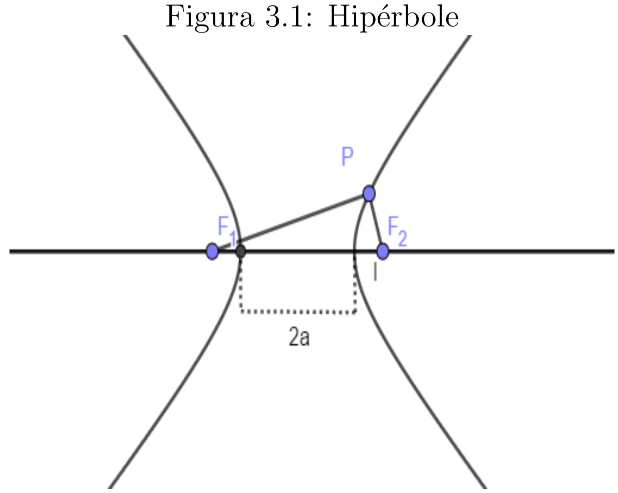
3.0.1 Hipérbole sob alguns pontos de vista

Iremos agora definir formalmente a hipérbole sob o ponto de vista da geometria analítica, para podermos utilizá-la no decorrer deste trabalho.

Definição 3.0.1. *A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre eles, ou seja, o valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos* F_1 *e* F_2 *(focos), do mesmo plano, é uma constante* $(2a)$*, onde* $2a < d(F_1, F_2)$*.*

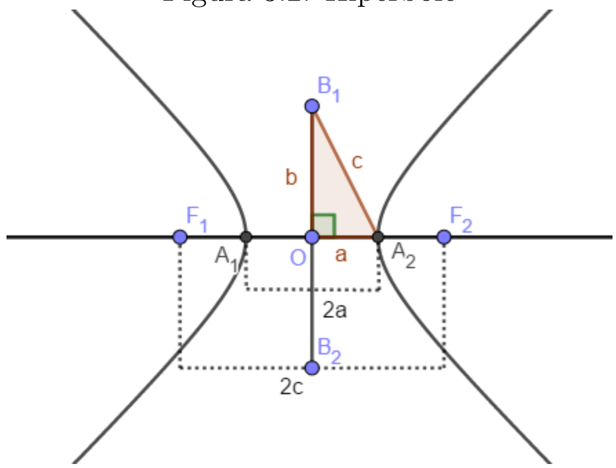
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Figura 3.1: Hipérbole



Vamos agora estudar alguns elementos dessa hipérbole

Figura 3.2: Hipérbole



$F_1 e F_2$: focos, a distância entre estes focos é igual a $2c$ e é chamado de distância focal.

O: Centro da hipérbole, é o ponto médio da distância entre os focos.

$A_1 e A_2$: são os vértices da hipérbole.

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 e seu comprimento é igual a $2a$.

Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento B_1B_2, cujo comprimento é $2b$.

Note que do triângulo retângulo B_1OA_2, obtemos pelo Teorema de Pitágoras a relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$.

Para cada cônica (elípse, parábola e hipérbole) existe um número ε, chamado de excentricidade, que determina a forma de cada uma delas, no caso da hipérbole, existe uma relação de proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole, quanto maior a excentricidade, maior é a abertura da hipérbole e vice-versa.

A excentricidade é definida pela relação:

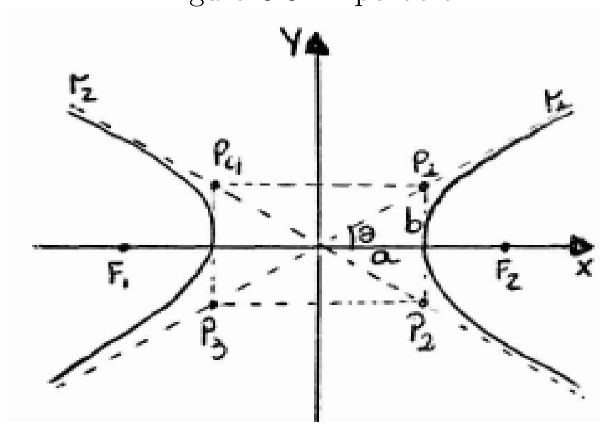
$$\varepsilon = \frac{c}{a}(\varepsilon > 1)$$

Para o presente trabalho iremos utilizar apenas a hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX e a hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

A seguir vamos definir as assíntotas de uma hipérbole.

Na figura a seguir, onde temos uma hipérbole, observe um retângulo cujos lados serão $2a$ e $2b$. As retas que chamaremos de r_1 e r_2 que contêm as diagonais desse retângulo são chamadas de assíntotas da hipérbole, e a distância de um ponto P da hipérbole à assíntota tende para zero quando o ponto P da hipérbole se afasta para o infinito.

Figura 3.3: Hipérbole



Como as duas assíntotas acima passam pela origem, suas equações serão do tipo:

$$y = \pm mx, \text{ onde } m \text{ é o coeficiente angular da reta } y,$$

satisfazendo

$$m = tan\theta, \text{ sendo } \theta \text{ o ângulo formado pelo eixo } x \text{ e a reta } r_1.$$

Logo por trigonometria no triângulo retângulo,

$$y = \pm \tfrac{b}{a}x.$$

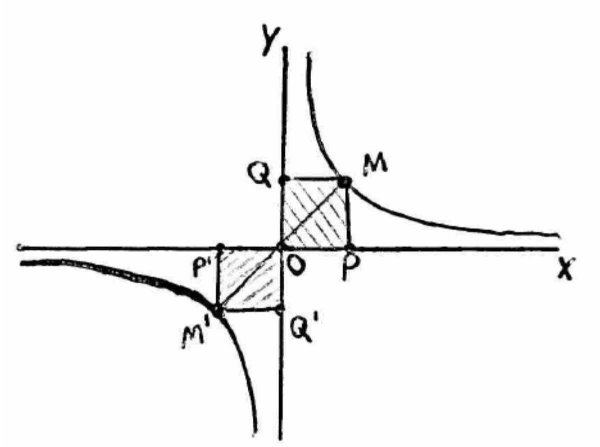
Assim vimos a hipérbole sob o ponto de vista analítico, e apresentamos a definição na geometria analítica. Agora utilizaremos alguns desses resultados para posteriormente definirmos o conceito de rotação hiperbólica.

No que segue, vamos estudar a hipérbole sob um outro ponto de vista. De fato, considere o gráfico de uma curva cuja equação é dada por:

$$y = \tfrac{a}{x} \text{ ou } xy = a \text{ com } a \neq 0$$

Esta curva também é chamada de *hipérbole*.

Figura 3.4: Hipérbole



Facilmente é possível observar que, quanto maior o valor absoluto de x, menor será o valor absoluto de y, e vice-versa. Isto é, se $x \longrightarrow \infty$, então $y \longrightarrow 0$ e se $y \longrightarrow \infty$, então $x \longrightarrow 0$.

A hipérbole é composta por dois ramos, um no primeiro quadrante e outro no terceiro quadrante (se $a > 0$).

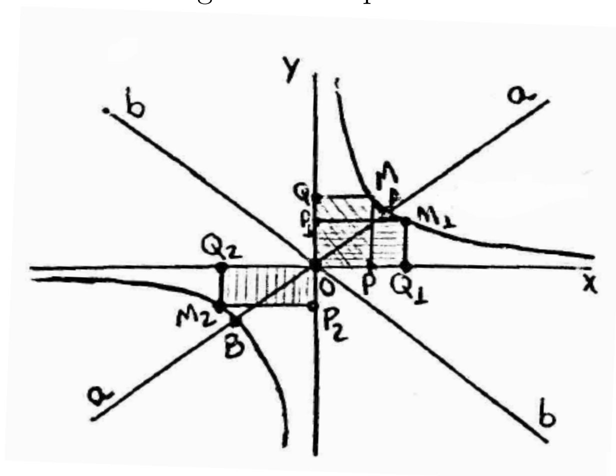
Ao analisarmos geometricamente, a equação algébrica $xy = a$ possui uma interpretação simples baseada na hipérbole vista como uma curva. De fato, seja M um ponto qualquer da hipérbole, então a área do retângulo $MQOP$ será a, pois independentemente do ponto M temos:

$$S_{MQOP} = OP.PM = x.y = a.$$

Chamando o retângulo $MQOP$ de coordenadas do ponto M, podemos dizer que *a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos que se situam no primeiro e terceiro quadrantes do sistema de coordenadas cujos retângulos de coordenadas* $M, M_1, M_2, ...$ *possuem uma dada área.*

A hipérbole possui um centro de simetria, e os dois ramos da hipérbole são simétricos em relação a origem O dos eixos coordenados. Assim, os eixos de simetria são as retas aa e bb que dividem os eixos coordenados conforme temos na Figura 3.5 abaixo. De fato, os retângulos $MQOP$ e $M_1Q_1O_1P_1$ possuem áreas iguais, analogamente, os retângulos $MQOP$ e $M_2Q_2O_2P_2$ também possuem áreas iguais.

Figura 3.5: Hipérbole

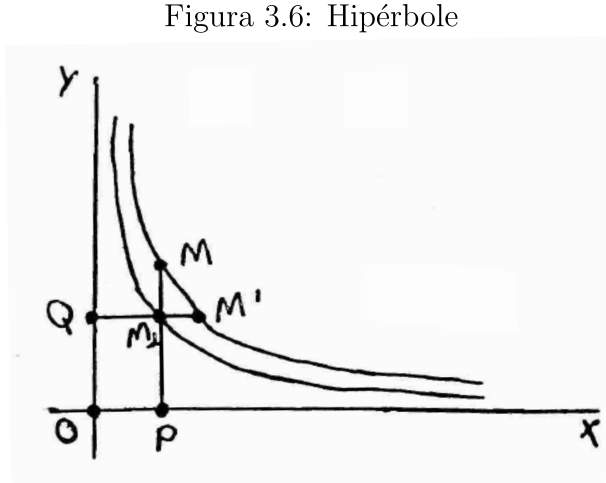


Usualmente o centro de simetria O e os eixos de simetria aa e bb são chamados de centro e eixos de simetria da hipérbole, os pontos A e B onde a hipérbole intecepta os eixos de simetria são chamados de vértices da hipérbole.

3.0.2 Rotação Hiperbólica e propriedades

Considere a hipérbole $xy = a$, e aplique a transformação de tensão sob seus eixos com o eixo x e com o coeficiente k. Durante esta transformação a hipérbole $xy = a$ é transformada na hipérbole $xy = ka$, na qual a abscissa x de todos os pontos permanece inalterado, enquanto a ordenada y resulta em ky.

Figura 3.6: Hipérbole



Agora vamos aplicar outra transformação de tensão, sob seus eixos com o eixo y e com o coeficiente $\frac{1}{k}$. Durante esta transformação, a hipérbole $xy = ka$ será transformada na hipérbole $xy = \frac{ka}{k}$, ou seja, $xy = a$, a ordenada y de todos os pontos permanece inalterado, enquanto a abscissa x resulta em $\frac{x}{k}$. Desta forma podemos observar que duas sucessivas tensões no plano com os respectivos eixos, o eixo x e o eixo y, e com os respectivos coeficientes k e $\frac{1}{k}$, transformam a hipérbole $xy = a$ nela mesma.

A aplicação sucessiva destas duas tensões resulta numa transformação que é conhecida como *rotação hiperbólica.* O termo rotação hiperbólica está relacionado ao fato sob em tal transformação, todos os pontos da hipérbole "deslizam"ao longo da curva, assim, o ponto M primeiro será transformado em M_1, e depois M_1 é transformado em M', isto é, o efeito da rotação hiperbólica é transformar o ponto M da hipérbole no ponto M' da mesma hipérbole.

A seguir, tem-se as seguintes propriedades da rotação hiperbólica:

Propriedade 3.0.1. *Uma rotação hiperbólica transforma uma reta em uma reta.*

Demonstração. Segue da Propriedade 2.0.6. □

Propriedade 3.0.2. *Uma rotação hiperbólica transforma os eixos coordenados (as assíntotas da hipérbole) nelas mesmas (desde que, as duas tensões que constituem a rotação hiperbólica tranformam cada eixo de coordenadas neles mesmos).*

Demonstração. Segue da Propriedade 2.0.6. □

Propriedade 3.0.3. *Uma rotação hiperbólica transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Demonstração. Segue da Propriedade 2.0.7. □

Propriedade 3.0.4. *Uma rotação hiperbólica não altera as proporções de comprimentos de segmentos de retas situados na mesma reta.*

Demonstração. Segue da Propriedade 2.0.8. □

Propriedade 3.0.5. *Uma rotação hiperbólica não altera as áreas das figuras no plano.*

Demonstração. Utilizando o resultado da Propriedade 2.0.9., temos, como resultado da primeira tensão, todas as figuras têm suas áreas multiplicadas por k, e como resultado de uma segunda tensão elas são divididas por k. □

Um fato importante que devemos observar é que, por meio de uma rotação hiperbólica adequada, é possível transformar qualquer ponto da hipérbole em qualquer outro ponto no mesmo ramo da hipérbole.

De fato, a primeira transformação de tensão, transforma os pontos (x, y) da hipérbole $xy = a$ nos pontos (x, ky) da hipérbole $xy = ka$, e a segunda tensão transforma os pontos (x, ky) da hipérbole $xy = ka$ nos pontos $(\frac{x}{k}, y)$ da hipérbole original.

Definição 3.0.2. *Uma reta que interceptar a hipérbole em dois pontos é chamada de secante de uma hipérbole.*

Esse segmento de uma secante cujos pontos extremos estão na hipérbole é chamado de corda da hipérbole. Existem dois tipos de secantes de uma hipérbole; aquele que intercepta apenas um ramo da hipérbole e aquele que intercepta ambos ramos (Fig.3.7). Aqui iremos considerar a secante do primeiro tipo e retas paralelas a ela (Fig 3.8).

Entre essas retas paralelas a hipérbole, teremos algumas que cruzam a hipérbole em dois pontos, algumas que não irão cruzar,e finalmente, algumas que irão cruzar em apenas um ponto a hipérbole, no qual chamaremos de reta tangente à hipérbole.

Figura 3.7: Retas que cruzam a hipérbole

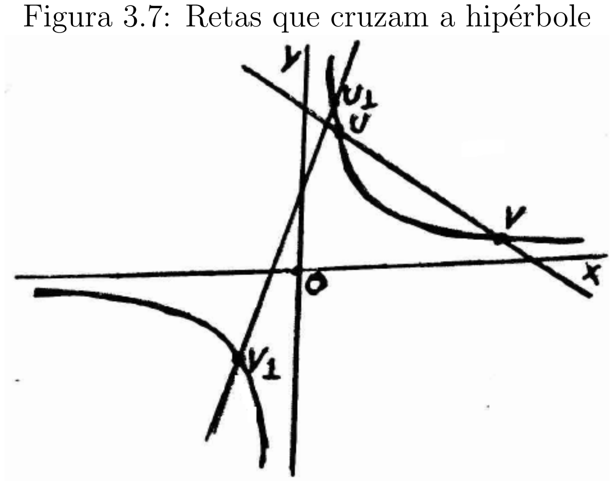
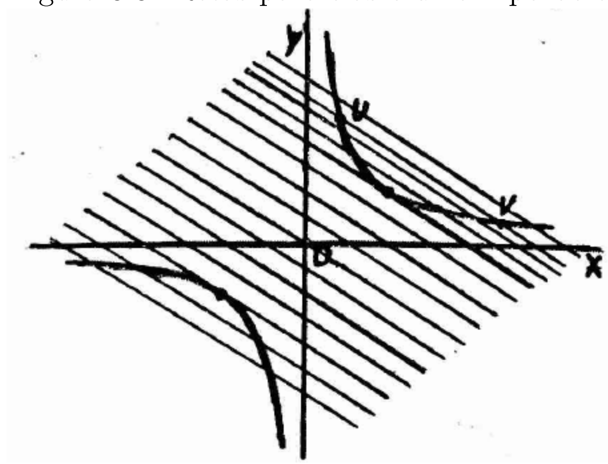


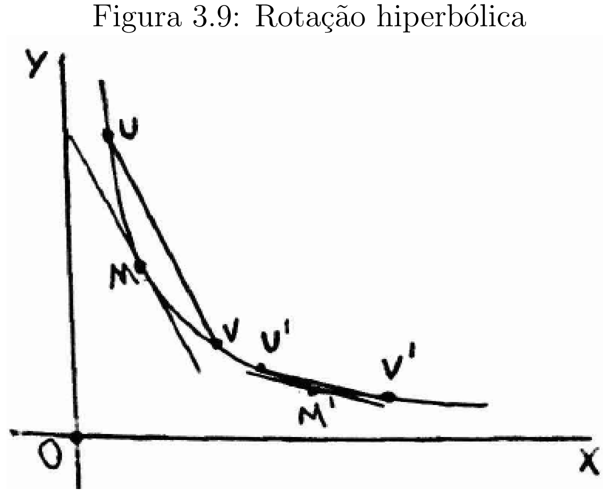
Figura 3.8: Retas paralelas e uma hipérbole



Propriedade 3.0.6. *Uma rotação hiperbólica irá transformar a corda UV da hipérbole na corda $U'V'$, conforme mostra a Figura 3.9.*

Como a rotação hiperbólica transforma o ponto M da hipérbole no ponto M' da hipérbole, então a tangente da hipérbole no ponto M é transformada na tangente do ponto M'.

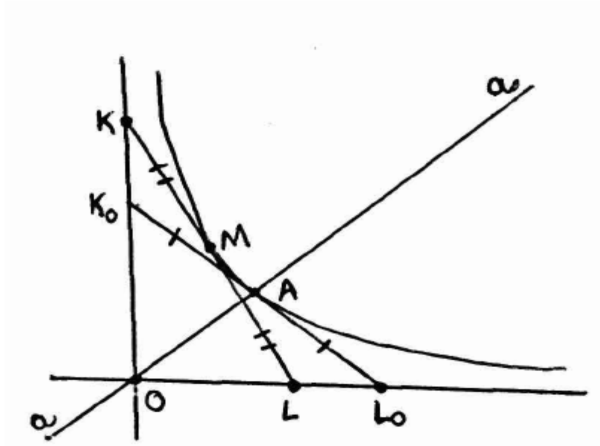
Figura 3.9: Rotação hiperbólica



Demonstração. Considere a corda UV na qual é paralela a tangente no ponto M (Figura 3.9). A corda UV é transformada na corda $U'V'$, enquanto uma reta paralela a UV que possui o ponto M, em comum com a hipérbole é transformada em linha reta paralela a $U'V'$ tendo apenas um ponto, M' em comum com a hipérbole, ou seja, a tangente no ponto M'. □

Propriedade 3.0.7. *Se uma reta é tangente a uma hipérbole, então o ponto de tangência divide o segmento cujas extremidades estão nas assíntotas da hipérbole em duas partes iguais.*

Figura 3.10: Ramo da hipérbole e retas



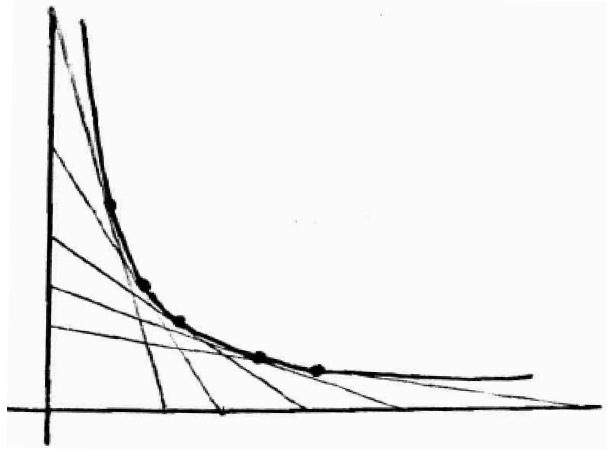
Demonstração. A reta aa que divide o ângulo formado pelos eixos coordenados é um eixo de simetria da hipérbole (Figura 3.10). Seja A o vértice da hipérbole, então esse vértice A divide o segmento de reta K_0L_0 em duas partes iguais, K_0 e L_0 são os pontos onde a reta tangente em A intercepta o eixo x e o eixo y. Agora seja M um ponto da hipérbole diferente do ponto A; denotaremos por L e K, respectivamente, os pontos de intersecção da tangente de M com os eixos x e y. Vamos aplicar as rotações hiperbólicas com as transformações do ponto A no ponto M. Esta rotação transforma o segmento K_0L_0 no segmento KL, assim, M é o ponto médio do segmento KL. □

Propriedade 3.0.8. *A área do triângulo formado por uma tangente à hipérbole e os eixos de coordenadas é o mesmo para todas as tangentes.*

Demonstração. Seja o triângulo KOL formado pela tangente do ponto M na hipérbole e o eixo de coordenadas, considere uma rotação hiperbólica na qual transforma o ponto M no ponto A e o triângulo KOL no triângulo K_0OL_0 (os pontos A, K_0, e L_0 como na propriedade acima), temos que $S_{\Delta KOL} = S_{\Delta K_0OL_0}$, isto é, a área do triângulo KOL não depende da escolha do ponto M. □

Através das propriedades vistas anteriormente, segue que uma hipérbole pode ser definida como sendo o lugar geométrico dos pontos médios desses segmentos de retas que, em conjunto com os eixos coordenados, formam certos triângulos cujas áreas são dadas (Fig. 3.11).

Figura 3.11: Triângulos formados na hipérbole



Propriedade 3.0.9. *Os pontos médios de uma série de cordas paralelas de uma hipérbole se encontram em uma única reta que passa pelo centro da hipérbole.*

Figura 3.12: Cordas paralelas e uma hipérbole

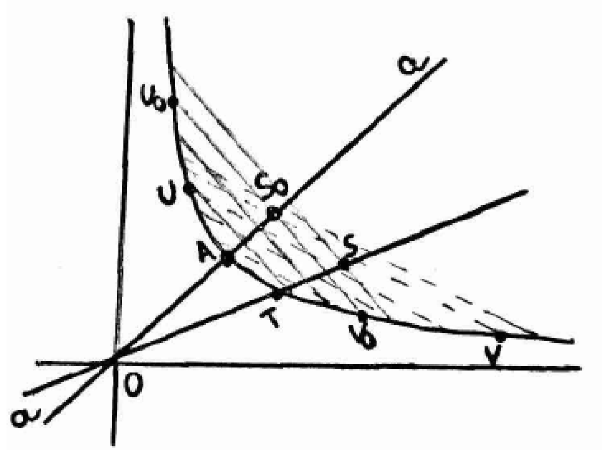
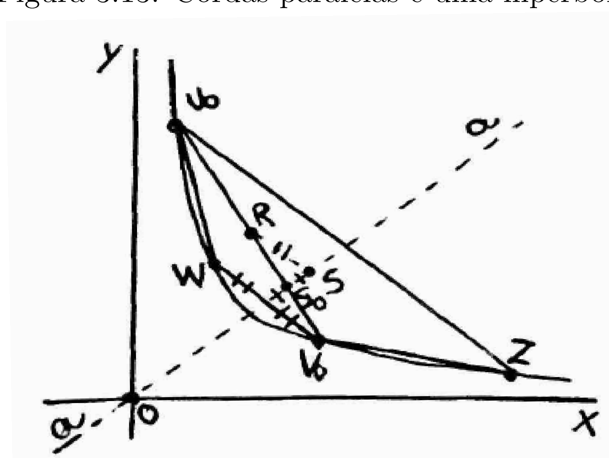


Figura 3.13: Cordas paralelas e uma hipérbole



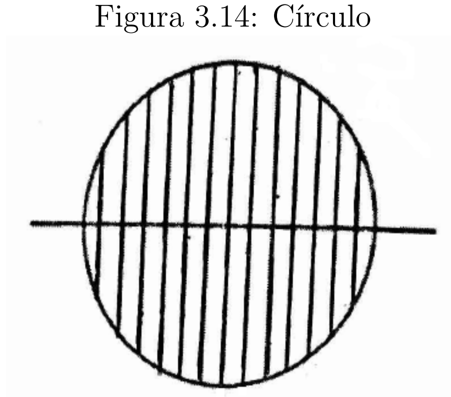
Demonstração. Seja UV uma corda qualquer da hipérbole (Figura 3.12), seja S o seu ponto médio e T o ponto onde a reta OS intercepta a hipérbole, aplicando a rotação hiperbólica na qual transforma o ponto T no vértice A da hipérbole. Esta transformação transforma a reta OT no eixo aa da hipérbole, e a corda UV na corda U_0V_0 na qual divide o eixo de simetria aa, mas isto só é possível se U_0V_0 for perpendicular a aa. De fato, suponha que U_0V_0 não seja perpendicular a aa (Figura 3.13). Vamos desenhar as cordas U_0Z e V_0W perpendicular a aa. Desde que a reta aa seja o eixo de simetria da hipérbole, U_0ZV_0W será um trapézio isósceles tendo aa como um eixo de simetria ($U_0W = V_0Z$). Mas o eixo de simetria de um trapézio não pode cortar a diagonal U_0V_0 (portanto, $V_0S_0 = S_0R < S_0U_0$), que é uma contradição. Agora, todas as cordas paralelas a UV são transformadas em cordas paralelas a U_0V_0, e todos os pontos médios dessas cordas estão na reta aa. Assim, segue que todos os pontos médios das cordas paralelas a corda UV estão na reta OT.

□

Uma reta que passa pelo centro da hipérbole é chamada de *diâmetro* da hipérbole. (Isto é análogo a definição de diâmetro de um círculo, a reta passa pelo centro, aqui consideraremos sendo uma reta e não meramente um segmento de reta.)

O diâmetro da hipérbole que corta várias cordas paralelas será chamado de diâmetro conjugado destas cordas. No presente trabalho, trataremos os raios de uma hipérbole como sendo qualquer um dos dois segmentos de um diâmetro, determinados pelo centro da hipérbole e os pontos de interseção do diâmetro com a hipérbole. (Isto é, o raio da hipérbole é definido analogamente ao raio do círculo.)

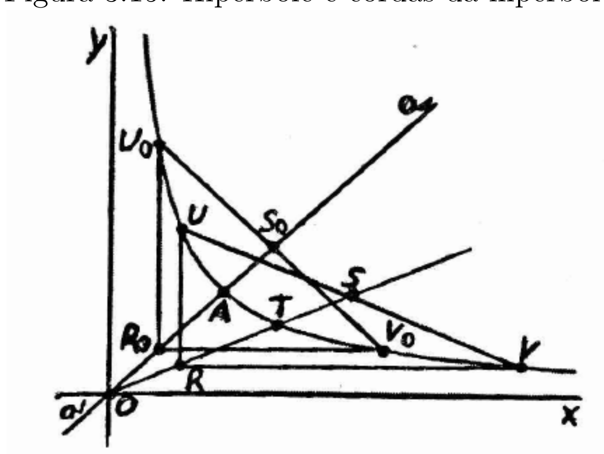
Figura 3.14: Círculo



Note que o círculo (Figura 3.14) possui propriedades análogas a propriedade das hipérboles: *Os pontos médios de uma série de cordas paralelas de um círculo se encontram em uma única reta que passa pelo centro do círculo.* De fato, é verdade que o diâmetro do círculo é perpendicular a todas essas cordas.

Propriedade 3.0.10. *As retas que passam pelos pontos de extremidade de uma determinada corda da hipérbole e são paralelas às assíntotas, se cruzam no diâmetro conjugado a essa corda.*

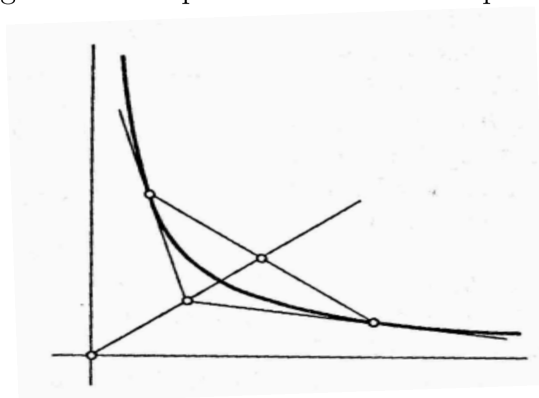
Figura 3.15: Hipérbole e cordas da hipérbole



Demonstração. Seja UV uma corda da hipérbole, S é o ponto médio e T o ponto de interseção da reta OS com a hipérbole (Figura 3.15). Vamos aplicar a rotação hiperbólica transformando o ponto T no vértice A da hipérbole. Durante esta rotação a corda UV será transformada na corda U_0V_0 perpendicular ao eixo aa (Veja a demonstração da propriedade anterior). As retas UR e VR são paralelas às assíntotas e serão transformadas nas retas U_0R_0 e V_0R_0, ambas paralelas às assíntotas (veja as propriedades 3.0.2 e 3.0.3). Desde que a reta aa seja um eixo de simetria da hipérbole e bissetriz do ângulo formado pelas assíntotas, o ponto de interseção R_0 da reta U_0R_0 com a reta V_0R_0 está na reta aa. Com isso, segue que o ponto de interseção R das retas UR e VR está no diâmetro OT. $\square$

Propriedade 3.0.11. *As retas tangentes a uma hipérbole nas extremidades de uma determinada corda se cruzam no diâmetro conjugado a esta corda (Figura 3.16).*

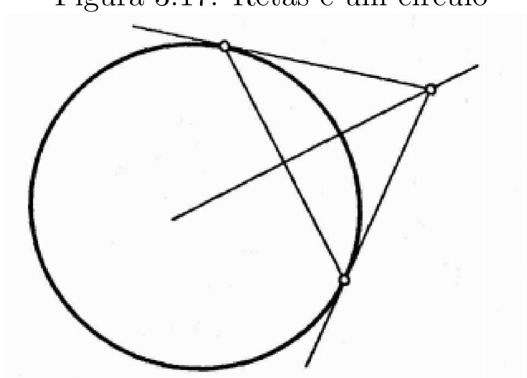
Figura 3.16: Hipérbole e cordas da hipérbole



Demonstração. A demonstração desta propriedade é análoga a demonstração da propriedade anterior. □

Note que o círculo possui uma propriedade análoga: *As retas tangentes a um círculo nas extremidades de uma determinada corda se cruzam no diâmetro desse círculo perpendicular a essa corda*(Fig. 3.17).

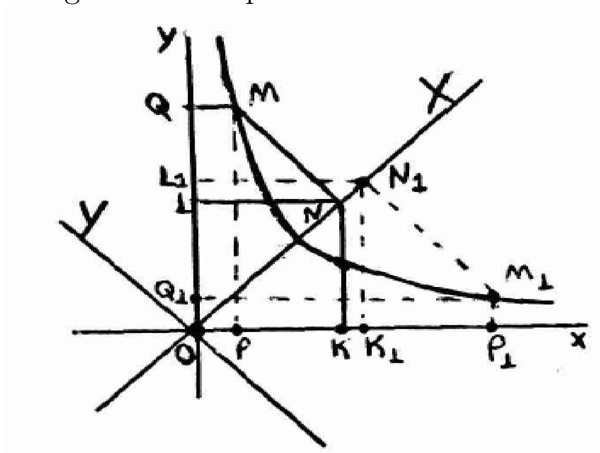
Figura 3.17: Retas e um círculo



3.0.3 Hipérbole unitária

Anteriormente definimos a hipérbole como sendo a curva que tem como equação $xy = a$, e os eixos coordenados são as assíntotas da hipérbole. Agora iremos mostrar que a equação desta hipérbole pode ser escrita em um novo sistema de coordenadas no qual os eixos da hipérbole são considerados como sendo os eixos coordenados.

Figura 3.18: Hipérbole e seus elementos



Sejam M um ponto na hipérbole, e seja Oxy o sistema de coordenadas originais, e X e Y o novo sistema de coordenadas. Iremos agora derivar fórmulas relacionando x, y e X, Y. Seja N a projeção do ponto M no eixo $O'X$, e sejam P, Q e K, L as projeções de M e N no eixo original x, y. Portanto, temos:

$$OP = OK - PK = ONcos45^o - NMcos45^o$$
$$OQ = OL + LQ = ONcos45^o + NMcos45^o.$$

Temos que $OP = OK - PK$ e como a reta X é bissetriz do 1^o quadrante dos eixos xy então o ângulo $NOK = 45^o$. O triângulo OKN é retângulo em K, logo, pelas propriedades de trigonometria no triângulo retângulo, temos que:

$$cos45^o = \tfrac{OK}{ON} \Longleftrightarrow OK = ONcos45^o,$$

desde que os eixos da hipérbole $xy = a$ formem um ângulo de 45^o com as assíntotas da hipérbole. Mas $OP = x, ON = X$, e $NM = Y$; consequentemente, obtemos:

$$x = (X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}, y = (X + Y)\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{3.1}$$

Se o ponto M estiver abaixo do eixo aa, dizemos que está na posição M_1, então temos:

$$x_1 = OP_1 = OK_1 + K_1P_1 = ON_1cos45^o + N1M_1cos45^o =$$
$$X_1\tfrac{\sqrt{2}}{2} + (-Y_1)\tfrac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_1 = OQ_1 = OL_1 - Q_1L_1 = ON_1cos45^{o} - N1M_1cos45^{o} =$$
$$X_1\frac{\sqrt{2}}{2} - (-Y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Desse modo temos que:

$$x = (X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}, y = (X + Y)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto se substituirmos na equação $xy = a$, obteremos:

$$(X^2 - Y^2).\frac{1}{2} = a$$
$$X^2 - Y^2 = 2a,$$

que é a equação de nossa hipérbole no novo sistema de coordenadas.

A hiperbole $X^2 - Y^2 = 1$, quando escolhemos $a = \frac{1}{2}$ é chamada de hiperbole unitária. Observe que esta equação é análoga à equação do círculo unitário, que é o círculo com centro na origem e raio 1:

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

No sistema original de coordenadas, a equação da hipérbole unitária será $xy = \frac{1}{2}$, desde que $a = \frac{1}{2}$.

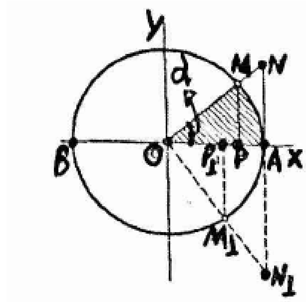
3.0.4 Funções Hiperbólicas, Identidades e comparação com funções trigonométricas

Vamos mostrar o desenvolvimento das funções hiperbólicas, cuja teoria se assemelha com a teoria das funções trigonométricas. A fim de enfatizar a analogia, vamos realizar a exposição primeiramente sobre a teoria das funções trigonométricas e depois sobre a teoria das funções hiperbólicas.

Considere o círculo unitário (Figura 3.19):

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Figura 3.19: Círculo Unitário



Se M é um ponto pertencente ao círculo unitário, temos que a medida do ângulo α, dado em radianos, entre os raios OA e OM, será definido pelo comprimento do arco AM, ou também, pelo dobro da área do setor AOM determinado pelo arco AM e os raios OA e OM.

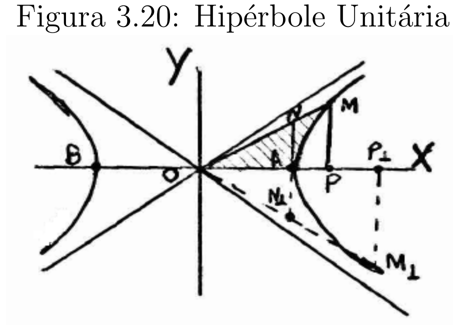
Sob o ponto M no círculo unitário, tracemos uma perpendicular MP ao eixo Ox, com P pertencendo a reta OA. No ponto A construa uma reta tangente ao círculo unitário, e seja N o ponto de intersecção dessa tangente com a reta OM. Os comprimentos dos segmentos PM, OP e AN, serão iguais ao *seno*, *cosseno* e *tangente* do ângulo α, ou seja:

$$PM = sen\alpha; OP = cos\alpha; AN = tan\alpha.$$

Agora considere a hipérbole unitária (Figura 3.20):

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Figura 3.20: Hipérbole Unitária



Se M é um ponto pertencente a hipérbole unitária, então a medida do ângulo hiperbólico t entre os raios OA e OM é definido como sendo o dobro da área do setor AOM determinado pelo arco AM da hipérbole e pelos raios OA e OM. Lembre-se que t não muda com a rotação hiperbólica do setor AOM, como vimos na Propriedade 3.0.5.

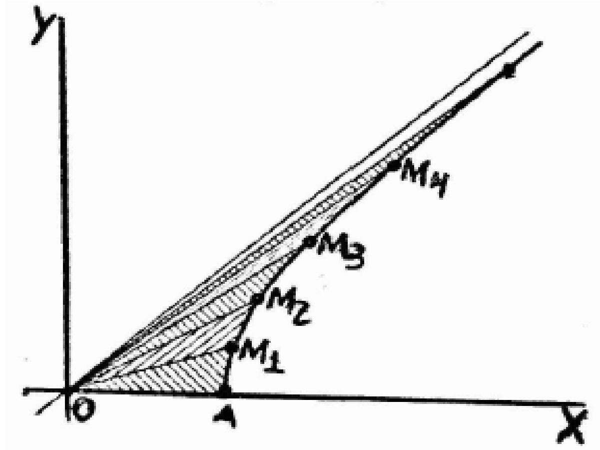
Pelo ponto M na hipérbole unitária, trace uma perpendicular MP ao eixo Ox, com P pertencendo a reta OA. A reta OA é um eixo de simetria da hipérbole e o ponto A é o vértice da hipérbole. No ponto A trace uma reta tangente a hipérbole, e seja N o ponto de intersecção da tangente com a reta OM.

Os comprimentos dos segmentos PM, OP e AN são chamados, respectivamente, seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica do ângulo hiperbólico t, e escreveremos:

$$PM = sinht; OP = cosht; AN = tanht.$$

Sabe-se que as funções trigonométricas variam de maneira periódica, as funções seno e cosseno possuem período igual a 2π, e a função tangente possui período igual a π. Entretanto as funções hiperbólicas não são periódicas. O ângulo hiperbólico t pode assumir valores de 0 até ∞. Tendo em vista a definição do ângulo hiperbólico, isso equivale a dizer que para cada número positivo existe algum setor hiperbólico AOM cuja área é igual àquele número. Para provar isto, vamos considerar um ângulo arbitrário AOM_1 cuja abertura será t_1. Vamos aplicar a rotação hiperbólica que transforma o ponto A no ponto M_1, depois tranformando o ponto M_1 num ponto M_2, depois transformando o ponto M_2 num ponto M_3, depois transformando o ponto M_3 num ponto M_4, e assim por diante. Segue da Propriedade 3.0.5, que as àreas dos setores AOM_1, M_1OM_2, M_2OM_3, M_3OM_4, ..., são iguais, consequentemente os ângulos hiperbólicos AOM_1, M_1OM_2, M_2OM_3, M_3OM_4, ..., são iguais à $t_1, 2t_1, 3t_1, 4t_1$, ..., respectivamente. Portanto, existem ângulos hiperbólicos arbitrariamente grandes. O ponto M da hipérbole varia de A para M_1, M_1 para M_2, e assim por diante, o ângulo hiperbólico t varia de 0 para t_1, de t_1 para $2t_1$, e assim por diante, consequentemente existem ângulos hiperbólicos de qualquer magnitude positiva. Lembre-se que um ângulo hiperbólico não é um ângulo comum.

Figura 3.21: Ângulos hiperbólicos

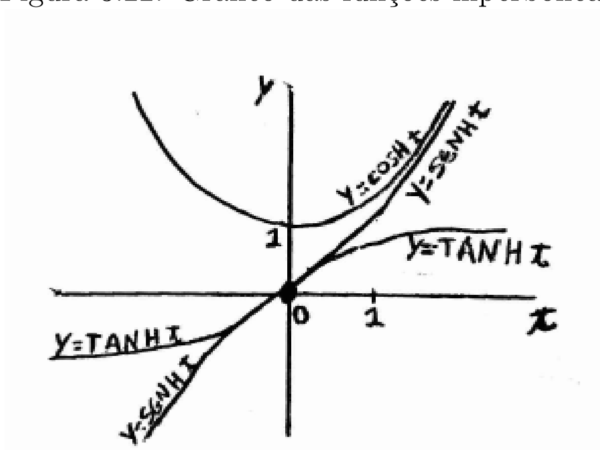


De acordo com a definição de funções hiperbolícas apresentada, fica claro que o ângulo hiperbólico t varia de 0 à ∞, $sinht$ varia de 0 à ∞, $cosht$ varia de 1 à ∞, e $tanht$ varia de 0 à 1. Análogo as funções trigonométricas, podemos considerar funções hiperbólicas com ângulos negativos (AOM_1); o ângulo AOM_1 é definido como $-t_1$, onde t_1 é o dobro da área do setor AOM_1. Logo teremos:

$$senh(-t_1) = -M_1P_1 = -senht_1,$$
$$cosh(-t_1) = OP_1 = cosht_1,$$
$$tanh(-t_1) = -N_1A = -tanht_1.$$

Observe o gráfico das funções hiperbólicas:

Figura 3.22: Gráfico das funções hiperbólicas



Note que $senh0 = tanh0 = 0$ e $cosh0 = 1$, que é análogo a $sen0 = tan0 = 0$ e $cos0 = 1$.

Vamos mostrar algumas identidades trigonométricas fundamentais e depois as correspondentes identidades nas funções hiperbólicas.

Pela semelhança de triângulos, os triângulos OPM e OAN são semelhantes (Figura 3.19), assim temos que:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Mas $\frac{AN}{OA} = tan\alpha$, desde que o raio $OA = 1$, então:

$$\frac{PM}{OP} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

Assim obteremos:

$$tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}. \tag{3.2}$$

Temos ainda que as coordenadas do ponto M no círculo são $OP = X$ e $PM = Y$, desde que a equação do círculo unitário for $X^2 + Y^2 = 1$, segue que:

$$OP^2 + PM^2 = 1$$

ou

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1. \tag{3.3}$$

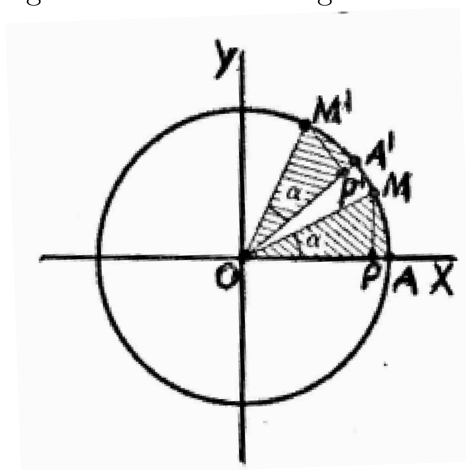
Dividindo ambos os lados da identidade (3.3), primeiramente por $cos^2\alpha$ (desde que $cos\alpha \neq 0$) e depois por $sen^2\alpha$ ($cos\alpha \neq 0$), obteremos outras duas fórmulas:

$$1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}, \tag{3.4}$$

$$cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{sen^2\alpha}. \tag{3.5}$$

Agora vamos mostrar as fórmulas trigonométricas da soma de dois ângulos.

Figura 3.23: Círculo trigonométrico

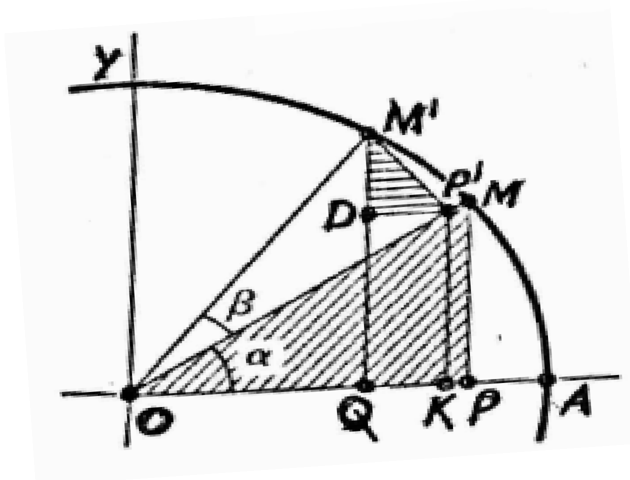


Sob uma rotação sobre o ponto O, vamos transformar os raios OA e OM do círculo para os raios OA' e OM', respectivamente (Figura 3.23). Além disso, os segmentos PM e OP serão transformados por esta rotação nos segmentos $P'M'$ e OP', respectivamente. $M'P'$ é claramente perpendicular ao raio OA'. Seja $\alpha =$ ângulo AOM, então, desde que $P'M' = PM$ e $OP' = OP$ (lembre-se a rotação não altera os comprimentos dos segmentos), poderemos utilizar as equações $sen\alpha = PM$ e $cos\alpha = OP$ para obter:

$$sen\alpha = P'M',$$
$$cos\alpha = OP'.$$

Agora, sejam os ângulos $AOM = \alpha$ e $MOM' = \beta$ (Fig. 3.24)

Figura 3.24: Ângulos do círculo trigonométrico



Nos pontos M e M' trace as perpendiculares MP e $M'Q'$ em OA. Além disso, no ponto M' trace a perpendilucar $M'P'$ em OM, e no ponto P' trace as perpendiculares $P'D$ em $M'Q$ e $P'K$ em OA. Assim obteremos

$$sen\alpha = PM, cos\alpha = OP;$$
$$sen\beta = P'M', cos\beta = OP';$$
$$sen(\alpha + \beta) = QM',$$
$$cos(\alpha + \beta) = OQ.$$

Os triângulos OPM e $M'DP'$ são semelhantes, pois os ângulos MOP e $P'M'D$ são congruentes (os lados desses ângulos são mutuamente perpendiculares).

Claramente,

$$sen(\alpha + \beta) = QM' = KP' + DM',$$
$$cos(\alpha + \beta) = OQ = OK - DP'.$$

Pela semelhança dos triângulos OPM e OKP':

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM} \Longleftrightarrow KP' = \frac{OP'}{OM} \cdot PM$$
$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM} \Longleftrightarrow OK = \frac{OP'}{OM} \cdot OP.$$

Pela semelhança dos triângulos OPM e $M'DP'$:

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM} \Longleftrightarrow DM' = \frac{P'M'}{OM} \cdot OP$$
$$\frac{DP'}{P'M'} = \frac{PM}{OM} \Longleftrightarrow DP' = \frac{P'M'}{OM} \cdot PM.$$

Observe que:

$$PM = sen\alpha, \quad OP = cos\alpha,$$
$$\frac{P'M'}{OM} = sen\beta, \quad \tfrac{OP'}{OM} = cos\beta,$$

donde,

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sen\beta, \tag{3.6}$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\, cos\beta - sen\alpha\, sen\beta. \tag{3.7}$$

Todas as outras fórmulas de funções trigonométricas seguem dessas fórmulas apresentadas, por exemplo:

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sen\beta}{cos\alpha\, cos\beta - sen\alpha\, sen\beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $cos\alpha cos\beta$, obtemos:

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 + tan\alpha\, tan\beta}. \tag{3.8}$$

Se $\beta = \alpha$, pelas fórmulas (3.6), (3.7) e (3.8) obtemos:

$$sen2\alpha = 2sen\alpha cos\alpha, \tag{3.9}$$

$$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha, \tag{3.10}$$

$$tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}. \tag{3.11}$$

Pelas fórmulas (3.6), e (3.7), obteremos:

$$sen\alpha = sen(\alpha+\beta)cos\beta - cos(\alpha+\beta)sen\beta,$$

$$cos\alpha = cos(\alpha+\beta)cos\beta + sen(\alpha+\beta)sen\beta.$$

Se nestas últimas duas fórmulas substituirmos $\alpha + \beta$ por α e α por $\alpha - \beta$, teriamos:

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \, cos\beta - sen\beta \, cos\alpha, \tag{3.12}$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \, cos\beta + sen\alpha \, sen\beta. \tag{3.13}$$

E dividindo (3.12) por (3.13), obteremos:

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \, tan\beta} \tag{3.14}$$

Vamos expressar $sen\alpha$, $cos\alpha$ e $tan\alpha$ em termos de $tan\frac{\alpha}{2}$. Pelas fórmulas anteriores, temos que:

$$sen\alpha = 2sen\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{sen\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} \cdot cos^2\frac{\alpha}{2} = 2tan\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1 + tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{3.15}$$

$$cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2} = cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{sen^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{cos^2\frac{\alpha}{2}}}\left(1 - tan^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tan^2\frac{\alpha}{2}} \tag{3.16}$$

e

$$tan\alpha = \frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1 - tan^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{3.17}$$

Agora iremos mostrar algumas identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas.

Pela semelhança de triângulos, os triângulos OPM e OAN são semelhantes (Fig. 3.20), assim temos que:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Mas $\frac{AN}{OA} = \tanh t$, desde que o raio $OA = 1$, então:

$$\frac{PM}{OP} = \frac{senht}{cosht}.$$

Assim obteremos:

$$tanht = \frac{senht}{cosht}. \tag{3.18}$$

Temos ainda que as coordenadas do ponto M da hipérbole são $OP = X$ e $PM = Y$, e como a equação da hipérbole é $X^2 - Y^2 = 1$, segue que:

$$OP^2 - PM^2 = 1,$$

ou

$$cosh^2 t - senh^2 t = 1. \tag{3.19}$$

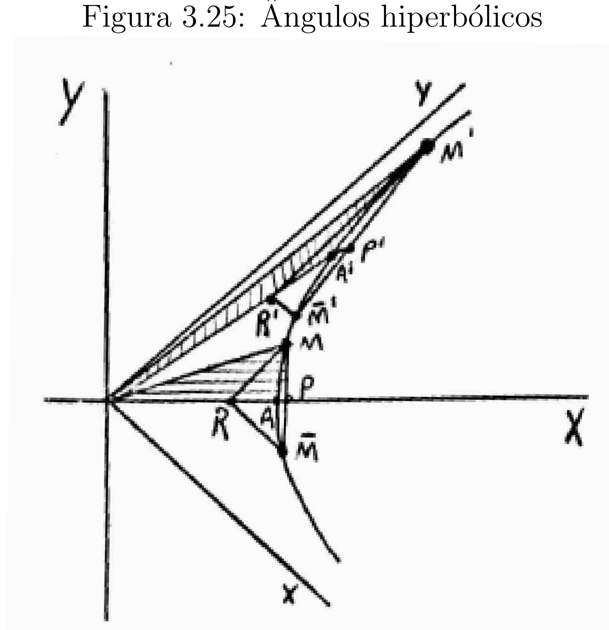
Dividindo ambos os lados da identidade (3.19), primeiramente por $cosh^2 t$ e depois por $senh^2 t$, obteremos outras duas fórmulas:

$$1 - tanh^2 t = \frac{1}{cosh^2 t}, \tag{3.20}$$

$$coth^2 t - 1 = \frac{1}{senh^2 t}. \tag{3.21}$$

Agora vamos mostrar as fórmulas da soma de dois ângulos de funções hiperbólicas.

Figura 3.25: Ângulos hiperbólicos



Aplicando uma rotação hiperbólica, vamos transformar os raios OA e OM da hipérbole nos raios OA' e OM' (Figura 3.25). Os ângulos das hipérboles AOM e $A'OM'$ serão iguais devido as propriedades de rotação da hipérbole. Chamaremos esses ângulos de t. Além disso, os segmentos PM e OP serão transformados por esta rotação nos segmentos $P'M'$ e OP', respectivamente. Sejam $\overline{M}$ e $\overline{M}'$ pontos nos quais MP e $M'P'$ intersectam a hipérbole. Temos $MP = P\overline{M}$, desde que OA seja um eixo de simetria da hipérbole, e $M'P' = P'\overline{M}'$.

Em outras palavras, as cordas $M\overline{M}$ e $M'\overline{M}'$ são conjugadas do diâmetro OP e OP', respectivamente.

As equações $senht = PM$ e $cosht = OP$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$senht = \frac{PM}{OA}, cosht = \frac{OP}{OA},$$

desde que $OA = 1$.

Vamos provar que

$$senht = \frac{PM}{OA}, cosht = \frac{OP}{OA}. \tag{3.22}$$

Através de cada um dos pontos $\overline{M}$ e $\overline{M}'$ vamos construir um segmento de reta paralelo à assíntota Ox e através dos pontos M e M' um segmento paralelo à assíntota Oy (Figura 3.25) Isto segue da propriedade demonstrada anteriormente, onde os pontos de intersecção R e R', estão nos diâmetros OA e OA', respectivamente.

Os triângulos $MR\overline{M}$ e $M'R'\overline{M}'$ são triângulos retângulos, desde que as assíntotas Ox e Oy sejam perpendiculares. Assim os pontos P e P' são pontos médios das hipotenusas destes triângulos. Usando o teorema da geometria plana que afirma que estes pontos médios das hipotenusas são equidistantes dos vértices dos triângulos, teremos:

$$PM = \overline{M}P = RP,$$
$$P'M' = \overline{M}'P' = R'P'.$$

Portanto,

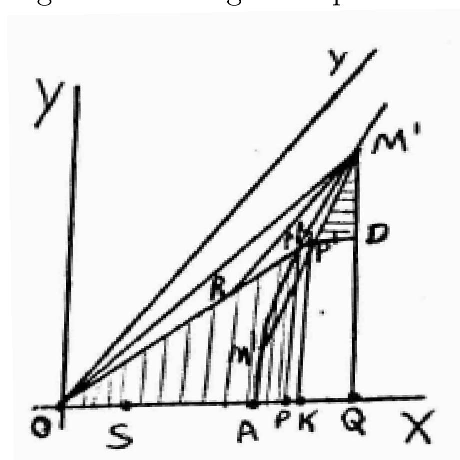
$$senht = \frac{RP}{OA}, cosht = \frac{OP}{OA}.$$

Assim, teremos:

$$\frac{RP}{OA} = \frac{R'P'}{OA'} = \frac{P'M'}{OA'}; \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}.$$

Agora temos dois ângulos hiperbólicos, $AOM = t$ e $MOM' = u$ (Figura 3.26)

Figura 3.26: Ângulos hiperbólicos



Pelos pontos M e M' trace as perpendiculares MP e $M'Q$ em OA. Agora, através do ponto M' construa a corda $M'\overline{M}'$ conjugada a OM e seja P' o ponto de intersecção de $M'\overline{M}'$ com OM. Pelo ponto P' trace as perpendiculares $P'D$ a $M'Q$ e $P'K$ a OA. Assim nós obtemos:

$$\begin{aligned} senht = PM, cosht = OP; \\ senhu = \frac{P'}{OM}, coshu = \frac{OP'}{OM}; \\ senh(t+u) = QM', cosh(t+u) = OQ. \end{aligned}$$

Os triângulos OPM e OKP' são semelhantes, desde que, visto que ambos são triângulos retângulos e possuem um ângulo em comum.

Os triângulos OPM e $M'DP'$ são semelhantes, são dois triângulos retângulos e podemos mostrar que $M\hat{O}P = P'\hat{M}'D$. Seja a reta $M'R$ paralela a assíntota Oy da hipérbole que intercepta o diâmetro OM no ponto R e o eixo OA no ponto S. Assim sendo $Q\hat{M}'S = Q\hat{S}M' = 45^{\circ}$. Além disso, $P'\hat{M}'R = M'\hat{R}P'$, desde que $P'M' = RP'$. Mas,

$$M\hat{O}P = M'\hat{S}Q - S\hat{R}O = M'\hat{S}Q - M'\hat{R}P',$$

$$P'\hat{M}'D = S\hat{M}'Q - R\hat{M}'P';$$

assim sendo, $M\hat{O}P = P'\hat{M}'D$.

Claramente temos:

$$senh(t+u) = QM' = KP' + DM',$$
$$cosh(t+u) = OQ = OK + P'D.$$

Pela semelhança dos triângulos OPM e OKP' obtemos,

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM} \Longleftrightarrow KP' = \frac{OP'}{OM} \cdot PM$$
$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM} \Longleftrightarrow OK = \frac{OP'}{OM} \cdot OP.$$

e pela semelhança dos triângulos OPM e $M'DP'$, obtemos,

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM} \Longleftrightarrow DM' = \frac{P'M'}{OM} \cdot OP$$
$$\frac{P'D}{P'M'} = \frac{PM}{OM} \Longleftrightarrow P'D = \frac{P'M'}{OM} \cdot PM.$$

Observe que, de

$$PM = senht, \quad OP = cosht,$$
$$\frac{P'M'}{OM} = senhu, \quad \tfrac{OP'}{OM} = coshu,$$

obteremos,

$$senh(t+u) = senht\, coshu + cosht\, senht, \tag{3.23}$$

$$cosh(t+u) = cosht\, coshu + senht\, senhu. \tag{3.24}$$

Todas as outras fórmulas de funções hiperbólicas seguem dessas fórmulas apresentadas. De fato:

$$tanh(t+u) = \frac{senh(t+u)}{cosh(t+u)} = \frac{senht\, coshu + cosht\, senhu}{cosht\, coshu + senht\, senhu}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $cosht\, coshu$, obtemos:

$$tanh(t+u) = \frac{tanht + tanhu}{1 + tanht\, tanhu}. \tag{3.25}$$

Se $u = t$, pelas fórmulas (3.23), (3.24) e (3.25) obtemos:

$$senh2t = 2senht\, cosht, \tag{3.26}$$

$$cosh2t = cosh^2 t + senh^2 t, \tag{3.27}$$

$$tanh2t = \frac{2tanht}{1 + tanh^2 t}. \tag{3.28}$$

Pelas fórmulas (3.23), e (3.24), obteremos:

$$senht = senh(t+u)\, coshu - cosh(t+u)\, senhu,$$

$$cosht = cosh(t+u)\, coshu - senh(t+u)\, senhu.$$

Se nestas últimas duas fórmulas substituirmos $t+u$ por t e t por $t-u$, teremos:

$$senh(t-u) = senht\, coshu - senhu\, cosht, \tag{3.29}$$

$$cosh(t-u) = cosht\, coshu - senht\, senhu, \tag{3.30}$$

e dividindo (3.29) por (3.30), obteremos:

$$tanh(t-u) = \frac{tanht - tanhu}{1 - tanht\, tanhu}. \tag{3.31}$$

Agora vamos expressar $senht$, $cosht$ e $tanht$ em termos de $tanh\frac{t}{2}$. Pelas fórmulas anteriores, temos que:

$$senht = 2senh\frac{t}{2} \cdot cosh\frac{t}{2} = 2\frac{senh\frac{t}{2}}{cosh\frac{t}{2}} \cdot cosh^2\frac{t}{2} = 2tanh\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{cosh^2\frac{t}{2}}} = \frac{2tanh\frac{t}{2}}{1 - tanh^2\frac{t}{2}},$$

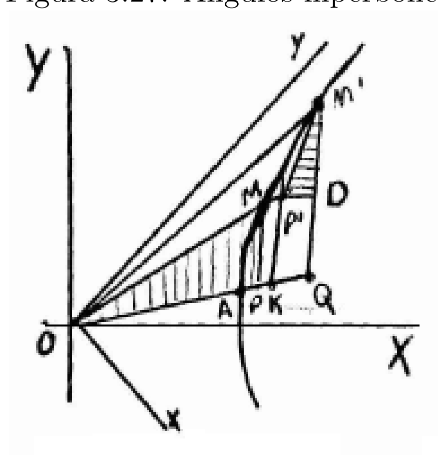
$$cosht = cosh^2\frac{t}{2} + senh^2\frac{t}{2} = cosh^2\frac{t}{2}\left(1 + \frac{senh^2\frac{t}{2}}{cosh^2\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{cosh^2\frac{t}{2}}}\left(1 + tanh^2\frac{t}{2}\right) = \frac{1 + tanh^2\frac{t}{2}}{1 - tanh^2\frac{t}{2}},$$

e

$$tanht = \frac{2tanh\frac{t}{2}}{1 + tanh^2\frac{t}{2}}. \tag{3.32}$$

É possível notar que, na derivação das fórmulas de adição para as funções hiperbólicas, não foi essencial medir o primeiro ângulo t do eixo de simetria OA da hipérbole; quase exatamente como acima, é possível derivar as fórmulas (3.23) e (3.24) para uma posição arbitrária do diâmetro OA. De fato, se na $Figura$3.27 tomarmos os ângulos AOM e MOM' como os ângulos t e u, respectivamente, então MP e $M'P$ são conjugados de OA, e $M'P'$ é um conjugado de OM.

Figura 3.27: Ângulos hiperbólicos



Assim sendo,

$$
\begin{aligned}
senht = \frac{PM}{OA}, cosht = \frac{OP}{OA}, \\
senhu = \frac{P'M'}{OM}, coshu = \frac{OP'}{OM}, \\
senh(t+u) = \frac{QM'}{OA}, \\
cosh(t+u) = \frac{OQ}{OA},
\end{aligned}
$$

que implicam as fórmulas (3.23) e (3.24), como acima.

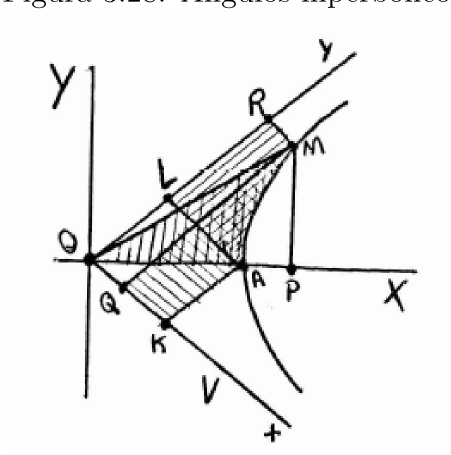
3.0.5 Forma analítica

Vamos considerar a hipérbole unitária de equação $X^2 - Y^2 = 1$ e seja M um ponto arbitrário dessa hipérbole. Vamos chamar o ângulo hiperbólico AOM de t. As coordenadas dos pontos

M e A relativo ao sistema de coordenadas cujos eixos coincidem com os eixos da hipérbole são dados por:

$$OP = cosht,$$
$$PM = senht,$$
$$OA = 1, AA = 0.$$

Figura 3.28: Ângulos hiperbólicos



As coordenadas desses mesmos pontos no sistema de coordenadas cujos eixos coincidem com as assíntotas da hipérbole são determinadas pelas fórmulas vistas na Seção 3.0.3, a saber:

$$OQ = (cosht - senht)\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$OR = (cosht + senht)\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$OK = (1 - 0)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$OL = (1 + 0)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Além disso, é fácil mostrar que as áreas dos trapézios curvilíneos $QKAM$ e $RLAM$ são iguais e que cada uma possui a mesma área que o setor hiperbólico OAM, pois, pela definição de hipérbole, as áreas dos retângulos coordenados dos pontos M e A são iguais, isto é,

$$S_{OQMR} = S_{OKAL}.$$

Consequentemente

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{OKAL} + S_{OQMR} = S_{RLAM}.$$

Assim, uma vez que $S_{\Delta MOQ} = \frac{1}{2}S_{OQMR}$ e $S_{\Delta AOK} = \frac{1}{2}S_{OKAL}$, temos

$$S_{\Delta MOQ} = S_{\Delta AOK}.$$

Portanto

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{\Delta AOK} + S_{\Delta MOQ} = S_{OAM}.$$

Mas, pela definição de ângulos hiperbólicos, vista anteriormente,

$$S_{OAM} = \tfrac{1}{2}t;$$

logo,

$$S_{QKAM} = S_{RLAM} = \tfrac{1}{2}t.$$

Como a hipérbole unitária tem a equação $xy = \frac{1}{2}$ relativa ao sistema de coordenadas cujos eixos coincidem com as assíntotas, teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} S_{QKAM} &= \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{OK}{OQ}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_e\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(cosht - senht)\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\log_e(cosht - senht), \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}t &= -\frac{1}{2}\log_e(cosht - senht) \\ -t &= \log_e(cosht - senht). \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$
\begin{aligned}
S_{RLAM} &= \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{OR}{OL}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log_e \frac{(cosht + senht)\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log_e(cosht + senht),
\end{aligned}
$$

consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}t &= \frac{1}{2}\log_e(cosht + senht) \\
t &= \log_e(cosht + senht).
\end{aligned}
$$

Estas fórmulas que acabamos de ver, estabelecem algumas relações entre as funções hiperbólicas e logaritmos na base e. Por estas fórmulas obtemos

$$
\begin{aligned}
cosht - senht &= e^{-t}, \\
cosht + senht &= e^{t},
\end{aligned}
$$

consequentemente,

$$
\begin{aligned}
cosht &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \\
senht &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}.
\end{aligned}
$$

Temos ainda que

$$
\begin{aligned}
tanht &= \frac{senht}{cosht} \\
tanht &= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}.
\end{aligned}
$$

Estas três fórmulas acima nos fornecem expressões analíticas para as funções hiperbólicas, as quais são frequentemente tomadas como as definições das funções hiperbólicas no ensino superior. Ainda sobre estas três fórmulas, podemos facilmente mostrar todas as identidades das funções hiperbólicas vistas anteriormente, aqui irei mostrar apenas a identidade $cosh^2 t - senh^2 t = 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} cosh^2 t - senh^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1, \end{aligned}$$

logo,

$$cosh^2 t - senh^2 t = 1.$$

Capítulo 4

Aplicação de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio

No Brasil há diferentes formas de se ensinar Matemática. A definição de quais conteúdos ensinar e do que é desejado que os estudantes saibam é influenciada por diferentes referências. Buscando solucionar a questão, o Ministério da Educação (MEC) propôs criar a base nacional comum dos currículos (BNCC), um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

A Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

A Base estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se esperam que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio.

Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos.

Segundo os PCN's, as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Mais amplamente integrado à vida comunitária, o estudante da escola de nível médio já tem condições de compreender e desenvolver consciência mais plena de suas responsabilidades e direitos, juntamente com o aprendizado disciplinar.

No nível médio, esses objetivos envolvem, de um lado, o aprofundamento dos saberes disciplinares em Biologia, Física, Química e Matemática, com procedimentos científicos pertinentes aos seus objetos de estudo, com metas formativas particulares, até mesmo com tratamentos didáticos específicos.

De outro lado, envolvem a articulação interdisciplinar desses saberes, propiciada por várias circunstâncias, dentre as quais se destacam os conteúdos tecnológicos e práticos, já presentes junto a cada disciplina, mas particularmente apropriados para serem tratados desde uma perspectiva integradora.

Além disso, considerando um aluno da 3ª série do Ensino Médio, e o fato que o mesmo tem o direito de aprender sobre as cônicas, após este assunto é possível o professor fazer uma abordagem sobre funções hiperbólicas, pois já estudaram trigonometria na 2ª série do Ensino Médio.

O professor pode conceituar tal assunto, abordado no capítulo anterior e relacionar com o cotidiano dos alunos, onde várias instalações utilizam o gráfico de uma função hiperbólica.

Acreditamos que é importante que os alunos tenham um primeiro contato com este novo assunto, pois grande parte dos cursos de nível superior possuem alguma disciplina que contenha Cálculo e consequentemente utilizam o estudo de funções hiperbólicas. Desta forma a seguir, sugerimos um modelo que o professor poderá seguir para introduzir essa classe de funções aos alunos.

4.0.1 Modelo de aplicação no Ensino Médio

O estudo sobre propriedades da hipérbole pode ser mais amplo, não precisamos nos restringir apenas ao estudo analítico. Desta forma, estamos propondo uma maneira de ampliar a exploração de tal conteúdo, a qual terá como público alvo alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Partindo-se do pressuposto de que os alunos são construtores do próprio conhecimento e de que essa construção dar-se-á através da interação entre alunos, professor e ambiente onde se vivem, o professor deixa de ter o papel de mero transmissor de conhecimentos para ser também o mediador entre o conhecimento matemático e os aprendizes, a fim de estimular os alunos a comunicar suas ideias matemáticas, explicando seus raciocínios e defendendo seus pontos de vista. Tal dinâmica é parte imprescindível do processo de ensino e aprendizagem.

Saber lidar com as diferenças é outro ponto importante para o professor. Para ensinar as funções hiperbólicas o professor deve se atentar ao nível de conhecimento de sua turma, e fazer algumas adaptações pode ser essencial para conseguir os objetivos traçados.

O planejamento do seu trabalho deve se iniciar pelas leituras sobre a História da Matemática, referentes ao nosso conteúdo. Para iniciar o professor pode fazer uma breve explanação da História da Matemática, citando os matemáticos Johann Lambert, Vincenzo de Riccati, Von Braunmühl e sua obra denominada *História da Trigonometria*, Felix Klein, Michel Chasles, Bernoulli e família, Huygens. Estes célebres matemáticos foram citados neste trabalho.

Após fazer este atento para a História da Matemática, o professor deverá revisar as propriedades de homotetia, pois os alunos já tiveram contato anteriormente com este conteúdo, e após esta revisão o professor deverá explicar a rotação hiperbólica e suas propriedades, como foram abordados neste trabalho.

Depois sugere-se que se inicie a apresentação das funções hiperbólicas, fazendo sempre analogias com a teoria das funções trigonométricas, a exemplo do que foi aqui exposto. Finalmente poderá mostrar a forma analítica das funções hiperbólicas, e caso haja necessidade, o professor poderá revisar os logaritmos naturais, o número e para os alunos poderem compreender de forma ampla os conceitos abordados.

Dando sequência à apresentação do conteúdo, e visando justificar a importância do estudo de tais funções, bem como mostrar a conexão entre os saberes, o professor poderá exemplificar, buscando na rede mundial de computadores imagens onde se utilizam o princípio das funções hiperbólicas, como a catenária. A seguir, elencamos alguns destes exemplos.

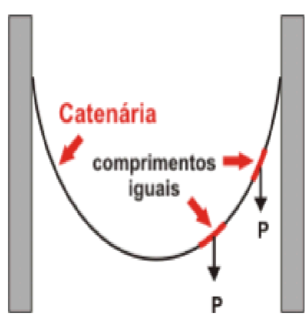
Matemáticos do século XVII concentraram sua atenção no problema da catenária quando Jakob Bernoulli colocou como um desafio em 1690 em *Acta Eruditorum* no qual ele resolveu o problema da isócrona, que consistia em construir a curva ao longo da qual um corpo cairá na mesma quantidade de tempo de qualquer posição inicial.

Além disso, com o surgimento da energia elétrica, houve a necessidade de criar as linhas de transmissão, nas quais temos cabos suspensos presos a dois postes distantes um do outro, os quais assumem a forma de uma catenária, curva está definida através da função cosseno hiperbólico. De fato, observa-se que um cabo fléxivel com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso, onde o seu ponto mínimo é $(0, a)$, com $a > 0$, tem sua equação igual a:

$$y = a.cosh\tfrac{x}{a}.$$

A catenária também serve de inspiração para a arquitetura e a engenharia, suas aplicações são muito úteis. A seguir, vemos alguns exemplos onde se utiliza a catenária nestas áreas.

Figura 4.1: Catenária



Fonte: Alhadas 2013

O arco abaixo é chamado *Gateway Arch*, o qual possui a forma de catenária e sua altura é de 192 metros. Está localizado no estado americano do Missouri, e foi uma homenagem ao presidente Thomas Jefferson.

Figura 4.2: Gateway Arch em Saint Louis

Fonte: Alfa Connection

Este próximo exemplo é um clássico, uma corrente sustentada por dois postes verticais.

Figura 4.3: Corrente fixa por dois postes

Fonte: Alfa Connection

Varios artistas e arquitetos também utilizava a catenária em suas obras, como por exemplo o arquiteto espanhol Antônio Gaudi (1823 - 1926).

Figura 4.4: Arcos na Basílica da Sagrada Família em Barcelona

Fonte: Alfa Connection

Figura 4.5: Arco catenário, casa Milá

Fonte: Alfa Connection

A catenária também é utilizada para funções que não estão associadas apenas ao contexto artístico-arquitetônico, conforme ilustram os exemplos a seguir.

Figura 4.6: Fornos para cerâmica resistentes a altas variações de temperaturas

Fonte: Alfa Connection

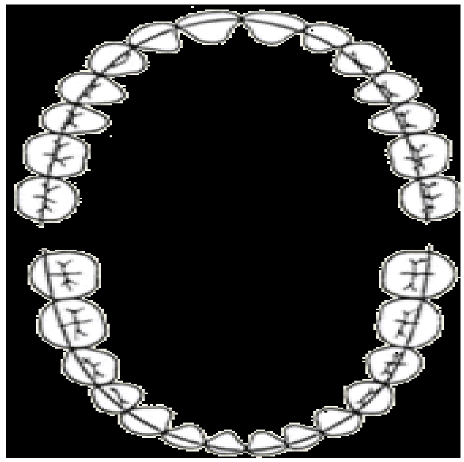
O teto do aeroporto internacional de Dulles foi construído a partir de translação da catenária e usado como cobertura, este modelo de telhado é muito importante tanto esteticamente como para a sua estrutura, pois aumenta a estabilidade, flexibilidade e dá mais firmeza à estrutura, também dispersa os ruídos rapidamente, o que é tão necessário em um aeroporto.

Figura 4.7: Dulles Internacional Airport

Fonte: Alfa Connection

Um último exemplo que podemos observar com relação às aplicações da catenária é sua utilização em atividades odontológicas, pois aparece na arcada dentária dos seres humanos, constituindo uma forma padrão.

Figura 4.8: Arcada dentária no ser humano



Fonte: Alfa Connection

Por fim, com o objetivo de fixar os conteúdos apresentados, bem como instigar a curiosidade sobre as semelhanças das funções hiperbólicas com as funções trigonométricas, podemos propor a série de atividades a seguir, que pode ser ampliada, a critério do professor.

Atividade 4.0.1. *Com o auxílio do software livre GeoGebra, construa o gráfico das funções trigonométricas* $sent$*,* $cost$ *e* $tant$ *e depois construa os gráficos das funções hiperbólicas* $senht$*,* $cosht$ *e* $tanht$*.*

Solução: Usando o GeoGebra, vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = senx$, $g(x) = cosx$ e $h(x) = tanx$, e depois vamos esboçar o gráfico da função $f'(x) = senhx$, $g'(x) = coshx$ e por fim $h'(x) = tanhx$, resultando então nos seguintes gráficos:

Figura 4.9: Gráficos de Funções Trigonométricas

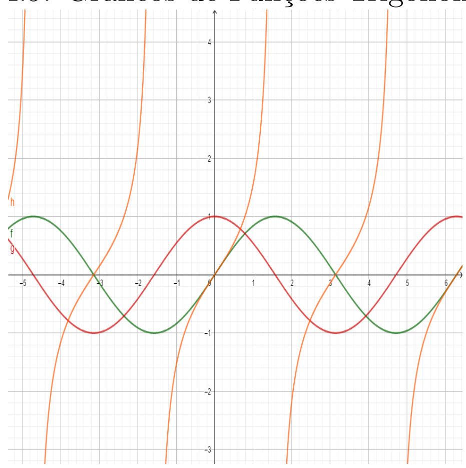
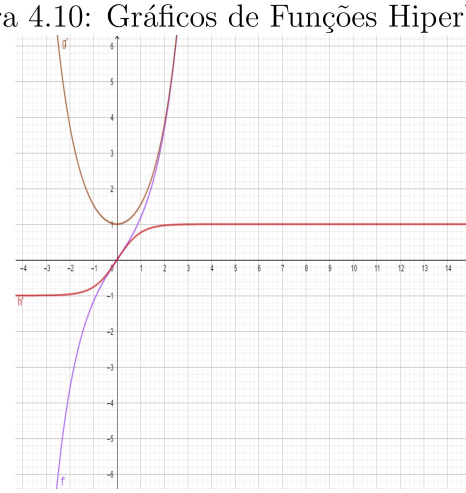


Figura 4.10: Gráficos de Funções Hiperbólicas



Atividade 4.0.2. *Sabendo que* $cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ *e* $senht = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ *encontre a forma analítica de* $tanht$*.*

Solução: Usando $cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ e $senht = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ e sabendo que $tanht = \frac{senht}{cosht}$, teremos:

$$\begin{aligned} tanht &= \frac{senht}{cosht} \\ tanht &= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \end{aligned}$$

Atividade 4.0.3. *Sabendo que* $cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ *e* $senht = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ *prove a identidade* $cosh^2(t) - senh^2(t) = 1$*.*

Solução: Usando $cosht = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ e $senht = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ iremos subtituir em $cosh^2(t) - senh^2(t)$, teremos:

$$\begin{aligned} cosh^2t - senh^2t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1 \end{aligned}$$

logo,

$$cosh^2t - senh^2t = 1.$$

Atividade 4.0.4. *Sabendo que* $senht = \sqrt{8}$*, calcule o valor de* $cosht$*.*

Solução: Sabendo que $senht = \sqrt{8}$, iremos utilizar a identidade $cosh^2t - senh^2t = 1$, logo:

$$\begin{aligned} cosh^2t - senh^2t &= 1 \\ cosh^2t - \left(\sqrt{8}\right)^2 &= 1 \\ cosh^2t &= 1 + 8 \\ cosht &= \sqrt{9} \\ cosht &= 3. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Considerações finais

De acordo com o que foi exposto neste trabalho, entendemos que é possível fazer a inserção do estudo das funções hiperbólicas para alunos da 3ª série do Ensino Médio, pois nesta etapa entende-se que eles dominam assuntos como análise e interpretação de gráficos, funções afim, quadrática, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas circulares, também dominam as cônicas, pois estão compostas no currículo mínimo de Matemática.

Durante este trabalho foi possível observar que a sequência de desenvolvimento aqui apresentada é realmente necessária para podermos compreender as funções hiperbólicas, bem como sua analogia com as funções trigonométricas circulares, além de introduzir um pouco da História da Matemática, e a ideia de Vincenzo Riccati de usar os termos "*sinus hyperbolico*" e "*cosinus hyperbolico*". Também discutimos outros nomes de matemáticos fantásticos como Lambert, a família Bernoilli, Johann Heinrich Lambert, Felix Klein, Michel Chasles, Huygens, sabendo ainda que tem tantos outros nomes por trás desse estudo, citando também Galileu Galilei, Gottfried Wilhelm von Leibniz, Leonardo da Vinci, entre outros, e graças a todos estes seres célebres podemos aplicar as funções hiperbólicas em diversas áreas do conhecimento, tornando então impossível não partilhar este conhecimento com alunos da Educação Básica.

Nós discutimos o desenvolvimento, as propriedades, as identidades hiperbólicas construídas passo a passo, e mostramos que é importante fazer uma análise cuidadosa destes assuntos, preparando os alunos que forem seguir formação superior para, caso se depararem com estes assuntos, já tenham os visto em algum momento de sua formação. Desta forma, as funções hiperbólicas deixariam de ser um assunto novo e nunca explorado anteriormente, pois como diz a Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional "A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores."

Portanto, como sugerido aqui, é possível fazer a inserção do conceito e algumas aplicações das funções hiperbólicas para alunos da 3ª série do Ensino Médio, podendo serem realizadas algumas adaptações as quais o professor julgar necessárias na forma como se abordar o conteúdo, expressas neste trabalho.

Fica então este trabalho, como um manual que objetiva fornecer subsídios ao professor, para que o mesmo possa apresentar as funções hiperbólicas aos seus alunos. Caso não seja possível uma introdução deste conteúdo na matriz curricular, o professor poderia trabalhar este tema em forma de projeto de extensão, sendo interessante que os alunos possam ter acesso a todo desenvolvimento aqui realizado.

Para finalizar, caso o professor escolha por realizar um projeto de extensão, ele não poderá deixar de mostrar todo o desenvolvimento aqui demonstrado, partindo das definições de homotetias, passando pelas hipérboles, realizando então as rotações hiperbólicas e por fim definindo as funções hiperbólicas, relacionando-as com as funções trigonométricas. Caso queira buscar referências suplementares, o mesmo poderá buscar outras informações que julgar complementares a este assunto.

Bibliografia

[1] AABOE. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2002.

[2] ALFA CONNECTION: *Equilíbrio de cabos suspensos*. Disponível em https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/forcas/forcas-em-equilibrio/equilibrio-de-cabos-suspensos/. Acesso em 01 set. 2018.

[3] ALHADAS, M. C. *Funções Hiperbólicas no Ensino Médio*. Dissertação de mestrado - UENF. Rio de Janeiro. 2013.

[4] AsBEA. Associação Brasileira dos Escritórios de Arquitetura: Disponível em http:www.asbea.org.br. Acesso em 08 jul. 2018.

[5] BABINI, J.; PASTOR, J. R. *História de la matemática*. Buenos Aires: Espasa-Calpe. 1951.

[6] BARNETT, J.H. *Enter, Stage Center: The Early Drama of the Hyperbolic Functions*. VOL.77. N.1. University of Southern Colorado. Fevereiro de 2004.

[7] BARUFI, M.C.B.; BRUALDI, R. A.; GRAVES, J. S.; LAWRENCE, K. M. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral*. 1999. 184 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

[8] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3.ed. São Paulo: Blucher. 2010.

[9] BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 08 jul. 2018.

[10] BRASIL. LEI Nº 9.394, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em $http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm$. Acesso em 01 set. 2018.

[11] BRASIL. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em 08 jul. 2018.

[12] DANTE,L. R. *Projeto Teláris: Matemática - 9º ano.* 2.ed. São Paulo: Editora Ática. 2015.

[13] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Unicamp, São Paulo. 2004.

[14] LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.*V.1. Traduzido por Cyro de Carvalho Patarra. 3.ed. São Paulo: HARBRA ltda. 1994.

[15] MAOR, E. *A História de um Número.* Traduzido por Jorge Califfe. 4.ed. Rio de Janeiro: Record. 2008.

[16] McMAHON, J. *Hyperbolic Functions.* 4.ed. New York: John Wiley and Sons. 1906.

[17] SHERVATOV, V. G. *Hyperbolic Functions.* 2.ed. Boston: D. C. Heath. 2007.

[18] STEWART, J. *Cálculo.*V.1. Traduzido por Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. 6.ed. São Paulo: Cengage Learning. 2009.

[19] STEWART, J. *Cálculo.*V.2. Traduzido por Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. 6.ed. São Paulo: Cengage Learning. 2009.

[20] VENTURI, J.J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica.* 10.ed. Curitiba. 2015.

[21] Von BRAUNMÜHL. A. *Vorlesungen über geschicten der trigonometrie.*Leipzip. 1903.