

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT**

EDERSON MARCELINO DA SILVA

**POLIEDROS DE ARQUIMEDES, CATALAN, KEPLER-POINSOT, PLATÃO E O
SÓLIDO DE ESCHER: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM
DE POLIEDROS**

CURITIBA

2018

EDERSON MARCELINO DA SILVA

**POLIEDROS DE ARQUIMEDES, CATALAN, KEPLER-POINSOT, PLATÃO E O
SÓLIDO DE ESCHER: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM
DE POLIEDROS**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S586p
2018 Silva, Ederson Marcelino da
Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o
Sólido de Escher : contribuições para o ensino e aprendizagem de
poliedros / Ederson Marcelino da Silva.-- 2018.
116 f. : il. ; 30 cm

Texto em português com resumo em inglês
Disponível também via World Wide Web
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional, Curitiba, 2018
Bibliografia: f. 101-106

1. Poliedros - Estudo e ensino. 2. Poliedros - Modelos. 3. Geometria espacial. 4. Poliedros. 5. Escher, M. C. (Maurits Cornelis), 1898-1972 - Crítica e interpretação. 6. Poliedros - Modelagem. 7. Geometria na arte. 8. Ensino - Meios auxiliares. 9. Material didático. 10. Matemática - Dissertações. I. Saito, Olga Harumi. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB-9/1429

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 55

A Dissertação de Mestrado intitulada “Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o Sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros”, defendida em sessão pública pelo candidato Ederson Marcelino da Silva, no dia 28 de setembro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Olga Harumi Saito - Presidente – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Marcio Rostirolla Adames – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Yuri Dumaresq Sobral - UNB

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 28 de setembro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

- A Deus por me dar força e perseverança.
- À minha esposa Silvana Gogolla de Mattos que, entre tantas coisas, me motiva a sempre melhorar como ser humano.
- À minha orientadora Prof^a Dra. Olga Harumi Saito, pela dedicação e orientação durante este processo.
- Aos professores do PROFMAT da UTFPR - câmpus Curitiba pelos ensinamentos e também pelos momentos de descontração.
- Aos meus colegas de mestrado que me incentivaram e me auxiliaram nessa longa e produtiva jornada de estudos.
- Aos meus colegas e ex-colegas de trabalho que me deram forças para ingressar e continuar no programa de mestrado.
- Aos meus familiares, amigos, alunos e ex-alunos que valorizaram meu trabalho, em especial ao Leonardo J. R. Quadros pela colaboração, pesquisando informações sobre a Praça Paraná de Porto União - SC citada neste trabalho, ao Daniel M. da Silva pela ajuda com conhecimentos de Química e ao Eduardo R. C. de Souza por compartilhar seus saberes filosóficos.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo apoio financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

Amai-vos, eis o primeiro ensinamento.

Instruí-vos, eis o segundo.

Espírito de Verdade (Paris, 1860).

RESUMO

SILVA, Ederson Marcelino da. **Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o Sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros.** 116 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Apresentamos neste trabalho obras do artista Maurits Cornelis Escher nas quais podemos visualizar poliedros. Expomos os aspectos históricos e os estudos realizados por Arquimedes, Catalan, Kepler, Poinsot e Platão, bem como a relação dos poliedros com a natureza, as obras de arte e as construções arquitetônicas. Além disso, deduzimos uma fórmula para o cálculo do volume do Sólido de Escher, que é um dodecaedro rômbo estrelado, e a comprovamos com o auxílio do GeoGebra e de material didático manipulável. Para as atividades interativas, sugerimos aplicativos e recursos digitais empregando a contextualização concomitantemente com a teoria, contribuindo para o ensino e aprendizagem de poliedros.

Palavras-chave: Volume do Sólido de Escher. GeoGebra. Material didático manipulável.

ABSTRACT

SILVA, Ederson Marcelino da. **Polyhedra of Archimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Plato and Escher's Solid: contributions to the teaching and learning of polyhedra.** 116 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

We present in this work the art of Maurits Cornelis Escher in which we can visualize polyhedra. We show the historical aspects and studies carried out by Archimedes, Catalan, Kepler, Poinsot and Plato as well as the relation between polyhedra and nature, works of art and architectural constructions. In addition, we deduce a formula for calculating the volume of Escher's Solid, a stellated rhombic dodecahedron, and we confirm it using GeoGebra and manipulative didactic material. For interactive activities, we suggest applets and digital resources employing the contextualization concomitantly with the theory, contributing to the teaching and learning polyhedra.

Keywords: Volume of Escher's Solid. GeoGebra. Manipulative didactic material.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Cristais de: (a) Magnetita, em formato de octaedro; (b) Galena, em formato cúbico; (c) Vanadinite, em formato de prismas hexagonais; (d) Quartzo, em diversos formatos; (e) Piritita, em formato cúbico	20
Figura 2 – Radiolários: microorganismos em formato poliédrico	21
Figura 3 – Questão do Enem PPL envolvendo um octaedro	21
Figura 4 – Molécula de metano	22
Figura 5 – Estrutura arquiteônica Atomium	22
Figura 6 – Edifício do parque Futuroscope: (a) vista frontal; (b) vista lateral	23
Figura 7 – Escultura de um cubo na Praça Paraná - Porto União (SC)	23
Figura 8 – Biblioteca Nacional da Bielorrússia: (a) vista diurna; (b) vista noturna	24
Figura 9 – Melhorando a qualidade de uma imagem através da divisão das faces do poliedro	24
Figura 10 – Os cinco Poliedros de Platão	25
Figura 11 – Esculturas em pedra com características dos cinco Sólidos de Platão	26
Figura 12 – Representação da Academia de Atenas	26
Figura 13 – Associação de Platão dos elementos aos sólidos regulares	27
Figura 14 – Cuboctaedro ilustrado com a obra Limite Circular III de Escher	28
Figura 15 – Escultura no formato de um icosaedro truncado fixado em frente ao departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)	29
Figura 16 – Poliedro Arquimediano e sua planificação gerados no Poly: (a) cuboctaedro; (b) icosaedro truncado	29
Figura 17 – Visualizações de um cuboctaedro inscrito em um tetraedro	30
Figura 18 – Sólidos Arquimedianos e suas relações com os Sólidos Platônicos	31
Figura 19 – Rombicuboctaedro e pseudo-rombicuboctaedro, respectivamente	32
Figura 20 – Truncaturas do cubo e octaedro até formar um cuboctaedro	33
Figura 21 – Snubificação do cubo	33
Figura 22 – Sistema solar desenvolvido por Johannes Kepler	34
Figura 23 – Reprodução do sistema solar criado por Johannes Kepler em exposição em Viena, Áustria, no Technisches Museum	34
Figura 24 – Pequeno dodecaedro estrelado em forma de mosaico no piso da Basílica de São Marcos, na Itália	35
Figura 25 – Poliedros de Kepler-Poinsot: (a) visualização das faces; (b) visualização das arestas	36
Figura 26 – Estrelações de alguns polígonos regulares: (a) do pentágono regular; (b) do hexágono regular; (c) do heptágono regular	36
Figura 27 – Processo de estrelação do dodecaedro	37

Figura 28 – Estrelações a partir do dodecaedro: (a) dodecaedro; (b) primeira estrelação; (c) segunda estrelação; (d) terceira estrelação	37
Figura 29 – Dodecaedro rômico e suas estrelações	38
Figura 30 – Sólidos de Catalan e seus duais Arquimedianos	39
Figura 31 – Estudo da dualidade nos Sólidos Platônicos feita por Johhanes Kepler	40
Figura 32 – Sólidos Platônicos e seus duais	40
Figura 33 – Tentativa de encontrar o dual do cuboctaedro	41
Figura 34 – Cuboctaedro encontrado por dualidade do dodecaedro rômico	41
Figura 35 – Encontrando o octaedro através de planos tangentes à uma esfera circunscrita ao cubo	42
Figura 36 – Visualizações do DR gerado a partir de um CO feito pelo truncamento de um cubo	42
Figura 37 – Maurits Cornelis Escher	43
Figura 38 – Processo de preparo da matriz na técnica de xilografia	44
Figura 39 – Xilogravura: Duplo Planetoide	45
Figura 40 – Matriz e impressão litográfica	46
Figura 41 – Litogravura: Ascendente e Descendente	46
Figura 42 – Litogravura: (a) Galeria de pintura; (b) informações da obra	47
Figura 43 – Dragão	48
Figura 44 – Parede do Palácio de Comares	48
Figura 45 – Cópias das pavimentações do Palácio de Alhambra feitas por Escher em 1936	49
Figura 46 – Borboletas: obra com pavimentação do plano	49
Figura 47 – Xilogravura Metamorfose I de 1937, 19,5 cm×90,8 cm	50
Figura 48 – Metamorfose III exposta no correio central de Haia, Holanda	50
Figura 49 – Metamorfose III exposta no aeroporto de Amsterdam	50
Figura 50 – Xilogravura Limite Circular III de 1959 (diâmetro de 41,5 cm)	51
Figura 51 – Estudo para Limite Circular III	52
Figura 52 – Litogravura Cascata, de 1961, 38,1 cm×30 cm	53
Figura 53 – Escher mostrando sua escultura de Sólidos Platônicos	54
Figura 54 – Litogravura Repteis de 1943, 33,5 cm×38,5 cm	55
Figura 55 – Icosaedro feito de metal esmaltado coberto com uma pavimentação de estrelas do mar e conchas	55
Figura 56 – Litogravura Belvedere de 1958, 46 cm×29,5 cm	56
Figura 57 – Homem com Cuboide, xilogravura de 1958	57
Figura 58 – Triângulo de Penrose: (a) ilustração do triângulo; (b) como seria a sua construção em madeira	57
Figura 59 – Escultura do Triângulo de Penrose construída na Austrália	58
Figura 60 – Questão 5 da Prova 1, cor amarela, do Enem de 2007	58
Figura 61 – Obra Cristal: ao centro temos a combinação de um hexaedro e um octaedro	59

Figura 62 – Composição de três cubos: (a) cubos coloridos; (b) arestas destacadas.	59
Figura 63 – Composição para a formação do Sólido de Escher	60
Figura 64 – Pequeno dodecaedro estrelado presente na litogravura Contraste (Ordem e Caos)	60
Figura 65 – Pequeno dodecaedro estrelado presente na obra Gravidade	61
Figura 66 – Composição de dois tetraedros	61
Figura 67 – Xilogravura Estrelas	62
Figura 68 – Destaque de alguns dos poliedros da obra Estrelas	63
Figura 69 – Xilogravura Estudo para Estrelas	63
Figura 70 – Serpentes, 44,7 cm×49,8 cm, xilogravura em três cores	64
Figura 71 – Exemplo de poliedro caso o item 1 da definição de poliedros segundo Lima et al. (2006) não fosse respeitado	66
Figura 72 – Exemplo de poliedro caso o item 2 da definição de poliedros segundo Lima et al. (2006) não fosse respeitado	66
Figura 73 – Exemplo de poliedro caso o item 3 da definição de poliedros segundo Lima et al. (2006) não fosse respeitado	66
Figura 74 – Exemplo de poliedro segundo Dolce e Pompeo (2005): (a) convexo; (b) não conexo	67
Figura 75 – Exemplo de poliedro segundo Lima et al. (2006): (a) convexo; (b) não conexo	67
Figura 76 – Ângulos poliédricos convexos: (a) diédrico; (b) triédrico; (c) tetraédrico . . .	68
Figura 77 – Ângulo tetraédrico com as medidas dos ângulos das faces	68
Figura 78 – Poliedros não convexos de: (a) característica 0; (b) característica 2	69
Figura 79 – Bloco retangular de volume equivalente à 24 cubos unitários	72
Figura 80 – Ilustração do Princípio de Cavalieri	73
Figura 81 – Dois sólidos diferentes com o mesmo volume de acordo com o Princípio de Cavalieri	73
Figura 82 – Prisma de base n -agonal	74
Figura 83 – Prisma triangular oblíquo e prisma retangular reto, ambos com o mesmo volume	74
Figura 84 – Pirâmide oblíqua de base pentagonal	75
Figura 85 – Pirâmides de mesmo volume: mesma base e mesma altura	76
Figura 86 – Prisma triangular decomposto em três pirâmides com volumes iguais	77
Figura 87 – Pirâmide pentagonal dividida em três pirâmides triangulares	78
Figura 88 – O Sólido de Escher: de Platão a Poincaré	79
Figura 89 – Sólido de Escher: segmentos verdes, entre dois pontos, medem a e segmentos pretos, entre dois pontos, medem b	80
Figura 90 – Triângulos CHI e CEG destacados no Sólido de Escher	81
Figura 91 – Triângulo isósceles destacado no SE	81
Figura 92 – Sólido de Escher e sua seção	82

Figura 93 – Triângulo retângulo e isósceles ABK	82
Figura 94 – Estrutura de uma das pirâmides sobre o DR	83
Figura 95 – Estrutura de uma das pirâmides sobre o DR	84
Figura 96 – Logomarca do GeoGebra	85
Figura 97 – Janela de Visualização 2D do GeoGebra	86
Figura 98 – Janela de Visualização 3D do GeoGebra	86
Figura 99 – DR gerado a partir de um cubo envolto por 6 cubos congruentes	87
Figura 100 – Seleção da Janela de Visualização 3D do GeoGebra	88
Figura 101 – Construção do primeiro cubo na constituição do SE	88
Figura 102 – Cubo centrado na origem dos eixos coordenados	89
Figura 103 – Cubos externos, adjacentes ao primeiro cubo	89
Figura 104 – Seleção da ferramenta Ponto Médio	90
Figura 105 – Centro dos cubos externos	90
Figura 106 – Seleção da ferramenta Polígono	90
Figura 107 – Construção dos losangos que formarão o DR	91
Figura 108 – Dodecaedro rômico	91
Figura 109 – Decomposição do DR em um cubo e 6 pirâmides	91
Figura 110 – Detalhe da Janela de Álgebra	92
Figura 111 – Seleção da ferramenta Plano	92
Figura 112 – Processo de estrelação do DR: interseção de planos	93
Figura 113 – Seleção da ferramenta Interseção de Duas Superfícies	93
Figura 114 – Processo de estrelação do DR: interseção de retas	93
Figura 115 – Seleção da ferramenta Interseção de Dois Objetos	94
Figura 116 – Outra forma de obter o ponto de interseção no processo de estrelação	94
Figura 117 – Seleção da ferramenta Reta Paralela	95
Figura 118 – Seleção da ferramenta Pirâmide	95
Figura 119 – Estrelação do DR	95
Figura 120 – Dodecaedro rômico estrelado ou Sólido de Escher obtido através do GeoGebra	96
Figura 121 – Construção do Sólido de Escher: destaque para os volumes dos cubos e das pirâmides	96
Figura 122 – Seleção da ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro	97
Figura 123 – Segmentos de comprimentos a e b do SE	97
Figura 124 – Transformação do “ <i>magic cube star</i> ” em dois Sólidos de Escher	98
Figura 125 – Sólido de Escher com segmentos maiores equivalentes às arestas de cada um dos 8 cubos do CD	98
Figura 126 – Octaedro construído com canudos e barbante	108
Figura 127 – Construção do icosaedro com varetas de bambu e cola de contato	108
Figura 128 – Construção do dodecaedro com papel cartão e elástico	109
Figura 129 – Construção do tetraedro	110

Figura 130–Teste de capacidade do tetraedro	110
Figura 131–Molde para construir o quebra-cabeças poliédrico do Sólido de Escher . . .	112
Figura 132–Molde para construir o Sólido de Escher - planificação única	113
Figura 133–Diagrama (passo a passo) para construir o SE utilizando dobraduras (Origami)	114
Figura 134–Molde para construir o cuboctaedro	115
Figura 135–Molde para construir o dodecaedro rômico	116

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	ESCOLHA DO TEMA	15
1.2	JUSTIFICATIVA	15
1.3	OBJETIVOS	18
1.3.1	Objetivo Geral	18
1.3.2	Objetivos Específicos	18
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2	POLIEDROS: PERSONAGENS E CONTRIBUIÇÕES	20
2.1	POLIEDROS NA NATUREZA	20
2.2	POLIEDROS NA ARQUITETURA	22
2.3	POLIEDROS DE PLATÃO	25
2.4	POLIEDROS ARQUIMEDIANOS	28
2.4.1	Rombo, truncatura e snubificação	32
2.5	POLIEDROS DE KEPLER E POINSOT	34
2.6	SÓLIDOS DE CATALAN	38
2.6.1	Dualidade de poliedros	39
2.7	ESCHER E A MATEMÁTICA	42
2.7.1	Vida e obras de Escher	43
2.7.2	Escher e os poliedros	53
3	VOLUME DE POLIEDROS: CUBO E PIRÂMIDE	65
3.1	POLIEDROS	65
3.1.1	Poliedros convexos e não convexos	67
3.2	ÂNGULOS POLIÉDRICOS CONVEXOS	68
3.3	O TEOREMA DE EULER	69
3.4	POLIEDROS REGULARES	70
3.5	VOLUME	71
3.5.1	Volume do cubo	72
3.5.2	O Princípio de Cavalieri	73
3.5.3	Volume da pirâmide	75
4	VOLUME DO SÓLIDO DE ESCHER	79
4.1	CÁLCULO DO VOLUME DO SÓLIDO DE ESCHER	79
4.2	O <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA	85
4.2.1	Cálculo do volume do Sólido de Escher utilizando o GeoGebra	87

4.3	CÁLCULO DO VOLUME DO SÓLIDO DE ESCHER POR MEIO DE UM MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL	97
5	CONCLUSÃO	99
	REFERÊNCIAS	101
	APÊNDICE A – RELATO DE EXPERIÊNCIA	107
A.1	CONFEÇÃO DE POLIEDROS UTILIZANDO PAPEL CARTÃO, ELÁSTICO, VARETAS DE BAMBU, COLA, CANUDOS E BARBANTE	107
A.2	OFICINA DE POLIEDROS	109
	ANEXO A – MOLDE PARA CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO DE ESCHER - QUEBRA-CABEÇA POLIÉDRICO	112
	ANEXO B – MOLDE PARA CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO DE ESCHER - PLANIFICAÇÃO ÚNICA	113
	ANEXO C – CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO DE ESCHER POR MEIO DE DOBRADURAS (ORIGAMI)	114
	ANEXO D – MOLDE PARA CONSTRUÇÃO DO CUBOCTAEDRO E DO DODECAEDRO RÔMBICO	115

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESCOLHA DO TEMA

Ao participar de projetos de extensão na área de Geometria durante a minha graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Paraná (UFPR), percebi o meu fascínio e interesse por esse ramo da Matemática. Tais projetos tinham como base a criação e/ou desenvolvimento de atividades a serem aplicadas em colégios localizados em ilhas do litoral paranaense sendo que a maioria dessas atividades tinham como base a Geometria.

Posteriormente, já na função de professor de Matemática, a primeira aula que ministrei foi sobre Geometria. E, após a graduação fiz uma especialização em Educação Matemática, onde desenvolvi uma monografia sobre Sólidos de Revolução. Algum tempo depois, por “coincidência do destino”, tive a oportunidade de trabalhar como voluntário em um curso pré-vestibular nessa área.

Recentemente, coordenei um projeto de pesquisa em nível de iniciação científica (Apêndice A) no Instituto Federal do Paraná (IFPR), Campus União da Vitória, voltado ao desenvolvimento de materiais didáticos manipuláveis, com destaque para a Geometria. Nesse projeto, eu e alguns alunos do curso Técnico em Informática realizamos pesquisas e produções de materiais como os Sólidos de Platão, o Teodolito e, em 2016 e 2017, fomos premiados na Feira de Inovação das Ciências e Engenharias (FICIENCIAS), realizada em Foz do Iguaçu, Paraná, com um material chamado Trena com Roda, desenvolvido e aprimorado durante o desenvolvimento do projeto.

Tal projeto de pesquisa permitiu trabalhar com alunos que tinham, pelo menos, alguma dificuldade em Geometria, seja para desenhar uma figura, na percepção espacial, reconhecer propriedades envolvidas, determinar medidas de ângulos etc. Tenho notado essas dificuldades ao longo da minha carreira profissional e, durante as pesquisas, percebi que não há muitos trabalhos que forneçam recursos que agucem e despertem a curiosidade dos alunos para o estudo de poliedros.

Foi a união de todos os fatos aqui relatados que me motivou fortemente a explorar a Geometria nessa dissertação, com especial atenção ao ensino e aprendizagem de poliedros.

1.2 JUSTIFICATIVA

É comum observarmos pessoas relatando que a Matemática é uma das disciplinas mais difíceis de se entender, que o que é ensinado não é contextualizado e que essa matéria é uma das grandes responsáveis pela retenção escolar de um grande número de alunos.

De acordo com Silveira (1999), esse pré-conceito de que a “Matemática é difícil” pode estar presente no cotidiano de diversos professores, pais e alunos, entretanto, considerando que ensinar não é transferir conhecimento e sim criar possibilidades para que os estudantes o alcancem, o professor, em seu dia-a-dia, em sala de aula, precisa desconstruir esse sentimento de dificuldade, fornecendo acesso à ferramentas didáticas que contribuam para uma aprendizagem significativa aos seus alunos. É nesse ponto que baseamos - e enfatizamos - a exploração da presença dos poliedros em diversas situações, possibilitando um número maior de opções para atrair a atenção dos alunos, como apresentar tópicos sobre os poliedros ao longo da história, bem como sua presença na natureza, em construções realizadas pelo ser humano e ainda nas obras do artista Maurits Cornelis Escher.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (BRASIL, 1998), salientam a importância do trabalho com a codificação e decodificação de desenhos e também reforçam a necessidade de desenvolvimento das habilidades de percepção espacial. As obras de Escher contribuem nesse sentido e, durante as explicações em sala de aula, podemos fornecer aos alunos a oportunidade de contemplar e interpretar uma obra de arte e, ao mesmo tempo, explorar as competências e habilidades expressas nos PCN. Além disso, possibilitaremos o conhecimento prévio dos poliedros antes de uma definição formal com o intuito de, possivelmente, evitarmos problemas como os que podem acontecer no estudo de Geometria Espacial, quando há a necessidade do aluno “transformar mentalmente” um desenho bidimensional em um objeto tridimensional sem estar familiarizado com tal situação.

De acordo com Segadas, Silva e Moutinho (2004), a Geometria representa uma barreira para muitos alunos por ser considerada uma matéria difícil de entender e um dos motivos seria a baixa capacidade de visualização espacial desses alunos. As autoras evidenciaram essa dificuldade por meio de uma avaliação diagnóstica realizada com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, aplicada em 1999, utilizando uma amostragem de 1763 alunos da rede municipal de ensino do Rio de Janeiro. Elas verificaram que esses alunos, devido ao grande número de erros nos problemas que envolviam a Geometria, não haviam praticado e desenvolvido corretamente, entre outras habilidades, sua capacidade de percepção espacial.

Com isso, percebe-se a necessidade de ampliar as experiências de aprendizagem dos alunos não só na área da Geometria, mas da Matemática como um todo. Entretanto, é necessário refletir sobre como atrair a atenção dos discentes sendo que esses, por vezes, consideram que os conceitos estudados nessa disciplina não farão falta em suas vidas.

Acreditamos que a aprendizagem dos conteúdos de Matemática, entre outros fatores e disciplinas, tem grande importância no desenvolvimento cognitivo dos alunos, no entanto, concordamos que muitos não farão uso direto de todos os conteúdos estudados no Ensino Básico. Em geral, o conhecimento e a integração de todas as competências e habilidades abordadas nas diversas disciplinas desta etapa da vida escolar, contribuirão como base para a formação cidadã de cada aluno em um sentido universal, ou seja, o Ensino Básico deve propiciar um aprendizado

com caráter prático e crítico, útil não somente ao trabalho, mas à vida em geral com o intuito de que, segundo os PCN (BRASIL, 2000, p. 4), “as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação” e desenvolvimento pessoal.

Diante do exposto, faz-se necessário, corroborando com Sartor (2013), que o docente busque maneiras diferenciadas para atrair o interesse dos alunos para estudo da Matemática, tornando-a mais prazerosa, facilitando a aprendizagem e, assim, que eles percebam sua utilidade não só para resolver problemas (do cotidiano ou não) envolvendo diversos cálculos, mas como ferramenta de apoio para um melhor desenvolvimento cognitivo, acadêmico e pessoal.

Tratando especificamente do trabalho com poliedros e a Geometria Espacial, segundo Carvalho (1997)¹, citado por Malfatti et al. (2002, p. 562):

[...] um dos grandes problemas é não dispor de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais, pois na maioria das vezes para representá-los recorre-se a projeções bidimensionais de tais objetos. Porém, estas projeções distorcem ângulos, modificam comprimentos de segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção.

Ainda como forma de contribuição, sugerimos os recursos digitais e *sites* que auxiliam na visualização e construção de objetos tridimensionais, mas concordamos com Kaleff, Sá e Toledo (2002, p. 36), no sentido de que até mesmo as figuras tridimensionais feitas através de programas de Geometria Dinâmica apresentam-se “em forma de desenhos em duas dimensões e, além disso, a imagem dos sólidos é apenas virtual”, ou seja, o aluno não poderá tocá-los e nem perceber a noção exata de volume, por exemplo.

Hoffer (1981)², citado por Vieira (2010, p. 29), afirma que Geometria é uma matéria visual e que seus aspectos visuais não têm sido bem explorados em sala de aula. Para resolver esse problema, o autor acredita que, possivelmente, seja necessário que os discentes explorem mais figuras e esquemas manipuláveis.

Sendo assim, acreditamos que a utilização de materiais didáticos manipuláveis (MDM), como poliedros feitos pelos próprios alunos utilizando, por exemplo, os moldes disponibilizados nos anexos dessa dissertação, pode propiciar a estes uma maneira mais prática de visualizar e compreender os detalhes do sólido, pois, de acordo com Kaleff (2003, p.16), “ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações básicas mentais exigidas no trato da Geometria”.

Além disso, Vieira (2010, p. 42) afirma que depois de trabalhar com os MDM, “chegará um momento em que o aluno não mais precisará dele, pois já terá conseguido abstrair os conceitos

¹ CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. São Paulo, 1997.

² HOFFER, A. **Geometry is more than Proof**. Trad. Antônio Carlos Brolezzi. The Mathematics Teachers, vol. 74, n.º1, pp. 11 - 18. 1981.

ali presentes e será capaz de executar as atividades apenas com o uso das imagens mentais que foram construídas”.

Dessa forma, é necessário que o professor proporcione aos discentes oportunidades para o desenvolvimento das percepções espaciais, pois se o aluno não tiver esta habilidade bem desenvolvida, provavelmente terá dificuldades para interpretar e resolver problemas de Geometria. Segundo Vieira (2010, p. 44), “quando o aluno for capaz de construir mentalmente um objeto geométrico e analisar as suas propriedades, terá condições para resolver os problemas propostos”.

Ressaltamos que, assim como acreditam Nieto e Bairral (2010, p. 3), “desenvolver a Geometria escolar é muito mais que decorar e praticar algoritmos”, a Geometria possibilita aos alunos o desenvolvimento de habilidades como representar em duas dimensões um objeto tridimensional, de argumentar sobre suas características além de instigar a criatividade e a imaginação.

Devido às suas características como beleza, simetria, simplicidade (ou complexidade) de construção e novidade para alguns alunos ao apresentar, explorar e manipular os diversos exemplos de poliedros bem como estudar os procedimentos para construí-los e manipulá-los podemos aguçar a sua curiosidade e realizar um melhor estudo geométrico e algébrico desse tema, além de contribuir para o conhecimento matemático dos discentes.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Fomentar o estudo do tema poliedros através de contextualização associando teoria e prática.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Apresentar considerações históricas sobre poliedros e personalidades da Matemática com suas contribuições.
- Mostrar exemplos da presença de poliedros na natureza e na arquitetura.
- Apresentar a vida e obras de Escher e sua relação com os poliedros.
- Determinar uma fórmula para o cálculo do volume do dodecaedro rômico estrelado, também conhecido como Sólido de Escher.
- Indicar e desenvolver recursos digitais e materiais didáticos manipuláveis que possam ser utilizados para o ensino e aprendizagem de poliedros.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 1 apresentamos os motivos que levaram à escolha do tema, a justificativa para desenvolver este trabalho, bem como o objetivo geral e os objetivos específicos.

No Capítulo 2, exemplificamos a presença de poliedros na natureza e na arquitetura. Além disso, exploramos a história dos poliedros e os estudos de Arquimedes, de Catalan, de Keppler, de Poinot e de Platão. Destacamos aspectos da vida e das obras de Maurits Cornelis Escher e o seu fascínio pelos poliedros. Ainda, apresentamos materiais que podem ser utilizados para motivar e/ou ampliar o conhecimento sobre poliedros.

No Capítulo 3 realizamos um estudo sobre os poliedros e o volume do cubo e da pirâmide, visando fornecer suporte teórico para o estudo do Sólido de Escher.

No Capítulo 4 determinamos uma fórmula para o cálculo do volume do dodecaedro rômbo estrelado, o Sólido de Escher. E, para verificação da fórmula, desenvolvemos no *software* GeoGebra um material com o procedimento descrito em um passo-a-passo e, também utilizamos um material didático manipulável.

No Capítulo 5 manifestamos nossas considerações e reflexões que possam contribuir para o ensino e aprendizagem de poliedros.

No Apêndice A, relatamos duas experiências, uma sobre a confecção de poliedros e a outra sobre sua aplicação em uma oficina.

Por fim, nos Anexos A, B e C fornecemos moldes para a construção do Sólido de Escher e, no Anexo D, os moldes do cuboctaedro e do dodecaedro rômbo.

2 POLIEDROS: PERSONAGENS E CONTRIBUIÇÕES

Percebemos que há muito tempo as pessoas têm um fascínio pelos poliedros. Muitos estudos foram e são realizados sobre o tema, sendo que um dos mais famosos foi realizado por Euclides de Alexandria por volta de 300 a.C., resultando em uma coleção de treze livros intitulada “Os Elementos”.

Essa coleção foi uma sintetização dos estudos realizados até aquele momento e acabou por formar o que conhecemos por Geometria Euclidiana. Mas as evidências do conhecimento e apreço pelos poliedros é muito mais antiga, as pirâmides do Egito, por exemplo, construídas em torno de 2000 a.C., são demonstrações da busca do ser humano em reproduzir formas geométricas que sempre existiram na natureza.

2.1 POLIEDROS NA NATUREZA

De acordo com o dicionário, (RAMOS, 2011), a palavra poliedro significa um corpo geométrico tridimensional limitado por superfícies planas. Na natureza vários elementos possuem o formato de poliedros, como os cristais da Figura 1.

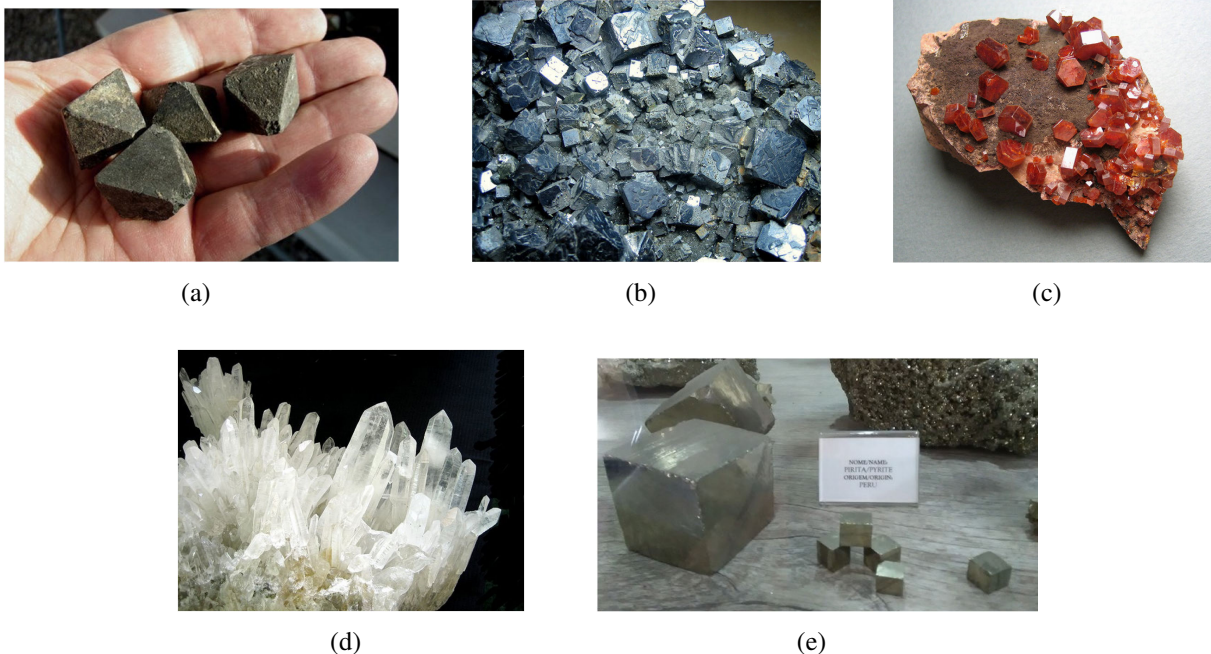


Figura 1 – Cristais de: (a) Magnetita, em formato de octaedro; (b) Galena, em formato cúbico; (c) Vanadinite, em formato de prismas hexagonais; (d) Quartzo, em diversos formatos; (e) Pirita, em formato cúbico

Fonte: (a) - (d): Weller (2018); (e): Autoria própria.

Além dos cristais, seres vivos também apresentam formato poliédrico. Segundo Bortolossi e Silva (2009), em 1904, um biólogo alemão chamado Ernst Haeckel escreveu a obra *Kunstformen der Natur* onde dissertou sobre um micro-organismo que pode assumir formas poliédricas chamado Radiolário. Na Figura 2, apresentamos da esquerda para a direita, o *Callimitra agnesae*, *Lithocubus geometricus*, *Circoporus octahedrus*, *Circorrhagma dodecahedra* e o *Circogonia icosahedra*, que são alguns desses micro-organismos.

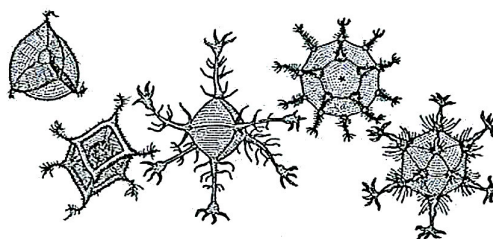


Figura 2 – Radiolários: microorganismos em formato poliédrico

Fonte: Bortolossi e Silva (2009).

Em uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio para Pessoas Privadas de Liberdade (Enem PPL) de 2014, Figura 3, vemos uma representação tridimensional da molécula do gás hexafluoreto de enxofre (SF_6), cujo formato é de um octaedro regular. Esse gás, ao ser inalado, causa alterações na fala humana que podem ser vistas no vídeo produzido por Discovery (2008).

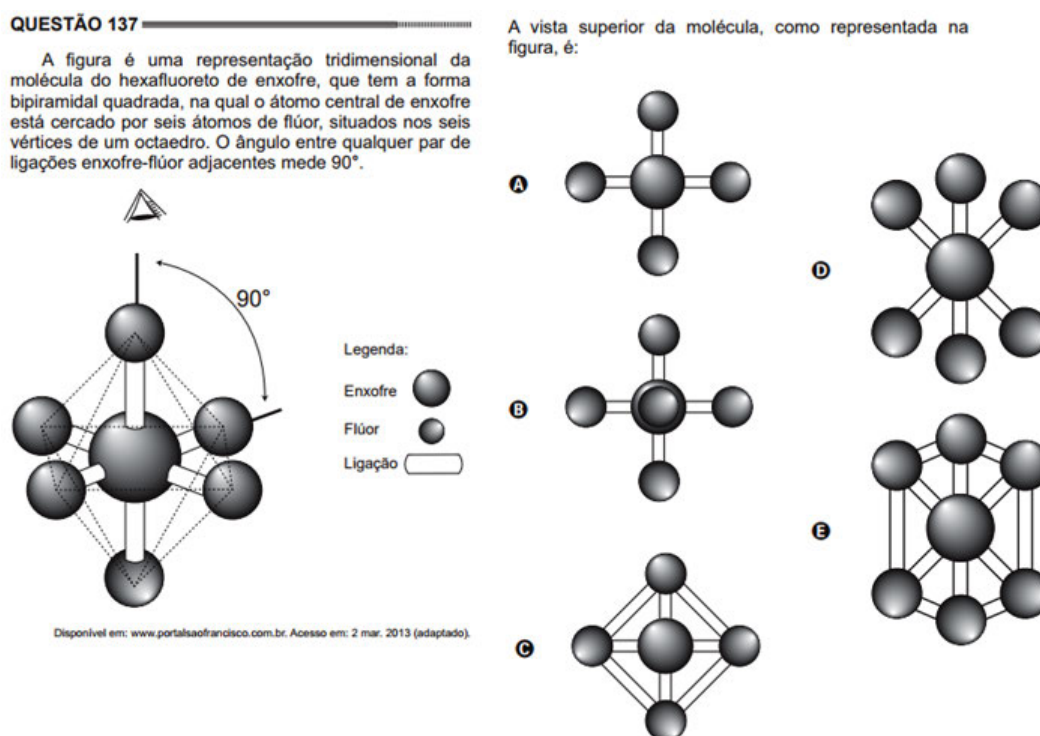


Figura 3 – Questão do Enem PPL envolvendo um octaedro

Fonte: Inep (2014).

Essa questão mostra que o gás assume a forma de um octaedro regular devido ao equilíbrio das interações químicas de seus átomos, ou seja, a conformação dos seis átomos de flúor em torno do átomo de enxofre fica equilibrada e equidistante, gerando estabilidade da molécula e fazendo com que assuma esse formato.

Outra presença dos poliedros na natureza pode ser vista na molécula de metano (CH_4), Figura 4(a), que assume o formato de tetraedro regular, Figura 4(b). O átomo de carbono fica ao centro circundado por quatro átomos de hidrogênio formando os vértices de um tetraedro.

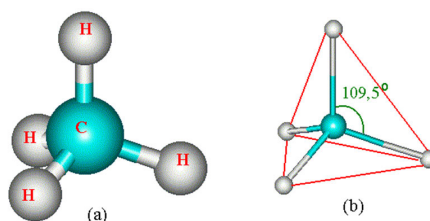


Figura 4 – Molécula de metano

Fonte: Mundim (2000).

2.2 POLIEDROS NA ARQUITETURA

Ao observar algumas construções realizadas pelo homem, podemos encontrar formas geométricas como prismas e pirâmides, por exemplo. Mas há obras que ampliam esses conceitos de edificações utilizando poliedros de diversos tipos, como na construção idealizada pelo engenheiro André Waterkeyn, denominada Atomium, Figura 5, que fica em Bruxelas, na Bélgica.

Essa construção tem formato cúbico e é apoiada ao solo por um de seus vértices e escorada por pilares em outros três vértices. Seu formato tem base na forma química elementar de um cristal de ferro (daí o motivo da esfera em seu interior) ampliado 165 bilhões de vezes, com uma altura de 102 metros. Segundo o *site* oficial do monumento (ATOMIUM, 2018), essa construção abriga, atualmente, várias exposições de arte sendo possível subir até algumas das esferas que representam os vértices do cubo. O objetivo de sua construção, concluída em 1958, foi motivar o uso pacífico da energia atômica.



Figura 5 – Estrutura arquitetônica Atomium

Fonte: Autoria própria.

O Futuroscope, parque francês situado à 300 km de Paris na cidade de Chasseneuil-du-Poitou, é outro exemplo. Orientado para o futuro, possui diversos brinquedos e atrações que utilizam tecnologia de ponta, além de restaurantes, centro de congressos, hotéis e laboratórios de pesquisa. Um de seus prédios, Figura 6, foi construído representando um conjunto de cristais inclinados em 60° , todo revestido por espelhos que tem a função de refletir tudo a sua volta assim, a sua aparência muda conforme a posição do expectador.



Figura 6 – Edifício do parque Futuroscope: (a) vista frontal; (b) vista lateral

Fonte: Futuroscope (2010).

Em muitos casos, o ser humano utilizou as formas geométricas para expressar algum sentimento, como a Praça Paraná, Figura 7, localizada na cidade de Porto União (SC), vizinha de União da Vitória (PR). Há muito tempo, as duas cidades formavam uma única cidade conhecida como Porto União da Vitória. Após a Guerra do Contestado (1912 a 1916), ocorreu a sua divisão, ficando uma parte da cidade para cada estado. Segundo informações do *site* da Prefeitura de Porto União (PREFEITURA... , 2018), o cubo feito de ferro e equilibrado em um de seus vértices simboliza a força e o equilíbrio que deve haver entre as duas cidades.



Figura 7 – Escultura de um cubo na Praça Paraná - Porto União (SC)

Fonte: Autoria própria.

A Biblioteca Nacional da Bielorrússia, Figura 8(a) e 8(b), que, segundo Motulsky (2018), é conhecida como “diamante bielorusso”, é o maior centro de informação e cultura do país e sua estrutura utiliza um rombicuboctaedro (Poliedro Arquimediano) que, para seus arquitetos, simboliza “os valores espirituais e materiais armazenados na biblioteca, coletados pela humanidade por milênios”.



Figura 8 – Biblioteca Nacional da Bielorrússia: (a) vista diurna; (b) vista noturna

Fonte: Motulsky (2018).

Os poliedros também aparecem como recursos computacionais em construções digitais da computação gráfica, onde as superfícies dos objetos são formadas por várias faces de um mesmo poliedro. De acordo com Bortolossi (2009), para aumentar a qualidade e definição de uma imagem é aplicado um processo recursivo que divide as faces em faces menores tornando o contorno da imagem mais suave, Figura 9.

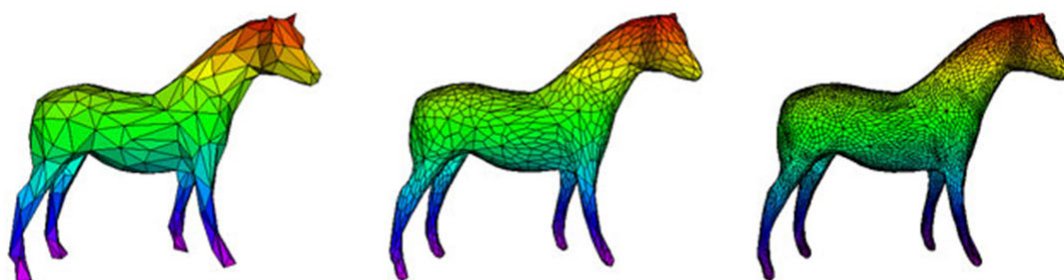


Figura 9 – Melhorando a qualidade de uma imagem através da divisão das faces do poliedro

Fonte: Bortolossi (2009).

Para chegar a essas maravilhas arquitetônicas e construções digitais, muitos estudos foram realizados desde a antiguidade. Platão foi um dos grandes expoentes no estudo de poliedros e, atualmente, no Ensino Básico, fazemos um grande uso de suas descobertas. Salientamos que em um primeiro momento apresentaremos algumas definições e características de alguns poliedros, mas só faremos maiores explicações sobre as mesmas no capítulo 3.

2.3 POLIEDROS DE PLATÃO

De acordo com Lemos (2015), os Poliedros Platônicos ou Poliedros de Platão, Figura 10, têm as seguintes características:

- são convexos;
- as faces são polígonos regulares congruentes;
- os vértices são congruentes, ou seja, cada vértice pertence à mesma quantidade de polígonos.

Eles têm esse nome por terem sido estudados e divulgados pelo matemático e filósofo grego Aristócles (428/427 a.C. - 348/347 a.C.), mais conhecido como Platão que em grego significa “ombros largos”.

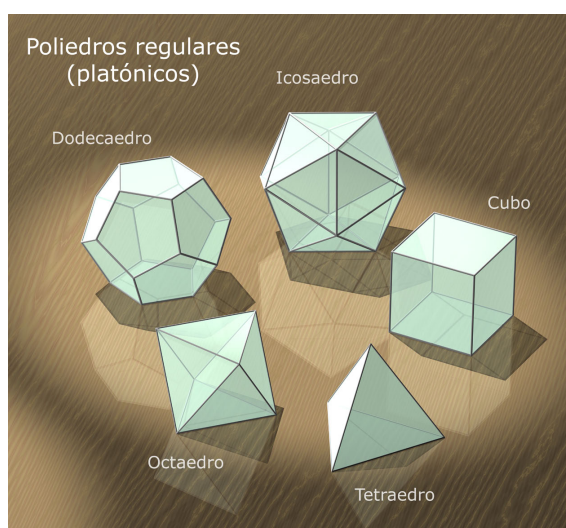


Figura 10 – Os cinco Poliedros de Platão

Fonte: Atractor (2018).

Em Atractor (2018) é possível encontrar textos, imagens, materiais interativos, animações e programas que envolvem Matemática como o Kaleidotile (WEEKS, 2018), que apresenta diversos poliedros e permite, de forma interativa, inserir imagens em suas faces.

Segundo Jreige (2015), Platão foi o primeiro matemático a demonstrar que existem apenas cinco poliedros regulares, no entanto, segundo Rooney (2012), embora se atribua a Platão a descrição dos Sólidos Platônicos, na Escócia foram encontradas esferas de pedras entalhadas com formas que representam as características desses sólidos, Figura 11. Atualmente elas estão sob a guarda do Museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido, e estima-se que foram esculpidas mil anos antes de Platão descrever esses cinco sólidos.



Figura 11 – Esculturas em pedra com características dos cinco Sólidos de Platão

Fonte: WooWoo (2016).

Jreige (2015) concorda que os pitagóricos já haviam reconhecido a existência desses poliedros, pois evidências mostram que os egípcios utilizaram alguns deles em sua arquitetura e em outros objetos construídos por eles. Boyer e Merzbach (2012) acreditam que seja possível que Teatetus (414 a.C. - 369 a.C.), amigo de Platão, foi o primeiro a escrever sobre o assunto e que, provavelmente, se deve a ele o teorema que diz que há apenas cinco desses poliedros.

Ainda, de acordo com Jreige (2015), não há indícios de documentos escritos por Platão que tenham trazido contribuições matemáticas inéditas para a humanidade, pois muito de seu trabalho foi de formalização de conhecimentos de outras pessoas. No entanto, há grandes indícios de sua contribuição para o desenvolvimento da Matemática através de sua escola, a Academia Platônica de Atenas, que se tornou o centro matemático do mundo em meados do século 4 a.C. Na Figura 12 vemos uma ilustração da Academia de Atenas pintada pelo italiano Rafael Sanzio entre 1509 e 1511 e, ao centro e à esquerda, Platão segurando seu diálogo intitulado Timeu, ao lado de seu discípulo Aristóteles. Nessa obra também estão representados, ainda que de épocas distintas, diversos pensadores gregos.



Figura 12 – Representação da Academia de Atenas

Fonte: Wikipedia (2018).

Segundo Boyer e Merzbach (2012), Platão escreveu vários diálogos, no entanto, muitos deles raramente mencionavam algo sobre Matemática. Sendo convertido à uma visão matemática por seu amigo Arquitas de Tarento, em uma viagem à Sicília em 388 a.C. Possivelmente, foi nessa viagem que conheceu os cinco poliedros regulares e a associação feita com os quatro elementos terra, fogo, água e ar.

Mais tarde, já perto dos 70 anos de idade, em um diálogo intitulado *Timaeus de Locri* (ou simplesmente Timeu), Platão utilizou esses poliedros para explicar fenômenos científicos e cosmológicos, o que acabou por torná-los conhecidos como “corpos cósmicos” ou “Sólidos Platônicos”. Além disso, ele complementou a história associando o dodecaedro como o símbolo do Universo afirmando, segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 78), que “Deus usou-o para o todo”, Figura 13.

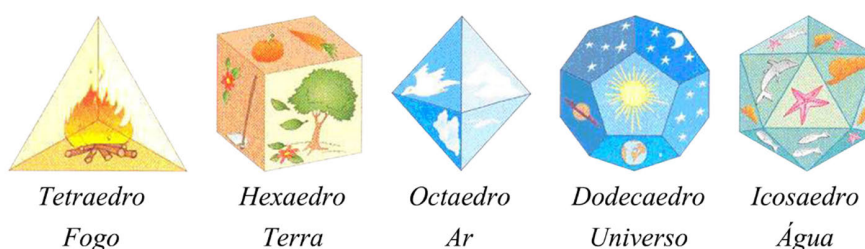


Figura 13 – Associação de Platão dos elementos aos sólidos regulares

Fonte: Lemos (2015).

Platão (2010) explica em seu diálogo Timeu que, conforme o filósofo grego Empedócles (nascido em Agrigento em torno de 484/481 a.C. e falecido por volta de 424/421 a.C.) afirmava, o Universo foi construído utilizando-se apenas os elementos ar, água, fogo e terra, denominados “raízes de todas as coisas”. Platão acreditava que o Demiurgo (deus criador do Universo) utilizou formas e números para moldar esses elementos tornando-os “tão belos e excelentes quanto possível” (Platão, 2010, p. 210) e que não haveria outra explicação melhor que essa.

Ressaltamos que, segundo Reale (2014), Platão se refere aos números no sentido metafísico, ou seja, o número dois representa a essência da dualidade dos elementos, o três a essência da triadidade e assim por diante. E, conforme explica Reale (2014, p. 94), os números citados por Platão “são as essências dos números matemáticos e, como tais, são não-operacionais, a saber, não podem submeter-se às operações aritméticas”.

Assim, quando dizemos que o Demiurgo utilizou “números para moldar esses elementos” queremos dizer que ele observou as relações que haviam entre os elementos, como a secura da terra e a umidade da água.

De acordo com Platão (2010), a molécula de terra tem o formato de um hexaedro, a de fogo de um tetraedro, a molécula de ar tem o formato de um octaedro e a de água de um icosaedro (PLATÃO, 2010, p. 213 - 214):

[...] atribuímos a forma cúbica à terra, já que dos quatro tipos a terra constitui o corpo mais imóvel e o mais plástico; de fato, [...] o quadrado [...] possui uma base mais estável do que o triângulo equilátero. [...] entre as demais figuras a menos móvel à água, a mais móvel ao fogo e figura intermediária ao ar; isso significa, ademais, que atribuímos o corpo mais diminuto ao fogo, o maior à água e o intermediário ao ar; por outro lado, do ponto de vista da agudeza das bordas, o primeiro mais agudo é atribuído ao fogo, o segundo mais agudo ao ar e o terceiro mais agudo à água. No tocante a esses corpos sólidos, o que possui o menor número de bases é necessariamente o mais móvel, visto que ele, mais do qualquer outro, possui as bordas mais cortantes e mais aptas ao corte em todas as direções. É necessariamente o mais leve porque composto do número mínimo de partes idênticas. O segundo corpo se posiciona em segundo lugar na posse dessas mesmas propriedades, e o terceiro corpo ocupa a terceira posição.

Ainda, segundo Platão (2010, p. 214), “devemos conceber todos esses [corpos] tão diminutos a ponto de nenhum deles, se tomado isoladamente e na sua individualidade de seu tipo, ser visível para nós; quando, porém, muitos deles formam uma coletividade, suas massas são visíveis”. Além disso, Platão (2010, p. 213) afirma que “percebendo a presença remanescente de uma quinta figura composta, deus a utilizou para a decoração do Universo”.

Acreditamos que tal relação feita por Platão se deve à procura de uma explicação lógica para a criação do Universo. Diante da contemplação de uma divindade (o Demiurgo), que acreditava ter criado todo o Universo em suas formas complexas e da beleza presente nos cinco poliedros regulares, Platão se viu tentado a relacioná-los, tal como fez Johannes Kepler, aproximadamente, 1900 anos depois, conforme veremos na Seção 2.5.

2.4 POLIEDROS ARQUIMEDIANOS

Nos Sólidos Platônicos, como mencionado, além de convexos, todas as faces são polígonos regulares congruentes e todos os vértices são congruentes. Se retirarmos a congruência dos polígonos, ou seja, todas as faces são polígonos regulares, mas podem ser de diversos tipos, segundo Kappraff (2001), Veloso (1998) e Schattschneider e Walker (2013), teremos novas possibilidades para formar poliedros como os poliedros semirregulares equiangulares ou Sólidos (Poliedros) Arquimedianos, como, por exemplo, o cuboctaedro, Figura 14, e o icosaedro truncado, Figura 15.



Figura 14 – Cuboctaedro ilustrado com a obra Limite Circular III de Escher

Fonte: Autoria própria - confeccionado a partir do molde disponibilizado em Schattschneider e Walker (2013).



Figura 15 – Escultura no formato de um icosaedro truncado fixado em frente ao departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Fonte: Autoria própria.

Note que ambos satisfazem à condição citada, pois são convexos, sendo que o cuboctaedro é formado por 6 quadrados e 8 triângulos equiláteros e em cada vértice incidem 4 polígonos. Já o icosaedro truncado é formado por 20 hexágonos regulares e 12 pentágonos regulares e em cada vértice incidem 3 polígonos. Podemos observar algumas dessas características utilizando a planificação desses poliedros através do *software* Poly (UFRGS, 2018), Figura 16.

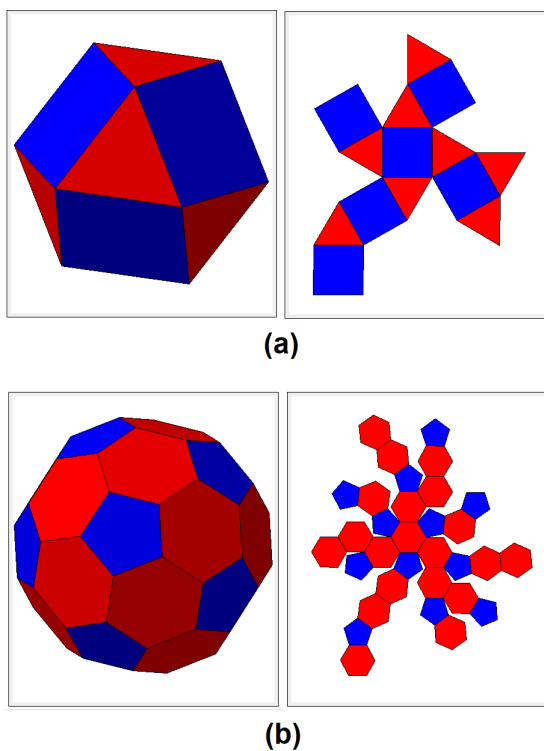


Figura 16 – Poliedro Arquimediano e sua planificação gerados no Poly: (a) cuboctaedro; (b) icosaedro truncado

Fonte: Autoria própria.

De acordo com Veloso (1998), os infinitos prismas e antiprismas cujas faces são polígonos regulares, em geral, não são incluídos na família dos Sólidos Arquimedianos.

Kappraff (2001) explica que um dos motivos da distinção se deve ao fato de que os treze Sólidos Arquimedianos podem ser inscritos em um tetraedro regular sendo que quatro faces desse poliedro estejam contidas nas faces do tetraedro, como podemos observar na Figura 17 utilizando um cuboctaedro. Nas imagens, os triângulos em vermelho estão contidos nas faces do tetraedro.

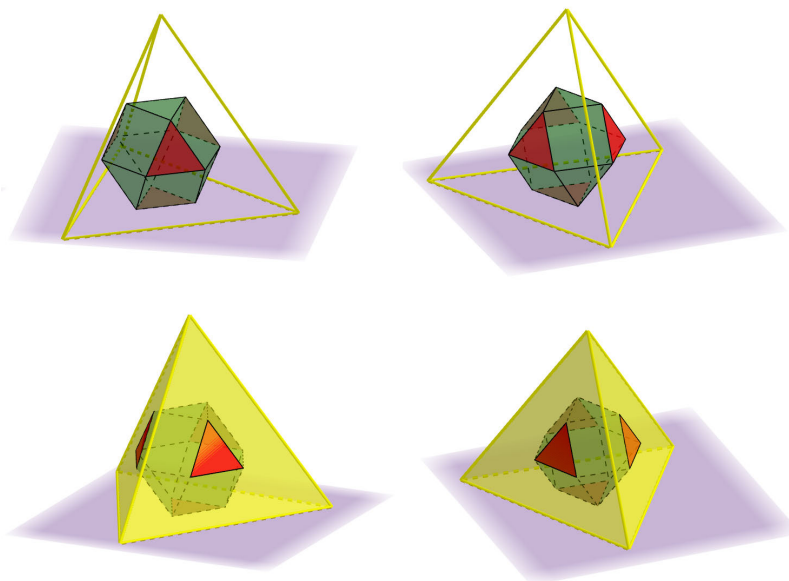


Figura 17 – Visualizações de um cuboctaedro inscrito em um tetraedro

Fonte: Autoria própria.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), aproximadamente em 320 d.C., Pappus de Alexandria publicou uma coleção de oito livros intitulada *Synagoge* (que significa Coleção) e em seu quinto volume tivemos o primeiro registro da descoberta de Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) sobre os treze poliedros semirregulares ou Sólidos Arquimedianos, Figura 18.

De acordo com Bortolossi (2009), os treze Poliedros Arquimedianos são o tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, cubo *snub* (ou cubo duplamente truncado ou cubo achatado), cuboctaedro, dodecaedro *snub* (ou dodecaedro duplamente truncado ou dodecaedro achatado), icosidodecaedro, rombicuboctaedro (ou pequeno rombicuboctaedro), grande rombicuboctaedro (ou cuboctaedro truncado), rombicoidodecaedro (ou pequeno rombicoidodecaedro) e grande rombicoidodecaedro (ou icosidodecaedro truncado).

Veloso (1998) complementa que só em 1619, em seu livro *Harmonices Mundi*, Johannes Kepler ilustrou e atribuiu nomes a esses poliedros, além de provar que, exceto pelos prismas e antiprismas, só existiam treze Sólidos Arquimedianos.

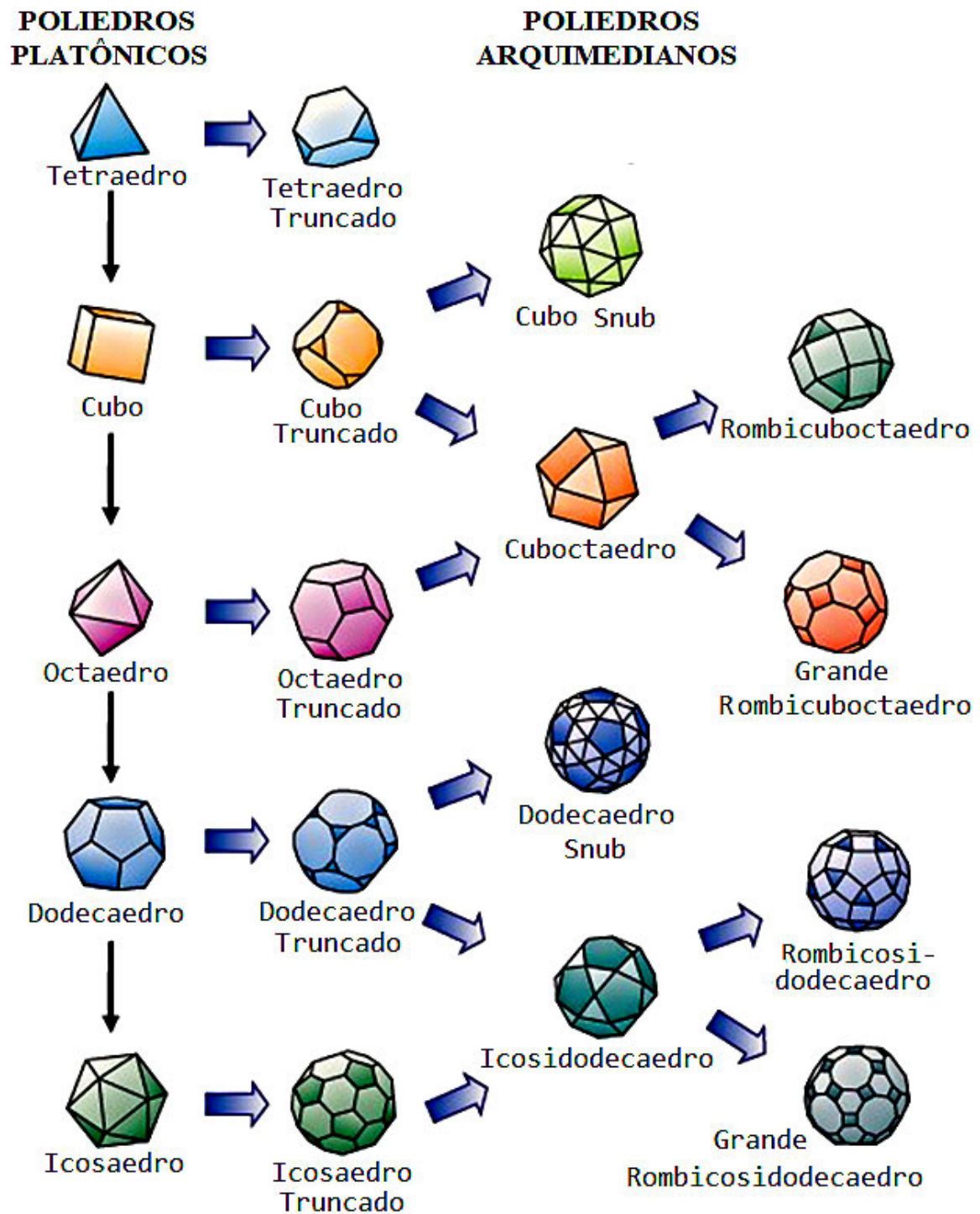


Figura 18 – Sólidos Arquimedianos e suas relações com os Sólidos Platônicos

Fonte: Adaptado de Mates (2018).

Alguns autores, como Veloso (1998), defendem que a definição dada por Arquimedes para os seus sólidos não é suficiente, pois existem variações de alguns deles que preservam as características citadas, porém não são considerados Sólidos Arquimedianos.

Um exemplo disso, é o pseudo-rombicuboctaedro, Figura 19, que é obtido girando, por exemplo, a parte inferior do rombicuboctaedro.

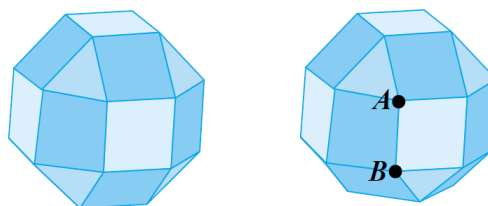


Figura 19 – Rombicuboctaedro e pseudo-rombicuboctaedro, respectivamente

Fonte: Veloso (1998).

De acordo com Kappraff (2001) esse poliedro não é Arquimediano, pois não é possível inseri-lo em um tetraedro regular como mencionado anteriormente. Já para Veloso (1998, p.235), “é ainda necessário acrescentar a condição de que todo o vértice pode ser transformado noutra vértice por uma simetria do poliedro”. Observando a Figura 19, conforme explica Veloso (1998, p.241), “não existe nenhuma transformação de simetria do poliedro que transforme o vértice A no vértice B, por exemplo”. Ao observar os polígonos envolvidos a cada vértice das faces quadradas do rombicuboctaedro e de seu pseudo, podemos notar as diferenças.

O *site* Visual Polyhedra (MCCOOEY, 2015) disponibiliza a visualização e interação digital com os Sólidos Arquimedianos, e maiores informações sobre o pseudo-rombicuboctaedro também podem ser encontradas no *site* Matematicas Visuales (CARDIL, 2018).

Atractor (2018) oferece a visualização, interação e a planificação desses poliedros e em Almeida (2010) há um estudo detalhado sobre os Sólidos Arquimedianos.

2.4.1 Rombo, truncatura e snubificação

Quando lemos os nomes dos Sólidos Arquimedianos percebemos termos derivados das palavras rombo, truncatura e snubificação.

Para Veloso (1998), o prefixo *rombi* se deve ao fato de que esses poliedros podem ser inscritos em sólidos com faces rômbricas, ou seja, faces em forma de losangos. Assim, um romboedro ou poliedro rômbrico é um poliedro formado apenas por faces losangulares.

Segundo Melo (2014), dos treze sólidos de Arquimedes, onze são obtidos através de cortes (também denominados como truncamentos ou truncaturas) feitos de maneira adequada a partir de seus vértices.

Apresentamos, na Figura 20, o processo de truncatura feito em um cubo e em um octaedro até obter um cuboctaedro. Os cortes são feitos perpendicularmente ao eixo de simetria de rotação que passa em cada vértice (nesse caso, os eixos coincidem com retas que passam por dois vértices opostos) até que os polígonos formados tenham arestas de mesma medida, ou seja, até obtermos

polígonos regulares em todas as faces. Quando os cortes atingem o ponto médio das arestas do cubo e do octaedro teremos um cuboctaedro, mas antes de chegar ao ponto médio das arestas, também é possível encontrar o cubo truncado e o octaedro truncado.

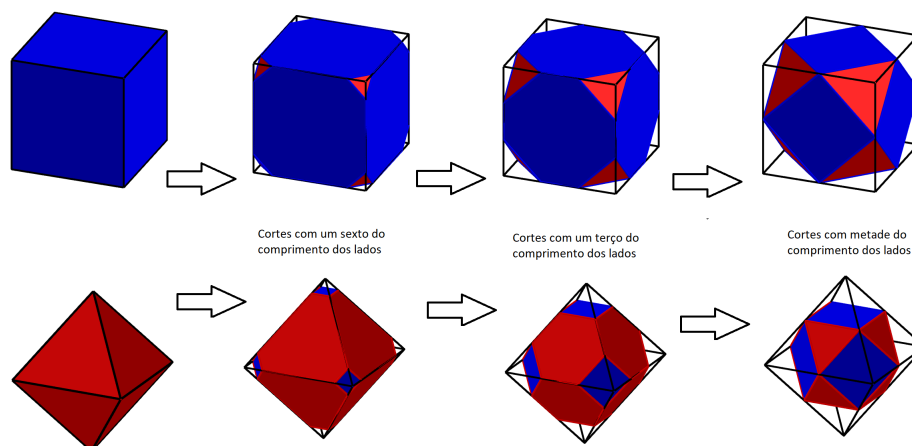


Figura 20 – Truncaturas do cubo e octaedro até formar um cuboctaedro

Fonte: Autoria própria.

Para confeccionar tal imagem utilizamos o *software* GeoGebra que, segundo informações de seu *site* (GEOGEBRA, 2018), reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único programa de fácil utilização.

Já a snubificação, segundo Veloso (1998) tem origem na palavra inglesa *snub* que traduzida para o português significa achatado. Entre os Poliedros Arquimedianos, temos dois poliedros formados por esse processo, o cubo achatado e o dodecaedro achatado ou o cubo *snub* e o dodecaedro *snub*.

De acordo com Melo (2014), a snubificação ou achatamento é o processo de afastar as faces de um poliedro, sendo, em alguns casos, necessário rotacioná-las, preenchendo os espaços formados entre elas com outros polígonos. No caso do cubo *snub*, Figura 21, os quadrados (faces) de um cubo são afastados e rotacionados em 45° e os espaços são preenchidos com 32 triângulos equiláteros. O processo de snubificação do dodecaedro pode ser visto no vídeo de Falcolini (2018).

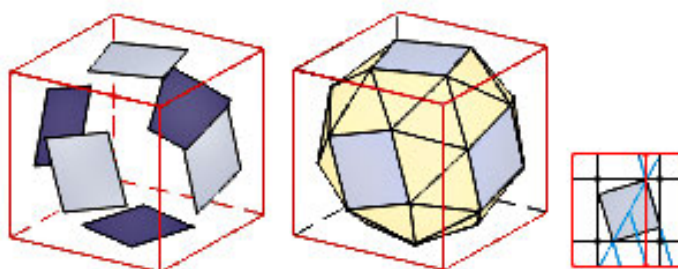


Figura 21 – Snubificação do cubo

Fonte: Martinez (2018).

2.5 POLIEDROS DE KEPLER E POINSOT

O cientista alemão Johannes Kepler que, segundo Sartor (2013), nasceu em 1571 e veio a falecer aos 59 anos de idade, era professor de astronomia e acreditava que existia uma explicação matemática para tudo no Universo. Ele tentou relacionar a existência de seis planetas, visto que naquela época se tinha conhecimento apenas de Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, aos únicos cinco poliedros convexos regulares existentes, conhecidos como Sólidos de Platão. Ainda, para Sartor (2013, p. 38), Kepler “construiu uma espécie de sistema solar, onde colocava os cinco Sólidos Platônicos uns dentro dos outros, separados por esferas concêntricas”, Figura 22 e Figura 23.

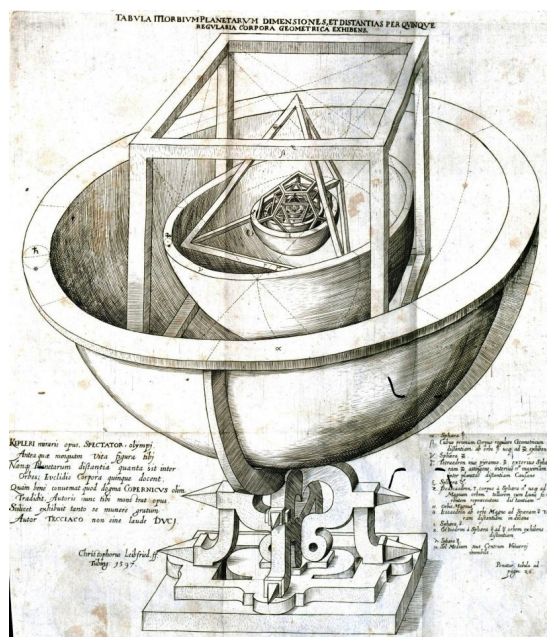


Figura 22 – Sistema solar desenvolvido por Johannes Kepler

Fonte: Clapham... (2018)



Figura 23 – Reprodução do sistema solar criado por Johannes Kepler em exposição em Viena, Áustria, no Technisches Museum

Fonte: Bortolossi e Silva (2009).

De acordo com Kappraff (2001), o astrônomo acreditava que as esferas representavam as órbitas dos planetas, mas não chegou a fazer observações mais precisas a respeito de sua conjectura.

Sartor (2013) ressalta que esse sistema perdeu toda sua credibilidade após a descoberta de novos planetas (Urano, Netuno e Plutão). Kappraff (2001) conclui que essa teoria, no entanto, tornou Kepler famoso, possibilitando o contato com um grande astrônomo da época chamado Tycho Brahe. Esse contato possibilitou a Kepler formular e comprovar a teoria de que a órbita dos planetas era elíptica e que o Sol está em um de seus focos, tornando-se, assim, ainda mais conhecido.

No estudo de sua teoria sobre poliedros e planetas, segundo Rooney (2012), Kepler, em 1619, descobriu dois poliedros estrelados regulares (pequeno dodecaedro estrelado e grande dodecaedro estrelado) e quase 200 anos depois, Louis Poincot (1777 - 1859) descobriu outros dois (grande dodecaedro e grande icosaedro) e, na sequência, Augustin Cauchy provou que não haviam mais poliedros estrelados regulares. Ainda, segundo esse autor, o pequeno dodecaedro estrelado aparece no piso de mármore da Basílica de São Marcos em Veneza, Itália, Figura 24, e data do século anterior ao nascimento de Kepler, o que sugere que ele, assim como fez Platão, não os descobriu, mas sim os estudou e divulgou.



Figura 24 – Pequeno dodecaedro estrelado em forma de mosaico no piso da Basílica de São Marcos, na Itália

Fonte: Pierapanizzuti (2011).

Esses quatro poliedros ficaram conhecidos como Poliedros de Kepler-Poincot e têm, exceto pela convexidade, as mesmas características dos Sólidos de Platão. Na Figura 25(a), da esquerda para a direita, podemos visualizar o grande dodecaedro estrelado, o pequeno dodecaedro estrelado, o grande icosaedro e o grande dodecaedro e, na Figura 25(b), as arestas desses poliedros.

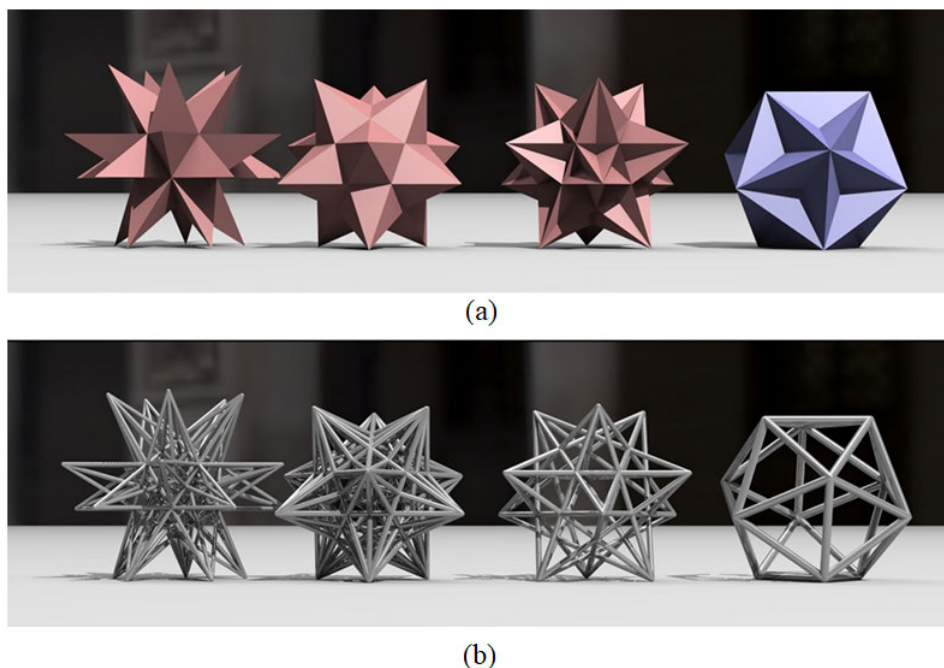


Figura 25 – Poliedros de Kepler-Poinsot: (a) visualização das faces; (b) visualização das arestas

Fonte: Pragnell (2009).

Para compreender como se formam os poliedros estrelados, vamos entender primeiramente como estrelar um polígono regular.

Segundo Lima, Luz e Góes (2013, p. 6), “estrelar um polígono significa prolongar seus lados. Se esse processo gerar um novo polígono e, se este não for dado pela sobreposição de polígonos, diremos que o polígono é estrelado”.

Na Figura 26(a) vemos a estrelação de um pentágono regular, conhecido como pentagrama, (b) de um hexágono regular, que não é considerado um polígono estrelado, pois é formado pela sobreposição de dois triângulos equiláteros e em (c) as duas possíveis estrelações de um heptágono regular.

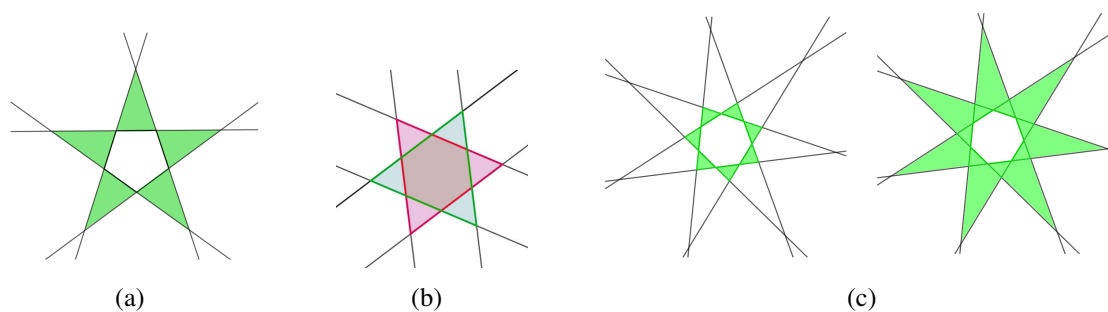


Figura 26 – Estrelações de alguns polígonos regulares: (a) do pentágono regular; (b) do hexágono regular; (c) do heptágono regular

Fonte: Autoria própria.

A estrelação de um poliedro, de acordo com Veloso (1998), é um processo análogo ao dos polígonos, ou seja, basta prolongar suas faces e, caso se encontrem, teremos um poliedro estrelado. No entanto, esse processo é considerado mais complexo de se realizar. Na Figura 27, temos um exemplo de como é feita a estrelação do dodecaedro.

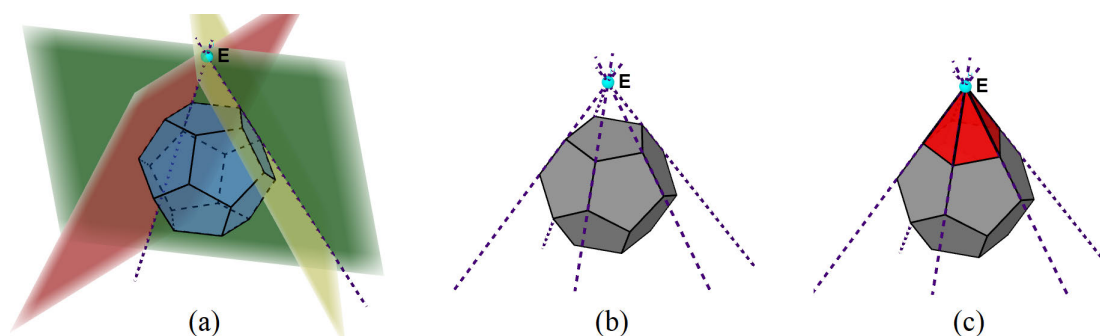


Figura 27 – Processo de estrelação do dodecaedro

Fonte: Adaptado de Fortran (2001).

Observe, na Figura 27(a), que o ponto E é a interseção do prolongamento de algumas das faces do dodecaedro, logo, será um dos vértices do poliedro estrelado. Após realizar esse mesmo processo em todas as faces do dodecaedro, conseguiremos formar o pequeno dodecaedro estrelado, Figura 28(b), que por sua vez, ao ser estrelado, irá gerar o grande dodecaedro, Figura 28(c), e, repetindo o processo, teremos o grande dodecaedro estrelado, Figura 28(d). Segundo Weisstein (2018b), esses nomes, provavelmente, foram dados pelo matemático Arthur Cayley, que os utilizou pela primeira vez em 1859.

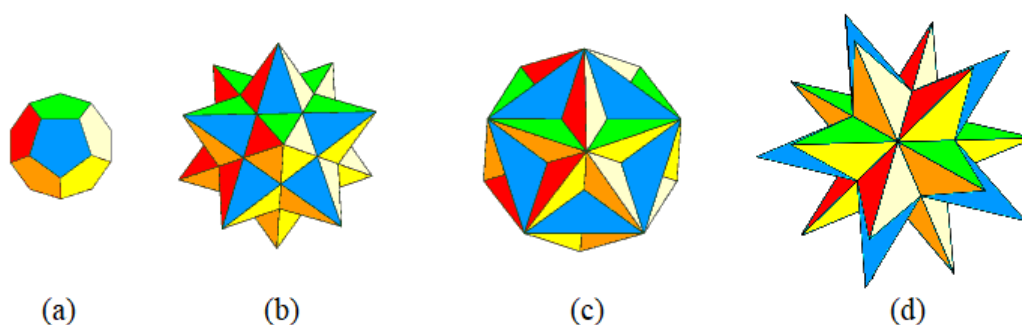


Figura 28 – Estrelações a partir do dodecaedro: (a) dodecaedro; (b) primeira estrelação; (c) segunda estrelação; (d) terceira estrelação

Fonte: Adaptado de Fortran (2001).

A noção de face, aresta e vértice nos poliedros estrelados, segundo Lima, Luz e Góes (2013), não é exatamente a mesma nos poliedros convexas. No pequeno dodecaedro estrelado (primeira estrelação do dodecaedro) presente na Figura 28(b), por exemplo, existem 12 faces

correspondentes às 12 faces do dodecaedro que foram expandidas para a estrelação, sendo que essas faces têm forma de pentagramas, como da Figura 26(a).

As interseções dessas faces geram as 30 arestas presentes nesse poliedro, assim, as arestas do pequeno dodecaedro estrelado que coincidem com as arestas do dodecaedro não são consideradas (também chamadas de falsas arestas). Além disso, ele possui 12 vértices que são as extremidades superiores das pirâmides formadas em sua estrelação (já os outros pontos de interseções dos triângulos são chamados falsos vértices).

Para uma visualização digital em 3D dos poliedros de Kepler-Poinsot (e de vários outros), recomendamos ver McCooey (2015). Para contemplar como esses poliedros estrelados são formados, também recomendamos assistir o vídeo “Kepler-Poinsot Polyhedra” de PMEDig (2011).

Não existem apenas esses quatro poliedros estrelados, o Sólido de Escher, que veremos adiante na Figura 63, é uma das possíveis estrelações do dodecaedro rômbo (Sólido de Catalan), Figura 29.

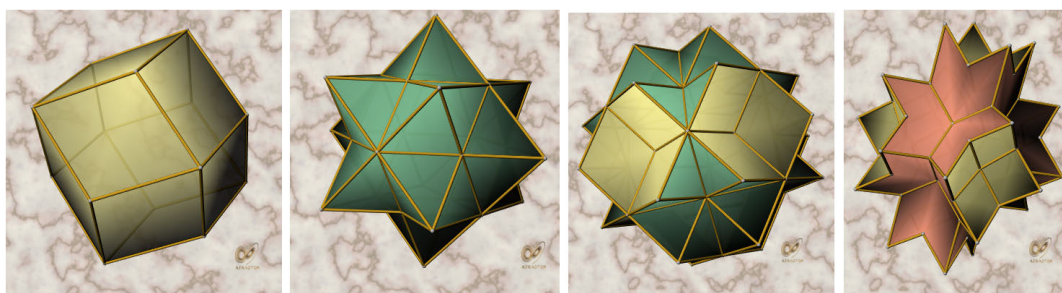


Figura 29 – Dodecaedro rômbo e suas estrelações

Fonte: Atractor (2018).

2.6 SÓLIDOS DE CATALAN

Segundo Veloso (1998), Eugène Charles Catalan (1814 - 1894) estudou na escola de engenharia francesa École Polytechnique (fundada em 1794 e ainda em funcionamento) de onde foi expulso devido às suas ideias políticas de extrema esquerda. No entanto, alguns anos depois, retornou ao estabelecimento de ensino, dessa vez como professor de Geometria Descritiva. Nascido na Bélgica, foi um matemático que teve reconhecimento pelo estudo desenvolvido sobre a dualidade nos poliedros. Em especial, seu estudo sobre os duais dos treze Sólidos Arquimedianos publicado em 1865 deu origem ao que hoje conhecemos como Sólidos de Catalan (que também são treze).

Como vimos, os Sólidos Arquimedianos possuem vértices congruentes e faces regulares, mas que não são congruentes, pois podem ser formados por polígonos de vários tipos. Já os Sólidos de Catalan possuem faces congruentes, mas que não são regulares, além disso, não possuem vértices congruentes.

Na Figura 30 podemos ver esses sólidos ao lado de seu dual Arquimediano, bem como a quantidade de vértices e faces que os relacionam. A quantidade de arestas se mantém igual para o Sólido de Catalan e seu respectivo dual.

Legenda: F = número de faces; V = número de vértices

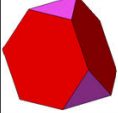

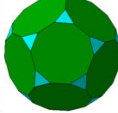
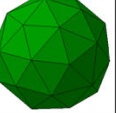
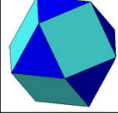
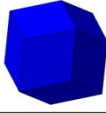
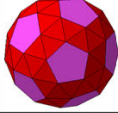
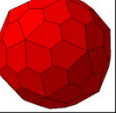
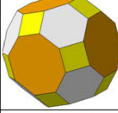
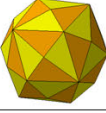
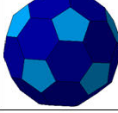
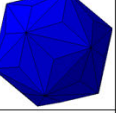
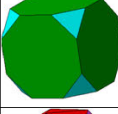
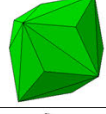
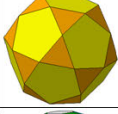
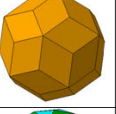
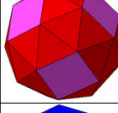
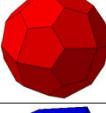
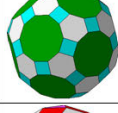
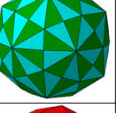
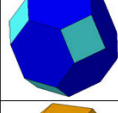
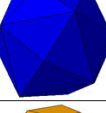
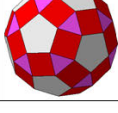
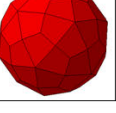
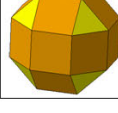
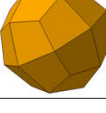
Sólido Arquimediano		Sólido de Catalan				Sólido Arquimediano		Sólido de Catalan							
F	V	Nome	Imagem	Imagem	Nome	F	V	F	V	Nome	Imagem	Imagem	Nome	F	V
8	12	Tetraedro truncado			Tetraedro triakis	12	8	32	60	Dodecaedro truncado			Dodecaedro pentakis	60	32
14	12	Cuboctaedro			Dodecaedro rômico	12	14	92	60	Dodecaedro achatado			Hexacontaedro pentagonal	60	92
26	48	Cuboctaedro truncado			Dodecaedro disdiakis ou octaedro hexakis	48	26	32	60	Icosaedro truncado			Icosaedro triakis	60	32
14	24	Cubo truncado			Octaedro triakis	24	14	32	30	Icosidodecaedro			Triacontaedro rômico	30	32
38	24	Cubo achatado			Icositetraedro pentagonal	24	38	62	120	Icosidodecaedro truncado			Triacontaedro disdiakis ou icosaedro hexakis	120	62
14	24	Octaedro truncado			Hexaedro tetrakis	24	14	62	60	Rombicosidodecaedro			Hexacontaedro deltoidal	60	62
26	24	Rombicuboctaedro			Icositetraedro deltoidal	24	26								

Figura 30 – Sólidos de Catalan e seus duais Arquimediano

Fonte: Autoria própria.

Alguns poliedros possuem terminologia *akis* que significa pontiagudo ou afiado, precedida por um termo matemático que designa quantidade como tri, tetra, penta etc. Assim, por exemplo, um tetraedro triakis, possui 4 faces que são divididas, cada uma, por 3 triângulos em formato de pirâmide formando a parte pontiaguda do poliedro.

2.6.1 Dualidade de poliedros

Conforme Exel (2010, p. 2), “dado um poliedro convexo qualquer, para cada uma de suas faces F , considere o seu baricentro F' . O poliedro dual é definido como sendo a envoltória convexa dos pontos F' assim obtidos”. Por conseguinte, o número de faces e vértices do poliedro primal (original) é igual ao número de vértices e faces do dual, respectivamente. Temos, por exemplo, que o cubo (6 faces e 8 vértices) é o dual do octaedro (8 faces e 6 vértices).

Segundo Bortolossi (2009), Kepler também explorou a ideia da dualidade nos Sólidos Platônicos publicando-a em seu livro “A Harmonia dos Mundos” em 1619, Figura 31.

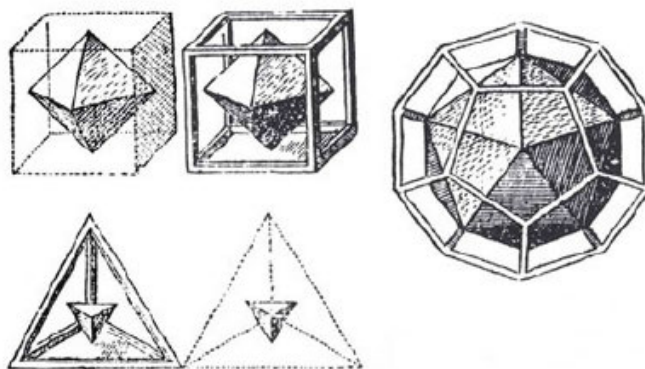


Figura 31 – Estudo da dualidade nos Sólidos Platônicos feita por Johannes Kepler

Fonte: Bortolossi (2009).

Na Figura 31 (ALMEIDA, 2015, p. 10), “se considerarmos um Sólido Platônico qualquer e unirmos os pontos centrais das faces adjacentes, obteremos um novo sólido. Esses dois são duais um do outro”.

Dessa forma o cubo é o dual do octaedro, o dodecaedro é dual do icosaedro e o tetraedro é dual dele mesmo (e vice-versa em todos os casos), Figura 32.

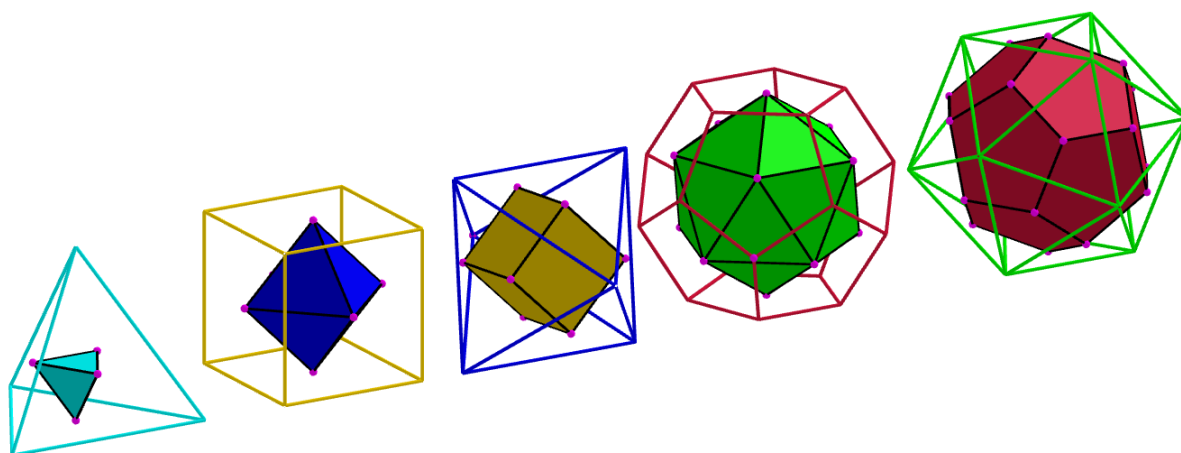


Figura 32 – Sólidos Platônicos e seus duais

Fonte: Autoria própria.

No entanto, segundo (ALMEIDA, 2015, p. 10), esse processo para obter o dual de um poliedro ligando os centros das faces não é válido para qualquer poliedro convexo.

Na Figura 33, ilustramos essa situação ao tentar encontrar um dodecaedro rômbo, que é o dual do cuboctaedro, pelo método citado anteriormente.

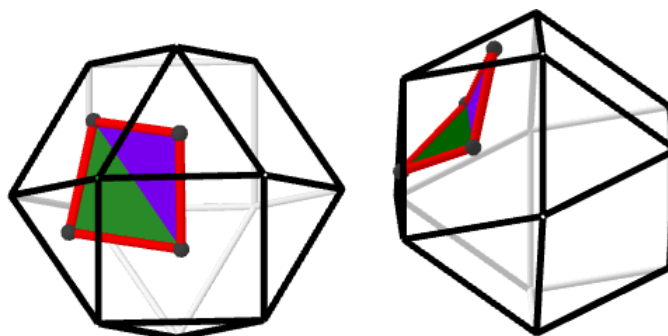


Figura 33 – Tentativa de encontrar o dual do cuboctaedro

Fonte: Autoria própria.

Note que aparentemente conseguiríamos, unindo os centros das faces adjacentes do cuboctaedro (CO), encontrar as faces losangulares de um dodecaedro rômbo (DR), mas essas faces não são planas. Já o contrário, é possível, ou seja, utilizando esse método de dualidade é possível encontrar um CO a partir de um DR, Figura 34.

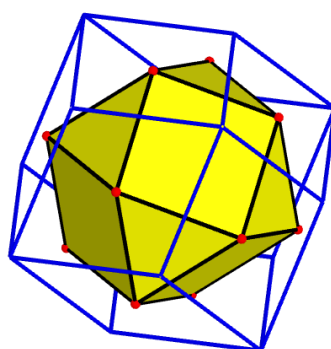


Figura 34 – Cuboctaedro encontrado por dualidade do dodecaedro rômbo

Fonte: Autoria própria.

De forma geral, segundo Veloso (1998) e Kappraff (2001), para identificar se um poliedro convexo A é dual de um poliedro convexo B , basta verificar que a quantidade de vértices de A seja igual a quantidade de faces de B e vice-versa. Além disso, existem outros métodos para construir um dual de um poliedro (também conhecido como primal). Um outro procedimento que, segundo esses autores, pode ser aplicado a todos os poliedros convexos, é:

- inicialmente inscrever o poliedro convexo em uma esfera;
- depois, pelos vértices do poliedro inserir planos tangentes à esfera;
- os polígonos formados pela interseção desses planos delimitam o dual do poliedro.

Nesse caso, os vértices do dual nem sempre estão sobre as faces do poliedro primal, mas sim sobre uma reta que passa por seus centros e é perpendicular às suas faces conforme podemos observar na Figura 35, onde se vê o início do processo para encontrar o dual do cubo (octaedro).

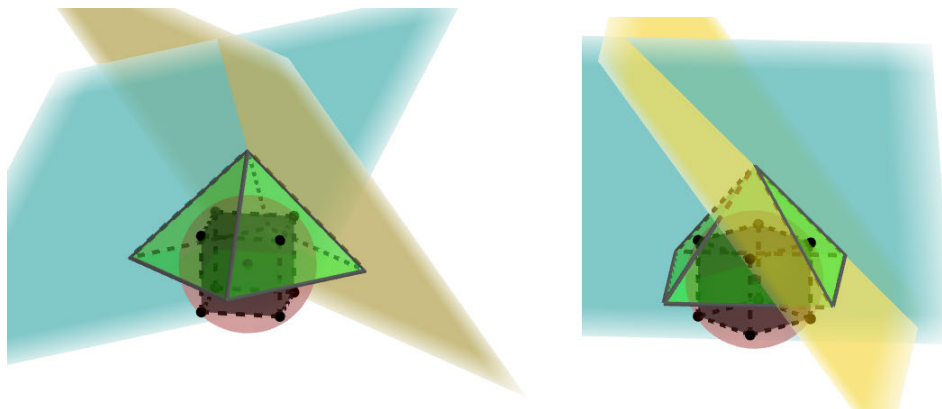


Figura 35 – Encontrando o octaedro através de planos tangentes à uma esfera circunscrita ao cubo

Fonte: Autoria própria.

Então, para encontrar um DR a partir do CO temos que utilizar esse segundo método de dualidade. Observamos na Figura 36 que, devido ao fato do CO ser obtido do truncamento de um cubo, os seus vértices incidem sobre o ponto médio das arestas do cubo que o gerou. Portanto, as diagonais menores das faces losangulares do DR também incidirão e serão congruentes à essas arestas.

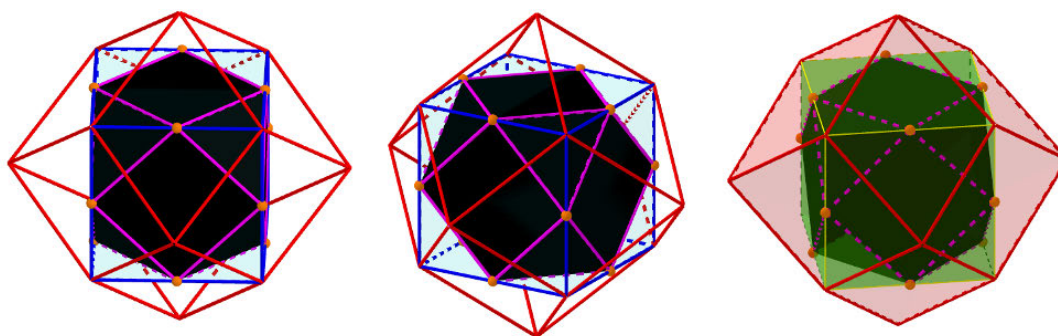


Figura 36 – Visualizações do DR gerado a partir de um CO feito pelo truncamento de um cubo

Fonte: Autoria própria.

2.7 ESCHER E A MATEMÁTICA

Maurits Cornelis Escher, Figura 37, foi um grande entusiasta da Matemática, mesmo não tendo muito conhecimento dessa disciplina. Suas obras de grande destaque versam sobre

a pavimentação do plano e a ilusão de ótica, o que fez de seu trabalho uma referência para o estudo de Geometria.

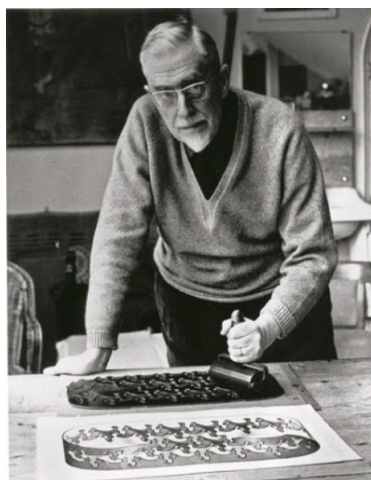


Figura 37 – Maurits Cornelis Escher

Fonte: Diesendruck (2015).

2.7.1 Vida e obras de Escher

Escher nasceu em 17 de junho de 1898, na cidade de Leeuwarden, Holanda. Segundo Ernst (1991), ele pertencia à alta burguesia daquela época e era o caçula dos quatro filhos de George Arnold Escher, um bem sucedido engenheiro-chefe da Companhia de Águas do governo Holandês, e Sarah Gleichmann, filha de um ministro da Fazenda. Seu apelido na infância era Mauk, ele era canhoto e, junto aos seus três irmãos, desde pequeno aprendeu a trabalhar com a madeira e a tocar um instrumento musical, no seu caso, o violoncelo.

No Ensino Médio, Escher não era considerado um aluno excepcional em Matemática. Ele mesmo, em uma entrevista a Ernst (1991, p. 24), afirmou: “Eu nem sequer tive um ‘suficiente’ em Matemática [...] E então agora imaginar que matemáticos ilustram os seus livros com as minhas gravuras!”. Mesmo com um talento que futuramente o tornaria um artista gráfico tão famoso, segundo Ernst (1991), Escher não conseguiu o diploma do Ensino Médio, pois nem suas notas em Arte eram boas.

Após o período de Ensino Médio, foi matriculado por seus pais na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas de Haarlem, Holanda, para seguir a carreira de arquiteto, no entanto não tardou muito e Escher os convenceu que deveria seguir a carreira de artes gráficas. Influenciados por seu professor Samuel Jessurun de Mesquita, seus pais deram apoio total, inclusive financeiro, até mesmo após seu casamento, em 1924 com Jetta Umiker, com a qual teve três filhos.

A partir de 1922, de acordo com Ernst (1991), quando concluiu seus estudos, Escher fez várias viagens principalmente pela França, Suíça, Espanha e Itália. Tais viagens o inspiraram em suas obras e foram contribuindo com o início de sua carreira.

Segundo Lopes (2002, p. 1), as obras de Escher nem sempre representam aquilo que achamos ter visto, “pois há sempre uma surpresa visual à espera do espectador, mas é preciso observar com atenção a representação tridimensional de objetos feita através da bidimensionalidade do papel”.

Escher dizia que em suas gravuras ele tentava mostrar que nosso mundo era belo e ordenado, entretanto, segundo Tjabbes (2010?, p. 11), Escher afirmava: “eu não consigo deixar de brincar com as nossas certezas estabelecidas. Tenho grande prazer, por exemplo, em confundir deliberadamente a segunda e a terceira dimensões, plana e espacial, e ignorar a gravidade”.

Para Schattschneider e Walker (2013, p. 6),

[...] as suas gravuras estão cheias de surpresas visuais inteligentemente projetadas. À primeira vista, muitas das suas obras parecem naturais, mas observando melhor, descobre-se que o que foi tomado como plausível é, na verdade impossível, e o observador é levado a olhar mais uma vez e outra vez, até que descobre as surpresas escondidas que a obra lhe oferece.

Corroborando com Schattschneider e Walker (2013), acreditamos que a chave para o sucesso das obras de Escher se deve aos “mistérios visuais” presentes em suas obras, visto que nem sempre aquilo que se vê, é o que parece ser. Para alcançar tal característica, Escher fez uso de vários conhecimentos matemáticos e, dessa forma, acreditamos que a compreensão destes seria uma ferramenta motivadora para os estudos voltados à Geometria.

Uma das técnicas artísticas adotadas por Escher foi a gravura, que é uma imagem que pode ser impressa repetidas vezes utilizando-se uma matriz de impressão, e ele se especializou em xilogravura e litogravura. A gravura artística é feita de forma artesanal, o que lhe agrega valor devido a sua originalidade e trabalho de confecção. O material da matriz é o que classifica o tipo de gravura. O termo *xilo* vem do grego e significa madeira, logo, na xilogravura, a matriz utilizada é madeira. O artista retira as partes que não recebem cor na impressão da gravura, para isso ele utiliza ferramentas de entalhe e/ou corte, sendo que a matriz deve ser uma superfície plana, como na Figura 38.



Figura 38 – Processo de preparo da matriz na técnica de xilografia

Fonte: Borges (2003).

Em seguida, aplica-se tinta à matriz e esta é pressionada contra um papel ou tecido, análogo ao processo de gravura com carimbo. Assim como com o carimbo, a matriz é feita de forma espelhada para que sua impressão fique da forma correta.

A Figura 39 mostra uma xilogravura Duplo Planetoide, de 37,5 cm de diâmetro, feita em 1949 por Escher utilizando-se quatro blocos de madeira para sua impressão. O poliedro formado é a composição de dois tetraedros regulares. Segundo Escher (1975, p. 13, tradução do autor):

Dois tetraedros regulares, perfurando um ao outro, flutuam no espaço como um planetoide. O de cor clara é habitado por seres humanos que transformaram completamente sua região em um complexo de casas, pontes e estradas. O tetraedro mais escuro permaneceu em seu estado natural, com rochas, onde vivem plantas e animais pré-históricos. Os dois corpos se unem tornando-se um só, mas eles não têm conhecimento um do outro.¹



Figura 39 – Xilogravura: Duplo Planetoide

Fonte: Escher (2018).

Com o passar dos anos e o surgimento de novos materiais, principalmente sintéticos, surgiu a linoleogravura, que tem a mesma ideia de esculpir a matriz assim como na xilogravura, porém sua matriz é uma placa de borracha, chamada linóleo. Escher também utilizou essa técnica em alguns de seus trabalhos.

Já na litogravura, o termo *lito* também vem do grego e significa pedra. Nessa técnica, a matriz utilizada é uma pedra de superfície plana. Essa técnica se distingue da xilogravura, pois não são feitos cortes na matriz, as imagens são desenhadas sobre a pedra utilizando-se um lápis

¹ "Two regular tetrahedrons, piercing each other, float through space as a planetoid. The light-coloured one is inhabited by human beings who have completely transformed their region into a complex of houses, bridges and roads. The darker tetrahedron has remained in its natural state, with rocks, on which plants and prehistoric animals live. The two bodies fit together to make a whole but they have no knowledge of each other." (ESCHER, 1975, p.13).

litográfico (um tipo de lápis onde o grafite é substituído por um material gorduroso) e, após a utilização de alguns produtos químicos, quando a pedra é entintada, ou seja, ao aplicar tinta sobre a matriz, a tinta fixa-se somente sobre a parte da pedra que foi desenhada e, após pressionar o papel sobre a matriz, obtém-se a impressão desejada como na Figura 40.



Figura 40 – Matriz e impressão litográfica

Fonte: Lamorgese (2018).

Na Figura 41, temos uma litogravura de 1960 com 28,5 cm×35,5 cm onde escadas infinitas fazem com que homens caminhem por elas subindo e descendo voltando sempre ao mesmo lugar. Na visão de Escher (1975, p. 15, tradução do autor), “parece que quando eles se cansam, eles podem virar e descer as escadas em vez de subir. No entanto, ambas as direções [...] são igualmente sem utilidade”².



Figura 41 – Litogravura: Ascendente e Descendente

Fonte: Escher (2018).

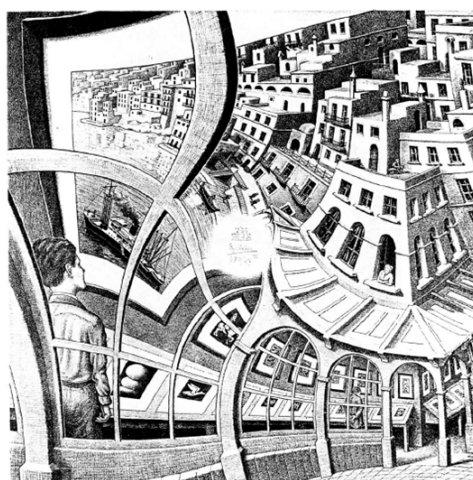
² "It would seem that when they get tired they are allowed to turn about and go downstairs instead of up. Yet both directions [...] are equally useless". (ESCHER, 1975, p. 15).

No *site* da Fundação MC Escher (ESCHER, 2018), criada em 1968 com o objetivo de preservar o legado de seu trabalho, encontramos várias outras obras e informações sobre a vida e o trabalho de Escher.

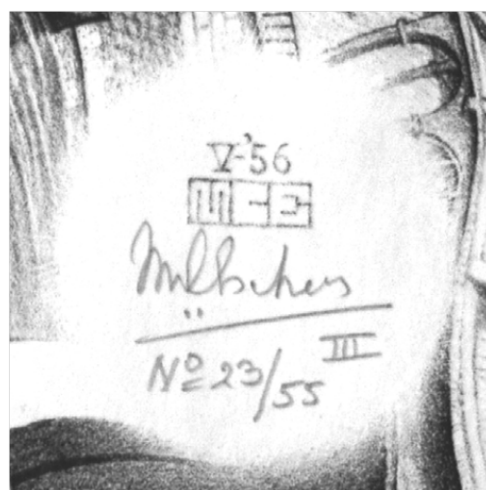
Lá é possível perceber dois tipos de xilogravura denominadas *woodcut* e *wood-engraving*. Ambas são técnicas de gravura que utilizam madeira como matriz, sendo que a primeira é uma técnica mais antiga, surgida no século XV, já a segunda é mais moderna, século XVIII, e utiliza uma madeira mais rígida e que permite trabalhar mais detalhes.

O próprio Escher (1975, p. 5) afirmou que preferia a *woodcut*, pois foi a técnica que se apropriou com auxílio de Mesquita, seu professor na escola de artes, e que não obteve conhecimento profundo para trabalhar com *wood-engraving*.

Nas obras de Escher é possível encontrar algumas informações feitas à mão como na Figura 42(b), onde podemos ver data, logo, assinatura, número da impressão/quantidade de impressões feitas, bem como o número da edição de impressão. Essa marcação é da litogravura Galeria de Pintura, Figura 42(a), feita em maio de 1956, sendo a vigésima terceira impressão das cinquenta e cinco feitas em sua terceira edição.



(a)



(b)

Figura 42 – Litogravura: (a) Galeria de pintura; (b) informações da obra

Fonte:(a) Escher (1975); (b) Price (2008).

Observando as obras de Escher podemos perceber que nem todas possuem essas informações manuais. Em algumas há apenas a logo do artista e é necessário muita procura para encontrá-la, como no caso da xilogravura Dragão, Figura 43, de 1952 medindo 32 cm×24 cm, onde a inscrição foi feita em um dos cristais de quartzo abaixo e a esquerda do dragão.

Acreditamos que a procura por essa informação nas obras de Escher também pode ser utilizada como estratégia pedagógica para atrair a atenção e curiosidade dos alunos.

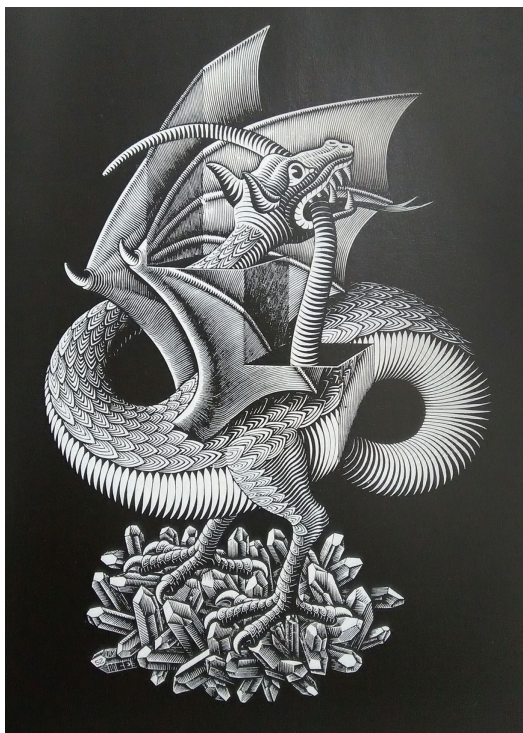


Figura 43 – Dragão

Fonte: Ernst (1991).

De acordo com Peres e Nascimento (20–), em 1926, em uma de suas viagens, Escher conheceu um palácio de Alhambra, cidade do estado de Granada na Espanha, construído pelos árabes no século XIII, e ficou impressionado com as paredes decoradas com o que chamamos de mosaicos, ladrilhamento, tesselagens ou pavimentação do plano, técnica já conhecida por ele.

Utilizando diversas figuras congruentes eles criaram belos mosaicos, preenchendo as superfícies sem sobreposições e sem deixar espaços entre as imagens, Figura 44.



Figura 44 – Parede do Palácio de Comares

Fonte: Rodríguez (2014).

Segundo Ernst (1991), durante os 10 anos seguintes, Escher tentou fazer uso dessa técnica de preenchimento de superfícies, no entanto não obteve sucesso. Entretanto, em 1936, contam

Ernst (1991) e Berro (2008), Escher voltou a Alhambra e com a ajuda de sua esposa copiou obsessivamente os ornamentos decorativos das paredes do palácio (como pode ser visto na Figura 45), e foi a partir desse momento que ele deu uma guinada em sua carreira que futuramente o colocaria de vez no mundo da Matemática.



Figura 45 – Cópias das pavimentações do Palácio de Alhambra feitas por Escher em 1936

Fonte: Ernst (1991).

Ainda de acordo com Berro (2008, p. 27), com o passar do tempo e com estudo sistemático e experimentação sobre o assunto, “Escher acabou descobrindo todos os movimentos empregados para que o ornamento cubra-se a si mesmo: a translação, a rotação, a reflexão e a translação refletida”. Esses movimentos são conhecidos na Matemática como isometrias.

Em entrevista a Lopes (2002), o professor Sérgio Alves do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP), comenta que é impressionante que Escher tenha feito essas descobertas sem ter conhecimento aprofundado de Matemática, quanto aos quatro movimentos, “em termos matemáticos, são as únicas isometrias do plano. O estudo desses movimentos é chamado de Geometria das Transformações e suas leis governam a construção dos desenhos periódicos”, aos quais chamamos aqui de pavimentações.

A Figura 46 mostra a pavimentação do plano Borboletas, feita em 1948 por Escher.

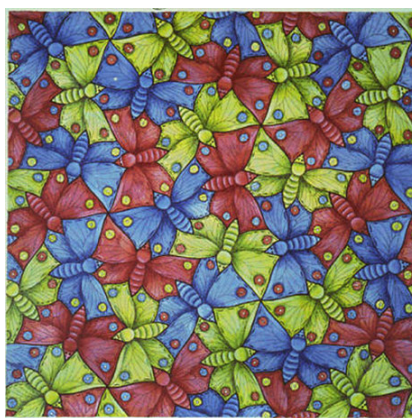


Figura 46 – Borboletas: obra com pavimentação do plano

Fonte: Escher (2018).

Escher expandiu o conceito de pavimentação substituindo as formas geométricas como paralelogramos, quadrados e triângulos, por imagens realísticas e/ou criacionistas. Além disso, foi capaz de transformar essas imagens, fazendo-as evoluir para uma outra figura em vez de se repetirem num padrão estático. Podemos ver um exemplo disso no quadro Metamorfose I, Figura 47.

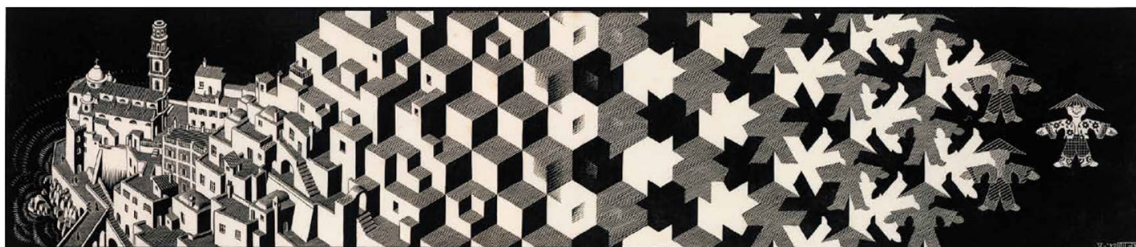


Figura 47 – Xilogravura Metamorfose I de 1937, 19,5 cm×90,8 cm

Fonte: Tjabbes (2010?).

Em 20 de fevereiro de 1969, foi inaugurada no Correio Central de Haia, Holanda, a obra Metamorfose III, um mural de 42 metros de comprimento, Figura 48, que utiliza essa mesma técnica de transformação de imagens.



Figura 48 – Metamorfose III exposta no correio central de Haia, Holanda

Fonte: Ernst (1991).

Atualmente a obra se encontra no aeroporto de Schiphol em Amsterdam, Holanda, Figura 49.



Figura 49 – Metamorfose III exposta no aeroporto de Amsterdam

Fonte: Samson (2017).

Acreditamos que o trabalho com as pavimentações do plano desenvolvido por Escher foi um marco muito importante em sua carreira e que, mais tarde, o tornaria famoso, principalmente entre os matemáticos, corroborando com Peres e Nascimento (20–, p. 1), que afirmam:

Este foi o ponto de partida para seus trabalhos mais impressionantes e famosos, que consistiam no preenchimento regular do plano. A partir de uma malha de polígonos, regulares ou não, Escher fazia mudanças, mas sem alterar a área do polígono original. Assim surgiam figuras de homens, aves, peixes, lagartos, todos envolvidos de tal forma que nenhum poderia mais mexer. Tudo representado num plano bidimensional.

Conforme Escher foi desenvolvendo suas técnicas, foi ganhando a atenção de alguns matemáticos da época que acabaram interferindo positivamente em sua carreira, dando sugestões de como ele poderia melhorar suas obras e alcançar outros objetivos.

Um desses matemáticos, segundo Tjabbes (2010?), foi Donald Coxeter, que convenceu Escher de que “o esquema ideal para um limite circular deve passar gradativamente de grande e convexo no centro para cada vez menor na periferia”. Com isso, seria possível demonstrar um movimento contínuo e eterno.

Observando a Figura 50, podemos verificar esse conceito. Para fazer e colorir essa obra, Escher utilizou cinco matrizes diferentes.

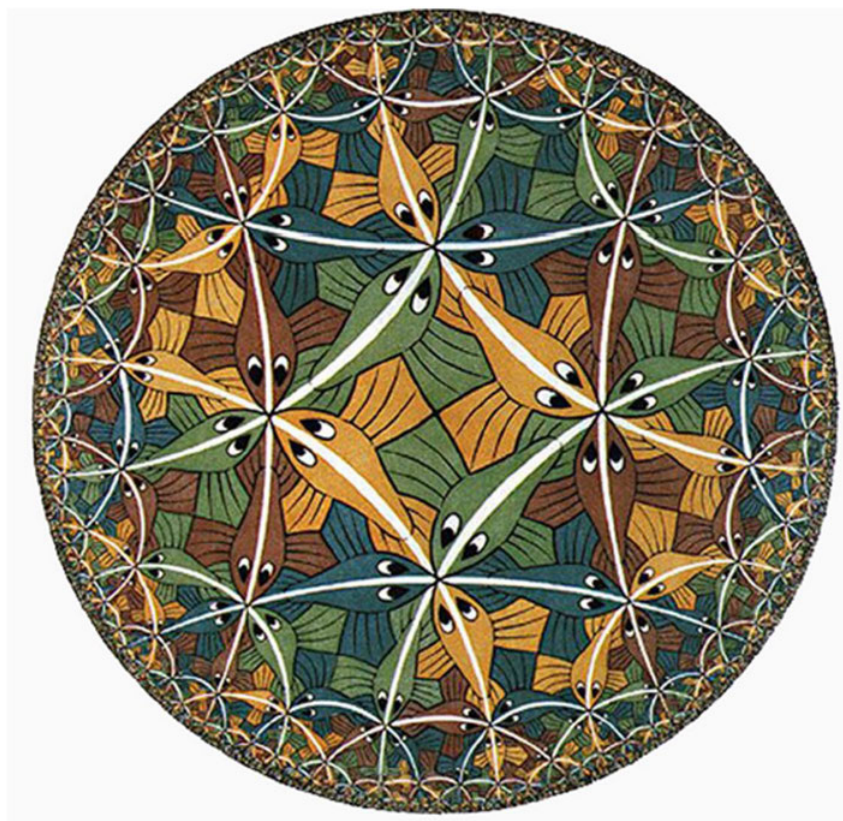


Figura 50 – Xilogravura Limite Circular III de 1959 (diâmetro de 41,5 cm)

Fonte: Escher (1975).

A Figura 51 mostra um esboço feito por Escher à caneta de tinta preta e vermelha durante o estudo para confecção da obra *Limite Circular III*. De acordo com Ernst (1991), Escher fazia diversos estudos e testes antes de partir para a versão final de suas obras.

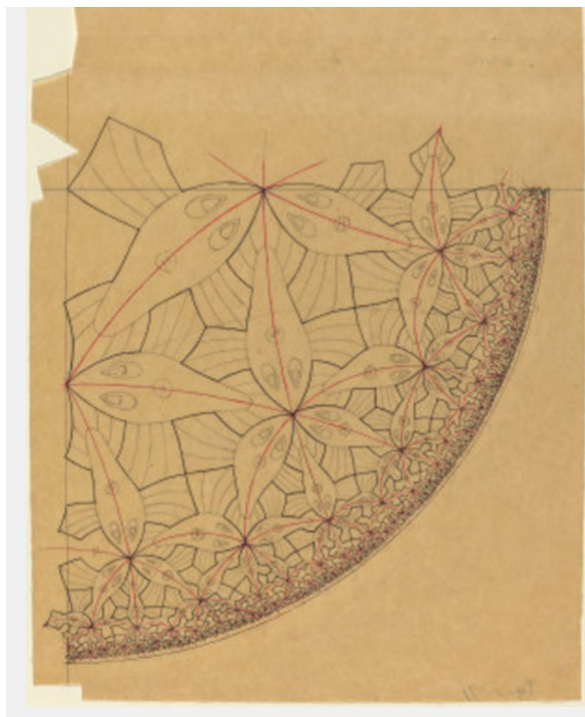


Figura 51 – Estudo para *Limite Circular III*

Fonte: Galeria... (2018).

Segundo Berro (2008), Coxeter convidou Escher para participar de uma de suas aulas, por admirar o conteúdo matemático da obra do artista, no entanto, ficou decepcionado com o desconhecimento de Escher sobre a Matemática presente em suas obras. Foi a partir desse momento, que o matemático passou a ajudar Escher com seus estudos.

Outro matemático que influenciou os trabalhos de Escher foi Bruno Ernst, que mais tarde veio a escrever o livro *O Espelho Mágico de M. C. Escher*. Para isso, ele realizou, durante um ano, visitas semanais ao artista fazendo assim um estudo aprofundado de sua vida e obras.

Lionel e Roger Penrose, pai e filho, também ajudaram e influenciaram Escher em suas obras como, por exemplo, a construção impossível *Cascata*, Figura 52.

Podemos notar, no alto das torres, dois poliedros. O que está sobre a torre esquerda é uma composição de três cubos e o da torre direita é um dodecaedro rômico estrelado que, graças a essa obra, ficou conhecido como *Sólido de Escher*. Posteriormente, no capítulo 4, faremos um estudo mais aprofundado sobre esse poliedro determinando uma fórmula para calcular o seu volume.

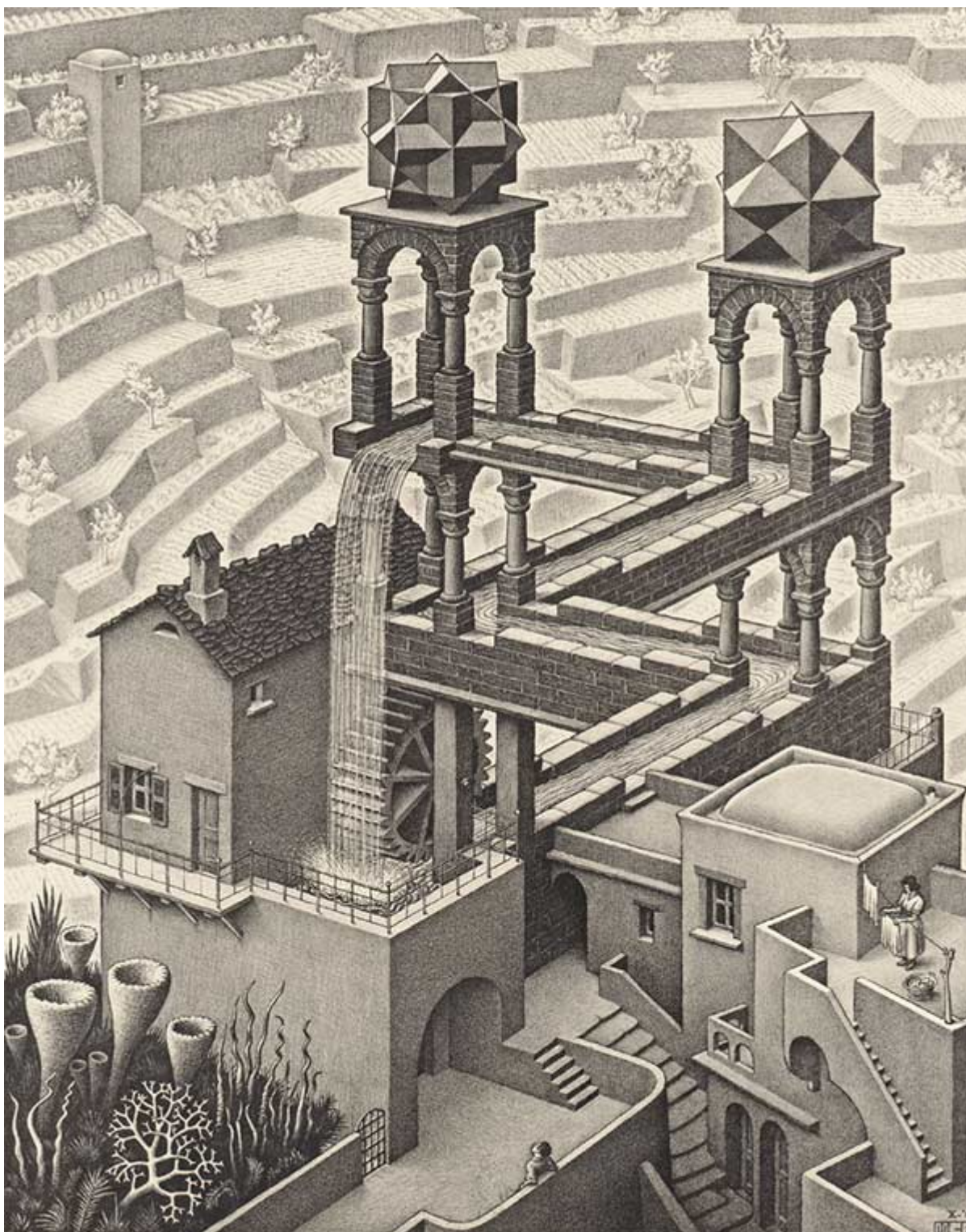


Figura 52 – Litogravura Cascata, de 1961, 38,1 cm×30 cm

Fonte: Escher (2018).

2.7.2 Escher e os poliedros

O interesse de Escher pelos poliedros nasceu a partir da observação das formas dos cristais, possivelmente influenciado por seu irmão Berend Escher, professor de geologia na

Universidade de Leiden. De acordo com Tjabbes (2010?), foi ele que, em 1937, forneceu a Maurits livros de cristalografia (que, de acordo com o dicionário Aurélio, é a ciência que trata da descrição e formação dos cristais) que havia escrito, pois percebeu a estreita relação dessa ciência com o trabalho de seu irmão caçula.

Escher, citado por Lopes (2002, p. 1) afirmava que:

[...] ao mesmo tempo nos assusta sua perfeição e nos faz sentirnos desvalidos. Os poliedros regulares têm um caráter absolutamente não humano. Não são invenções da mente humana, já que existiam como cristais na crosta terrestre muito antes do homem entrar em cena.

Ele realizou diversos trabalhos explorando poliedros e em alguns casos, como na litografia Cascata, Figura 52, ele admitiu que “os poliedros nos topos não têm nenhuma importância especial. Eu os desenhei ali simplesmente porque gosto muito deles” (TJABBES, 2010?, p. 133).

Segundo Kappraff (2001) e Ernst (1991), seu interesse pelos poliedros era imenso, tanto que, em uma de suas mudanças, ele se desfez de quase tudo que tinha, levando apenas um modelo criado por ele onde os Sólidos Platônicos estavam inscritos um dentro do outro, Figura 53.

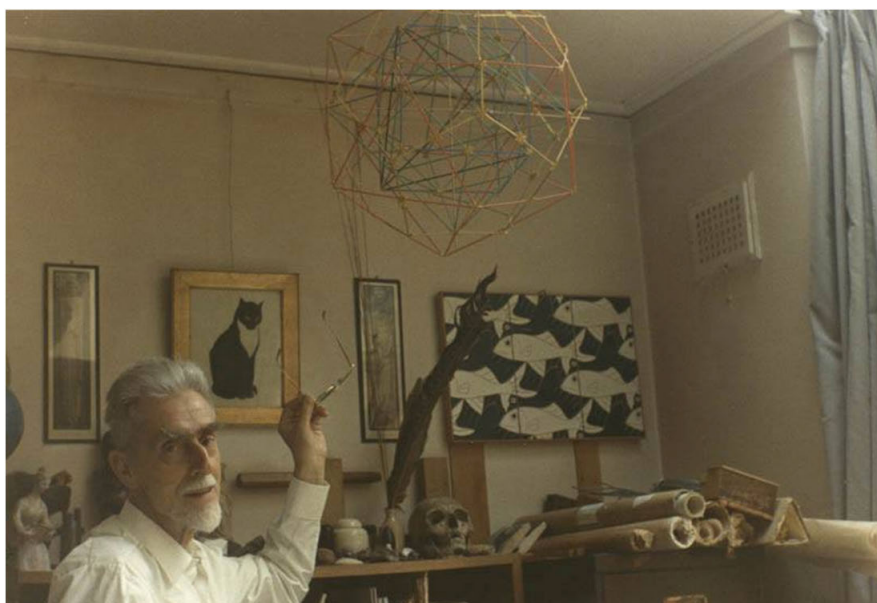


Figura 53 – Escher mostrando sua escultura de Sólidos Platônicos

Fonte: No... (2016).

A obra Répteis, Figura 54, apresenta uma pavimentação feita com hexágonos em um caderno que está aberto sobre uma mesa. Ela é ornamentada com pequenos jacarés que deixam a bidimensionalidade do papel passando ao plano tridimensional, passeando sobre um livro de Zoologia e logo depois por um dodecaedro regular, para então voltar ao plano.



Figura 54 – Litogravura Repteis de 1943, 33,5 cm × 38,5 cm

Fonte: Escher (2018).

Schattschneider e Walker (2013) mencionam que Escher cobriu com pavimentações diversos poliedros em cartolina, mas somente um deles chegou a ser produzido em definitivo, uma caixa de metal em formato de icosaedro, Figura 55, para a comemoração do aniversário de uma empresa holandesa. Conforme informações do *site* de leilões Catawiki (2018), uma dessas caixas foi arrematada em julho do corrente ano por 1200 euros.



Figura 55 – Icosaedro feito de metal esmaltado coberto com uma pavimentação de estrelas do mar e conchas

Fonte: Catawiki (2018).

Assim como em *Cascata*, Escher desafiava as leis da perspectiva trabalhando com a construção de figuras impossíveis de serem construídas como podemos observar também em *Belvedere*, Figura 56.

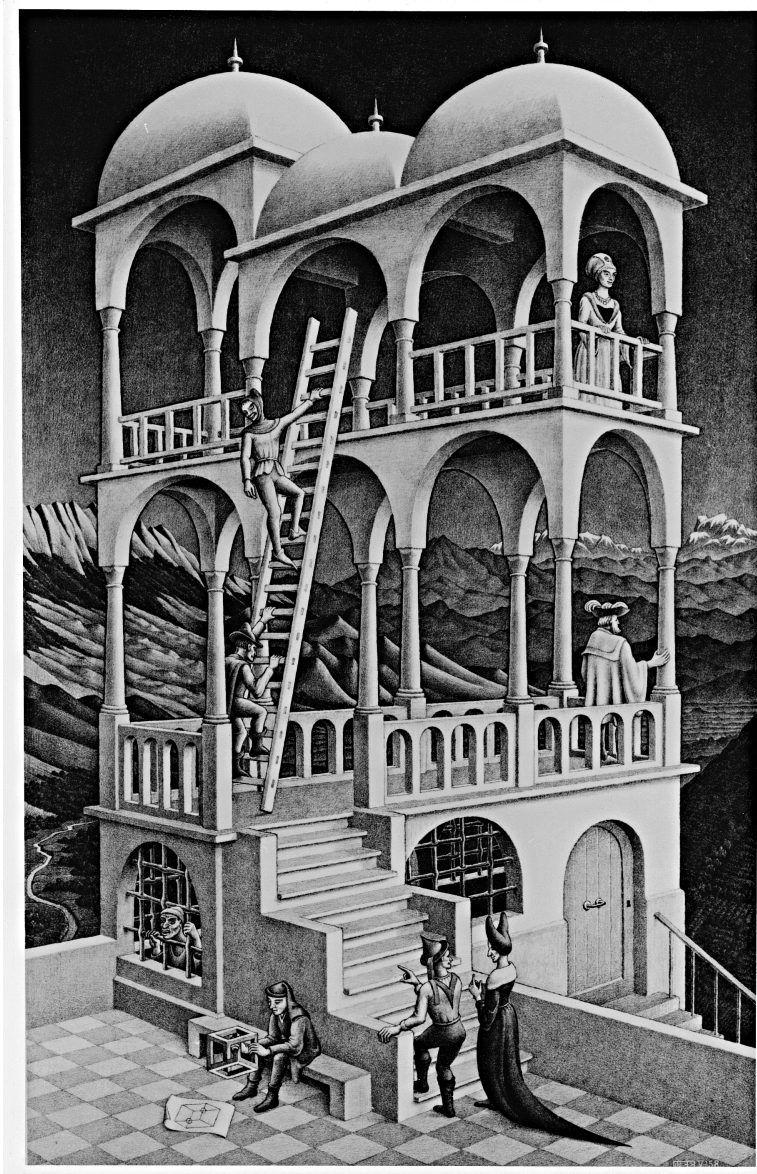


Figura 56 – Litogravura *Belvedere* de 1958, 46 cm×29,5 cm

Fonte: Escher (1975).

Note que o menino sentado no banco tem um objeto impossível em suas mãos e observa a sua ilustração em um papel jogado ao chão. Escher, citado por Tjabbes (2010?, p. 137), esclarece:

[...] o jovem se concentra no problema e, com razão, não acredita no que seus olhos veem. Provavelmente, não percebe que o edifício atrás dele demonstra a mesma impossibilidade. Por exemplo, a escada ao centro, embora desenhada segundo as regras de perspectiva e sendo plenamente aceitável como objeto, tem sua base apoiada dentro da casa e sua parte superior, fora dela. Assim sendo, a relação entre as duas pessoas na escada é impossível.

Esse mesmo jovem pode ser visto com mais detalhes em outra obra, Figura 57, feita por Escher naquele mesmo ano.

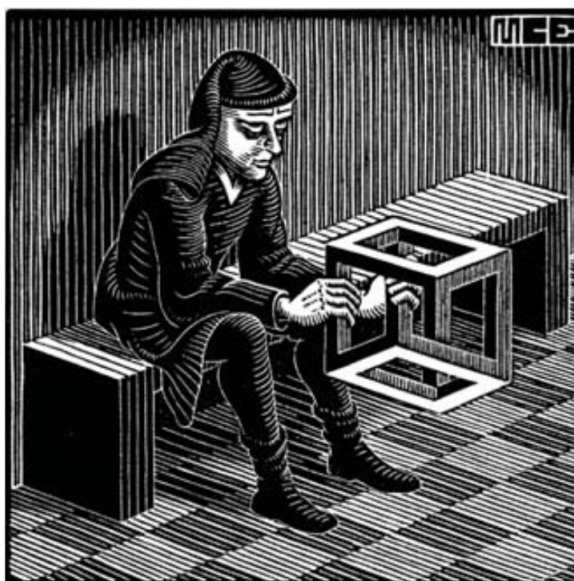


Figura 57 – Homem com Cuboide, xilogravura de 1958

Fonte: Schattschneider e Emmer (2005).

De acordo com Ernst (1991), as obras como Cascata e Belvedere foram inspiradas em uma figura conhecida como Tribar de Penrose ou Triângulo de Penrose, Figura 58(a) e 58(b). Esse triângulo formado por arestas tridimensionais perpendiculares entre si, teria 270° como soma dos ângulos internos o que seria geometricamente impossível.

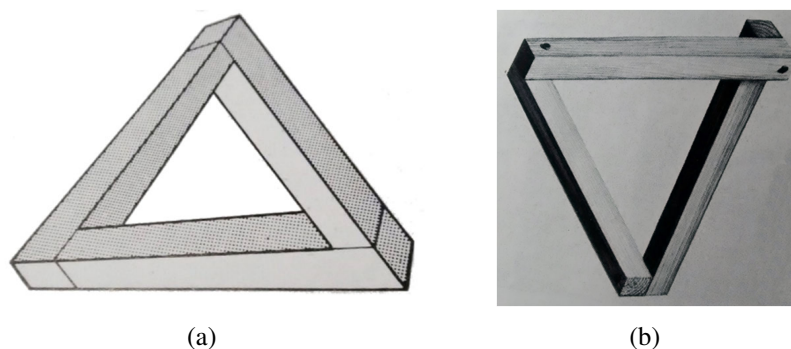


Figura 58 – Triângulo de Penrose: (a) ilustração do triângulo; (b) como seria a sua construção em madeira

Fonte: Ernst (1991).

Segundo Rooney (2012, p. 122), esse triângulo foi desenhado primeiramente pelo artista sueco, Oscar Reutersvard em 1934, mas se popularizou somente na década de 50 após estudos do matemático Roger Penrose que o chamou de “impossibilidade na sua mais pura forma”.

Mesmo sendo impossível de construir um triângulo com essas condições, com a ajuda da perspectiva, essa peça pode ser reproduzida como mostra a Figura 59, em uma rotatória da cidade de East Perth, Austrália.




Figura 59 – Escultura do Triângulo de Penrose construída na Austrália

Fonte: Torrissen (2018).

As obras de Escher também já foram destaque em provas como no Enem, Figura 60.

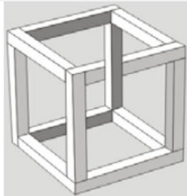
Questão 5

Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia **Belvedere**, reproduzida ao lado.




Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?


A




D



B



E



C

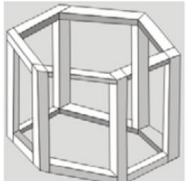


Figura 60 – Questão 5 da Prova 1, cor amarela, do Enem de 2007

Fonte: Inep (2007).

Essa questão expõe o Tribar de Penrose bem como outros desenhos feitos por Escher, baseados nesse triângulo, enquanto realizava os estudos para a obra *Belvedere*, Figura 56. A resposta correta é a alternativa “E”, pois seria a única possível de ser construída.

Dentre outras obras, a *Cristal*, *Contraste (Ordem e Caos)*, *Cascata*, *Gravidade*, *Duplo Planetoide*, *Estudo para Estrelas* e *Estrelas* apresentam poliedros interessantes e incomuns podendo ser trabalhados no Ensino Básico.

Acreditamos que, justamente por serem incomuns é que muitos desses objetos podem ser estudados em sala de aula, utilizando a criatividade de Escher como estímulo para trabalhar con-

ceitos matemáticos com os alunos. Além disso, há também a viabilidade de interdisciplinaridade com Arte, Química, Biologia e Filosofia.

Na obra *Cristal*, Figura 61, de 1947, podemos observar um cristal em meio a diversas pedras de diferentes tipos e sem formato específico. O cristal na verdade é a combinação de um hexaedro com um octaedro. Essa combinação gera, quando retiradas as pirâmides de seu entorno, o Sólido Arquimediano cuboctaedro, visto na Seção 2.4.



Figura 61 – Obra *Cristal*: ao centro temos a combinação de um hexaedro e um octaedro

Fonte: Price (2008).

A obra *Cascata*, Figura 52, tem, sobre sua torre esquerda, a composição de três cubos, Figuras 62(a) e 62(b). Essas imagens foram retiradas do *site* MathWorld, desenvolvido pela Wolfram Research que, conforme Weisstein (2018b), é o mais extenso recurso matemático da internet.

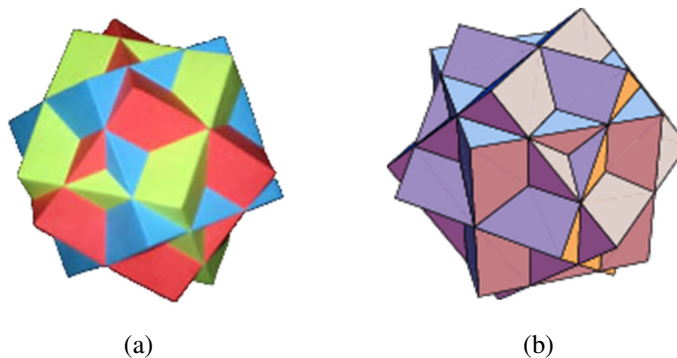


Figura 62 – Composição de três cubos: (a) cubos coloridos; (b) arestas destacadas.

Fonte: Weisstein (2018a)

Já na torre da direita, vemos um poliedro que ficou conhecido, segundo Weisstein (2018b), como “Sólido de Escher”. Ele pode ser obtido pela composição de três dipirâmides quadradas (octaedros não regulares), Figura 63, ou pela estrelação do dodecaedro rômboico, Figura 29. No Capítulo 4, apresentaremos três maneiras de determinar o volume do Sólido de Escher e nos Anexos A, B e C forneceremos moldes para sua confecção.

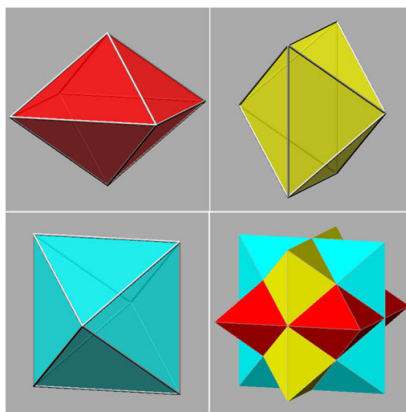


Figura 63 – Composição para a formação do Sólido de Escher

Fonte: Zefiro (2010).

Outro poliedro interessante é aquele encontrado na litogravura *Contraste (Ordem e Caos)*, Figura 64, 28 cm×28 cm, de 1950. Nela podemos observar um cristal como centro da imagem que tem o formato de um Sólido de Kepler-Poinsot chamado pequeno dodecaedro estrelado. Segundo Escher, citado por Tjabbes (2010?, p. 125):

Esta gravura simboliza a Ordem e o Caos. A beleza perfeitamente ordenada de um dodecaedro estrelado acoplado a uma esfera translúcida, como uma bola de sabão, está rodeada de objetos amassados, descartados e inúteis. Tive de escolher com muito cuidado entre os muitos objetos heterogêneos de um depósito de lixo, pois cada peça deveria ser reconhecível.



Figura 64 – Pequeno dodecaedro estrelado presente na litogravura *Contraste (Ordem e Caos)*

Fonte: Escher (1975).

A litogravura Gravidade, Figura 65, com 29,7 cm×29,7 cm, feita em 1952, também apresenta o mesmo poliedro. Nele, segundo Escher (1975), vivem presos monstros de pescoços longos e quatro pernas.

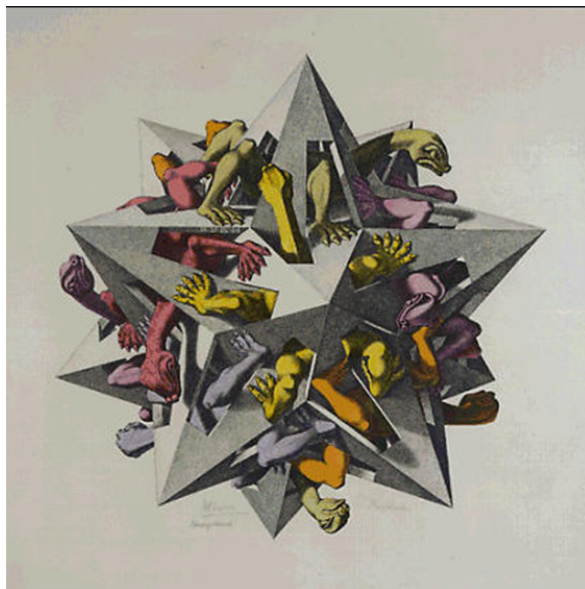


Figura 65 – Pequeno dodecaedro estrelado presente na obra Gravidade

Fonte: Escher (2018).

A obra Duplo Planetoide, Figura 39, como mencionado anteriormente, apresenta a composição de dois tetraedros regulares, Figura 66.

Para visualizar e interagir com esse e outros poliedros, sugerimos a utilização do aplicativo para dispositivos móveis com sistema Android chamado “MoStella Free”, disponível na *Play Store* e/ou o programa “Great Stella DEMO”, disponível para *download* em Webb (2018), para ser utilizado em computadores. Nesse último caso, o número de ferramentas do programa aumenta bastante, como, por exemplo, a possibilidade de inserir fotos nos poliedros e imprimir suas planificações para posterior montagem do modelo tridimensional.

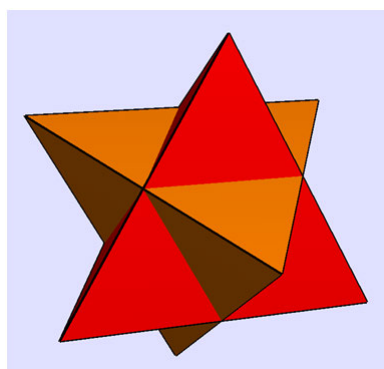


Figura 66 – Composição de dois tetraedros

Fonte: Autoria própria.

Por fim, a obra de Escher que mais contém poliedros se chama Estrelas, Figura 67. Uma xilogravura de 1948 com 26 cm × 32 cm, que apresenta diversos tipos de poliedros, muitos deles são composições de dois ou três poliedros. O maior de todos, ao centro, é parecido com o Sólido de Escher mencionado anteriormente, mas é uma composição de três octaedros regulares.

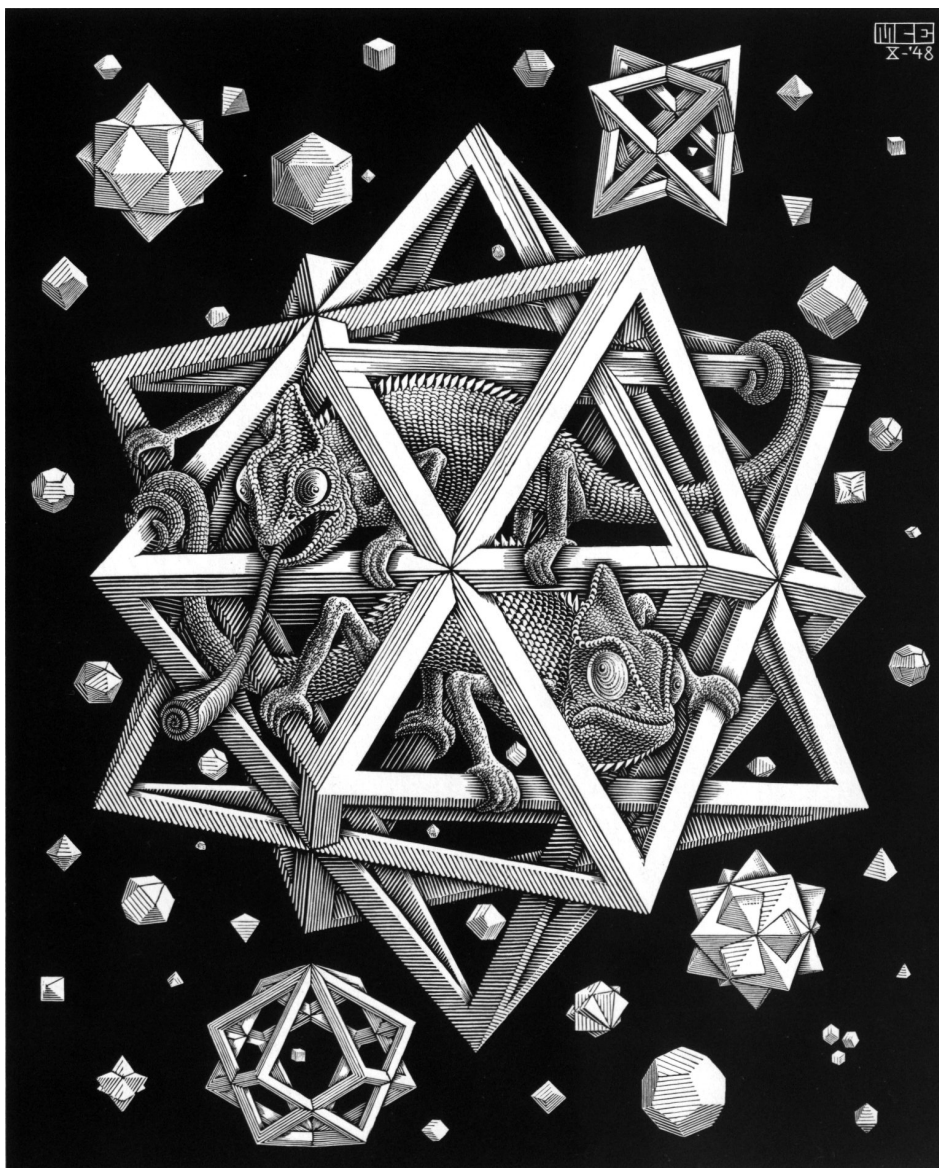


Figura 67 – Xilogravura Estrelas

Fonte: Xennex (2011).

Segundo Escher, citado por Tjabbes (2010?, p. 124), em sua obra aparecem poliedros simples, duplos ou triplos que flutuam no ar como estrelas, sendo que:

[...] ao centro, temos um sistema formado por três octaedros com estrutura de vigas. Nessa gaiola vivem dois camaleões cuja função é acrescentar um elemento de vida a esse mundo inanimado. Eu os escolhi para ocupá-la porque suas pernas e rabos são particularmente adaptados para agarrar a estrutura enquanto ela gira no espaço.

A Figura 68 mostra, de acordo Ernst (1991), a identificação de alguns desses poliedros.

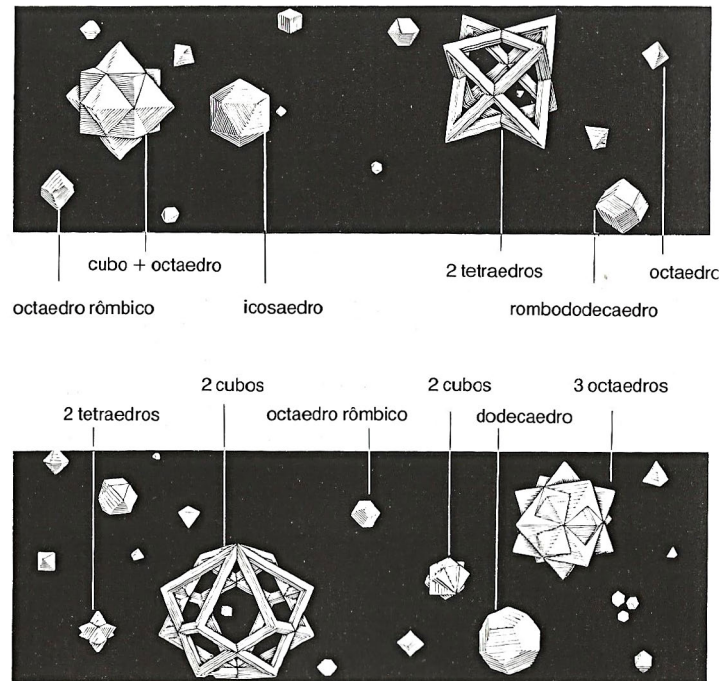


Figura 68 – Destaque de alguns dos poliedros da obra Estrelas

Fonte: Ernst (1991).

A obra Estudo para Estrelas, Figura 69, uma xilogravura com 37,5 cm×37 cm também de 1948, mostra alguns dos poliedros de Estrelas na versão somente com arestas, o que facilita sua identificação. No canto superior direito, por exemplo, vemos o Sólido de Escher.

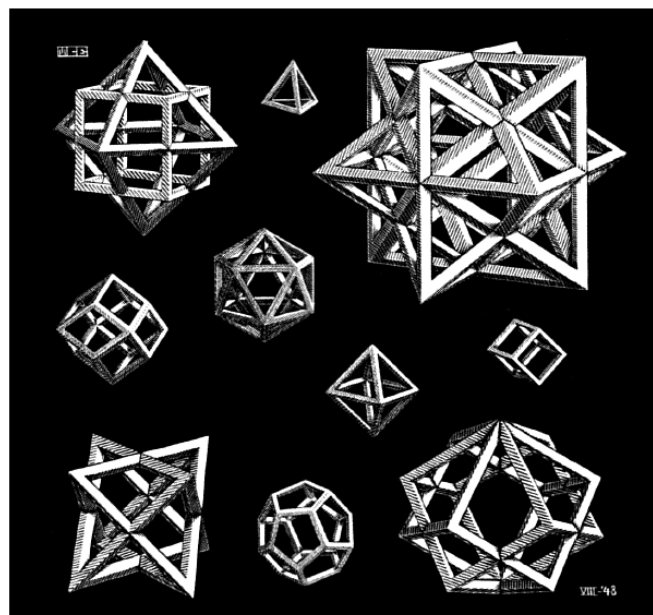


Figura 69 – Xilogravura Estudo para Estrelas

Fonte: Escher (2018).

Maurits Cornelis Escher foi um artista que se destacou na área de Matemática mesmo não tendo essa intenção inicialmente. O próprio afirmava, conforme Peres e Nascimento (20–, p. 2), “apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas”.

Acreditamos que sua arte atrai olhares para essa disciplina e, mesmo aqueles mais avessos ao seu estudo, podem se impressionar e ficar interessados em saber o que está por trás daquilo que seus olhos estão enxergando.

Em sua vida, segundo a Fundação MC Escher (ESCHER, 2018), esse artista fez 448 litografias e xilogravuras e mais de 2000 desenhos e esboços. Sua última impressão foi a xilogravura Serpentes, Figura 70, feita em 1969 quando já estava com 70 anos de idade. Uma obra em que três serpentes muito realistas se entrelaçam através de uma pavimentação circular que diminui infinitamente quando se olha ao centro e/ou para as bordas do círculo.



Figura 70 – Serpentes, 44,7 cm×49,8 cm, xilogravura em três cores

Fonte: Escher (2018).

Mesmo com idade avançada, Escher ainda demonstrava precisão no olhar e habilidade nas mãos, pois nota-se que sua última obra exigiu muito dessas qualidades para atingir tamanha beleza. Price (2008, p. 4), ao comentar sobre a derradeira obra de Escher, diz que “na mitologia, uma fênix pode renascer de suas cinzas e uma serpente pode engolir sua própria cauda e regenerar-se. No universo de anéis que Escher cria, podemos ver a evolução se desenrolar”.

Escher faleceu em 27 de março de 1972 com 73 anos de idade.

3 VOLUME DE POLIEDROS: CUBO E PIRÂMIDE

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos envolvendo os poliedros com destaque ao cubo e à pirâmide que serão empregados no estudo do Sólido de Escher. Corroborando com Lima (1991), assim como a palavra polígono em Geometria Plana pode significar o contorno como a região por ele limitada, utilizamos as palavras poliedro e sólido para representar um corpo sólido ou somente a sua superfície. Além disso, recorrentemente, utilizaremos conceitos da Geometria Plana sem aprofundamento sobre os mesmos.

3.1 POLIEDROS

De acordo com Reis (2013), a palavra poliedro tem origem em duas palavras gregas: *polys* que significa “várias” e *hédrai* que significa “faces”. Na busca por uma definição de poliedro podemos nos deparar com diversas definições. Um poliedro pode simplesmente ser definido como um objeto tridimensional formado pela reunião de polígonos, no entanto, segundo Lima et al. (2006), apesar de dar a ideia do que seja um poliedro, isso não serve como definição.

Garcia e Castilho (2006)¹, citados por Sartor (2013, p. 17), seguem esse caminho definindo poliedro como um “sólido fechado formado exclusivamente por superfícies planas (polígonos)”. Silva e Filho (2008, p. 629) também seguem essa linha em seu livro didático para o Ensino Médio definindo poliedros como “sólidos limitados por 4 ou mais faces planas e poligonais”.

Uma definição mais completa, segundo Lima et al. (2006, p.232), é dada por:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
 2. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
- Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
3. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Analisando o que ocorre se não forem destacados os três itens dessa definição:

- Caso o item 1 não especificasse que cada lado dos polígonos é lado de apenas um outro polígono, a imagem da Figura 71 seria um poliedro. Nesse caso, as faces 1, 2, 3 e 4 tem o lado \overline{AB} em comum.

¹ GARCIA, A. C. A.; CASTILHO, J. C. A. Matemática sem mistérios: geometria plana e espacial. Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, RJ, 2006.

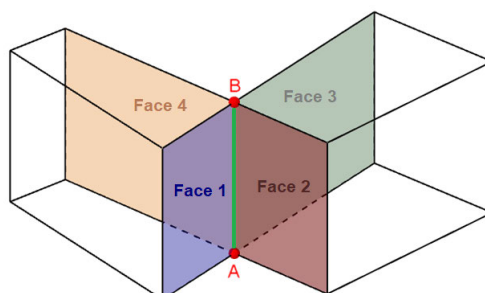


Figura 71 – Exemplo de poliedro caso o item 1 da definição de poliedros segundo Lima et al. (2006) não fosse respeitado

Fonte: Autoria própria.

- Caso o item 2 não afirmasse como devem ser as interseções das faces, a imagem da Figura 72 representaria um poliedro. Nesse caso, as interseções das faces retangulares $ABCD$ e $EFGH$ não formam um vértice e não é vazia, visto que gera o segmento MN que, no entanto, não é um lado comum dessas faces.

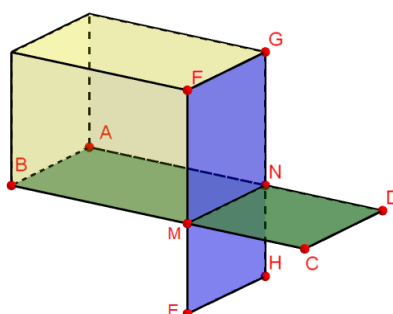


Figura 72 – Exemplo de poliedro caso o item 2 da definição de poliedros segundo Lima et al. (2006) não fosse respeitado

Fonte: Autoria própria.

- Sem o item 3, teríamos situações como da imagem da Figura 73 onde, por exemplo, não é possível ir da face A até a face B sem passar pelo vértice P .

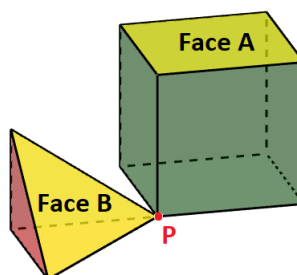


Figura 73 – Exemplo de poliedro caso o item 3 da definição de poliedros segundo Lima et al. (2006) não fosse respeitado

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

Note que se a definição fosse aquela em que um poliedro é apenas uma reunião finita de polígonos, poderíamos ter poliedros como esses três últimos aqui mencionados. No entanto, assim como defendem Lima et al. (2006), acreditamos que em um primeiro estudo de poliedros, não se deva ater a esses casos diferenciados, mas sim dar ênfase ao estudo de poliedros convexos.

3.1.1 Poliedros convexos e não convexos

Segundo Dolce e Pompeo (2005), assim como os polígonos, os poliedros podem ser convexos ou não convexos. Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais vértices num mesmo semiplano. Com essa mesma ideia, um poliedro é convexo se o plano que contém uma face qualquer deixa as demais faces em um mesmo semiespaço, caso contrário o poliedro é não convexo, conforme ilustra a Figura 74.

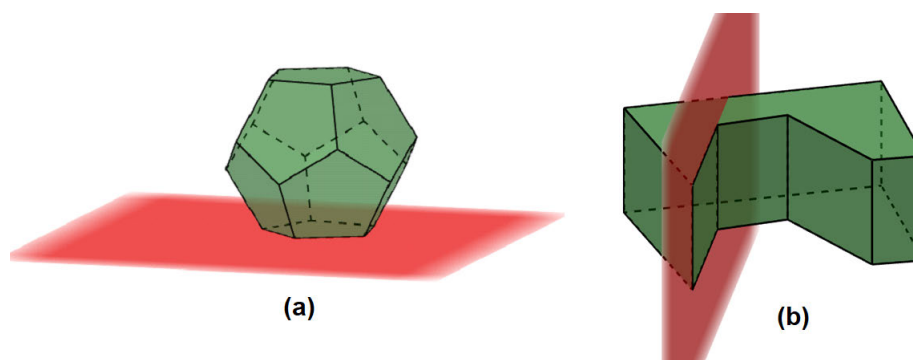


Figura 74 – Exemplo de poliedro segundo Dolce e Pompeo (2005): (a) convexo; (b) não convexo

Fonte: Autoria própria.

Já Lima et al. (2006, p. 233), destacam que um poliedro é convexo “se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos”, Figura 75.

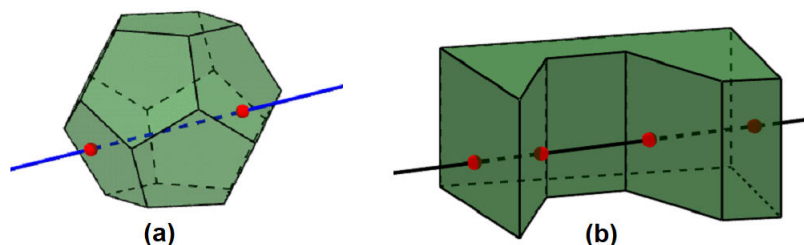


Figura 75 – Exemplo de poliedro segundo Lima et al. (2006): (a) convexo; (b) não convexo

Fonte: Autoria própria.

Os poliedros de Platão, de Arquimedes e de Catalan, da Seção 2.3, 2.4 e 2.6, são poliedros convexos e os poliedros estrelados como os de Kepler-Poinsot e o Sólido de Escher, da Seção 2.5, são poliedros não convexos.

3.2 ÂNGULOS POLIÉDRICOS CONVEXOS

Todo polígono possui um ângulo interno em cada vértice. Nos poliedros convexos acontece a mesma coisa. Eles são chamados, de acordo com Dolce e Pompeo (2005), ângulos poliédricos convexos ou ângulos sólidos. Apresentamos a seguir noções sobre ângulo poliédrico e, em Dolce e Pompeo (2005) encontramos maiores detalhes sobre o assunto.

Um ângulo sólido pode ser diédrico (formado por duas faces), triédrico (formado por três faces), tetraédrico (formado por quatro faces) e assim por diante, Figura 76 (a), (b) e (c), respectivamente.

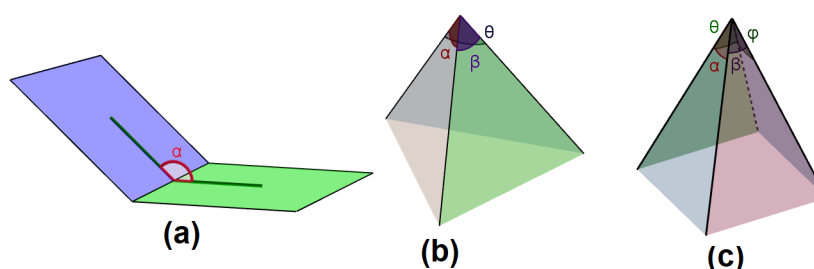


Figura 76 – Ângulos poliédricos convexos: (a) diédrico; (b) triédrico; (c) tetraédrico

Fonte: Autoria própria.

Dessa forma, quando se fala que uma figura geométrica tem ângulos sólidos congruentes, significa que em seus vértices incidem a mesma quantidade de faces com os mesmos ângulos em cada face e os mesmos ângulos diédricos entre elas. Um exemplo disso é o cubo, que possui oito ângulos triédricos congruentes.

Não se mede (em graus) um ângulo poliédrico, apenas conta-se a quantidade de faces que incidem em um determinado vértice, exceto pelo diedro que as faces incidem sobre um segmento, reta ou semirreta. No entanto, os ângulos das faces podem ser medidos, como na Figura 77, onde vemos as medidas dos ângulos das faces de um ângulo tetraédrico convexo são 40° , 60° , 90° e 104° .

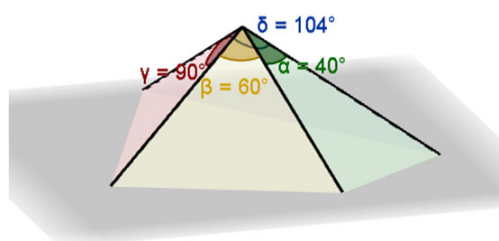


Figura 77 – Ângulo tetraédrico com as medidas dos ângulos das faces

Fonte: Autoria própria.

Em um ângulo poliédrico convexo, a soma dos ângulos de suas faces é menor que 360° , visto que se fosse igual a 360° os polígonos estariam todos contidos em um mesmo plano. A demonstração dessa relação pode ser encontrada em Dolce e Pompeo (2005, p. 120).

3.3 O TEOREMA DE EULER

Um teorema bastante conhecido e utilizado quando se trabalha com poliedros é o Teorema de Euler, também conhecido como Relação de Euler. Segundo Lima (1991), ele foi descoberto em 1758 e já teve diversas demonstrações, algumas delas com falhas, como a do famoso matemático francês Augustin-Louis Cauchy, feita em 1813. Essas falhas ocorreram devido a inexistência de uma definição precisa de poliedro na época, que, de acordo com Lima (1991), nem mesmo Euler se preocupou.

O professor Elon Lages Lima (LIMA, 1991) apresenta, além de outras demonstrações, aquela feita por Cauchy e faz uma análise aprofundada da mesma destacando seus erros. Em Mialich (2013), a autora apresenta a demonstração do Teorema de Euler segundo Cauchy-Lima, ou seja, ela já implementa na demonstração de Cauchy as observações de Lima (1991) trazendo algumas imagens e explicações adicionais para facilitar a compreensão. Outra opção de demonstração é a apresentada por Dolce e Pompeo (2005) através de Indução Finita.

Teorema 1 (Teorema de Euler). *Em todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação*

$$V + F - A = 2. \quad (3.1)$$

Esse teorema tem um enunciado simples e é fácil de verificar observando alguns poliedros. No entanto, ele é totalmente válido apenas para poliedros convexos, mesmo que seja possível encontrar alguns poliedros não convexos onde o resultado é válido, Figura 78(b).

De acordo com Lima et al. (2006), o número inteiro $V + F - A$ é chamado de característica do poliedro. Na Figura 78(a), o poliedro não convexo possui característica 0, pois possui 16 vértices, 16 faces e 32 arestas, ou seja, $16 + 16 - 32 = 0$. Na Figura 78(b), o poliedro não convexo possui característica 2, pois tem 7 vértices, 7 faces e 12 arestas, ou seja, $7 + 7 - 12 = 2$.

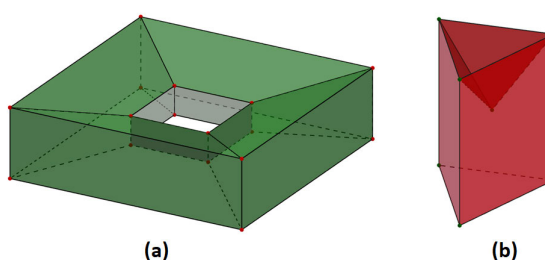


Figura 78 – Poliedros não convexos de: (a) característica 0; (b) característica 2

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

De acordo com Lima et al. (2006), outra relação importante e conhecida quando se trabalha com quantidade de faces, arestas e vértices é a seguinte:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n,$$

onde, A é o número de arestas, F_3 é o número de faces triangulares, F_4 o número de faces quadrangulares, F_5 o número de faces pentagonais e assim por diante até F_n ($n > 3$), que é o número de faces com n lados de um poliedro.

Para chegar a esse resultado, basta observar que ao contar a quantidade de arestas de um poliedro devemos considerar que cada face triangular possui 3 arestas, logo $3F_3$ é o número de arestas das faces triangulares presentes no poliedro. Dessa mesma forma, $4F_4$ é o número de arestas dos quadriláteros presentes no poliedro e assim por diante. Como cada aresta do poliedro é comum a exatamente duas faces, o número total contado ($3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots + nF_n$) é o dobro da quantidade de arestas, ou seja, $2A$.

Como, em um polígono, a quantidade de vértices é igual a quantidade de lados, podemos considerar analogamente que

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots + nV_n.$$

3.4 POLIEDROS REGULARES

Segundo Lima et al. (2006, p. 241), “um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas”, ou seja, um poliedro convexo é regular se todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e seus ângulos poliédricos são congruentes. Os poliedros regulares convexos também são conhecidos como Sólidos (ou Poliedros) de Platão, Figura 10. Desse fato decorre o teorema que determina o número de poliedros regulares convexos existentes.

Teorema 2. *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.*

Demonstração:

De acordo com Lima et al. (2006), dado um poliedro com A arestas, V vértices e F faces, onde n é o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorrem em cada vértice e considerando que todos esses valores são números naturais maiores ou iguais a três, temos que

$$2A = nF = pV.$$

Logo,

$$A = \frac{nF}{2} \tag{3.2}$$

e

$$V = \frac{nF}{p}. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.2) e (3.3) na Relação de Euler (3.1), obtemos:

$$\frac{nF}{p} + F - \frac{nF}{2} = 2 ,$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn} . \quad (3.4)$$

Considerando, em (3.4), apenas que o número de faces F seja maior que zero, precisamos então que $2p + 2n - pn > 0$, ou seja,

$$\frac{2n}{n-2} > p .$$

Como $p \geq 3$, devido ao ângulo triédrico ser o mínimo necessário para se obter um poliedro, que no caso seria um tetraedro, concluímos que $\frac{2n}{n-2} > 3$, logo $n < 6$. Ainda, $n \geq 3$, pois a quantidade mínima de lados para obtermos um polígono é 3 (triângulo) e, substituindo em (3.4) temos as seguintes possibilidades:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6-p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 \text{ (tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases} ;$$

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{2p}{4-p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \text{ (cubo)};$$

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 12 \text{ (dodecaedro)}.$$

Percebemos então que só há 5 possibilidades de poliedros convexos regulares, os Sólidos de Platão, como queríamos demonstrar.

3.5 VOLUME

A definição mais comum de volume diz respeito à quantidade de espaço que um objeto ocupa, no entanto, essa não é uma definição, mas a nível de Ensino Básico, serve muito bem para dar a noção intuitiva do que é o volume de um objeto.

De acordo com Lima (2006), para medir a grandeza volume devemos compará-la com uma unidade de medida. Tomando um cubo com arestas de uma unidade de comprimento, denominado cubo unitário, seu volume, por definição, será igual a 1. Com isso, intuitivamente, o volume de um sólido qualquer será equivalente à quantidade de vezes que um cubo unitário “couber dentro” desse sólido.

No entanto, essa ideia não é facilmente aplicada a todos os sólidos, cabendo definir outros métodos convenientes a cada caso, quando necessário. Neste momento, fazemos a apresentação apenas do volume de cubos e de pirâmides, necessários no cálculo do volume do Sólido de Escher.

A base conceitual utilizada neste estudo de volume tem foco principalmente em Dolce e Pompeo (2005), Lima (2006) e Lima et al. (2006).

3.5.1 Volume do cubo

O paralelepípedo reto retângulo (bloco retangular), é um sólido formado por 6 retângulos, sendo que as faces opostas são congruentes duas a duas. Para calcular quantos cubos unitários cabem em um bloco retangular, evitando a contagem um a um desses cubos, basta multiplicar as medidas de suas dimensões, Figura 79, onde temos um bloco retangular de volume igual a $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ unidades de volume.

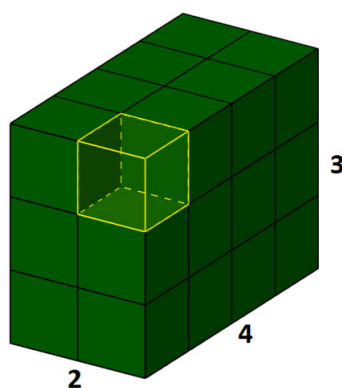


Figura 79 – Bloco retangular de volume equivalente à 24 cubos unitários

Fonte: Autoria própria.

Como a base do bloco é um retângulo, podemos ainda definir o seu volume como sendo o produto da área de sua base e sua altura, ou seja, dado um bloco retangular com dimensões a , b e c temos que

$$\text{Volume do bloco retangular} = a \cdot b \cdot c = \text{área da base} \cdot \text{altura} .$$

Quando as faces são quadrados temos um hexaedro que também é conhecido como cubo. Dessa forma, se um cubo tem arestas com a unidades de comprimento (u.c.), seu volume será a^3 unidades de volume ou $(\text{u.c.})^3$, ou seja,

$$\text{Volume do cubo} = (\text{aresta do cubo})^3 .$$

Para mais detalhes e demonstrações dessas e de outras fórmulas, vide Lima (2006, p.73).

3.5.2 O Princípio de Cavalieri

Para tratar de sólidos geométricos com formatos diferentes de um bloco retangular, convém abordar inicialmente um axioma conhecido como Princípio de Cavalieri (Francesco Bonaventura Cavalieri, 1598 - 1647). Para tal, conforme ilustrado na Figura 80, tomamos um plano α que contém as bases dos sólidos e será chamado de plano horizontal, assim como todos os planos paralelos a ele.

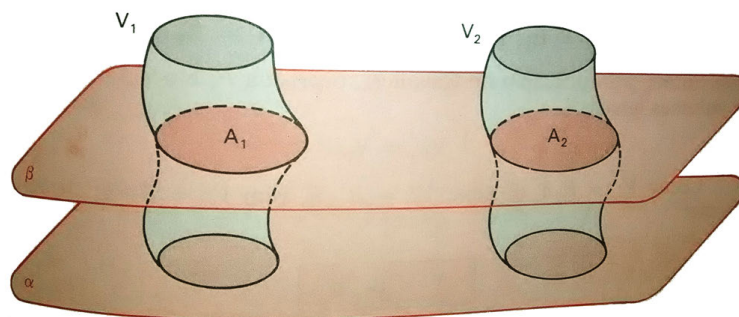


Figura 80 – Ilustração do Princípio de Cavalieri

Fonte: Dolce e Pompeo (2005, p. 165).

Axioma 1 (Princípio de Cavalieri). *Sejam V_1 e V_2 dois sólidos quaisquer. Se qualquer plano horizontal secciona V_1 e V_2 em duas figuras planas A_1 e A_2 , com áreas iguais, então o volume de V_1 é igual ao volume de V_2 .*

Segundo Lima (2006), o Princípio de Cavalieri, a rigor, é um teorema, logo pode ser demonstrado, no entanto, como requer conceitos mais avançados aos que pretendemos abordar nesse trabalho, ele será tomado como um axioma, ou seja, assume-se como verdade.

A ideia intuitiva desse princípio pode facilmente ser mostrada em sala de aula, basta utilizar uma pilha de moedas (ou de folhas), por exemplo. Conforme ilustrado na Figura 81, a primeira pilha representa um sólido com determinado volume formado por oito moedas (representando as seções dos planos horizontais) e a segunda pilha representa um sólido, também formado por oito moedas, mas com outro formato, no entanto, com o mesmo volume.



Figura 81 – Dois sólidos diferentes com o mesmo volume de acordo com o Princípio de Cavalieri

Fonte: Autoria própria.

A Figura 82 ilustra um prisma formado a partir de um polígono de n lados. Dolce e Pompeo (2005, p. 139) o definem da seguinte maneira:

Consideremos um polígono convexo [...] $ABCD \dots MN$ situado num plano α e um segmento de reta PQ , cuja reta suporte intercepta o plano α . Chama-se *prisma* (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espço dos determinados por α .

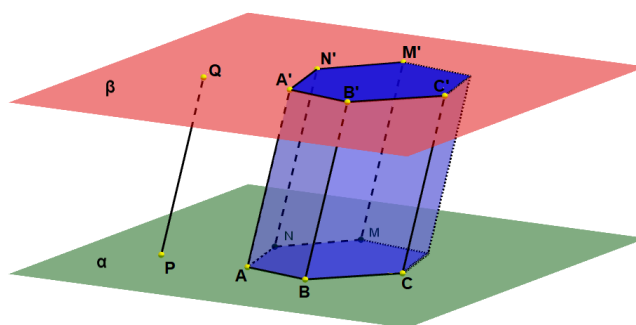


Figura 82 – Prisma de base n -agonal

Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2005).

Os prismas são identificados destacando o formato de sua base como em um prisma triangular (prisma onde a base é um triângulo), prisma pentagonal (prisma onde a base é um pentágono) etc. Assim, podemos concluir que um bloco retangular é, na verdade, um prisma retangular. Além disso, é possível perceber que, dado qualquer plano paralelo à base do prisma, as suas interseções com o mesmo (ou seja, suas seções horizontais) são polígonos congruentes à base e que sua altura é a distância entre os planos α e β da Figura 82.

Agora imaginemos sobre um plano α , um prisma de altura h , cuja base seja um triângulo de área A . Ao seu lado colocamos um paralelepípedo reto retângulo (que é um prisma retangular reto) com base de área A e altura h , Figura 83.

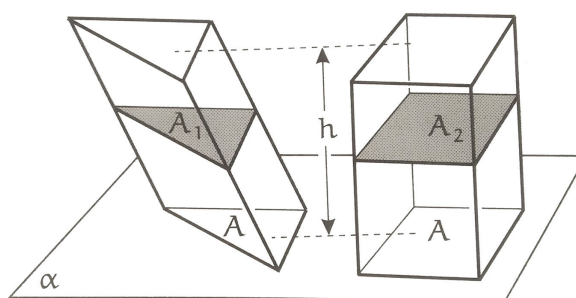


Figura 83 – Prisma triangular oblíquo e prisma retangular reto, ambos com o mesmo volume

Fonte: Lima et al. (2006, p. 258).

Os planos horizontais geram seções A_1 e A_2 , respectivamente, no prisma e no paralelepípedo. Como sabemos, $A_1 = A$ e, do mesmo modo, $A_2 = A$. Por transitividade, $A_1 = A_2$. Como nos prismas todas as seções paralelas às bases são congruentes, pelo Princípio de Cavalieri, podemos concluir que os dois prismas têm o mesmo volume. De modo análogo, podemos generalizar essa situação para prismas com qualquer tipo de base.

Como o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela altura, concluímos que:

$$\text{Volume do prisma} = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) .$$

3.5.3 Volume da pirâmide

Dado um polígono P qualquer pertencente a um plano π e um ponto V não pertencente a esse plano, uma pirâmide, de acordo com Lima (2006), é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto V a todos os pontos do polígono P . Na Figura 84, vemos um exemplo de uma pirâmide pentagonal com área da base igual a A_1 e altura H . Ela foi seccionada em determinada altura por um plano horizontal gerando um polígono com área A_2 , formando uma pirâmide pentagonal menor de altura h .

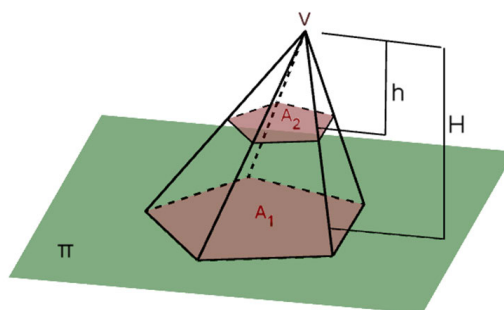


Figura 84 – Pirâmide oblíqua de base pentagonal

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

Para dar continuidade à busca pela fórmula do volume da pirâmide, precisamos considerar dois fatos importantes da Geometria Plana (que podem ser encontrados com mais detalhes em Lima (2006) e Lima et al. (2006)):

- qualquer seção horizontal da pirâmide e a sua base são figuras semelhantes, que, neste caso, tem razão $\frac{h}{H}$;
- a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado de sua razão de semelhança. Neste caso, a razão entre as áreas A_2 e A_1 equivale a $\left(\frac{h}{H}\right)^2$.

Agora, com isso em mente, podemos enunciar e demonstrar (de acordo com Lima et al. (2006) que:

Teorema 3. *Duas pirâmides de mesma altura e mesma base têm o mesmo volume.*

Demonstração:

Observe que na Figura 85 vemos duas pirâmides de mesma base BCD , com área igual a A , uma delas tem vértice M e a outra vértice N e ambas têm a mesma altura H . Duas seções de áreas A_1 e A_2 são formadas nas pirâmides através da interseção de um plano horizontal (paralelo ao plano que contém BCD), a uma distância h dos vértices.

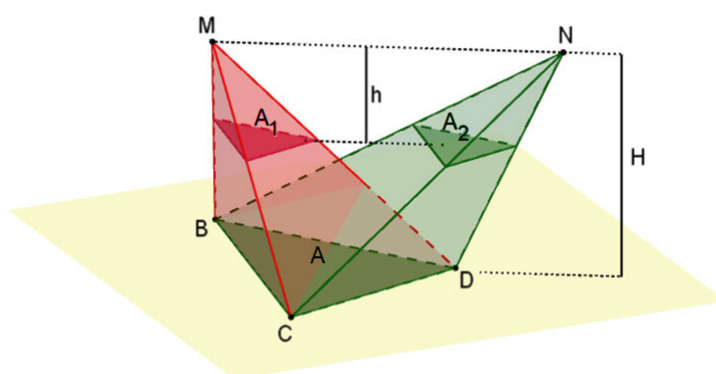


Figura 85 – Pirâmides de mesmo volume: mesma base e mesma altura

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

Dessa forma, podemos concluir que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}.$$

Logo,

$$A_1 = A_2.$$

E, de acordo com o Princípio de Cavalieri, como qualquer seção horizontal gera polígonos de mesma área em ambas as pirâmides, podemos concluir que as pirâmides terão o mesmo volume. Analogamente, podemos generalizar essa situação para pirâmides com qualquer tipo de base, como queríamos demonstrar.

Agora, antes de generalizar para todas as pirâmides, vamos analisar o seguinte teorema:

Teorema 4. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da sua base pela sua altura.*

Demonstração:

Para facilitar a demonstração desse teorema, observe na Figura 86 que um prisma triangular foi dividido em três pirâmides e lembre-se que, como dito anteriormente, pirâmides de mesma base e mesma altura têm volumes iguais.

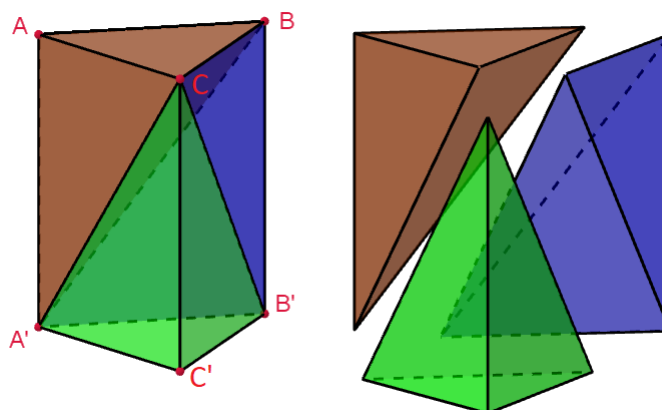


Figura 86 – Prisma triangular decomposto em três pirâmides com volumes iguais

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

Note que, devido à definição de prisma, os triângulos ABC e $A'B'C'$ têm a mesma área e que os segmentos AA' , BB' e CC' são congruentes. Logo, as pirâmides $ABCA'$ e $A'B'C'C$ têm o mesmo volume, pois possuem bases de mesma área e alturas iguais.

Note também, que os triângulos BCB' e $B'C'C$ são congruentes, pois são o resultado da divisão do retângulo $BCC'B'$ por sua diagonal $\overline{CB'}$. Além disso, as pirâmides $BCB'A'$ e $B'C'CA'$ possuem a mesma altura. Assim, concluímos que essas duas pirâmides também têm o mesmo volume.

Por transitividade, podemos concluir que as três pirâmides têm o mesmo volume. Como o prisma é formado por essas três pirâmides, o volume de cada pirâmide equivale a um terço do volume do prisma, como queríamos demonstrar.

Agora estamos em condições de afirmar o seguinte teorema:

Teorema 5. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.*

Demonstração:

Para ajudar a compreender essa demonstração, observe a pirâmide pentagonal presente na Figura 87. Ela foi dividida em três pirâmides triangulares cujas bases têm áreas A_1 , A_2 e A_3 e todas têm a mesma altura h . Note que, qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular.

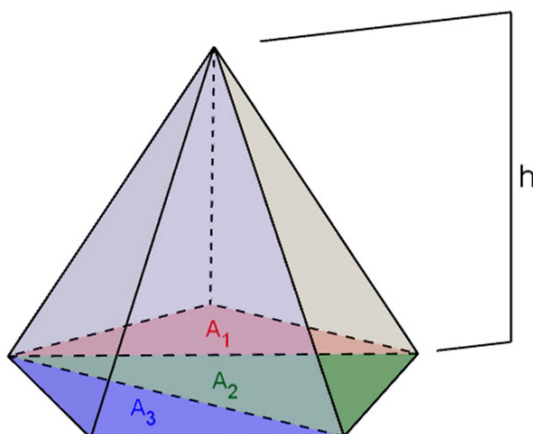


Figura 87 – Pirâmide pentagonal dividida em três pirâmides triangulares

Fonte: Adaptado de Lima et al. (2006).

Consideremos uma pirâmide P de volume V , altura h e que sua base de área A foi dividida em n triângulos de áreas A_1, A_2, A_3, \dots e A_n .

Logo,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n .$$

Cada pirâmide triangular, pelo que vimos anteriormente, tem volume igual a um terço do produto da área da sua base pela sua altura que neste caso é h . Como o volume de P equivale a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que

$$V = \frac{1}{3}A_1 \cdot h + \frac{1}{3}A_2 \cdot h + \frac{1}{3}A_3 \cdot h + \dots + \frac{1}{3}A_n \cdot h ,$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) \cdot h ,$$

$$V = \frac{1}{3}A \cdot h .$$

Assim, concluímos que:

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3}(\text{área da base}) \cdot (\text{altura}),$$

como queríamos demonstrar.

4 VOLUME DO SÓLIDO DE ESCHER

Neste capítulo apresentaremos um estudo do Sólido de Escher (SE) e a fórmula para o cálculo de seu volume.

Em um primeiro momento, determinaremos a fórmula utilizando conhecimentos algébricos e geométricos e, em um segundo momento, comprovaremos a fórmula através da construção do SE utilizando o GeoGebra e também com o uso de um material didático manipulável. Para deixar as demonstrações mais simples, e menos carregadas de notações, faremos constantemente referência às cores de segmentos, faces etc.

Conforme apresentamos na Seção 2.7, o Sólido de Escher, que está sobre a torre direita na obra Cascata, Figura 52, é uma estrelação (técnica utilizada por Kepler e Poincot) do dodecaedro rômboico (Sólido de Catalan), que é o dual do cuboctaedro (Sólido de Arquimedes) que, por sua vez, pode ser obtido através do truncamento de um cubo ou octaedro (Sólidos de Platão), Figura 88.

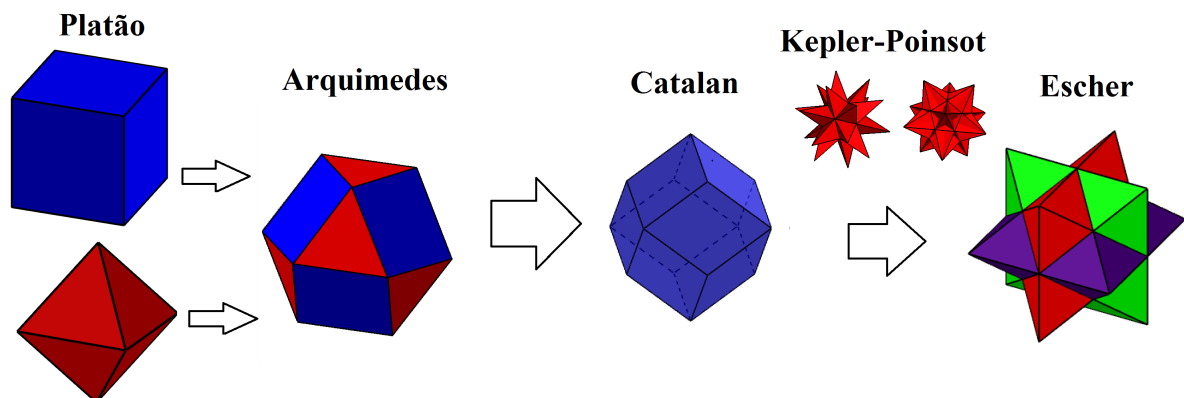


Figura 88 – O Sólido de Escher: de Platão a Poincot

Fonte: Autoria própria.

4.1 CÁLCULO DO VOLUME DO SÓLIDO DE ESCHER

De acordo com as definições de arestas, faces e vértices de Lima, Luz e Góes (2013), o SE possui 12 faces, geradas da expansão de cada uma das 12 faces do dodecaedro rômboico. Uma face no SE é a união de todos os triângulos que estão contidos em um mesmo plano. Dessa forma, na Figura 89, os quatro triângulos vermelhos representam uma face do SE, os quatro triângulos roxos, outra face e assim por diante.

Os pontos A , B , D , H e I são cinco dos 12 vértices do Sólido de Escher. Por coincidirem com os vértices do dodecaedro rômboico, os pontos C , E , F e G são chamados de falsos vértices.

As interseções das faces geram 36 arestas. Na figura 89, por exemplo, \overline{AB} e \overline{HI} são duas dessas arestas. Definiremos que elas possuem medida $2a$. Logo, todos os segmentos verdes, entre dois pontos, terão medida a . Outras seis arestas são \overline{AE} , \overline{EH} , \overline{BG} , \overline{GI} , \overline{ED} e \overline{DG} . Definiremos que o comprimento de cada uma é b . Logo, todos os segmentos em preto, entre dois pontos, têm medida b .

Os segmentos \overline{CE} , \overline{EF} , \overline{FG} e \overline{GC} , por coincidirem com as arestas do DR, são chamados de falsas arestas, mas também têm medida b .

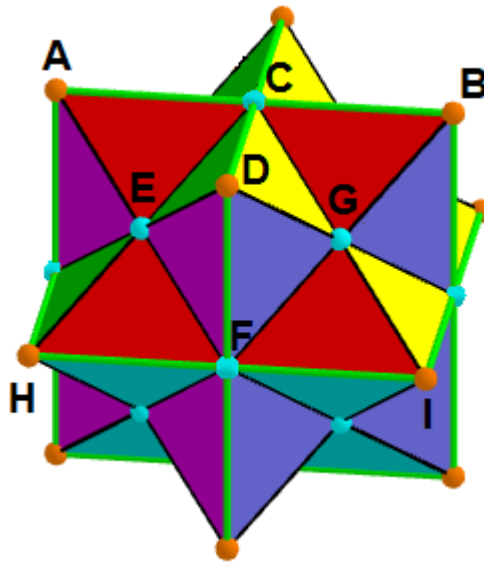


Figura 89 – Sólido de Escher: segmentos verdes, entre dois pontos, medem a e segmentos pretos, entre dois pontos, medem b

Fonte: Autoria própria.

O volume do SE (V_{SE}) é composto pelo volume do DR (V_{DR}) e pelo volume das 12 pirâmides ($12V_{P_1}$) geradas após sua estrelação, ou seja,

$$V_{SE} = V_{DR} + 12V_{P_1}. \quad (4.1)$$

Para determinar a fórmula do volume do Sólido de Escher, começaremos analisando o volume das pirâmides (V_{P_1}) geradas no estrelamento do dodecaedro rômbo.

No SE da Figura 89, podemos verificar que o mesmo possui dois tipos de segmentos: um maior, de medida a (segmentos verdes entre dois pontos, por exemplo, \overline{AC} e \overline{CD}) e outro menor, de medida b (segmentos pretos entre dois pontos, por exemplo, \overline{ED} e \overline{EF}).

Na Figura 90, note que a base de cada pirâmide corresponde às faces (losangos) do DR que gerou o SE e o segmento \overline{EG} equivale à diagonal menor (d) do losango e \overline{CF} à diagonal maior (D).

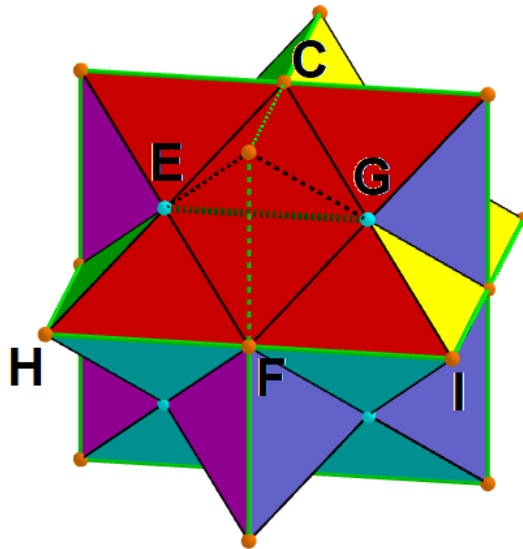


Figura 90 – Triângulos CHI e CEG destacados no Sólido de Escher

Fonte: Autoria própria.

Observe que o triângulo CHI é isósceles de base $2a$ e lados $2b$, Figura 91, e, além disso, podemos concluir que E e G são os pontos médios dos segmentos CH e CI , respectivamente.

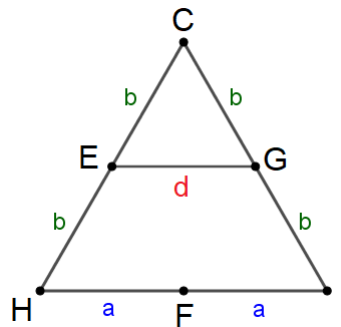


Figura 91 – Triângulo isósceles destacado no SE

Fonte: Autoria própria.

Logo, pela semelhança dos triângulos CHI e CEG , temos que

$$\frac{2b}{b} = \frac{2a}{d},$$

$$a = d. \tag{4.2}$$

Por (4.2) concluímos que a diagonal menor (d) do losango tem a mesma medida a dos maior segmento entre dois pontos do SE.

Agora, dividindo o SE ao meio, conforme apresentado na Figura 92, onde um plano seccionou-o em duas partes iguais, note que $ABKL$ é um quadrado de lados $2a$, que \overline{CJ} é a diagonal maior (D) do losango e, que o triângulo ABK é retângulo, em B , e isósceles, Figura 93.

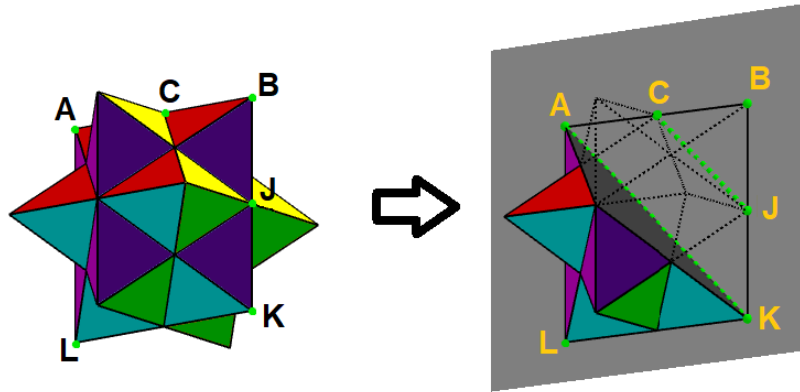


Figura 92 – Sólido de Escher e sua seção

Fonte: Autoria própria.

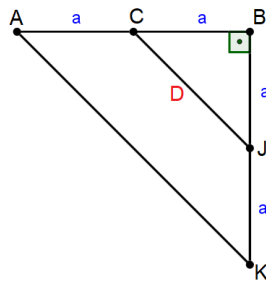


Figura 93 – Triângulo retângulo e isósceles ABK

Fonte: Autoria própria.

Como o triângulo ABK é retângulo em B , por ser a metade do quadrado $ABKL$, temos que o triângulo CBJ também possui essas características, logo, utilizando o Teorema de Pitágoras,

$$D^2 = a^2 + a^2,$$

$$D = a\sqrt{2}. \quad (4.3)$$

De (4.2) e (4.3) concluímos que as faces losangulares do DR tem diagonais a e $a\sqrt{2}$. Assim, podemos calcular a área da base das 12 pirâmides. No entanto ainda precisamos saber a altura dessas pirâmides para então calcular o valor de V_{P_1} .

A Figura 94 mostra a estrutura de uma das 12 pirâmides geradas na estrelação do DR. O ponto F , devido ao processo de estrelação, está posicionado no centro do losango $BCDE$ que, por definição, é o ponto médio das diagonais do losango.

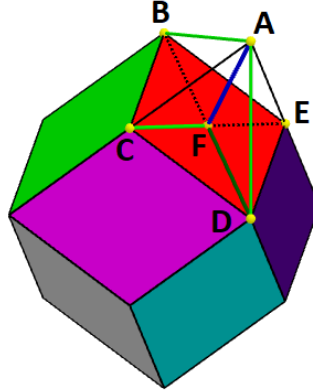


Figura 94 – Estrutura de uma das pirâmides sobre o DR

Fonte: Autoria própria.

Logo, de (4.2) e (4.3) temos que $CF = \frac{a}{2}$ e $FD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Como \overline{AF} é a altura (h) da pirâmide $ABCDE$, então o triângulo ADF é retângulo em F . Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo temos que

$$AD^2 = AF^2 + FD^2,$$

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (4.4)$$

Utilizando (4.2), (4.3) e (4.4), podemos determinar V_{P_1} :

$$V_{P_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{d \cdot D}{2}\right) \cdot h;$$

$$V_{P_1} = \frac{1}{3} \left(\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$V_{P_1} = \frac{a^3}{6}. \quad (4.5)$$

Agora vamos determinar o volume do DR.

Como vimos na Figura 36, o DR pode ser decomposto em um cubo, com arestas de mesma medida das diagonais menores das faces losangulares do DR, com 6 pirâmides quadrangulares em cada face, Figura 95.

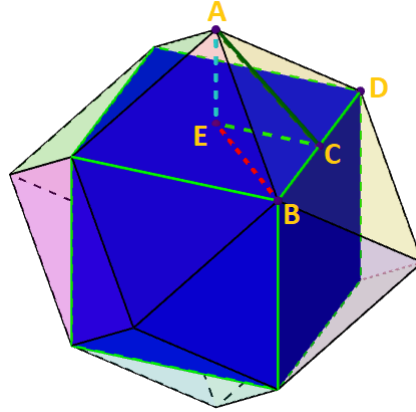


Figura 95 – Estrutura de uma das pirâmides sobre o DR

Fonte: Autoria própria.

E, com isso o volume do DR (V_{DR}) equivale ao volume do cubo (V_{CB}) de arestas $d = a$ e a soma do volume das seis pirâmides ($6V_{P_2}$), ou seja,

$$V_{DR} = V_{CB} + 6V_{P_2}. \quad (4.6)$$

O ponto E é o centro da face superior do cubo, logo \overline{AE} é a altura (h') da pirâmide formada sobre essa face do cubo e o ponto C é o ponto médio de \overline{BD} . O triângulo ABD é isósceles de base \overline{BD} , visto que $AB = AD = b$ (arestas pretas do DR), logo \overline{AC} é a altura desse triângulo.

Como as arestas do cubo têm comprimento a , temos que $CB = \frac{a}{2}$ e $EB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal do quadrado). Além disso, $AC = \frac{D}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

- do triângulo ABC :

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2; \quad (4.7)$$

- do triângulo AEB :

$$(h')^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2. \quad (4.8)$$

De (4.7) e (4.8) temos:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (h')^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$h' = \frac{a}{2}.$$
(4.9)

Assim, de (4.6) e (4.9) temos que o volume do DR será dado por:

$$V_{DR} = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3} \left(a^2 \cdot \frac{a}{2}\right);$$

$$V_{DR} = 2a^3.$$
(4.10)

Definido o volume do DR (4.10) e das pirâmides de sua estrelação (4.5), podemos definir uma fórmula para calcular o volume do Sólido de Escher (4.1):

$$V_{SE} = V_{DR} + 12V_{P_1};$$

$$V_{SE} = 2a^3 + 12\frac{a^3}{6};$$

$$V_{SE} = 4a^3.$$
(4.11)

E, concluímos que dado um SE, seu volume equivale ao volume de quatro cubos com arestas a que é a medida dos segmentos, entre dois pontos, de maior comprimento do SE.

4.2 O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra, Figura 96, criado em 2001 por Markus Hohenwarter, é considerado o *software* de Matemática Dinâmica mais popular do planeta. Seu nome vem da aglutinação das palavras Geometria e Álgebra e foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem de Matemática nos vários níveis de ensino, sendo possível trabalhar conceitos de Geometria, Álgebra, planilhas, gráficos, Estatística e Cálculo.



Figura 96 – Logomarca do GeoGebra

Fonte: GeoGebra (2018).

Ele está disponível gratuitamente em mais de 50 idiomas e é um *software* de código aberto, ou seja, é possível modificar as ferramentas já existentes e/ou criar as suas próprias ferramentas e pode ser instalado em computadores e em dispositivos móveis (como celulares e *tablets*).

Atualmente, com o GeoGebra, é possível desenvolver projetos em uma Janela de Visualização 2D, Figura 97, e/ou 3D, Figura 98. Em ambas, temos uma Janela de Álgebra que mostra detalhes e valores presentes nos objetos construídos e uma Caixa de Entrada onde podemos inserir pontos, retas, polígonos etc. através de comandos específicos, que também podem ser feitos através dos vários botões disponíveis. Além disso, podemos criar outros botões com funções definidas conforme as nossas necessidades.

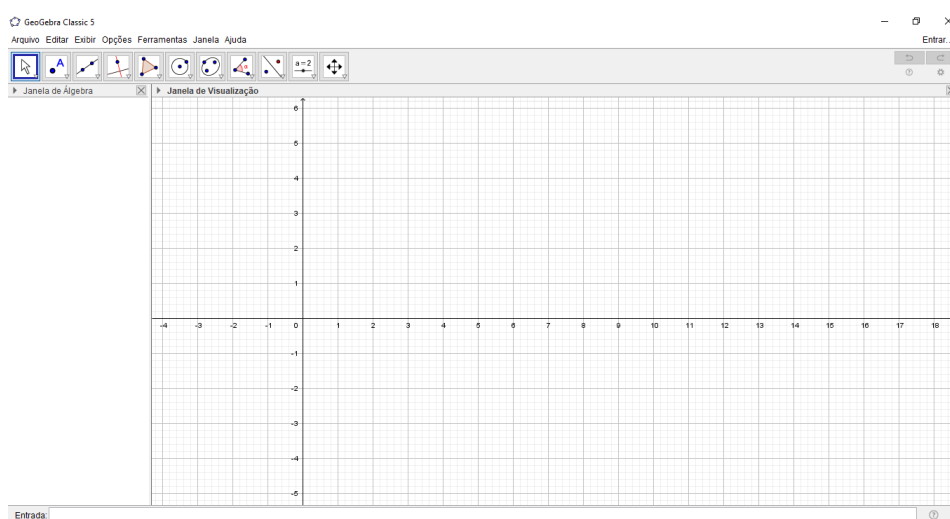


Figura 97 – Janela de Visualização 2D do GeoGebra

Fonte: Autoria própria.

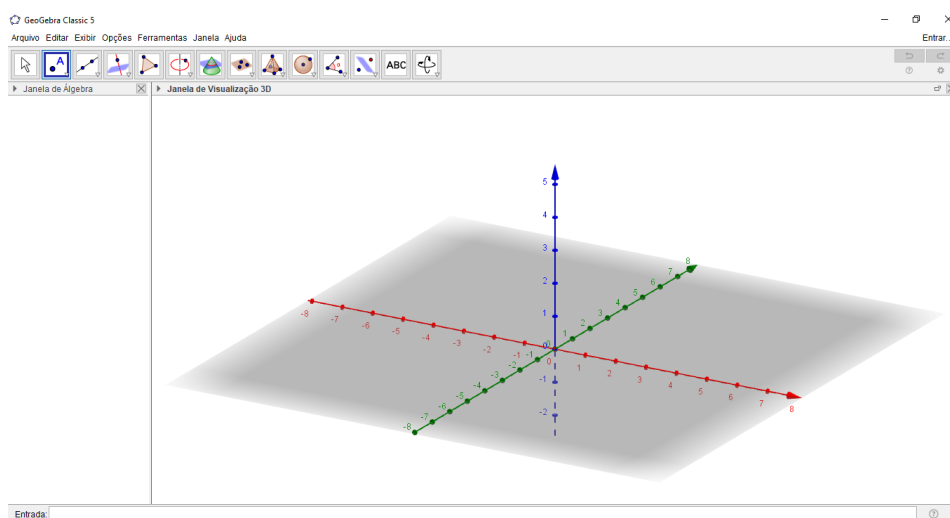


Figura 98 – Janela de Visualização 3D do GeoGebra

Fonte: Autoria própria.

4.2.1 Cálculo do volume do Sólido de Escher utilizando o GeoGebra

Agora, confirmaremos a fórmula do cálculo do volume do SE (4.11) de maneira mais dinâmica utilizando o GeoGebra (versão Clássico 5).

Para facilitar essa tarefa, desenvolvemos um tutorial em vídeo mostrando, passo-a-passo, a construção do SE e como verificar o seu volume. Esse vídeo, entre outros trabalhos realizados por este autor, podem ser vistos em Silva (2016). O resultado desse tutorial, ou seja, o SE construído, está disponível¹ no *site* do GeoGebra (2018) na forma de *applet*, que são construções prontas para serem utilizadas *on line*.

Inicialmente, faremos a construção de um DR e depois estrelaremos o mesmo obtendo, assim, o SE. Além disso, pela construção podemos obter a fórmula para determinar o volume do DR e do SE.

Como vimos, no Capítulo 2, o DR é o dual do cuboctaedro, que é obtido do truncamento de um cubo ou octaedro. Uma maneira simples de construí-lo é através de 6 cubos com uma face adjacente a um outro cubo, como vemos na Figura 99.

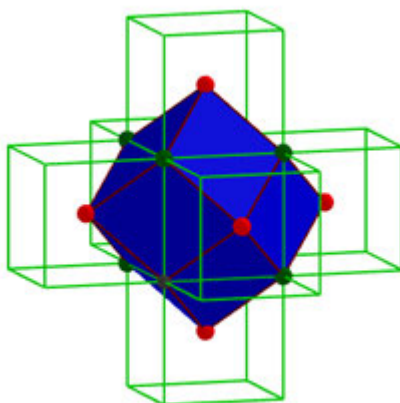


Figura 99 – DR gerado a partir de um cubo envolto por 6 cubos congruentes

Fonte: Autoria própria.

Construção do DR no GeoGebra

1. Abra a Janela de Visualização 3D (indicado na Figura 100 por 1), feche a Janela de Visualização 2D (indicado por 2) e marque os pontos $A(1, -1, -1)$ e $B(-1, -1, -1)$ ou digite essas coordenadas no Campo de Entrada (indicado por 3).

¹ No *site* do GeoGebra (GEOGEBRA, 2018), faça uma pesquisa por “Ederson Marcelino da Silva” (utilizando as aspas). Assim, você encontrará não só o SE, mas outros materiais produzidos/utilizados nessa dissertação.

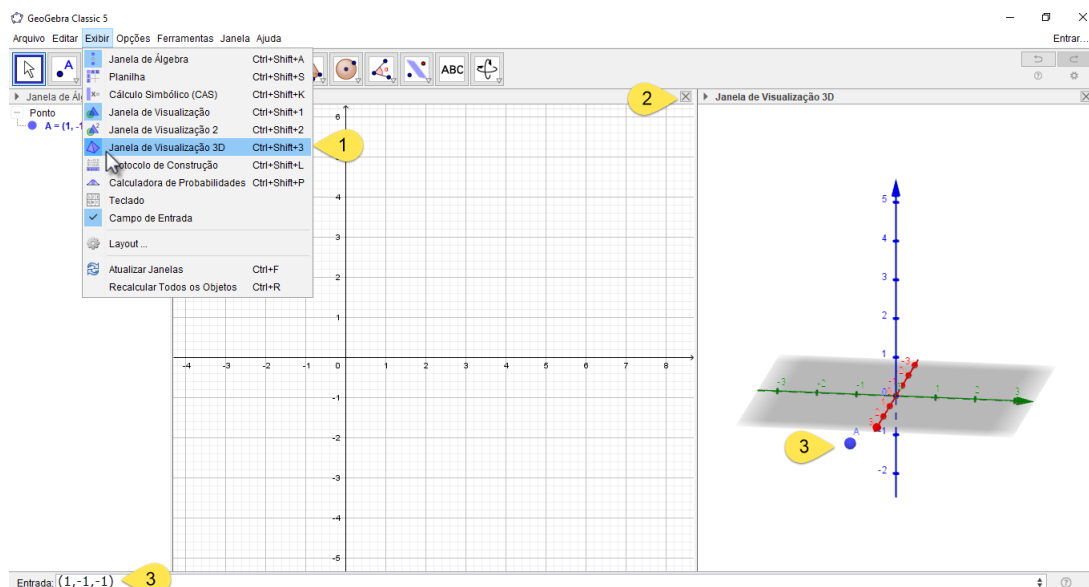


Figura 100 – Seleção da Janela de Visualização 3D do GeoGebra

Fonte: Autoria própria.

- Utilize a ferramenta Cubo (indicada na Figura 101 por 1), selecione os pontos A e B (indicados por 2 e 3), gerando um cubo, Figura 102, com arestas de medida a , que nesse caso, escolhemos de 2 unidades de comprimento (u.c.).

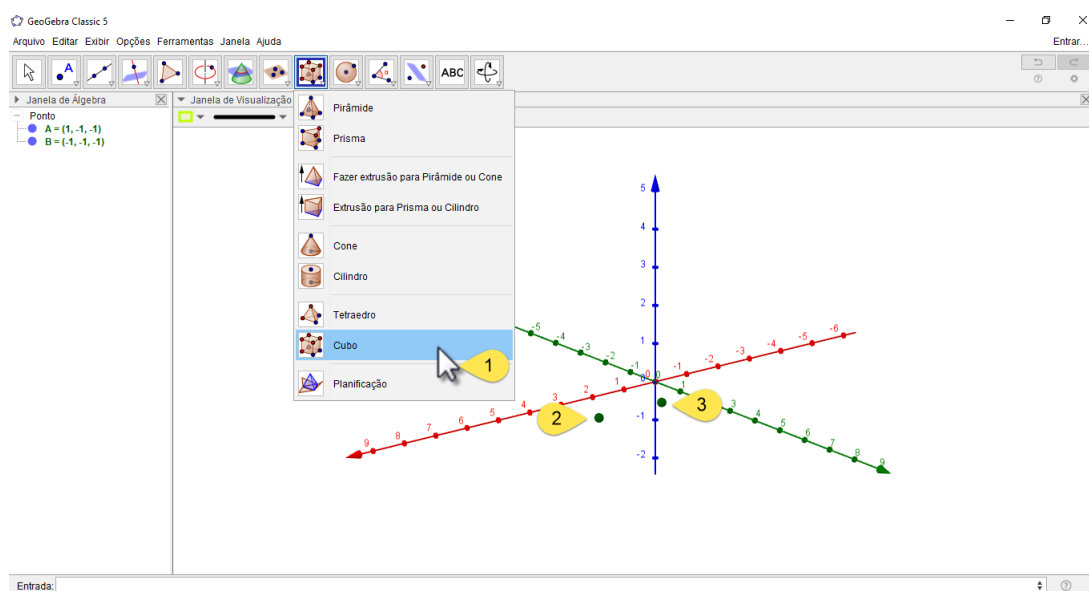


Figura 101 – Construção do primeiro cubo na constituição do SE

Fonte: Autoria própria.

Os pontos A e B foram escolhidos de forma que o cubo tivesse seu centro na origem dos eixos coordenados e a figura formada fique centralizada.

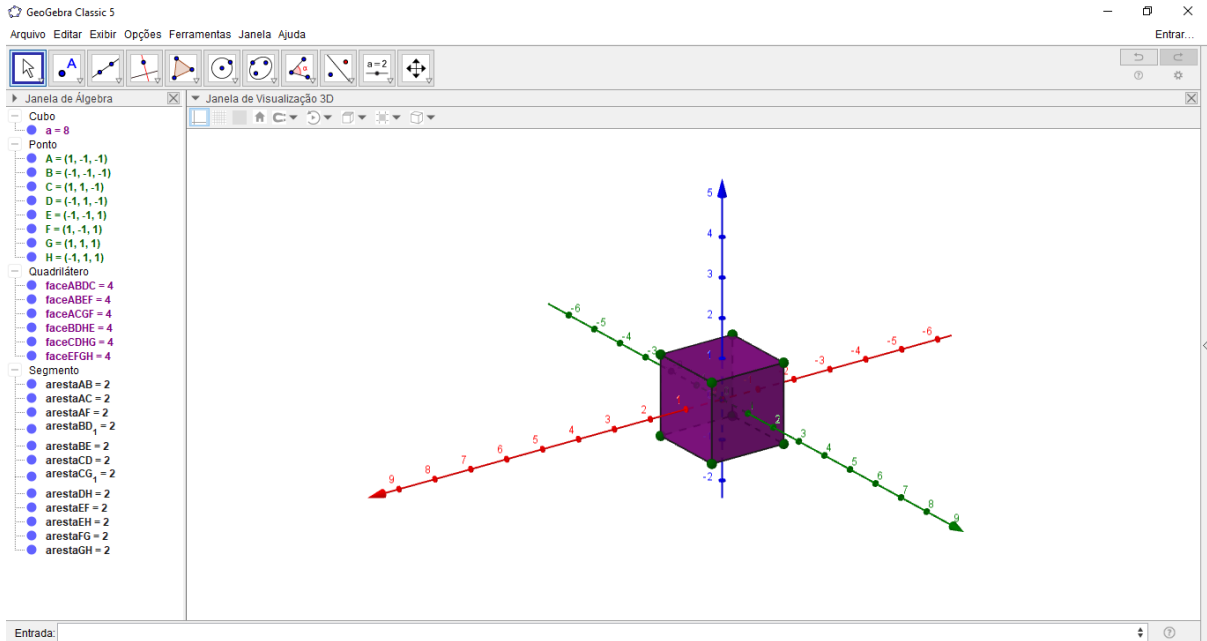


Figura 102 – Cubo centrado na origem dos eixos coordenados

Fonte: Autoria própria.

- Com a mesma ferramenta (Cubo) e utilizando os vértices do primeiro cubo, crie outros 6 cubos em torno do primeiro cubo, Figura 103, com uma de suas faces adjacente ao primeiro cubo.

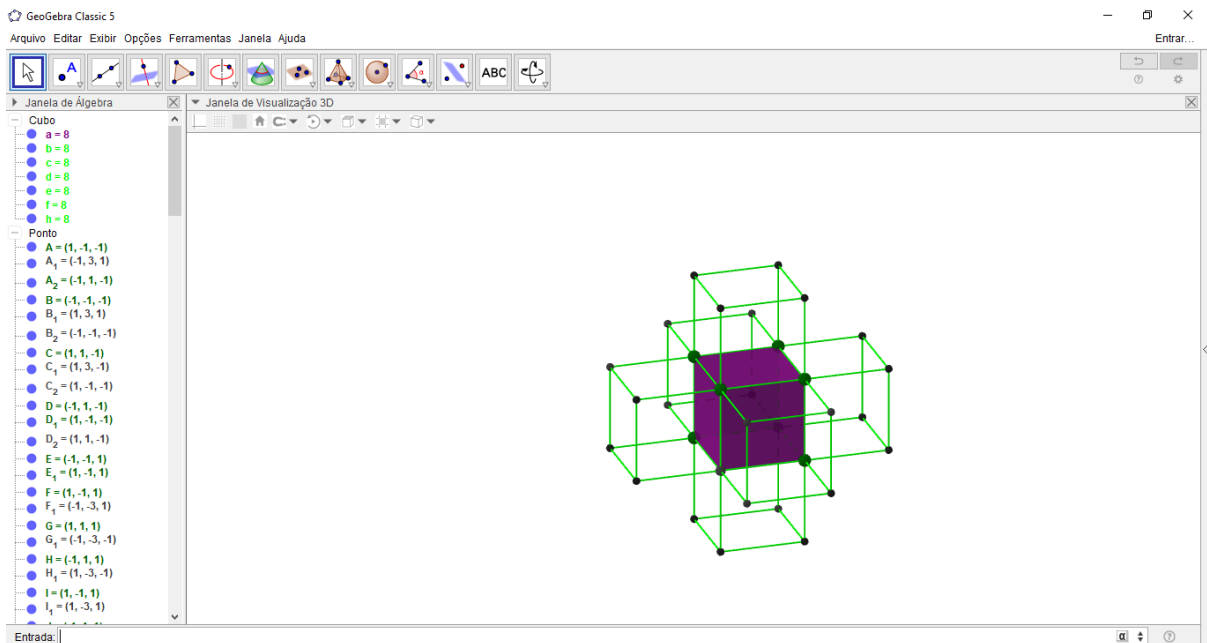


Figura 103 – Cubos externos, adjacentes ao primeiro cubo

Fonte: Autoria própria.

4. Selecione a ferramenta Ponto Médio, Figura 104, e encontre o centro de cada um dos cubos externos ao primeiro. Como o centro de um cubo encontra-se na interseção de suas diagonais principais que, por sua vez, encontram-se em seus pontos médios, então basta encontrar o ponto médio de uma das diagonais principais de cada cubo, Figura 105.

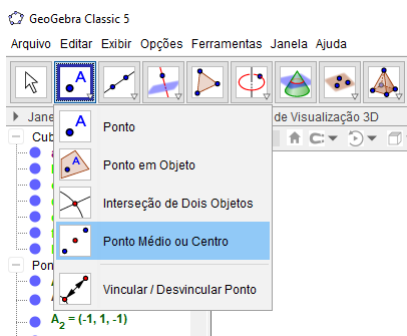


Figura 104 – Seleção da ferramenta Ponto Médio

Fonte: Autoria própria.

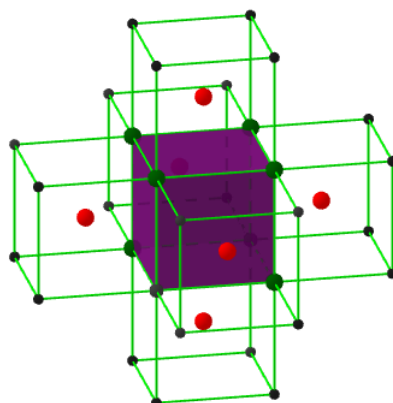


Figura 105 – Centro dos cubos externos

Fonte: Autoria própria.

5. Marcados os centros (pontos em vermelho na Figura 105), oculte os cubos externos e construa as faces losangulares do DR, utilizando a ferramenta Polígono, Figura 106, e selecione 4 pontos de tal forma que dois sejam centros e dois sejam vértices do cubo, Figura 107.



Figura 106 – Seleção da ferramenta Polígono

Fonte: Autoria própria.

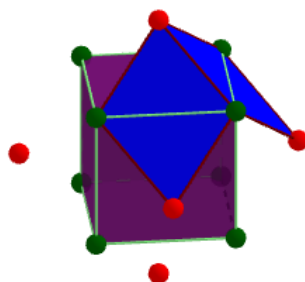


Figura 107 – Construção dos losangos que formarão o DR

Fonte: Autoria própria.

6. Proceda de forma análoga até obter o DR, Figura 108, que é formado pelo cubo interno e por 6 pirâmides que pertencem aos cubos externos, Figura 109.

Cada uma das pirâmides da Figura 109, têm volume equivalente a $\frac{1}{6}$ do volume do cubo, ou seja, $\frac{a^3}{6}$. E, as 6 pirâmides juntas têm volume igual ao de 1 cubo (a^3). Além disso, as arestas do DR têm medida (que aqui chamaremos de b) igual a metade de uma das diagonais principais do cubo.

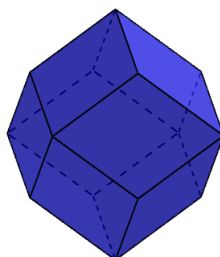


Figura 108 – Dodecaedro rômico

Fonte: Autoria própria.

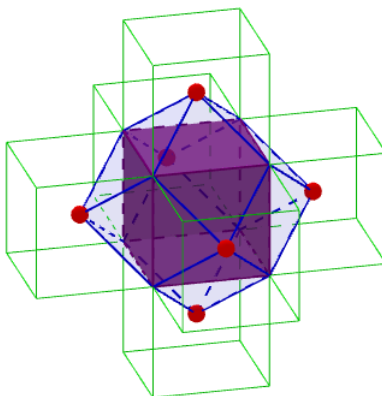


Figura 109 – Decomposição do DR em um cubo e 6 pirâmides

Fonte: Autoria própria.

Portanto, observando a Figura 109, podemos concluir que o volume do DR é equivalente ao volume de dois cubos de aresta a , ou seja,

$$V_{DR} = 2a^3,$$

onde a é a medida da diagonal menor das faces do DR. Como o valor de a estabelecido no início da construção é de 2 u.c. então, o volume do DR é igual a 16 unidades de volume (u.v.).

Note que ao construir um objeto tridimensional o GeoGebra automaticamente exibe seu volume na Janela de Álgebra, Figura 110. Para conferir o volume do DR, basta construir pirâmides com base nas faces do primeiro cubo e elevar seu topo até o centro dos cubos construídos ao redor deste.

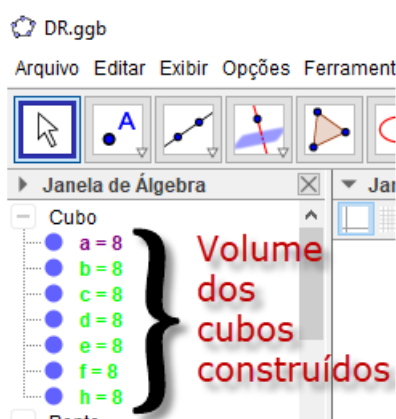


Figura 110 – Detalhe da Janela de Álgebra

Fonte: Autoria própria.

Estrelação do dodecaedro rômico no GeoGebra

Agora que temos um DR, vamos fazer sua estrelação obtendo o Sólido de Escher.

1. Selecione a ferramenta Plano, Figura 111.

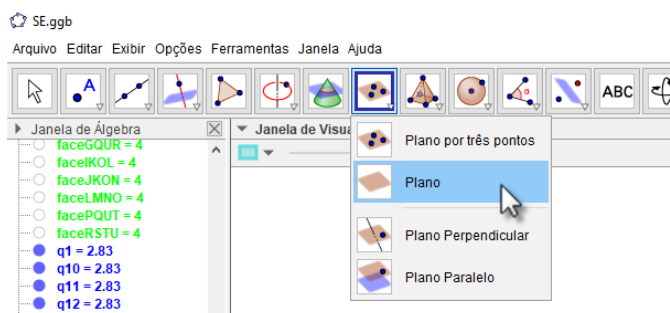


Figura 111 – Seleção da ferramenta Plano

Fonte: Autoria própria.

2. Escolha uma das faces do DR e clique sobre as 4 faces adjacentes a ela, Figura 112.

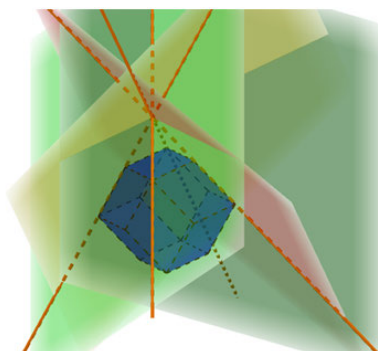


Figura 112 – Processo de estrelação do DR: interseção de planos

Fonte: Autoria própria.

3. Para exibir as retas que delimitam as interseções dos planos, utilize a ferramenta Interseção de Duas Superfícies, Figura 113, e clique em dois planos até obter as retas desejadas e, ocultando os planos obtemos a Figura 114.

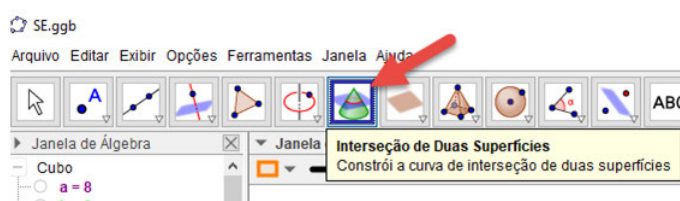


Figura 113 – Seleção da ferramenta Interseção de Duas Superfícies

Fonte: Autoria própria.

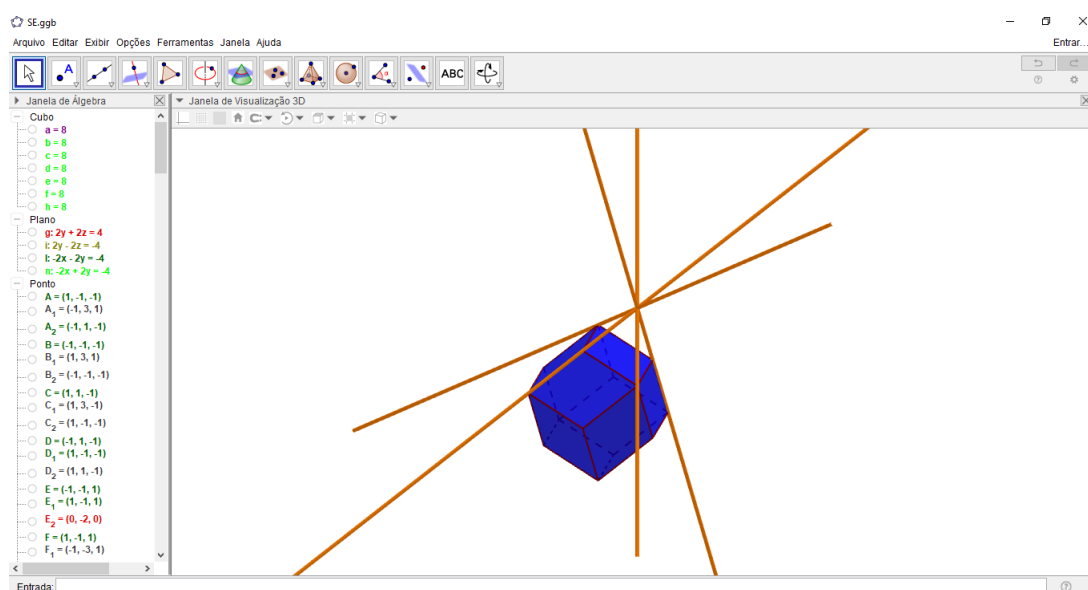


Figura 114 – Processo de estrelação do DR: interseção de retas

Fonte: Autoria própria.

4. Com a ferramenta Interseção de Dois Objetos, Figura 115, marque o ponto obtido pela interseção dessas retas e repita o procedimento com as outras faces até obter 12 pontos.

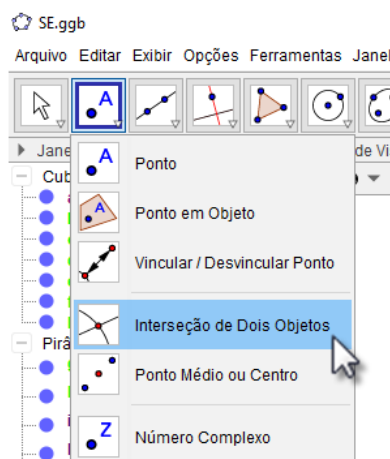


Figura 115 – Seleção da ferramenta Interseção de Dois Objetos

Fonte: Autoria própria.

Observe na Figura 116 que, das quatro retas geradas pela interseção dos planos durante a estrelação do DR, é possível encontrar o ponto de intersecção entre os planos utilizando apenas duas delas.

Além disso, perceba que as retas (exceto pelas tracejadas), contém as arestas do DR. Logo, utilizando apenas retas (e não planos) que contenham as arestas do DR, podemos encontrar os pontos de intersecção desejados.

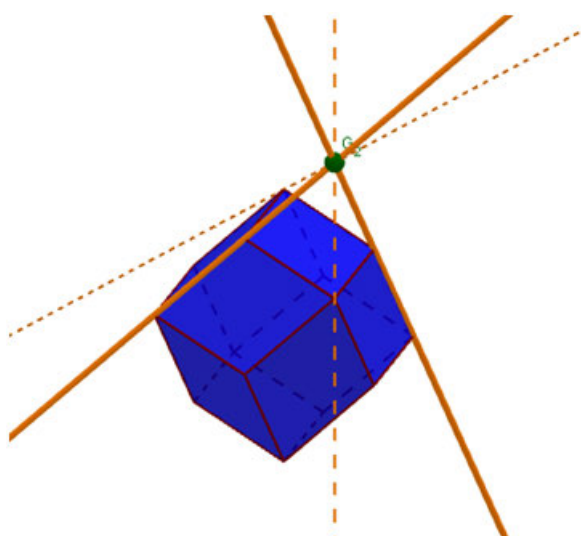


Figura 116 – Outra forma de obter o ponto de intersecção no processo de estrelação

Fonte: Autoria própria.

5. Selecione a ferramenta Reta Paralela, Figura 117, e clique duas vezes sobre a aresta desejada.

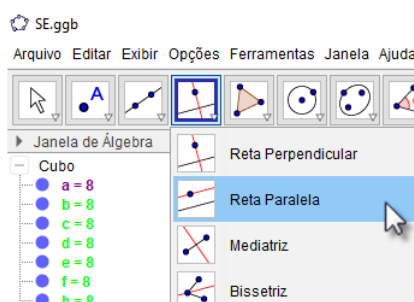


Figura 117 – Seleção da ferramenta Reta Paralela

Fonte: Autoria própria.

6. Depois de encontrar os 12 pontos, utilize a ferramenta Pirâmide, Figura 118, para criar as faces estreladas do DR.

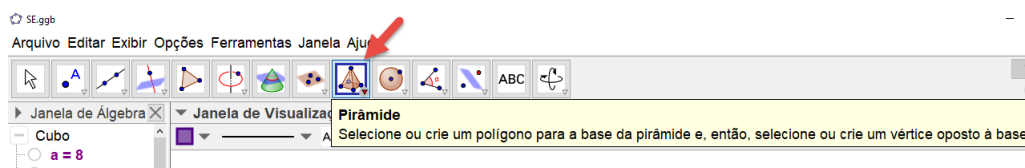


Figura 118 – Seleção da ferramenta Pirâmide

Fonte: Autoria própria.

7. Selecione uma face do DR (representado por 1 na Figura 119) e eleve a pirâmide até o ponto superior (representado por 2) à respectiva base.

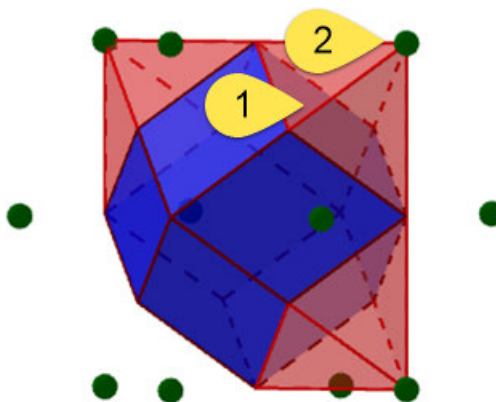


Figura 119 – Estrelação do DR

Fonte: Autoria própria.

Repetindo o processo 12 vezes, concluímos a construção do SE, Figura 120.

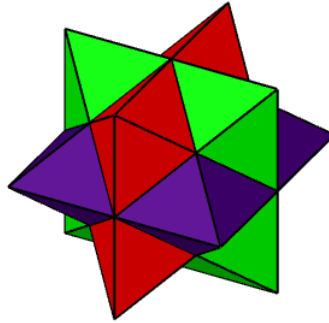


Figura 120 – Dodecaedro rômboico estrelado ou Sólido de Escher obtido através do GeoGebra

Fonte: Autoria própria.

Note que cada vez que uma pirâmide é construída, ao lado, na Janela de Álgebra, aparece um valor numérico. Esse valor se refere ao volume da pirâmide construída, Figura 121, que neste caso é $\frac{8}{6} = 1,33 \dots$ u.v..

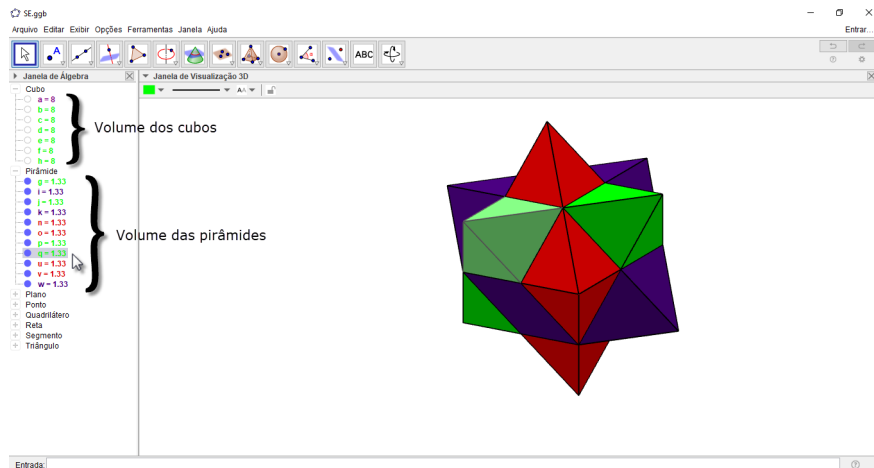


Figura 121 – Construção do Sólido de Escher: destaque para os volumes dos cubos e das pirâmides

Fonte: Autoria própria.

Esse volume da pirâmide equivale a $\frac{1}{6}$ do volume do cubo utilizado para construir o DR, ou seja, $\frac{a^3}{6}$. Como são 12 pirâmides que serão construídas, teremos um volume total equivalente ao de 2 cubos, ou seja, $2a^3$.

Portanto, somando o volume dessas 12 pirâmides ao volume do DR, é possível concluir que o volume do SE (V_{SE}) é equivalente ao volume de 4 cubos, ou seja,

$$V_{SE} = 4a^3.$$

Lembrando que a é a medida das arestas dos cubos construídos e da menor diagonal das faces do DR. Além disso, com o auxílio da ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, Figura 122, é possível verificar que o SE apresenta dois tipos de segmentos, sendo um menor (b , que equivale às medidas das arestas do DR e tem metade do comprimento da diagonal principal do cubo) e outro maior (a , que, neste caso, tem medida igual a 2 u.c.), conforme podemos ver na Figura 123.

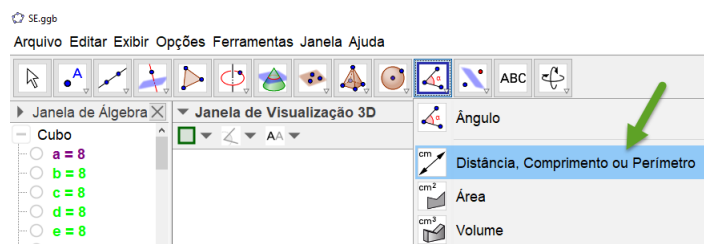


Figura 122 – Seleção da ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro

Fonte: Autoria própria.

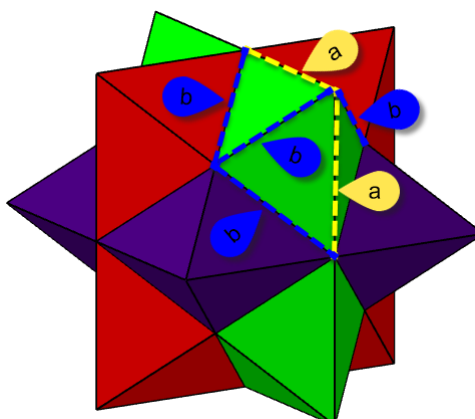


Figura 123 – Segmentos de comprimentos a e b do SE

Fonte: Autoria própria.

4.3 CÁLCULO DO VOLUME DO SÓLIDO DE ESCHER POR MEIO DE UM MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL

Nesta seção apresentamos uma réplica de um brinquedo que está exposto no Museu de Arte Moderna de Nova Iorque, conhecido como “Cubo de Yoshimoto”. Que pode ser encontrado também, em uma versão mais simples, como “*magic cube star*”, Figura 124. É um quebra-cabeça poliédrico mecânico, inventado em 1970 pelo japonês Naoki Yoshimoto. Esse cubo se desdobra de várias maneiras e se divide em dois cubos com as mesmas dimensões do original e, além disso, esses cubos transformam-se em dois Sólidos de Escher. Para compreender melhor seu funcionamento, sugerimos assistir ao vídeo “Yoshimoto Cube Puzzle” produzido por Bush (2015).

Utilizaremos esse brinquedo como material didático manipulável objetivando mostrar como obter o volume do SE e passaremos a chamá-lo de cubo desmontável (CD).

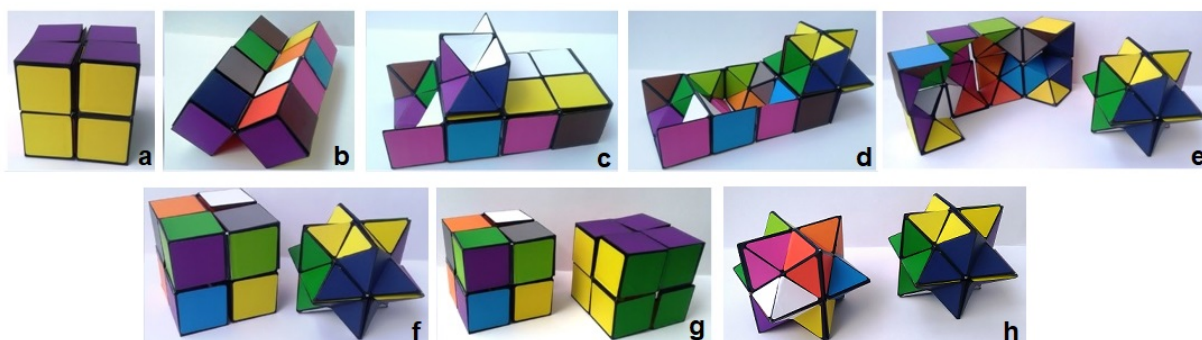


Figura 124 – Transformação do “*magic cube star*” em dois Sólidos de Escher

Fonte: Autoria própria.

O CD tem o interior sólido e equivalente à união de 8 cubos sólidos de arestas que medem a u.c., Figura 124, logo as arestas do CD têm $2a$ u.c. e seu volume será de $8a^3$.

Ele é decomposto em dois cubos com arestas $2a$, Figura 124g, mas seus interiores não são sólidos, Figura 124e, imagem da esquerda, o que justifica a possibilidade dessa transformação. Esses cubos se transformam em dois SE totalmente sólidos, Figura 124h. Logo cada um deles têm volume igual a metade do volume do CD, ou seja, $4a^3$. Então, podemos concluir que cada SE, obtido do CD, tem volume igual a quatro cubos de arestas a , como já mostrado anteriormente. Ainda, observamos que os segmentos maiores de cada SE também medem a u. c., conforme mostra a Figura 125.



Figura 125 – Sólido de Escher com segmentos maiores equivalentes às arestas de cada um dos 8 cubos do CD

Fonte: Autoria própria.

5 CONCLUSÃO

A percepção espacial é uma das habilidades fundamentais em nossas vidas. Dependemos dela para analisar profundidade e volume de objetos. Essa percepção espacial, entre outras habilidades, pode e deve ser estimulada e desenvolvida no Ensino Básico, principalmente quando se trabalha com Geometria Espacial. É importante, e necessário, proporcionarmos várias experiências que permitam ao discente ampliar sua capacidade de ver e manipular física e mentalmente objetos tridimensionais, transferindo esse conhecimento para situações de seu cotidiano.

Para contribuir, desenvolvemos essa dissertação objetivando fomentar o estudo e a aprendizagem do tema poliedros através de contextualizações, materiais didáticos manipuláveis, recursos digitais bem como a teoria sobre o assunto.

Para tal, apresentamos aspectos históricos sobre os poliedros e sua presença na natureza, nas construções humanas e nas obras de arte, com destaque às obras de Escher devido às suas características curiosas e aos métodos utilizados pelo próprio artista ao criá-las. Identificamos diversos poliedros em suas obras, como o dodecaedro rômbico estrelado, conhecido como Sólido de Escher.

Deduzimos uma fórmula para determinar o volume do Sólido de Escher; no entanto, até chegarmos a esse ponto, foram necessários estudos sobre poliedros de Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsot bem como sobre o cálculo de volumes. Verificamos a fórmula obtida construindo, no GeoGebra, o Sólido de Escher (produzimos um vídeo que mostra em detalhes todo o processo empregado) e através de um material didático manipulável que, além de agregar beleza e descontração ao trabalho, mostrou de forma intuitiva a relação existente entre essa fórmula e a visualização do poliedro.

Além do GeoGebra, utilizamos outros *softwares*, como o Poly e o Stella, para produzir as imagens e as atividades com o intuito de facilitar a visualização e compreensão dos conceitos envolvidos nessa dissertação.

Oferecemos ideias, sugestões e materiais, no entanto, a sua utilização pode esbarrar em problemas como a falta de tempo em sala de aula para trabalhar com os moldes dos poliedros, a ausência de projetor multimídia para expor as obras de Escher, a pouca habilidade no trabalho com o GeoGebra, entre outros. Contudo, acreditamos que utilizar, à medida do possível, essas ferramentas irá estimular os alunos e motivá-los na aprendizagem do assunto.

Diante do exposto, concluímos que o trabalho desenvolvido nessa dissertação tem como contribuição mostrar que podemos buscar outras fontes de enriquecimento para as aulas como materiais didáticos manipuláveis, aplicativos e materiais como o vídeo que desenvolvemos no GeoGebra. Ainda, como percebemos a existência de poucas referências em português tratando

desse assunto além dos poliedros convexos, esperamos continuar nossas pesquisas e a desenvolver outros trabalhos e assim ampliarmos o número de recursos que despertem o interesse pelo estudo da Geometria Espacial e, claro, da Matemática como um todo.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C. R. M. de. *Sólidos de Platão e seus duais: construção com material concreto e representações por GeoGebra*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2015. Disponível em: <<https://goo.gl/J4c4Ar>>. Acesso em: 12 jul. 2018.
- ALMEIDA, T. C. S. de. *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no Renascimento*. 185 p. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010. Disponível em: <<https://goo.gl/TsWkZL>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- ATOMIUM. *Atomium: site oficial do Atomium*. 2018. Disponível em: <<http://www.atomium.be>>. Acesso em: 20 jul. 2018.
- ATTRACTOR, F. *Atractor*. 2018. Disponível em: <<http://www.atractor.pt>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- BERRO, R. T. *Relações entre arte e matemática: um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher*. 107 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade São Francisco, Itatiba, 2008. Disponível em: <<http://livros01.livrosgratis.com.br/cp083264.pdf>>. Acesso em: 11 jul. 2018.
- BORGES, R. *Xilogravura passo a passo*. 2003. Disponível em: <http://obviousmag.org/archives/2014/03/xilogravura_passo_a_passo.html>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- BORTOLOSSI, H. J. *Uma Pletora de Poliedros*. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2009. Disponível em: <<http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/>>. Acesso em: 19 nov. 2017.
- BORTOLOSSI, H. J.; SILVA, P. V. C. *Os Sólidos Platônicos*. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense, 2009. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>>. Acesso em: 16 set. 2017.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 12 jul. 2018.
- _____. *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio: parte III - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 12 jul. 2018.
- BUSH, B. T. *Yoshimoto Cube Puzzle*. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=mM7jt5a8TE0>>. Acesso em: 22 jul. 2018.
- CARDIL, R. *Matemáticas Visuales*. 2018. Disponível em: <<http://www.matematicasvisuales.com>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- CATAWIKI. *M.C. Escher by NV de Verenigde Blikfabrieken Verblifa – Icosahedron tin*. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/ydakWX>>. Acesso em: 31 jul. 2018.
- CLAPHAM School. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/HV5V8x>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

DIESENDRUCK, B. S. *Análise de “Drawing Hands” de M. C. Escher, 1948*. 2015. Disponível em: <<https://goo.gl/6oW6Vm>>. Acesso em: 22 jul. 2018.

DISCOVERY. *MythBusters: Fun With Gas*. 2008. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=d-XbjFn3aqE>>. Acesso em: 22 jul. 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica*. São Paulo: Atual, 2005.

ERNST, B. *O espelh mágico de M. C. Escher*. Berlim: Taschen, 1991.

ESCHER, F. M. *MC Escher: site oficial*. 2018. Disponível em: <<http://www.mcescher.com>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

ESCHER, M. C. *The graphic work of M. C. Escher: introduced and explained by the artist*. New York: Ballantine Books, 1975.

EXEL, R. *Dualidade*. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Catarina Palestra apresentada no Primeiro Colóquio de Matemática da Região Sul, 2010. Disponível em: <<http://mtm.ufsc.br/~exel/talks/ufsm.pdf>>. Acesso em: 12 jul. 2018.

FALCOLINI, C. *Snub Dodecahedron and its rectifications*. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/TE2gW6>>. Acesso em: 22 jul. 2018.

FORTRAN, A. do. *Estrelando o dodecaedro*. 2001. Disponível em: <<http://fortran.orpheusweb.co.uk/Poly/Ex/dodstl.htm>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

FUTUROSCOPE. *Theme Park Guide: Futuroscope*. 2010. Disponível em: <<http://www.themeparkguide.org/tag/futuroscope>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

GALERIA Nacional de Arte dos Estados Unidos da América. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/opS5zv>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

GEOGEBRA. *GeoGebra: Aplicativos Matemáticos*. 2018. Disponível em: <www.geogebra.org>. Acesso em: 20 jul. 2018.

INEP. *Enem: Prova 1 - amarela*. 2007. Disponível em: <<https://goo.gl/NbDnRY>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

_____. *Enem: Prova 2 - cinza*. 2014. Disponível em: <<https://goo.gl/6om2Gg>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

JREIGE, R. E. *A Resolução de Problemas Aplicada à Modelagem de Áreas e Volumes dos Poliedros de Platão*. 117 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, 2015. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=89712>. Acesso em: 11 jul. 2018.

KALEFF, A. M. M. R. *Vendo e entendendo poliedros*. Rio de Janeiro: EdUFF: Editora da Universidade Federal Fluminense, 2003.

KALEFF, A. M. M. R.; Sá, L. A.; TOLEDO, M. I. M. *Criando, vendo e entendendo sólidos de revolução*. Rio de Janeiro: Boletim GEPEN (USU), 2002. Disponível em: <http://www.uff.br/leg/publicacoes/01_05_gepensolidos6B.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2018.

KAPPRAFF, J. *Connections: the geometric bridge between art and science*. Singapura: World Scientific, 2001. Disponível em: <<http://mimoza.marmara.edu.tr/~maeyler/CONNECTIONS.pdf>>. Acesso em: 03 ago. 2017.

LAMORGESE, F. *Litografia e precisão em desenhos*. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/fVWb2F>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

LEMOS, W. G. *O uso de uma sala interativa para a aprendizagem de poliedros estrelados no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015. Disponível em: <<https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/1369#preview-link0>>. Acesso em: 11 jul. 2018.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática: e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

_____. *Medida e forma em geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, R. T.; LUZ, A. A. B. S.; GóES, A. R. T. *Poliedros estrelados: o estudo dos sólidos geométricos além dos livros didáticos*. Florianópolis: GRAPHICA, 2013. Disponível em: <<https://goo.gl/jTE4qH>>. Acesso em: 11 jul. 2018.

LOPES, C. F. *Escher o gênio da arte matemática*. São Paulo: Revista Galileu, Editora Globo S.A., 2002. Disponível em: <<http://galileu.globo.com/edic/88/conhecimento2.htm>>. Acesso em: 04 jun. 2017.

MALFATTI, S. M. et al. *Logo 3D – Uma Ferramenta Auxiliar no Aprendizado da Geometria Espacial*. Santo Ângelo, RS: XIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação – SBIE – UNISINOS, 2002.

MARTINEZ, P. P. *Xeometria de Debuxo Técnico*. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/nS2kY2>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

MATES, P. *Pinterest: Arquimedianos*. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/FvVqxb>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

MCCOOEY, D. I. *Visual Polyhedra*. 2015. Disponível em: <<http://dmccooey.com/polyhedra/index.html>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

MELO, H. S. *Os 13 sólidos arquimedianos*. Açores: Correio de Açores, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3568/1/Os%2013%20solidos%20Arquimedianos.pdf>>. Acesso em: 24 abr. 2018.

MIALICH, F. R. *Poliedros e Teorema de Euler*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94273/mialich_fr_me_sjrp.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 28 jul. 2018.

MOSELY, J. *Stellated Rhombic Dodecahedron*. 2002. Disponível em: <http://www.origami.gr.jp/Archives/Etc/convention02/SR_Dodecahedron1.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2018.

MOTULSKY, R. *Biblioteca Nacional da Bielorrússia*. 2018. Disponível em: <<http://www.nlb.by>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

- MUNDIM, K. C. *Estrutura de Átomos e Moléculas: Modelo VSEPR*. 2000. Disponível em: <<https://goo.gl/UAjWPJ>>. Acesso em: 20 jul. 2018.
- NEVES, A. *Puzzle: Dodecaedro Rômbico Estrelado (Sólido de Escher)*. 2011. Disponível em: <<https://goo.gl/4q2f1e>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- NIETO, R. Z.; BAIRRAL, M. A. Um ambiente virtual para o trabalho com poliedros estrelados. *Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, Salvador, v. 10, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/RE/T15_RE1341.pdf>. Acesso em: 13 mar. 2018.
- NO Oficial: M. C. Escher. 2016. Disponível em: <<https://goo.gl/sbCF8e>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- PERES, G. B.; NASCIMENTO, M. C. *Um mosaico de Escher*. 20—. Disponível em: <<http://www.wp.fc.unesp.br/~mauri/Logo/mosaico4.pdf>>. Acesso em: 11 jul. 2018.
- PIERAPANIZZUTI. *Venezia Nascosta: pensieri, storie, misteri*. 2011. Disponível em: <<https://goo.gl/gpY6ra>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- PLATÃO. *Diálogos V: o banquete; Menôn (ou da virtude); Timeu; Crítias; [tradução, textos complementares e notas por Edson Bini]*. Bauru: Edipro, 2010.
- PMEDIG. *Kepler-Poinsot Polyhedra*. 2011. Disponível em: <<https://goo.gl/udg4H4>>. Acesso em: 22 jul. 2018.
- PRAGNELL, B. *Poliedros de Kepler-Poinsot*. 2009. Disponível em: <<https://goo.gl/bnR4gj>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- PREFEITURA de Porto União: Praça Paraná. 2018. Disponível em: <<http://www.portouniao.sc.gov.br/turismo/item/detalhe/16322>>. Acesso em: 29 jul. 2018.
- PRICE, J. M. C. *Escher: Cycle, Spirals, and Snakes*. 2008. Disponível em: <http://www.artistsmarket.com/files/MCE_10.0_CSS_Gallery.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2017.
- RAMOS, R. de A. *Dicionário didático de Língua Portuguesa: ensino fundamental 1*. São Paulo: Edições SM, 2011.
- REALE, G. *História da filosofia grega e romana, vol. III: Platão/Giovanni Reale; tradução Henrique Cláudio de Lima Vaz, Marcelo Perine. 2. ed.* São Paulo: Edições Loyola, 2014.
- REIS, E. A. *Os Poliedros de Platão*. 35 p. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), Universidade Federal de Sergipe, 2013. Disponível em: <<https://ri.ufs.br/handle/riufs/6485>>. Acesso em: 11 jul. 2018.
- RODRÍGUEZ, A. F. *Atrapados en los 1000 años del Reino de Granada en la Alhambra*. 2014. Disponível em: <<https://goo.gl/4pDSRD>>. Acesso em: 21 jul. 2018.
- ROONEY, A. *A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.
- SAMSON, E. *Enrique Samson: architecture + interior photographs*. 2017. Disponível em: <<https://www.enriquesamson.com/>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

SARTOR, N. L. *O universo dos poliedros regulares*. 92 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=33850>. Acesso em: 11 jul. 2018.

SCHATTSCHNEIDER, D.; EMMER, M. M. C. *Escher's Legacy: A Centennial Celebration*. Berlim, Alemanha: Springer, 2005.

SCHATTSCHNEIDER, D.; WALKER, W. *Caleidosciclos de M.C. Escher*. Berlim, Alemanha: Evergreen, 2013.

SEGADAS, C.; SILVA, F. R.; MOUTINHO, M. Explorando atividades de visualização e representação de figuras no espaço. *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM*, Universidade de Pernambuco, Pernambuco, 2004. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC81955154791.pdf>>. Acesso em: 12 jul. 2018.

SILVA, C.; FILHO, B. *Matemática: participação e contexto - Ensino Médio*. São Paulo: FTD, 2008.

SILVA, E. M. da. *Volume dos Sólidos de Platão - Oficina de Matemática - IFPR*. 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/channel/UCGvMZBOrQKWa42uvyfnzXqA>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

SILVEIRA, M. R. A. da. *“Matemática é Difícil”: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos*. Rio de Janeiro: [s.n.], 1999. Disponível em: <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2018.

TJABBES, P. *O mundo mágico de Escher*. São Paulo: Centro Cultural Banco do Brasil, Art Unlimited, 2010? Disponível em: <<http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>>. Acesso em: 10 jul. 2017.

TORRISSEN, B. C. *Wikimedia Commons: Perth Impossible Triangle.jpg*. 2018. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Perth_Impossible_Triangle.jpg>. Acesso em: 21 jul. 2018.

UFRGS, I. de M. *Edumatec: Educação Matemática e Tecnologia Informática*. 2018. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php>. Acesso em: 21 jul. 2018.

VELOSO, E. *Histórias da Geometria - Os Poliedros*. [S.l.]: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VIEIRA, C. R. *Reinventando a geometria no ensino médio [manuscrito]: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a Teoria de Van Hiele*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2010. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/3252>>. Acesso em: 12 jul. 2018.

WEBB, R. *Stella Downloads*. 2018. Disponível em: <<https://www.software3d.com/Downloads.php>>. Acesso em: 08 ago. 2018.

WEEKS, J. *KaleidoTile*. 2018. Disponível em: <<http://www.geometrygames.org/KaleidoTile/index.html.pt>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

WEISSTEIN, E. W. *Cubo 3-Composto: de MathWorld - um recurso da Web de Wolfram*. 2018. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Cube3-Compound.html>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

_____. *Escher's Solid: de MathWorld - um recurso da Web de Wolfram*. 2018. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/EschersSolid.html>>. Acesso em: 23 fev. 2018.

WELLER, R. *Cochise College Geology*. 2018. Disponível em: <<http://skywalker.cochise.edu/wellerr/aawellerweb.htm>>. Acesso em: 20 jul. 2018.

WIKIPEDIA. *Escola de Atenas*. 2018. Disponível em: <<https://goo.gl/T7iEP9>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

WOOWOO, M. *As misteriosas esferas de pedra de 5000 anos: evidência de um conhecimento antigo perdido*. 2016. Disponível em: <<https://goo.gl/H25NhG>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

XENNEX. *Wikiart: Visual Art Encyclopedia - Stars*. 2011. Disponível em: <<https://www.wikiart.org/en/m-c-escher/stars>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

ZEFIRO, L. *O composto de três octaedros e um notável composto de três dipirâmides quadradas, o sólido de Escher*. 2010. Disponível em: <<https://goo.gl/bJRahB>>. Acesso em: 21 jul. 2018.

APÊNDICE A – RELATO DE EXPERIÊNCIA

Relatamos aqui duas atividades realizadas pelo autor dessa dissertação enquanto docente de Matemática e que influenciaram fortemente a realização dessa pesquisa de mestrado. Ambas as atividades dizem respeito à construção de poliedros utilizando materiais de baixo custo. A primeira atividade refere-se a um projeto de pesquisa e contou com a participação de três alunas que confeccionaram poliedros utilizando três técnicas diferentes, e a segunda foi uma oficina de construção de poliedros em um colégio estadual da região de União da Vitória, Paraná.

A.1 CONFECCÃO DE POLIEDROS UTILIZANDO PAPEL CARTÃO, ELÁSTICO, VARETAS DE BAMBU, COLA, CANUDOS E BARBANTE

A primeira atividade foi realizada em 2015 com três alunas do primeiro ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio, sendo duas bolsistas e uma voluntária do projeto de pesquisa denominado “Construção de Materiais Didáticos Manipuláveis para o Ensino e Aprendizagem de Geometria no IFPR, Campus União da Vitória” desenvolvido no Instituto Federal do Paraná, Campus União da Vitória.

Para desenvolver o trabalho, as alunas realizaram pesquisas bibliográficas e construíram materiais didáticos manipuláveis utilizando matéria-prima reciclada, de uso cotidiano e/ou baixo custo. Durante o processo eram discutidos, além da teoria pertinente, como e quais materiais seriam utilizados para construir os poliedros. Inicialmente, a proposta foi a construção dos cinco Sólidos de Platão e, a partir daí, as alunas fizeram uma análise bibliográfica para aprofundamento do tema e escolheram quatro maneiras diferentes para construir os objetos utilizando massa de modelar, canudos e barbante, varetas de bambu e cola e papel cartão e elástico.

De início, percebemos que não haveria uma maneira acessível naquele momento para construir os sólidos com massa de modelar. A partir desse momento, as tarefas constituíram-se em construir cinco poliedros com todas as arestas de mesma medida, cinco poliedros com a mesma área total e cinco poliedros com o mesmo volume.

As alunas escolheram construir os cinco Sólidos de Platão com canudos¹ e barbante utilizando a mesma aresta em todos. A Relação de Euler foi utilizada constantemente na confecção do material por meio da conferência visual do número de arestas, vértices e faces dos poliedros.

Para unir os canudos, passamos o barbante por entre eles e os amarramos nos vértices, Figura 126.

¹ Recomendamos utilizar materiais ecologicamente corretos para desenvolver esse trabalho, como utilizar papel enrolado no lugar dos canudos.

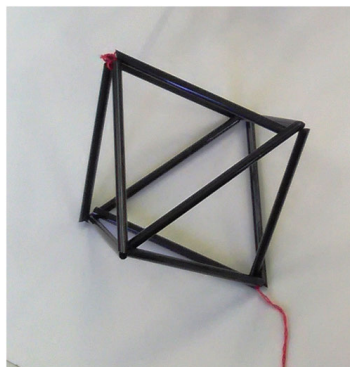


Figura 126 – Octaedro construído com canudos e barbante

Fonte: Autoria própria.

A construção dos poliedros cujas faces são triangulares foi relativamente fácil, mas o mesmo não ocorreu com a construção do hexaedro e do dodecaedro, pois as faces não se mantinham em formato fixo. Nesse momento as alunas compreenderam o conceito de rigidez oferecido pelas estruturas triangulares e o porquê de sua utilização em diversas construções. Também puderam perceber que a escolha não permitiria dar qualidade ao acabamento do poliedro, visto que os nós, presentes nos vértices dos poliedros, não deixavam os canudos firmes.

Na sequência, construímos os poliedros com varetas de bambu e cola de contato, Figura 127.

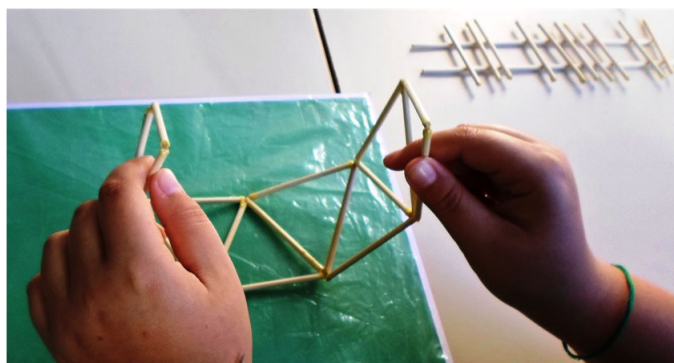


Figura 127 – Construção do icosaedro com varetas de bambu e cola de contato

Fonte: Autoria própria.

Para tal, cortamos as varetas do tamanho desejado e passamos cola nas pontas das mesmas, deixando secar por alguns minutos e unindo-as em seguida para formar um tetraedro. Após a conclusão da montagem e secagem definitiva da cola, foi necessário mais um reforço de cola nos vértices para que o poliedro ficasse mais firme. Depois de construir o tetraedro com varetas de bambu, decidimos fazer todos os outros poliedros com a mesma área. Para isso, utilizamos a fórmula da área de cada poliedro para descobrir o comprimento de sua aresta.

Apesar da dificuldade inicial para associar as fórmulas do cálculo de áreas dos poliedros com a situação-problema, as alunas obtiveram êxito nessa tarefa após investigações e associações.

Com essa técnica de construção, os poliedros ficaram mais resistentes ao manuseio, não tendo alterações em ângulos ou medidas de comprimento, no entanto, também não foi possível construir o hexaedro e dodecaedro pelos mesmos motivos explicitados anteriormente.

Por fim, realizamos a construção com papel cartão e elástico, utilizando técnicas e instrumentos de desenho geométrico para construir as faces dos poliedros, que foram presas com elástico, Figura 128.

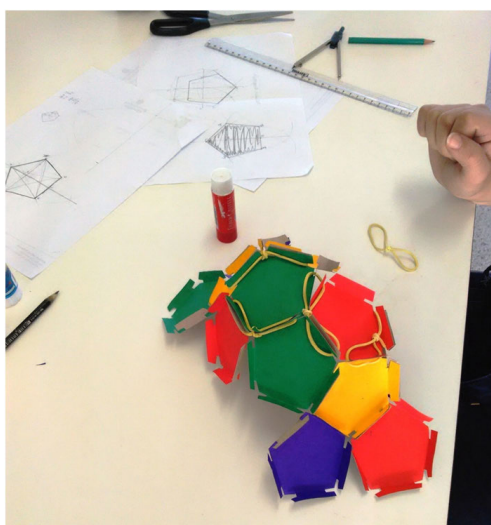


Figura 128 – Construção do dodecaedro com papel cartão e elástico

Fonte: Autoria própria.

Escolhemos construir os poliedros com volume de 1000 cm^3 (1000 ml), no entanto, ao realizar os cálculos para descobrir o comprimento das arestas percebemos que nosso compasso não tinha abertura suficiente, o que nos forçou a reduzir o volume para 500 cm^3 (500 ml). Para provar que os cálculos e a construção estavam corretos, vedamos as frestas (arestas) dos cinco poliedros com cola, deixando uma das faces abertas, e enchemos com 500 ml de água. Um vídeo mostrando tal experimento também pode ser visto em Silva (2016).

A.2 OFICINA DE POLIEDROS

A oficina foi realizada no ano seguinte (2016) em um colégio estadual da região de União da Vitória. Construimos um tetraedro e um hexaedro utilizando a técnica do papel cartão e elástico. Naquele dia, estavam acontecendo diversas oficinas e atividades no colégio e, além dos alunos com afinidade com a Matemática, participaram também aqueles que tiveram curiosidade sobre o tema.

Apresentamos os Sólidos de Platão e mostramos algumas imagens impressas. Também expomos a associação dos cinco poliedros regulares feita por Platão aos elementos terra, fogo, ar, água e Universo e a teoria de Johannes Kepler para o Sistema Solar.

A Figura 129 mostra um dos momentos dessa atividade, que realizamos em grupos de 3 a 5 estudantes e, sempre que possível, eram instigados a associar conceitos teóricos como área e volume às atividades realizadas naquele momento. Nem todos tinham percebido essas associações até a realização daquela oficina.



Figura 129 – Construção do tetraedro

Fonte: Autoria própria.

O conceito de área foi associado à quantidade de papel utilizada para construir as quatro faces do tetraedro. Após a construção desse poliedro, vedamos suas frestas (arestas) com cola e deixamos secando sem uma de suas faces para enchê-lo de água, associando o conceito de volume com o de capacidade, Figura 130, e comentamos que, de forma análoga, poderíamos realizar a atividade com os demais poliedros.



Figura 130 – Teste de capacidade do tetraedro

Fonte: Autoria própria.

Uma das alunas presentes, que se destacava positivamente em relação ao conhecimento matemático diante de seus colegas, afirmou, posteriormente, que tinha dúvidas sobre o significado de volume e capacidade, dizendo que considerava a mesma coisa. Após o teste de capacidade

realizado no tetraedro, ela afirmou ter compreendido plenamente os conceitos e que estava muito satisfeita com a realização das atividades.

Posteriormente, os poliedros construídos foram expostos e, ao longo do dia, percebemos que os alunos dividiram o conhecimento com outros colegas mostrando e explicando o que haviam feito e aprendido.

ANEXO A – MOLDE PARA CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO DE ESCHER - QUEBRA-CABEÇA POLIÉDRICO

Para construir o Sólido de Escher como um quebra-cabeças poliédrico basta imprimir seis cópias da planificação, Figura 131, dobrá-las conforme a marcação e colá-las. Cada molde desses gera um sólido que fará parte do quebra-cabeças. As dobras indicadas por “traços e pontos” indicam que a dobra deve ser feita no sentido contrário daquelas que contém apenas “traços”. As bordas devem ser coladas. Neves (2011) contém mais detalhes sobre sua construção, além de um vídeo explicativo. A figura pode ser ampliada ou reduzida, de acordo com o interesse.

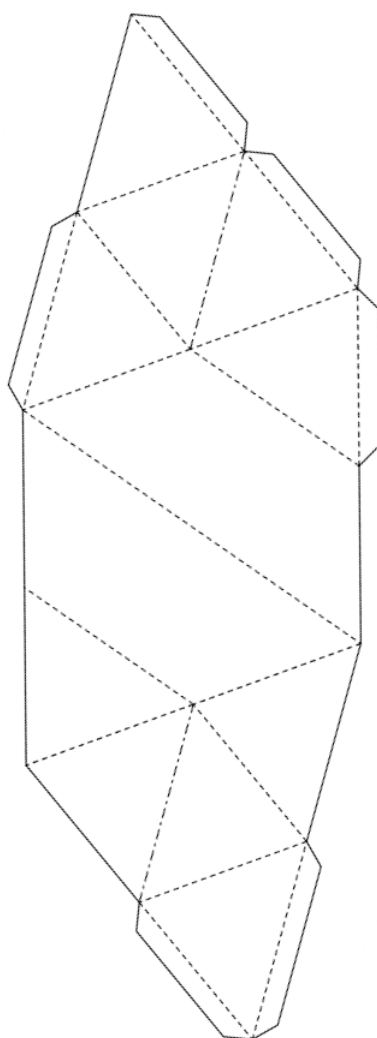


Figura 131 – Molde para construir o quebra-cabeças poliédrico do Sólido de Escher

Fonte: Neves (2011).

ANEXO B – MOLDE PARA CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO DE ESCHER - PLANIFICAÇÃO ÚNICA

Para construir o Sólido de Escher utilizando uma única planificação, Figura 132, basta dobrá-la nas linhas traçadas colando nos locais indicados, conforme Martinez (2018).

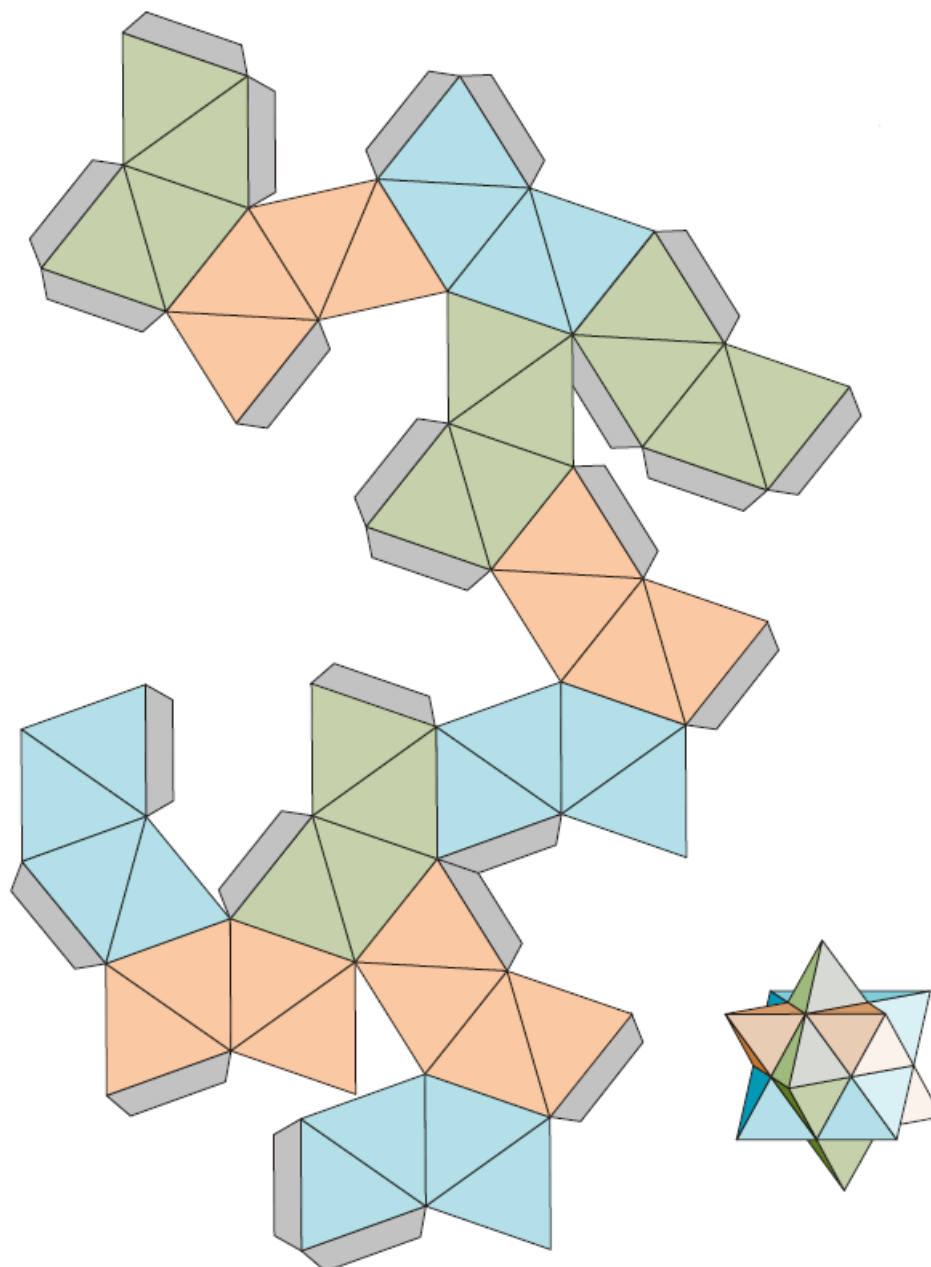


Figura 132 – Molde para construir o Sólido de Escher - planificação única

Fonte: Martinez (2018).

ANEXO C – CONSTRUÇÃO DO SÓLIDO DE ESCHER POR MEIO DE DOBRADURAS (ORIGAMI)

O SE pode ser construído através da técnica de dobraduras Origami, Figura 133.

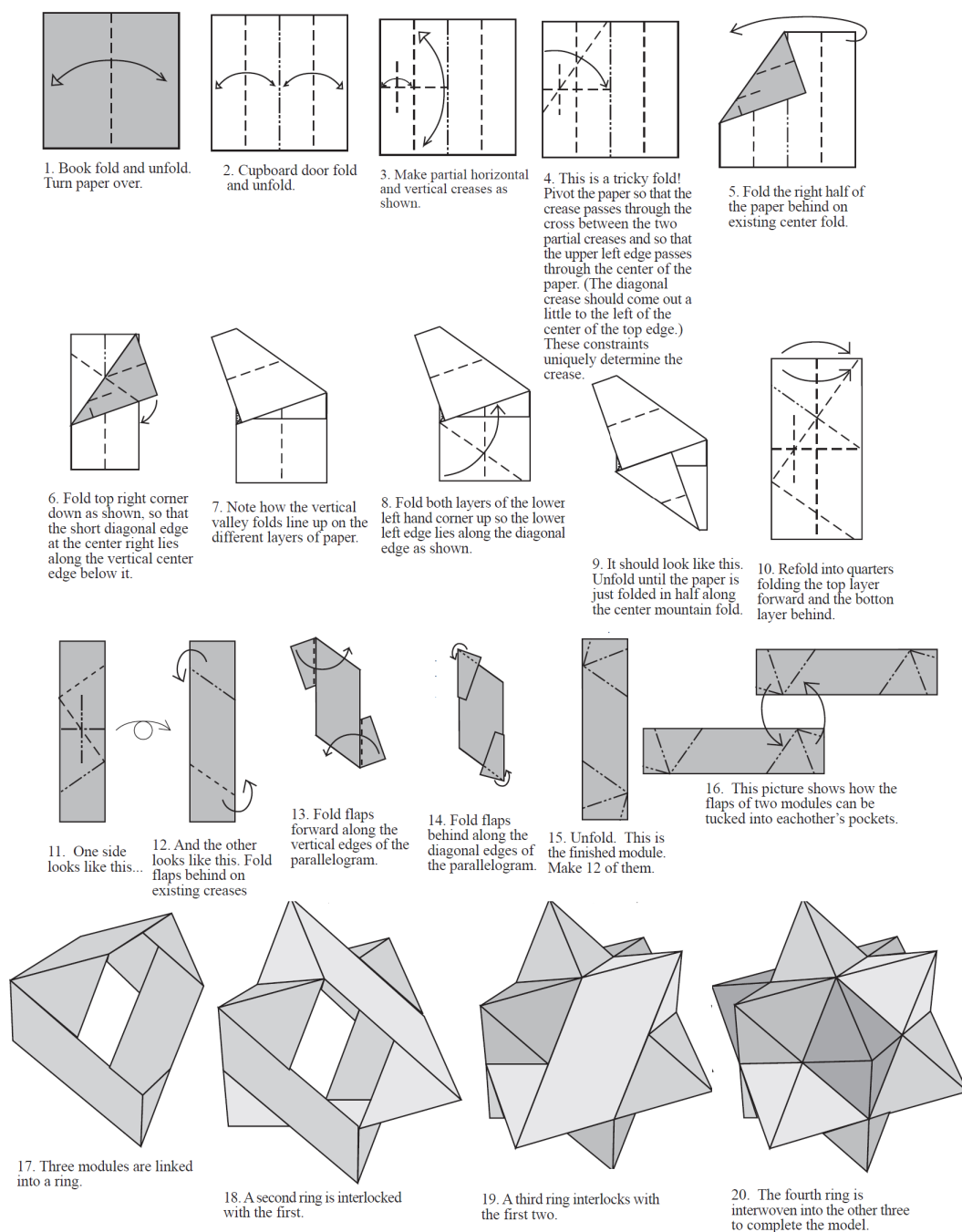


Figura 133 – Diagrama (passo a passo) para construir o SE utilizando dobraduras (Origami)

Fonte: Adaptado de Mosely (2002).

ANEXO D – MOLDE PARA CONSTRUÇÃO DO CUBOCTAEDRO E DO DODECAEDRO RÔMBICO

Em Martinez (2018) é possível encontrar diversos moldes para construção de poliedros. Destacamos aqui os poliedros relacionados ao Sólido de Escher, o cuboctaedro, Figura 134, e o dodecaedro rômbo, Figura 135.

- **Cuboctaedro**

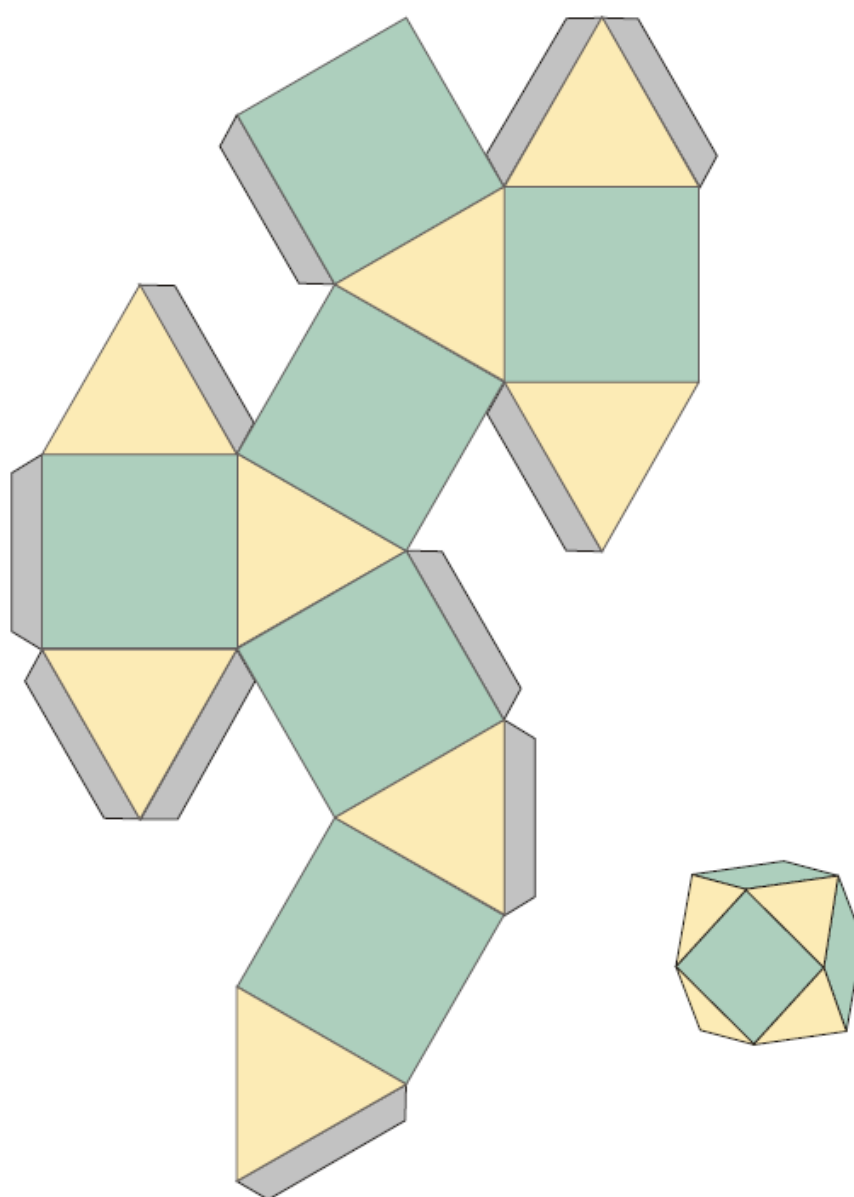


Figura 134 – Molde para construir o cuboctaedro

Fonte: Martinez (2018).

- **Dodecaedro rômico**

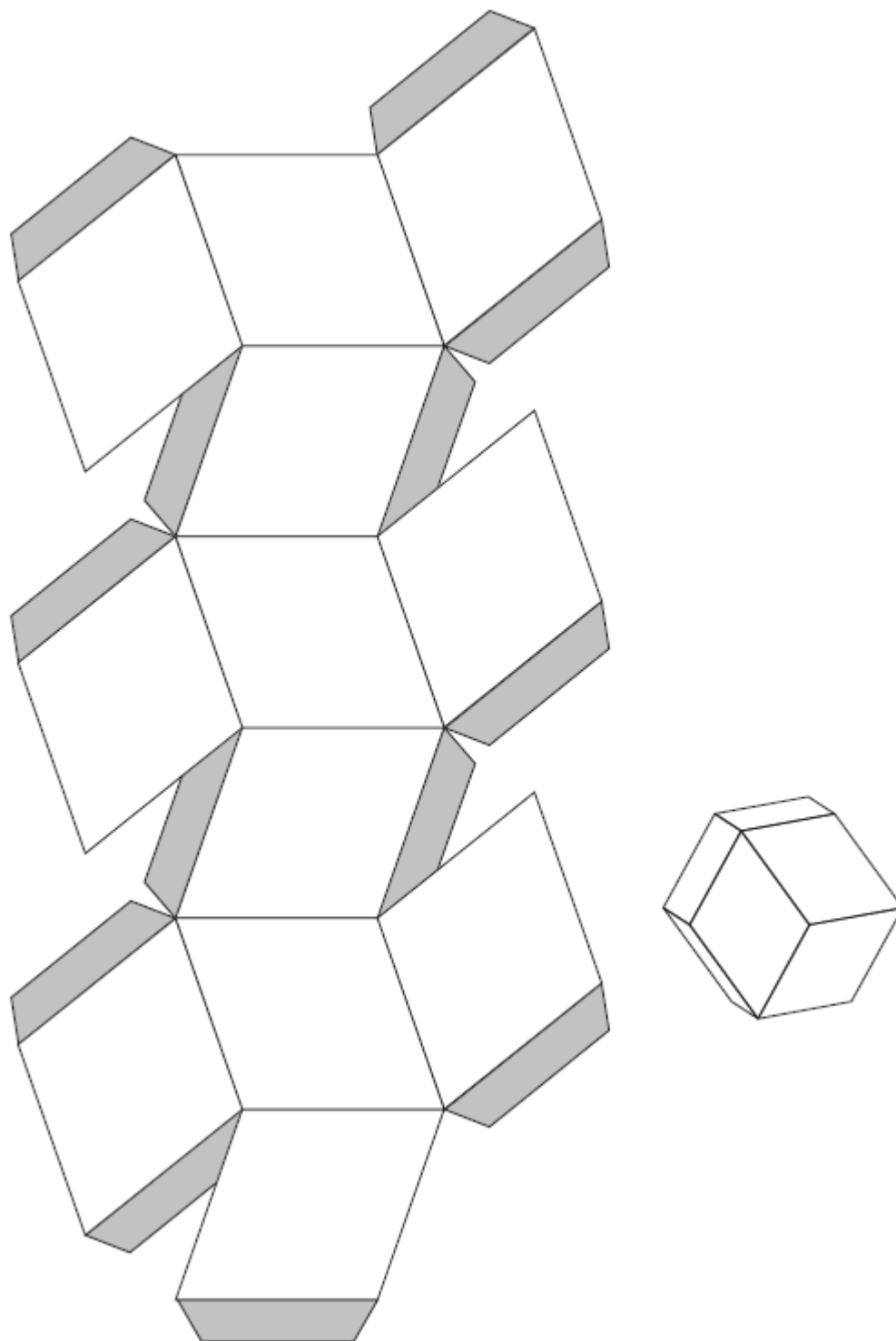


Figura 135 – Molde para construir o dodecaedro rômico

Fonte: Martinez (2018).