UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

WANDERLEI VERISSIMO

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM DAS QUESTÕES DE ÁLGEBRA E DA OBMEP PARA O ENSINO MÉDIO

Maringá-PR
2018

WANDERLEI VERISSIMO

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: Uma Abordagem das questões de Álgebra e da Obmep para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol

Maringá
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Verissimo, Wanderlei
V517i Investigação matemática: uma abordagem das questões de álgebra e da OBMEP para o ensino médio / Wanderlei Verissimo. -- Maringá, 2018.
84 f. color.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

1. Investigação matemática. 2. Álgebra. 3. Matemática - Ensino-aprendizagem. I. Ferraiol, Thiago Fanelli, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 23.ed. 515

Márcia Regina Paiva de Brito – CRB-9/1267

À minha família, em especial à minha companheira Odete Machado, pelo companheirismo e pela compreensão. À Ana Júlia Machado Veríssimo, filha amada. Em especial à minha mãe Maria Marçal Pinheiro - (in memorian).

WANDERLEI VERÍSSIMO

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM DAS QUESTÕES DE ÁLGEBRA E DA OBMEP PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)

Prof. Dr. Edson Carlos Licurgo Santos
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Toledo

Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 21 de setembro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde e por minha perseverança nos momentos difíceis.

À minha família pelo apoio e compreensão pelos períodos que passei distante no cumprimento das atividades do curso.

Aos meus professores de todas as disciplinas do programa Profmat, pela contribuição no meu aprendizado.

Aos meus colegas da turma de 2012; em especial ao grupo do "velho oeste" (Graciele, Darci, Maikon e Régis) pela companhia nas longas viagens até a Instituição.

Aos meus colegas da turma de 2016 pelos encontros, pelos momentos compartilhados para os estudos, para confraternização e pelas amizades conquistadas.

À CAPES, por conceder apoio financeiro durante a minha primeira passagem pelo programa Profmat em 2012.

Ao professor Dr. Eduardo de Amorin Neves, por sua dedicação, suas importantes contribuições e pela ajuda na escolha do tema.

Em especial ao meu orientador professor Dr. Thiago Fanelli Ferraiol, pelo apoio, tempo dedicado e toda a contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Mesmo não citado aqui, agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuiram para o meu sucesso nesse mestrado. Meu muito obrigado e que Deus os abençoe.

Por fim, agradeço a você que está lendo essa pesquisa. Desejo que ela seja importante e o auxilie em sua jornada de estudos.

"Se não morre aquele que escreve um livro e planta uma árvore, com mais razão não morre o educador que semeia vida e escreve na alma"

Bertolt Brecht.

Resumo

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo apresentar aos colegas de profissão uma metodologia, diferente da tradicional aplicada na maioria das escolas, para o ensino da matemática – a Investigação Matemática – que é uma das alternativas a ser utilizadas para que auxilie o aluno a compreender de forma mais natural alguns dos conteúdos matemáticos. As investigações matemáticas envolvem naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, levando o estudante a um processo de construção da matemática, o que tende a elevar o espírito investigativo entre os alunos e o gosto pela descoberta. Para isso, elencamos uma sequência de atividades, que envolvem a exploração do conteúdo de álgebra, em nível crescente de dificuldades, de conhecimento e aprendizagem, através de situações curiosas e questões adaptadas das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Palavras chave: Investigação Matemática. Álgebra. Ensino-Aprendizagem.

Abstract

This research aims to present to colleagues in the profession a methodology, different from the traditional one applied in most schools, to the teaching of mathematics – Mathematical Investigation – which is one of the alternatives to be used to help the student to understand some of the mathematical contents more naturally. Mathematical investigations naturally involve concepts, procedures, and mathematical representations, leading the student to a process of mathematical construction, which tends to elevate the investigative spirit among students and the taste for discovery. To this end, we list a sequence of activities that involve the exploration of algebra content, in an increasing level of difficulties, of knowledge and learning, through curious situations and questions adapted from the Brazilian Mathematics Olympiad of the Public Schools (OBMEP).

Key Words: Mathematical Investigation. Algebra. Teaching-Learning.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A Matemática, de acordo com Carl B. Boyer, "é um aspecto único do pensamento humano" (BOYER, 2012). Ela é considerada uma construção humana, cujo objeto de estudo são padrões existentes e observados em fenômenos cotidianos da natureza e pela necessidade de seu próprio desenvolvimento. A sua finalidade é traduzir esses padrões para uma linguagem simbólica ou códigos, desenvolvidas através de métodos específicos de pensamento, a fim de facilitar o seu entendimento, contribuindo para a sua evolução, apresentando alternativas para a evolução científica e da sociedade.

A partir desse posicionamento sobre a matemática, buscamos destacar neste trabalho uma prática pedagógica ou (tendência de ensino-aprendizagem) chamada de *Investigação Matemática*, que de certa forma busca um alinhamento entre o sentido da matemática enquanto construção humana e como prática de ensino e aprendizagem. Nosso objetivo é o de apresentar para colegas professores uma alternativa ao ensino tradicional expositivo, através de um material de fácil compreensão, com direcionamentos das práticas didáticas.

As atividades de Investigação Matemática são de cunho exploratório, nas quais se pretende levar o aluno, por si só, a descobertas e propriedades matemáticas em situações problemas que possam elevar sua confiança para buscar mais conhecimento em uma disciplina que é considerada muito difícil de aprender.

O campo matemático envolvido no nosso trabalho é o de Álgebra. Essa é a parte da Matemática que trabalha a generalização e abstração, representando quantidades, formas e ideias através de uma linguagem simbólica. "A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.135). Dessa forma, buscamos apresentar aqui uma sequência de atividades sobre situações problemas que envolvem o campo da álgebra. Tais atividades priorizam o raciocínio lógico, a abstração, a notação algébrica, a elaboração de hipóteses, operações matemáticas, propriedades, proposições. Dentro do processo de investigação, também desenvolvemos explicações com demonstrações matemáticas, buscando provar a validade de determinadas conjecturas e propriedades. Porém, destacamos de antemão que, as atividades envolvendo investigação matemática não são a chave para resolver todos os problemas do ensino e aprendizagem da álgebra, mas como um caminho estratégico, promissor e com potencial para um bom embasamento conceitual. As atividades que desenvolvemos tem como fonte questões retiradas e adaptadas da Obmep (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), além de outras situações curiosas do dia a dia, que vão desde uma simples notação de equação até demonstrações de problemas mais sofisticados, com maior número de elementos. O objetivo principal é fazer com que o estudante, através de suas próprias estratégias, consiga fazer descobertas de propriedades matemáticas sem o vício de utilizar sempre fórmulas prontas.

O professor, ao propor uma abordagem de ensino por investigação, não pode ter a pretensão de formar cientistas, muito menos querer que os alunos sigam as etapas de um rigoroso método científico, mas sim que entendam um pouco sobre o processo de desenvolvimento do pensamento, aprendam a argumentar, a levantar hipóteses, analisar dados e os relacionar com a sua realidade. Além disso, esta metodologia deverá propiciar outras formas de relacionamento interpessoal nas aulas de matemática, incentivando e promovendo a realização de trabalhos colaborativos.

No **capítulo 1**, apresentamos uma ideia sobre a investigação matemática como prática didática nos baseando no texto de Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2005), conceituando-a de forma teórica e também apresentando algumas maneiras de como conduzir uma aula investigativa.

No **capítulo 2** elencamos alguns aspectos sobre a álgebra e seu ensino, que é o conteúdo principal para o desenvolvimento deste trabalho. Nele discorremos sobre as dificuldades apresentadas, tanto pelos docentes, quanto pelos discentes, nos processos de ensino e aprendizagem. Mostramos que frequentemente os alunos conseguem resolver várias questões numéricas, porém não conseguem encontrar um padrão generalizante e seguir na direção da algebrização e da generalização das situações, mostrando a dificuldade atingir uma visão mais abstrata dos fenômenos tratados.

O **capítulo 3** dá um enfoque sobre a OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – que ocorre todos os anos, em duas fases. Através de sua plataforma virtual e do seu banco de questões, retiramos a maior parte das questões desenvolvidas para a composição das atividades exploratórias deste trabalho.

As atividades para desenvolver com os discentes estão no **capítulo 4**. Apresentamos a questão original e em seguida a questão adaptada, a fim de fazer com que o aluno explore de maneira satisfatória cada questão. Como as questões originais produzidas tem uma natureza fechada (típica de questões com respostas padrão), acabamos reformulando-as para se enquadrar em uma atividade investigativa, de caráter mais aberto e exploratório. As questões mais fechadas são produzidas pelos próprios alunos ou pelo professor ao longo do processo, e não dadas logo de início como acontecem com os problemas tradicionais de matemática. Nele também está descrito o relato do desenvolvimento dessas atividades em algumas aulas e da análise dos resultados, onde pode-se ter uma noção de como se deu a dinâmica da aula, bem como compreender o pensamento e desenvolvimento dos alunos a partir das atividades propostas. Fizemos questão de incluir alguns equívocos cometidos, tanto por parte dos alunos na adaptação à essa nova metodologia, quanto por parte do professor enquanto propositor dessa nova abordagem. Relatamos também os aspectos positivos das aplicações.

Por fim, no **capítulo 5** tecemos nossas considerações a respeito da abordagem feita para este trabalho sobre a aprendizagem matemática através das atividades de investigação matemática em sala de aula. Propomos sugestões de como os professores e educadores matemáticos podem, com base neste, pinçar algumas atividades que considerem aplicável para o desenvolvimento de um determinado conteúdo, ou ainda, sirvam de inspiração para desenvolver alguma outra pesquisa e dar continuidade ao apresentado.

1 | Investigação Matemática

Não é de hoje que os educadores matemáticos vêm buscando alternativas e as mais diversas metodologias para o ensino da Matemática. O intuito é de fazer com que seus alunos simpatizem mais por essa disciplina escolar e consigam aprendê-la com naturalidade, sem odiá-la e sem superestimá-la. Para o educador não é fácil cativar. Se por um lado o conhecimento específico do professor conta muito, por outro tem-se notado cada vez mais a necessidade de que ele amplie a sua percepção sobre o aluno e procure novas experiências e outras metodologias de ensino.

As Diretrizes Curriculares, fundamentadas em pesquisas de áreas diversas da educação, da sociologia, da psicologia e da própria matemática, trazem recomendações de como abordar os conteúdos matemáticos. A essas recomendações solidificadas nas pesquisas (embora nem tanto nas práticas) damos o nome de "tendências metodológicas da Educação Matemática". Isto é, são tendências de ensino que o educador pode recorrer para melhor ensinar seus alunos. Algumas delas são: resolução de problemas; modelagem matemática; mídias tecnológicas; etnomatemática; história da Matemática; investigações matemáticas, jogos, entre outras.

A utilização de uma metodologia ou outra por parte do professor requer, além do seu conhecimento técnico, a percepção das características de cada aluno e de cada turma, a fim de verificar qual a metodologia e quais tipos de atividades que mais se adaptam ao contexto trabalhado.

De acordo com Ponte (2003), as atividades que o professor utiliza no ensino podem ser classificadas em diversas categorias, tais como exercícios, testes, problemas, experimentos, pesquisas, situações exploratórias, jogos, projetos, etc. Antes de propor uma atividade, geralmente o professor pensa no tipo de conteúdo, no contexto, no nível de dificuldade, nas noções matemáticas que o aluno já possui, no tipo de resultado que se pretende obter, entre outras questões.

Conforme as Diretrizes Curriculares de Matemática do Paraná, 2008:

> A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, dis-

> cutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios. (PARANÁ, 2008, p.45).

Neste trabalho, trataremos da metodologia de ensino de matemática através da investigação matemática.

1.1 Por que investigação matemática?

"A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa" (POLYA, 1985). Esta é a primeira consequência apontada por George Polya para a sua ideia sobre o real objetivo do ensino de matemática, que é "ensinar a pensar". Ele continua suas recomendações apontando que "Para aprender eficazmente, o aluno deve descobrir, por si só, uma parte tão grande da matéria ensinada quanto possível". Tais recomendações podem ser colocadas como o germe desta tendência da educação matemática chamada de *Investigação Matemática*.

Tal recomendação não significa que os alunos devem resolver problemas em aberto ou descobrir novas relações matemáticas, mas sim ter a capacidade de investigar e argumentar sobre os padrões que observa. Nesse caso, não se trata de criar nova matemática para os matemáticos, mas sim fazer a sua própria construção de uma matemática possivelmente já praticada. Isso fica evidente na proposta de Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2005), quando eles afirmam que

> em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso (p. 9).

Segundo esses autores, a investigação matemática como forma metodológica de ensino e aprendizagem propiciam o "espírito da atividade matemática genuína". Para eles, "as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração"(ibid, p.23). Nesta proposta, como são articuladas diferentes modos de interpretação, o aluno poderá formular questões e conjecturas e realizar suas provas e refutações, além de apresentar os resultados obtidos durante o processo e a discuti-los junto aos demais colegas e ao professor. Este é exatamente o processo de construção da matemática, o que tende a elevar o espírito investigativo entre os alunos. Pois, investigar significa procurar conhecer o que não se sabe, que é o objetivo maior de toda ação pedagógica. O que se espera em uma atividade de investigação e exploração, realizada por alunos, é que a Matemática flua naturalmente, isto é, com tentativas de erros e acertos.

De acordo com as Diretrizes Curriculares de Matemática, o ensino deve levar em consideração a valorização do diálogo em sala de aula; com mediação do professor, proporcionando atividades que estimulem o raciocínio, a criatividade e que facilitem o convívio com o incerto e imprevisível (BRASIL, 1998). Tal ideia está fundamentada no pensamento de psicólogos como Jean Piaget, segundo o qual as relações de cooperação social, por promoverem o desenvolvimento das operações mentais, são as mais propícias para o crescimento do indivíduo em seus aspectos intelectual, social e moral. Desta forma, entendemos que a prática pedagógica de investigações matemáticas, por ter um caráter dialógico, pode contribuir para uma melhor compreensão da disciplina em questão.

1.2 A aula com investigação matemática

Na aplicação da metodologia de investigação matemática numa sala de aula, o professor, mediador da atividade, precisa se planejar. No entanto, é também preciso estar ciente das várias situações que são possíveis de acontecer no decorrer de seu desenvolvimento. Pois tudo pode ocorrer conforme o planejado ou após seu início, ter de replanejar para se chegar ao mais próximo possível de atingir os objetivos traçados.

1.2.1 A condução da aula investigativa

A investigação matemática é munida de características próprias. Ao trilhar este caminho, o docente pode se deparar com descobertas maravilhosas de seus alunos, como também, pode ter suas decepções. Para se utilizar desta metodologia e tirar um bom proveito dela, é necessário, como em outras metodologias, ter um bom planejamento. Além disso, em um primeiro momento, é necessário mostrar aos alunos como proceder, como investigar, que tipos de perguntas são feitas, deixando claro a eles do que se trata a investigação. Essa etapa não é impositiva! O professor deve acompanhar os alunos de perto, instigando-os na busca de questionamentos e ajudando-os a articular reflexões e respostas.

Conforme destacam Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2005, p.21), a realização de uma investigação matemática em sala de aula envolve quatro momentos principais que são muito importantes para garantir o sucesso da atividade.

1. *Exploração e formulação de questões:* que incluem as atividades de reconhecer e explorar uma situação problema, formulação de questões;

2. *Conjecturas:* organizar dados, formular conjecturas e fazer afirmações sobre elas;

3. *Testes e reformulação:* realizar testes, refinar a conjectura;

4. *Justificação e avaliação:* justificar uma conjectura, avaliar o raciocínio ou o resultado de um raciocínio. Refere-se à argumentação, à demonstração e a avaliação das conjecturas já realizadas.

Salientamos que esses quatro momentos podem surgir, muitas vezes, simultaneamente. Como por exemplo, a formulação das questões juntamente com a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc.

O sucesso de um trabalho de Investigação Matemática depende do ambiente gerado na sala de aula e do envolvimento ativo dos alunos, sendo condição fundamental para a aprendizagem. Além de reconhecer as etapas citadas acima, a maneira com que o professor conduz a atividade faz grande diferença no resultado final.

Um dos elementos importantes é, por exemplo, valorizar as ideias dos alunos, uma vez que um dos objetivos é que eles discutam as ideias com seus colegas, sem a necessidade da validação constante por parte do professor. Quando se debruça sobre uma situação problema de investigação para resolvê-la, o aluno pode, além de encontrar a solução desejada, fazer descobertas de outras propriedades que se revelam tão ou mais importantes que a solução original. E, às vezes, mesmo não conseguindo encontrar a solução original, algumas propriedades e descobertas imprevistas aguçam a curiosidade dos alunos, além de mostrar que nem todas as respostas são dadas na matemática, desmistificando a ideia de que ela é uma ciência pronta e acabada.

Quanto ao processo de desafiar os alunos, fazê-los mostrar seu potencial, convém destacar que, nessa atividade, quando o professor coloca sua turma numa situação de investigação, é fundamental garantir que os alunos se sintam motivados ou desafiados para a atividade a realizar. Deve criar um ambiente propício e dar uma atenção cuidadosa à própria tarefa, selecionando inicialmente questões que constituam, em grande parte, um verdadeiro desafio para os alunos.

Esse desafio deverá propiciar aos alunos um espírito interrogativo perante as ideias matemáticas, em que o professor deve estar atento para conduzi-los a procurar, no momento adequado, tanto afirmações quanto interrogações sobre a questão em si. Além de desafiá-los continuamente no decorrer da atividade mesmo que essa avance normalmente, a fim de que o ciclo de investigação não se esgote prematuramente. Desta forma, sugere-se que alguns questionamentos podem colaborar para com os alunos no desenvolvimento das atividades investigativas: – Como você tentou? – O que está tentando fazer? – O que pensa sobre isso? – Porque está fazendo assim? – O que você já descobriu? – Como podemos organizar isto? – Verificou se funciona mesmo? O professor, neste momento, deve estar bem atento ao desenvolvimento das atividades, expressões, falas dos alunos, pois temos que trazer à nossa discussão os ritmos e estilos de aprendizagem. De fato, entendemos que as pessoas têm diferentes formas de pensar, de aprender; lêem, escutam, estudam de maneiras diversas. Sendo assim, cada aluno desenvolve formas próprias para receber e processar novas informações.

Numa aula de investigação matemática, tudo o que acontece depende dos envolvidos. O professor deve dar a devida atenção à exploração antecipada da tarefa e ao planejamento de como irá ocorrer a atividade em sala de aula. No entanto, planejar não significa determinar todos os caminhos da aula, uma vez que elas se caracterizam por uma grande margem de imprevistos, o que exige do professor uma grande flexibilidade para lidar com situações novas. O planejamento, neste caso, envolve inclusive ter a consciência de que a aula pode tomar rumos não muito previsíveis.

1.2.2 A avaliação da aula investigativa

Naturalmente, toda atividade humana está permeada por avaliações. Durante a investigação matemática, tendemos a proceder numa avaliação mais contínua, uma vez que mantemos contato direto com os alunos no fazer das atividades. Além disso, os aspectos valorizados em uma atividade de investigação perpassam por diversos objetivos curriculares, os quais devem ser claros tanto para o professor quanto para os alunos. Segundo Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2005),

> Em primeiro lugar, pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta. Em segundo lugar, pretende-se que o aluno desenvolva a capacidade de realizar investigações. E, em terceiro lugar, pretende-se promover atitudes, tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo. (p.109)

Ao avaliar o progresso dos alunos nessa atividade, o professor precisa recolher informações desde os primeiros passos do aluno, perceber se compreenderam a tarefa e também como desenvolveram o trabalho. É preciso ter uma atenção especial para que os alunos não desenvolvam a atividade procurando uma resposta direta ou apenas um resultado, como um simples exercício convencional. Como a maioria dessas atividades são desenvolvidas em grupo, para avaliar o processo, constitui-se um grande desafio para o professor perceber todos os momentos de discussão do grupo, suas produções e anotações, bem como aonde querem chegar. Às vezes o grupo não possui nada registrado do que já pensaram ou concluíram. Isso é desfavorável à avaliação do progresso dos alunos na atividade. Nesse momento, o professor, pacientemente, necessita escutá-los de forma ativa, compreendendo o seu raciocínio, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matematicamente pouco correto, uma vez que podem estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos e até mesmo extramatemáticos, e, se necessário, colocando algumas de suas perguntas planejadas para direcioná-lo. Mesmo que não seja possível explorar tais conexões, o professor deve estimular os alunos a refletir sobre eles e dar mais evidência do que significa raciocinar matematicamente.

Há também outras formas de avaliação a considerar durante a realização do trabalho investigativo e na fase de conclusão. O professor poderá colher informações sobre as atitudes dos alunos, tanto na elaboração de questionamentos quanto em afirmações, da forma que mobilizam ideias e o pensamento matemático e fazem sua representação formal. Isso pode ser obtido de forma oral ou através de alguma gravação de suas discussões durante a exploração da atividade, como também através de relatórios de alguma estratégia tentada e abandonada e das conjecturas testadas aceitas ou rejeitadas.

Não menos importante, há de se considerar uma apresentação oral que constitui uma situação de avaliação e também de aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de argumentação, que pode ser usada tanto de modo individual como em grupo.

> As apresentações orais permitem avaliar uma variedade de objetivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral. A sua principal limitação é o tempo que consomem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, H., 2005, p.105).

Deve-se considerar, no entanto, que este tipo de atividade não pode ser feito com muita frequência, pois corre-se o risco de essas apresentações se tornarem cansativas, e assim poderá haver consequências negativas no ambiente de trabalho investigativo em sala de aula.

2 | Aspectos da Álgebra e do seu Ensino

No âmbito escolar, a Matemática é uma disciplina que muitas vezes é apresentada e ensinada aos alunos de forma "bruta", autoritária, sem abertura para diálogos e questionamento, sem fazer referência à sua história e à sua construção. Priorizam-se as regras, procedimentos e técnicas, tornando-se uma atividade mecânica em detrimento de uma reflexão acerca das ideias matemáticas, de sua construção e da percepção de significados para os algoritmos utilizados.

Um dos campos da matemática que mais sofre com essa crítica é a álgebra. De fato, se por um lado as ideias da álgebra são fundamentais para expressar pensamentos matemáticos e generalizar raciocínios, por outro, a própria natureza de ser uma linguagem regrada que pode ser facilmente programada e procedimentalizada, favorece que no seu ensino predomine aspectos reprodutivistas e autoritários por parte daqueles que dominam os procedimentos, mas não conhecem as ideias.

2.1 Sobre a álgebra

No contexto matemático, o conceito de álgebra tem um longo percurso histórico. Como se lê nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008),

> a álgebra é um campo do conhecimento matemático que se formou sob contribuições de diversas culturas. Pode-se mencionar a álgebra egípcia, babilônica, grega, chinesa, hindu, arábica e da cultura europeia renascentista. Cada uma evidenciou elementos característicos que expressam o pensamento algébrico de cada cultura. Com Diofanto, no século III d.C., fez-se o primeiro uso sistemático de símbolos algébricos. Tal sistematização foi significativa, pois estabeleceu uma notação algébrica bem desenvolvida para resolver problemas mais complexos, antes não abordados. (p.51).

Segundo os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.78), a história da álgebra divide-se em duas: a Álgebra Clássica ou Elementar e Álgebra Moderna ou Abstrata. A primeira como uma tendência tradicional em considerar a Álgebra como uma Aritmética universal ou generalizada, ou seja, que compõe o estudo das equações e método de resolvê-las; a segunda como uma tendência moderna para qual a álgebra consiste em um sistema simbólico postulacional. Esta por sua vez, dedicada ao estudo das estruturas matemáticas como grupos, anéis, corpos, etc.

De forma grosseira, dentro da concepção primeira de álgebra, podemos dizer que ela é o ramo da Matemática que generaliza a aritmética. Isso quer dizer que as operações provenientes da aritmética são reformuladas em termos de uma linguagem simbólica e que, a partir dela, as propriedades da aritmética são então descritas como axiomas ou regras operatórias. Neste sentido, a ideia fundamental da álgebra seria ter uma linguagem para descrever e resolver problemas sem precisar associá-los a casos muito particulares.

De forma mais abrangente, pensando em uma concepção moderna, podemos conceituá-la como o resultado do pensamento humano que busca argumentar genericamente sobre determinadas situações e operações envolvendo padrões (sejam eles geométricos ou aritméticos) e suas transformações. Ao pensar algebricamente, buscamos perceber um determinado padrão, descrevê-lo em uma linguagem simbólica e com regras operatórias, e utilizar tais regras para tirar conclusões sobre o observado.

Percebe-se aqui que a investigação matemática, conforme descrito no capítulo anterior, se aproxima do pensamento algébrico, pois ambas se desenvolvem a partir da observação de uma situação, da elaboração de conjecturas, da busca de uma forma ou linguagem para sua descrição e análise, e, por fim, de uma forma de demonstrar suas conjecturas e tirar novas conclusões sobre os resultados obtidos.

2.2 Sobre o ensino de álgebra

Sobre as concepções da Educação Algébrica que se manifestaram ao longo da história da Educação Matemática elementar, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.83) destacam três tendências: a *linguístico-pragmática*, caracterizada pelo transformismo algébrico, ou seja, por uma sequência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passando pelas operações presentes nessas expressões, chegando às equações, para finalmente utilizá-las na resolução de problemas; a *fundamentalista-estrutural* que atribui à Álgebra o papel de fundamentar, de modo postulacional, os vários campos da Matemática escolar, enfatizando as justificativas lógicas dos transformismos algébricos, mas sem necessariamente uma relação com problemas concretos e; a *fundamentalista-analógica* que tenta efetuar uma síntese entre as duas anteriores, mantendo os aspectos instrumentais para resolução de problemas da primeira tendência, mas ainda se preocupando em justificar tais procedimentos. A última tendência vem contribuir muito para o ensino da álgebra, pois, para justificar certas passagens do transformismo algébrico, baseia-se fortemente em recursos analógicos geométricos e, portanto, visuais. Desta forma, mostra ao aluno uma visão mais concreta, especialmente no tocante à Álgebra Geométrica, através da utilização de leis de equilíbrio físico, recorrendo a balanças, gangorras, etc.

Ainda segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.85), o ponto comum e pedagogicamente negativo dessas três tendências é relacionar o pensamento algébrico a uma linguagem simbólica, centradas na aplicação de regras e manipulação de expressões algébricas em prejuízo dos aspectos conceituais e semânticos, que exploram os significados e a compreensão dos conceitos. Desta forma, pode-se resumir que as concepções de Educação Algébrica dominantes, ao longo da história do Ensino da Matemática, enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem.

No contexto escolar, a álgebra é uma das áreas que mais representa um paradigma dogmático e mecanicista que se instaurou no ensino de matemática. Como consequência, podemos observar situações bizarras, como alunos capazes de operar com símbolos matemáticos sem, contudo, darem o menor significado para tais operações. Também há dificuldades relativas a não compreensão das técnicas algébricas aliadas ao não entendimento dos conceitos. Essas questões podem ser originárias de metodologias que escondem a natureza da matemática e os processos de criação e generalização do conhecimento matemático.

Diante disso, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apontam a necessidade de repensar a Educação Algébrica. Sugerem ainda que talvez as dificuldades dos alunos estejam na relação que se estabelece entre pensamento e linguagem, posto que, atualmente, a crescente tendência da Educação Algébrica é acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve por meio do uso de regras para resolução das atividades algébricas através de uma linguagem simbólica específica.

> A análise de situações em que este pensamento pode se manifestar levou-nos, ainda, a concluir que não existe uma única forma de expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para este fim, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.88)

Esses problemas de falta de significado, no entanto, há tempos estão em discussão. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCNs) (BRASIL, 1998), por exemplo, recomendam que no início do ensino fundamental deve-se desenvolver uma pré-álgebra de modo informal, apenas levando os alunos a perceberem padrões e construírem argumentos genéricos sem a necessidade de uma formalização em linguagem algébrica. É, no entanto, nos anos finais que os trabalhos algébricos devem ser ampliados com a finalidade de construir novas ferramentas, linguagens e procedimentos genéricos.

Com relação às dificuldades e confusões na aprendizagem da álgebra simbólica, destacamos os equívocos nas interpretações de variável e incógnita. Para Valentino e Grando (2004, p.5), uma das causas desse problema, além do incentivo à pura repetição de procedimentos, é o vicio de usar sempre as mesmas letras para a representação algébrica. Segundo elas, esse vício pode causar estranheza e dificuldades de interpretação de equações quando ocorrer a sua troca por outras letras. Consequentemente, isso representará um obstáculo para a própria compreensão do conceito de variável. O frequente uso de uma mesma letra pode 'engessar' a compreensão do aluno no sentido de perceber que as letras expressam ideias diferentes em cada contexto, ora como incógnita, ora como variável.

Além disso, a utilização de variáveis para representar as relações entre elementos que se apresentam em situações-problemas concretas é pouco explorada, favorecendo com que o aluno se torne incapaz de ver uma outra utilidade para as letras. Epistemologicamente, isso pode configurar um obstáculo para o entendimento da álgebra em um sentido mais amplo, por exemplo, como linguagem para modelar problemas e representar generalizações. Sobre essa situação, os PCNs apontam que

> a noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita. (BRASIL, 1998, p.118)

Os problemas de compreensão do pensamento algébrico não se esgotam por aí. Como o conceito de álgebra é muito abrangente e possui uma linguagem permeada por convenções diversas, tal conhecimento não pode ser concebido pela simples manipulação de expressões sem significado. Nesse sentido, defendemos uma abordagem pedagógica que estimule o pensamento algébrico, induza a construção de uma linguagem algébrica e de técnicas de manipulação com problemas mais concretos, fazendo com que o aluno relacione significados aos conteúdos abordados.

Como é destacado por Silvânia Cordeiro de Oliveira e Laudares (2015, p.4),"O papel do professor será fundamental para que os estudantes desenvolvam um sentido numérico concomitante ao pensamento algébrico", provocando a percepção do que há de comum entre os dois, para que os alunos consigam fazer a transição da aritmética para a álgebra como uma continuidade e não como uma fenda. O professor deve ter consciência dessa transição e de como auxiliar o aluno nesse desenvolvimento.

A consciência, por parte do professor, desse processo de construção e transformação do pensamento algébrico, que inicialmente não está necessariamente vinculado a uma linguagem simbólica pré-construída, naturalmente acarreta em implicações pedagógicas. Como afirmam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.88), a primeira dessas implicações refere-se ao momento de iniciação ao pensamento algébrico no currículo escolar, que pode dar-se desde as séries iniciais. A segunda diz respeito ao importante papel desempenhado pela linguagem simbólica na Educação Algébrica. Essa linguagem fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação-problema. Uma terceira diz respeito à amplitude do pensamento algébrico. Tal forma de pensamento manifesta-se em todos os campos da matemática e de outras áreas do conhecimento. E por fim, uma última implicação de natureza didático-metodológica refere-se às grandes etapas, segundo as quais assenta-se o desenvolvimento da Educação algébrica elementar. A primeira etapa deve ser o trabalho com situações-problema concretas. A partir delas é que se deve construir uma linguagem simbólica para desenvolver o pensamento. Na segunda etapa, pode-se proceder no caminho inverso, partindo de expressões algébricas para posteriormente atribuir-lhes alguns significados concretos. Finalmente, na terceira pode-se estudar as transformações de uma expressão algébrica em outra equivalente e sobre os procedimentos que as legitimam. Como essas etapas constituem um caminho para à construção sólida do pensamento algébrico do estudante, elas não obedecem uma ordem rígida.

De acordo com as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (PARANÁ, 2008), é preciso estabelecer uma relação intrínseca entre pensamento e linguagem, ou seja, a linguagem algébrica entendida como expressão do pensamento matemático. "Pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades ou desigualdades) e, com base nisso, transformar as expressões obtidas" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.151).

Como forma de alcançar os objetivos propostos para o ensino-aprendizagem de álgebra, trazemos nesta dissertação algumas possibilidades de aulas através da investigação matemática. No nosso entendimento, existem muitas relações entre esta metodologia e a construção do pensamento algébrico. De fato, ao trilhar o caminho da investigação matemática, o discente se depara com situações nas quais ele deve explorar os problemas para perceber padrões, eventualmente transformando-os em padrões numéricos, que é o embrião do pensamento algébrico, e, em seguida, deve transformar a ideia intuitiva, passando-a dos raciocínios particulares para os genéricos e encontrando uma linguagem para expressá-los coerentemente.

Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2005) destacam que

> Para compreender os aspectos essenciais da Álgebra, é importante todo um percurso em que os alunos têm contacto e com um grande número de experiências algébricas informais, que envolvem a análise de padrões e relações numéricas e a sua representação e generalização por meio de diferentes processos. Essa potencialidade tem sido evidenciada nas tarefas que temos discutido. De fato, o desafio lançado pela generalização constituem aspectos que muitas vezes estão envolvidos nas investigações numéricas e que apoiam o desenvolvimento do raciocínio algébrico. (p.69)

Além disso, o processo de investigação, quando bem tutoriado pelo professor, tende a trazer mais dinamismo e autonomia aos alunos, rompendo com a sua apatia no processo de aprendizagem. Para Polya (1985), tanto os piores alunos da turma, quanto os bem inteligentes, podem ter aversão à álgebra. E essa aversão se justificará se não lhe for dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio. Sendo assim, auxiliá-los nessa experiência constitui-se em uma das mais importantes tarefas do professor.

Por fim, reforçamos o fato de que as ideias apresentadas aqui diferenciam-se enormemente da álgebra escolar como um processo de simples manipulação de símbolos. Destacamos que, a linguagem algébrica é uma poderosa ferramenta para o pensamento, proporcionando aos alunos a capacidade de abstração a partir do concreto e, reciprocamente, da análise e síntese de situações concretas a partir de modelos abstratos.

3 | Características e Potencialidades da OBMEP

Neste capítulo trazemos alguns dados sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) disponíveis no seu site oficial e fazemos uma breve análise sobre o estilo de problemas que são propostos nessa competição, mostrando algumas das características dessa competição e indicando algumas das suas potencialidades para o ensino de matemática, em particular dentro da linha de resolução de problemas e das aulas investigativas.

3.1 Sobre a OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e à partir de 2017 incluiu também as escolas privadas. Este projeto é realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

Segundo a OBMEP (2018), a olimpíada foi criada em 2005, tendo como objetivos principais,

- estimular e promover o estudo da Matemática;
- contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas;
- incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;

- contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas;
- promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. De acordo com informações divulgadas na plataforma da Obmep, em 2017 mais de 18 milhões de alunos de participaram da olimpíada. Ela é realizada anualmente em duas fases e em três níveis de escolaridade, sendo a primeira com 20 questões objetivas, cada uma com apenas uma opção correta dentre as cinco apresentadas e com 2h30min (duas horas e trinta minutos) de duração. Desta fase, são selecionados os 5% (cinco por cento) do total de alunos inscritos em cada escola, que são classificados para a Segunda Fase. Nessa fase as questões são abertas. A prova consiste de 6 (seis) questões com subitens para que o aluno, ao resolver, possa também argumentar sobre sua resolução.

Quanto ao professor, ao escolher trabalhar com os problemas OBMEP, deve-se ter sempre em mente que um dos principais compromissos é valorizar o ensino e aprendizagem da matemática, e não apenas a competição. Nesse sentido, convém salientar que a OBMEP tem criado diversos programas e recursos voltados à formação de professores e ao ensino de matemática. Destacamos a seguir alguns desses recursos:

- **Portal da Matemática;**
- **Materiais Didáticos;**
- **OBMEP na Escola;**
- **Clubes de Matemática da OBMEP;**
- **PIC: Programa de Iniciação Científica;**
- **PICME: Programa de Iniciação Científica e Mestrado;**
- **POTI: Polo Olímpico de Treinamento Intensivo.**

É importante que o professor deixe claro entre os alunos, quais são os principais objetivos almejados pelo projeto e a impotância de suas participações em seus anos de ensino fundamental e médio.

4 | Adaptando questões para aulas de investigação

Neste capítulo, apresentamos uma série de situações problemas, que foram divididas em quatro grupos conforme o objetivo da aprendizagem, as quais vão gradativamente elevando o nível de dificuldade para que o aluno, dentro de suas possibilidades, encontre a solução ou as soluções para o problema em questão. Esses grupos são de atividades de Investigação Matemática sobre:

- **Notação Algébrica:** Equacionando uma situação problema algebricamente;
- **Mágicas e Adivinhações:** Brincando com Álgebra – Usando letras para escrever expressões que traduzem resolução de situações de maneira simples;
- **Padrões de Sequências Numéricas:** Generalizando padrões;
- **Relações em Tabelas Numéricas:** Identificando e conjecturando padrões em tabelas de números.

As questões selecionadas e apresentadas tem como foco principal o campo de ensino da Álgebra. As fontes principais dos problemas trabalhados são a OBMEP e os diversos programas desenvolvidos por ela. Como as tarefas para aulas de Investigação Matemática tem um caráter mais aberto, tivemos que fazer adaptações e alterações nas questões selecionadas para que, na medida do possível, se apresentem como tal. A princípio cada situação se apresenta com pouco questionamento ou nenhum e, na medida em que o aluno vai desenvolvendo a atividade, ou quando ela fica estagnada, sem direcionamento, o professor tende a lançar perguntas, interrogando-os ou indicando caminhos para que o resultado aconteça de maneira mais natural.

As atividades selecionadas para este trabalho estão apresentadas, inicialmente, na forma original e em seguida da maneira como desenvolvida em sala de aula com os alunos, de acordo com o objetivo delineado pelo professor.

Durante as atividades de investigação, é bastante comum que os alunos tenham momentos de estagnação, sem avançar na exploração da situação e nem desenvolver respostas para as perguntas formuladas. Para contornar esses problemas, sugerimos que o professor faça pequenas interferências colocando questões desafiadoras, interrogações ou alguma afirmação. O professor pode planejar de antemão algumas perguntas que podem servir para tais intervenções.

Chamamos de *cartas-na-manga* o conjunto de perguntas, hipóteses ou afirmações, previamente planejadas pelo professor para permitir e auxiliar a continuidade da atividade, ou para dar um novo foco exploratório, possibilitando aos alunos novas descobertas matemáticas. As cartas-na-manga são, portanto, indagações que tem o interesse de fazer com que o estudante explore relações matemáticas naquele contexto. Neste caso, a atividade se torna parcialmente direcionada.

Algumas atividades investigativas apresentam-se mais limitadas, ou seja, não dão muita margem para exploração, enquanto outras se apresentam com muitas alternativas de discussão e abordam vários conteúdos. Dessa forma, é interessante que o professor, de acordo com o andamento da atividade e com a discussão momentânea dos alunos, tenha a possibilidade de inserir outras vertentes, outros conceitos e aproveitá-los para que a atividade promova uma aprendizagem mais significativa. Assim, os alunos tem a oportunidade de realizar uma exploração para além do esperado pelo professor.

4.1 Análise de algumas questões

De acordo com os grupos de atividades elencados para a investigação matemática, foram selecionadas algumas questões que se encaixe no perfil desses grupos. Inicialmente as apresentamos na forma original e, em seguida, as adaptamos para que fiquem mais próximas dos objetivos a serem alcançados pela proposta metodológica, no caso, investigar situações que envolvem um pensamento algébrico. Com isso, esperamos contribuir para que o professor de Matemática do ensino básico, que tenha interesse, as utlizem em suas aulas, ou ainda, possa ajustá-la à sua maneira, a fim de atingir alguns objetivos que tenha proposto para a aprendizagem de algum conteúdo específico.

Algumas dessas questões foram aplicadas a alunos do 2º e 3º anos do ensino médio regular de um colégio público da cidade Santa Helena/PR, alunos do 4º ano do curso profissionalizante de formação de docentes do mesmo colégio, e também a acadêmicos do primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade privada da cidade de São Miguel do Iguaçu/PR. Para as tarefas que elaboramos e que efetivamente aplicamos com alunos, fizemos um breve relato, analisando alguns dos aspectos do seu desenvolvimento. Para as tarefas que não aplicamos, apresentamos apenas uma sequência de perguntas, as quais poderão ser trabalhadas em qualquer turma que o professor julgar essa metodologia importante e pertinente.

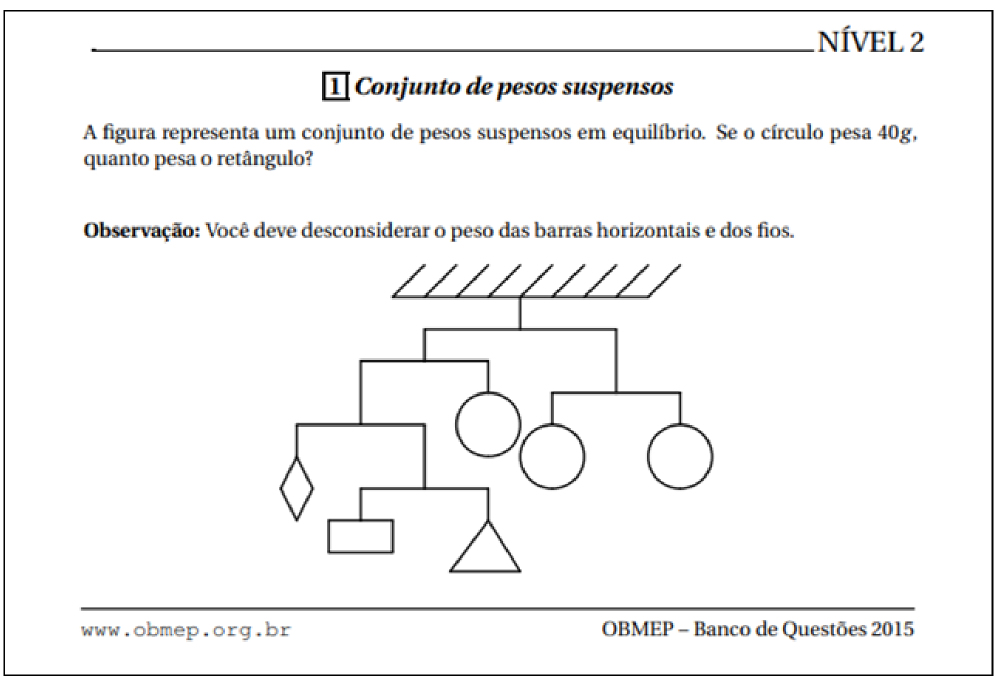
4.2 Atividades de Investigação sobre Notação Algébrica

As questões deste grupo tem um caráter introdutório, servem para familiarizar os alunos com o raciocínio e argumentos algébricos, bem como criar a possibilidade de construir uma linguagem simbólica para tratar dos problemas. Nessas duas questões, abordamos atividades referentes aos conteúdos de equações e sistema de equações, com o objetivo de fazer com que os alunos trabalhem com termos algébricos, fazendo relações, escrevendo e resolvendo equações algébricas. Esperamos que os estudantes internalizem conceitos e propriedades algébricas, apresentem soluções dos problemas formulados e generalizem as situações investigadas.

4.2.1 Conjunto de Pesos Suspensos

Esta questão, conforme está apresentada abaixo, foi retirada do Banco de Questões da OBMEP, ano de 2015, nível 2.

Questão original: A figura representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Sabendo que o círculo pesa 40g, quanto pesa o retângulo?


NÍVEL 2

1 *Conjunto de pesos suspensos*

A figura representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Se o círculo pesa $40g$, quanto pesa o retângulo?

Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios.

www.obmep.org.br OBMEP – Banco de Questões 2015

Figura 4.1: Fonte: Banco de Questões da Obmep 2015

Com o propósito de se ter um problema de investigação, foi feita uma adaptação no sentido de tornar a atividade mais exploratória, dando apenas pequenos direcionamentos para que os discentes construam e desenvolvam as notações algébricas. A adaptação para essa atividade foi a de excluir as informações e a pergunta da questão original, conforme mostramos na figura 4.2.

A figura representa um conjunto de pesos suspensos em equilíbrio. Descreva o que você pode concluir a respeito desse conjunto?

(Observação: Você deve desconsiderar o peso das barras horizontais e dos fios).

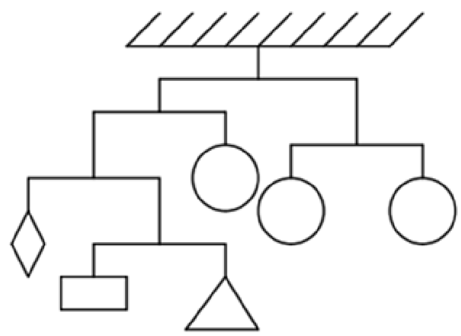


Figura 4.2: Conjunto de pesos - adaptada

Além da proposta inicial mostrada na figura 4.2 que solicita aos alunos que tirem suas conclusões sobre o conjunto de pesos, para desenvolver a atividade, elaboramos alguns questionamentos para servirem de *cartas-na-manga*. Ao perceber que a atividade não está fluindo ou que a exploração está estagnada, o professor tem a prerrogativa de utilizá-las ou não. Assim, ele vai lançando-as para que os alunos voltem e continuem a exploração da atividade.

(a) Qual procedimento utilizado para a resolução? Por que você pensou dessa forma?

(b) Você consegue elaborar outros problemas de equilíbrio?

(c) Poderia elaborar pergunta sobre a situação em equilíbrio que você criou?

Relato da atividade desenvolvida pelos alunos

A atividade foi aplicada em duas turmas do 3º ano do ensino médio e uma turma do 4º ano do curso profissionalizante de formação de docentes.

Como não havia ainda utilizado este tipo de metodologia em sala de aula, antes de iniciar as atividades de investigação matemática nas turmas, apresentei oralmente os aspectos principais de uma investigação. Destacando que para desenvolver este tipo de atividade, os alunos em posse de uma situação-problema, precisam entendê-la, discuti-la e procurar caminhos e argumentos matemáticos para a solução. Ainda, descrever quais caminhos ou propriedades matemáticas que levaram à solução e verificar se a solução encontrada faz sentido. Em praticamente todas as turmas do ensino médio ocorreu situação semelhante. Ao entregar a atividade, os alunos ficaram inertes, sem saber o que iriam fazer. Então surgiram as primeiras indagações e afirmações:

– *Não tem uma fórmula para resolver?*

– *Está faltando dados nesta questão...*

– *Não tem uma pergunta, o que o professor quer que resolva?*

– *Isso é muito difícil...*

Com mais alguns esclarecimentos, tais como: observar a atividade e se colocar como investigadores; descrever o que estão percebendo e discutir com os colegas as suas ideias para verificar se faz ou não faz sentido; registrar as ideias construídas, mesmo se esta não resolve o problema, deixá-las anotadas assim mesmo, pois tudo o que for registrado como processo na resolução da questão, faz parte deste tipo de atividade. Após dito isso, a maioria se reuniu em grupos com dois, três ou quatro alunos. Outros poucos preferiram fazer individualmente.

A primeira impressão era que a minha estratégia de aula investigativa estava "indo por terra". Mas com um pouco de paciência, chamando a atenção para a atividade que estava em posse deles e apresentado um exemplo de equivalência entre os valores de dois objetos na lousa, a atividade começou a "andar".

Talvez tenha nos faltado um pouco de habilidade e planejamento para o arranque da aula. De fato, como propõem Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2005, p.26), a fase de arranque "é absolutamente crítica, dela dependendo todo o resto. O professor tem que garantir que todos entenderam o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera durante o decurso da atividade."

Uma vez que o arranque foi dado, alguns alunos iniciaram discussões e faziam descobertas, enquanto outros não conseguiam dar um primeiro passo. Foi possível notar que estavam muito inseguros, pois a todo o momento queriam a afirmação do professor. "Isso aqui tá certo?". "Posso chamar isso aqui de x?". "O que eu faço agora?".

Ao deixá-los à vontade, compartilhando ideias entre os colegas, descrevendo os pensamentos sem a confirmação constante do professor e, de vez em quando, dando uma dica do que poderiam estar afirmando ou interrogando, surgiram ideias muito interessantes. Algumas delas estão relatadas e apresentadas adiante.

A princípio alguns alunos começaram a atribuir valores numéricos para as figuras (figura 4.3). Depois de explorarem um pouco, pedi para atribuírem símbolos algébricos para representar as figuras e tentar expressar as situações de equilíbrio a partir de equações envolvendo estes símbolos (figura 4.4). Não tiveram dificuldades de descrever as relações entre seus pesos e relatar as equações.

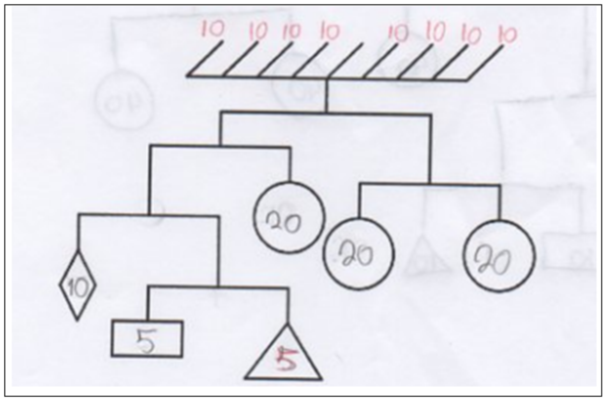


Figura 4.3: Solução de um dos alunos

Na segunda parte da atividade, pedi para que fizessem perguntas sobre o que tinham descoberto. Sugeri a primeira, e em seguida surgiram outras. Por exemplo: *"– qual é o valor do peso das somas dos três círculos se o triângulo for 5 gramas?"* (figura 4.4).

Por fim, foi sugerido que criassem situações semelhantes com objetos ou figuras em equilíbrio. Durante o desenvolvimento, os alunos representaram as figuras por elementos algébricos e fizeram as relações entre elas, através de equações. Nesta etapa, também fizeram algumas perguntas e resolveram alguns problemas envolvendo as situações de equilíbrio propostas (figuras 4.5 e 4.6).

Na sugestão de criarem situações semelhantes de equilíbrio, foi possível perceber que os alunos não tiveram tanta criatividade, porém se conseguiu um resultado satisfatório, até com alguma inequação, como mostra a figura 4.6, em que é destacado que o valor do peso da estrela é maior que a soma dos pesos de outras duas figuras. Além disso, é importante ressaltar que, em relação a representação do pensamento algébrico, este fica evidente nesta representação, em que os alunos utilizam-se de figurinhas para criar a situação de equilíbrio e, em seguida, escrevem as equações através destas figuras.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.85), esta é uma forma de expressar o pensamento algébrico, não é necessário fazê-lo através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra, pois ela é uma linguagem, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Conforme ainda esses autores,

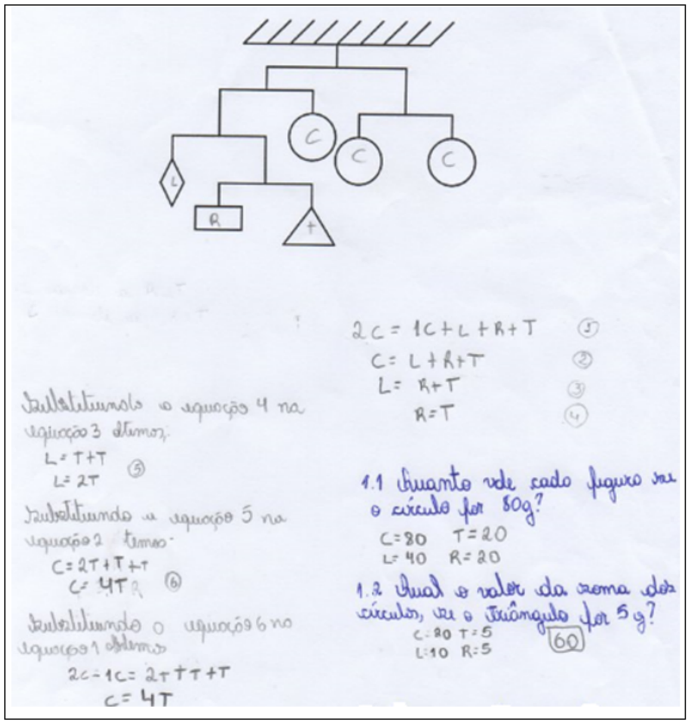


Figura 4.4: Representação algébrica - desenvolvida pelos alunos

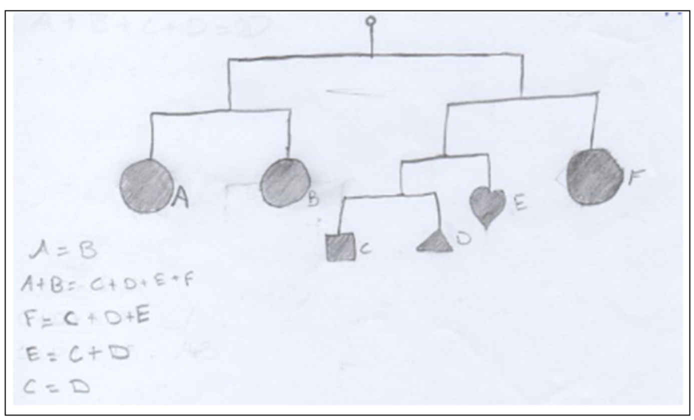


Figura 4.5: Situação 1 - desenvolvida pelos alunos

> Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-la, colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico. (p.85).

Neste caso, o aspecto linguístico formal não tem relevância, uma vez que na análise percebemos a existência de elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico.

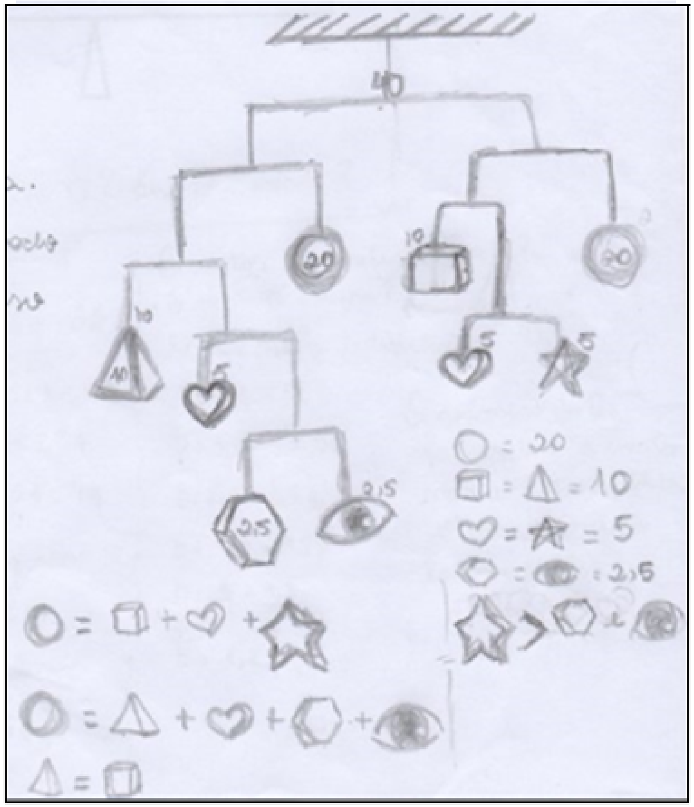


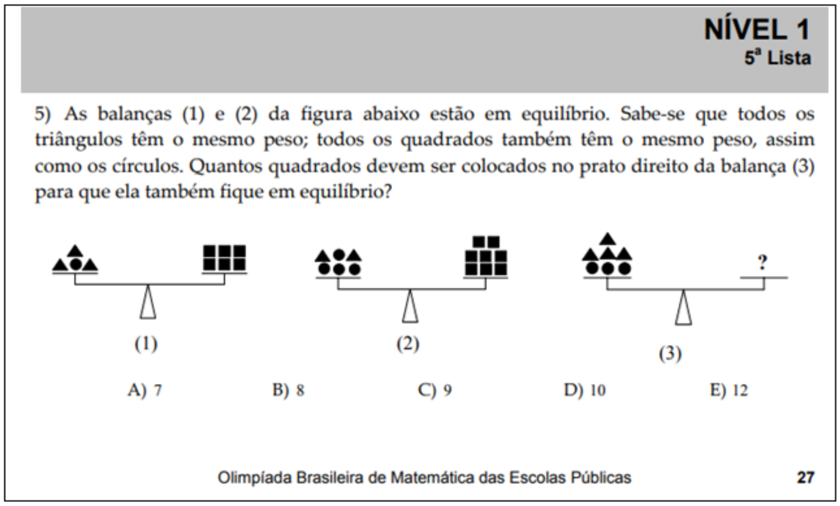
Figura 4.6: Situação 2 - desenvolvida pelos alunos

Nesta primeira atividade de investigação percebe-se a dificuldade que os alunos possuem no sentido de tomar a iniciativa diante uma situação. Esperam sempre um primeiro passo do professor. Isso talvez aconteça por causa da maneira que os conteúdos matemáticos vêm sendo abordados ao longo de sua vida de estudante, na maioria das vezes, as questões são fechadas e ainda já é sabido de antemão quais são as ferramentas matemáticas para a resolução.

4.2.2 Balança equilibrada

A questão a seguir (figura 4.7) foi retirada do banco de questões 2006 – nível 1, 5ª lista, página 27. A sua proposta é dar continuidade ao desenvolvimento do raciocínio algébrico por meio de uma linguagem simbólica, levar o estudante a montar as equações algébricas, compará-las e encontrar um método para a resolução. Através da exploração da atividade, direcioná-los a pensar numa solução algébrica geral para a situação das balanças em equilíbrio.

Questão original: As balanças (1) e (2) da figura abaixo estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm o mesmo peso; todos os quadrados também têm o mesmo peso, assim como os círculos. Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique em equilíbrio?


NÍVEL 1
5ª Lista

5) As balanças (1) e (2) da figura abaixo estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm o mesmo peso; todos os quadrados também têm o mesmo peso, assim como os círculos. Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique em equilíbrio?

(1) (2) (3)

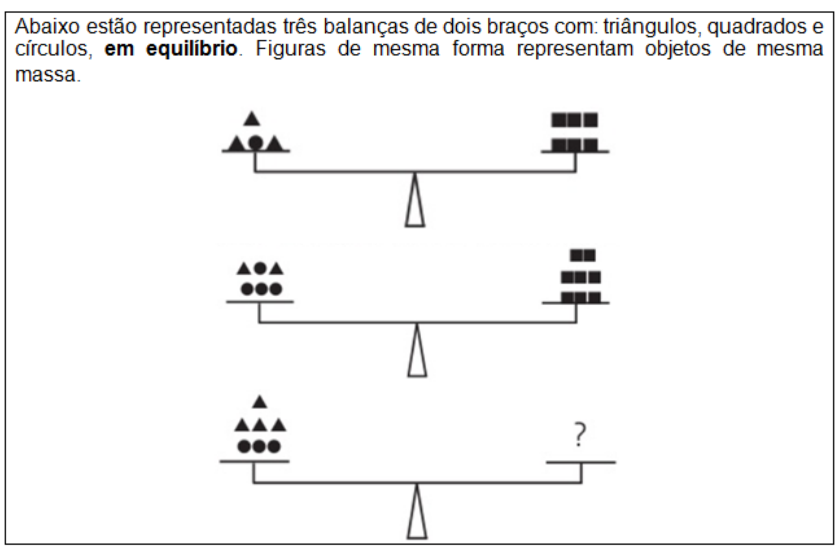
A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 27

Figura 4.7: Questão original retirada do Portal da Matemática

A adaptação feita para esta questão (figura 4.8) não a deixou totalmente aberta, porém com o propósito de instigar o aluno a utilizar sua criatividade, utilizando o máximo de elementos e propriedades matemáticas para encontrar uma solução particular e geral para as balanças em equilíbrio. O enunciado proposto foi o seguinte:

Questão: Abaixo estão representadas três balanças de dois braços com triângulos, quadrados e círculos, **em equilíbrio**. Figuras de mesma forma representam objetos de mesma massa.


Abaixo estão representadas três balanças de dois braços com: triângulos, quadrados e círculos, **em equilíbrio**. Figuras de mesma forma representam objetos de mesma massa.

?

Figura 4.8: Questão adaptada

Num primeiro momento é dada a situação sem nenhuma pergunta a responder, apenas a interrogação da terceira balança, que o aluno ao perceber, terá noção do que fazer. As perguntas "cartas-na-manga" para auxiliá-los, que o professor vai lançando aos poucos conforme a atividade vai sendo discutida e desenvolvida são colocadas a seguir. Essa sequência de perguntas tem o objetivo de levá-los a generalizar a situação através de uma equação algébrica.

(a) Como descobrir o número de quadrados necessários para que a última balança fique em equilíbrio?

(b) O que acontece se mudarmos a posição do apoio da balança? Por exemplo: se o comprimento de um lado é a metade do comprimento do outro lado, como devem ser as massas? E se for um terço, um quarto, etc.? (Esta pergunta pode iniciar uma discussão sobre o conceito de momento e centro de massa na disciplina de Física)

(c) Tente elaborar alguma situação problema semelhante e repasse para seu colega resolver.

(d) Há uma regra geral para a solução desse tipo de problema?

Relato da aplicação da atividade desenvolvida pelos alunos

Esta atividade foi desenvolvida com alunos do 3º ano do ensino médio e com alunos do primeiro período do curso de licenciatura em matemática.

O desenvolvimento desta atividade foi um pouco mais demorado, pois inicialmente os alunos começaram a atribuir valores às figuras para se chegar ao resultado final. Muitos conseguiram, outros se equivocaram com valores que distorciam entre a primeira e segunda balança. Alguns grupos tinham muita dificuldade para encontrar alguma relação e até afirmaram que seria impossível encontrar a solução. Outros através de valores aleatórios às figuras geométricas encontravam a solução de uma equação, porém não era válido para a outra. Neste caso, faltou-lhes o conceito do que significa resolver um sistema de equações lineares.

Neste momento, precisei intervir solicitando-os que descrevessem os seus pensamentos de modo mais genérico, tratando o problema de forma semelhante ao feito na tarefa anterior. Isso fez com que atribuíssem termos algébricos e formassem equações, resultando em um sistema de equações lineares que, ao comparar as equações, acabaram encontrando a solução da terceira balança.

Na figura 4.9 apresentamos uma situação em que a atribuição de valor a um quadrado possibilitou encontrar, por dedução, os demais valores. Tal resolução foi proposta por uma aluna do primeiro período do Curso de licenciatura em Matemática. No seu desenvolvimento, essa aluna escolheu o valor do peso igual a 5 para o quadrado e concluiu que, neste caso, cada triângulo vale 8 e cada círculo 6. Porém não foi descrito os detalhes de como solucionou a questão.

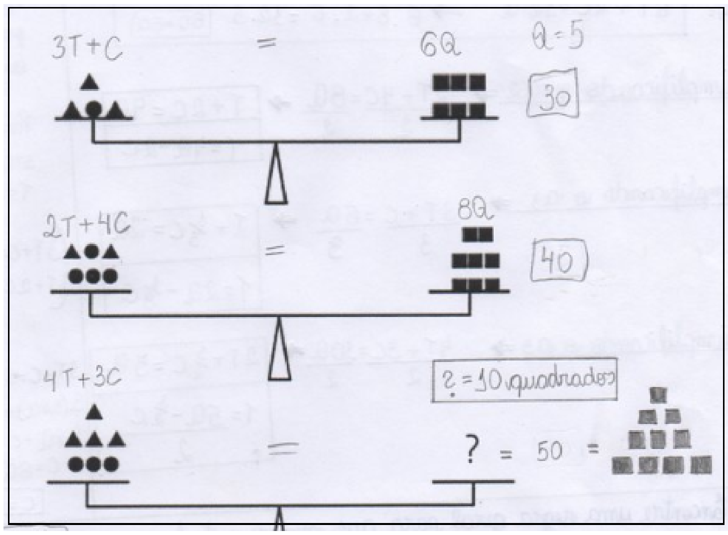


Figura 4.9: Solução proposta por uma aluna a partir da escolha de um valor para o quadrado

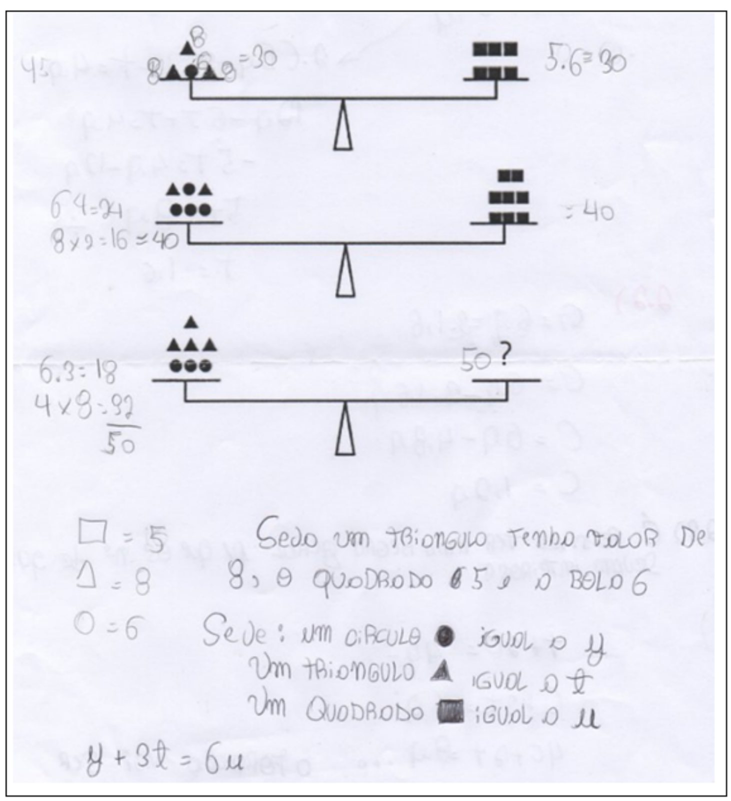


Figura 4.10: Solução de um aluno a partir de testes com alguns valores

A solução apresentada na figura 4.10 seguiu praticamente a mesma forma da anterior, porém foi feita por um aluno do ensino médio. Ele também não argumentou sobre a sua solução e, apesar de escrever algumas equações, não nos parece que ele as utilizou para resolver o problema. Aparentemente o aluno acho a solução a partir de alguns testes com números particulares.

Outros grupos apresentaram a resolução de duas maneiras: uma através de figuras e outra através da soma das equações das duas primeiras balanças, conforme mostram as figuras 4.11 e 4.12.

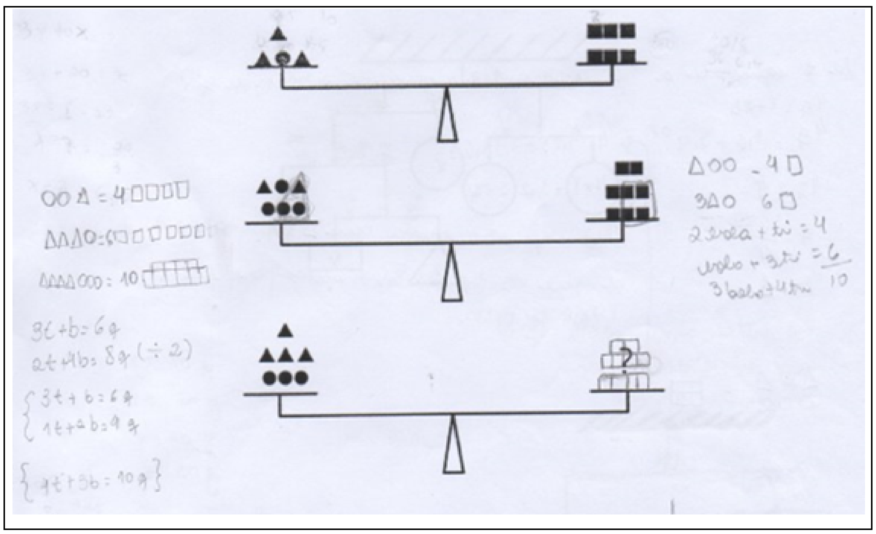


Figura 4.11: Solução através da "soma" das figuras

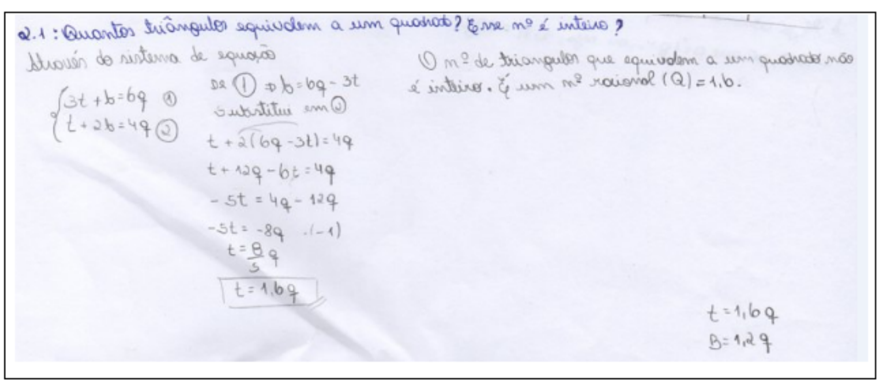


Figura 4.12: Solução utilizando um sistema de equações

Para que a atividade não se encerrasse aí, foram sugeridas mais questões, por exemplo:

(a) Quantos triângulos juntos têm o mesmo peso(massa) de um quadrado?

A partir daí eles mesmo sugeriram a outra pergunta:

(b) Quantos quadrados valem um círculo? Este número é inteiro? (Figura 4.13)

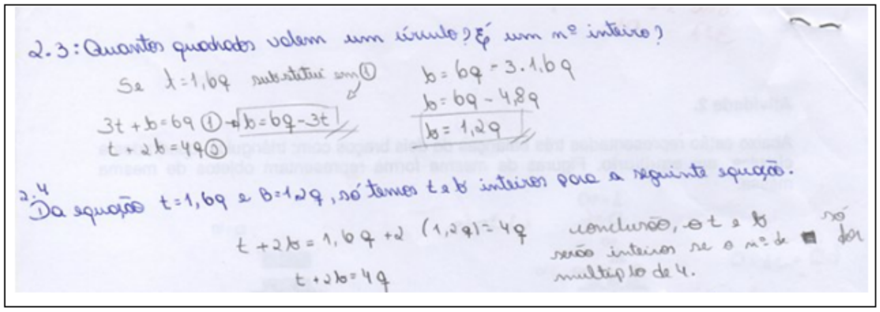


Figura 4.13: Outras perguntas desenvolvidas pelos alunos

Nas respostas a estas perguntas observa-se que na resolução mostrada na figura 4.12, a aluna apresenta que um triângulo equivale a $1,6$ quadrados, afirmando que o número não é inteiro e sim racional.

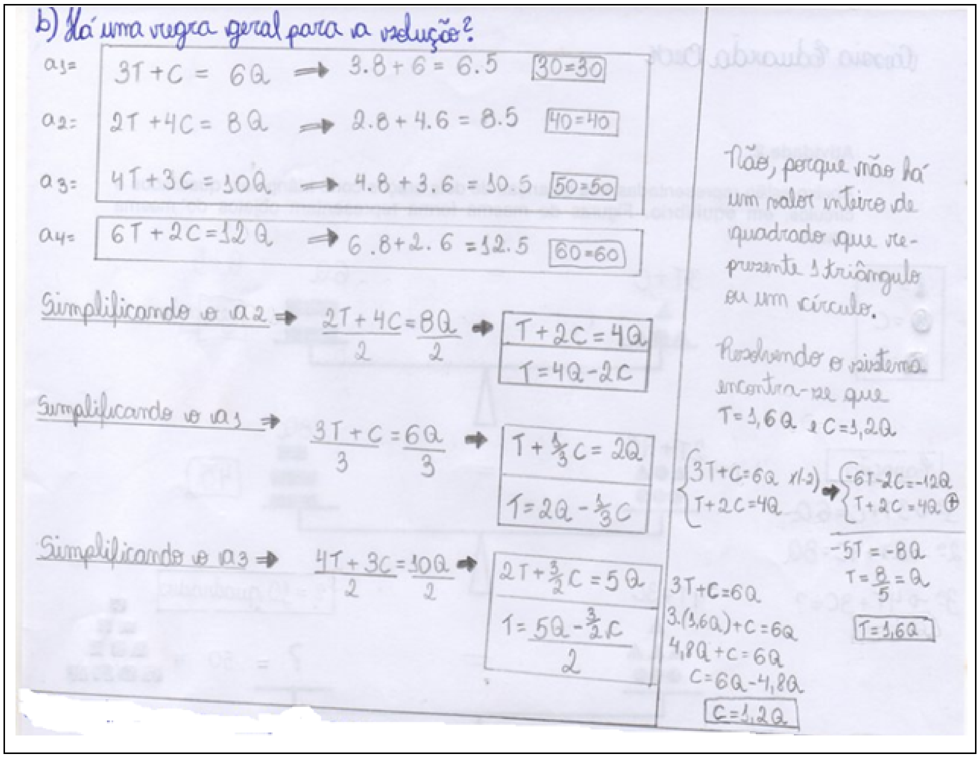
No desenvolvimento de outras perguntas apareceram algumas conjecturas interessantes, como por exemplo, que o número de quadrados para a balança ficar em equilíbrio só poderá ser múltiplos de 4. Porém, tal conjectura não é verdadeira, pois já foi tirado anteriormente, da primeira balança, a equação $3t + b = 6q$, (três triângulos mais uma bolinha se equilibram com seis quadrados), neste caso, a quantidade de quadrados é múltiplo de 6.

Observamos que os alunos ao registrar suas equações, como mostra a figura 4.15, trocam C por B e vice-versa, ora chamava a figura geométrica de bolinha, ora de círculo. Porém, o professor tem a oportunidade de corrigir estes detalhes de escrita e chamar a atenção dos alunos conforme discute posteriormente a solução apresentada por eles.

No entanto, o objetivo de representar a situação de forma genérica não estava sendo atingido. Por conta disso, sugeri a pergunta: há uma solução geral para a situação apresentada? Em outras palavras, dado um conjunto de triângulos e círculos, é sempre possível encontrar uma quantidade inteira de quadrados que fique em equilíbrio com o conjunto dado?

A partir daí, os alunos mais interessados na atividade se empenharam em achar tal regra geral. Na figura 4.14 é possível notar que uma das alunas encontrou relações entre triângulos, círculos e quadrados.

Na figura 4.15, notamos que o grupo trabalhou com múltiplos, apresentado várias soluções. Porém, não se esgotou a possibilidade de resultados. O importante no desenvolvimento da atividade realizado por este grupo foi a apresentação de equações algébricas que tem a característica de representar a regra geral para a solução, um ponto a ser bastante valorizado pelo professor. Um dos pontos negativos, talvez sem muita relevância, observado foi a resistência em representar um número na forma de fração.



b) Há uma regra geral para a solução?

$a_1 =$ $3T + C = 6Q \rightarrow 3.8 + 6 = 6.5$ $\boxed{30=30}$

$a_2 =$ $2T + 4C = 8Q \rightarrow 2.8 + 4.6 = 8.5$ $\boxed{40=40}$

$a_3 =$ $4T + 3C = 10Q \rightarrow 4.8 + 3.6 = 10.5$ $\boxed{50=50}$

$a_4 =$ $6T + 2C = 12Q \rightarrow 6.8 + 2.6 = 12.5$ $\boxed{60=60}$

Simplificando o a2 $\rightarrow \frac{2T+4C}{2} = \frac{8Q}{2} \rightarrow \boxed{T + 2C = 4Q}$ $\boxed{T = 4Q - 2C}$

Simplificando o a1 $\rightarrow \frac{3T+C}{3} = \frac{6Q}{3} \rightarrow \boxed{T + \frac{1}{3}C = 2Q}$ $\boxed{T = 2Q - \frac{1}{3}C}$

Simplificando o a3 $\rightarrow \frac{4T+3C}{2} = \frac{10Q}{2} \rightarrow \boxed{2T + \frac{3}{2}C = 5Q}$ $\boxed{T = \frac{5Q - \frac{3}{2}C}{2}}$

Não, porque não há um valor inteiro de quadrado que represente 1 triângulo ou um círculo.

Resolvendo o sistema encontra-se que $T = 1,6Q$ e $C = 1,2Q$

$$\begin{cases} 3T + C = 6Q & \times(-2) \\ T + 2C = 4Q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6T - 2C = -12Q \\ T + 2C = 4Q \end{cases} \oplus$$

$-5T = -8Q$

$T = \frac{8}{5}Q$

$\boxed{T = 1,6Q}$

$3T + C = 6Q$

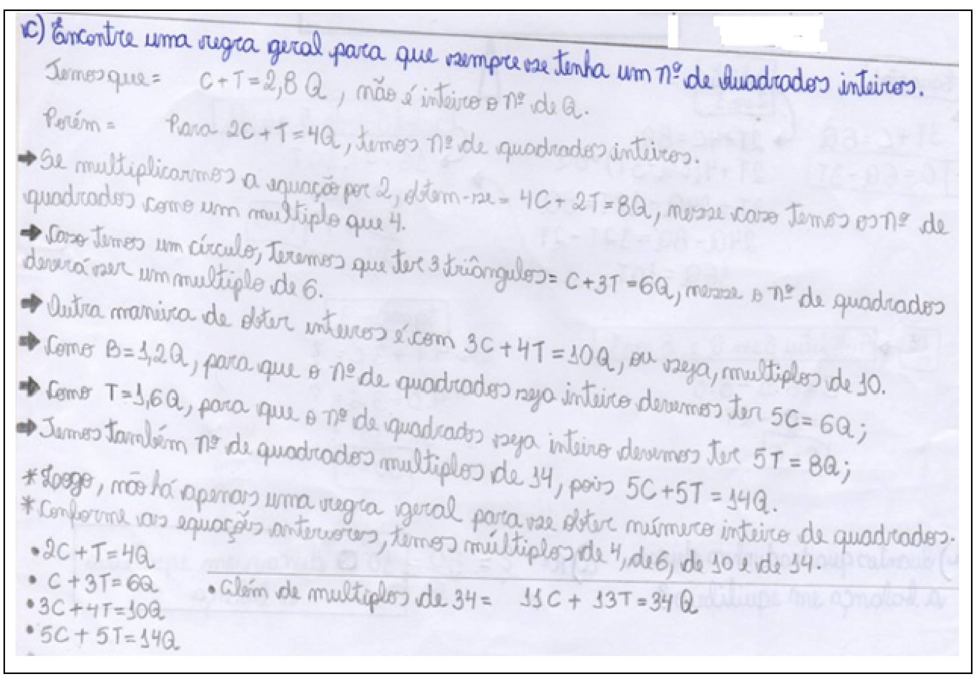
$3.(1,6Q) + C = 6Q$

$4,8Q + C = 6Q$

$C = 6Q - 4,8Q$

$\boxed{C = 1,2Q}$

Figura 4.14: Conjecturas para a solução geral desenvolvida pelos alunos



c) Encontre uma regra geral para que sempre se tenha um nº de quadrados inteiros.

Temos que = $C + T = 2,8Q$, não é inteiro o nº de Q.

Porém = Para $2C + T = 4Q$, temos nº de quadrados inteiros.

→ Se multiplicarmos a equação por 2, obtem-se = $4C + 2T = 8Q$, nesse caso temos o nº de quadrados como um multiplo que 4.

→ Caso temos um círculo, teremos que ter 3 triângulos = $C + 3T = 6Q$, nesse o nº de quadrados deverá ser um multiplo de 6.

→ Outra maneira de obter inteiros é com $3C + 4T = 10Q$, ou seja, multiplos de 10.

→ Como $B = 1,2Q$, para que o nº de quadrados seja inteiro devemos ter $5C = 6Q$;

→ Como $T = 1,6Q$, para que o nº de quadrados seja inteiro devemos ter $5T = 8Q$;

→ Temos também nº de quadrados multiplos de 14, pois $5C + 5T = 14Q$.

* Logo, não há apenas uma regra geral para se obter número inteiro de quadrados.
* Conforme as equações anteriores, temos múltiplos de 4, de 6, de 10 e de 14.

• $2C + T = 4Q$

• $C + 3T = 6Q$

• $3C + 4T = 10Q$

• $5C + 5T = 14Q$

• Além de multiplos de 34 = $11C + 13T = 34Q$

Figura 4.15: Conjecturas para soluções inteiras desenvolvida pelos alunos

Esperava-se ainda que com todas as discussões e conjecturas elaboradas, uma conclusão mais obvia aparecesse, mas não aconteceu. Pode-se dizer que ela é até intuitiva, podendo afirmar, claramente, que o número de quadrados para equilíbrio da balança nunca será impar, para uma quantidade de círculos e triângulos inteiros. Pode até ser que observaram, porém faltou indicar na conclusão da atividade.

Aspectos positivos e negativos da atividade

Os aspectos positivos desta atividade foram, sem sombra de dúvidas, o empenho que os alunos tiveram, pelo número de tentativas que realizaram até afirmar algo sobre a questão. Inicialmente atribuindo valores numéricos às figuras na tentativa de encontrar alguma relação entre elas e seus valores. Na formulação de perguntas a respeito da situação, bem como na forma de expressar a solução algebricamente.

Os aspectos negativos a se destacar são: a demora em perceber o que poderia ser feito diante da situação apresentada; a ausência de confiança e criatividade para elaborar alternativas de resolução; a deficiência em compreender e traduzir a língua materna para a linguagem algébrica; o desinteresse de alguns alunos.

Diante disso a metodologia utilizada no desenvolvimento da atividade mostrou-se bastante eficiente na questão da aprendizagem e no compartilhamento de ideias, pois a mesma levou os alunos a refletir sobre possibilidades de resolução de uma situação e também puderam perceber a aplicabilidade de alguns conteúdos matemáticos, como números inteiros e racionais, equações e sistema linear de equações, em uma simples atividade visual e de comparação.

4.3 Atividades de Investigação sobre Mágicas e Adivinhações

Neste grupo de questões procuramos trazer algumas brincadeiras com álgebra envolvendo mágicas e adivinhações. Estas atividades não fazem parte da coletânea de questões propostas pela Obmep. Nestas questões, a finalidade principal é fazer com que o aluno utilize letras para escrever expressões que traduzem a resolução das situações descritas de maneira simples e eficaz.

Nas próximas três questões, as atividades apresentadas são do tipo que deixam os alunos muito curiosos em verificar por quê estes casos de adivinhações que envolvem operações matemáticas dão certo. Os principais objetivos são de:

- instigar os alunos à discussão, fazer com que se sintam detetives/investigadores, a fim de encontrarem um caminho para o resultado, refazendo e conjecturando a sequência de operações informadas;
- apresentar uma solução algébrica que generalize a situação;
- fazer com que percebam as operações matemáticas e suas inversas;
- equacionar algebricamente uma ideia.

4.3.1 Brincadeira de adivinhar o resultado final

Essa brincadeira é comum. A questão envolve descobrir o resultado final após uma sequência de operações matemáticas

Questão: Truque com número.

1) Pense em um número de 1 a 9.
2) Multiplique por 2.
3) Some 10.
4) Divida o resultado por 2.
5) Subtraia esse resultado pelo número que você pensou no passo 1.

O resultado deu 5, não foi? Tente com outro número.

Como isso é possível?

Vamos tentar explicar matematicamente o resultado?

Relato da aplicação e desenvolvimento da atividade

Esta atividade foi desenvolvida em duas turmas: no 2º ano e no 4º ano do curso de formação de docentes, ambas do ensino médio. Na turma do 2º ano com mais sucesso, ou seja, houve uma maior discussão entre os alunos. Primeiramente foi feita a brincadeira com eles, uns demonstraram surpresos com o resultado outros sem reação, indiferentes. Repetiu-se a brincadeira conforme descrita na atividade, surgiram questionamentos e afirmações:

– *Como é possível?*

– *Tem truque aí!*

Com isso foi entregue a atividade para que, individual ou em grupos, a explorassem e verificassem quais eram os truques presentes na brincadeira de adivinhação. Solicitamos para que descreverem suas descobertas e para explicarem algebricamente a situação.

Algumas conclusões da investigação, descrita pelos alunos:

– *O que determina o resultado é o número adicionado.* (passo 3);

– *O número escolhido é transformado em 0 (zero), o que sobra é o número adicionado dividido por 2, (10:2 = 5).* (Figura 4.16).

– *Porque se tirar o número 10, o resultado fica nulo. O que faz sobrar o 5 é o 10.*

– *Concluímos então que números maiores que 9, também a conta dá certo.*

– *Ao mudarmos o item 3 para some 20, o resultado final é alterado.*

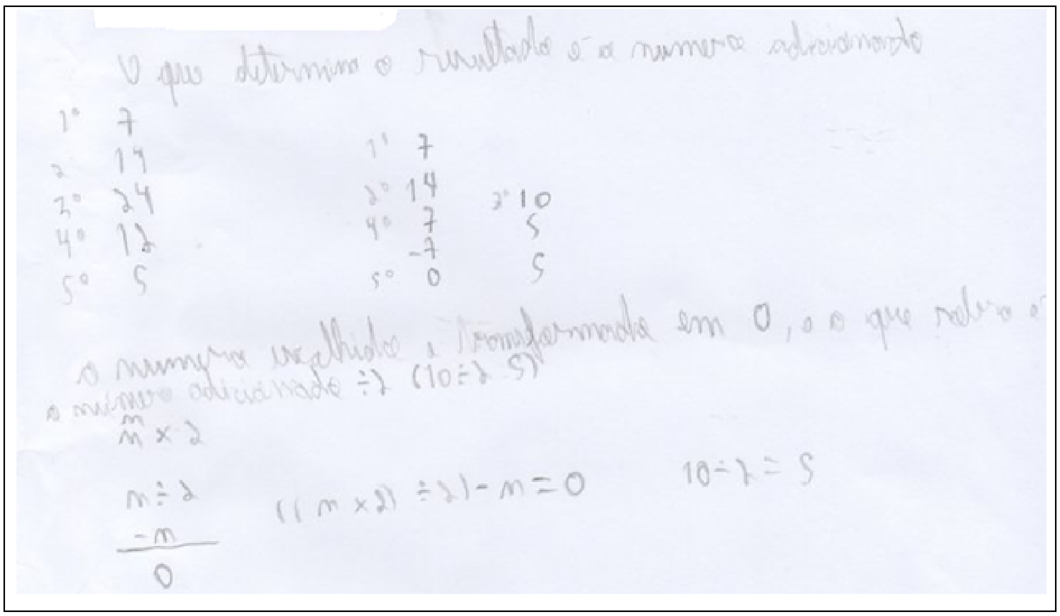
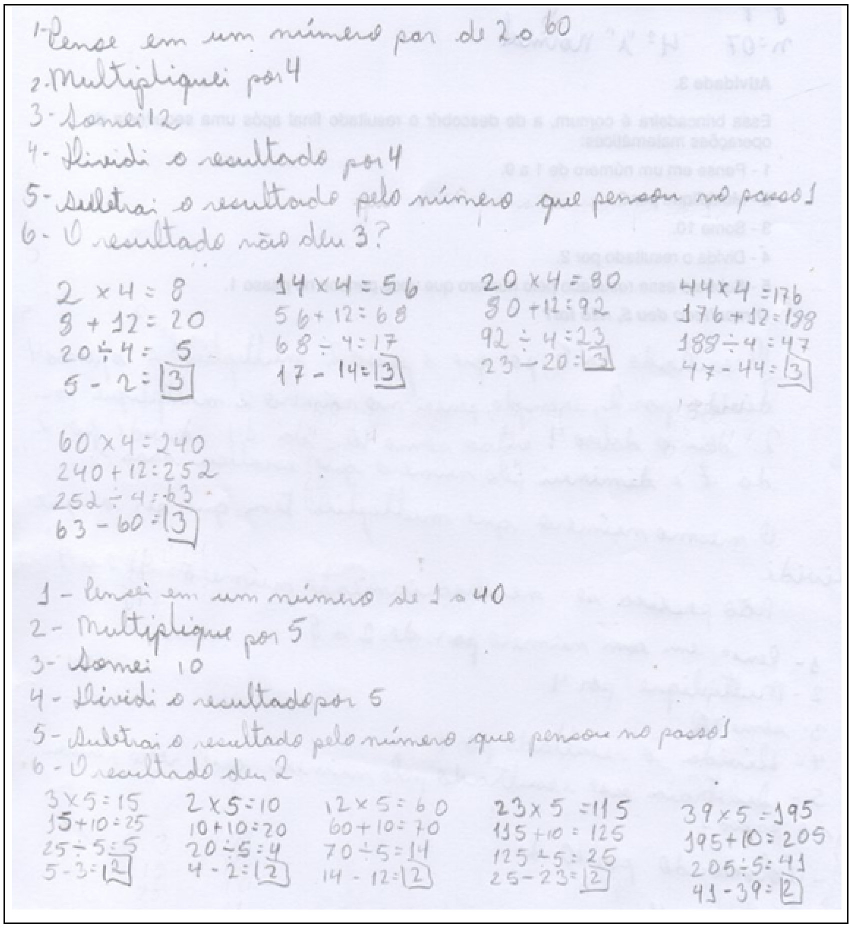


Figura 4.16: O 3º passo - desenvolvida pelos alunos

Um dos alunos criou uma sequência de operações para se obter um resultado diferente. Apresentou à turma, as sequências em que o passo 1 são números diferentes de 1 a 9 e com o resultado final diferente de 5 (figura 4.17).

– *Se trocássemos o número 10 do 3º passo por outro número, sempre vai dar a metade do número, pois o passo 1 cancela o passo 5, o passo 2 cancela o passo 4, sobrando o passo 3 que me fez pensar isso.* (Figura 4.18).

Quanto ao desenvolvimento da representação algébrica da situação (figura 4.19), não houve muitas dificuldades para defini-la. Após alguns testes, chegou-se a algumas conclusões. A parte interessante é que as incógnitas escolhidas foram bem identificadas.



1- Pense em um número par de 2 a 60
2- Multipliquei por 4
3- Somei 12
4- Dividi o resultado por 4
5- Subtrai o resultado pelo número que pensou no passo 1
6- O resultado não deu 3?

2 × 4 = 8
8 + 12 = 20
20 ÷ 4 = 5
5 - 2 = $\boxed{3}$

14 × 4 = 56
56 + 12 = 68
68 ÷ 4 = 17
17 - 14 = $\boxed{3}$

20 × 4 = 80
80 + 12 = 92
92 ÷ 4 = 23
23 - 20 = $\boxed{3}$

44 × 4 = 176
176 + 12 = 198
189 ÷ 4 = 47
47 - 44 = $\boxed{3}$

60 × 4 = 240
240 + 12 = 252
252 ÷ 4 = 63
63 - 60 = $\boxed{3}$

1 - Pensei em um número de 1 a 40
2 - Multiplique por 5
3 - Somei 10
4 - Dividi o resultado por 5
5 - Subtrai o resultado pelo número que pensou no passo 1
6 - O resultado deu 2

3 × 5 = 15
15 + 10 = 25
25 ÷ 5 = 5
5 - 3 = $\boxed{2}$

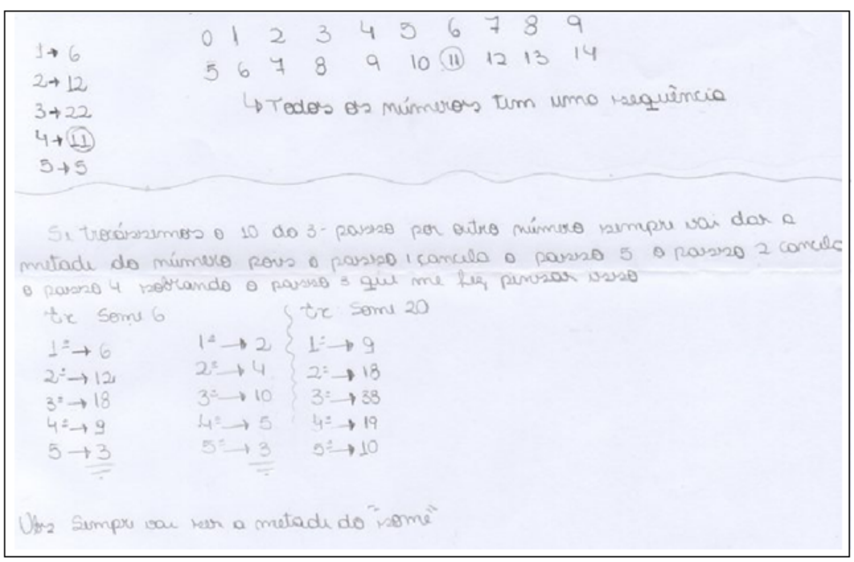
2 × 5 = 10
10 + 10 = 20
20 ÷ 5 = 4
4 - 2 = $\boxed{2}$

12 × 5 = 60
60 + 10 = 70
70 ÷ 5 = 14
14 - 12 = $\boxed{2}$

23 × 5 = 115
115 + 10 = 125
125 ÷ 5 = 25
25 - 23 = $\boxed{2}$

39 × 5 = 195
195 + 10 = 205
205 ÷ 5 = 41
41 - 39 = $\boxed{2}$

Figura 4.17: Resultado final diferente de 5 - desenvolvida pelos alunos



1 → 6
2 → 12
3 → 22
4 → 11
5 → 5

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
↳ Todos os números tem uma sequência

Se trocássemos o 10 do 3- passo por outro número sempre vai dar a metade do número pois o passo 1 cancela o passo 5 o passo 2 cancela o passo 4 sobrando o passo 3 que me fez pensar isso

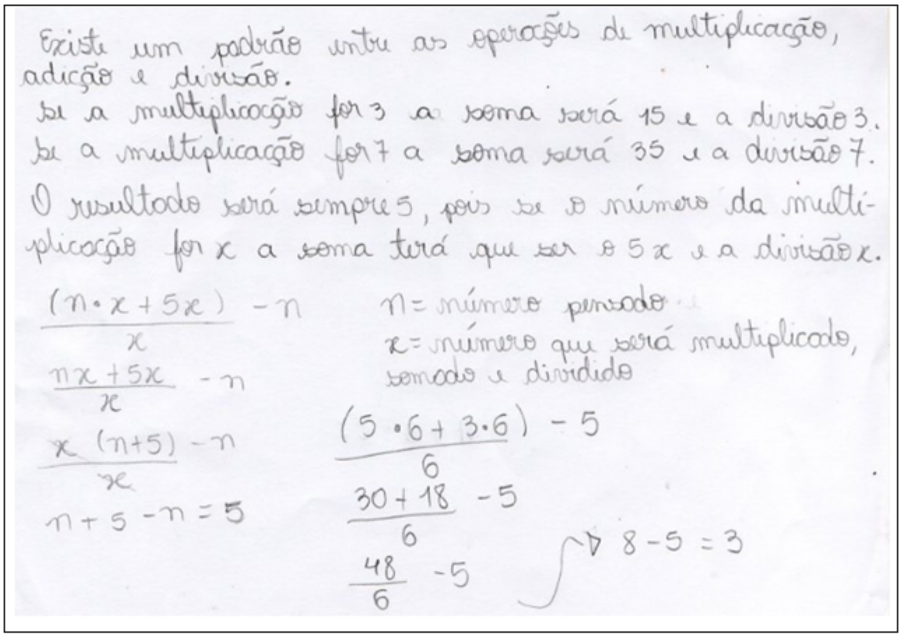
se somo 6
1º → 6
2º → 12
3º → 18
4º → 9
5 → 3

1º → 2
2º → 4
3º → 10
4º → 5
5º → 3

se somo 20
1º → 9
2º → 18
3º → 38
4º → 19
5º → 10

Obs: Sempre vai ser a metade do "some"

Figura 4.18: O passo 3 determina o resultado final - desenvolvida pelos alunos



Existe um padrão entre as operações de multiplicação, adição e divisão.
Se a multiplicação for 3 a soma será 15 e a divisão 3.
Se a multiplicação for 7 a soma será 35 e a divisão 7.
O resultado será sempre 5, pois se o número da multiplicação for x a soma terá que ser o $5x$ e a divisão x.

n = número pensado
x = número que será multiplicado, somado e dividido

$$\frac{(n \cdot x + 5x)}{x} - n$$

$$\frac{nx + 5x}{x} - n$$

$$\frac{x\,(n+5)}{x} - n$$

$$n + 5 - n = 5$$

$$\frac{(5 \cdot 6 + 3 \cdot 6)}{6} - 5$$

$$\frac{30 + 18}{6} - 5$$

$$\frac{48}{6} - 5 \rightarrow 8 - 5 = 3$$

Figura 4.19: Expressão algébrica - desenvolvida pelos alunos

Conforme a figura 4.20, a representação algébrica ficou de forma muita clara. Foi definida como pensamento algébrico. Vê-se nitidamente que, independente do número escolhido, o resultado final será o que o proponente quiser.

Construção da equação geral, através do raciocínio algébrico:

Passo 1) Seja x o número pensado.

Passo 2) Seja n o número multiplicado com x, o que se obtém nx.

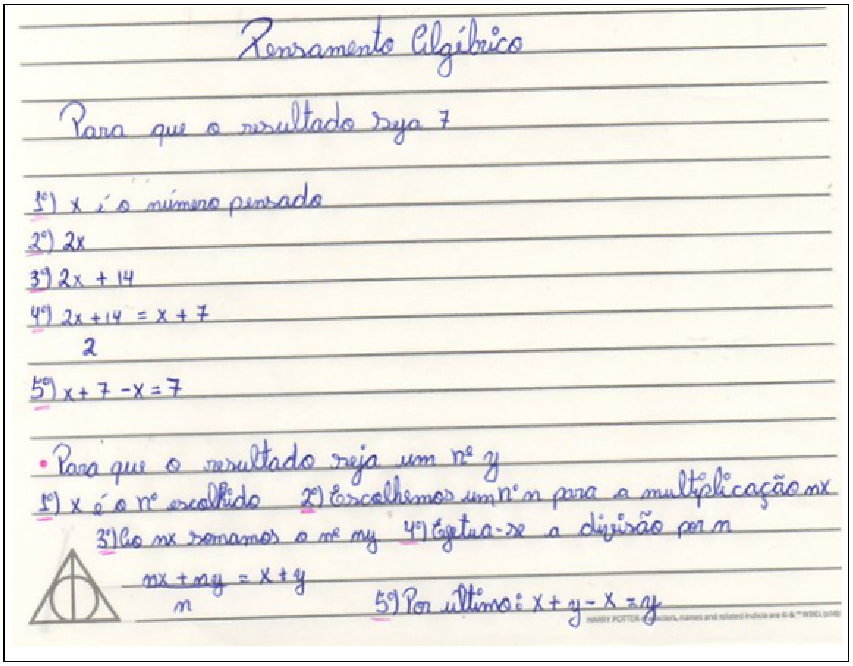
Passo 3) A escolha do número a somar dependerá do valor que se quer obter como resultado final. Seja esse resultado y, logo o número a somar deverá ser ny.

Passo 4) Deve-se dividir o resultado obtido, $nx + ny$, pelo número multiplicado no passo 2, isso é, por n. Assim, $\dfrac{(nx + ny)}{n}$, resultará em $x + y$.

Passo 5) Subtraia do resultado o número pensado no passo 1. Logo: $x + y - x = y$.

Dessa forma chega-se ao resultado esperado.

Com isso, percebe-se que não é tão mágico assim, basta um pouco de conhecimento de álgebra e manipular com as operações matemáticas.



Pensamento Algébrico

Para que o resultado seja 7

1º) x é o número pensado

2º) 2x

3º) 2x + 14

4º) $\frac{2x+14}{2} = x + 7$

5º) x + 7 − x = 7

• Para que o resultado seja um nº y

1º) x é o nº escolhido 2º) Escolhemos um nº n para a multiplicação nx

3º) Ao nx somamos o nº ny 4º) Efetua-se a divisão por n

$\frac{nx+ny}{n} = x + y$ 5º) Por último: x + y − x = y

Figura 4.20: Pensamento algébrico - desenvolvida pelos alunos

4.3.2 Brincadeira que resulta no dia, mês e ano de seu aniversário

Questão: Descobrindo a data de nascimento.

> Escreva o dia e o mês de seu nascimento um ao lado do outro, formando um número. Não considere o zero à esquerda. Por exemplo, quem nasceu no dia 05 de outubro irá escrever 510. Faça as seguintes operações na sequência:
>
> 1) Multiplique esse número por 2.
> 2) Ao resultado, some 5.
> 3) Multiplique o número que encontrou por 50.
> 4) Subtraia do resultado o número 250.
> 5) Adicione ao resultado encontrado os dois últimos dígitos do ano em que nasceu.
>
> Que número você encontrou?
> Faça agora essa mesma brincadeira com seus colegas.
> Observou algo curioso?

Podemos até nem pensar muito a respeito dos motivos que levaram ao resultado encontrado. Mas o interessante é investigar matematicamente como isso acontece. Qual ou quais regras matemáticas estão presente nessa situação?

4.3.3 Mágica com Dominós

Questão: Descobrindo os números da peça do dominó.

O mágico Magimático diz para uma pessoa que está na plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

1) Multiplicá-lo por 5;
2) Somar o resultado anterior com 15;
3) Multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente,
4) Somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e o Magimático impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

Agora é com você!
Escolha uma ou se preferir mais peças, pegue um dos números e efetue as sequências de operações pedidas pelo Magimático.

Relato da aplicação da atividade Mágica com Dominós

A atividade é novamente uma sequência de operações matemáticas, cujo objetivo principal é fazer com que os alunos transforme-a em uma sequência de operações com elementos algébricos, ou seja, para que conjecture e desenvolva uma regra geral para explicar o truque do mágico. Fazendo isso, estarão descobrindo qual é o truque matemático presente na mágica.

A seguir alguns resultados apresentados pelos alunos:

A solução apresentada por um grupo de alunos conforme a figura 4.21, descreve como entenderam o truque.

– Com esses três resultados podemos concluir que há uma sequência onde 0 (zero) corresponde ao 30; 1 ao 40; 2 ao 50; 3 ao 60; 4 ao 70; 5 ao 80 e 6 ao 90, ou seja, ele decora a sequência e substitui no resultado. Exemplo, se o resultado for 34 ele vai chegar a conclusão de que um dos números é 0 (30) e o outro é 4 (último termo).

A solução mostrada na figura 4.22 apresenta o seguinte desenvolvimento para chegar a

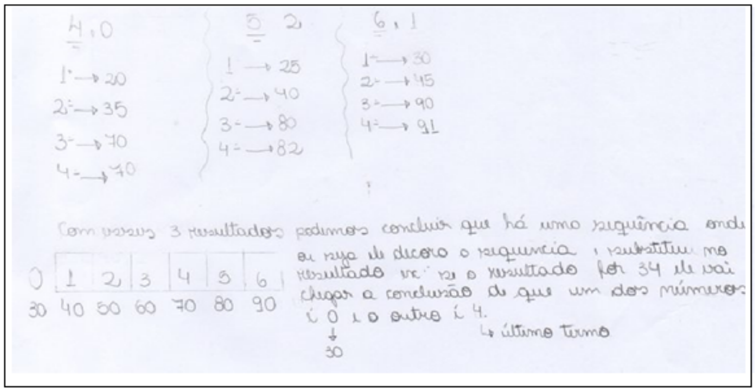


Figura 4.21: Entendendo o truque - desenvolvida pelos alunos

uma expressão algébrica:

– Cada número de 0 a 6, passando pelo processo: $(n.5+15)\cdot 2$ *terá um resultado específico, em que poderá diferenciá-lo do segundo número pelos fatores impostos pela multiplicação por 5 e depois a soma de 15 e mais a multiplicação por 2. Isso garante que qualquer número escolhido, ou o primeiro, será transformado em um número terminado em zero, e assim, o segundo número ocupará somente a casa da unidade.*

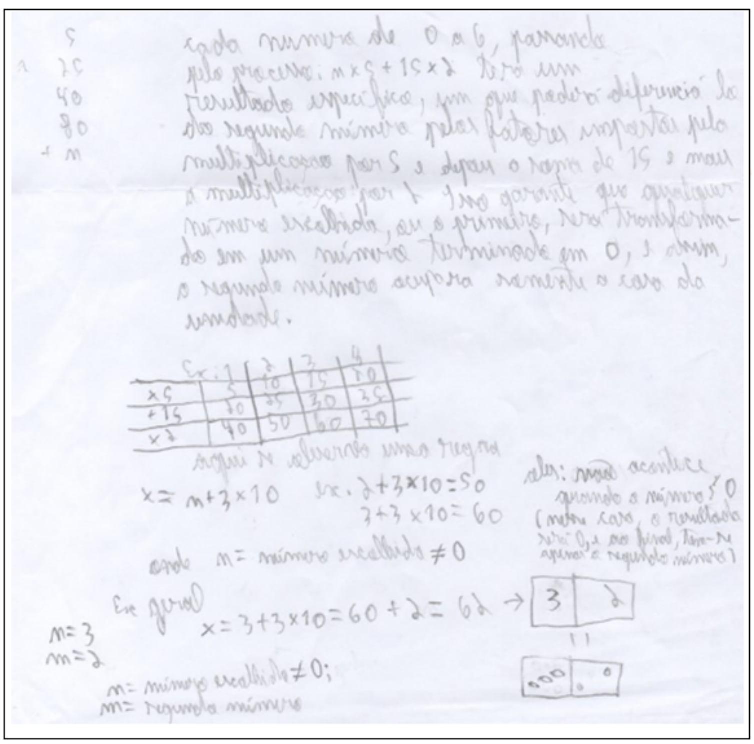


Figura 4.22: Exemplificando a mágica - desenvolvida pelos alunos

Pode-se observar ainda que o aluno comete alguns equívocos de raciocínio, quando tenta determinar uma regra geral, $x = (n+3)\cdot 10$, afirmando que só é válida se o primeiro número da peça escolhida for diferente de zero, ideia expressada na seguinte observação:

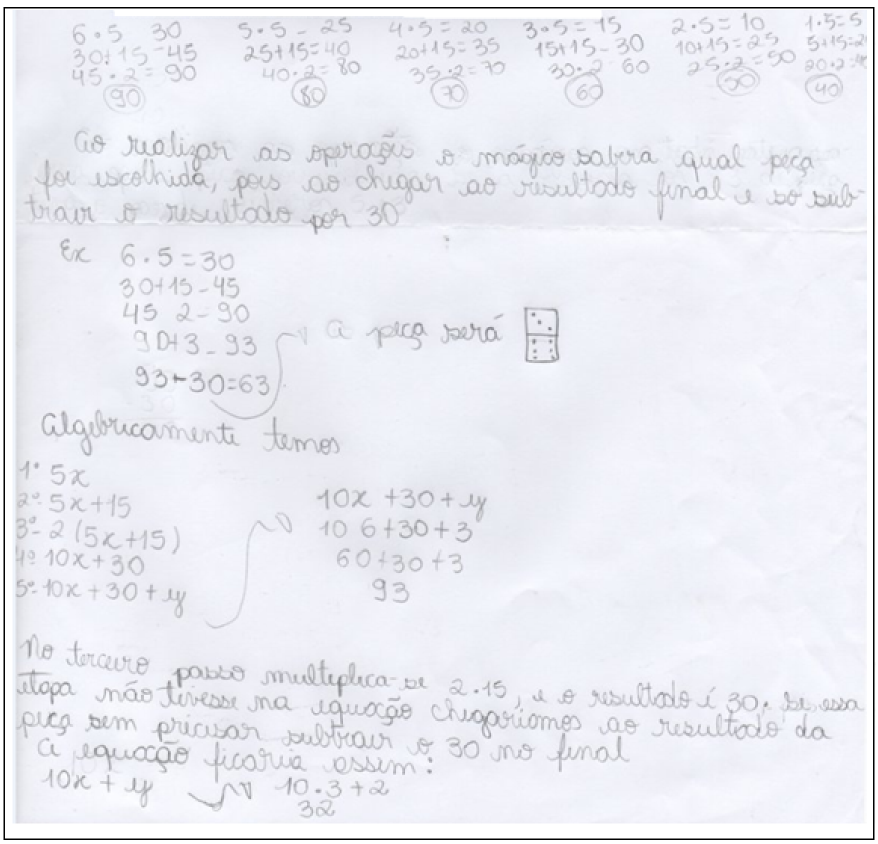
– não acontece quando o número é 0 (zero), (neste caso o resultado será 0 (zero), e ao final, tem-se apenas o segundo número).

Um grupo de alunos do 4º ano do curso profissionalizante de formação de docentes, após se empolgarem com a atividade e alguns testes, registrou as conclusões tiradas (figura 4.23):

– ao realizar as operações o mágico saberá qual peça foi escolhida, pois ao chegar ao resultado final é só subtrair o resultado por 30.

Apresentaram também a forma da expressão algébrica desenvolvida, com a seguinte explicação:

– no terceiro passo multiplica-se $2 \cdot 15 = 30$. *Se essa etapa não estivesse na equação chegaríamos ao resultado da peça sem precisar subtrair o número 30 no final. A equação ficaria assim:* $10x + y$.



6·5 30 / 30+15=45 / 45·2=90 / 90
5·5=25 / 25+15=40 / 40·2=80 / 80
4·5=20 / 20+15=35 / 35·2=70 / 70
3·5=15 / 15+15=30 / 30·2=60 / 60
2·5=10 / 10+15=25 / 25·2=50 / 50
1·5=5 / 5+15=20 / 20·2=40 / 40

ao realizar as operações o mágico saberá qual peça foi escolhida, pois ao chegar ao resultado final é só subtrair o resultado por 30

Ex 6·5=30
30+15=45
45·2=90
90+3=93
93−30=63 a peça será

Algebricamente temos
1° 5x
2° 5x+15
3° 2(5x+15)
4° 10x+30
5° 10x+30+y

10x+30+y
10·6+30+3
60+30+3
93

No terceiro passo multiplica-se 2·15, e o resultado é 30. Se essa etapa não tivesse na equação chegaríamos ao resultado da peça sem precisar subtrair o 30 no final
a equação ficaria assim:
10x+y
10·3+2
32

Figura 4.23: Expressando algebricamente o truque - desenvolvida pelos alunos

Após o desenvolvimento dos itens da atividade descritos acima, foi apresentada outra folha para a continuidade, agora com questões adicionais a serem respondidas.

(b) Sabendo que o resultado foi 62, como o mágico descobriu o número escolhido pelo membro da plateia?
(c) É possível ter 48 como resultado?
(d) Se o resultado tivesse sido n, como descobrir os números da peça escolhida?
(e) Tem como o resultado ser menor que 30?
(f) Descreva qual é a mágica usada pelo Magimático?

Ao fim da atividade os alunos chegaram à conclusão que a mágica poderia ser construída com outra sequência de números, porém preservando a multiplicação por 2 e por 5, ou seja, por 10. O que poderia ser diferente é o passo 2, somar 15 ao resultado anterior. A partir daí, o dobro deste número é que deveria ser subtraído do resultado para saber quais peças o expectador escolheu.

As atividades desenvolvidas neste grupo *Mágicas e Adivinhações*, trazem mais aspectos positivos que negativos para a aprendizagem da Álgebra. Consideramos satisfatório os resultados apresentados, mesmo esbarrando em algumas condições desfavoráveis para o desenvolvimento da atividade, tais como: sala de aula numerosa, alunos sem interesse e individualistas, pouco tempo e professor com pouca experiência para este tipo de metodologia. Mesmo assim, os discentes, à sua maneira, conseguiram discutir e melhorar algebricamente expressões que descrevem as situações genericamente, atingindo assim o objetivo proposto.

Sobre as condições desfavoráveis citadas acima, enfatizamos que em toda atividade em grupos proposta em sala de aula, sempre haverá contratempos para o professor. Ponte (2003), afirma que as tarefas de exploração e investigação assumem um papel importante na sala de aula, se o professor pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas. Segundo ele,

> [...] O interesse destas tarefas é por vezes desvalorizado com diversos argumentos: (i) a maior parte dos alunos não tem qualquer interesse por realizar explorações ou investigações matemáticas; (ii) os alunos têm dificuldade em perceber como investigar; (iii) antes de poderem investigar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos; e (iv) a actividade do aluno e a do matemático são necessariamente muito diferentes, porque não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, e que o faz coagido pelo sistema de ensino. (p.12).

Nesse sentido, reiteramos o quão importante é o papel do professor em todo o processo de aplicação dessa metodologia. Ele precisa se manter atento às discussões, fomentando-as seguidamente, se necessário, ter um papel de bússola, para se ter um resultado favorável em uma atividade de investigação em sala de aula.

4.4 Atividades de Investigação sobre Padrões de Sequências Numéricas

Nesse grupo de questões procuramos abordar a generalização de padrões de sequências numéricas. São abordadas atividades de exploração de figuras geométricas que envolvem sequências numéricas. O objetivo delas é fazer com que, através das observações realizadas pelos alunos, eles consigam verificar padrões, conjecturar relações e tenham a percepção de relacioná-los com os conteúdos matemáticos, além de apresentarem propriedades, soluções e chegar a uma generalização, como a lei de formação da sequência ou da soma de sua série, mesmo utilizando-se das fórmulas matemáticas para as sequências numéricas PA e PG.

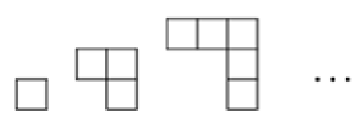
4.4.1 Somando pecinhas

Questão retirada e adaptada do Banco de Questões 2016, Nível 1 – Obmep

Questão: Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.

16 ***Somando pecinhas***

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



(a) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

(b) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

(c) Observando o resultado do item b, calcule

$$2+4+6+\ldots+96+98+100.$$

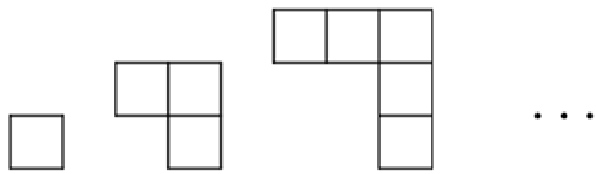
(d) Calcule

$$1+2+3+4+\ldots+97+98+99+100.$$

Figura 4.24: Sequência de Quadradinhos

Para tornar essa questão com maior campo de investigação, ou seja, mais exploratória possível, além das perguntas originais formam inseridas algumas perguntas, direcionando a atividade, a fim de que os alunos cheguem a uma expressão algébrica. (Figura 4.25).

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



a) Desenhe as pecinhas 4 e 5.

b) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

c) É possível saber o número de quadradinhos de qualquer pecinha? Descreva uma regra matemática que permite esse cálculo.

d) Qual é o número de quadradinhos que se obtém unindo as pecinhas 24 e 25?

e) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

f) É possível saber a soma dos quadradinhos da união de uma sequência de pecinhas? De que forma?

g) Observando o resultado do item (e), calcule 2 + 4 + 6 + ... + 96 + 98 + 100.

h) Calcule a seguinte soma: 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100.

Figura 4.25: Sequência de Quadradinhos - Questão adaptada

Relato da aplicação e desenvolvimento da atividade

Esta atividade referente a padrões numéricos foi aplicada aos alunos do 2º ano do ensino médio para que a explorassem. Inicialmente apenas com a letra (a). A princípio acharam muito fácil, pois era só desenhar as próximas duas pecinhas, porém, foi observado que a sequência de pecinhas era contínua. A partir daí foram colocadas algumas perguntas para dar sequência à exploração. *(b) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50? (c) É possível saber o número de quadradinhos de qualquer pecinha? Descreva uma regra matemática que permite esse cálculo.*

Para o desenvolvimento das duas questões acima percebemos que alguns alunos utilizaram algumas maneiras não formais para encontrar a solução, muito interessantes. Enquanto que outros perceberam que a sequência era uma Progressão Aritmética, então utilizaram-se de suas propriedades para resolver da forma convencional, com fórmulas.

No recorte abaixo, o grupo apresenta a solução da letra (b), observando que sempre a composição dos lados das pecinhas com um quadradinho em comum aos esses lados. Na letra (c), ele descreve o raciocínio utilizado anteriormente. Que é possível encontrar o número de quadradinhos de qualquer pecinha, pois: – *é preciso considerar apenas o número da peça e multiplica-lo por 2, depois diminui 1.*

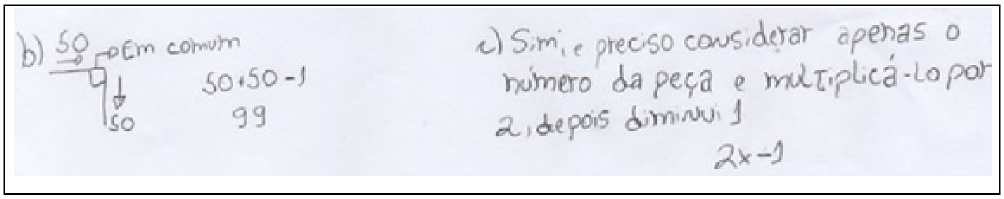


Figura 4.26: Resolução das letras (b) e (c) - desenvolvida pelos alunos

No desenvolvimento mostrado na (figura 4.27), o aluno destaca o seguinte: – *a sequência que se apresenta é uma progressão aritmética, pois a cada pecinha se aumenta 2 quadrados.* E ainda, – *a soma das pecinhas sempre será o dobro menos 1.*

Na primeira parte nota-se que o aluno descreve uma situação de recorrência de primeira ordem, porém não a representa algebricamente. Isso talvez aconteça pelo fato de que acostumou-se sempre a *"fazer de acordo com o modelo"*.

Representamos aqui essa expressão algébrica, que seria da forma: $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2.}$

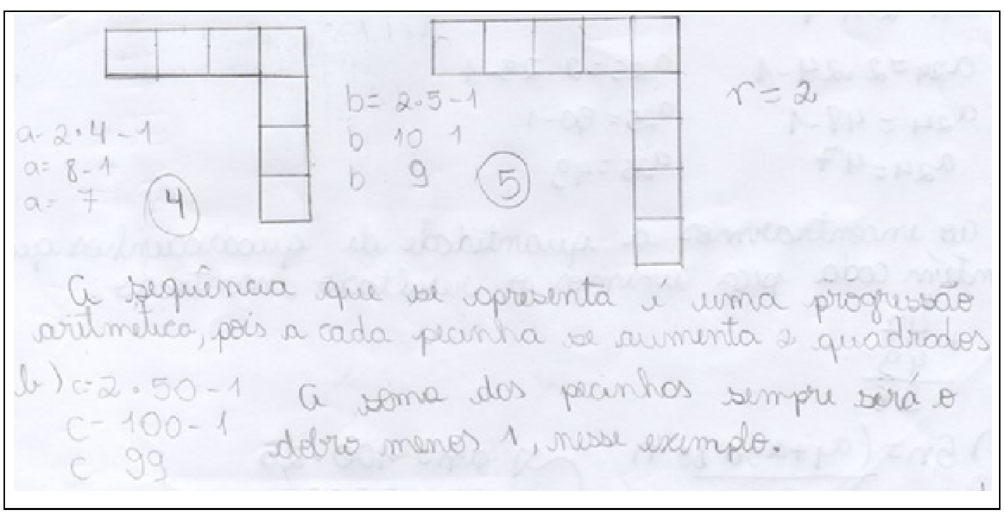


Figura 4.27: Resolução pela fórmula geral da PA - desenvolvida pelos alunos

Em outra questão proposta: – *(É possível saber a soma dos quadradinhos da união de uma sequência de pecinhas? De que forma?)*; os alunos tiveram um pouco mais de dificuldades, porém foi dado o direcionamento a eles com a dica – *para construírem as somas parciais:*

as duas primeiras, depois as três primeiras, depois as quatro primeiras e, assim por diante, observando o padrão das somas. O objetivo era que encontrassem uma forma algébrica para a soma dos quadradinhos de qualquer número de pecinhas e consequentemente uma regra geral para a soma de uma sequência crescente dos números ímpares.

Um dos grupo de alunos apresentou como fazer essa soma (figura 4.28):

– *Sim, pois juntando a pecinha 1 e 2, fica* $2 \cdot 2$*; juntando as pecinhas 1, 2 e 3 fica* $3 \cdot 3$*; juntando as pecinhas 1, 2, 3 e 4 fica* $4 \cdot 4$ *e assim por diante. Juntando todas a pecinhas que se quer, fica (lado)·(lado).*

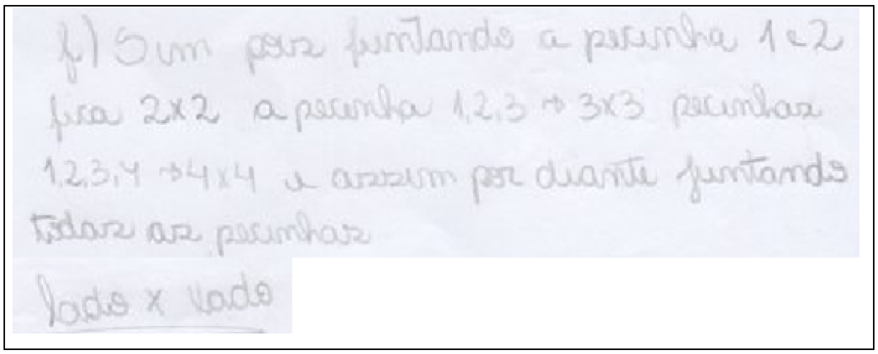

f) Sim pois juntando a pecinha 1 e 2
fica 2x2 a pecinha 1,2,3 → 3x3 pecinhas
1,2,3,4 → 4x4 e assim por diante juntando
todas as pecinhas
lado x lado

Figura 4.28: Soma da união das pecinhas - desenvolvida pelos alunos

Uma das perguntas era para encontrar quantos quadradinhos tinham na união das primeiras 50 pecinhas. Neste caso, um dos grupos de alunos conseguiu escrever algebricamente a forma de calcular, (figura 4.29):

– *a soma das peças vai sempre ser a área do quadrado formado, ou seja,* n^2.

– *sim, fazendo o número da peça elevado ao quadrado =* n^2.

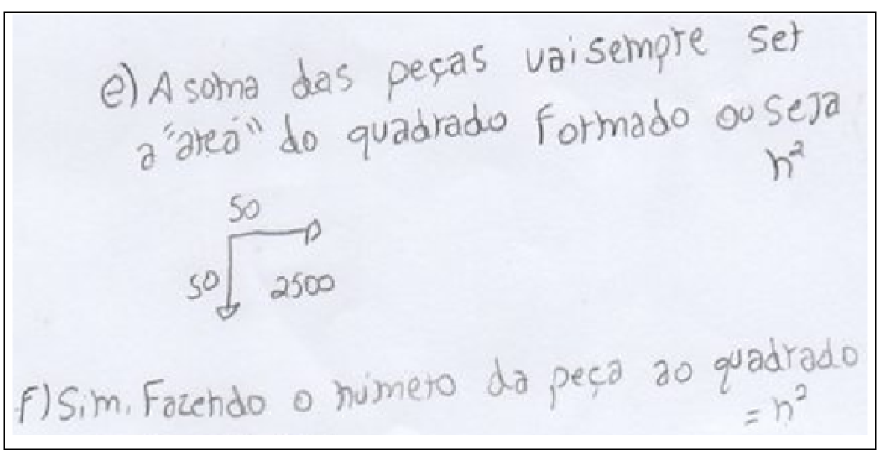

e) A soma das peças vai sempre ser
a "área" do quadrado formado ou seja
n^2
50
50 2500
f) Sim. Fazendo o número da peça ao quadrado
$= n^2$

Figura 4.29: Forma algébrica para a soma das pecinhas - desenvolvida pelos alunos

Observamos que nesta atividade houve uma participação muito boa dos alunos. Eles se envolveram mais no seu desenvolvimento e a atividade cumpriu muito bem o seu objetivo de exploração e generalização da situação apresentada, ou seja, chegar a conclusão que a soma de uma sequência de números ímpares iniciando de 1 é o quadrado do número de termos. Os alunos desenvolveram a investigação sem muitos problemas. Podemos afirmar que isso ocorreu porque essa turma já tinha adquirido um pouco de conhecimento sobre sequências numéricas e já haviam realizado atividades de investigação matemática.

4.4.2 Quadrados preenchidos com quadradinhos

Essa questão (figura 4.30) foi retirada do concurso de vestibular da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

Questão original: Considere a sequência de figuras, na qual a área do primeiro quadrado é S. Qual a soma de todas as áreas sombreadas de sequência?

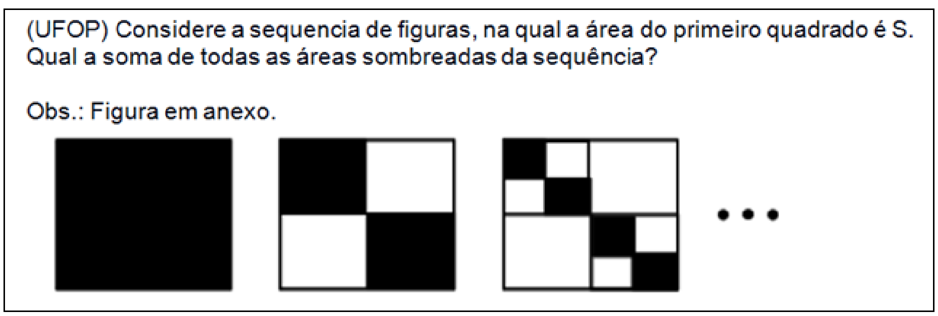


Figura 4.30: Quadradinhos sombreados - Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/4201984

Para atividade de investigação aplicada em sala de aula, ela foi adaptada com alguns questionamentos, apresentados gradativamente, para desenvolvimento dos alunos.

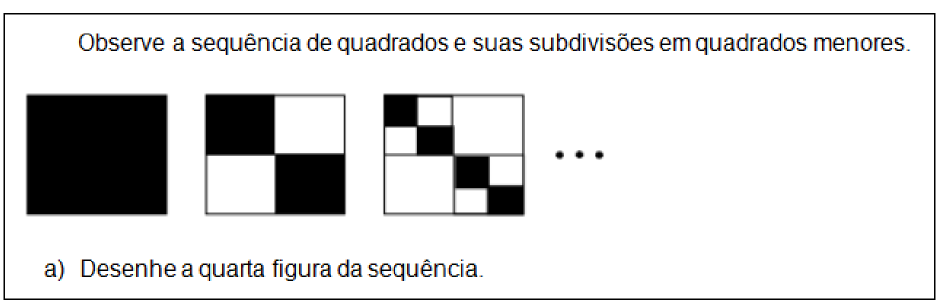


Figura 4.31: Construção da próxima figura - Pergunta adaptada

Esta atividade de investigação matemática foi desenvolvida com os alunos do segundo ano do ensino médio e com os acadêmicos do primeiro período do Curso de Licenciatura em Matemática. A atividade tem como principal objetivo fazer com que os alunos explorem a sequência de figuras, que são quadrados divididos em quadradinhos, uns sombreados, outros não, percebendo padrões de sequências numéricas e suas propriedades. O conteúdo a ser explorado é o de Progressão Geométrica, espera-se que observem e desenvolvam as fórmulas pertinentes e suas propriedades matemáticas, deste o termo geral até a soma da PG com razão maior que 0 (zero) e menor que 1 (um).

As próximas perguntas, "direcionadas", foram lançadas para que os alunos dessem continuidade na investigação.

Considere a área do primeiro quadrado igual a 1.

(b) É possível saber quanto vale a área sombreada da figura 4. Descreva como você fará.

(c) Enumerando as áreas sombreadas dos quadrados, descreva o que se observa.

(d) Se a sequência for infinita, conseguimos saber a soma total das áreas sombreadas? De que forma?

(e) Considere que o primeiro quadrado tenha área igual a 4. É possível determinar a soma de todas as áreas sombreadas da sequência. Tente descobrir esse valor.

(f) Agora, considere que o primeiro quadrado tenha área igual a S. Qual é a soma de todas as áreas sombreadas da sequência infinita?

Relato da aplicação e desenvolvimento da atividade

A princípio a atividade entregue aos alunos era composta apenas de três figuras, conforme questão original. A partir daí sugeriu-se para que construíssem mais uma ou duas figuras da sequência, se possível. A surpresa foi que alguns alunos não perceberam como continuar a sequência, ou seja, não entenderam como se construía a próxima figura com algumas partes sombreadas. Outros perceberam rapidamente que a parte sombreada se tratava de uma sequência de áreas que formavam uma progressão geométrica. Pode-se observar isso, nos desenvolvimentos abaixo (figuras 4.32 e 4.33):

No desenvolvimento apresentado na figura 4.33, a aluna descreveu o que se observou: *– a sequência do quadrado negro se divide em dois quadrados, um branco e um preto. – A razão dos quadrados negros é igual a* $\frac{1}{2}$*, logo, tem-se a* $PG = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots)$ *dos quadrados negros.*

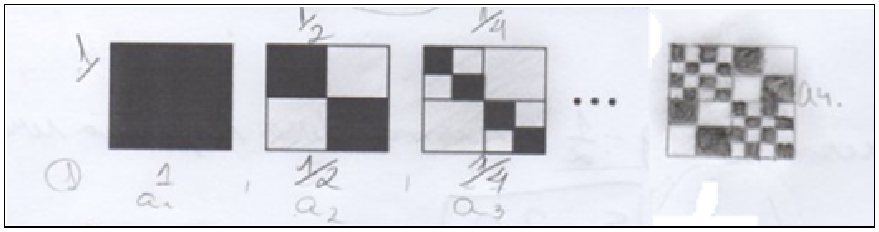


Figura 4.32: Quarta figura errada - desenvolvida pelos alunos

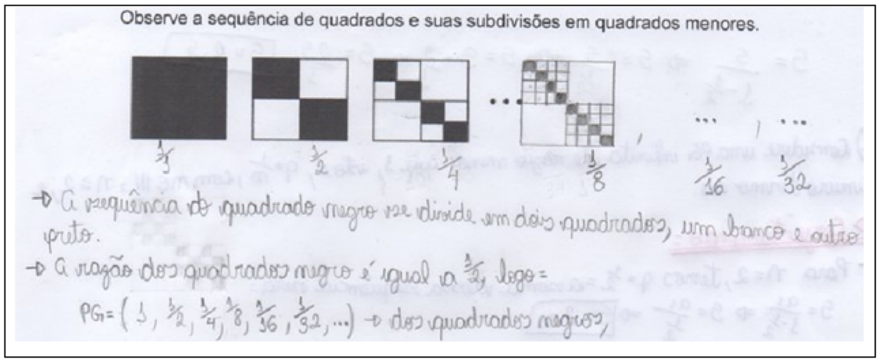


Figura 4.33: A área sombreada forma uma PG - desenvolvida pelos alunos

Na figura 4.34, o aluno observou o aumento da quantidade de quadradinhos, porém não percebeu ou não descreveu que, a cada figura da sequência, a área sombreada do quadrado se torna cada vez menor. Suas conclusões sobre os quadradinhos sombreados:

– *É uma PG onde os quadrados negros se multiplicam.*

– *Razão* $\frac{1}{2} = 0,5$.

– *A área sombreada é* $\frac{1}{8}$ *do quadrado, continuando a PG.*

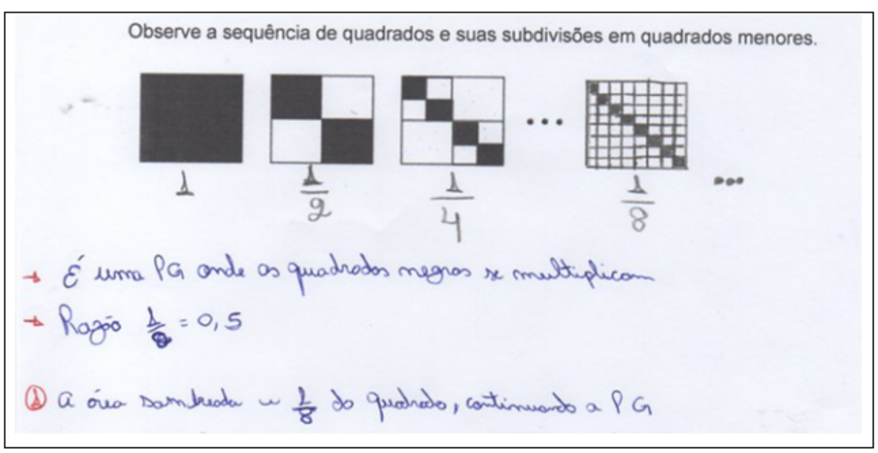


Figura 4.34: PG de razão 0,5 - desenvolvida pelos alunos

A partir das observações iniciais, foi se inserindo outras perguntas aos alunos. *(– Qual é a área sombreada das 3 primeiras figuras? E da área não sombreada?)*

Para a solução, alguns grupos fizeram o cálculo direto, somando uma a uma, além de apresentar o desenho correspondente, conforme figura 4.35.

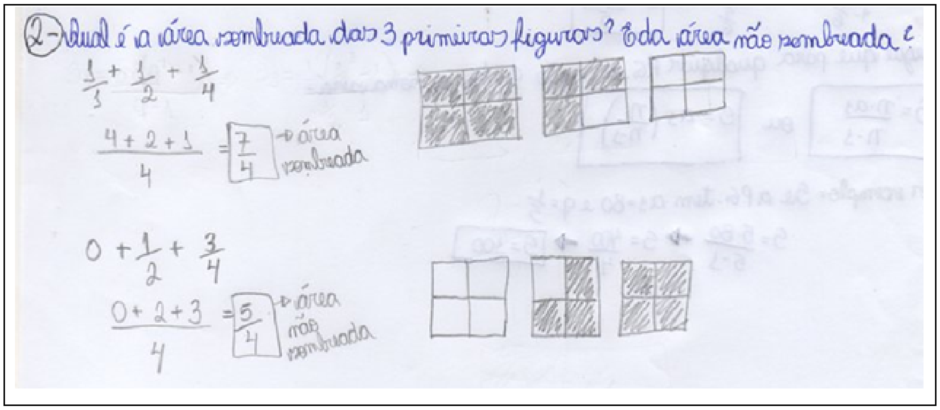


Figura 4.35: Área sombreada e área não sombreada - desenvolvida pelos alunos

Outra pergunta foi a seguinte: *(– Se a sequência de quadrados for infinita, é possível a soma de todas as áreas sombreadas? Descreva como).*

Aqui, apareceram as ideias, o diálogo e as dúvidas que foram muitas, citamos algumas:

– Não tem como somar, é infinita essa soma.

– Acho que não dá. Como vamos tirar o mínimo de infinitas frações?

– Acho que somando aos poucos deve aparecer um padrão, daí fica fácil.

– Professor! Se é infinita, como se soma uma coisa infinita.

– Pesquisem sobre soma dos temos de uma PG infinita, encontrem uma forma.

Instantes depois conseguiram a fórmula da soma para este tipo de PG, a partir daí as respostas dos alunos foram um *"sim"* unânime. Utilizaram a fórmula da soma de uma PG infinita e concluíram que a soma é igual a 2.

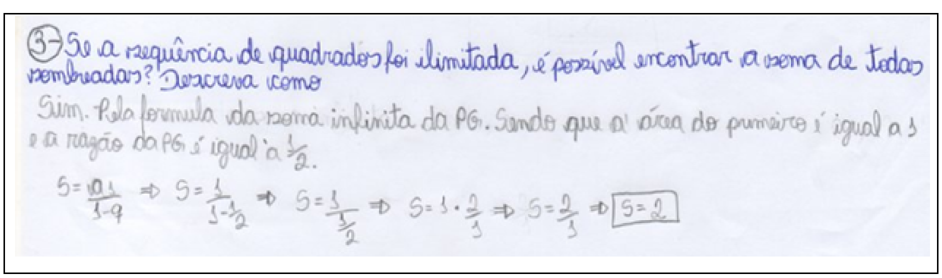
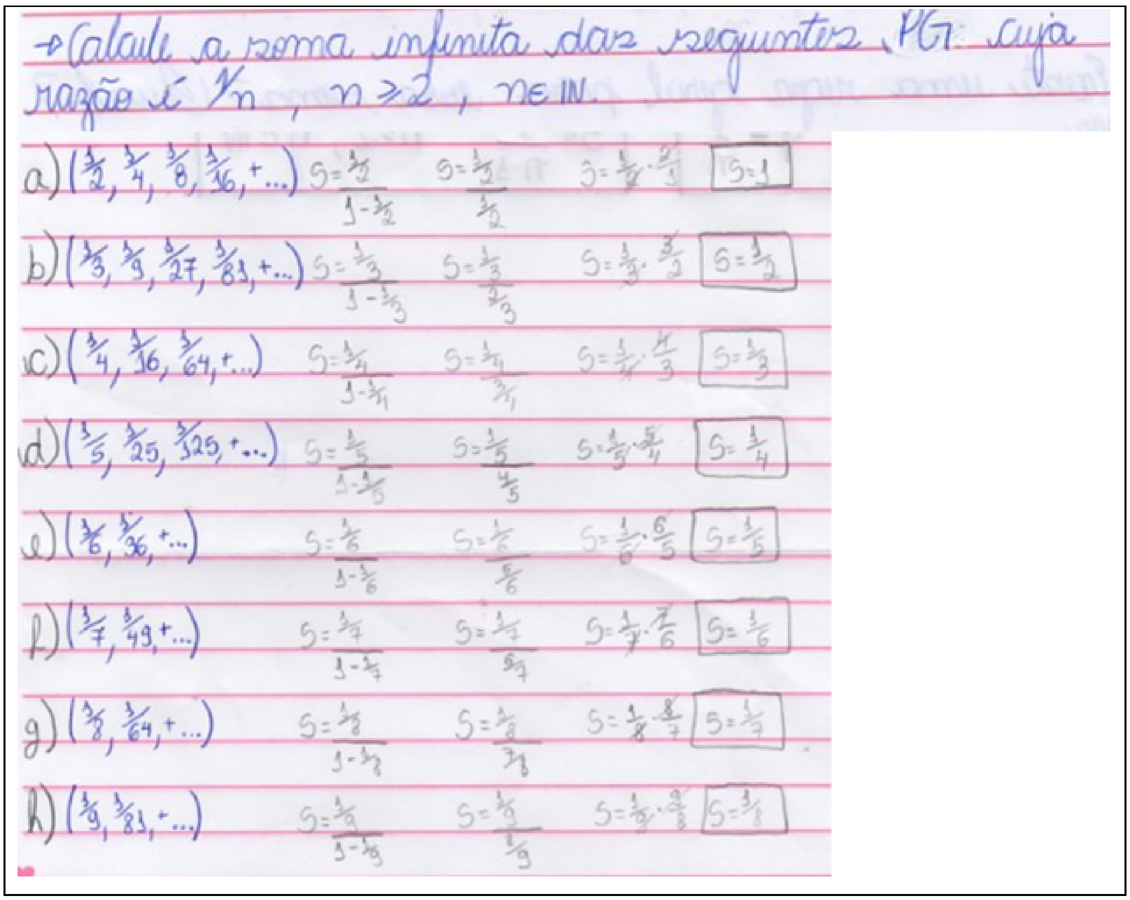


Figura 4.36: Soma dos termos da PG infinita 1 - desenvolvida pelos alunos

Na continuidade desta atividade, aproveitei a oportunidade para que os alunos expandissem mais o conhecimento sobre esse tipo de sequência numérica. Propondo então a seguinte questão, com oito itens (figura 4.38):

– Calcule a soma das PG's infinitas, cuja razão é $\frac{1}{n}$***, com*** $2 \leq n \leq 9$***,*** $n \in N$***. A seguir descreva o que você concluiu a respeito destas somas.***

Os alunos apoiados na fórmula do termo geral $S = \frac{a_1}{1-q}$, para a soma da PG infinita, de razão maior que 0 (zero) e menor que 1 (um), fizeram os cálculos e descreveram o que concluíram da forma como apresentado nos resultados obtidos (figura 4.37):


→ Calcule a soma infinita das seguintes PG cuja razão é $1/n$, $n \geq 2$, $n \in IN$.

a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, + \ldots)$ $S = \frac{1/2}{1-1/2}$ $S = \frac{1/2}{1/2}$ $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}$ $\boxed{S = 1}$

b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, + \ldots)$ $S = \frac{1/3}{1-1/3}$ $S = \frac{1/3}{2/3}$ $S = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}$ $\boxed{S = \frac{1}{2}}$

c) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, + \ldots)$ $S = \frac{1/4}{1-1/4}$ $S = \frac{1/4}{3/4}$ $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$ $\boxed{S = \frac{1}{3}}$

d) $(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, + \ldots)$ $S = \frac{1/5}{1-1/5}$ $S = \frac{1/5}{4/5}$ $S = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4}$ $\boxed{S = \frac{1}{4}}$

e) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, + \ldots)$ $S = \frac{1/6}{1-1/6}$ $S = \frac{1/6}{5/6}$ $S = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5}$ $\boxed{S = \frac{1}{5}}$

f) $(\frac{1}{7}, \frac{1}{49}, + \ldots)$ $S = \frac{1/7}{1-1/7}$ $S = \frac{1/7}{6/7}$ $S = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{6}$ $\boxed{S = \frac{1}{6}}$

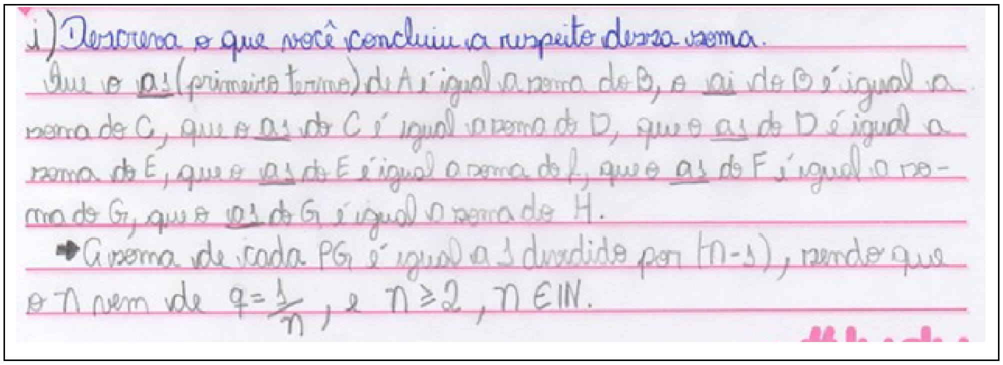
g) $(\frac{1}{8}, \frac{1}{64}, + \ldots)$ $S = \frac{1/8}{1-1/8}$ $S = \frac{1/8}{7/8}$ $S = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7}$ $\boxed{S = \frac{1}{7}}$

h) $(\frac{1}{9}, \frac{1}{81}, + \ldots)$ $S = \frac{1/9}{1-1/9}$ $S = \frac{1/9}{8/9}$ $S = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8}$ $\boxed{S = \frac{1}{8}}$

Figura 4.37: Soma dos termos da PG infinita 2 - desenvolvida pelos alunos

Conclusão da observação feita no desenvolvimento das somas infinitas.

– Concluímos que o primeiro termo do item (a) é igual a soma dos infinitos termos do item (b); o primeiro termo do item (b) é a soma dos infinitos termos do item (c); o primeiro do item (c) é a soma dos infinitos termos do item (d), e assim por diante. A soma de cada PG é igual a, 1 dividido por (n – 1), sendo que o n vem de $q = \frac{1}{n}$ *com* $n \geq 2, n \in N$. (Figura 4.38).



i) Descreva o que você concluiu a respeito dessa soma.
Que o a_1 (primeiro termo) de A é igual a soma de B, o a_1 de B é igual a soma de C, que o a_1 de C é igual a soma de D, que o a_1 de D é igual a soma de E, que o a_1 de E é igual a soma de F, que o a_1 de F é igual a soma de G, que o a_1 de G é igual a soma de H.
→ A soma de cada PG é igual a 1 dividido por $(n-1)$, sendo que o n vem de $q=\frac{1}{n}$, e $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Figura 4.38: Conclusão das somas infinitas - desenvolvida pelos alunos

Na sequência do desenvolvimento da atividade foi sugerido para que encontrassem uma maneira de generalizar a soma para sequências deste tipo, na seguinte pergunta:

– ***Existe uma regra geral para esta soma? Qual?***

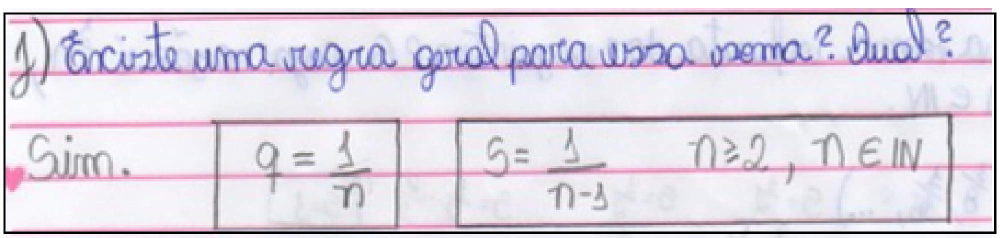
Diante disso, as reações dos alunos foram:

– *Nossa isso não acaba mais*

– *Eu estou gostando, porque estou entendendo.*

– *Se conseguimos fazer tudo isso, pode mandar mais.*

O resultado foi muito bom, pois descreveram afirmativamente que sim, destacando a forma algébrica para fazer esra soma, $\boxed{S = \frac{1}{n-1}, \text{ com } n \geq 2,\ n \in N.}$

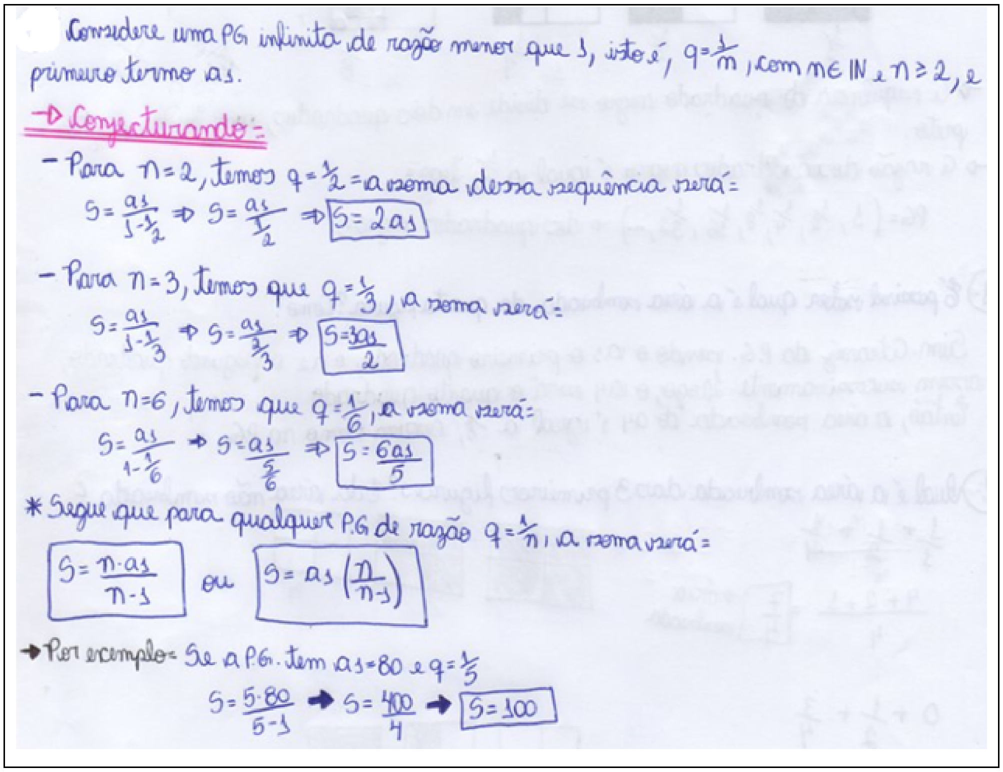


j) Existe uma regra geral para essa soma? Qual?
Sim. $\boxed{q=\frac{1}{n}}$ $\boxed{S=\frac{1}{n-1} \quad n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}}$

Figura 4.39: Regra geral da soma - desenvolvida pelos alunos

A questão proposta seguinte foi para encontrar uma fórmula algébrica para a soma de qualquer tipo de sequência com essa característica, ou seja, com razão maior que zero e menor que um. Após várias tentativas e testes, além da intervenção do professor pedindo para considerar o primeiro termo algébrico e não numérico como já estavam fazendo, conseguiram apresentar a fórmula geral:

$$\boxed{S = \frac{n.a_1}{n-1} \Rightarrow S = a_1\left(\frac{n}{n-1}\right)}.$$


Considere uma PG infinita de razão menor que 1, isto é, $q = \frac{1}{m}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$, e primeiro termo a_1.

→ Conjecturando:

– Para $n = 2$, temos $q = \frac{1}{2}$ = a soma dessa sequência será:

$S = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S = \frac{a_1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{S = 2a_1}$

– Para $n = 3$, temos que $q = \frac{1}{3}$, a soma será:

$S = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow S = \frac{a_1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{S = \frac{3a_1}{2}}$

– Para $n = 6$, temos que $q = \frac{1}{6}$, a soma será:

$S = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{6}} \Rightarrow S = \frac{a_1}{\frac{5}{6}} \Rightarrow \boxed{S = \frac{6a_1}{5}}$

* Segue que para qualquer PG de razão $q = \frac{1}{n}$, a soma será:

$\boxed{S = \frac{n \cdot a_1}{n-1}}$ ou $\boxed{S = a_1 \left(\frac{n}{n-1}\right)}$

→ Por exemplo: Se a PG tem $a_1 = 80$ e $q = \frac{1}{5}$

$S = \frac{5 \cdot 80}{5 - 1} \rightarrow S = \frac{400}{4} \rightarrow \boxed{S = 100}$

Figura 4.40: Fórmula algébrica para a soma de PG infinita - desenvolvida pelos alunos

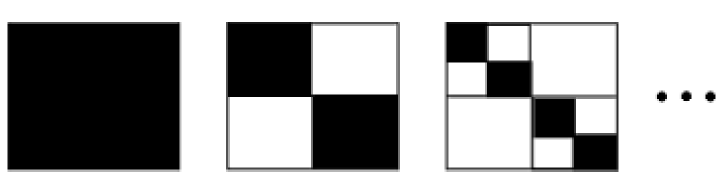
Nesta questão também foi discutido a respeito da fórmula da soma, para quando a razão for menor que um, do tipo $q = \frac{m}{n}$ com $n > m$ e $n, m \in N$.

A conclusão que se chegou foi de que a regra não iria mudar muito, pois, teríamos:

$$\boxed{S = a_1.(\frac{m}{n-m})}.$$

Os resultados alcançados com a investigação matemática feita para essa atividade foi muito proveitosa. Com isso, como havia tempo disponível, voltou a questão inicial dos quadrados subdivididos com quadradinhos menores e parte sombreada, com a seguinte questão proposta:

– ***Para a sequência infinita de quadrados encontre uma fórmula geral para a soma da área dos quadradinhos em branco, ou seja, os não sombreados.***



Novamente os alunos:

– *Agora é impossível, não tem jeito.*

– *É verdade, se antes com os quadradinhos pretos deu 2, agora é infinito.*

Daí a intervenção do professor:

– *vocês estão certos, vamos encontrar uma fórmula para calcular a área não sombreada de um número finito de quadrados, por exemplo, 10, 40, 100, 200, etc.*

Para essa questão foi sugerido que iniciassem as somas com um número reduzido e observassem o padrão, se houvesse algum.

– *Para os três primeiros quadrados já temos o valor, agora basta aumentarmos mais um.*

– *Vixi, vamos demorar um monte!*

– *Deve ter um fórmula mais fácil, sempre tem. Professor!... Tem uma fórmula pra gente usar? Para calcular os quadradinhos pretos?*

Com a resposta afirmativa, foi repassado na lousa a fórmula para a soma de n termos de uma PG,

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Então surgiram algumas conjecturas e a regra descrita. No entanto, fizeram poucos cálculos e concluíram. Ao fim foi solicitado que escrevessem de forma mais clara, conforme recorte abaixo, (figura 4.41), pois tinham feito um rascunho muito mal organizado.

Uma parte dessas anotações está descrita abaixo:

– *Como* $a_1 = 1$ *e* $q = \frac{1}{2}$, *fazendo n igual ao número de quadrados, temos que para* $n = 3$*;* $\frac{7}{4}$ *área sombreada e* $\frac{5}{4}$ *área branca*

– *Para 10 quadrados, ou seja,* $n = 10$, *tem-se* $1,99804$ *de área sombreada e* $8,00196$ *de área branca".*

– *Para 20 quadrados, ou seja,* $n = 20$, *tem-se* $1,99999093$ *de área sombreada e* $18,00000191$ *de área branca.*

– *Concluimos que quanto maior for o número de quadrados,a área spmbreada fica próximo de 2 e a área branca fica duas unidades a menos.*

– *Podemos escrever a área sombreada como:* $n - 2$.

Como $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, fazendo n igual ao nº de quadrados
temos que para $n=3$; $\frac{7}{4}$ área sombreada e $\frac{5}{4}$ área branca
Pela fórmula $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, calculamos a área
sombreada, daí pega o total de quadrados e desconta
a área calculada, o que sobra é a região não sombreada

Para 10 quadrados, ou seja, $n=10$.

$$S_{10} = \frac{1((\frac{1}{2})^{10}-1)}{\frac{1}{2}-1} \rightarrow S_{10} = \frac{\frac{1}{1024}-1}{-\frac{1}{2}} \rightarrow S_{10} = \frac{2046}{1024} = 1,99804...$$

Então temos $10 - 1,99804 = 8,00196$ de área branca.

Para 20 quadrados: $S_{20} = \frac{1((\frac{1}{2})^{20}-1)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{1048576}-1}{-\frac{1}{2}} \rightarrow S_{20} = \frac{2097150}{1048576} \rightarrow$

$S_{20} = 1,999998093$. Então temos de área não sombreada
$20 - 1,999998093 = 18,00000191$.

Concluímos que quanto maior for o número de quadrados,
a área sombreada fica próximo de 2 e a área branca
fica 2 unidade a menos. Podemos escrever a área não-
sombreada como: $n-2$.

Figura 4.41: Fórmula algébrica para a soma de PG infinita 2 - desenvolvida pelos alunos

Essa última questão, poderia ser explorada um pouco mais. Poderia, por exemplo, ser feita uma introdução inicial sobre limite, no caso, para expressar algebricamente a soma da região não sombreada, conforme a apresentação a seguir.

Seja n o número de quadrados utilizados para calcular a área da região não sombreada. Como a área da região não sombreada é igual ao número de quadrados subtraído da área da região sombreada do total de quadrados utilizados.

Fazendo $S = a_1.(\frac{q^n-1}{q-1})$, *a área sombreada e S' a área não sombreada dos n primeiros quadrados, temos que:*

$$S = 1.(\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{(\frac{1}{2})-1}) \Rightarrow S = \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow S = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Assim,

$$S' = n - S \Rightarrow S' = n - (2 - \frac{1}{2^{n-1}}) \Rightarrow S' = n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Agora para n relativamente grande, ou seja, n tendendo ao infinito ($n \to \infty$), aplicando limite na soma S, obtemos que $\frac{1}{2^{n-1}}$ tende a zero, então:

$$lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) = 2 - 0 = 2.$$

E, portanto,

$$\boxed{S' = n - S = n - 2}$$

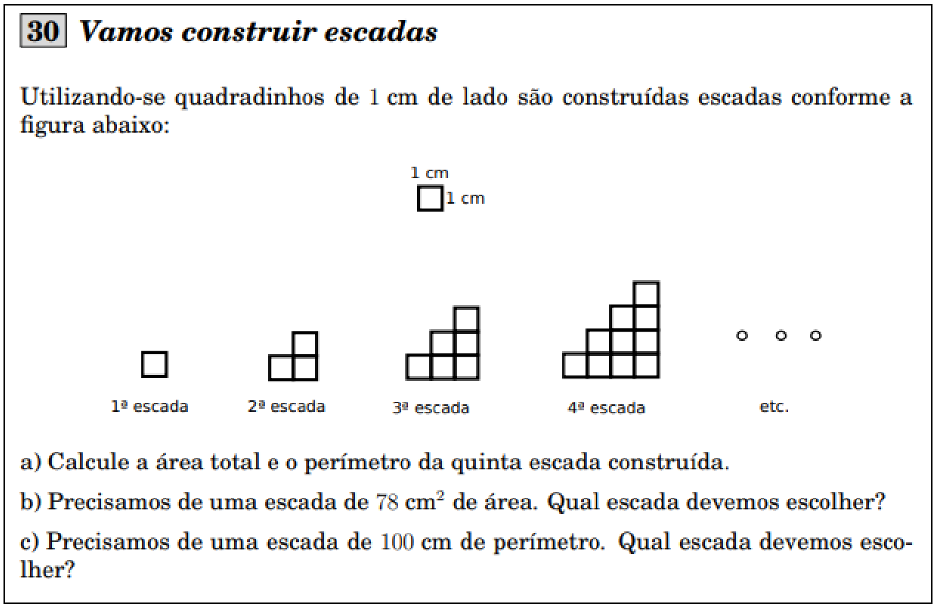
.

As atividades deste grupo, sobre sequências numéricas, foram muito ricas e relevantes para a aquisição de conhecimento por parte dos alunos, pois foram colocados numa posição de reflexão e exploração da atividade e a desempenharam muito bem. Destaca-se que o empenho da grande maioria deles fora benéfico para o aprendizado. Uma vez que discutindo alternativas para resolver uma questão, pesquisando e questionando, fizeram com que ao final fosse encontradas soluções algébricas para as situações propostas. Às vezes com a ajuda do professor, tanto dando dicas como direcionando a investigação, conseguiram descrever elementos e propriedades a respeito do conteúdo presente na atividade, diferentemente de se aplicar o conteúdo, atribuir fórmulas e fazê-los responder um questionário, tais como siga o modelo, de forma mecânica.

4.4.3 Construindo escadas

Questão retirada do Banco de Questões 2013, da Obmep, nível 1.

Questão: Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura 4.42.


30 ***Vamos construir escadas***

Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:

a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída.

b) Precisamos de uma escada de 78 cm^2 de área. Qual escada devemos escolher?

c) Precisamos de uma escada de 100 cm de perímetro. Qual escada devemos escolher?

Figura 4.42: Fonte: Banco de Questões da Obmep 2013

A questão foi adaptada para atividade de investigação acrescentando mais alguns questionamentos. O objetivo é levar o aluno a usar sua criatividade e perceber quais conteúdos matemáticos estão presentes na situação e suas propriedades, para que possam utilizar no desenvolvimento da sua resolução, bem como representar algebricamente regras que permitam calcular o perímetro e a área de qualquer figura da sequência. Porém, para esta pesquisa, a atividade não foi aplicada em sala de aula.

.

(a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída?

(b) Observe a sequência de escadas construídas com os quadradinhos e descreva algumas propriedades.

(c) Precisamos de uma escada com 100 cm de perímetro. Qual escada devemos escolher?

(d) Conjecture um regra matemáitca que generalize o perímetro de qualquer figura da sequência.

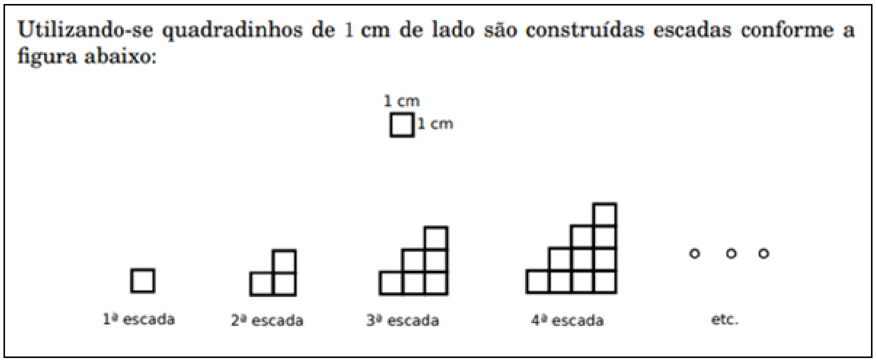


Figura 4.43: Construindo escadas - adaptada para investigação

(e) É possível ter uma escada com perímetro de 50 cm? Explique.

(f) Precisamos de uma escada com $78cm^2$ de área. Qual escada devemos escolher?

(g) Conjecture uma regra geral para efetuar o cálculo da área de qualquer escada da sequência.

(h) É possível ter uma escada com a área igual a $100cm^2$? Explique.

4.5 Atividades de Investigação sobre Relações em Tabelas Numéricas

As três questões seguintes abordam tabelas numéricas para a exploração do aluno, cujo objetivo é fazer com observem situações e propriedades matemáticas conjecturam regras, situações e descrevam algebricamente cada uma delas. Neste grupo a terceira atividade é a única que foi feito o relatório das respostas dadas pelos alunos. As duas primeiras estão colocadas na forma original e na forma que foram adaptadas para a atividade de investigação, porém não foi feita a análise da aplicação em sala de aula.

4.5.1 Tabela de Pitágoras

Questão retirada e adaptada de um concurso de Vestibular da Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ. (Figura 4.44)

Questão original: Calcule a soma de todos os números desta tabela até a vigésima linha.

Abaixo a atividade adaptada de forma exploratória para apresentar e desenvolver com os alunos.

(UERJ) Observe a tabela de Pitágoras.
Calcule a soma de todos os números desta tabela até a vigésima linha.

3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
...	...	...

Figura 4.44: Fonte: http://www.vestiprovas.com.br

Questão: Abaixo está a tabela de Pitágoras.

(a) Explore-a e anote as suas conjecturas e conclusões

3	4	5
6	8	10
9	12	15
12	16	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 4.45: Tabela de Pitágoras

(b) Quais são os números da vigésima linha?

(c) Qual é a soma dos números da 10ª linha?

(d) Em qual coluna está o número 64?

(e) O número 49 encontra-se nessa tabela?

(f) Colocando estes números em ordem crescente, qual é o centésimo número?

(g) Qual a soma de todos os números até a vigésima linha?

(h) Descreva uma forma algébrica para calcular a soma de qualquer número de linhas?

4.5.2 Identificando relações em tabelas

Questão: Explore regularidades matemáticas e identifique relações entre os números da seguinte tabela formada pelos números naturais dispostos, em ordem, em linhas com três colunas, ou seja, três números em cada linha:

0	1	2
3	4	5
6	7	8
9	10	11
12	13	14
⋮	⋮	⋮

Figura 4.46: Tabela de números naturais com 3 colunas

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
⋮	⋮	⋮	⋮

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Figura 4.47: Outras tabelas de números naturais com 4 e 5 colunas

(a) Registre as conclusões que vão observando.

(b) Há alguma relação entre as colunas?

(c) Verifique em cada tabela, onde se localizam os números primos.

(d) Em qual coluna se localiza o número 87 em cada tabela?

(e) Conjecture uma regra matemática para descobrir a coluna que se encontra qualquer número em qualquer tabela.

(f) Qual a soma dos números de cada tabela até a 5ª linha?

(g) Conjecture uma forma algébrica para calcular a soma de qualquer coluna ou qualquer quantidade de linha nas tabelas.

4.5.3 Quadrado medimágico

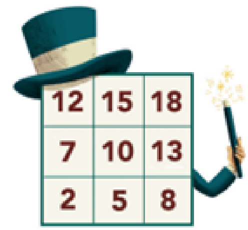
Essa questão foi retirada e adaptada da OBMEP 2016, Nível 3 - Segunda Fase.

Questão original: Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de medimágico quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

NÍVEL 3 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

1. Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de *medimágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.



a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja medimágico.

3		19
8		

b) O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

	7	
9	x	
		20

c) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9.

Figura 4.48: Fonte: Banco de Questões Obmep, 2016

Muitas das questões aplicadas na segunda fase da Olimpiada Brasileira de Matemática têm algumas características: são abertas; cada questão possui subitens, onde o primeiro item ou questionamento serve para verificar se o aluno entendeu o enunciado da questão; o segundo procura o entendimento de um determinado conceito matemático; outros itens buscam verificar a generalização desses conceitos e da situação proposta na questão. Nesse sentido, observa-se que essas questões tem cunho investigativo. São questões que, para responder, o aluno deve explorar e descrever conceitos matemáticos presente nelas, ou seja, deve construir matematicamente a sua resposta.

Para a utilização da questão como atividade exploratória de investigação, foram feitas as adaptações nas perguntas e aplicadas gradativamente, com a finalidade de tirar o máximo dos alunos. Primeiramente foi proposto aos alunos a questão conforme a figura 4.49.

Após um período de discussão entre os alunos e conforme a atividade era desenvolvida, foram colocadas aos alunos outras perguntas para que explorassem e tirassem suas conclusões.

Um quadriculado 3x3 preenchido com números inteiros é chamado de *medimágico* quando, em cada linha horizontal, vertical ou diagonal, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

De acordo com a definição acima:

a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja *medimágico*.

3		19
8		

b) Observe os quadriculados *medimágico* anteriores ou construa um próprio. Verifique e descreva algumas propriedades sobre a soma desses números.

Figura 4.49: Adaptada para investigação

(c) O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x?

	7	
9	x	
		20

Figura 4.50: Qual o valor central?

.

(d) Descreva a relação da soma de todos os números com o número central do quadriculado?

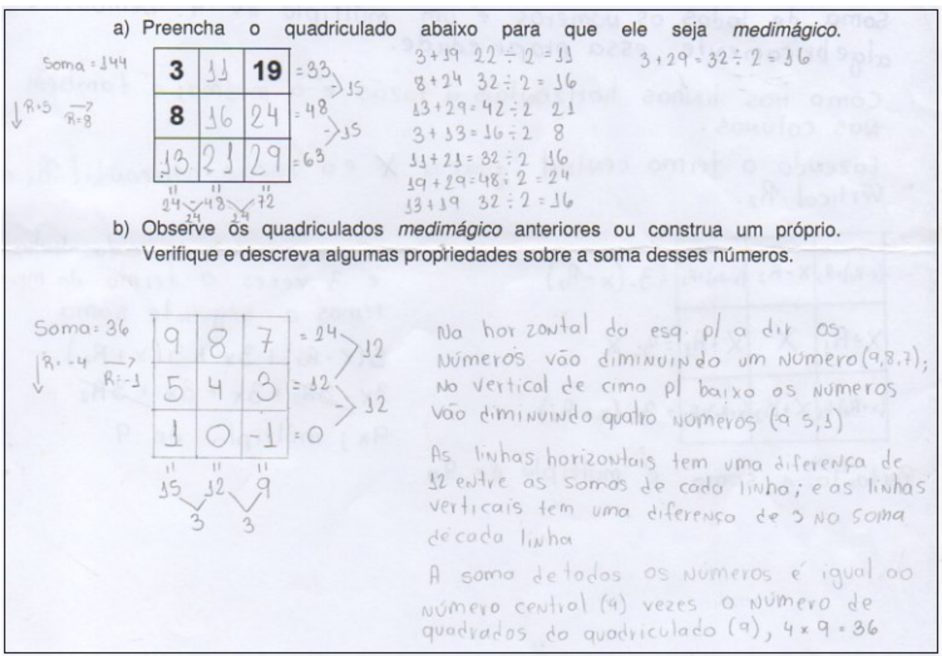
(e) Explique por que, em qualquer quadriculado medimágico, a soma de todos os números é um múltiplo de 9. Demonstre algebricamente essa propriedade.

(f) O valor central do quadriculado pode ser negativo? Explique.

Relato da aplicação e desenvolvimento da atividade

Esta atividade foi aplicada com os alunos da turma do programa Obmep na Escola, nível 3, composta por alunos da 1^a, 2^a e 3^a séries do ensino médio. Como eles estavam familiarizados com este tipo de metodologia, o desenvolvimento da atividade ocorreu de forma tranquila, sem muitas dúvidas.

As respostas dos itens (a) e (b) foram desenvolvidas sem grandes dificuldades, ou seja, sem muitos questionamentos e a constante validação por parte do professor de suas conclusões. No caso da pergunta do item (a), de completar o quadrado, este item tem o objetivo de verificar se o aluno entendeu o enunciado da questão. No item (b), foi solicitado para construir um quadrado diferente com as mesmas características. Este item busca verificar a criatividade dos alunos, a percepção e descrição de algumas propriedades (figura 4.51).


a) Preencha o quadriculado abaixo para que ele seja *medimágico.*

Soma = 144

3	11	19
8	16	24
13	21	29

3+19 22 ÷ 2 = 11
8+24 32 ÷ 2 = 16
13+29 = 42 ÷ 2 21
3+13 = 16 ÷ 2 8
11+21 = 32 ÷ 2 16
19+29 = 48 ÷ 2 = 24
13+19 32 ÷ 2 = 16
3+29 = 32 ÷ 2 = 16

b) Observe os quadriculados *medimágico* anteriores ou construa um próprio. Verifique e descreva algumas propriedades sobre a soma desses números.

Soma = 36

9	8	7
5	4	3
1	0	-1

Na horizontal do esq p/ a dir os números vão diminuindo um número (9,8,7); No vertical de cima p/ baixo os números vão diminuindo quatro números (9 5,1)

As linhas horizontais tem uma diferença de 12 entre as somas de cada linha; e as linhas verticais tem uma diferença de 3 no soma de cada linha

A soma de todos os números é igual ao número central (4) vezes o número de quadrados do quadriculado (9), 4 × 9 = 36

Figura 4.51: Construção de um quadrado medimágico - desenvolvida pelos alunos

Destacamos o desenvolvimento da atividade do item (b), o quadriculado e suas propriedades relacionadas aos termos de progressão aritmética:

– Na horizontal da esquerda para a direita os números vão diminuindo um número (9, 8, 7). Na vertical de cima para baixo os números vão diminuindo quatro números (9, 5, 1).

– As linhas horizontais tem uma diferença de 12 entre as somas de cada linha. As linhas verticais tem uma diferença de 3 na soma de cada linha.

– A soma de todos os números é igual ao número central (4) vezes o número do quadrado

do centro (9), $4 \cdot 9 = 36$.

No desenvolvimento abaixo foram observadas propriedades aritméticas para linhas e também diagonais.

– Razão: vertical = 5; horizontal = 8; diagonal A = 13; diagonal B = 13; diagonal de dois quadrados (entre 8 e 11) = 3 e (entre 21 e 24) = 3; diagonal de dois quadrados (entre 8 e 21) = 13 e (entre 11 e 24) = 13.

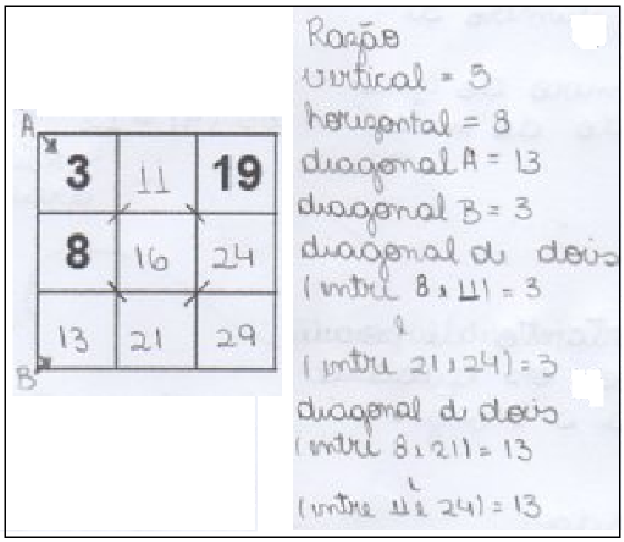


Figura 4.52: Propriedades do quadrado - desenvolvida pelos alunos

Nesta atividade, observamos que os alunos a compreenderam e a desenvolveram muito bem, com pouquíssimas dúvidas.

O item (c) – O quadriculado medimágico abaixo tem os números 7, 9 e 20 nas posições indicadas. Qual é o valor de x? – é uma pergunta de caráter fechado, ou seja, com uma única resposta, onde os alunos montaram as equações e resolveram o sistema construido pelo método de substituição.

	7	
9	x	
		20

.

Um aluno destaca que na posição que os quadrados estão preenchidos com os números 7, 9 e 20 outra propriedade na resolução: — *o número do centro sempre será* $\frac{1}{3}$ *(um terço)* *da soma do trio* (figura 4.53). Isto é, a média aritmética desses três valores. Afirmamos que isso é possível. pois neste caso, o valor do meio x é média aritmética dos números indicados, uma vez que eles se localizam simetricamente em relação a diagonal principal do quadrado.

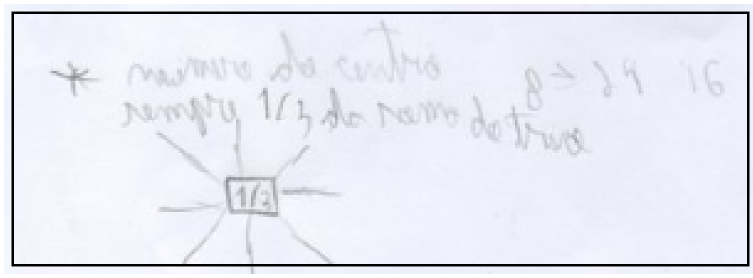


Figura 4.53: Valor de x - desenvolvida pelos alunos

O item (d) pede para relacionar a soma de todos os números presentes no quadriculado com o número central. Este item tem o objetivo de direcionar o aluno a representar algebricamente a propriedade da soma (figura 4.54).

(d) Descreva a relação da soma com o número central do quadriculado?

– A relação que o número do meio tem é que ele é a média de todos os números somados, em outras palavras, se somarmos todos os números de todos os quadrados e dividirmos peça quantidade dos mesmos, o resultado será o numero do quadrado do meio.

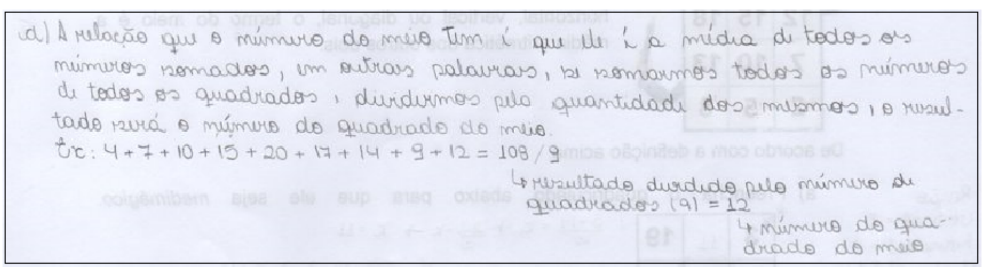


Figura 4.54: Relação do termo central com a soma - desenvolvida pelos alunos

O item (e) solicita a demonstração da propriedade da soma de todos os termos do quadrado medimágico.

Um dos grupos descreveu a propriedade, conforme a figura 4.55, da seguinte maneira:

– Porque o medimágico é 3x3, ou seja, tem 9 quadrados; portanto ele possui um quadrado central que é o resultado da soma de todos os quadrados divididos por 9; a soma de todos os quadrados é igual a 9 vezes o número do quadrado central. $9x = n$ *ou* $x = \frac{n}{9}$*, onde 9 é o numero de termos/quadrados; x é numero central; n é a soma de todos os termos/quadrados.*

Este mesmo grupo, com base nas propriedades de progressões aritméticas apresentou a seguinte expressão algébrica para a solução. (Figura 4.56).

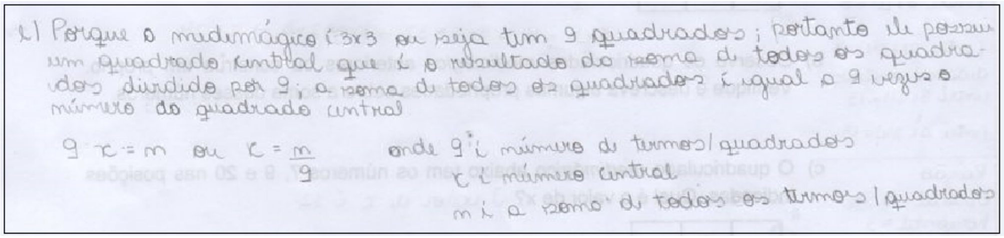


Figura 4.55: A soma é múltiplo de 9 - desenvolvida pelos alunos

– Como nas linhas horizontais a razão é a mesma; é também nas colunas. Fazendo o termo central igual a x e a razão horizontal R_1 e vertical R_2. Como a soma de cada linha é 3 vezes o termo do meio, temos a seguinte soma:

$3(x - R_2) + 3x + 3(x + R_2) = 3x - 3R_2 + 3x + 3x + 3R_2 = 9x$. *Portanto a soma é múltiplo de 9.*

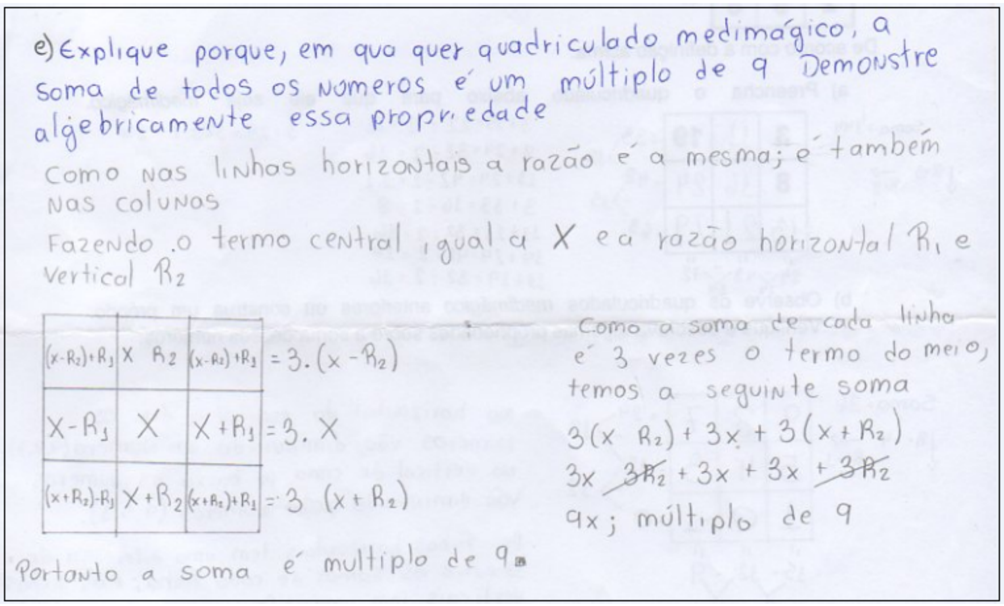


Figura 4.56: Expressão algébrica da Soma - desenvolvida pelos alunos

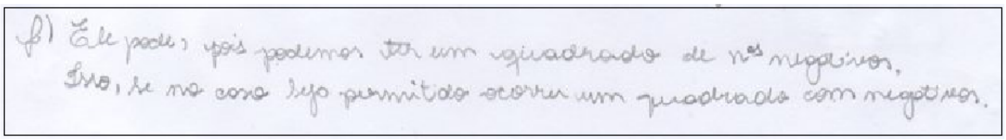
No item (f) é uma indagação para levar os alunos a outras possibilidades de completar o quadrado para que continue medimágico. A resposta a essa pergunta foi bem desenvolvida e ainda com exemplo, como mostra na figura 4.58.

(f) O valor central do quadriculado pode ser negativo? Explique.

Uma dessas respostas está descrita como mostra o recorte da figura 4.57.

– Ele pode, pois podemos ter um quadrado de números negativos. Isso se no caso seja

permitido ocorrer um quadrado com negativos.

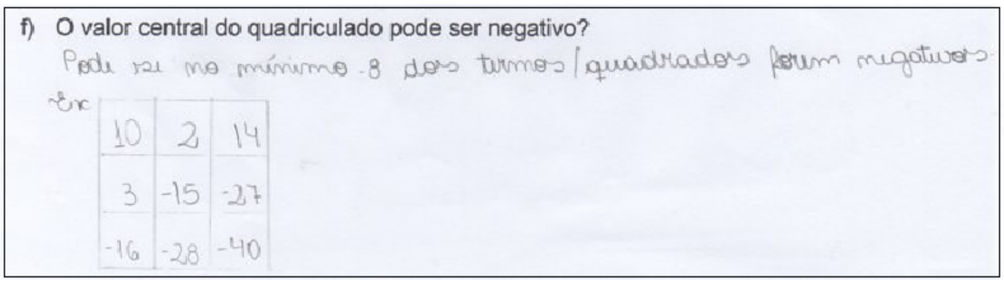


f) Ele pode, pois podemos ter um quadrado de nºs negativos. Isso, se no caso seja permitido ocorrer um quadrado com negativos.

Figura 4.57: Valor central negativo - desenvolvida pelos alunos

Um grupo apresentou um quadrado medimágico com números negativos e positivos. No entanto, o que está descrito não é apresentado no quadrado.

– *Pode, se no mínimo 8 dos termos/quadrados forem negativos.*



f) O valor central do quadriculado pode ser negativo?

Pode se no mínimo 8 dos termos/quadrados forem negativos.

Ex:

10	2	14
3	-15	-27
-16	-28	-40

Figura 4.58: Quadrado com números negativos - desenvolvida pelos alunos

Para o desenvolvimento dessa atividade exploratória os alunos tiveram de usar a lógica, criatividade, conhecimentos já apropriados a respeito de progressões aritméticas, média aritmética, além de utilizar da álgebra para generalizar a situação da soma. Dessa forma, consideramos que a atividade cumpriu com seu propósito. Percebemos que os discentes sentiram-se motivados com as descobertas e, para tanto, observou-se um ambiente colaborativo através de cada ideia que era apresentada na direção de promover a resposta de cada item.

4.6 Análise geral da aplicação das atividades

Após a aplicação e análise das atividades descritas aqui, constatamos que elas trouxeram resultados muito interessantes. Numa avaliação geral, pode-se perceber como questões de ensino e aprendizagem podem ser resolvidas de forma sutil e prática, que tanto o docente como o discente não tenham que passar por situações de grande tensão ou enfrentamento para compreender e aprender a Matemática. Posso afirmar que nesses vários anos de sala de aula, nunca havia utilizado esta prática pedagógica dessa forma. As atividades referentes às questões problemas sobre Investigação Matemática, desenvolvidas para este trabalho foram muito importantes para o meu crescimento profissional, pois é notório que determinadas dificuldades que os alunos apresentam no dia a dia sobre questões de aprendizagem são reduzidas ou diluídas, uma vez que, ao utilizar suas ideias na resolução de uma atividade exploratória e discutindo com os colegas, eles estarão se apoderando de elementos e ferramentas matemáticas que podem ser utilizados em outras situações semelhantes. E, com o auxílio do professor, a aquisição deste aprendizado eleva o seu nível de compreensão e abstração, e isso é o que fará parte de sua vida.

Durante a aplicação das atividades em sala de aula os alunos apresentaram muitas dificuldades em desenvolvê-las, pois nunca haviam realizado atividades dessa forma, ou seja, não estavam habituados com a dinâmica de uma aula de investigação matemática. Muitos mostraram resistência, pois não tinham noção de como iniciar e nem tinham a mínima noção de onde chegar a cada situação. Aí entra o papel do professor:

> Embora curta, a fase inicial é considera de fundamental importância para a compreensão e desenvolvimento da atividade. É nessa fase que o professor apresenta a dinâmica da atividade deixando claro ao aluno o papel que o mesmo deverá desempenhar (PONTE, 2003).

Destaca-se também que o sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula. O aluno deve sentir que suas ideias serão valorizadas e que podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, de sua própria iniciativa. Neste tipo de aula, tudo o que acontece depende da sua condução.

Numa Investigação Matemática, a prática de sala de aula se torna diferente de uma aula tradicional. As situações são colocadas de forma mais abertas, de forma que o estudante tem a incumbência de investigar, apontando propriedades, conceitos e definições. Os pontos de partidas não precisam ser os mesmos e nem os pontos de chegada. Dessa forma o professor se torna parte fundamental para o bom andamento de toda atividade proposta.

5 | Considerações Finais

A metodologia de Investigação Matemática, objeto deste trabalho, é riquíssima para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos. Este tipo de atividades de natureza exploratória tende a dar sentido ao estudo que o aluno está realizando. Com isso ele passará a ter mais afeto por essa disciplina escolar que é desinteressante para a maioria dos estudantes, por não verem, muitas vezes, nenhum sentido real. Dessa forma as atividades que foram desenvolvidas, tem o objetivo principal de contribuir para remediar essa lacuna, constituindo assim uma didática importante com a possibilidade de ser utilizada por outros colegas professores.

Um dos aspectos mais relevantes neste tipo de metodologia é o alcance e a importância da dimensão colaborativa. Os alunos quando se envolvem no desenvolvimento da atividade exploratória se tornam verdadeiros pesquisadores. As discussões que são travadas para defender suas ideias faz com que ampliem seu campo de visão a respeito de conceitos matemáticos, permitindo ao aluno desenvolver relações matemáticas, contribuir para amadurecer ideias em um ambiente colaborativo, conjecturar situações e generalizá-las.

Quanto à abordagem algébrica, observamos que os alunos, através das atividades de investigação, conseguiram desenvolver e expressar o pensamento algébrico, à sua maneira, decorrente de cada situação apresentada, isto é, o que fazia sentido naquele momento. Isso leva o aluno a ter uma visão diferente da álgebra e não apenas ver uma Álgebra como um amontoado de símbolos e regras, sem muito sentido por serem expressões vazias de manipulações mecânicas.

Algo muito positivo que foi possível observar e está bem presente no desenvolvimento das atividades, de acordo com os autores citados neste trabalho, é a construção do pensamento algébrico, bem como a implicação pedagógica de natureza didático-metodológica, que se refere às grandes etapas da Educação Algébrica elementar: expressar simbolicamente uma situação-problema concreta; a partir de uma expressão algébrica atribuir-lhe alguns significados concretos e vice-versa; transformar uma expressão algébrica em outra equivalente. Além de expressar algebricamente situações afim de generalizá-las.

Os aspectos negativos observados na aplicação desta metodologia foram as deficiências dos alunos em compreender e interpretar o enunciado de algumas questões propostas; a superficialidade ou falta de noção de alguns conteúdos matemáticos básicos; falta de confiança e criatividade para elaborar alternativas de resolução; desinteresse em discutir a atividade com os colegas; além da falta de experiência do professor com este tipo de metodologia.

Nesse sentido, a atuação do professor, enquanto mediador deste tipo de atividade é o diferencial na construção do conhecimento. Seu papel é de extrema relevância no processo de ensino e aprendizagem, pois através de atividades de cunho investigativo adequadas, permite que o aluno seja motivado à discussão, ao confronto de ideias e, dessa forma, gerar seu próprio conhecimento.

Por fim, podemos afirmar, sem sombra de dúvidas, que a aplicação da metodologia de Investigação Matemática apresenta grande potencial para o ensino da Álgebra, mas não é solução geral, ela também tem seus limites. A sua utilidade depende dos objetivos que se quer alcançar, pois nem tudo se pode ensinar ou aprender através da investigação. No entanto, é uma poderosa ferramenta para a construção do conhecimento, tem suma importância para os docentes e discentes na promoção do ensino e aprendizagem matemática.

Bibliografia

BOYER, Carl B. **Historia da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamenta. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. **MEC/SEF**, Brasília, 1998.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, n. 2, p. 25–39, 1993.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perpectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus Editora, 1997.

OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Site oficial**, 2018. Disponível em www.obmep.org.br. Acessado em 13/06/2018.

OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro de; LAUDARES, João Bosco. Pensamento Algébrico, uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**, 2015.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná**, 2008.

POLYA, George. O ensino por meio de problemas. **Revista do professor de matemática**, v. 7, p. 11–16, 1985.

PONTE, João Pedro da. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, p. 25–39, 2003.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

VALENTINO, Rosalina Leontina Moretti; GRANDO, Regina Célia. O conhecimento Algébrico que os Alunos Apresentam no Início do Curso de Licenciatura em Matemática: um olhar sobre os aspectos da álgebra elementar. **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004.