UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A probabilidade no Pôquer: uma alternativa metodológica no processo de ensino-aprendizagem

Fábio Henrique Cincotto

Orientadora
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A probabilidade no Pôquer: uma alternativa metodológica no processo de ensino-aprendizagem

Fábio Henrique Cincotto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientadora
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Campus Jacarezinho – IFPR, Jacarezinho-PR, Brasil)

519.2 Cincotto, Fábio Henrique
C574p A probabilidade no Pôquer : uma alternativa metodológica no processo de ensino-aprendizagem / Fábio Henrique Cincotto. – Maringá, 2018.
63 f. : il, color.

Orientador(a): Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes.
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Probabilidades. 2. Variáveis aleatórias. 3. Pôquer . 4. Texas Hold'em. I. Arantes, Luciene Parron Gimenes. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 519.2

FÁBIO HENRIQUE CINCOTTO

A PROBABILIDADE NO PÔQUER: UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Luciene Parron G. Arantes

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientadora)

Suzete Maria Silva Afonso

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro

Rodrigo Martins

Prof. Dr. Rodrigo Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 16 de outubro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Aos meus pais Edson Fernando e Maria Helenice e ao meu irmão Fernando, que sempre me incentivam e apoiam para que eu consiga alcançar os meus objetivos.

À minha esposa Amanda que esteve ao meu lado do início ao fim dessa jornada de estudos.

Aos meus sogros José Roberto e Solange e ao meu cunhado Felipe, que torceram por mim.

Aos meus amigos de graduação Vinícius Martinez, Hélio e Vinicius Pavani, que me incentivaram a concluir este trabalho.

Aos meus colegas de turma, em especial, Ricardo e Danielli.

Aos professores do programa PROFMAT da Universidade Estadual de Maringá.

À minha orientadora Luciene Parron Gimenes Arantes.

Ao CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

O estudo da teoria de probabilidades, enquanto objeto da disciplina de matemática, mostra-se como uma ferramenta em potencial para auxilar os alunos no desenvolvimento crítico, criativo e autônomo de suas ações. Aos professores, o desafio também se dá na busca de metodologias que tornem o ensino de matemática, em particular o tema de probabilidades, atrativo e dinâmico. O uso de jogos no processo de ensino aprendizagem é capaz de proporcionar elementos psicológicos, de criatividade e tecnológicos para atividades do exercício da mente. Jogos de cartas incentivam elementos como a experimentação, investigação e inovação. Um jogo como o Pôquer traz desafios aos participantes, com espaços hipotéticos em que os jogadores podem testar ideias e experimentar suas consequências. Sendo assim, os estudantes podem transpor elementos importantes para o aprendizado da matemática, uma vez que podem errar e aprender com seus erros, aumentando gradativamente os questionamentos acerca das probabilidades envolvidas. Motivados por essas questões, este trabalho apresenta uma proposta didática alternativa aos modelos didáticos tradicionais para o ensino de probabilidades, integrando a teoria de jogos, a teoria da probabilidades e o fator psicológico associado ao jogo de Pôquer. Foram elaboradas 10 aulas em formato de minicurso, nas quais os conceitos de Pôquer e probabilidades foram, conjuntamente, apresentados pela primeira vez aos alunos do segundo ano do ensino médio do Instituto Federal do Paraná, no contraturno, assim como um questionário contendo 8 questões aplicadas, como sistema de avaliação. Os resultados indicam a potencialidade do uso do Pôquer no ensino e diagnóstico das dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo de probabilidades, devendo constituir-se uma importante ferramenta metodológica.

Palavras-chave: Probabilidade, Pôquer, Texas Hold’em.

Abstract

The study of the theory of probabilities, as object of the discipline of mathematics, is shown as a potential tool to assist students in the critical, creative and autonomous development of their actions. To teachers, the challenge is also in the search for methodologies that make teaching mathematics, the subject of probabilities, attractive and dynamic. The use of games in the process of teaching learning can provide psychological, creative and technological elements for mind exercise activities. Card games encourage elements such as experimentation research and innovation. A game like Poker brings challenges to the participants, with hypothetical spaces in which players can test ideas and experience their consequences. Thus, students can transpose important elements for learning mathematics, since they can make an error and learn from their mistakes, gradually increasing questions about the probabilities involved. Motivated by these questions, this study presents an alternative proposal to traditional didactic models for probability teaching, integrating game theory, probability theory and the psychological fact associated with the game of Poker. Ten mini-course classes were developed, and the concepts of Poker and probabilities were presented for the first time to the students of the second year of high school at the Federal Institute of Paraná, after school activities, as well as a questionnaire containing 8 applied questions, such as system evaluation. The results indicate the potential of the use of Poker in the teaching and diagnosis of the difficulties presented by the students in the study of probabilities and should constitute an important methodological tool.

Keywords: Probability, Poker, Texas Holdem.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Parece ser um consenso teórico quanto popular que, além da especificidade de todas as habilidades e competências que permeiam a grade curricular, é também papel da escola formar indivíduos preparados para atuar e integrar a sociedade no mundo em que vivemos. Neste sentido, ações como analisar, inferir, problematizar, sistematizar, otimizar e conjecturar ganham importância neste viés, uma vez que podem ser compreendidas como uma base teórica para tomadas de decisões nas mais diversas situações cotidianas, como por exemplo: na compreensão dos riscos de um determinado investimento; na identificação e na reação de uma doença infecciosa; na inferência estatística de características de uma população a partir de uma amostra; na estimativa de valorização e depreciação de um bem material etc. Entretanto, há de se considerar os inumeráveis fatores de incerteza ou de informações incompletas inerentes a todos esses cenários da sociedade, o que torna, de fato, mais difícil o alcance da autonomia buscada na formação interdisciplinar dos alunos.

Paralelamente, nas últimas décadas, os sistemas de avaliações em larga escala vêm sendo amplamente utilizados no Brasil, no sentido de fornecer indicadores de qualidade da educação em todos os níveis de ensino. Destacamos, por ora, o programa denominado PISA (acrônimo de *Programme for International Student Assessment*): realizado pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômicos - Comunidade Européia)[1]. Em linhas gerais, tal programa consiste em um exame realizado a cada três anos, no qual participam todos os países da comunidade europeia, além de alguns países convidados. Em particular, mas não unicamente, este programa busca avaliar a capacidade individual de identificar e compreender o papel da matemática no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de se envolver com a matemática de maneira a atender às suas necessidades atuais e futuras como um cidadão construtivo, consciente e reflexivo.

Segundo o último relatório[2] do PISA realizado em 2015, a nota média do Brasil em

[1] http://www.oecd.org/

[2] Resumo de resultados do PISA2015 (https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf)

matemática é de 377 pontos. Este resultado é considerado significativamente inferior quando comparado ao desempenho dos países da OCDE, cuja média é de 490 pontos. Entre 2003 e 2015 houve um aumento expressivo de 21 pontos na média. Entretanto, nota-se um declínio de 11 pontos se compararmos a média de 2012 com a de 2015. Cabe, portanto, uma reflexão sobre as possíveis deficiências do cenário escolar brasileiro, do ponto de vista metodológico, que contribuíram para que o Brasil tenha alcançado baixos níveis de pontuação e desenvolvimento educacional quando comparados aos de outros países, com condições sócio-econômicas notoriamente mais desfavoráveis.

Diante desta reflexão, o estudo da teoria de probabilidades, no âmbito do ensino médio, mostra-se como uma ferramenta em potencial para auxilar os alunos no desenvolvimento crítico, criativo e autônomo de suas ações, a partir de projeções em cenários diversos, na construção de ideias e nas tomadas de decisões. Entretanto, como os resultados das avaliações em larga escala sugerem, e assim, como é possível de se encontrar em relatos pessoais de alunos e professores, o estudo de probabilidade é percebido, muitas vezes, como difícil, desinteressante, pouco estimulante para a escola/aluno contemporâneos, e acaba perdendo força frente a um conjunto de valores e recursos, tais como as modernidades tecnológicas, presentes no dia a dia da sociedade. Em outras palavras, há uma tendência significativa de desinteresse dos alunos no aprendizado de matemática, em particular de probabilidades, por julgarem pouco útil, desinteressante e de pouca aplicabilidade em suas vidas.

Segundo [2], no ensino tradicional de matemática, estão presentes características e estigmas que tratam o processo de conhecimento através da hereditariedade e maturidade do raciocínio, desconsiderando todas as relações socioculturais no indivíduo na formação do pensamento cognitivo. Desta forma, o educador se restringe a uma dinâmica de ensino aprendizagem que não proporciona interesse, não estimula a independência, não cria ambientes para que o próprio aluno tenha condições de ampliar suas capacidades cognitivas, limitando-o somente ao seu próprio propósito.

É possível notar que, neste segmento, são comuns os episódios e relatos acerca do ambiente em que se dão as aulas de matemática: sempre com uma concepção mecanizada, exaustivamente repetitiva, ainda que os conceitos e exercícios propostos sejam já conhecidos. Trata-se de um vínculo temporário aluno-professor, acontecendo de fato uma memorização não reflexiva, estagnada, que permanece na memória de curto prazo dos alunos, perdendo qualquer sentido educacional, social e cognitivo a médio e longo prazo, ou seja, um conceito desconexo de qualquer realidade e interesse.

Ademais, os critérios de avaliação da aprendizagem costumam ser baseados em fatores como a disciplina, a interação exclusiva com as atividades propostas pelo professor e a realização metódica das atividades teóricas, não levando em consideração qualquer ação espontânea manifestada pelo interesse do aluno em questionar, criar conjecturas e propor discussões.

Desta forma, o conhecimento pode ser entendido como o processo pela qual buscamos ter, gradativamente, maior proximidade entre o sujeito cognoscente e o objeto do conhecimento. É um processo de insistente apropriação do objeto pelo sujeito. As relações entre o sujeito e o objeto do conhecimento podem ser dadas sob as óticas empírica, científica, filosófica ou teológica. Contudo, é necessário observar que não é possível produzir o conhecimento de maneira dissociada dos aspectos históricos, sociais e locais que o cercam, pois são estes fatores que possibilitam sua existência, assim como proporcionam demanda para tal. Produzir conhecimento, portanto, não se trata de uma ação isolada, desconexa dos aspectos de uma sociedade, mas sim uma resposta a esses fatores.

Para o colunista Leonardo Boff, *"As muitas explicações mais confundem que esclarecem. As práticas falam por si"*. Assim, cabe a reflexão da importância da capacidade de colocar em prática o conhecimento adquirido. Só se faz aquilo que se sabe. O excesso de conteúdos impostos em cursos estáticos de matemática, somado ao quase inexistente espaço para desenvolver habilidades práticas, não contribui para uma formação efetiva do indivíduo. A formação do indivíduo frente a sociedade exige que o mesmo seja capaz de aplicar os conhecimentos aprendidos em situações reais, articular suas opiniões e se expressar com clareza para defender um argumento, em solucionar questões de ordem prática, assim como manter uma coerência ideológica.

A partir desta concepção, o professor e o ambiente proporcionam o interesse e o gosto em estar solucionando problemas, ainda que se depare com dificuldades de refletir junto aos alunos o que de fato é conjecturar a solução para uma situação problema ao invés de simplesmente obter a resposta final de um exercício teórico.

De acordo com as Diretrizes Curriculares de matemática para o ensino médio do Estado do Paraná, versão preliminar [3, 4], é sugerido que o aluno faça todo o processo de aprendizagem, desde a coleta dos dados até os cálculos finais:

> (...) O estudo da Probabilidade, a partir da manifestação e/ou ocorrência de ações desencadeadas em função da relação entre as pessoas e o ambiente em que se encontram, permite lançar diferentes olhares sobre o mundo, retirando do ensino desta disciplina a ideia de determinismo e exatidão. É um espaço para a análise e reflexão, considerando variações de resultados obtidos por meio de aferições. É imprescindível a discussão a respeito de possíveis diferenças entre o que se imaginava e o constatado, procurando descobrir o que leva a tal fato, dando os primeiros passos em direção a uma matemática probabilística.

Com relação à linguagem matemática, esta exige um processo particular de leitura, pois além dos textos convencionais, há também a linguagem com os símbolos próprios dessa disciplina, sendo assim, o estudante deve familiarizar-se com esta linguagem, encontrando sentido no que lê.

Além disso, também se faz necessária a reflexão acerca dos aspectos educacionais com olhar ampliado, considerando as diferentes situações pelas quais os aprendizes estão sujeitos.

Os aprendizes de hoje não se sentem motivados com o sistema padrão de ensino, composto por elementos formais e centrado no conteúdo. Entretanto, o questionamento dos professores consiste no porquê ele deveria motivar seus alunos. Uma das respostas a esse questionamento se dá na ideia de que aprender não é uma tarefa fácil, sendo assim, o professor deve tentar ser um facilitador nesse processo, caso contrário seus alunos tendem a tornar o aprendizado algo desestimulante, que provoca uma sensação de impotência e desinteresse pelo conteúdo.

Uma das possibilidades de motivação é a geração de conteúdos mais atrativos, ou seja, conteúdos que tragam elementos em que as pessoas desejam dominar para uso no cotidiano, e não sobre elementos extrínsecos a sociedade. Quando há a possibilidade de construir um conteúdo matemático com elementos tangíveis socialmente, isso se torna uma estratégia que não deve ser desconsiderada. Entretanto, mesmo neste cenário, nem sempre os conteúdos são motivadores por si. Um fator que pode colaborar é a diversão:

> "O papel da diversão no que diz respeito à motivação intrínseca no ensino é duplo. Em primeiro lugar, a motivação intrínseca cria o desejo para que a experiência seja repetida; em segundo, a diversão pode motivar os aprendizes a se prenderem as atividades nas quais tenham pouca ou nenhuma experiencia." [5]

Os jogos são conectados diretamente ao termo diversão. Quando se menciona jogos em qualquer contexto, vinculamos a ideia de ludicidade e ócio. Mas, de acordo com [6], os jogos não são apenas para diversão, e podem gerar outras características como estímulo da memória, entendimento de processos repetitivos e elaboração de melhores conhecimentos, possibilitando o indivíduo desenvolver-se de diferentes formas.

Para [7], jogos são compostos basicamente por quatro elementos, são eles: metas, regras, sistemas de feedback e participação voluntária. Podemos afirmar que essas são características semelhantes às encontradas em um ambiente educacional, salvo a participação voluntária. Sendo assim, se o educador consegue transpor a ideia de um jogo para o ambiente escolar, o elemento diversão pode gerar maior atratividade ao ensino.

Enfrentar um jogo, portanto, nada mais é do que resolver obstáculos desnecessários, mas que escolhemos fazer. Tal escolha está normalmente associada aos aspectos emocionais. Entretanto, na escola há um enfrentamento com obstáculos vistos como desnecessários, em que o professor não consegue, muitas vezes, convencer seus estudantes a se empenharem nas tarefas aplicadas.

Um dos aspectos principais de um jogo, que pode representar um empenho mais árduo dos alunos, é a sua capacidade de adaptação ao nível em que se encontra o jogador. Em geral, os jogadores tendem a integrar um grupo com outros de habilidades similares. A partir desse processo de adaptação, vão elaborando novas estratégias até o momento em que se sentem pouco desafiados, e decidem aumentar os desafios.

Neste sentido, o uso de jogos no processo de ensino aprendizagem tem se tornado assunto cada vez mais frequente entre os educadores, uma vez que são capazes de proporcionar elementos psicológicos, de criatividade e tecnológicos para atividades do exercício da mente, tornando, assim, o assunto interessante e atraente para os alunos, veja [1].

Jogos de cartas incentivam elementos como a experimentação, investigação e inovação. Em jogos de cartas, não são ensinados os conceitos que devem ser aplicados no jogo: os participantes são levados, por si só, a resolverem problemas e experimentar estratégias. Assim, podem gerar conhecimentos e técnicas que poderão ser expandidas em outras utilidades.

Um jogo como o Pôquer traz um mundo imaginário, com espaços hipotéticos em que os jogadores podem testar ideias e experimentar suas consequências. Sendo assim, os estudantes podem transpor elementos importantes para o aprendizado da matemática, uma vez que podem errar e aprender com seus erros, aumentando gradativamente os questionamentos acerca das probabilidades envolvidas.

Considerando todas essas reflexões, as motivações para o desenvolvimento deste trabalho se dão na perspectiva de buscar alternativas que possam corroborar para o desenvolvimento significativo dos conceitos de probabilidade.

Motivados por esta problemática, nosso estudo teve como objetivo estudar e apresentar uma proposta metodológica para o ensino de probabilidades no ensino médio a partir do uso de jogos, mais especificamente, o Pôquer, por ter efeito estocástico, ou seja, não tem como mapear a saída de uma próxima carta, e não o xadrez, por exemplo, que tem efeito determinístico, ou seja, é possível mapear todas as possibilidades da próxima jogada. No Pôquer, o jogador deve ser capaz de avaliar os riscos e, a partir de sua capacidade de formular hipóteses, conjecturar, analisar possibilidades e probabilidades, definindo se o momento é adequado para apostar ou desistir. A escolha por tal modalidade se justifica, portanto, por dispor de tais vantagens quando comparado aos métodos tradicionais, muitas vezes estagnados, aos quais os alunos são submetidos.

Este estudo tem como objetivo geral propor atividades baseadas na teoria dos jogos, para o ensino aprendizagem dos conceitos de probabilidades para alunos do ensino médio.

Esperamos explorar e introduzir conceitos de análise combinatória e probabilidades concomitantes ao jogo de cartas denominado Pôquer, modalidade Texas Hold'em, de maneira a proporcionar motivação prática e contemporânea, para que os alunos desenvolvam independência para o raciocínio inerente às situações que requerem análises de risco e chance, como um fator preponderante para a tomada de decisões.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

▷ No Capítulo 1 é realizada a fundamentação teórica do trabalho. São apresentados tópicos acerca de aspectos históricos, conceitos de aleatoriedade, probabilidade, técnicas de contagem e probabilidade condicional. São apresentadas as principais definições e demonstrações de propriedades, proposições e teoremas, como a Lei da Multiplicação, a Lei da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes.

▷ No Capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos do jogo de baralho que compõem o instrumento metodológico principal das atividades didáticas: o Pôquer. São discutidos aspectos históricos, as regras do jogo, dinâmica operacional do jogo, sua conexão com a teoria de probabilidades e exploramos alguns exemplos aplicados.

▷ No Capítulo 3 apresentamos a metodologia proposta neste trabalho como uma ferramenta alternativa ao ensino tradicional, introduzindo um problema real motivacional de caráter prático e um conjunto de análises do problema. Ainda neste capítulo, é apresentado o questionário elaborado a partir de todos os conceitos, discussões e motivações dispostas na atividade, como um instrumento avaliativo.

▷ No Capítulo 4 são feitas as análises detalhadas das respostas dadas pelos alunos, categorizando-as em três grupos distintos, nos quais um conjunto de principais aspectos foram compilados e analisados. Todas as análises geraram comentários e discussões acerca dos principais erros e acertos dos alunos em relação a teoria de probabilidades. Por fim, são apresentados comentários conclusivos finais, assim como a sugestão de pesquisas futuras.

CAPÍTULO 1

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES

Neste capítulo, introduzimos a teoria fundamental de Análise Combinatória e Probabilidades. Para mais detalhes, recomendamos que o leitor consulte as referências [8, 9] e [10].

1.1 Aspectos históricos

A teoria de probabilidades, concomitante aos estudos de estatística, é capaz de fornecer modelos matemáticos para o estudo e investigações de fenômenos aleatórios, assim como aqueles que dispõem de incertezas. Quando há a necessidade de tomadas de decisões, como em negócios financeiros, políticas governamentais, nas ciências, ou até mesmo em ocasiões do cotidiano, o conceito de probabilidade ocupa um papel de fundamental importância, veja [8]. A partir desses modelos, somos capazes de realizar previsões e estimativas sobre fenômenos cujas informações são incompletas ou derivadas de técnicas de amostragem.

Esta teoria teve origem e foi motivada a partir da modelagem de jogos de azar, especialmente em como lidar com um baralho de cartas ou girando uma roleta. Matemáticos como Blaise Pascal(1623-1662) e Pierre Fermat(1601-1665) são, em muitas vezes, considerados os precursores desses estudos, cujo interesse se dava por questões que, aparentemente, traduziam contradições matemáticas. Por exemplo, em lances repetidos de um dado, foi observado que cada número, de 1 a 6, apareceu com uma frequência de aproximadamente $\frac{1}{6}$, conforme veremos na Definição 1.12. No entanto, se dois dados fossem lançados, a soma dos números sorteados, ou seja, soma de 2 a 12, não apareciam com a mesma frequência. Foi, então, reconhecido que, à medida que o número de lances aumenta, a frequência desses possíveis resultados não ocorria de maneira igualitária. O quadro abaixo exibe os possíveis resultados da soma das faces sorteadas de dois dados honestos lançados.

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

É possível observar que, a frequência $fr(R)$ de um determinado resultado R para a soma é tal que $fr(2) = 1$, $fr(3) = 2$, $fr(4) = 3$, $fr(5) = 4$, $fr(6) = 5$, $fr(7) = 6$, $fr(8) = 5$, $fr(9) = 4$, $fr(10) = 3$, $fr(11) = 2$, e $fr(12) = 1$, ou seja, embora os resultados sejam bem conhecidos para o evento em questão, a frequência de ocorrência para cada um dos resultados da soma não ocorre de modo equitativo, isto é, a soma que ocorre com maior frequência no lançamento de dois dados honestos, soma 7, tem maior probabilidade de ocorrer que as demais somas, portanto, concluímos que conforme maior a frequência de determinado resultado, maior será a probabilidade de ocorrer este resultado.

1.2 Aleatoriedades e probabilidades

Consideremos um processo ou procedimento cujos possíveis resultados sejam conhecidos, mas aleatórios, ou seja, situações problemas pelas quais sabemos as possíveis respostas, mas não exatamente a resposta final. Por exemplo, ao lançar um dado usual, sabemos que os possíveis candidatos a serem sorteados são os números 1,2,3,4,5 e 6. Contudo, não é possível prever, exatamente, qual deles será sorteado. A esse tipo de fenômeno, dá-se o nome de *experimento*. Se um experimento pode ser repetido diversas vezes sobre condições idênticas, então cada repetição é chamada de *tentativa*.

A seguir apresentamos as definições básicas que norteiam a teoria de probabilidades.

Definição 1.1. *Um experimento é chamado de* ***aleatório*** *se:*

(i) *o conjunto de todos os possíveis resultados é conhecido antes das tentativas;*

(ii) *em qualquer tentativa, não se pode dizer, ao certo, qual resultado específico irá ocorrer;*

(iii) *o experimento pode ser repetido em condições idênticas.*

Na sequência, introduzimos alguns conceitos básicos da Análise Combinatória e de Probabilidades.

Definição 1.2. *O **espaço amostral** associado a um experimento aleatório é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento, e é denotado por Ω.*

Podemos utilizar cartas como ótimos exemplos no estudo de probabilidade, em particular, para ilustrar eventos aleatórios. O espaço amostral de um baralho é constituído de 52 cartas, onde há vários eventos, dependendo da característica escolhida. Para exemplificar, no baralho temos 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas, nas quais 13 cartas são de ouros(vermelhas), 13 cartas são de copas(vermelhas), 13 cartas são de espadas(pretas) e 13 são cartas de paus(pretas). Uma carta é sorteada e não podemos, previamente, determinar qual cor irá ser sorteada, embora saibamos todas as possibilidades de cores previamente. Assim, *"sortear uma carta vermelha"* consiste em um experimento aleatório.

Definição 1.3. *Um **evento** A é um subconjunto de resultados em Ω, ou seja, $A \subset \Omega$.*

Dos conhecimentos da teoria elementar dos conjuntos, sabe-se que $\varnothing \subset A$, para todo evento A. Veja [11]. A seguir, definimos os diferentes tipos de eventos.

Definição 1.4. *O subconjunto vazio $\varnothing \subset \Omega$ é chamado de **evento impossível**.*

Definição 1.5. *A **união de eventos** $A \cup B$ consiste em todos os resultados que estão em A ou em B ou em ambos.*

Definição 1.6. *A **intersecção de eventos** $A \cap B$ consiste em todos os resultados que estão em A e B simultaneamente.*

Definição 1.7. *O **evento complementar** de A, denotado por A^c, consiste em todos os resultados que não estão em A, com $A^c \subset \Omega$.*

Definição 1.8. *Dois eventos A e B são ditos **mutuamente exclusivos** ou **disjuntos**, se $A \cap B = \varnothing$. Eventos mutuamente exclusivos não podem ocorrer simultaneamente.*

Segundo [8], a definição matemática de probabilidade formulada, inicialmente, baseada em perspectiva de crença, tem mudado para uma abordagem moderna, baseada em axiomas. Mencionamos, aqui, quatro diferentes definições de probabilidades baseadas em [8]. Começamos com a definição informal de probabilidade.

Definição 1.9. *A **probabilidade** de um evento ocorrer é uma medida (número) da chance da qual podemos esperar que o evento ocorra. Atribui-se um número entre* 0 *e* 1*, inclusive, à probabilidade de um evento. Se tal número é 1, significa que estamos* 100% *certos da ocorrência do evento. Se o número é* 0*, significa que estamos* 100% *certos da não ocorrência do evento. A probabilidade de qualquer evento A no espaço amostral Ω é denotada por $P(A)$.*

Definição 1.10. *Se um experimento tem como espaço amostral* $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *com um número finito de elementos* e_i*, dizemos que os eventos elementares* e_i *são* ***equiprováveis****, se todos tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:*

$$P(e_i) = \frac{1}{n},\ 1 \leq i \leq n.$$

A seguir, apresentamos a definição clássica de probabilidade. Vamos considerar m e n números inteiros positivos.

Definição 1.11. *Se em um experimento houver* n *possibilidades equiprováveis, das quais uma deve ocorrer, e* m *destas são consideradas favoráveis a um evento, então a* ***probabilidade*** *do evento é dada por* $\frac{m}{n}$*, em que* $n \neq 0$*.*

Utilizando a Definição 1.9, determinamos a probabilidade de um evento ocorrer, estudando os seguintes casos:

▷ **CASO I** : Todos os resultados são equiprováveis.

(i) Estabelecemos o número n de resultados no espaço amostral Ω, isto é, $n(\Omega)$.

(ii) Estabelecemos o número m de resultados dos casos de interesse, A, isto é, $n(A)$.

Neste caso, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

▷ **CASO II** : Todos os resultados não são equiprováveis.

(i) Sejam $O_1, O_2, \ldots, O_n$ resultados de um espaço amostral Ω e $P(O_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, presumimos que a probabilidade de cada resultado p_i seja conhecida.

(ii) Listemos todos os resultados em A, digamos, $O_i, O_{i+1}, \ldots, O_m$.
Neste caso, $P(A) = \sum_{k=i}^{m} P(O_k) = p_i + p_{i+1} + \ldots + p_m$, ou seja, $P(A)$ é a soma das probabilidades dos resultados em A.

Exemplo 1.1. Um dado honesto (com todos os resultados equiprováveis) é lançado. Seja A o evento "*ocorrer um número primo*". Então há três resultados favoráveis $\{2, 3, 5\}$ para A e o espaço amostral Ω tem seis elementos, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Portanto,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

A definição clássica de probabilidade (Definição 1.9), assim como sua maneira de ser determinada, não pode ser aplicada quando não há o fator equiprovável entre os possíveis resultados de um evento. Neste caso, é útil o uso da interpretação frequentista de probabilidade, que consiste em uma extensão natural da definição clássica.

Definição 1.12. *A* ***probabilidade*** *de um resultado(evento) é a proporção de vezes que o resultado(evento) ocorreria em um longo período de experimentos repetidos.*

Exemplo 1.2. (Exemplo 2.2.3, [8]) Consideremos n repetidos lançamentos de uma moeda viciada (não honesta). Seja K o evento *"sortear a face coroa"* e $n(K)$ o número de vezes em que K ocorre em n lançamentos. Então,

$$P(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(K)}{n}.$$

A definição frequentista de probabilidade, embora muito utilizada, não é completa. Isto é, está restrita somente aos casos onde os experimentos são passíveis de repetições sobre as mesmas condições. Portanto, não é aplicável à todo tipo de evento. Assim, para um cenário mais completo e adequado, uma definição do ponto de vista axiomático tem sido considerada.

Definição 1.13. *Seja Ω um espaço amostral de um experimento. A* ***probabilidade*** *$P(.)$ é uma função real que atribui a cada evento A no espaço amostral Ω um número $P(A)$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $P(A) \geq 0$;

(ii) $P(\Omega) = 1$, *ou seja, $P(A)$ é unitária para $A = \Omega$.*

(iii) $A_i \cap A_j = \varnothing$ *para $i \neq j$ e A_i e A_j em Ω, ou seja, $P(A)$ é aditiva sobre a união de um número infinito de eventos disjuntos em Ω e*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Usando a Definição 1.13, juntamente aos conceitos e ideias da teoria elementar de conjuntos [11], podemos provar as seguintes propriedades fundamentais.

Proposição 1.1. *Consideremos dois eventos A e B. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

(i) $P(A^c) = 1 - P(A)$, *onde A^c é o evento complementar de A em Ω.*

(ii) Se $A \subset B$, então $P(A) \leqslant P(B)$.

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. *Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Demonstração. (i) Da Definição 1.7, $A \cap A^c = \varnothing$ e $A \cup A^c = \Omega$. Da Definição 1.13, $P(\Omega) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} A \cup A^c = \Omega &\iff P(A \cup A^c) = P(\Omega) \\ &\iff P(A \cup A^c) = 1 \\ &\iff P(A) + P(A^c) = 1 \\ &\iff P(A^c) = 1 - P(A). \end{aligned}$$

(ii) Por hipótese $A \subset B$. Assim,

$$\begin{aligned} n(A) \leq n(B) &\Longrightarrow \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(B)}{n(\Omega)} \\ &\Longleftrightarrow P(A) \leq P(B). \end{aligned}$$

(iii) Da teoria elementar de conjuntos [11], sabemos que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Assim,

$$\begin{aligned} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) &\Longleftrightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \\ &\Longleftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Em particular, se $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cap B) = 0$. Assim, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$\square$

1.2.1 Técnicas de contagem

A medida que o espaço amostral Ω, associado a um evento, dispõe de um elevado número de resultados, torna-se inviável a atribuição, uma a uma, dos resultados do espaço amostral a cada evento de um experimento. Neste sentido, as técnicas de contagem são apresentadas como ferramentas cruciais para alguns resultados relevantes sobre esse tema. A seguir, baseados em [8], apresentamos tais teoremas.

Definição 1.14. ***(Princípio multiplicativo)*** *Se um evento A pode ser decomposto em eventos sequenciais $A_1, A_2, \ldots, A_r$, e se existem p_1 possibilidades distintas de ocorrer A_1, p_2 possibilidades distintas de ocorrer A_2, e assim sucessivamente, então o número total de possibilidades de o evento A ocorrer é dado por:*

$$T_p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r.$$

Exemplo 1.3. Suponhamos três cidades, A, B e C. Existem 4 rodovias que ligam A com B e 3 que ligam B com C. Partindo de A e passando por B, de quantas formas podemos chegar até C?

Solução: Temos 4 possibilidades de partir da cidade A e chegar até B, ou seja, $p_1 = 4$. Para alcançar a cidade C, partindo de B, temos 3 possibilidades, ou seja, $p_2 = 3$. Utilizando o Princípio multiplicativo. Assim,

$$T_p = p_1 \cdot p_2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Portanto, há 12 formas de sair da cidade A, passar por B e chegar em C.

Para as técnicas de arranjo e combinação, é necessária uma definição prévia.

Definição 1.15. *Seja $n \in \mathbb{N}$, o símbolo $n!$, denominado **fatorial de n**, é definido por:*

$$n! = \begin{cases} 1, & se\ n = 0\ \ ou\ n = 1 \\ n(n-1)(n-2)\dots 1, & se\ n > 1 \end{cases}.$$

Teorema 1.1. ***(Arranjo)*** *O número de permutações de m objetos selecionados a partir de uma coleção de n objetos distintos, chamado de **arranjo**, e denotado por $A_{n,m}$, é dado por*

$$A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!},\ \ para\ n \geq m.$$

Demonstração. Consideremos um arranjo de n elementos tomados m a m, denotado por $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, onde $x_1, x_2 \dots x_m$ são chamados de entradas ordenadas. A primeira entrada x_1 pode ser escolhida de n maneiras em $B_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Escolhida a primeira entrada podemos escolher a segunda de $n-1$ maneiras em $B_1 = B_0 - x_1$. De modo recursivo, podemos fazer $n-j$ escolhas em B_j, para $0 \leq j \leq m-1$. Pelo princípio multiplicativo o número de m - Arranjos de n elementos de B_0, $A_{(n,m)}$, é dado por

$$\begin{aligned} A_{(n,m)} &= n(B_0)n(B_1)\dots n(B_j) = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.4. Em uma empresa, quinze funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita?

Solução: Há um total de 15 candidatos, ou seja, $n = 15$. Como existem 2 vagas para cargos distintos, usaremos o conceito de **arranjo** para resolução e, $m = 2$. Assim,

$$A_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_{15,2} = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210.$$

Portanto, há 210 maneiras distintas de eleger diretor e vice-deretor.

Teorema 1.2. ***(Combinações)*** *O número de maneiras que m objetos podem ser selecionados (sem reposição) a partir de uma coleção de n objetos distintos, chamado de **combinação**, e denotado por $C_{n,m}$, é dado por:*

$$C_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},\ \ para\ n \geq m.$$

Demonstração. Consideremos um conjunto arbitrário U_n de n elementos. Para cada subconjunto com m elementos de U_n, como $X_1, X_2, \ldots, X_m$, há $m!$uplas de m entradas com os elementos de $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Deste modo, podemos estabelecer uma relação (bijeção) entre o número de subconjuntos de m elementos e o número de m-uplas, de modo que para cada subconjunto há $m!$ uplas. Como o número de subconjuntos é dado por $C_{(n,m)}$, temos $m!C_{(n,m)} = A_{(n,m)}$, e assim,

$$C_{(n,m)} = \frac{A_{(n,m)}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

□

como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.5. Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

Solução: Há um total de 8 cobaias, portanto, $n = 8$. Como não importa a ordem de escolha de cada cobaia, usaremos o conceito de **combinação** para resolver e, $m = 3$. Assim,

$$C_{(n,m)} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!3 \cdot 2 \cdot 1} = 56.$$

Portanto, há 56 maneiras de realizar a escolha.

1.3 Probabilidade condicional

É possível que, ao investigarmos a probabilidade de ocorrência de um evento A, exista uma dependência ou influência de outro evento B previamente ocorrido. Em outras palavras, se um evento A tem seu espaço amostral alterado pela ocorrência de um evento B, dizemos que estamos interessados em investigar a ocorrência de A condicionado ao fato de B já ter ocorrido. Esta situação é frequentemente percebida no tema proposto deste trabalho, uma vez que, no Pôquer, diversas situações de jogo necessitam de tomadas de decisões que, em cada etapa, são realizadas de acordo com a ocorrência ou não de outras situações prévias. Desta forma, caso tenhamos informações a priori de um determinado evento, essas influenciarão na probabilidade de um evento de interesse a posteriori. Portanto, a compreensão dos resultados desta seção é de fundamental importância para o trabalho proposto. Definimos, inicialmente, o conceito de eventos independentes.

Definição 1.16. *Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral Ω (isto é, dois eventos associados ao mesmo experimento aleatório) são* ***independentes*** *quando a probabilidade de que eles ocorram simultaneamente for igual ao produto de suas probabilidades individuais, ou seja,*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Quando dois eventos não são independentes, a probabilidade de ocorrência de um evento influencia a probabilidade de ocorrência do outro evento, trazendo a ideia de *condicionalidade*, conforme a definição que segue.

Definição 1.17. *A* ***probabilidade condicional*** *de um evento A, dado que tenha ocorrido um evento B, e denotada por $P(A \mid B)$, é obtida por*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)},$$

desde que $P(B) > 0$.

Dada a importância deste conceito, propomos os seguintes exemplos para melhor compreensão do leitor.

Exemplo 1.6. Suponhamos que no lançamento de um dado honesto, sabemos que o número sorteado é primo, mas não o conhecemos. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par?

Solução: Consideremos o evento A *"sortear um número par"*. Caso não soubéssemos da informação prévia, a probabilidade de ocorrência do evento A é determinada por $P(A) = \frac{1}{2}$. De fato, o espaço amostral é dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$. O evento possui os casos favoráveis: $A = \{2, 4, 6\}$. Logo, $n(A) = 3$. Portanto,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Entretanto, notemos que a informação prévia de que "*o número sorteado é primo*" faz com que, neste caso, o espaço amostral Ω seja restrito a $\Omega = \{2, 3, 5\}$ e, assim, $n(\Omega) = 3$. Notemos que, condicionado a este espaço amostral, o evento A dispõe somente de um caso favorável, $A = \{2\}$. Portanto,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{3}.$$

Assim, claramente observemos que a informação prévia influencia na probabilidade de ocorrência do evento em questão, uma vez que tal probabilidade de ocorrência foi alterada de $\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{3}$.

Considerando o evento B como o evento *"o número é primo"*, então $B = \{2, 3, 5\}$ e $n(B) = 3$. Assim, $A \cap B = \{2\}$ e $n(A \cap B) = 1$. Assim, da Definição 1.17, segue que

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}.$$

Consequentemente, a probabilidade de que o número sorteado seja par é de $\frac{1}{3}$.

A seguir apresentamos propriedades envolvendo o conceito de probabilidade condicional.

Proposição 1.2. *Consideremos os eventos E_1, E_2 e A de Ω. As seguintes afirmações são válidas:*

(i) *Se $E_1 \subset E_2$, então $P(E_1 \mid A) \leq P(E_2 \mid A)$;*

(ii) $P(E \mid A) = 1 - P(E^c \mid A)$;

(iii) $P(E_1 \cup E_2 \mid A) = P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$;

(iv) *(**Lei da multiplicação**)* $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A)$.

Demonstração. (i) Por hipótese $E_1 \subset E_2$. Assim,

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow E_1 \cap A \subset E_2 \cap A.$$

A partir da equação acima,

$$n(E_1 \cap A) \leq n(E_2 \cap A).$$

E, segue que,

$$P(E_1 \mid A) = \frac{n(E_1 \cap A)}{n(A)} \leq \frac{n(E_2 \cap A)}{n(A)} = P(E_2 \mid A).$$

(ii) Por hipótese, $E \cap E^c = \varnothing$. Assim, $E \cup E^c = \Omega$. Logo,

$$(E \cup E^c) \cap A = \Omega \cap A \iff (E \cap A) \cup (E^c \cap A) = A.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P((E \cap A) \cup (E^c \cap A)) = P(A) &\iff P(E \cap A) + P(E^c \cap A) - P(E \cap E^c) = P(A) \\ &\iff P(A) = P(E \cap A) + P(E^c \cap A). \end{aligned}$$

Agora,

$$P(E \mid A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} \text{ e } P(E^c \mid A) = \frac{P(E^c \cap A)}{P(A)}.$$

Somando as duas equações,

$$P(E \mid A) + P(E^c \mid A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} + \frac{P(E^c \cap A)}{P(A)}.$$

E, como

$$\frac{P(E \cap A)}{P(A)} + \frac{P(E^c \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1, \tag{1.1}$$

$$1 = \frac{P(A)}{P(A)} = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} + \frac{P(E^c \cap A)}{P(A)} = P(E \mid A) + P(E^c \mid A).$$

Logo,

$$P(E \mid A) = 1 - P(E^c \mid A).$$

(iii) Temos,

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \mid A) &= \frac{P(E_1 \cup E_2) \cap A}{P(A)} \\ &= \frac{P(E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) - P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)} \\ &= P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P((E_1 \cap E_2) \mid A). \end{aligned}$$

(iv) Da definição de probabilidade condicional (Definição 1.17), segue que

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B). \tag{1.2}$$

Da mesma definição,

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(A). \tag{1.3}$$

Portanto, das equações (1.2) e (1.3), concluímos que

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(A)P(B \mid A). \tag{1.4}$$

□

A **Lei da multiplicação** exibida anteriormente consiste em uma das mais importantes e úteis do ponto de vista prático dos cálculos de probabilidade condicional. Para uma leitura aprofundada, indicamos a referência [9].

Para ilustrar, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.7. Em uma urna, são depositadas 20 fichas azuis, 15 amarelas e 12 brancas. Qual a probabilidade de que, sorteadas sequencialmente duas dessas fichas, ambas sejam azuis?

Solução: Notemos que, para que ambas sejam azuis, é necessário que em cada retirada seja sorteada uma ficha azul. Sejam A o evento"*a primeira ficha sorteada é azul*" e B o evento "*a segunda ficha sorteada é azul*". Desta forma, o problema proposto pode ser escrito por

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{20}{47} \cdot \frac{19}{46} \approx 0.1757.$$

Consequentemente, a probabilidade de que ambas as fichas sejam azuis é de aproximadamente 17%.

Teorema 1.3. ***(Lei da Probabilidade Total)*** *Consideremos o espaço amostral* $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$*, em que* $P(A_i) > 0$*,* $i = 1, 2 \ldots n$ *e* $A_i \cap A_j = \varnothing$*, para* $i \neq j$*. Então, para todo evento* B*,*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Demonstração. Observemos que, pela regra do produto, $P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) = P(B \cap A_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por hipótese, $A_i \cap A_j = \varnothing$ e, assim, os eventos $B \cap A_i$ são disjuntos. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right] = P\left[B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right] = P(B);$$

já que a união dos A_i's resulta, por hipótese, no espaço amostral Ω. □

Exemplo 1.8. Em uma fábrica, as máquinas B_1, B_2, B_3 produzem, respectivamente, $30\%, 45\%, 25\%$ dos produtos. Sabemos de experiências passadas que $2\%, 3\%, 2\%$, respectivamente, dos produtos fabricados por estas máquinas são defeituosos. Suponhamos que um produto seja escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele ser defeituoso?

Solução: Neste caso, $P(B_1) = 0,30, P(B_2) = 0,45$ e $P(B_3) = 0,25$. Ainda, sabemos que: $P(D \mid B_1) = 0,02, P(D \mid B_2) = 0,03$ e $P(D \mid B_3) = 0,02$, em que B_1, B_2, B_3 representam os eventos "*a peça foi produzida pela máquina* B_1", "*a peça foi produzida pela máquina* B_2" e "*a peça foi produzida pela máquina* B_3", respectivamente, e $D \mid B_1, D \mid B_2, D \mid B_3$ representam os eventos "*peça ser defeituosa e produzida pela máquina* B_1", "*peça ser defeituosa e produzida pela máquina* B_2" e "*peça ser defeituosa e produzida pela máquina* B_3", respectivamente. Assim, sendo D o evento "*a peça ser defeituosa*", segue que, pela Lei da Probabilidade Total (Teorema 1.3),

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(D \mid B_i) = 0,30 \cdot 0,02 + 0,45 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,02 = 0,0245.$$

Logo, a probabilidade do produto ser defeituoso é de $2,45\%$.

Teorema 1.4. ***(Teorema de Bayes)*** *Suponhamos* $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$*, em que* $P(A_i) > 0$ *com* $i = 1, 2, \ldots, n$ *e* $A_i \cap A_j = \varnothing$*, para* $i \neq j$*. Então, para qualquer evento* B*, com* $P(B) > 0$*,*

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Demonstração. Para cada evento A_i, dada a ocorrência de um evento B, sabemos que pela Lei da Multiplicação (Proposição 1.2),

$$P(A_i \cap B) = P(B)P(A_i \mid B) = P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Assim,

$$P(A_i \cap B) = \frac{P(B \mid A_i)}{P(B)}. \tag{1.5}$$

Mas, pelo Teorema da Probabilidade Total (Teorema 1.3), temos que

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i). \tag{1.6}$$

Portanto, das equações (1.5) e (1.6),

$$\begin{aligned} P(A_i \cap B) &= \frac{P(B \mid A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 1.9. A Tabela 1.1 mostra a quantidade de bolas pretas, brancas e vermelhas, distribuídas em três urnas U_1, U_2, U_3. Escolhemos uma urna ao acaso e dela extraímos uma bola também ao acaso, verificando que a bola é branca. Qual a probabilidade da bola ter vindo da urna U_1?

Tabela 1.1: Bolas distribuídas por urnas

CORES	**URNAS**			
	U_1	U_2	U_3	**TOTAL**
PRETAS	**3**	**4**	**3**	**10**
BRANCAS	**1**	**3**	**3**	**7**
VERMELHAS	**5**	**2**	**3**	**10**
TOTAL	**9**	**9**	**9**	**27**

Solução: Do enunciado, segue que $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$. Então,

$$\begin{aligned} P(U_1 \mid B_r) &= \frac{P(U_1)P(B_r \mid U_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(U_i)P(B_r \mid U_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}} \\ &= \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{1}{27}} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade da bola ter vindo da urna U_1 é de $\frac{1}{5}$.

CAPÍTULO 2

O JOGO DE PÔQUER

2.1 Regras do jogo de Pôquer

A origem do jogo de Pôquer não é bem definida, pois há referências de que o jogo foi levado da França com o nome de Poque, país onde já havia se difundido, aos Estados Unidos por imigrantes, mais especificamente na cidade de Nova Orleans, e foi popularizando-se neste país que, por sua vez, passava por um momento de expansão ao oeste, motivo pelo qual ficou conhecido como o jogo do velho oeste. Por outro lado, outros relatos apresentam divergências quanto à origem do jogo, tendo como referência o fato de que tenha surgido na China, na Dinastia Sung. O Pôquer é um jogo de cartas, jogado com o baralho tradicional de 52 cartas, composto por 4 naipes (símbolos), sendo estes: ouros, espadas, copas e paus. Para cada naipe há 13 cartas com valores distintos, começando da carta mais baixa para a mais alta por: *2 (dois), 3 (três), 4 (quatro), 5 (cinco), 6 (seis) 7 (sete), 8 (oito), 9 (nove), 10 (dez), J (valete), Q (dama), K (rei) e A (ás)*, conforme ilustra a Figura 2.1.

Este jogo pode ser jogado ao vivo (tradicionalmente chamado de *live*) ou *online*, em que existem várias plataformas do jogo. Em ambos os casos, pode ser jogado usando dinheiro fictício ou dinheiro real, sendo os valores representados por fichas de cores diferentes. Em cada rodada são feitas as apostas de tal forma que, ao juntar-se as apostas, forma-se um *pote*. Ganha esse pote quem fizer a melhor combinação de cartas (que será vista no decorrer deste capítulo), nesta rodada, ou quem consiga fazer com que seus adversários desistam. Esta melhor combinação da rodada é chamada tradicionalmente de melhor mão.

Como envolve apostas, há um mito acerca do jogo que consiste na afirmação de que o Pôquer é um jogo de azar, uma vez que os resultados estariam sujeitos significativamente a um fator de sorte. Entretanto, a afirmação não é verdadeira, pois conforme os jogadores tornam-se mais experientes, mesmo com mãos piores, estes tendem a ganhar

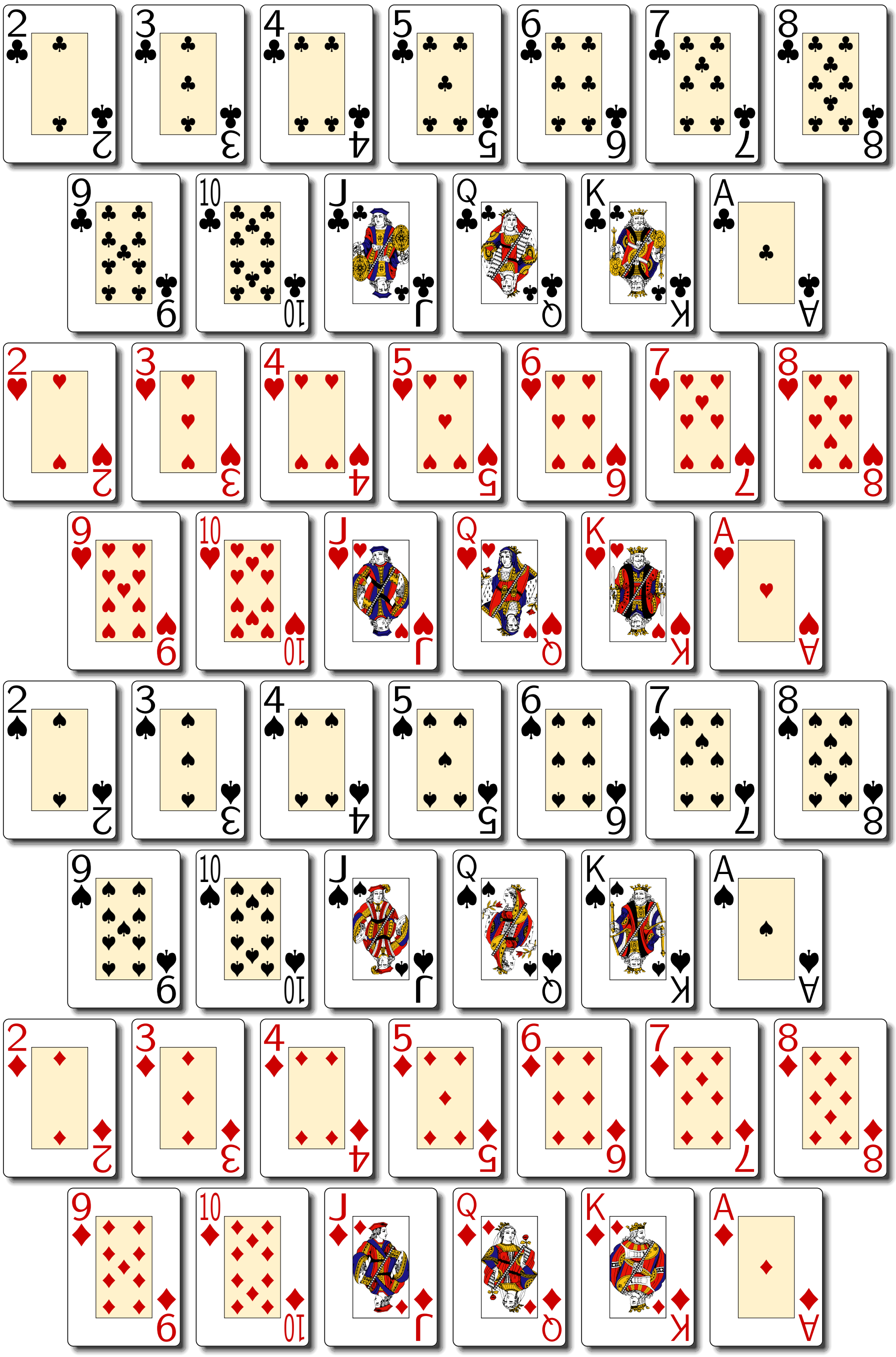

Figura 2.1: Baralho Completo

mais potes. Em [12], os autores investigaram 103 milhões de rodadas jogadas e concluíram que 75,7% não terminaram no *show down* (quando os jogadores mostram as cartas, ou seja, quando a rodada chega ao fim), isto é, os jogadores esconderam suas mãos podendo ou não ter uma boa combinação, o que nos sugere que o Pôquer é um jogo de habilidades, baseado na capacidade de cada jogador tomar decisões sobre as ações no decorrer do jogo.

Existem algumas modalidades do Pôquer, sendo elas: o *Texas Holdem*, *Omaha*, *Razz*, *Stud* e outras. A modalidade *Texas Holdem* é a mais jogada no mundo e a que mais se aproxima didaticamente do ensino de probabilidades, motivo pela qual esta será a base desse estudo. Nesta modalidade a mesa pode ser composta de 2 até 10 jogadores. Cada jogador recebe duas cartas fechadas, ou seja, ele somente vê as cartas que recebeu. No decorrer do jogo, são abertas 5 cartas comunitárias, as quais todos os jogadores podem decidir utilizá-las para fazer suas combinações. Assim, cada jogador terá 7 cartas para fazer uma combinação com apenas 5 delas. Portanto, o jogador nem sempre usará as duas cartas que recebeu para formar a melhor combinação possível na rodada.

2.1.1 Ranking das mãos de Pôquer

Por se tratarem de jargões, alguns termos em língua inglesa serão mantidos, considerando sua popularidade universal entre os jogadores. A seguir, especificamos os tipos de mãos de Pôquer. Para o leitor mais interessado, indicamos as referências [13, 14, 15].

Royal *straight flush*

Esta mão é a mais valiosa do Pôquer, que é uma sequência de 5 cartas que começa do 10(dez) ao A(ás) sendo que todas devem ser do mesmo naipe, como ilustra a Figura 2.2.

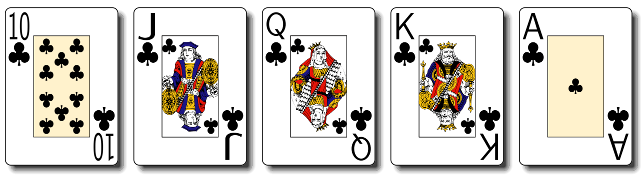

Figura 2.2: *Royal straight flush*

Straight Flush

É qualquer sequência de 5 cartas de mesmo naipe, excluindo-se o caso *Royal straight flush*, como ilustra a Figura 2.3.

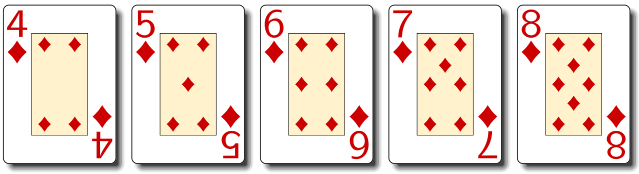

Figura 2.3: *Straight flush*

Quadra

Ocorre quando 4 há cartas de mesmo valor, diferindo-se apenas pelos naipes, conforme a Figura 2.4

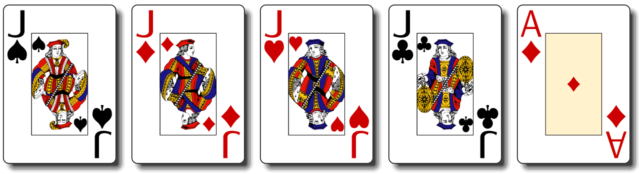

Figura 2.4: Quadra

Full House

Esta mão é formada por 3 cartas de mesmo valor e 2 outras cartas de, também de mesmo valor entre si, conforme a Figura 2.5.

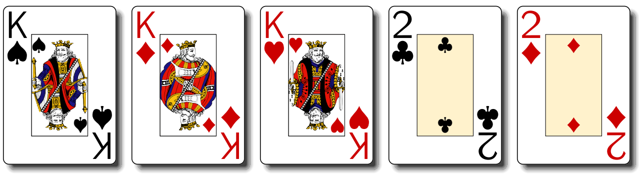

Figura 2.5: *Full House*

Flush

Esta mão é formada por 5 cartas de mesmo naipe, não sequenciais, conforme a Figura 2.6.

Straight

Esta mão é uma sequência de 5 cartas com naipes aleatórios, conforme a Figura 2.7.

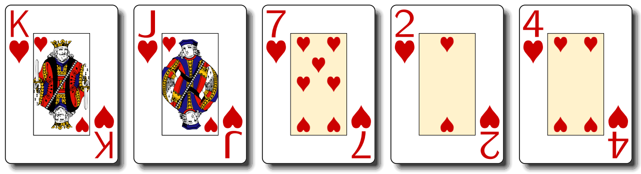

Figura 2.6: *Flush*

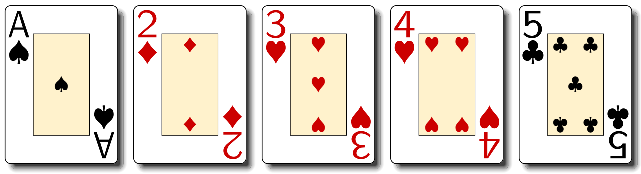

Figura 2.7: *Straight*

Trinca

Esta mão é formada por 3 cartas de mesmo valor, conforme a Figura 2.8.

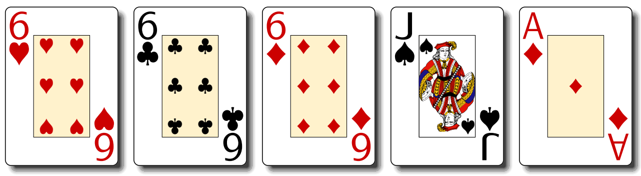

Figura 2.8: Trinca

Dois pares

Esta mão é formada por duas duplas de mesmo valor, conforme Figura 2.9.

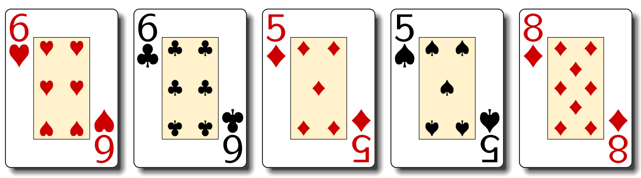

Figura 2.9: Dois pares

Par

Esta mão é formada por 2 cartas de mesmo valor, conforme a Figura 2.10.

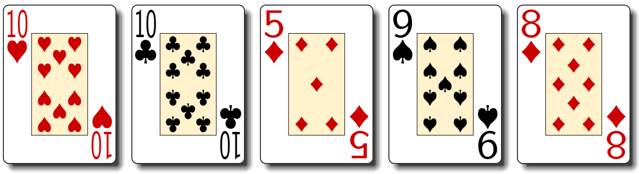

Figura 2.10: Par

Carta Alta

Quando nenhuma mão das anteriores forem formadas, vence a rodada o jogador que possuir as 5 cartas mais altas, conforme a Figura 2.11.

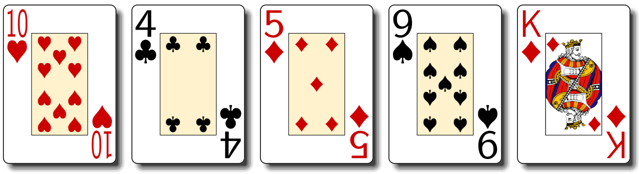

Figura 2.11: Carta Alta (K)

Critérios de desempate

Em caso de empate, é dividido o pote entre os jogadores que estiverem jogando a mão. Contudo, há algumas situações que requerem critérios de desempate, vejamos os seguintes casos.

• Quando dois ou mais jogadores formam o mesmo tipo de mão, de valores distintos, vencerá o jogador que possuir o tipo de mão de maior valor.

• Quando dois ou mais jogadores formam o mesmo tipo de mão, de mesmo valor, vencerá o jogador que possuir a maior carta que não compõe a mão referida. Essa carta de desempate é chamada de *kicker*.

2.1.2 Dealer e blinds

No início do jogo um botão denominado *dealer* é colocado a frente do jogador que ocupa a posição 1 da mesa e, segue para o próximo jogador a esquerda ao fim de cada rodada. O jogador que estiver com o botão será o último jogador a tomar ação na mesa, o que representa uma vantagem, pois neste momento conhecerá previamente quais foram as ações tomadas pelos seus adversários.

Os *blinds* são apostas obrigatórias. Elas deverão ser feitas pelos dois jogadores que estiverem imediatamente a esquerda do *dealer*, antes das cartas serem distribuídas. O primeiro jogador à esquerda do *dealer* deve apostar metade do valor do *blind*, aposta de nome *small blind*(SB). O jogador que estiver à esquerda do (SB) deverá apostar o *blind* inteiro, aposta de nome *big blind* (BB). A aposta mínima para o jogo é o valor da *big blind*. A Figura 2.12 ilustra uma mesa de Pôquer com SB, BB e *dealer* posicionados.

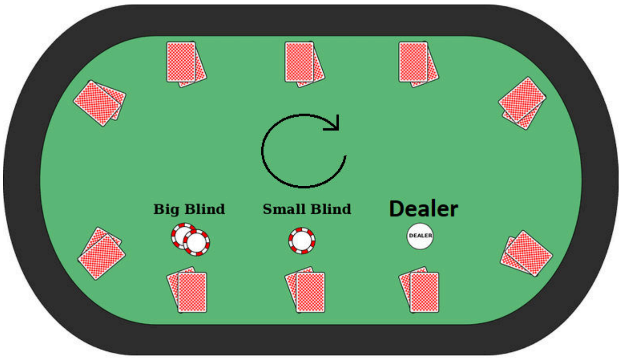

Figura 2.12: Posições do SB, BB e dealer em uma mesa de Pôquer

2.1.3 Ações do jogo

Cada jogador, em sua vez de tomar a decisão da jogada, tem possíveis ações a serem tomadas, que são: desistir da mão (*fold*), passar a jogada sem apostar (*check*), pagar uma aposta (*call*), apostar (*bet*) ou aumentar uma aposta já feita por algum jogador (*raise*). Cada ação a ser tomada dependerá de como está a rodada.

Dinâmica do jogo

Sorteado o jogador que iniciará como *dealer*, são feitas as apostas dos *blind*, SB e BB. Em seguida, são distribuídas duas cartas para cada jogador. Assim começa a primeira etapa de apostas com o jogador à esquerda do jogador que é o BB. Este primeiro jogador deverá agir podendo decidir se irá pagar a aposta mínima (*call*), desistir da mão (*fold*) ou aumentar a aposta (*raise*). Essa dinâmica se repete aos demais jogadores, sempre baseada na ação tomada pelo jogador anterior. Fechando a primeira etapa de apostas, são abertas 3 cartas na mesa, denominadas cartas do *FLOP*. Essas cartas são comunitárias, ou seja, todos os jogadores podem utilizá-las para compor sua melhor combinação de 5 cartas. A partir daí, começa a segunda etapa de apostas aos jogadores que permaneceram no jogo. O primeiro jogador que deverá agir será o jogador à esquerda do *dealer* e que ainda esteja participando do jogo. Feitas as ações, mais uma carta é aberta na mesa, denominada carta do *TURN*, e seguindo-se as apostas novamente. Por fim, abre-se a última carta na mesa, denominada carta do *RIVER*. Neste momento, acontece a última rodada de ações, na qual os jogadores remanescentes deverão ir para o *show down*, que consiste na abertura das cartas em posse de cada jogador para que sejam verificadas e decidido o jogador que obteve a melhor combinação de 5 cartas. O jogador vencedor é premiado com todas as fichas do pote. Em seguida, e inicia-se uma nova rodada do jogo, até que um único jogador seja o vencedor final ao eliminar os demais adversários.

2.2 Probabilidade e Pôquer

Vejamos algumas situações que recorrem aos conceitos de probabilidade apresentados anteriormente, aplicados ao Pôquer: A mão mais desejada pelos jogadores antes do *flop* é o "par de Ases", pois é a melhor mão nesta etapa pelo motivo de que se nenhum dos jogadores acertarem uma combinação com as cartas da mesa, o "par de ases" vencerá qualquer outro par. Qual a probabilidade de um jogador receber par de ases? A resposta para essa questão é $\frac{1}{221}$ e esse resultado pode ser obtido de diferentes formas. De acordo com [16], poderíamos determiná-lo observando quantos pares de ases foram distribuídos em 5 milhões de mãos, mas isso seria um processo longo e difícil. Sendo assim, podemos resolver de maneira melhor, dividindo o problema em partes: Primeiramente, consideremos apenas uma das cartas recebidas pelo jogador, isso faz com que o problema inicial seja simplificado. Delimitamos, então, ainda mais a pergunta: Qual a probabilidade de uma única carta recebida seja um Ás? Além disso, é possível delimitar ainda mais o problema fazendo a seguinte pergunta: Qual a probabilidade de uma única carta recebida seja um Ás de espadas? Façamos as seguintes suposições:

- Há 52 cartas no baralho;
- Todas tem a mesma probabilidade de serem recebidas;
- Seja A o evento "*Receber uma carta Ás*".

A probabilidade de receber uma carta qualquer é de $\frac{1}{52}$. Se a chance de receber um A♠é de $\frac{1}{52}$, então a chance de receber um Ás de outro naipe é a mesma. Como há 4 naipes distintos, a chance de receber um Ás é de:

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{52} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13},$$

ou seja, a chance de receber um Ás é de aproximadamente $7,7\%$, o que não é tão fácil.

2.2.1 Investigando a independência/dependência de eventos

Algumas situações no Pôquer remetem às ideias de eventos mutuamente exclusivos, já abordados neste texto. Consideremos, por exemplo os eventos:

- A carta é de copas;
- A carta é um Ás.

Se desejamos determinar a probabilidade de que uma única carta seja de copas **OU** seja um Às, encontramos 13 cartas de copas dentre as 52 que há no baralho. Então, a probabilidade de que a carta seja de copas é de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. A probabilidade da carta ser um Ás, como exemplificado anteriormente, é de $\frac{1}{13}$. Entretanto, não é possível utilizar a ideia de $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, uma vez que é possível que uma carta seja simultaneamente um Às e de copas. Para essa possibilidade, que dizemos se tratar de uma ocorrência conjunta, a probabilidade pode ser determinada por $\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$. Desta forma, os eventos não são mutuamente exclusivos. Em outras palavras, há uma dependência entre eles.

Retomando a questão inicial "Qual é a probabilidade de um jogador receber par de ases?", procedemos de maneira similar, dividindo o problema em partes. Consideremos:

- (A) A primeira carta é um Às ;
- (B) A segunda carta é um Às.

Então, poderíamos sugerir que:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{13}.$$

Entretanto, os eventos A e B são dependentes, uma vez que a ocorrência de um Às na primeira carta (evento A) faz com que a probabilidade de ocorrer Às na segunda carta (evento B) diminua, pois o espaço amostral (número de cartas no baralho) é alterado. Assim, $P(B \mid A)$, que representa a chance da segunda carta ser um Às dado que a primeira carta é um Às, pode ser determinado por:

$$P(B \mid A) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}.$$

Desta forma,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221},$$

confirmando que a probabilidade de receber par de ases é menor que 1%.

Consideremos, agora, outro exemplo: Além do par de ases, outras mãos também são muito desejadas por serem consideradas mãos fortes (mãos que são melhores que a maioria nesta etapa, antes de virar o *flop*), como o par de reis e o par de damas. Desta forma, perguntamos "Qual a probabilidade de um jogador receber um par de ases ou par de reis ou par de damas?".

Vejamos que, pelo exemplo anterior, a probabilidade do jogador receber par de ases é $\frac{1}{221}$. Analogamente, se AA representa a ocorrência de um par de ases, KK representa a ocorrência de um par de reis e QQ representa a ocorrência de um par de damas, então $P(AA) = P(KK) = P(QQ) = \frac{1}{221}$.

Notemos que é impossível que duas cartas sejam simultaneamente AA e KK ou AA e QQ ou QQ e KK. Portanto, tais eventos são todos independentes. Assim, podemos utilizar a ideia de que $P(AA \cup KK \cup QQ) = P(AA) + P(KK) + P(QQ)$. Logo,

$$P(AA \cup KK \cup QQ) = \frac{1}{221} + \frac{1}{221} + \frac{1}{221} = \frac{3}{221}.$$

Desta forma, a chance de receber qualquer um dos três pares indicados é extremamente pequena (menos de 2 %), sendo que na etapa *pré-flop*(momento que antecede a abertura das cartas coletivas) esses pares são considerados mãos fortes.

2.2.2 Uma questão mais complexa

Consideremos, agora, um problema mais complexo: Um jogador recebeu duas cartas do mesmo naipe. Qual a probabilidade de fazer um *flush* no *flop*?

Sem perda de generalidade, consideremos que o jogador dispõe de duas cartas de copas. Desta forma, restam 11 cartas de copas no baralho. Para que o *flush* ocorra no *flop*, é necessário que as 3 cartas sejam, também, de copas. Consideremos os eventos:

- (A) A primeira carta do *flop* é de copas;
- (B) A segunda carta do *flop* é de copas;
- (C) A terceira carta do *flop* é de copas;

Então,

- $P(A) = \frac{11}{50}$ (duas cartas foram removidas do baralho pois compõe a mão do jogador);
- $P(B \mid A) = \frac{10}{49}$ (pois já ocorreu o sorteio de uma carta de copas na primeira do *flop*, totalizando uma retirada de 3 cartas do baralho);
- $P(C \mid (A \cap B)) = \frac{9}{48}$ (pois já ocorreram os sorteios de duas cartas de copas no *flop*, totalizando uma retirada de 4 cartas do baralho).

Assim,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{1}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{11}{245}.$$

Denotando por $D = (A \cap B)$, temos

$$P(D \cap C) = P(D) \cdot P(C \mid D) = P(A \cap B) \cdot P(C \mid (A \cap B)) = \frac{11}{245} \cdot \frac{9}{48} = \frac{33}{3920},$$

ou seja, a probabilidade de realizar um *flush* no *flop* é menor que 1%. Novamente, podemos observar que o jogador que dispõe de um *flush* no *flop* possui uma mão consideravelmente forte, (na maioria das vezes, melhores que mãos de seus adversários) dando a ele maiores condições de permanecer ativo no decorrer da rodada.

CAPÍTULO 3

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Este capítulo apresenta uma proposta de ensino-aprendizagem com o auxílio do Pôquer. Essa proposta de atividades foi aplicada em alunos das turmas do segundo ano do ensino médio do Instituto Federal do Paraná, *campus* Jacarezinho, no contraturno. Esses alunos participavam de um projeto, coordenado por mim, de atividades lúdicas, como o jogo de xadrez, por exemplo. Estes alunos cursarão o conteúdo de probabilidades no decorrer do ano no turno matutino, no método tradicional. A proposta do trabalho foi desenvolver o conteúdo de probabilidade através de uma abordagem não tradicional de ensino, com intuito de trazer um fator motivador às aulas. Entretanto, o conteúdo prévio necessário para o desenvolvimento da probabilidade, como por exemplo, permutações, arranjos e combinações foram explicados anteriormente à intervenção com o jogo de Pôquer.

A atividade de ensino aprendizagem foi desenvolvida no formato similar a de um minicurso estendido, distribuído em 10 encontros (aulas) com carga horária de 1h30min por encontro, totalizando 15h. As temáticas das aulas foram distribuídas conforme a seguinte ordem:

1. Aula 1: Apresentação do baralho, contexto histórico, regras do jogo de Pôquer e aspectos contemporâneos;

2. Aula 2: Prática do jogo de Pôquer individualmente e em grupos: Noções do conceito de “risco” e motivação para o uso da matemática na tomada de decisão;

3. Aula 3: Discussão da dinâmica do jogo, primeiras impressões e apresentação do Problema Motivador: Decisão milionária;

4. Aula 4: Introdução dos conceitos de probabilidades aplicados ao Pôquer;

5. Aula 5: Probabilidades de eventos simples no Pôquer, probabilidades da união de eventos mutuamente exclusivos no Pôquer;
6. Aula 6: Probabilidades de eventos não mutuamente exclusivos no Pôquer, lei da multiplicação;
7. Aula 7: Probabilidade condicional no Pôquer;
8. Aula 8: Breve retomada dos conceitos de probabilidade e resolução do problema motivador exposto na aula 3;
9. Aula 9: Avaliação da aprendizagem: Aplicação de questionário com problemas de probabilidade aplicados ao Pôquer;
10. Aula 10: Discussão dos resultados dos principais erros e acertos;

3.1 Motivação: decisão milionária

A fim de contextualizar a importância da teoria de probabilidades em tomadas de decisões, apresentamos uma situação real descrita no livro *"Introduction to Probability with Texas Holdem Examples"*, veja [17].

No torneio mundial de Pôquer, o WSOP (World Series of Poker), ocorrido em 2006, participaram 8773 jogadores no evento principal, oriundos de vários países. A premiação para o vencedor era da ordem de 12 milhões de dólares, que representa a maior premiação já paga da modalidade no momento, assim como o valor mais alto já pago em um esporte individual. Na mesa final, restando 3 jogadores, Jamie Gold, Paul Wasicka e Michael Binger, uma determinada situação no jogo fez com que o jogador Wasicka tivesse que tomar uma difícil decisão baseada nas ações de Binger e Gold, este último sendo o *chip leader*(jogador com maior *stack*, ou seja, que dispõe do maior valor acumulado em fichas). A situação era o seguinte:

- Jamie Gold, chip leader, com 60 milhões em fichas;
- Paul Wasicka: 18 milhões em fichas;
- Michael Binger: 11 milhões em fichas;
- Os blinds estavam em 200.000 / 400.000.

As ações iniciais foram:

- Gold dá *call* com 4♠3♣;
- Wasicka dá *call* com 7♠8♠;
- Binger aumenta a aposta para 1,5milhão de fichas, com A♥10♥;
- Gold e Wasicka pagam a aposta.

Neste momento, as cartas do FLOP são abertas:

- O FLOP mostra 🃚🂦🂥;

Na sequência, os jogadores fazem as seguintes ações:

- Wasicka dá *check* ;
- Binger faz um *raise* de 3,5milhões de fichas ;
- Gold dá *all-in* (aposta todas as suas fichas).

Neste momento, o jogador Wasicka deve tomar a decisão de que ação faria: Pagar a aposta ou desistir. Caso Wasicka decidisse por dar *call*, seria necessário utilizar todas as suas fichas e, assim, caso perdesse a mão, estaria eliminado do torneio. Por outro lado, se fosse vencedor da mão, com o pote seu *stack* mais que dobraria, aumentando significativamente a chance de ser campeão do torneio, faturando 12 milhões de dólares, ou ainda, poderia desistir e dar sequência ao jogo.

Nestas condições, considerando o ponto de vista dos expectadores e a teoria de probabilidades, qual a melhor decisão que Wasicka poderia tomar?

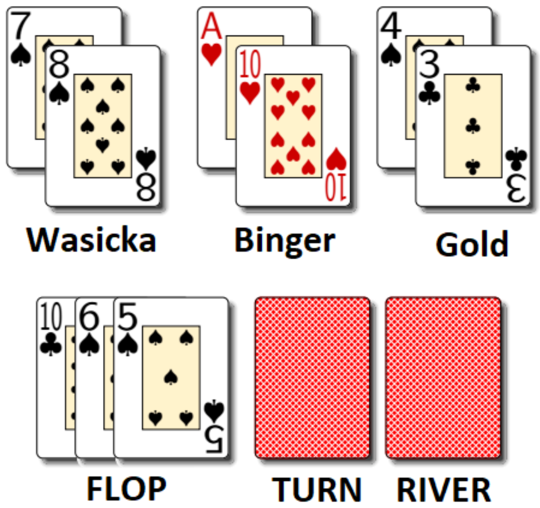

Figura 3.1: Wasicka: Pagar a aposta ou desistir?

Claramente, a decisão de Wasicka deveria ser baseada nas probabilidades de ocorrências de cartas que lhe dariam condições de vencer a mão. Neste sentido, torna-se evidente a importância de, a partir de um conjunto de regras e condições, estabelecer a probabilidade de ocorrência de eventos para tomada de decisão.

3.1.1 Análise da decisão a partir da teoria das probabilidades

Por questões didáticas, as análises de probabilidades aqui dispostas serão calculadas a partir do ponto de vista de um expectador, que possui informações das cartas de todos os jogadores.

Qual é a probabilidade que Wasicka faça um *straight flush* no TURN?

Para Wasicka fazer um straight flush (SF) no TURN, devem ser sorteadas as cartas 4♠ ou 9♠. Sabemos que o 4♠ está em posse do jogador Gold. Então, a única carta possível para o straight flush é 9♠. Como há 43 cartas restantes no baralho (pois já saíram 3 no FLOP, e cada jogador tem 2), então a probabilidade de Wasicka fazer straight flush no TURN é:

$$P(SF) = \frac{1}{43}.$$

Notemos que, neste caso, a definição de probabilidade simples foi utilizada, uma vez que foram analisadas todas as possibilidades favoráveis em um universo de todos eventos possíveis.

Qual é a probabilidade que Wasicka faça um *straight flush* no TURN ou no RIVER?

Sejam A o evento "*Wasicka faz straight flush no TURN*" e B *o evento "Wasicka faz straight flush no river*". Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Como a única carta possível para que ocorra *straight flush* é o 9♠, então não é possível realizar esta mão no TURN e no RIVER, ou seja, $P(A \cap B) = 0$. Sabemos que $P(A) = \frac{1}{43}$, pela situação anterior, e para que ocorra SF no RIVER, então 9♠ deve ser sorteada. Assim, $P(B) = \frac{1}{43}$, pois as 43 cartas têm a mesma chance de aparecer no RIVER. Desta forma, a probabilidade que Wasicka faça um *straight flush* no TURN ou no RIVER é:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{43} + \frac{1}{43} + 0 = \frac{2}{43}.$$

Percebemos que esta problemática exibe o cálculo envolvendo a união de dois eventos, particularmente, dois eventos independentes.

Qual é a probabilidade que Wasicka acerte um *flush* no TURN?

Seja F o evento "*Wasicka faz flush no TURN*". Como há 13 cartas de cada naipe, existem 8 cartas do naipe de espadas, que são: A, K, Q, J, 10, 9, 3 e 2. Desta forma,

$$P(F) = \frac{8}{43}.$$

Qual é a probabilidade que Wasicka acerte um *flush* no TURN ou no RIVER?

Para Wasicka completar um flush, basta sair mais uma carta de espadas, no TURN ou no RIVER. Seja A o evento "*carta de espadas no TURN e carta de outro naipe no RIVER*", B o evento "*carta de outro naipe no TURN e carta de espadas no RIVER*" e C o evento "*carta de espadas no TURN e carta de espadas no RIVER.* A probabilidade desejada poderia ser obtida utilizando a ideia de probabilidade da união de 3 eventos mutuamente exclusivos, veja Definição 1.8. Entretanto, por questão de simplificação, tal probabilidade pode ser determinada a partir da ideia de probabilidade do evento complementar. Em outras palavras, basta determinar a probabilidade da não ocorrência de A, B e C, ou seja, a não ocorrência de uma carta de espadas seja no TURN, no RIVER ou em ambos, respectivamente.

Sabemos que Wasicka não fará *flush* no TURN ou no RIVER (nem em ambos) se em ambas etapas não saírem cartas de espadas. As possibilidades de cartas para o TURN e RIVER podem ser calculadas usando o conceito de combinação simples $C_{43,2}$, veja Teorema 1.2,

$$C_{43,2} = \frac{43!}{41!2!} = 903.$$

Para que ambas as cartas (TURN e RIVER) não sejam de espadas, as possibilidades podem ser determinadas a partir da combinação simples $C_{35,2}$, uma vez que há 43 restantes no baralho sendo 8 delas de espadas. Assim,

$$C_{35,2} = \frac{35!}{33!2!} = 595.$$

Logo, utilizando a propriedade de probabilidade do evento complementar, (Proposição 1.1 (i)) a probabilidade do evento F "*Wasicka acerte um flush no TURN ou no RIVER*" é

$$P(F) = 1 - P(F^c) = 1 - \frac{595}{903} = \frac{308}{903} \cong 34\%.$$

Qual é a probabilidade que Wasicka acerte um *straight* ou *flush* no RIVER, supondo que os 3 jogadores permaneceram na mão?

Para que Wasicka acerte um *straight* ou *flush* no RIVER, a carta que saiu no TURN não é de espadas, nem o 4 de espadas e nem o 9 de espadas. Sendo assim, temos a informação de 10 cartas: as 4 cartas comunitárias que estão na mesa, mais as duas de cada um dos 3 jogadores, isto é, Wasicka fará um *straight* se sair uma das três cartas 4 que estão no baralho, pois o 4♠está com o Gold, ou um dos três 9, (há quatro 9 que não foram vistos ainda, mas com o 9♠, Wasicka fará *flush*), portanto, há 6 cartas para Wasicka completar um *straight*, e para que ele faça *flush* há oito cartas, (2, 3, 9, 10, J, Q, K ou A) de espadas. Portanto, para que ele consiga um *straight* ou um *flush* no

RIVER, há 14 cartas favoráveis em um total de 42 cartas não vistas, desta forma, a probabilidade do evento F "*Wasicka acerte straigh ou flush no RIVER*" é:

$$P(F) = \frac{14}{42} = \frac{1}{3} \cong 33\%.$$

Caso os 3 jogadores permanecessem na mão até o final, qual seria a probabilidade de que Wasicka vencesse a rodada?

Sabemos que 9 cartas das 52 que compõem o baralho, há 43 cartas com a mesma chance de sair tanto no TURN quanto no RIVER, que é um total de 903 duplas possíveis, como já foi visto no caso anterior. Analisando as possibilidades de cartas para TURN e RIVER, chamaremos de A_1 = *ambas as cartas são de espadas*, A_2 = *somente uma das cartas é de espadas* e A_3 = *as duas cartas não são de espadas*. Seja o evento B= *Wasicka vence a rodada*. Pelo Teorema da Probabilidade Total, (Teorema 1.3), temos que $P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)$. Analisaremos todos os casos que Wasicka venceria a mão.

Vamos analisar o primeiro evento: A_1 = *ambas as cartas são de espadas*. Como sabemos, somente 8 das 43 cartas restantes no baralho são de espadas. E as possíveis combinações para TURN e RIVER são calculadas da forma $C_{43,2} = 28$ possibilidades, então $P(A_1) = \frac{28}{903}$. Mas existem duas combinações de cartas de espadas que não dariam a vitória para Wasicka, que são A♠10♠, o que seria um *full house* de Binger, ou 3♠2♠, um *straight flush* de Gold. Desta forma, $P(B \mid A_1) = \frac{26}{28}$, e então,

$$P(B \mid A_1)P(A_1) = \frac{26}{28} \cdot \frac{28}{903} = \frac{26}{903}.$$

Já para o segundo evento: A_2 =*somente uma das cartas é de espadas*, sabendo que há 8 cartas de espadas das 43 restantes no baralho, concluiremos que 35 delas são de outros naipes. Desta forma, para formar o TURN e RIVER temos $8 \cdot 35 = 280$ possibilidades. Sendo assim, temos $P(A_2) = \frac{280}{903}$. Das cartas restantes de espadas, somente as K, Q, J, 9, 3 e 2 combinadas darão a vitória ao Wasicka, pois A♠ e 10♠ será um *full house* para um adversário. Desta forma, temos os seguintes casos a serem analisados:

Primeiro caso: A combinação das cartas de espadas que darão vitória ao Wasicka são calculadas da forma $6 \cdot 35 = 210$, que são as 6 cartas de espadas que não completam *full house* combinadas com as 35 cartas restantes do baralho que são de outros naipes.

Segundo caso: Caso saísse o A♠, Wasicka estaria vencendo a mão pois teria feito um *flush*, mas Binger estaria com dois pares, um de A e outro de 10, e com mais uma dessas duas cartas faria um *full house* e venceria a mão. Então, caso saísse o A de espadas, para garantir a vitória do Wasicka, das 35 cartas restantes no baralho, não poderia sair nem A (restou o A♦A♣) e nem 10 (somente A♣), desta forma, as possibilidades que Wasika teria de vencer a mão seria calculada da forma $35 - 3 = 32$, pois das 35 cartas restantes, apenas 3 não poderiam combinar com o A♠.

Terceiro caso: Caso saísse o 10♠, Wasicka estaria vencendo a mão, pois teria feito um *flush*, mas Binger estaria trincado, e desta forma, Binger venceria caso saísse qualquer outra carta que fizesse uma dobra, que são: A♦, A♣, 6♦, 6♥, 6♣, 5♦, 5♥ou 5♣, pois daria a Binger um *full house* ou caso saísse o 10♦, que daria uma quadra a Binger. Sendo assim, as possibilidades de Wasicka vencer neste caso são calculadas da forma $35 - 9 = 26$, pois das 35 cartas restantes no baralho, apenas 9 delas dariam vitória a um adversário caso saísse o 10♠. Portando, saindo apenas uma carta de espadas, das 280 possíveis combinações, basta somar os 3 casos para termos quantas combinações seriam favoráveis ao Wasicka, ou seja, $210 + 32 + 26 = 268$, então,

$$P(B \mid A_2)P(A_2) = \frac{268}{280} \cdot \frac{280}{903} = \frac{268}{903}.$$

Lembremos que o terceiro evento é $A_3 =$*as duas cartas não são de espadas*. Neste caso, devemos calcular todas as possíveis combinações das 35 cartas restantes no baralho, que não são de espadas, para TURN e RIVER, $C_{35,2} = 595$ possibilidades. Então, $P(A_3) = \frac{595}{903}$. As cartas que dariam vitória ao Wasicka são os 9 e os 4 que formariam um *straight* e 88 que dariam uma trinca a ele. Sendo assim, temos cinco casos a serem estudados.

Primeiro caso: Sair duas cartas 9. Restam três cartas 9 das 35 cartas do baralho, que são calculadas da forma $C_{3,2} = 3$ possíveis casos de sair 9 e 9, que daria *straight* ao Wasicka.

Segundo caso: Sair uma carta 9. Caso saísse um dos três 9, Wasicka faria um *straight*, independente da outra carta que sair, Wasicka venceria a mão. Para calcular as possibilidades, basta calcular $3 \cdot 32 = 96$ possibilidades, 3 porque são três cartas 9, e 32 porque são as 35 cartas restantes menos as três cartas 9.

Terceiro caso: Sair duas cartas 4. Restam três cartas 4 das 35 cartas do baralho, que são calculadas da forma $C_{3,2} = 3$ possíveis casos de sair 4 e 4, que daria *straight* ao Wasicka.

Quarto caso: Sair uma carta 4. Caso saísse uma das três cartas "4" daria vitória ao Wasicka. Como restam 35 cartas no baralho, e neste caso, não pode sair a carta 9, então restam apenas 32 cartas. Para calcular a saída de uma carta 4 das 32 cartas restantes, basta fazer $3 \cdot 29 = 87$ possíveis maneiras de combinar uma carta 4 com uma carta qualquer que não seja a carta 9.

Quinto caso: Sair duas cartas 8. Restam três cartas "8" das 35 cartas do baralho, que são calculadas da forma $C_{3,2} = 3$ possíveis casos de sair 8 e 8, que daria trinca ao Wasicka.

Somando todos os possíveis casos, temos $3 + 96 + 3 + 87 + 3 = 192$ que dariam vitória ao Wasicka nas 595 possíveis combinações para TURN e RIVER sem que seja cartas de espadas, então

$$P(B \mid A_3)P(A_3) = \frac{192}{595} \cdot \frac{595}{903} = \frac{192}{903}.$$

E, por fim,

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1)+P(B \mid A_2)P(A_2)+P(B \mid A_3)P(A_3) = \frac{26}{903}+\frac{268}{903}+\frac{192}{903} = \frac{486}{903},$$

que corresponde a $53,82\%$. Sendo assim, caso os três jogadores permanecessem até o fim da rodada, Wasicka teria $53,82\%$ de chances de vencer a mão. Neste caso, vale destacar que, dada a probabilidade de Wasicka vencer, os outros dois adversários teriam, conjuntamente, $46,18\%$ de vencer a rodada. Assim, pressupomos que Wasicka deveria ter dado *call*.

Ao conhecerem a história, os alunos se mostraram curiosos para saber quem venceu a mão, já que a mão envolvia uma grande quantia - 12 milhões de dólares. O fato ocorrido foi que após o *fold* dado por Wasicka, Binger pagou a aposta, mas também não obteve êxito, pois no *turn* e *river*, respectivamente, foram apresentadas as cartas 7♣Q♠, dando um *straight* para Gold. Ao final do torneio, Gold (vencedor da mão citada anteriormente), consagrou-se o vencedor do torneio.

3.2 Proposta de exercícios: Probabilidade aplicada ao Pôquer

Depois dos conceitos de probabilidades bem fundamentados, o próximo passo foi ensinar os alunos a jogarem Pôquer. Simulamos várias disputas em sala de aula. Propomos o seguinte questionário a uma turma de 2^a série do ensino médio de 30 alunos, do Instituto Federal do Paraná, *campus* Jacarezinho, Paraná.

QUESTIONÁRIO

Suponha que você está em uma mesa de Pôquer sozinho, responda:

Questão 1. Qual a probabilidade de você receber A♣7♦?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno seja capaz de determinar a probabilidade de um evento simples, utilizando conceitos da análise combinatória, em particular, o conceito de combinações.*
Há apenas 1 caso favorável em um total de $C_{52,2} = 1326$ combinações distintas possíveis dos pares de cartas. Desta forma,

$$P(\text{A♣7♦}) = \frac{1}{1326}.$$ Logo, a probabilidade de receber A♣7♦ é menor que 1%.

Questão 2. Qual a probabilidade de você receber A (de qualquer naipe) e 7♦?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno seja capaz de determinar a probabilidade de um evento simples considerando mais casos favoráveis em relação a questão anterior.*
Neste caso, há 4 casos favoráveis: A♥7♦, A♦7♦, A♣7♦e A♠7♦. Assim:

$$P(\text{A(qualquer) } 7♦) = \frac{4}{1326} \cong 0,3\%.$$

Questão 3. Qual a probabilidade de você receber as cartas Ás e 7 de quaisquer naipes?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno seja capaz de determinar a probabilidade de um evento simples considerando ainda mais casos favoráveis em relação a questão anterior, utilizando, ainda, o princípio multiplicativo. Contudo, esperamos que o aluno note que é fundamental determinar quantos são os casos favoráveis mas não quais detalhadamente, como realizado na questão anterior.*
Neste caso há 16 casos favoráveis, uma vez que há 4 possibilidades de A **e** 4 possibilidades de 7. Desta forma,

$$P(\text{A(qualquer) 7(qualquer)}) = \frac{16}{1326} \cong 0,12\%.$$

Questão 4. Qual a probabilidade de você receber par de 5 ou par de 3?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno seja capaz de determinar a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos, através da relação* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Neste caso, o número de casos favoráveis para receber um par de 5 é $C_{4,2} = 6$. Como os pares têm a mesma probabilidade de ocorrência, também há $C_{4,2} = 6$ casos favoráveis para receber par de 3. Desta forma,

$$\begin{aligned} P(\text{Par de 5 ou Par de 3}) &= P(\text{Par de 5}) + P(\text{Par de 3}) \\ &= \frac{6}{1326} + \frac{6}{1326} \\ &= \frac{12}{1326} \cong 0,9\%. \end{aligned}$$

Questão 5. Qual a probabilidade de você receber par de Damas (PD) ou duas cartas vermelhas(DCV)?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno seja capaz de determinar a probabilidade da união de dois eventos não mutuamente exclusivos, através da relação* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, *uma vez que, neste caso,* $A \cap B \neq \emptyset$.
Neste caso, o número de casos favoráveis para receber um par de Damas é $C_{4,2} = 6$, e o número de casos favoráveis para receber duas cartas vermelhas é $C_{26,2} = 325$. Contudo, é preciso considerar que é possível que você receba um par de cartas que ao mesmo

tempo é um par de Damas e ambas vermelhas Q♥Q♦. Assim, devemos subtrair este caso duplicado. Logo,

$$\begin{aligned} P(\text{PD ou DCV}) &= P(\text{PD}) + P(\text{DCV}) - P(\text{Q}\heartsuit\text{Q}\diamondsuit) \\ &= \frac{6}{1326} + \frac{325}{1326} - \frac{1}{1326} \\ &= \frac{330}{1326} \cong 25\%. \end{aligned}$$

Questão 6. Se você recebe A♥7♦, qual a probabilidade de acertar apenas um par de Ás no *flop*?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno desenvolva o cálculo de probabilidade condicional de um evento simples.*
Para que seja formado apenas um par de Ás no *flop*, é necessário que uma das três cartas seja, também, um Ás e as duas outras não sejam nem Ás nem 7. Assim,

$$P(\text{Apenas um par de Às no flop}) = \frac{3}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot 3 \cong 14,5\%.$$

Questão 7. Se você recebe K♣K♥, qual a probabilidade de acertar somente uma trinca de K no *turn*?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno note que para determinar o evento de interesse, deverá separar o cálculo em duas etapas: a não ocorrência da trinca no flop, já que consiste em uma etapa preliminar ao turn, e a ocorrência de um K no turn.*
Notemos que

$$\begin{aligned} P(\text{Trinca no } \textit{Turn}) &= P(\text{Não ocorrer trinca no } \textit{flop}) \cdot P(\text{K no } \textit{turn}) \\ &= \frac{48}{50}\frac{47}{49}\frac{46}{48} \cdot \frac{2}{47} \\ &= \frac{46}{1225} \\ &\cong 3,75\%. \end{aligned}$$

A próxima questão envolve uma situação em que as cartas do *flop* são conhecidas pelo jogador.

Questão 8. Suponha que, no *flop*, as cartas são: 2♦10♣J♠. As cartas que você recebeu foram: 9♦Q♥. Qual a probabilidade de você acertar um *straight* no *turn* ou *river*?

Objetivo e solução: *Nesta questão, esperamos que o aluno seja capaz de compreender que: para que o evento de interesse ocorra, o cálculo da união de eventos juntamente ao conceito de probabilidade condicional deve ser usado.*
Neste caso,

$$\begin{aligned}
P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn} \text{ ou } \textit{River}) &= P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn}) + P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{River}) \\
&= P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn}) + \\
&+ P(\text{Não ocorrer } \textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn} \text{ e Ocorrer } \textit{Straight} \text{ no } \textit{River}) \\
&= \frac{8}{47} + \frac{39}{47}\frac{8}{46} \\
&= \frac{340}{1081} \\
&\cong 31,45\%.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Iniciamos as discussões das atividades realizadas relatando como os alunos interpretaram os resultados, a partir da solução posterior de cada questão exibida pelo professor: as primeiras reações foram dos alunos que perceberam o equívoco no momento em que responderam o questionário, dialogando a respeito de quais situações mais causaram confusão.

Para cada questão, as respostas foram avaliadas segundo as classes: “Incorreta”, “Parcialmente correta” e “Correta”. Consideramos que as respostas que apresentaram falhas graves conceituais foram classificadas como “Incorreta”. Quando as respostas apresentavam conceitos relativamente conexos, ou quando dispunham de conceitos corretos e com erros operacionais, as mesmas foram classificadas como “Parcialmente correta”. As respostas que atendiam ao esperado para cada questão foram classificadas como “Correta”.

A Figura 4.1 exibe o gráfico de distribuição das classes “Incorreta”, “Parcialmente correta” e “Correta”, em cada questão aplicada.

Alguns exemplos das respostas dos alunos estão no anexo.

4.1 Análise das respostas incorretas

Nessa seção, discutimos os erros mais frequentes apresentados nas respostas. Através desse compilado de ideias extraímos quais foram as dificuldades, limitações e tipos de pensamentos dos estudantes.

Há uma clara dificuldade dos alunos em compreender quais as unidades presentes nas diferentes ocasiões. Os alunos associam cartas individuais a pares e trios em um mesmo exercício, sem a preocupação de vinculá-los ao espaço amostral.

Na literatura, como já citado anteriormente, há uma confusão nos conceitos de eventos mutuamente exclusivos e também no conceito de eventos independentes. Esta

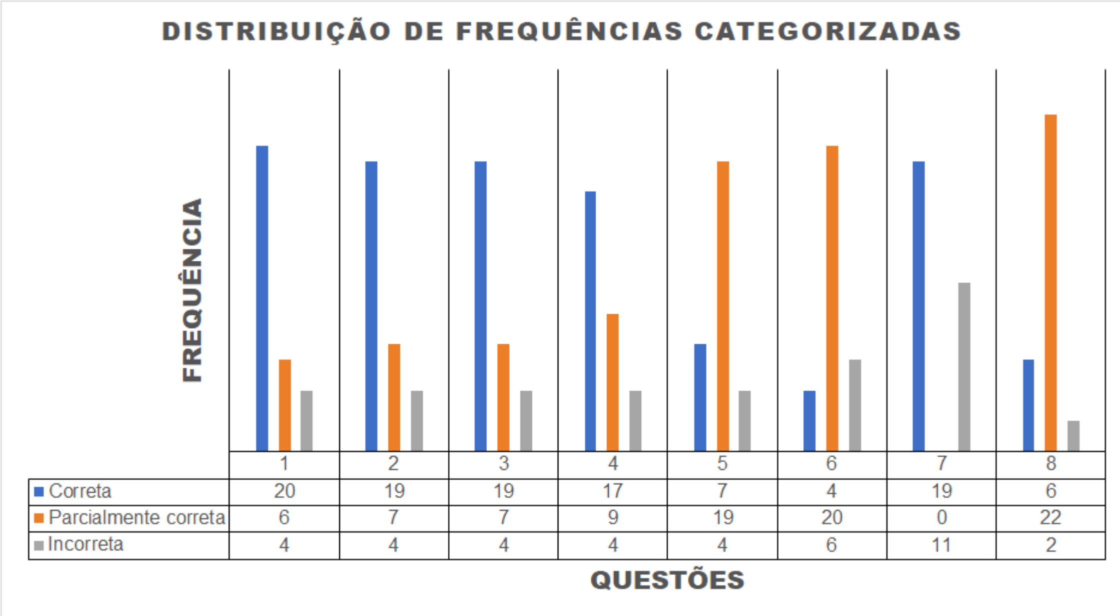

Figura 4.1: Desempenho dos alunos no questionário

confusão foi, também, observada nos resultados deste trabalho, pois em determinados exercícios que exigiam tais conceitos houve um significativo número de respostas inconsistentes.

Um erro comum apresentado foi a inconsistência na determinação do espaço amostral e dos casos favoráveis do evento de interesse. Nas questões 1, 2, 3 e 4 alguns alunos consideraram o espaço amostral com 52 cartas, ou seja, com 52 elementos. Isso pode ter ocorrido devido a apresentação dos exemplos explorados anteriormente de espaço amostral em eventos cujas retiradas do baralho foram de apenas uma carta. Além disso, os alunos também consideraram o número de casos favoráveis do evento de interesse sendo a quantidade de número de cartas apresentadas pelo exercício. Isso pode ter ocorrido devido a um erro de interpretação, em que os alunos consideraram cada carta recebida como um caso favorável, sendo que o raciocínio correto deveria levar em consideração as combinações dessas cartas. Alguns exemplos de respostas encontradas são apresentados como:

$$P(A\clubsuit\, 7\diamondsuit) = \frac{2}{52}.$$

$$P(\text{A qualquer}\, 7\diamondsuit) = \frac{5}{52}.$$

$$P(33 \text{ ou } 55) = \frac{8}{52}.$$

Na questão 5, devido a característica diferenciada (a presença do conceito de eventos não mutuamente exclusivos, ou seja, que apresentam casos em comum) em relação às anteriores, os alunos que anteriormente haviam considerado somente as cartas individuais no evento de interesse, também reconheceram a intersecção dos eventos apresentados como cartas individuais, gerando respostas do tipo:

$$P(PD \text{ ou } DCV) = \frac{28}{52}.$$

Outros alunos não reconheceram a intersecção, gerando respostas do tipo:

$$P(PD \text{ ou } DCV) = \frac{30}{52}.$$

No primeiro caso, os alunos contaram 28 casos favoráveis, pois consideraram 26 cartas individuais vermelhas e 4 cartas individuais das damas. Entretanto, excluíram as duas damas vermelhas por verificarem que já haviam sido contadas. Nesse caso, verificamos que os alunos mesmo não sabendo resolver a questão corretamente, conseguiram visualizar o ponto chave da solução, pois o diferencial desse exercício é a identificação dos elementos da intersecção.

No segundo caso, o estudante apenas contou as 26 cartas vermelhas e adicionou as 4 damas sem a percepção das cartas em comum.

Podemos verificar na questão 6 algumas análises erradas em relação ao que o exercício exigia. Um caso que cabe ressaltar foi o cálculo do número de elementos do espaço amostral por uma combinação das 50 cartas restantes tomadas 3 a 3, pois o *flop* contém 3 cartas. Quanto ao evento, considerou o número de casos igual a 3, porque restaram 3 Áses no baralho. O aluno pode ter sido induzido ao erro porque, na maioria dos casos apresentados, as respostas não exigiam solução por decomposição em outras subpartes, diferentemente desta questão. A resposta foi

$$\begin{aligned} P(\text{ Par de Ás no } \textit{flop}) &= \frac{3}{C_{50,3}} \\ &= \frac{3}{19600}. \end{aligned}$$

Outro caso que chamou a atenção, ainda na questão 6, foi a resposta de um aluno que provavelmente imaginou a possibilidade da ocorrência de um Ás na primeira carta do *flop*, ou na segunda ou na terceira, uma vez que forneceu a seguinte resposta

$$\begin{aligned} P(\text{Par de Ás no } \textit{flop}) &= \frac{3}{46} + \frac{3}{46} + \frac{3}{46} \\ &= \frac{9}{46}. \end{aligned}$$

Esse pensamento é interessante, pois foi baseado no uso do conectivo **ou**. Entretanto, esqueceu-se de subtrair os casos em que ocorrem mais de um Ás no *flop*.

Na questão 7, houveram erros por dificuldade no conceito de dependência de eventos. Uma resolução apresentada considerou apenas a retirada das cartas do *flop*, ou seja, o espaço amostral no *turn* foi alterado para 47 cartas. A partir daí, considerou 2 para ocorrência e sua resposta foi

$$P(\text{ Trinca de K no } turn) = \frac{2}{47}.$$

Isso demonstra que o aluno entendeu que o espaço amostral no *turn* se altera em decorrência do *flop*.

Na questão 8 não houve erro significativo, apenas respostas em branco em que provavelmente o aluno não se recordou do conceito de *straight*, pois o mesmo respondeu corretamente as questões semelhantes aplicadas anteriormente.

4.2 Análise das respostas parcialmente corretas

Nessa seção, vamos discutir os acertos parciais mais comuns encontrados dentre todos os alunos. Dentre as respostas apresentadas, percebemos que a inconsistência entre as "unidades" dos casos favoráveis e as "unidades" do espaço amostral. A troca entre conceitos semelhantes também ocorre diversas vezes. Há substituições do conceito de combinações simples pelo conceito de arranjos simples, pois o aluno tem dificuldade de interpretar o uso exato das fórmulas pré definidas.

Na primeira questão, destacamos dois casos de resposta. No primeiro caso, foi apresentada na seguinte forma:

$$P(\text{A}\clubsuit\,7\diamondsuit) = \frac{2}{1326}.$$

Neste caso, notamos que o aluno foi capaz de determinar o espaço amostral corretamente, entretanto, cometeu o mesmo erro dos alunos que erraram ao considerar o par A♣7♦como dois casos favoráveis. Assim, mesclou termos de magnitudes diferentes, uma vez que o numerador representa duas cartas e o denominador representa quantos são os possíveis pares formados a partir de 52 cartas. Em outras palavras, a "unidade" do numerador é dado em *cartas* e a "unidade" do denominador é dado em *pares*.

No segundo caso, foi apresentada a seguinte resposta:

$$P(\text{A}\clubsuit\,7\diamondsuit) = \frac{1}{2652}.$$

Neste caso, notamos que o aluno não cometeu o erro referente às "unidades" do cálculo em questão, considerando corretamente o par A♣7♦como o único caso favorável. Entretanto, o denominador foi obtido não pelo conceito de combinação simples, mas de arranjo simples. Isso pode ter ocorrido por um equívoco em atribuir a distribuição ordenada das cartas do baralho com a relevância da ordem das cartas, considerando

A♣7♦ $\neq$ 7♦A♣.

Na questão 2, destacamos o caso do aluno que acertou a primeira questão por completo, mas acertou a questão 2 apenas parcialmente. A resposta apresentada, neste caso,

$$P(\text{A qualquer}\,7\diamondsuit) = \frac{5}{1326}.$$

Neste caso, entendemos que o aluno não compreendeu a nova situação que exigia considerar 4 pares como casos favoráveis, incorrendo a um tipo de erro já mencionado na questão 1: considerar 5 cartas e não 4 pares como "unidade".

A questão 3 apresentou erros semelhantes àqueles dispostos nas questões 1 e 2.

Na quarta questão, destacamos um caso de resposta dada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(33 \text{ ou } 55) &= P(33) + P(55) \\ &= \frac{12}{1326} + \frac{12}{1326} \\ &= \frac{24}{1326}. \end{aligned}$$

Neste caso, notamos que este erro foi cometido pelo fato do aluno formar pares de 3 sem perceber que as mesmas cartas se repetiriam no processo. Assim, considerou quatro possíveis 3 na primeira carta e três possíveis 3 na segunda carta, resultando em 12 combinações. O mesmo foi adotado para os pares de 5, obtendo também 12 combinações. Portanto, o total de casos favoráveis no evento de interesse foi de 24.

O erro mais frequente observado na questão 5 diz respeito ao fato da não visualização das cartas em comum em ambos os eventos, resolvendo

$$\begin{aligned} P(PD \text{ ou } DCV) &= P(PD) + P(DCV) \\ &= \frac{C_{4,2}}{1326} + \frac{C_{26,2}}{1326} \\ &= \frac{6}{1326} + \frac{325}{1326} \\ &= \frac{331}{1326}. \end{aligned}$$

Outro caso relevante foi a resolução do exercício em que o aluno visualizou os elementos em comum (Q♥Q♦), mas subtraiu das 24 cartas vermelhas, antes de fazer as combinações dos possíveis pares de cartas vermelhas. Com essa estratégia, o estudante não percebe que deixa de calcular as combinações entre as damas vermelhas com outras cartas vermelhas, apresentando como solução

$$\begin{aligned} P(PD \text{ ou } DCV) &= P(PD) + P(DCV) \\ &= \frac{C_{4,2}}{1326} + \frac{C_{24,2}}{1326} \\ &= \frac{6}{1326} + \frac{276}{1326} \\ &= \frac{282}{1326}. \end{aligned}$$

Na questão 6, a resposta mais apresentada nesta categoria foi:

$$\begin{aligned} P(\text{ Par de Ás no } \textit{flop}) &= \frac{3}{50}\frac{44}{49}\frac{43}{48} \\ &= \frac{5676}{117600}. \end{aligned}$$

Nessa resposta podemos verificar a ausência da multiplicação por 3 para solução correta. Este fato ocorre, possivelmente, porque o aluno considerou o *flop* como uma combinação única, sem considerar que o Ás pode aparecer em qualquer uma das 3 posições.

Não houveram alunos que se enquadraram nessa categoria na questão 7.

A resposta mais ocorrida no oitavo exercício foi baseada na análise do *turn* e do *river* em casos separados, o que de certa forma está coerente com o esperado para a resolução do exercício. Entretanto, um elemento da resolução foi ignorado em praticamente todas as respostas, apresentando

$$\begin{aligned} P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn} \text{ ou } \textit{River}) &= P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn}) + P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{River}) \\ &= \frac{8}{47} + \frac{8}{46} \\ &= \frac{744}{2162}. \end{aligned}$$

A resolução dessa questão esperava o cálculo da não ocorrência do *straight* no *turn*. A baixa inclusão dessa etapa do exercício parece ter ocorrido pela dificuldade dos alunos em identificar a não ocorrência do *straight* no *turn*, enquanto a questão exige como resolução a ocorrência do *straight*, que parece ter gerado uma contradição para o estudante.

4.3 Análise das respostas corretas

Nessa seção, destacamos alguns casos particulares em que os alunos resolveram corretamente as questões por meio de métodos mais rudimentares em relação ao esperado.

Nas questões 1, 2 e 3 os alunos resolveram da forma esperada, usando os conceitos de análise combinatória e probabilidade, mas houve um caso em que o aluno apresentou a seguinte resolução na primeira questão:

$$
\begin{aligned}
P(\text{A}\clubsuit\,7\diamondsuit) &= P(\text{A}\clubsuit)P(7\diamondsuit) + P(7\diamondsuit)P(\text{A}\clubsuit)\\
&= \frac{1}{52}\frac{1}{51} + \frac{1}{52}\frac{1}{51}\\
&= \frac{2}{2652}\\
&= \frac{1}{1326}.
\end{aligned}
$$

A resposta apresentada foi obtida utilizando a decomposição em dois eventos, assim como os conceitos de princípio multiplicativo e probabilidade condicional. Embora a resposta aparentemente esteja apresentada de maneira detalhada, o modo pela qual foi elaborada consiste em uma solução mais rudimentar em relação àquela obtida utilizando diretamente o conceito de combinação.

O mesmo aluno respondeu a segunda questão da seguinte forma:

Já que este caso é o mesmo da primeira questão, porém com 4 "A", multipliquei a resposta por 4

$$
\begin{aligned}
P(\text{A qualquer}\,7\diamondsuit) &= 4 \cdot P(\text{A}\clubsuit\,7\diamondsuit)\\
&= 4 \cdot \frac{1}{1326}\\
&= \frac{4}{1326}.
\end{aligned}
$$

Na terceira questão, dentre as respostas corretas, nenhuma foi resolvida de maneira particular.

Já na quarta questão, houveram alunos que resolveram de forma direta usando os conceitos de combinação. As respostas obtidas foram:

$$
\begin{aligned}
P(33ou55) &= P(33) + P(55)\\
&= \frac{6}{1326} + \frac{6}{1326}\\
&= \frac{12}{1326}.
\end{aligned}
$$

Cabe a essa análise salientar, também, que alguns alunos exibiram todos os casos favoráveis, buscando melhores interpretação e entendimento do que ocorria no exercício. Por exemplo, quando decidiram exibir todos os pares de 3, notaram que ao realizarem tais combinações, alguns casos já haviam sido exibidos, ou seja, se durante o processo de exibição dos pares formaram o par $3\clubsuit\,3\diamondsuit$, então não deviam contabilizar o par $3\diamondsuit\,3\clubsuit$.

Na quinta questão, em sua totalidade os alunos resolveram o exercício de forma direta usando os conceitos de combinação. Houve tentativas de subdivisão de todos os casos, entretanto quando os estudantes notavam a elevada quantidade de subcasos envolvidos, logo modificavam a estratégia de resolução, obtendo

$$
\begin{aligned}
P(PD \text{ ou } DCV) &= P(PD) + P(DCV) - P(Q\heartsuit\, Q\diamondsuit)\\
&= \frac{C_{4,2}}{1326} + \frac{C_{26,2}}{1326} - \frac{1}{1326}\\
&= \frac{6}{1326} + \frac{325}{1326} - \frac{1}{1326}\\
&= \frac{330}{1326}.
\end{aligned}
$$

É interessante destacar que essa questão exige uma estratégia de resolução em que o aluno necessita do cálculo de combinação sem analisar caso a caso, o que força os alunos a elaborarem uma solução matemática mais formal.

Na questão 6, poucos alunos acertaram devido a dificuldade de interpretação. As respostas corretas foram

$$
\begin{aligned}
P(\text{ Par de Ás no } \textit{flop}) &= \frac{3}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot 3\\
&= \frac{17028}{117600}.
\end{aligned}
$$

Dentre os poucos alunos que acertaram, estes demonstraram conhecimento da análise geral do problema, conseguindo resolver o exercício por partes.

Na questão 7, devido a característica dessa pergunta, os acertos parciais foram nulos, pois quando os estudantes entendiam o caminho a ser seguido, não deixavam qualquer elemento faltar, já que a questão envolve apenas a não retirada de um K no *flop* e a retirada obrigatória de um K no *turn*, apresentando como solução

$$
\begin{aligned}
P(\text{ K apenas no } \textit{turn}) &= \frac{48}{50}\frac{47}{49}\frac{46}{48} \cdot \frac{2}{47}\\
&= \frac{46}{1225}.
\end{aligned}
$$

Quanto a questão 8, não há destaques de acertos nesse exercício, uma vez que os alunos obtiveram

$$
\begin{aligned}
P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn} \text{ ou } \textit{River}) &= P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn}) + P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{River})\\
&= P(\textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn}) +\\
&+ P(\text{Não ocorrer } \textit{Straight} \text{ no } \textit{Turn} \text{ e Ocorrer } \textit{Straight} \text{ no } \textit{River})\\
&= \frac{8}{47} + \frac{39}{47}\frac{8}{46}\\
&= \frac{340}{1081}.
\end{aligned}
$$

A partir de todas as análises realizadas, foi possível elencar uma gama de principais aspectos apresentados nas soluções dadas pelos alunos, conforme exibe a Tabela 4.1

Respostas	**Aspectos Principais**
Incorretas	- Inconsistência na determinação do espaço amostral e dos casos favoráveis do evento; - Análise errada em relação ao que o exercício exigia; - Falta da análise geral do problema, definição de todos os casos possíveis; - Erro na definição de dependência do evento em relação a etapa anterior (flop); -Esquecimento das regras do jogo de Pôquer;
Parcialmente Corretas	-Inconsistência entre as “unidades” dos casos favoráveis e o espaço amostral; -Não verificação da intersecção dos eventos; -O estudante identifica a intersecção dos eventos, entretanto, subtrai de forma incorreta; -Inconsistência na determinação do espaço amostral: Uso do conceito de arranjo ao invés de combinação; -Considerar o flop como uma única combinação; -Dificuldade de similar a não ocorrência de um evento;
Corretas	- Resolução por método mais rudimentar e relação ao esperado ; -Resolução matemática mais formal devido a alta quantidade de combinações; -Demonstraram conhecimento da análise geral do problema, conseguindo resolver o exercício por partes;

Tabela 4.1: Diagnóstico das respostas: Principais aspectos

4.4 Comentários finais

Este trabalho desenvolveu um estudo acerca do processo de ensino aprendizagem voltado ao ensino de probabilidades. Foram elaboradas aulas, grupos de discussões sobre o jogo de Pôquer e sua relação com a teoria de probabilidades, trazendo, sempre que possível, motivação psicológica além do uso de atrativos tecnológicos.

Através da metodologia empregada, foi possível notar significativo aumento do interesse dos alunos a medida que os mesmos foram desafiados a pensarem em situações pelas quais poderiam pessoalmente estar submetidos, fato que valoriza a motivação pessoal do aluno que busca, na atual sociedade, significado prático dos conceitos estudados formalmente nas aulas de matemática. Além disso, a ordem didática apresentada na seção 4, possibilitou coletar informações diagnósticas dos principais erros e acertos apresentados nas soluções dos problemas dispostos em questionário. Ademais, as atividades em grupo possibilitaram a integração entre alunos de diferentes perfis de aptidão, ocasionando um ambiente de aprendizado participativo colaborativo.

Após o término do minicurso, foi possível ouvir alunos discutindo jogadas, usando várias vezes a palavra “probabilidade”, o que de fato, concretiza que este trabalho foi motivador.

No geral, o objetivo deste trabalho foi alcançado, pois despertou interesse na maior parte dos alunos, estimulando a competitividade através do jogo e tornando as aulas mais instigantes tanto para os estudantes quanto para o professor.

Como sugestão para pesquisas futuras, há de se considerar o uso de plataformas digitais tais como aplicativos, nos quais há um monitoramento do tempo utilizado pelos estudantes para a solução do questionário, possibilitando, assim, investigar elementos como fadiga e desistência precoce dos estudantes em questões que abordam conceitos específicos de probabilidades.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para o ensino de probabilidades, usando o jogo de Pôquer como uma ferramenta alternativa e motivadora.

REFERÊNCIAS

[1] PRENSKY, M. Fun, play and games: What makes games engaging. *Digital game-based learning*, v. 5, n. 1, p. 5–31, 2001.

[2] REGO, T. C. V. Uma perspectiva histórico-cultural da educação. *Petrópolis: Vozes*, 1995.

[3] BUSS, L. M. Dificuldade na leitura e interpretação de problemas relativos ao cálculo de probabilidades e estatística. *Dia a Dia Educaçao, Paraná*, 2007.

[4] PARANÁ, D. C. d. E. B. Matemática. *Secretaria de Estado da Educação do Paraná*, 2008.

[5] BISSON, C.; LUCKNER, J. Fun in learning: The pedagogical role of fun in adventure education. *Journal of Experiential Education*, SAGE Publications Sage CA: Los Angeles, CA, v. 19, n. 2, p. 108–112, 1996.

[6] ALVES, L. R. *Game Over: jogos eletrônicos e violência. Salvador: UFBA, 2004*. Tese (Doutorado), 2004.

[7] MCGONIGAL, J. A realidade em jogo: por que os games nos tornam melhores e como eles podem mudar o mundo. *Rio de Janeiro: Best Seller*, 2012.

[8] RAMACHANDRAN, K. M.; TSOKOS, C. P. *Mathematical Statistics with Applications*. [S.l.]: Academic Press, 2009.

[9] MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.l.]: Edusp, 2006.

[10] DEBORTOLI, E. O. *Teoria da Probabilidade: Uma modelagem aplicada ao jogo de Pôquer*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2018.

[11] FEITOSA, H. de A. *Um prelúdio à lógica*. [S.l.]: Unesp, 2005.

[12] HOPE, P.; MCCULLOCH, S. Statistical analysis of texas holdem. *Retrieved August*, v. 9, p. 2010, 2009.

[13] SCARNE, J. *Scarne's guide to modern poker*. [S.l.]: Simon and Schuster New York, NY, 1979.

[14] MCCORMACK, A.; GRIFFITHS, M. D. What differentiates professional poker players from recreational poker players? a qualitative interview study. *International Journal of Mental Health and Addiction*, Springer, v. 10, n. 2, p. 243–257, 2012.

[15] DITTMAR, P. *Practical Poker Math*. [S.l.]: ECW Press, 2008.

[16] CHEN, B.; ANKENMAN, J. *The mathematics of poker*. [S.l.]: ConJelCo LLC, 2006.

[17] SCHOENBERG, F. P. *Introduction to Probability with Texas Holdem Examples*. [S.l.]: CRC Press, 2016.

ANEXOS

Exemplos das respostas incorretas:

4. Qual a probabilidade de você receber par de 5 ou par de 3?

P(33 ou 55) = $\frac{8}{52}$

6. Se você recebe A♠7♦, qual a probabilidade de acertar apenas um par de Ás no flop?

P(Par de Ás no flop) = $\frac{3}{46} + \frac{3}{46} + \frac{3}{46} = \frac{9}{46}$

Exemplos das respostas parcialmente corretas:

5. Qual a probabilidade de você receber par de Damas (PD) ou duas cartas vermelhas(DCV)?

$P(PD \text{ ou } DCV) = P(PD) + P(DCV) = \frac{C_{4,2}}{1326} + \frac{C_{24,2}}{1326} = \frac{6}{1326} + \frac{276}{1326} = \frac{282}{1326}$

8. Suponha que, no flop, as cartas são: 2♦ 10♣ J♠. As cartas que você recebeu foram: 9♦ Q♥. Qual a probabilidade de você acertar um straight no turn ou river?

P(Straight no Turn ou River) = P(Straight no turn) + P(Straigh no river)

$= \frac{8}{47} + \frac{8}{46} = \frac{744}{2162}$

Exemplos das respostas corretas:

1. Qual a probabilidade de você receber A♣ 7♦?

P(A paus 7 ouros) = P(A paus 7 ouros) ou P(7 ouros A paus)

$= \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} + \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{2}{2652}$

2. Qual a probabilidade de você receber A (de qualquer naipe) e 7♦?

Já que este caso é o mesmo da primeira questão, porém com 4 "A", multipliquei a resposta por 4. P(A qualquer 7 ouro) =

$= 4 \cdot \frac{1}{1326} = \frac{4}{1326}$