PATRICK F. SANTOS

UMA ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA SEM O USO ABUSIVO DE FÓRMULAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Magister Scientiae.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

PATRICK F. SANTOS

UMA ABORDAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA SEM O USO ABUSIVO DE FÓRMULAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Magister Scientiae.

APROVADA: 15 de março de 2013.

Mércio Botelho Faria

Marco Antonio Escher

Alexandre Miranda Alves
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, presente comigo em todos os instantes.

A minha amada esposa, Sulamita, pelo amor e companheirismo, fundamentais em muitos momentos desta caminhada.

A toda a minha família que sempre esteve ao meu lado.

Ao meu orientador, Dr. Alexandre Miranda Alves, pelo apoio e pelas sugestões para elaboração deste trabalho.

Á Universidade Federal de Viçosa e em especial ao seu Departamento de Matemática que me proporcionou essa oportunidade de melhorar meus conhecimentos Matemáticos.

Aos colegas do Mestrado da turma 2011, pela troca de experiência e pela cumplicidade de nossa convivência.

À Capes pelo apoio financeiro, fundamental para os meus deslocamentos e estadias durante o curso.

SUMÁRIO

Página

RESUMO

SANTOS, Patrick Ferreira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2013.
Uma abordagem da Análise Combinatória sem o uso abusivo de fórmulas.
Orientador: Alexandre Miranda Alves.

As dificuldades existentes com o ensino ou aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio das escolas públicas brasileiras constituíram-se como tema motivador deste trabalho. Assim, temos como objetivo primordial, a exposição de um abordagem da Análise Combinatória sem o uso abusivo de fórmulas. Apresentamos vários exemplos almejando um significativo crescimento na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas combinatórios. Mostrando que o mais importante é habituar os alunos com a análise cuidadosa de cada problema. Indicando que para resolver os problemas de contagem, será necessário parar, concentrar, discutir, pensar, se imaginar no papel da pessoa que vai fazer a "coisa"pedida pelo problema, procurando trocar a decisão a ser tomada por uma sequência de decisões mais simples e sucessivas para que em seguida possa aplicar o princípio fundamental da contagem. Por fim, propomos uma atividade com o intuito de aprofundar o ensino da Combinatória. Esperamos que essa dissertação se constitua em material de reflexão do ensino de Análise Combinatória, enfatizando a importância de se evitar o uso abusivo de fórmulas, a fim de promover uma aprendizagem significativa desse tópico.

ABSTRACT

SANTOS, Patrick Ferreira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March of 2013. **Combinatorial approach without the overuse of formulas**. Adviser: Alexandre Miranda Alves.

Difficulties with the teaching of Combinatorial Analysis in high school of brazilian public schools were the motivation of this work. Thus we have as primary objective, the exposure of a combinatorial approach without the overuse of formulas. We present several examples targeting a significant growth in understanding the concepts and solving combinatorial problems. Showing that the most important thing is to familiarize the students with the careful analysis of each problem. Indicating that to solve counting problems, you need to stop, focus, discuss, think, imagine yourself in the role of the person who will do the "thing"which is required for the problem, trying to change the decision to be made by a sequence of simple decisions and subsequent to that, so then be able to apply the fundamental principle of counting. Finally, we propose an activity in order to deepen the teaching of Combinatorics. Hopefully this thesis would constitute a material reflection of teaching Combinatorial Analysis, emphasizing the importance of avoiding the overuse of formulas, leading to a significant learning of this topic.

1 INTRODUÇÃO

Considerando a importância e a riqueza de material didático presente na História da Matemática, optamos por apresentar, no segundo capítulo, tópicos da História da Análise Combinatória que podem ser utilizados como recurso metodológico em sala de aula. Desse modo, prosseguimos com um apanhado da História da Matemática enfatizando aspectos da origem da contagem.

No terceiro capítulo, apresentamos algumas justificativas que nos levaram a elaborar essa dissertação e a maneira como desejamos conduzi-lá. Investigamos ainda as propostas curriculares mais recentes, particularmente os Parâmetros Curriculares Nacionais, do Governo Federal e o Conteúdo Básico Comum, proposta do Governo do Estado de Minas Gerais, fazendo também um apanhado do que estas propostas curriculares trazem a respeito dos temas de Análise Combinatória.

No quarto capítulo expomos um pouco da teoria da Análise Combinatória e deixamos bem claro o princípio fundamental da contagem. Em seguida, apresentamos vários exemplos, fazendo um paralelo entre, solucionar os problemas de contagem usando simplesmente o princípio fundamental da contagem, e solucionar os problemas usando algumas fórmulas tradicionais da Combinatória. Nesse quarto capítulo, apresentamos também agrupamentos de p objetos distintos ou não, entre n objetos distintos dados, que são denominados por combinações completas.

No quinto e último capítulo propomos uma atividade, sobre agrupamentos de p objetos distintos ou não, entre n objetos distintos dados, com a intenção de despertar nos alunos um maior interesse por esse assunto, e também motivá-los a aprofundar seus conhecimentos de Combinatória. Assim, descrevemos minunciosamente os objetivos, público alvo, pre-requesitos, materiais e tecnologia, as dificuldades previstas e os possíveis desdobramentos.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória originou-se com a preocupação de solucionar problemas vinculados a jogos de azar. Segundo Vazquez [16] podemos fazer associações do uso da Combinatória desde os primeiros séculos até a nossa situação atual para tentar instigar alunos e professores no ramo da contagem e também aguçar nosso conhecimento sobre a parte histórica deste conteúdo. Ao pesquisarmos sobre a origem da Análise Combinatória conseguiremos entender de onde surgiu a necessidade desse assunto no passado para resolver problemas práticos. Assim, tornaremos a aprendizagem mais interessante, diante do fato de que conheceremos as necessidades de métodos de contagem tanto no passado como no nosso dia-a-dia.

Inicialmente a Análise Combinatória não era tratada como um cálculo numérico. Segundo Wieleitner [18] o problema mais antigo que se relaciona com a teoria dos números e com a Análise Combinatória, é o da formação dos quadrados mágicos. Chamamos de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1,2,3...n^2 em um quadrado n x n de forma que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. Na figura 1 temos um exemplo.

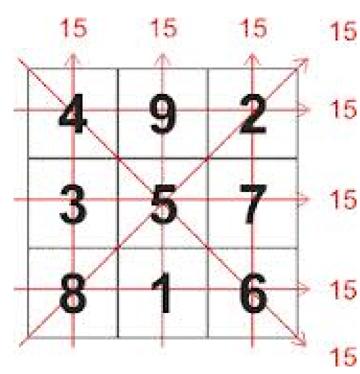


Figura 1: Quadrado Mágico de soma 15

Lo Shu é o nome do primeiro quadrado mágico conhecido. Segundo Needham [10], ele é do século I d.C., porém ele pode ser bem mais antigo do que isto. Ele é chinês e sua representação pode ser observada na figura 2.

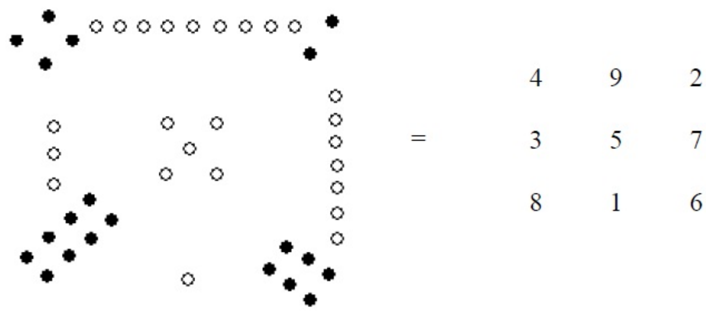


Figura 2: Quadrado Mágico denoninado Lo Shu (VAZQUEZ, [16], p.2)

A forma original do Lo Shu está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang. Segundo Vazquez [17], este quadrado foi uma inovação em sua época, pois, nela a produção de qualquer aritmética simples era motivo de euforia. Acredita-se que a idéia dos quadrados mágicos chegou até os árabes pelos chineses, e que estes fizeram grandes contribuições e construíram quadrados mágicos de ordem 3, 4, 5 e 6. Além de criar quadrados de ordem superior ao Lo Shu, os árabes criaram regras para a construção de quadrados de uma determinada ordem. Wilson e Lloyd [19] afirmam que, um matemático árabe chamado Ahmed Al-Buni, falecido no século XIII, produziu com a ajuda de outros matemáticos, regras para a construção de quadrados de ordem par e ímpar com uma “simples técnica de fronteira”.

Houve um grande avanço no desenvolvimento dos quadrados mágicos nos séculos X e XI, chegando a ter métodos de construção por volta do século XII. Nesse período os estudiosos usavam técnicas que partiam de um quadrado mágico original para posteriormente criar outros de mesma ordem. Contudo, mais tarde chegaram a métodos para criar quadrados mágicos sem a necessidade do original (VAZQUEZ, [17]).

Um trabalho interessante foi desenvolvido pelo chinês Yang Hui por volta do século XIII, se tratava de um quadrado 9x9 constituído por nove quadrados mágicos 3x3. Observe-o na figura 3.

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

Figura 3: Quadrado Mágico 9x9 (BIGGS, [2])

Acredita-se que os chineses já tinham um bom conhecimento sobre os quadrados mágico antes do século XIII, no entanto não há garantias de que os chineses estavam à frente dos árabes no desenvolvimento dos quadrados de ordem grande. Em relação à Europa, estima-se que os quadrados mágicos começaram a surgir no século XIV. Sesiano [14] diz que a introdução dos quadrados na europa se deu por textos traduzidos dos árabes, motivo ao qual dizem que a evolução desse assunto por parte dos europeus teve uma tendência árabe.

A figura 4 trás uma pintura do século XIV feita pelo alemão Albrecht Durer, em sua obra A MELANCOLIA. Nela temos um quadrado de ordem quatro no canto direito superior.

Vale a pena ressaltar que os quadrados mágicos trazem exemplos bem antigos de um importante ramo da Análise Combinatória, fixar condições para contagem dos arranjos. Não podemos deixar de citar os problemas antigos que carregavam de forma implícita o raciocínio da contagem. Vejamos alguns deles:

- O velho problema do lobo, da cabra e do repolho (cerca de 775 d.C.) que é atribuído a Alcuíno de York e diz:

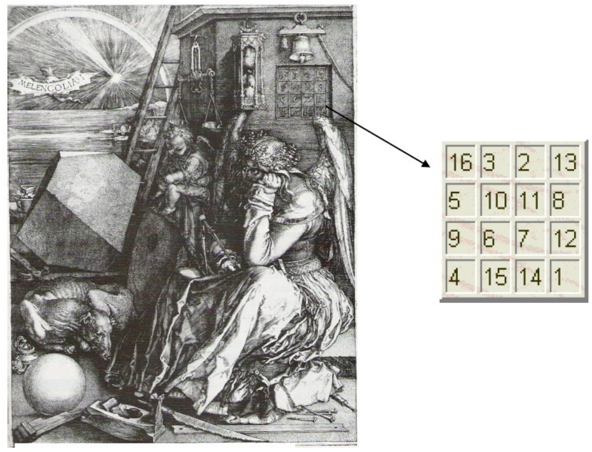


Figura 4: Pintura A MELANCOLIA (O'CONNOR; ROBERTSON, [11])

> *"Um certo homem tinha que transportar para o outro lado de um rio, um lobo, uma cabra e um repolho. O único barco que encontrou podia carregar somente duas coisas de cada vez. Por esta razão ele procurou por um plano que pudesse levar todos para o outro lado totalmente ilesos. Diga a ele, quem é o competente, como pode ser possível transportá-los seguramente"* (VAZQUEZ, [17], p.27 apud EVESS, [3], p.290)

- A poesia abaixo é de um tempo distante que conseguiu sobreviver até os tempos modernos.

> *Quando eu estava indo para St. Ives,*
> *Eu encontrei um homem com sete mulheres,*
> *Cada mulher tem sete sacos,*
> *Cada saco tem sete gatos,*
> *Cada gato tem sete caixas,*
> *Caixas, gatos, sacos e mulheres,*
> *Quantos estavam indo para St. Ives?* (BIGGS, [2])

Apesar de ser uma poesia ela retrata um problema de Combinatória.

- Tavares e Brito [15] comentam que recentemente descobriu-se que o estudo de Combinatória remonta à antiguidade clássica, mais precisamente ao tempo do grande Arquimedes (287 a.C - 212 a.C), um dos que, juntamente com Newton e Gauss, formam a tríade dos maiores matemáticos de todos os tempos. Dentre os trabalhos publicados por ele encontra-se um que sempre aguçou a curiosidade de matemáticos e historiadores. Trata-se do Stomachion, aparentemente um jogo, semelhante ao conhecido Tangran, constituído de quatorze peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado.

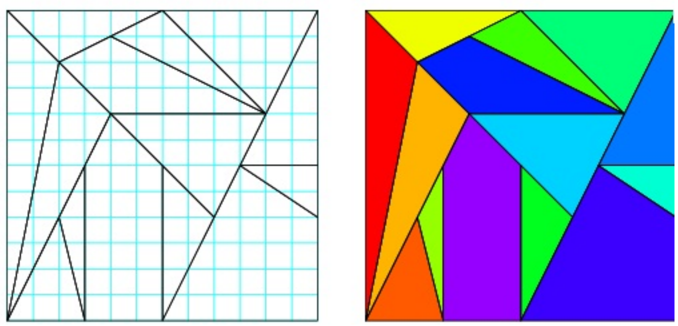


Figura 5: Stomachion

Em dezembro de 2003, o jornal americano The New York Times publicou um artigo intitulado, In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória. Mais especificamente, a conclusão de Netz é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado.

A resposta recentemente provada dessa questão pode ser 17 152 ou, desprezando-se as soluções simétricas, 268, o que nos parece mais razoável, e não se sabe ao certo se o próprio Arquimedes obteve essa resposta. De qualquer forma, o fato fundamental é que a origem da Análise Combinatória não se encontra no estudo do binômio de Newton, como se acreditava, mas mais uma vez remonta à genialidade de um homem que sempre esteve à frente de seu tempo, Arquimedes.

- Wilson [19] afirma que as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas. Um bom exemplo para embasar essa frase é o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue:

> *"Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo?"(VAZQUEZ, [16], p.3)*

A Análise Combinatória se enraizou realmente na matemática por volta do século XVII. Nessa época, surgiu em um curto espaço de tempo, três publicações: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher. Além disso, veio a ser divulgado trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718) que tratavam da Combinatória.

Segundo Vazquez [16], em 1666, Leibniz descreveu a Combinatória como sendo "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos", enquanto Nicholson, em 1818, definiu-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si". Já na visão de Berge [1], uma definição para Combinatória depende de "configurações".

Em Vazquez [16], encontramos o ponto de vista de Biggs [2]. Para ele há dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da Combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação, sendo que o 1º diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividir isso em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Isso é fato da experiência do dia a dia. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, $x \cdot y$.

Na situação atual da Combinatória podemos dizer que há quatro aspectos fundamentais, que são, listar, contar, estimar e existir.

Hoje em dia, a Análise Combinatória atua em diversos outros ramos e fornece fundamentação para a contagem de possibilidades de eventos do cotidiano. Ela é definida como um tópico da Matemática que permite resolver problemas em que é necessário "escolher", "arrumar", e, principalmente "contar"os objetos de um conjunto. É interessante observar que a Análise Combinatória encontra aplicação em vários campos das ciências, estando presente em testes e pesquisas em diversas áreas, tais como: Matemática, Física, Educação, Medicina, Agronomia, Odontologia, Ciências Sociais, Economia, dentre outras. Ela é uma importante ferramenta que o cidadão inserido no mundo das informações, das novas tecnologias e do dia-a-dia das transações financeiras, necessita para resolver problemas reais.

A aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio, basicamente consiste em desenvolver estratégias para resolver problemas do cotidiano nos quais é necessário determinar de quantas maneiras certo evento pode ocorrer. Em alguns problemas, basta escrever uma lista explícita de todos os elementos do conjunto apresentado e depois contá-los. Entretanto, em muitos casos, o conjunto será demasiadamente grande para se fazer essa contagem direta dos seus elementos e, por isso, são necessários outros processos de contagem.

Morgado [9] afirma que problemas de arranjo, combinação e permutação não representam o universo de situações encontradas no cerne da Análise Combinatória, mas possibilita a resolução de problemas de contagem de certo tipo de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

3 JUSTIFICATIVAS

O foco primordial desse trabalho é abordar a Análise Combinatória sem recorrer exclusivamente a fórmulas. Sendo assim, propomos abordar a Análise Combinatória usando como principal ferramenta o princípio fundamental da contagem.

A Análise Combinatória é uma disciplina repleta de problemas capazes de motivar os alunos, e mesmo assim, ela é considerada uma disciplina complicada, em que os alunos têm dificuldades para encontrar o raciocínio correto para desenvolver cada problema.

Segundo Morgado [9], apesar da Combinatória dispor de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, muitas vezes em que vamos resolver um problema de contagem, utilizamos um processo engenhoso que exige a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Talvez esse seja um fator que torna essa parte da matemática tão interessante, em que problemas simples de enunciar, revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Alguns alunos pensam que ao se deparar com um problema de Combinatória, eles devem inicialmente descobrir se o problema a ser tratado é um problema de arranjo, combinação ou permutação. A nossa intenção em relação ao modo como devemos conduzir as soluções dos problemas de Combinatória é bem diferente dessa. Acreditamos que a aprendizagem destes conceitos não podem ser feitas de forma mecânica, limitando-se a empregar fórmulas em situações padronizadas. Para nós o fundamental é procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, seja ele do dia-a-dia ou teórico. Portanto, para resolver os problemas de contagem, será necessário parar, concentrar, discutir, pensar, se imaginar no papel da pessoa que vai fazer a "coisa"pedida pelo problema, procurando trocar a decisão a ser tomada por uma sequência de decisões mais simples e sucessivas. Dessa forma, não criaremos a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Segundo Lima [8], um dos aspectos que pode contribuir para o sucesso dos estudantes do Ensino Médio, no que se refere à aprendizagem da Análise Combinatória, é evitar o uso abusivo de fórmulas ou excesso de casos particulares, que obscurece as ideias gerais e torna o entendimento do assunto mais complicado.

De acordo com Pinto [13], um dos objetivos do Ensino da Matemática, em qualquer nível, é desenvolver habilidades para a solução de problemas. Portanto, é necessário munir o estudante de ferramentas para atuar de forma ativa na resolução de problemas, em especial os que envolvem Análise Combinatória, onde se exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.

Em Brasil ([4], p.44) encontra-se um ótimo embasamento para a necessidade de um aprofundamento da Análise Combinatória no seguinte trecho:

> *As habilidades de escrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.* (BRASIL [4], p.44)

Já no Brasil ([5], p.40) a Combinatória aparece incorporado ao item Tratamento da Informação, veja:

> *Integrarão este bloco estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.*
>
> *Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e especialmente o princípio multiplicativo da contagem.* (BRASIL [5], p.40)

Portanto os professores devem ter em mente que os estudantes devem ser estimulados a adotarem uma postura reflexiva e crítica diante dos mais variados tipos de problemas e não agindo de forma mecanicista através de memorização de fórmulas que, muitas vezes, para eles nada significam. O uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros é de fundamental importância para o constante desenvolvimento das habilidades para a solução de problemas. É importante que os estudantes aprendam com os erros, para que diante de uma solução errada ele possa parar e analisar o porque do erro.

Para que fique mais claro o que estamos querendo dizer, vejamos os seguintes exemplos que envolvem situações cotidianas, e que podem ser resolvidos simplesmente com o princípio fundamental da contagem :

- Os bilhetes de uma rifa são númerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo 7 aparece exatamente 3 vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

  Todos os números de 1000 a 9999 possuem 4 dígitos. Como estamos interessados naqueles que possuem três algarismos 7, precisamos escolher qual será o 4º algarismo. Podemos fazer esta escolha de 8 maneiras, escolhendo qualquer algarismo diferente de zero e sete. Em seguida será necessário escolher o lugar deste 4º algarismo, nesse caso, temos 4 possibilidades para esta escolha, pois, o número que estamos formando possui 4 algarismos. Logo, pelo princípio fundamental da contagem, podemos afirmar que Marcelo comprou $8 \cdot 4 = 32$ bilhetes.

- Um fazendeiro possui um terreno dividido em regiões, como na figura 6, e pretende cultivá-las de forma que as regiões com uma fronteira comum tenham plantios diferentes. De quantas formas ele pode fazer o plantio, se pode optar entre milho, feijão, soja, arroz e trigo para cultivar?

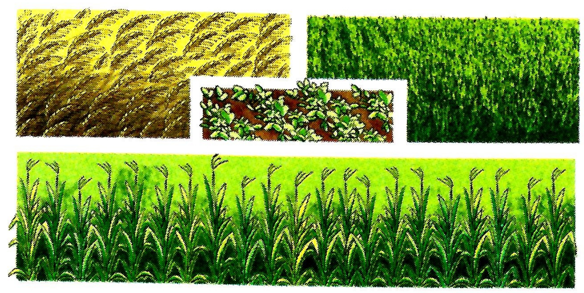


Figura 6: Terreno dividido em regiões

Inicialmente vamos supor que nós fossemos o fazendeiro. Como todas as 4 regiões possuem uma fronteira comum, então elas só podem cultivar alimentos diferentes. Logo, temos 5 maneiras de escolher qual alimento será cultivado na 1ª região. Assim, sobrará 4 alimentos para cultivar nas demais regiões. Dessa forma, temos 4 maneiras de escolher qual alimento será cultivado na 2ª região. Analogamente, temos 3 maneiras de escolher para a 3ª região e 2 maneiras para a 4ª região. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o fazendeiro tem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ formas de fazer o plantio.

- De quantas maneiras diferentes você pode escolher 6 entre 60 números para jogar na Mega-Sena?

Comecemos nos colocando no lugar da pessoa que vai escolher os 6 números. Logo, temos 60 modos de escolher o 1º número. Como sobraram 59 números, temos 59 modos de escolher o 2º número. Analogamente 58 modos para o 3^o, 57 para o 4^o, 56 para o 5^o e por fim 55 modos de escolher o 6^o e último número. Sendo assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos $60\cdot 59\cdot 58\cdot 57\cdot 56\cdot 55$ agrupamentos de 6 números. Entretanto, os jogos $\{7, 18, 23, 39, 42, 45\}$, $\{45, 18, 23, 39, 42, 7\}$ e $\{39, 18, 23, 7, 42, 45\}$, são o mesmo jogo, pois a ordem dos 6 números escolhidos não altera o jogo. Em cada agrupamento podemos escolher o 1^o número de 6 modos (um dos 6 que faz parte do agrupamento). Já o 2^o, podemos escolher de 5 modos, qualquer um dos 5 números que sobraram. Da mesma forma, 4 modos de escolher o 3^o, 3 modos de escolher o 4^o, 2 modos de escolher o 5^o e 1 modo de escolher o 6^o, ou seja, cada agrupamento foi contado $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ vezes. Portanto, o número de maneiras que podemos escolher 6 entre 60 números para jogar na Mega-Sena é

$$\frac{60\cdot 59\cdot 58\cdot 57\cdot 56\cdot 55}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 50063860$$

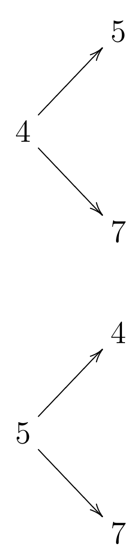
4 PRÍNCIPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

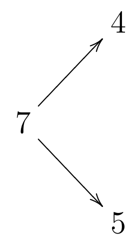
Um dos focos da Análise Combinatória é encontrar métodos de contagem. Em varias situações reais nos deparamos com a necessidade de contar o número de elementos de um determinado conjunto. Quando este conjunto em questão possui um número pequeno de elementos, ficamos motivados a fazer uma lista organizada com todos os elementos, para posteriormente contarmos a quantidade de elementos que apareceram na lista. Infelizmente, nos casos onde o número de elementos é demasiadamente grande não é muito conveniente usarmos essas listas.

Observe os seguintes exemplos:

1. Quantos números de 2 algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto B = {4,5,7 } ?

   O diagrama abaixo nos auxília a encontrar a lista com todos os números possíveis;



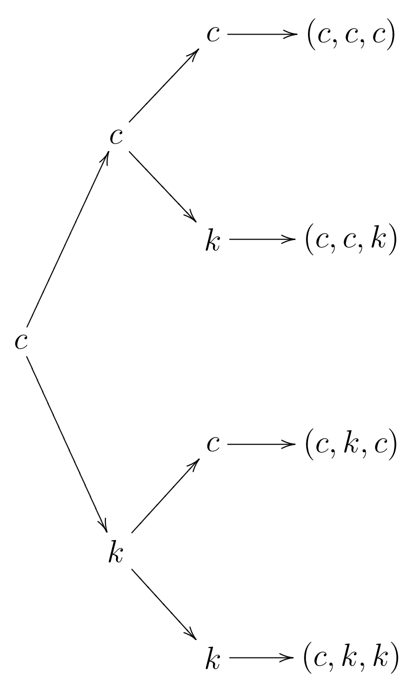


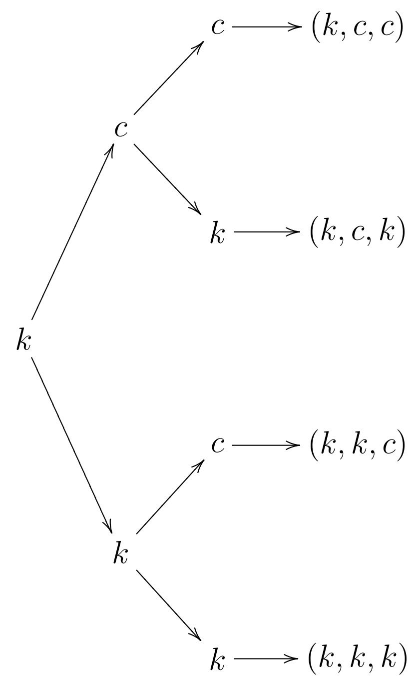
{45, 47, 54, 57, 74 e 75 }

Logo, podem ser formados 6 números.

2. Quantos são os resultados possíveis para o experimento lançar uma moeda três vezes?

   Identificando coroa por **c** e, cara por **k**, podemos representar os resultados por um trio ordenado onde a primeira coordenada informará o resultado do primeiro lançamento, de forma análoga, a segunda e terceira coordenadas informarão os resultados do segundo e terceiro lançamento. Para que fique mais simples para o leitor, usaremos o diagrama abaixo.





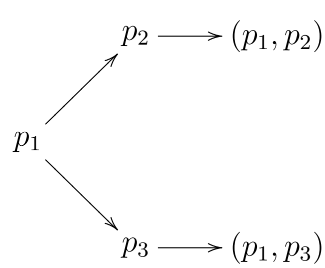
Logo, temos as seguintes possibilidades:

{ (c,c,c), (c,c,k), (c,k,c), (c,k,k), (k,c,c), (k,c,k), ,(k,k,c), (k,k,k) }

Portanto, 8 resultados.

3. Três pessoas p_1, p_2 e p_3 disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os dois primeiros lugares?

   Observe que teremos o seguinte conjunto de possibilidades:



$$\begin{tikzcd}
& p_1 \arrow[r] & (p_2, p_1) \\
p_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& p_3 \arrow[r] & (p_2, p_3)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& p_1 \arrow[r] & (p_3, p_1) \\
p_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& p_2 \arrow[r] & (p_3, p_2)
\end{tikzcd}$$

$\{(p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_2, p_1), (p_2, p_3), (p_3, p_1), (p_3, p_2)\}$

onde (p_i, p_j) indica que p_i chegou em primeiro lugar e p_j chegou em segundo lugar.

Assim, podemos afirmar que teremos 6 possibilidades.

4. Ao lançarmos um dado e uma moeda, podemos encontrar quantos resultados?

   Vamos listar abaixo todos os resultados.Caso o leitor tenha alguma dúvida sobre a veracidade desta lista, basta usar um diagrama de árvore como foi nos exemplos anteriores, que ficará evidente que ela esta correta.

   {(c,1), (c,2), (c,3), (c,4), (c,5), (c,6),

   (k,1), (k,2), (k,3), (k,4), (k,5), (k,6)}

   Assim, concluimos que é possível encontar 12 resultados.

   Após analisarmos esses exemplos, percebemos que seria interessante se existisse um método eficiente para podermos contar as possibilidades sem fazer as listas. Este método existe, ele é denominado de **Príncipio Fundamental da Contagem (P.F.C)**. O P.F.C. diz que, se um determinado evento pode ocorrer de n maneiras, e um outro evento pode ocorrer de m maneiras (independentemente do resultado do primeiro evento), então os dois juntos podem ocorrer de $n \cdot m$ maneiras.

Vale a pena observar que este príncipio pode ser estendido para três ou mais eventos independentes.

Vejamos alguns exemplos onde podemos aplicar o P.F.C.:

5. Uma pessoa vai retirar dinheiro do caixa eletrônico em um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, que começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. Qual o número máximo de tentativas para acertar o número?

   Esta é uma situação cotidiana muito interessante para aplicarmos o P.F.C.. Para encontrarmos esse número máximo, podemos seguir os seguintes passos: Inicialmente observar que só temos uma possibilidade para o primeiro algarismo (o algarismo 6). Em seguida, escolher a posição do algarismo 7 (observe que sobraram quatro posições), para posteriormente encaixarmos um dos 8 algarismos restantes em uma das três posições vagas, analogamente um dos 7 algarismos restantes em uma das duas posições vagas e por fim um dos 6 algarismos restantes na última posição vaga. Portanto,

$$\underbrace{1}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{4}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{8}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{7}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{6}_{\text{possib}} = 1344 \text{ possibilidades}$$

6. Quantos múltiplos de 10 com todos os algarismos diferentes existem entre 100 e 9999?

   Para encontrar essa quantidade podemos separar o problema em dois casos.

   Caso 1: contar os múltiplos que possuem 3 algarismos.

   Como os múltiplos de 10 terminam em 0, só teremos uma possibilidade para a última posição. Já para a primeira posição podemos escolher qualquer algarismo de 1 a 9, portanto, 9 possibilidades. Por fim, para a posição intermediária teremos disponíveis os algarismos de 1 a 9, exceto o que usamos na primeira posição, logo teremos 8 possibilidades para escolhermos este algarismo.

$$\underbrace{9}_{\text{possibilidades}} \cdot \underbrace{8}_{\text{possibilidades}} \cdot \underbrace{1}_{\text{possibilidade}} = 72 \text{ possibilidades}$$

Caso 2: contar os múltiplos que possuem 4 algarismos.

Com o mesmo raciocínio do caso 1 teremos:

$$\underbrace{9}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{8}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{7}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{1}_{\text{possib}} = 504 \text{ possibilidades}$$

Somando os resultados do caso 1, com os do caso 2 teremos $72 + 504 = 576$ múltiplos.

7. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 8 questões de múltipla-escolha, com 4 alternativas por questão?

   Para resolvermos este problema, basta inicialmente encontar o número de possibilidades disponível para cada questão, e depois, múltiplicar as possibilidades encontradas obtendo como resultado da multiplicação a quantidade desejada. Como cada questão possui quatro alternativas (possibilidades), então:

$$\underbrace{4}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{4}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{4}_{\text{possib}} \cdots \underbrace{4}_{\text{possib}} = 4^8 \text{ possibilidades}$$

Em Lima [8] encontramos algumas dicas para nos ajudar na resolução de problemas de Combinatória, observe-as:

- *Postura.* Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo 5, nós nos colocamos no lugar da pessoa que deveria digitar a senha; no exemplo 6, nós nos colocamos no lugar da pessoa que deveria procurar os múltiplos de 10; no exemplo 7, nós nos colocamos no lugar da pessoa que deveria encontrar quantos são os gabaritos possíveis.

- *Divisão.* Devemos sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Formar a senha foi dividido em escolher cada um dos cinco dígitos da senha; encontrar os múltiplos de dez foi dividido em escolher entre os que possuem três algarismos e os que possuem quatro algarismos, para posteriormente escolher cada um de seus respectivos dígitos; formar os gabaritos foi dividido em escolher a alternativa correta em cada uma das questões.

- *Não adiar dificuldades.* Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 5, a escolha do primeiro dígito é uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser diferente de zero. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas.

4.1 Combinações e permutações

Nesta seção são apresentadas algumas técnicas que nos ajudam a determinar o número de elementos de conjuntos formados a partir de certas restrições. Porém, como sugere o título dessa dissertação, não é de nosso interesse focar a resolução de problemas em cima de fórmulas.

4.1.1 Fatorial

Na resolução de vários problemas nos deparamos com um produto de números naturais consecutivos. Para facilitar a representação desses produtos foi criada a notação “fatorial”.

Assim define-se

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$
$$0! = 1$$

onde $n!$ é denominado por n fatorial.

Vale a pena destacar alguns exemplos de simplificão de frações envolvendo fatorial. Veja:

- $\dfrac{12!}{6!\cdot 2!} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7.\ \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2} = \dfrac{665280}{2} = 332640$
- $\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \dfrac{\cancel{(2n-1)!}}{(2n+1)(2n)\cancel{(2n-1)!}} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n)}$

4.1.2 Permutações

Existem alguns problemas de Combinatória que surgem com muita frequência. Em geral usa-se o mesmo tipo de raciocínio para resolve-los. Para clarear as idéias imagine que nove crianças fossem formar uma fila para arremessar a bola de basqueste. De quantas maneiras diferentes poderiamos colocá-las em fila?

Ora, temos nove possibilidades para escolher a criança que ficará na primeira posição da fila. Para a segunda posição temos oito possibilidades (sobraram oito crianças). Análogamente teremos sete possibilidades para a terceira posição, seis possibilidades para a quarta posição e assim por diante. Dessa maneira, teremos uma possibildade para a nona posição. Portanto, o número de filas possíveis será $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 362880$.

Agora vamos ao problema das permutações simples: dados n objetos distintos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de quantos modos é possível ordená-los?

Temos n maneiras de escolher o objeto que ocupará a primeira posição, $n-1$ maneiras de escolher o objeto que ocupará a segunda posição, $n-2$ maneiras de escolher o objeto que ocupará a terceira posição, ..., 1 maneira de escolher o objeto que ocupará a última posição. Logo, o número de maneiras de ordenar n objetos distintos é

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Logo, $P_n = n!$.

Vejamos alguns exemplos:

1. Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 3, 5, 7 e 9?

   Para formar números de quatro algarismos distintos é necessário e suficiente que ordenemos os algarismos 3, 5, 7 e 9. Sendo assim, concluímos que a quantidade de números de quatro distintos formados a partir desses quatro algarismos é $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ números distintos.

2. Três candidados, A, B e C, disputaram uma eleição e não houve empate. Considerando como resultado a sequência 1º, 2º e 3º colocados, quantos são os possíveis resultados desse pleito?

   Para determinarmos a quantidade de resultados podemos calcular o total de permutações das letras A, B e C:

   $$ABC \quad BAC \quad CAB$$
   $$ACB \quad BCA \quad CBA$$

   Indicando por P_3 esse número de permutações, temos $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.

3. Quantos anagramas tem a palavra PEDRO?

   Qualquer ordenação das letras de uma palavra é denominada anagrama. A palavra PODRE e PODER são anagramas da palavra PEDRO. No entanto, alguns anagramas não fazem sentido na língua Portuguesa. Como a palavra PEDRO possui 5 letras, temos:

   $P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$ anagramas.

4. Responda:

a) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?

b) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que iniciam com E e terminam com A?

c) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA em que as letras A e E aparecem juntas nessa ordem (AE)?

d) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA em que as letras A e E não aparecem juntas?

e) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que iniciam com vogal e terminam com consoante?

Solução:

a) Basta calcular $P_6 = 6! = 720$ anagramas.

b) Anagramas iniciados por E e terminados por A:

E _ _ _ _ A

Devemos permutar as quatro letras não fixas, ou seja, calcular P_4:

$P_4 = 4! = 24$

Portanto há 24 anagramas da palvra ESCOLA iniciados com E e terminados com A.

c) Anagramas da palavra ESCOLA em que as letras A e E aparecem juntas nessa ordem (AE).

É como se a expressão $\underbrace{\text{AE}}$ fosse uma só letra, como no anagrama $\underbrace{\text{AE}}$SCOL; assim, temos que calcular P_5:

$P_5 = 5! = 120$

d) Anagramas da palavra ESCOLA em que as letras A e E não aparecem juntas.

Nesse caso, basta subtrair do total anagramas o dobro do resultado do item anterior, pois no item (c) não contamos os anagramas em que a expressão $\underbrace{\text{EA}}$ aparece nesta ordem, logo:

$720 - 2\cdot 120 = 480$

e) Anagramas da palavra ESCOLA que iniciam com vogal e terminam com consoante.

A vogal que ocupará a primeira posição pode ser escolhida de 3 maneiras (uma das três vogais), a consoante que ocupará a última posição pode ser escolhida de 3 maneiras (uma das três consoantes) e as 4 letras restantes podem ser arrumadas entre as duas letras já escolhidas de $P_4 = 4!$ modos. Logo, a resposta será $3\cdot 3\cdot 4! = 216$.

5. De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em um grupo de 6 pessoas e um grupo de 4 pessoas?

   Uma maneira de fazer isto é colocar as 10 pessoas em fila; os 6 primeiros formam o grupo de 6 e os 4 últimos formam o grupo de 4. Dessa forma haveria 10! modos de colocar as 10 pessoas em fila.

   Porém, observe que filas do tipo $ABCDEF \mid GHIJ$ e $FBCDEA \mid GHJI$ são filas diferentes que geram a mesma divisão de grupos com 6 e 4 pessoas. Assim, percebe-se que após formar uma fila, estaremos formando dois grupos como desejavamos, e que entretanto, a ordem das pessoas que formam cada um dos dois grupos não faz diferença para o grupo. Como podemos ordenar o primeiro grupo de 6! modos, o segundo de 4! modos para cada fila formada, então conseguiremos

   $\frac{10!}{6!\cdot 4!} = 210$ divisões.

6. Quantos são os anagramas da palavra ADRIANA?

   Se as letras fossem diferentes teriamos 7! anagramas distintos. Entretanto, quando trocamos uma letra A por outra A, não formamos um novo anagrama.

Como a palavra ADRIANA possui 3 letras A, cada um dos 7! anagramas foi contado 3! (número de maneiras de trocar um A por outro A) vezes. Logo, o número de anagramas procurado é $\dfrac{7!}{3!} = 840$.

De acordo com o exemplo acima, temos:

O número de permutações possíveis com n objetos, dentre os quais um certo objeto se repete α vezes, é igual ao fatorial de n dividido pelo fatorial de α.

$$P_n^{\alpha} = \frac{n!}{\alpha!}$$

De modo geral, o número de permutações com n objetos, dentre os quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots}$$

7. Quantos são os anagramas da palavra PIRACICABA?

   A palavra PIRACICABA tem 10 letras, sendo:

   2 iguais a I

   3 iguais a A

   2 iguais a C

   Portanto, $P_{10}^{2,3,2} = \dfrac{10!}{2!3!2!} = 151200$ é o número de anagramas da palavra PIRACICABA.

8. Observe a figura 7 :

   Considere os caminhos ligando **A** até **C**, passando por **B**, traçados a partir de **A**, deslocando-se sempre, ou 1 unidade para a direita, na horizontal, ou 1 unidade para cima, na vertical. Determine o número de caminhos distintos obtidos dessa forma.

   Podemos representar cada movimento para direita por d e cada movimento para cima por c. Assim um caminho que sai de **A** e vai até **B** pode ser representado

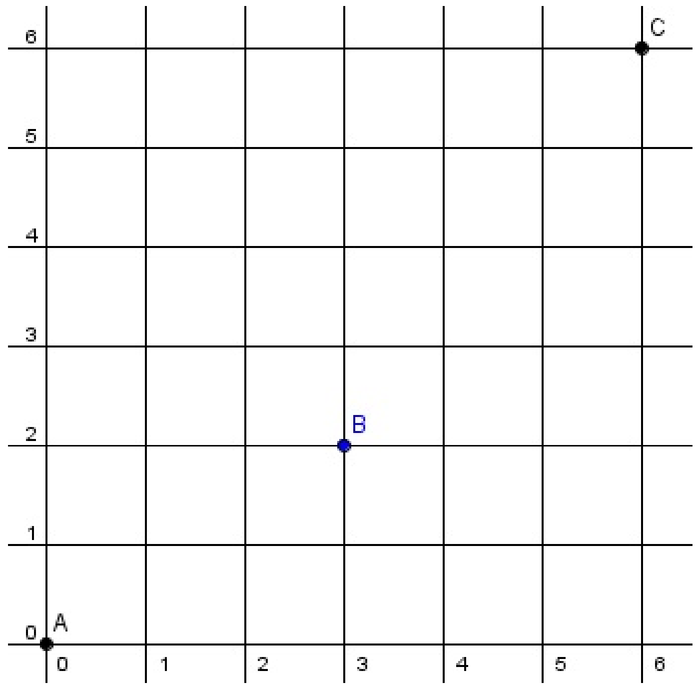


Figura 7: Malha 6x6

por *ddcdc*, no sentido de que ele se movimenta a partir de **A** com a seguinte sequência, direita-direita-cima-direita-cima, parando dessa forma no ponto **B**. Como todos os caminhos que saem de **A** e vão para **B**, precisam de 3 movimentos para a direita e dois movimentos para cima, podemos representá-los por sequências de 5 letras, sendo 3 letras d e 2 letras c. Logo, para descobrirmos o número de caminhos saindo de **A** até **B**, basta descobrir o número de sequências de 5 letras, com 3 letras d e 2 letras c, mas, isto corresponde ao número de permutações de 5 objetos onde o objeto d repete 3 vezes e o objeto c repete 2 vezes. Portanto, o número de caminhos que liga **A** a **B** é $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$.
Analogamente, podemos contar as sequências de 7 letras com 3 letras d e 4 letras c, que representam os caminhos que saem de **B** e vão para **C**, ou seja, $\dfrac{7!}{3!4!} = 35$ caminhos.
Daí concluímos o número de caminhos que saem de **A** passam por **B** e chegam em **C** é $10 \cdot 35 = 350$.

9. De quantas maneiras diferentes, quatro crianças podem ser dispostas ao redor de um círculo em uma brincadeira de roda?

   A príncipio temos uma tendência a fazer a permutação das quatro crianças. Entretanto, os círculos ABCD e BCDA são iguais, pois para formar os cículos com as crianças o que interessa é a posição relativa das crianças entre si, ou seja, se um círculo pode ser transformado em outro por meio de uma rotação, então eles são o mesmo círculo. veja as figuras 8 e 9. Como cada círculo pode ser "Virado"de 4 modos, o nosso raciocínio inicial contou cada círculo 4 vezes. Logo, a resposta será $\dfrac{4!}{4} = 6$.

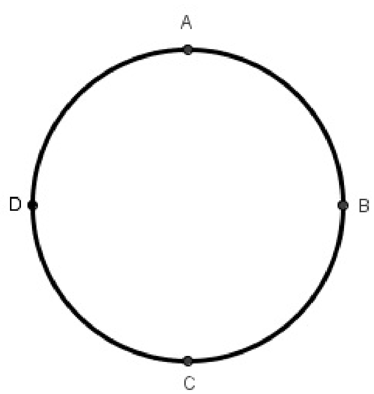


Figura 8: Círculo ABCD

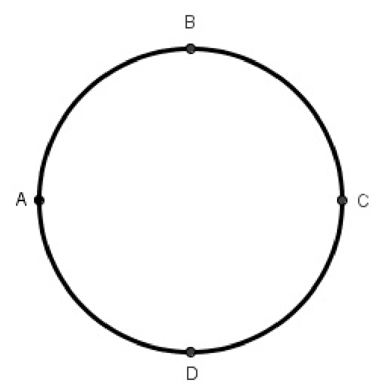


Figura 9: Círculo BCDA

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é $(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$.

4.1.3 Combinação Simples

Começaremos esta seção apresentando o seguinte problema:

De quantos modos podemos formar uma comissão de 3 pessõas a partir de um grupo de 6 pessoas?

Seja {Arthur, Bernardo, Caio, Davi, Edson, Fábia} o grupo de 6 pessoas. Nota-se que as comissões {Arthur, Bernardo, Caio} e {Caio, Bernardo, Arthur} são idênticas, pois a mudança de ordem dos nomes não determina uma nova comissão. Já as comissões {Davi, Edson, Fábia} e {Caio, Edson, Fábia} são diferentes, pois seus integrantes são diferentes.

Cada uma das comissões de 3 elementos gera 3! sequências, obtidas pela mudança de ordem dos seus elementos (permutações simples). Porém, como vimos anteriormente, cada uma dessas sequências refere-se à mesma comissão. Poderiamos calcular o total de grupos com o auxílio do P.F.C., considerando que a ordem é importante veja:

$$\underbrace{6}_{1^{\text{o}}\text{ membro}} \cdot \underbrace{5}_{2^{\text{o}}\text{ membro}} \cdot \underbrace{4}_{3^{\text{o}}\text{ membro}} = 120 \text{ possibilidades}$$

Na equação acima temos 6 escolhas para o 1º membro da comissão, 5 escolhas para o 2º membro da comissão e 4 escolhas para o 3º membro da comissão. A seguir descontamos as permutações dos três elementos, dividindo o resultado obtido por 3!. As combinações obtidas são chamadas combinações simples, e são representadas por $C_{6,3}$.

Assim , temos $C_{6,3} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = 20$ comissões.

Observe que

$$C_{6,3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = \frac{6!}{3!(6-3)!}.$$

Agora vamos ao problema das combinações simples:

De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

No caso geral como o problema acima temos

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}, \quad 0 < p \leq n, \quad C_{n,0} = 1.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n-1)!$, obtemos

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

As combinações simples de n elementos tomados p a p também podem ser representadas na forma C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Uma propriedade interessante é que

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

Podemos verificar isso da seguinte forma

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_{n,n-p}$$

Na verdade já era esperado a propriedade acima, pois quando selecionamos p objetos distintos entre n objetos distintos dados, estamos ao mesmo tempo selecionando $n-p$ objetos distintos entre n objetos distintos dados.

Para fixar as idéias das combinações vejamos alguns exemplos:

1. Quantas diagonais possui um dodecaedro regular?

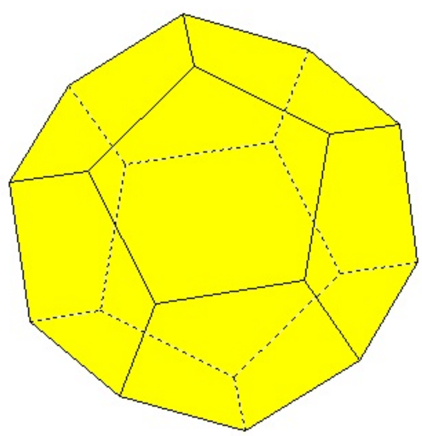


Figura 10: Dodecaedro

O dodecaedro regular é um poliedro formado por 12 faces pentagonais como se observa na figura 10 e que tem 30 arestas e 20 vértices. Quando ligamos 2 vértices do dodecaedro formamos um segmento. Esse segmento pode ser uma aresta ou uma diagonal da face caso eles pertençam a uma mesma face.

Caso os dois vértices não pertençam a uma mesma face, o segmento formado representará uma diagonal do dodecaedro.

Daqui em diante vamos responder a pergunta por dois métodos.

- Usando somente o princípio fundamental da contagem

  Comecemos calculando o número de maneiras de ligar dois vértices formando um segmento. Para a escolha do primeiro vértice temos 20 vértices disponíveis, logo, sobram 19 vértices para escolher o segundo ao qual uniremos ao primeiro para formar um segmento. Porém, a ordem com que escolhemos os vértices não muda o segmento formado. Após escolhermos dois vértices v_i e v_j podemos ordená-los de duas formas: v_iv_j ou v_jv_i. Assim, podemos ligar dois vértices formando um segmento de $\dfrac{20\cdot 19}{2} = 190$ maneiras diferentes. Desses 190 segmentos, 30 são arestas. Agora vamos contar quantos segmentos podem ser formados em cada face pentagonal. Para tanto, basta escolher 2 vértices dentre os 5 que compoem uma face pentagonal. Análogamente ao escrito acima, teremos $\dfrac{5\cdot 4}{2} = 10$ segmentos em cada face, desses 5 são as arestas da face pentagonal, portanto, 5 diagonais em cada face. Como o dodecaedro possui 12 faces pentagonais, concluímos que ele possui

  $$190 - 30 - 12\cdot 5 = 100 \text{ diagonais.}$$

- Usando a fórmula de combinação $\boxed{C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

  O número de maneiras de ligar dois vértices formando um segmento é $C_{20,2} = 190$. Desses 190 segmentos, 30 são arestas. Em cada face pentagonal temos 5 vértices, logo podemos formar $C_{5,2} = 10$ segmentos em cada face, sendo 5 deles as arestas do pentágono, ou seja, cada face possui 5 diagonais. Assim, concluimos que o dodecaedro regular possui

  $$190 - 30 - 12\cdot 5 = 100 \text{ diagonais.}$$

2. Sobre uma reta r, marcam-se 8 pontos e sobre uma outra reta s, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 quaisquer desses pontos?

   A cada agrupamento de 3 pontos não colineares teremos um triângulo. Assim como fizemos no exemplo anterior vamos resolver este exemplo de duas formas.

   - Usando somente o princípio fundamental da contagem

     Comecemos calculando o número de agrupamentos de 3 pontos dentre os 13 pontos (colineares ou não). Para a escolha do primeiro ponto nós temos 13 pontos disponíveis, logo, sobram 12 pontos para a escolha do segundo ponto, analogamente sobram 11 pontos para a escolha do terceiro ponto. Entretanto, para cada agrupamento feito não importa a ordem em que os três pontos foram escolhidos. Como podemos ordenar os 3 pontos de

$$\underbrace{3}_{\text{poss. para o 1}^{\text{o}}\text{ ponto}} \cdot \underbrace{2}_{\text{poss. para o 2}^{\text{o}}\text{ ponto}} \cdot \underbrace{1}_{\text{poss. para o 3}^{\text{o}}\text{ ponto}} = 6 \text{ formas diferentes,}$$

     então temos

$$\frac{13\cdot 12\cdot 11}{6} = 286 \text{ agrupamentos com 3 dos 13 pontos.}$$

     Porém, todos os agrupamentos de 3 pontos pertencentes a r, se compoem de 3 pontos colineares, ou seja, não formam um triângulo. O total desses agrupamentos corresponde ao total de escolhas de 3 pontos dentre os 8 pontos pertencentes a r. Analogamente ao procedimento que usamos para escolher 3 dentre os 13, temos

$$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56 \text{ agrupamentos com 3 dos 8 pontos de } r.$$

     Da mesma maneira, todos os agrupamentos de 3 pontos pertencentes s não formam um triângulo. Logo, temos

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10 \text{ agrupamentos com 3 dos 5 pontos de } s.$$

Portanto, o total de triângulos obtidos é

$$286 - 56 - 10 = 220.$$

- Usando a fórmula de combinação $\boxed{C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

  Com os treze pontos, podemos obter $C_{13,3} = 286$ agrupamentos com 3 dos 13 pontos. Todos os agrupamentos de 3 pontos pertencentes a r ($C_{8,3} = 56$) não formam um triângulo porque estão alinhados. Da mesma maneira, todos os agrupamentos de 3 pontos pertencentes s ($C_{5,3} = 10$) não formam um triângulo. Logo, o total de triângulos obtidos é

$$C_{13,3} - C_{8,3} - C_{5,3} = 286 - 56 - 10 = 220.$$

3. Um conselho desportivo de uma escola é formado por 2 professores e 3 alunos. Candidataram-se 5 professores e 30 alunos. De quantas maneiras diferentes esse conselho pode ser eleito?

   Se escolhermos os professores de m maneiras e alunos de n maneiras, pelo P.F.C. escolheremos os professores e alunos de $m.n$ maneiras. Para escolher os professores teremos $C_{5,2} = 10$ maneiras. Para escolher os alunos teremos $C_{30,3} = 4060$ maneiras. Logo,

$$C_{5,2} \cdot C_{30,3} = 10 \cdot 4060 = 40600$$

   Portanto, o conselho pode ser eleito de 40600 maneiras diferentes.

4. Após uma reunião de negócios, foram trocados um total de 15 apertos de mão. Sabendo que cada executivo cumprimentou todos os outros, qual o número de executivos que estavam presentes nessa reunião?

   Sendo n o total de executivos, podemos afirmar que $C_{n,2} = 15$, pois cada grupo de 2 pessoas se cumprimentou uma unica vez. Como

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

então

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2!\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)}{2} = 15$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 30 \Rightarrow n = 6 \text{ ou } n = -5$$

Portanto, o número de executivos era 6 pois n não pode ser negativo.

5. Uma classe tem 10 alunos e 5 alunas. Formam-se comissões de 4 alunos e duas alunas. Determine o número de comissões em que participa o aluno **A** e não participa a aluna **B**.

   Como queremos que o aluno **A** seja um membro, devemos escolher quais serão os outros 3 alunos. Podemos escolher 3 dentre os 9 restantes de $C_{9,3} = 84$ maneiras. Já em relação às meninas, precisamos escolher duas entre as 4 colegas da aluna **B** (ela não pode ser incluída). Isso pode ser feito de $C_{4,2} = 6$ maneiras. Logo,

   $$C_{9,3} \cdot C_{4,2} = 84 \cdot 6 = 504 \text{ é o número de comissões possíveis.}$$

6. De quantas maneiras é possível escolher 5 balas em um grande pacote que possui 9 sabores distintos?

   Ao tentar solucionar o problema temos uma tendência a pensar que a resposta é $C_{9,5} = 126$. Na verdade, $C_{9,5}$ seria o número de maneiras de escolher sabores diferentes entre os 9 oferecidos, ou seja, seria o número de maneiras de escolher 5 balas diferentes em um pacote que possui 9 balas.

   A solução desse problema é representada por $CR_{9,5}$, número de combinações completas de classe 5 de 9 objetos. Assim, $CR_{9,5}$ é o número de maneiras de escolher 5 objetos entre 9 objetos distintos, podendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

Para solucionar o problema podemos chamar x_1 a quantidade de balas do 1º sabor, x_2 a quantidade de balas do 2º sabor, ..., x_9 a quantidade de balas do 9º sabor. Logo, escolher 5 balas em um grande pacote que possui 9 sabores distintos estará associado a uma solução em inteiros não negativos da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 5.$$

Como $CR_{9,5}$ é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1+x_2+\cdots+x_9 = 5$, vamos solucionar esta equação representando cada solução por uma fila de sinais $\bullet$ e $+$. Por exemplo, as soluções $(4,0,1,0,0,0,0,0,0)$ e $(0,0,2,0,1,0,0,0,2)$, seriam representadas por $\bullet\bullet\bullet\bullet++\bullet++++++$ e $++\bullet\bullet++\bullet++++\bullet\bullet$, respectivamente. Nessa representação, os sinais $+$ são usados para separar as incógnitas e quantidade de sinais $\bullet$ indica o valor de cada incógnita.

Assim, uma equação do tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, terá para cada solução em inteiros não negativos, uma fila de sinais $\bullet$ e $+$, onde os sinais $+$ serão usados para separar as incógnitas e a quantidade de sinais $\bullet$ representará o valor de cada incógnita.

Como cada fila terá $n-1$ sinais $+$ e p sinais $\bullet$, para saber o número de soluções em inteiros não negativos basta escolher o lugar dos p objetos (sinais $\bullet$) entre os $n-1+p$ objetos dados (soma da quantidade de sinais $\bullet$ e $+$). Essa escolha pode ser feita de $C_{n-1+p,p}$ maneiras. Logo,

$$CR_{n,p} = C_{n-1+p,p}.$$

Portanto, $CR_{9,5} = C_{9-1+5,5} = C_{13,5} = 1287$ é o número de maneira de se escolher as 5 balas.

De modo geral podemos interpretar $CR_{n,p}$ de duas formas:

1º) $CR_{n,p}$ é número de maneiras de selecionar p ojetos, distintos ou não, entre n objetos distintos dados.

2º) $CR_{n,p}$ é o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$. em inteiros não negativos.

5 ATIVIDADE

Nesta seção propomos a seguinte atividade.

Uma garota encontra-se no balcão de uma padaria que oferece 6 opções diferentes de salgadinhos, veja a figura 11. Ela tem dinheiro para comprar 3 salgadinhos e ela também pode escolher salgadinhos repetidos. Nessas condições, de quantos modos diferentes ela pode comprar os 3 salgadinhos?

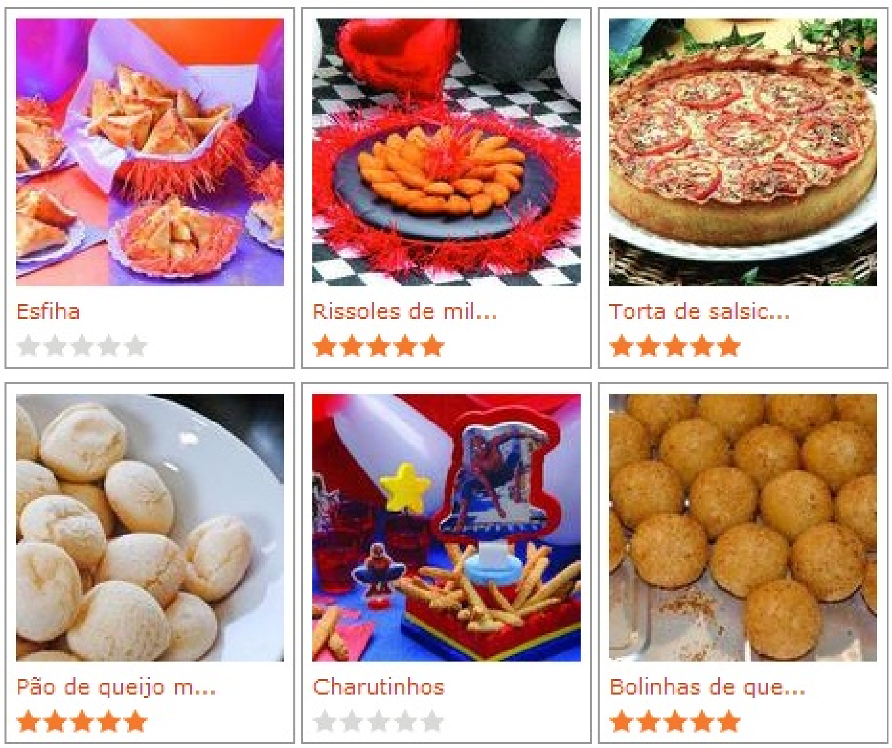


Figura 11: Salgadinhos disponíveis

5.1 Objetivo

Observamos que algumas escolas públicas da região onde moro, João Monlevade-MG, não ensinam como fazer agrupamentos de p objetos distintos ou não, entre n objetos distintos dados. Estes agrupamentos estão relacionado ao conteúdo de Análise Combinatória. Isso pode acontecer pelos mais diversos motivos, seja a falta de tempo devido à grande quantidade de conteúdos a vencer, a falta de interesse dos alunos, ao fato do professor não se sentir totalmente seguro nesse tópico, etc. Nessa região, é comum a utilização das seguintes obras DANTE [6], SMOLE [7] e PAIVA [12], e nelas não encontramos exemplos, exercícios e nem explicação desses agrupamentos. Quando propomos essa atividade estamos almejando despertar nos alunos um maior interesse por esse assunto, e também motivá-los a aprofundar seus conhecimentos de Combinatória. Afirmamos isso embasados pelo fato de ser uma atividade relacionada ao dia-a-dia, instigadora, que pode vir a motivar os alunos a se interessarem pela Análise Combinatória.

5.2 Público alvo

Acreditamos que esta atividade é ideal para introduzir os agrupamentos de p objetos distintos ou não, entre n objetos distintos dados, aos alunos do segundo ano do Ensino Médio que possuam um pouco de experiência com o princípio fundamental da contagem.

5.3 Pré-requisitos

Como foi dito na seção anterior, essa atividade serve para alunos que tiveram contato com o princípio fundamental da contagem. Caso esse tópico já tenha sido trabalhado no primeiro ano do Ensino Médio, ou até mesmo no Ensino Fundamental, acreditamos que é possível trabalhar essa atividade no primeiro ano do Ensino Médio, visto que nas escolas públicas em geral, a Análise Combinatória é apresentada aos alunos no segundo ano do Ensino Médio.

5.4 Materiais e tecnologia

A título de revisão e também como uma maneira diferente e interessante de se abordar a Combinatória, sugerimos que acesse os links:

- http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf

- http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/arranjo/arranjo.swf
- http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/permutacao/permutacao.swf

Neles são encontrados Objetos de Aprendizagem do Rived que podem ser considerados como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem. Ao acessar esses links os alunos terão exemplos e explicações de varias situações práticas que envolvem a Análise Combinatória.

Vamos descrever e resolver a atividade que pode ser executada no link http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf

Ao acessar o link acima nos deparamos com as informações da figura 12. Nela esta indicado que devemos clicar na seta que fica abaixo da palavra creditos para prosseguirmos. Caso desejarmos saber quem elaborou o programa basta clicar na palavra créditos.

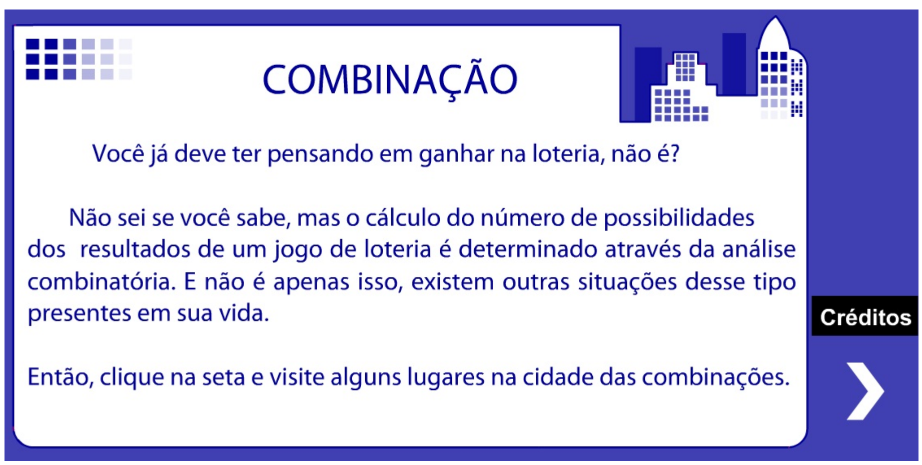


Figura 12: Página inicial da atividade

Após clicarmos na seta estaremos na fase de escolher uma atividade para executarmos veja a figura 13. Nesta página aparece dois ícones em destaque, a lotérica (fica piscando do lado esquerdo do carro amarelo) e os ciclistas. Se não tivessemos observado-os poderiamos clicar no ícone ajuda, ele nos mostraria a mensagem que se encontra na figura 14.

Figura 13: Momento em que devemos escolher entre a lotérica e os cilclistas

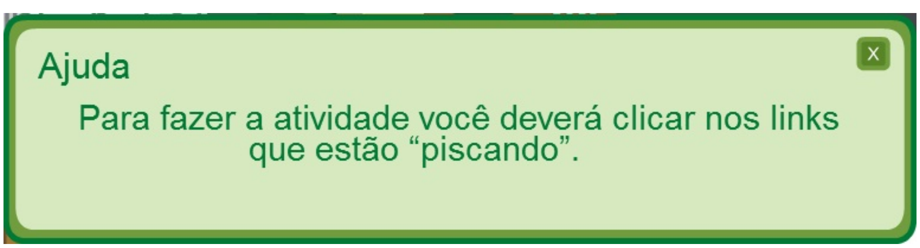


Figura 14: Mensagem do ícone ajuda

Clicando na atividade lotérica, aparece o problema que se encontra na figura 16. No cartão que se encontra nessa figura temos um exemplo de um possível jogo, dessa forma não teremos dúvidas que devemos escolher 5 números para fazer uma aposta. Após fazermos essa observações temos duas opções: responder o problema imediatamente ou fazer algumas apostas antes de responder. Se não percebermos que temos essas duas opções, podemos clicar na opção ajuda (pediria para escolhermos 5 dezenas, não repetidas).

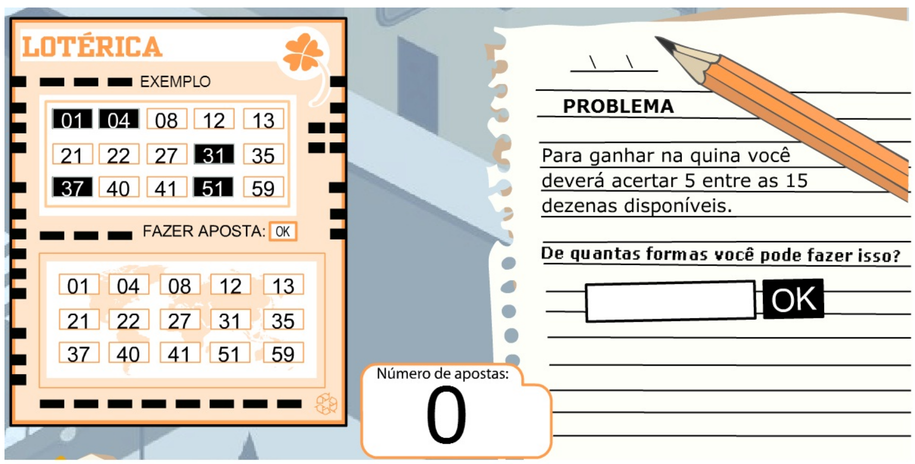


Figura 15: Exercício sobre loteria

Se decidirmos responder ao problema imediatamente temos a possibilidade de usar a calculadora e também a definição. Ao clicarmos na definição aparece a mensagem da figura 16. Dessa forma, pode-se dizer que temos uma dica e uma ferramenta para concluírmos o problema.

Caso optemos pela segunda opção, fazer algumas apostas antes de responder, podemos selecionar as cinco dezenas e clicar em “OK”que fica ao lado de “fazer aposta”. Observe que a aposta fica anotada logo abaixo de onde devemos responder a pergunta. Perceba que ao fazermos as apostas estamos listando os possíveis resultados. Se não respondermos até a quarta aposta, e fizermos a quinta aposta, o programa nos mostra a mensagem da figura 17.

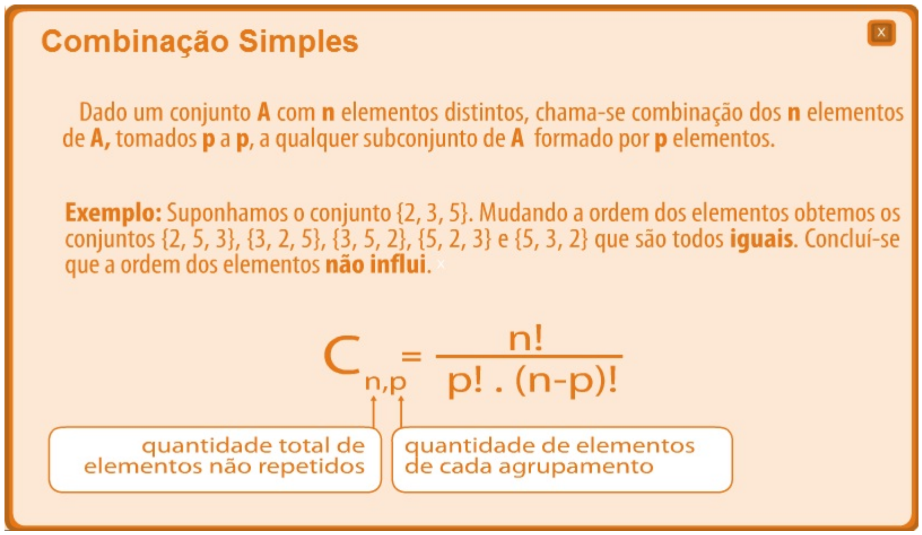


Figura 16: Mensagem do ícone definição

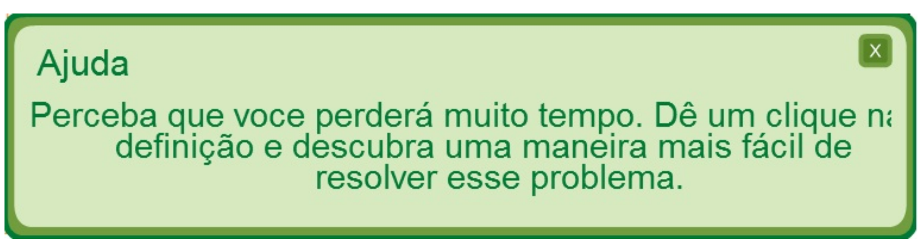


Figura 17: Mensagem do após as 5 apostas

Logo, como sugere a dica que se encontra na figura 17, não é interessante listar todas as apostas possíveis. Assim, após lermos a definição, teremos um melhor embassamento para respondermos ao problema proposto.

Na verdade, temos que escolher 5 números dentre os 15 números dados. Usando o princípio fundamental da contagem, podemos usar o seguinte raciocínio: temos 15 números disponíveis para a 1ª escolha, logo, sobraria 14 números disponíveis para a 2ª escolha, da mesma forma, 13 números disponíveis para a 3ª escolha, 12 para a 4ª e 11 para a 5ª escolha. Logo,

$$\underbrace{15}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{14}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{13}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{12}_{\text{possib}} \cdot \underbrace{11}_{\text{possib}} = 360360 \text{ agrupamentos}$$

Como a ordem dos 5 números escolhidos não importa quando se pensa em uma aposta, então cada um dos 360360 agrupamentos foi contado mais de uma vez. Por exemplo, os agrupamentos $\{1, 4, 8, 12, 14\}$, $\{4, 1, 8, 12, 14\}$ e $\{8, 4, 1, 12, 14\}$ são o mesmo agrupamento, ou seja, a mesma aposta. Observando que para cada agrupamento temos 5 números disponíveis para escolher qual será o 1º número que compoe o grupo, logo, sobraria 4 números disponíveis para escolher qual será o 2º número que compoe o grupo, de forma análoga, temos 3 números para o 3º, 2 números para o 4º e apenas 1 número disponível para escolher o 5º número que compoe o grupo. Daí, concluímos que cada um dos 360360 agrupamentos foi contado exatamente 5.4.3.2.1 = 5! = 120 vezes. Portanto, basta dividir o número de agrupamentos por 5!.

$$\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = \frac{3603690}{120} = 3003 \text{ apostas}$$

Poderiamos ter respondido à pergunta do problema usando a definição. Para isso, bastaria observar que temos 15 números dados, e que devemos escolher 5 números sem repetição dentre esses 15 números. Veja

$$C_{15,5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3003 \text{ apostas.}$$

O programa nos oferece a possibilidade de vizualizar a solução correta independente de acertar ou errar a pergunta. Caso errarmos a resposta, ele já mostra automaticamente a mensagem da figura 18. Entretanto, se acertarmos a resposta, o programa mostra uma janela com um link para ver a solução.

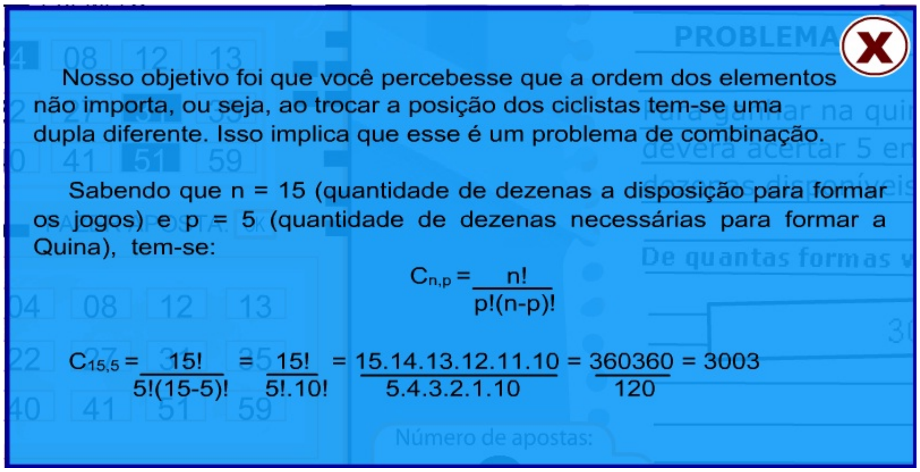


Figura 18: Mensagem mostrando a solução

A figura 18 apresenta uma possível solução. Ela mostra a frase "ao trocar a posição dos ciclistas tem-se uma dupla diferente" que por algum erro do programa é a mensagem da atividade dos ciclista. Onde se lê "ao trocar a posição dos ciclistas tem-se uma dupla diferente" deveriamos ler algo do tipo "ao trocar a posição dos números tem-se uma mesma aposta".

Além da atividade lotérica que acabamos de executar, existe a possibilidade de executar a atividade ciclistas. Nesse mesmo link de combinações existe também a opção de executar a atividade de múltipla escolha "teste seus conhecimentos", que apresenta três exercícios "universidade", "lancheria" e "câmara de vereadores".

5.5 Recomendações metodológicas

Sugerimos que essa atividade seja apresentada aos alunos após uma aula tradicional de Análise Combinatória, onde se expõe aos alunos o princípio fundamental da contagem, ou, após uma breve revisão desse tópico.

Segundo Silva [20], todo o conhecimento que o aluno desenvolve é construído na relação consigo, com os outros e com o objeto do conhecimento - tudo ao mesmo tempo. Ou seja, o aluno nunca aprende sozinho. [...] Portanto, em primeiro lugar, a interpretação de muitas tarefas de aprendizagem, sejam elas orais ou escritas, são frutos da interação dos alunos; em segundo, a mediação, por meio de atividades interativas, questionadoras e desafiadoras, e não apenas por meio de uma explicação do professor ou de um estudo individual do aluno (apud SILVA, 2006, p. 26).

Nesse sentido, acreditamos que será muito mais produtivo que os alunos façam duplas para realizar essa atividade sobre os salgadinhos. Assim, eles terão a oportunidade de trabalhar de forma colaborativa discutindo idéias e trocando conhecimentos.

5.6 Dificuldades previstas

É bastante comum os alunos chegarem ao Ensino Médio sem terem visto conceitos básicos de Combinatória. Logo, muitas dificuldades como a constução da árvore, enumeração dos casos para tentar entender como se deve proceder para fazer a contagem, podem surgir no momento em que eles estiverem realizando esta atividade. Nesse sentido, diriamos que é extremamente importante que essa atividade seja desenvolvida após uma boa revisão de Combinatória ou após uma aula expositiva desse assunto de forma que sejam apresentados varios exemplos de aplicação do P.F.C..

5.7 Descrição geral

Essa atividade deve ser aplicada em uma aula de 50 minutos. O professor deve inicialmente organizar a sala de aula em duplas e distribuir uma folha por dupla contendo essa atividade. Nesse estágio, o professor pode deixar uns 15 minutos para as duplas tentarem resolver o problema. Se o professor achar interessante ele pode sugerir aos alunos que façam a árvore das possibilidades, ou a enumeração dos casos, para que os alunos começem a perceber que tipo de agrupamento eles devem fazer. Decorrido os 15 minutos, prosseguir para o momento de discussão do problema (30 minutos). Nessa etapa, o professor deve organizar a turma e sortear 4 ou 5 duplas para expor as suas soluções. É fato que esse momento será muito enriquecedor para todos os presentes, até mesmo para o professor, pois nesses momentos sempre surgem idéias inovadoras e interessantes que podem tornar mais claro problema proposto. Nessa fase, o professor pode intervir com críticas construtivas indicando onde as soluções sugeridas pelos alunos falham, levando-os a resultados incorretos. Nos 5 minutos finais o professor deve apresentar a solução correta aos alunos, caso ela ainda não tenha surgido e também apresentar a definição de combinação completa.

5.8 Possíveis continuações ou desdobramentos

Os agrupamentos de p objetos distintos ou não, entre n objetos distintos dados, são um tópico da Análise Combinatória que muitas vezes é deixada de lado nas escola públicas. Com a realização dessa atividade, abrimos um caminho para que esse assunto seja exposto aos alunos, e deixamos uma brecha para uma possível continuação desse assunto de forma mais profunda com uma boa aula expositiva seguida de exercícios.

5.9 Desenvolvimento da atividade sobre os salgadinhos

Nessa seção apresentamos a solução e também o desenvolvimento da atividade proposta no início desse capítulo. Vamos começar enunciando mais uma vez a atividade:

Uma garota encontra-se no balcão de uma padaria que oferece 6 opções diferentes de salgadinhos. Ela tem dinheiro para comprar 3 salgadinhos e ela também pode escolher salgadinhos repetidos. Nessas condições, de quantos modos diferentes ela pode comprar os 3 salgadinhos?

A solução desse problema é representada por $CR_{6,3}$, número de combinações completas de classe 3 de 6 objetos. Assim, $CR_{6,3}$ é o número de maneiras de escolher

3 objetos entre 6 objetos distintos, podendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

Para solucionar o problema podemos chamar s_1 a quantidade de salgados do tipo 1, s_2 a quantidade de salgados do tipo 2, $\ldots$, s_6 a quantidade de salgados do tipo 6. Logo, escolher 3 salgados entre 6 salgados distintos, podendo escolher salgadinhos repetidos, estará associado a uma solução em inteiros não negativos da equação

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_6 = 3.$$

Como $CR_{6,3}$ é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $s_1 + s_2 + \cdots + s_6 = 3$, vamos solucionar esta equação representando cada solução por uma fila de sinais $\bullet$ e $+$. Por exemplo, as soluções $(2, 0, 1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 2, 0, 1, 0)$, seriam representadas por $\bullet\bullet + + \bullet + ++$ e $+ + \bullet\bullet + + \bullet +$, respectivamente. Nessa representação, os sinais $+$ são usados para separar as incógnitas e quantidade de sinais $\bullet$ indica o valor de cada incógnita (quantidade de salgados de cada tipo).

Como cada fila terá 5 sinais $+$ e 3 sinais $\bullet$, para saber o número de soluções em inteiros não negativos basta escolher o lugar dos 3 objetos (sinais $\bullet$) entre os $5 + 3 = 8$ objetos dados (soma da quantidade de sinais $\bullet$ e $+$). Para o primeiro objeto $\bullet$, podemos escolher seu lugar de 8 modos diferentes (qualquer posição dentre as 8 disponíveis), para o segundo teremos 7 modos diferentes, qualquer uma das 7 posições que sobraram, e para o terceiro objeto $\bullet$, teremos 6 modos diferentes, qualquer uma das 6 posições que sobraram. Como a ordem com que escolhemos o lugares dos 3 objetos $\bullet$ não faz diferença, podemos escolher lugar dos 3 objetos (sinais $\bullet$) entre os $5 + 3 = 8$ objetos dados (soma da quantidade de sinais $\bullet$ e $+$) de

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ modos diferentes.}$$

Portanto, $CR_{6,3} = 56$ é o número de maneira de se escolher os 3 salgados.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já afirmamos, ao nosso ver a aprendizagem do conceitos da Análise Combinatória não podem ser feitas de forma mecânica, limitando-se a empregar fórmulas em situações padronizadas. O que pretendemos após a eleboração desta dissertação, é tentar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema de contagem que porventura ele se deparar. Nesse sentido, continuamos afirmando que para resolver os problemas de contagem, é fundamental parar, concentrar, discutir, pensar, se imaginar no papel da pessoa que vai fazer a "coisa"pedida pelo problema, procurando trocar a decisão a ser tomada por uma sequência de decisões mais simples e sucessivas. E quando dividimos as decisões em etapas, é essencial que as decisões mais restritas sejam tomadas em primeiro lugar. Por que pequenas dificuldades adiadas, costumam se transformar em imensas dificuldades. E não podemos nos esquecer de que quando uma decisão é dividida em uma sequência de decisões mais simples e sucessivas, podemos aplicar o princípio fundamental da contagem.

Acreditamos que os professores devem tomar cuidado para não focar a resolução dos problemas em soluções brilhantes. Por que se em cada problema apresentarmos aos alunos a solução mais eficiente, tornaremos mais complicada a aprendizagem deles. Portanto, devemos priorizar as técnicas gerais que podem ser usadas em muitos casos.

Apresentamos uma atividade no capítulo anterior com o objetivo de aprofundar o ensino da Combinatória na rede pública, instigando a partir de um problema simples do cotidiano, a necessidade de conhecer com mais detalhes os conceitos e técnicas de contagem. Enfim, desejamos que esta dissertação possa ser usada por professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Referências

[1] BERGE, C. **Principles of Combinatorics**. Vol 72. New York: Academic Press,1971. p.1-11.

[2] BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista Historia Mathemática**. Vol 6. 1979. p.109-136.

[3] EVESS, H. **Introdução à Historia da Matemática** 2.ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, Ed: Unicamp 1997.

[4] BRASIL. Ministério da Educação **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: Secretária de Educação Média e Tecnológica, 2000.

[5] BRASIL. Ministério da Educação **Parâmetros Curriculares Nacionais**-Matemática. Brasília: Secretária de Ensino Fundamental-SEF, 1997.

[6] DANTE, Luis Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. Volume 2, 3.ed. São Paulo: Ática, 2004.

[7] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. V. **Matemática - ensino médio**. Volume 2, 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

[8] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2, 6.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] MORGADO, Augusto Cesar de Oliveria et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9.ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] NEEDHAM, J. **Science and Civilisation in China**. London: Cambridge University Press. Vol 3.1959. p.58

[11] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Jacques Ozanam**, 2002.

[12] Paiva, Manoel. **Matemática**. Volume 2, 1.ed. São Paulo: Moderna 2009.

[13] PINTO, V. G. **Proposta Curricular-CBC Matemática** Ensino Médio, 2007. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7BC1C4797C-A5DE-44E3-AB9A-22A74A4F1877%7D_PDF%202%20CBC%20MATEMATICA%20EM%20(2).pdf>. Acesso em: 10 Jan. 2013.

[14] SESIANO, J. Etnomatemática: quadrados mágicos do Islã. **Revista Scientific American Brasil**, São Paulo, n.11, 2005. p.36-39.

[15] TAVARES, C. S. ;BRITO, F. R. M.. Contando a História da Contagem. **Revista do Professor de Mmatemática** SBM V-57, Junho, 2005.

[16] VAZQUEZ, C. M. R.. **O Ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista**, 2011, 90 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas), Ufscar, 2011.

[17] VAZQUEZ, C. M. R; NOGUTI, F. C. H. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife, **Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos e uma Abordagem Pedagógica**, Recife: UFPE, 2004. p. 1-13.

[18] WIELEITNER, **H. Historia de la Matematica** .Barcelona: Labor. 1932. p.134

[19] WILSON, R. J.; Lloyd, E. K. Combinatorics. **Geometries and Topology** 1990. p.952-965.

[20] SILVA, Marco. **O fundamento comunicacional da avaliação da aprendizagem na sala de aula** online.In: SILVA, Marco; SANTOS, Edméa (orgs.). Avaliação da aprendizagem em educação online, p. 23 a 36. São Paulo: Edições Loyola, 2006.