Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Ciências e Tecnologias

Instituto de Matemática e Estatística

Jordan de Aguiar Leal

Teoria dos conjuntos e o axioma da escolha

Rio de Janeiro

2016

Jordan de Aguiar Leal

Teoria dos conjuntos e o axioma da escolha

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.ª Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

L435 Leal, Jordan de Aguiar.
Teoria dos conjuntos e o axioma da escolha /Jordan de Aguiar Leal. - 2016.
79 f. : il.

Orientadora: Jeanne Denise Bezerra de Barros.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos conjuntos – Teses. 2. Axiomas – Teses. I. Barros, Jeanne Denise Bezerra de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de matemática e Estatística. III. Título.

CDU 510.22

Jordan de Aguiar Leal

Teoria dos conjuntos e o axioma da escolha

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 23 de agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araújo Carneiro
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Ana Maria Silva de Senna
Universidade Estadual do Norte Fluminense

Rio de Janeiro
2016

DEDICATÓRIA

Ao meu filho Benjamin e esposa Tatiana.

AGRADECIMENTOS

À Professora Jeanne, pela paciência e generosidade doadas durante todo o processo de elaboração deste trabalho.

Aos colegas da turma de Mestrado, em especial, Altemar, Jocemar, Darlan, Márcio e Ricardo pelo companheirismo em momentos de desânimo.

Aos alunos das turmas de NEJA do Colégio Estadual Natividade Patrício Antunes, pelo envolvimento nos trabalhos aplicados em sala de aula.

Ao meu filho Benjamin e minha esposa Tatiana por abdicarem tantas vezes da minha presença e não permitirem que eu desistisse.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram, inclusive financeiramente, para que eu permanecesse no programa de mestrado.

À Deus, que me deu forças e sabedoria em momentos de extremas dificuldades.

RESUMO

LEAL, J. **Teoria dos conjuntos e o axioma da escolha**, 2016, 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

O presente trabalho é um breve estudo sobre a teoria dos conjuntos, destacando uma linha histórica de acontecimentos que culminaram na criação do sistema axiomático ZFC. Mostra-se a importância de definir o que são conjuntos fazendo-se ver e que a definição informal existente até o início do século XX não era capaz de produzir uma matemática coerente. Para isso são descritos alguns paradoxos provocados por ingênuas definições até então utilizadas. Dentre os axiomas do sistema axiomático ZFC, que propõe o estabelecimento de regras bem especificadas para a formação dos conjuntos, destaca-se o axioma da escolha. No trabalho apresentamos o contexto histórico em que o surgimento do axioma da escolha está inserido, a definição, as equivalências e os paradoxos gerados (mencionados). Completa o trabalho uma aplicação em sala de aula baseada em conceitos que surgiram no desenvolvimento deste, como paradoxos, axiomas e infinito. O público alvo foram os alunos do Neja (módulos 3 e 4) do Colégio Estadual Natividade Patrício Antunes - Nova Iguaçu – Rio de Janeiro. O objetivo desta aplicação foi apresentar os referidos conceitos, pouco explorados no ensino médio, através de uma linguagem acessível e analisar estatisticamente o conhecimento dos alunos antes e depois da sequência didática proposta. Apesar da dificuldade dos alunos em interpretação e redação houve uma melhora significativa com relação à compreensão dos conceitos propostos.

Palavras-chave: Conjuntos. Sistema Axiomático. Paradoxos. Infinito. Axioma da Escolha.

ABSTRACT

LEAL, J. **Theory of sets and the axiom of choice**, 2016, 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

The present work is a brief study on the theory of sets, highlighting a historical line of events that culminated in the creation of the ZFC axiomatic system. It is shown the importance of defining what sets are made visible and that the informal definition existing up to the beginning of the twentieth century was not capable of producing a coherent mathematics. For this, some paradoxes caused by naive definitions previously used are described. Among the axioms of the axiomatic system ZFC, which proposes the establishment of well-specified rules for the formation of sets, the axiom of choice stands out. In the paper we present the historical context in which the emergence of the axiom of choice is inserted, the definition, the equivalences and the generated paradoxes (mentioned). The work completes a classroom application based on concepts that have emerged in the development of this, such as paradoxes, axioms and infinity. The target audience was the Neja students (modules 3 and 4) of the State College Natividade Patrício Antunes - Nova Iguaçu - Rio de Janeiro. The purpose of this application was to present these concepts, little explored in high school, through an accessible language and to analyze statistically the students' knowledge before and after the proposed didactic sequence. Despite the difficulties of the students in interpretation and writing, there was a significant improvement in relation to the understanding of the proposed concepts.

Keywords: Sets. Axiomatic System. Paradoxes. Infinite. Axiom of Choice.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Conjuntos, como conteúdo do ensino fundamental e médio, foi abordada de maneira massiva no Movimento educacional da Matemática Moderna das décadas de 60 e 70. Como esse conteúdo estava atrelado a um movimento cujo currículo era alvo de muitas críticas, a Teoria, juntamente, foi estigmatizada. Kline (1976), pesquisador em educação cita que:

> "Até então o mais enfatizado entre os novos tópicos é a teoria dos conjuntos. Este assunto é agora ensinado a partir do jardim da infância como se os estudantes morressem de fome, pelo menos mentalmente, se não tiverem essa dieta.(...) Os proponentes da matemática moderna justificam a ênfase nos conjuntos baseados em várias razões. A primeira é que se trata de um conceito básico da matemática. (...) A segunda, é que o conceito de conjunto unifica vários ramos da matemática"
> (KLINE, 1976, p. 108)

O objetivo do Movimento era renovar o ensino da Matemática pela introdução de tópicos relacionados às recentes descobertas matemáticas do século XIX e XX no ensino fundamental e médio, como a álgebra e a topologia e também a Teoria dos Conjuntos, através da massificação de simbolismos matemáticos inclusive. Na verdade a Teoria dos Conjuntos foi um alvo maior de críticas pelo fato do Movimento da Matemática Moderna realmente ter dado importância em exagero ao tema.

Entendendo que a Teoria dos Conjuntos não deve ser deixada de lado por um erro de estratégia educacional Matemática de décadas passadas e reconhecendo suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática e de conceitos lógicos tão importantes para a formação dos alunos, esse TCC se propõe a estuda-la, ainda que brevemente. O foco serão os aspectos históricos interessantes do desenvolvimento da Teoria além da observação de alguns conceitos que ela traz á tona, temas pouco explorados nos currículos do Ensino Médio da rede pública de ensino, especialmente em turmas de NEJA, módulos 3 e 4, do Colégio Estadual Natividade Patrício Antunes, em Nova Iguaçu, Rio de Janeiro.

Um estudo sobre função de escolha e Axioma da Escolha, nos capítulo 2 e 3 levará o leitor docente a se perguntar se os seus alunos também não poderiam compreender conceitos como paradoxo e infinito já que até mesmo um assunto tão sofisticado como o Axioma da Escolha pode ter sua essência abordada de maneira intuitiva e leve. Mas vale ressaltar que o simbolismo lógico e abordagens matemáticas um pouco mais extensas não foram deixados de lado.

1 **AXIOMATIZAÇÃO DA TEORIA DOS CONJUNTOS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA**

1.1 **Definição de Conjuntos**

A inclinação natural que as pessoas possuem de compreender conjuntos como sendo uma aglomeração de objetos ou indivíduos é oriunda de sua capacidade intuitiva de relacioná-los de acordo com suas propriedades inerentes. Assim ao observar um enxame de abelhas, uma manada de bois, ou ainda, um time de futebol, o ser humano desenvolve a ideia de agrupamento, ou melhor, de conjunto.

Em uma perspectiva matemática, conjuntos não poderiam ser estritamente tratados como objetos do mundo real (abstrações da natureza), como cadeiras, animais ou planetas; sobretudo quando nos propomos a "estudar números" como salientou Hrbacek e Jech (1984, p. 1, tradução nossa), "eles (os conjuntos) são criados pela nossa mente, não pelas nossas mãos".

Historicamente, foi o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) o responsável por introduzir as noções primordiais da teoria dos conjuntos, inicialmente uma teoria considerada "ingênua" como veremos mais adiante. Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, sobretudo entre o final do século XIX e meados do século XX, diversas áreas da Matemática sofreram influência de tal forma que Halmos (2001) afirma que "Os matemáticos concordam que todo matemático deve conhecer alguma coisa de teoria dos conjuntos; o desacordo começa ao tentar decidir o quanto deve ser."

Sendo uma teoria de fundamental importância, tornava-se impositiva uma definição do que seria um conjunto ou, pelo menos, quais seriam suas noções primitivas, já que a adoção deste conceito seria fundamental para definir os demais conceitos oriundos do desenvolvimento desta teoria.

Interessado pelos conceitos de continuidade e infinito da Teologia Medieval (IEZZI, vol1, pág 18-A,1977), atraído pela Análise e tendo estabelecido uma hierarquia para conjuntos infinitos, Georg Cantor definiu conjuntos da seguinte maneira: "Por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade M de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento". Assim, a noção de conjunto, segundo Cantor, é puramente intuitiva, uma vez que consiste numa abstração da natureza construída pela mente humana. A definição de Cantor não é precisa, pois pressupõe que o vocábulo "coleção" seja compreendido de antemão pelo leitor como sinônimo de conjunto, no entanto essa percepção conceitual era a única descrita até então.

Apesar de Cantor ter exposto muitas de suas ideias sobre conjuntos de maneira brilhante, alguns matemáticos passaram a encontrar e a apontar contradições, verdadeiras e insolúveis, chamadas de paradoxos. Esses paradoxos poderiam de alguma forma invalidá-las.

1.2 **Paradoxo de Cantor**

Antes de abordarmos o Paradoxo de Cantor é necessário enunciar o seguinte teorema, batizado com o seu nome:

Seja A um conjunto e $\wp(A)$ o conjunto das partes de A, então $\# A < \# \wp(A)$.

Para demonstrar este teorema basta provar que se A é um conjunto e $\wp(A)$ o conjunto das partes de A então não existe uma função $f: A \rightarrow \wp(A)$ que seja sobrejetiva. Lembre-se que uma função $g: D \rightarrow I$ é sobrejetiva se, para todo $y \in I$, existe $x \in D$ tal que $g(x) = y$.

Demonstração:

Se o conjunto $A = \emptyset$ o teorema está provado, pois $\# A = 0$ e $\# \wp(A) = 1$ uma vez que $\wp(A) = \{\emptyset\}$ é o conjunto unitário cujo o único elemento é o conjunto vazio.

Considerando agora $A \neq \emptyset$ e supondo que existe uma função $f: A \rightarrow \wp(A)$, então, necessariamente, ela não é sobrejetiva.

De fato, para que a função f seja sobrejetiva é necessário que:

$$\big(\forall X \in \wp(A)\big)(\exists k \in A) f(k) = X \ . \tag{1}$$

Como precisamos provar que f não é sobrejetiva, devemos provar a negação de (1), isto é,

$$\big(\exists X \in \wp(A)\big)(\forall k \in A) f(k) \neq X \tag{2}$$

Para tal, deve existir um subconjunto X de A em que

$$\forall k(k \in A \Rightarrow f(k) \neq X), \tag{3}$$

ou seja, temos que definir um conjunto $X \subset A$ que não seja imagem da função f. O conjunto X seria definido da seguinte maneira

$$X = \{x \in A : \varphi(x)\} \tag{4}$$

constituído pelos elementos de A que satisfazem a propriedade φ, sendo $\varphi(x)$ uma propriedade que caracteriza X tal que:

$$\forall x\big(x \in X \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi(x)\big) \tag{5}$$

Uma condição para que X atenda a propriedade φ é que:

$$\forall x(x \in X \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin f(x)) \tag{6}$$

ou seja,

$$X = \{x \in A | x \notin f(x)\} \tag{7}$$

Agora, mostremos que para um k qualquer:

$$X = f(k) \Rightarrow k \notin A \tag{8}$$

De (7) e (8) vem que:

$$X = \{x \in A | x \notin f(x)\} = f(k) \tag{9}$$

Logo

$$\forall x(x \in f(k) \ \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin f(x)) \tag{10}$$

Para $x = k$

$$k \in f(k) \Leftrightarrow k \in A \wedge k \notin f(k) \tag{11}$$

Denominando as sentenças acima por:

$$P: k \in f(k) \text{ e } Q: k \in A \tag{12}$$

reescrevemos (11) da seguinte forma:

$$P \Leftrightarrow Q \wedge \neg P \tag{13}$$

como

$$(P \Leftrightarrow Q \wedge \neg P) \Rightarrow \neg Q \tag{14}$$

é uma tautologia, chegamos a seguinte implicação:

$$k \notin A \tag{15}$$

Como utilizamos um k qualquer, temos que $\forall k(X = f(k) \Rightarrow k \notin A)$, o que demonstra a impossibilidade de a função $f: A \rightarrow \wp(A)$ ser sobrejetiva e, obviamente nos leva a concluir que $\# A < \# \wp(A)$, provando, assim, o Teorema de Cantor.

De que maneira então o Teorema de Cantor participará da identificação de um paradoxo existente na definição de Conjunto, definição esta dada pelo próprio Georg Cantor e enunciada na seção 1.1?

Baseando-nos na definição de Conjunto dada por Cantor é concebível admitir a existência de um conjunto U constituído por todos os conjuntos, ou seja, um conjunto U de todos os conjuntos que pudessem ser considerados. Como o conjunto U também deve ser considerado, ele deveria ser um elemento dele mesmo, já que sua existência foi previamente admitida. Sendo U um conjunto concebível então deve existir um conjunto das partes $\wp(U)$ que, pelo Teorema de Cantor, leva-nos a $\# \wp(U) > \# U$, provocando uma contradição, já que admitimos U como sendo o conjunto Universal, ou seja, o conjunto de todos os conjuntos. Esta abordagem é conhecida como o Paradoxo de Cantor.

1.3 **Paradoxo de Russel**

Em 1902, Bertrand Russel (1872-1970), filósofo e matemático inglês, declarou a existência de uma contradição ao se admitir a existência de um conjunto de todos os conjuntos. A declaração de Russel colocou alguns matemáticos em uma incômoda situação, uma vez que seus trabalhos, alguns em andamento e outros já concluídos, estavam fundamentados na existência do referido conjunto. O matemático alemão Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), um dos principais criadores da lógica matemática moderna, verbalizou sua consternação da seguinte forma: “nada mais indesejável para um cientista do que ver ruir os fundamentos do edifício, justamente no momento em que ele está sendo concluído”.

Bertrand Russel apontou que a possibilidade admitida por Georg Cantor da existência de um conjunto de todos os conjuntos provocaria a seguinte pergunta: Pode um conjunto pertencer a si mesmo? Essa indagação se justificaria, uma vez que o conjunto universal admitido por Cantor deveria englobar todos os conjuntos, inclusive ele mesmo.

Para Russel um conjunto pode ou não pertencer a si mesmo. Assim definiu W como o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmo, isto é, $W = \{X|\ X \notin X\}$. Pergunta: W pertence ou não a si mesmo? Se W não pertence a W, então, pela definição de W, W pertence a si mesmo. Além disso, se W pertence a W, então, pela definição de W, W não pertence a si mesmo. Estamos diante de um paradoxo, que surgiu da consideração do conjunto W de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos.

Após a divulgação desse paradoxo em 1902 caiu por terra à ideia, vigente até então, de que sempre seria possível, através de qualquer propriedade em comum, relacionar objetos para formar um determinado conjunto e também a assertiva de que sempre existiria o conjunto de conjuntos que satisfizessem uma dada propriedade P, qualquer que fosse a propriedade P.

Para ilustrar seu paradoxo, Russel o comparou ao paradoxo popular descrito a seguir:

Certo homem é o único barbeiro da cidade onde mora, ele tem como critério de trabalho fazer a barba apenas dos homens, desta cidade, que não barbeiam a si próprios. Pergunta: Quem barbeia o barbeiro?

Figura1 - O paradoxo do barbeiro

(a)

(b)

Legenda: (a) Quem o barbeiro barbeia?; (b) Quem barbeia o barbeiro?

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=VloY6dYS6LU. Acesso em: 16 set. 2015

Esta seria a questão paradoxal, uma vez que as únicas opções do barbeiro seriam:

1° opção - Fazer a própria barba.

2° opção – Procurar o barbeiro da cidade para fazê-lo.

Essas opções seriam inválidas uma vez que, se o barbeiro fizer a própria barba (1° opção) ele estará fazendo a barba de um morador (ele mesmo) que barbeia a si próprio, o que não deve ser feito pelas regras descritas inicialmente, acarretando a primeira contradição. Por outro lado, se o barbeiro desejar não fazer a própria barba ele se tornará um morador que não faz a própria barba, e todos os moradores que não fazem a própria barba são barbeados pelo único barbeiro da cidade, tornando o desejo do referido profissional uma impossibilidade.

Indagar se o conjunto W, $W = \{X |\ X \notin X\}$, descrito por Russel, pertence ou não a si mesmo não constitui em si uma contradição. Um exemplo de conjunto que seria elemento de si mesmo seria o conjunto das ideias abstratas (Ávila, 2000): o conjunto dessas ideias seria uma ideia abstrata e, portanto, ele seria elemento de si mesmo. Por outro lado o conjunto de todos os gatos não é um gato e, portanto, não pertenceria a si mesmo. Como foi dito anteriormente, Bertrand Russel compreendia bem estas possibilidades.

O problema se encontra no fato de que não existiria um conjunto capaz de satisfazer a definição de W, exceto quando consideramos o axioma da existência do conjunto vazio, visto mais adiante. De acordo com Hrbacek e Jech (1984, p. 3, tradução nossa), “não existe um conjunto cujos membros seriam precisamente os conjuntos que não são elementos de si mesmos”. Definir um conjunto através de certa propriedade não assegura a sua existência, assim como definir um ser extraterrestre não prova que ele existe. Com este paradoxo, Frege viu sua tentativa de formalizar a lógica e a teoria dos conjuntos através da matemática ruir, pois em sua teoria uma sentença lógica seria capaz de definir um conjunto ao descrever as propriedades que caracterizam seus elementos.

Mais à frente vemos como Ernst Zermelo com o seu axioma da especificação ajudou a evitar tais paradoxos.

1.4 **Axiomatização de Zermelo-Fraenkel**

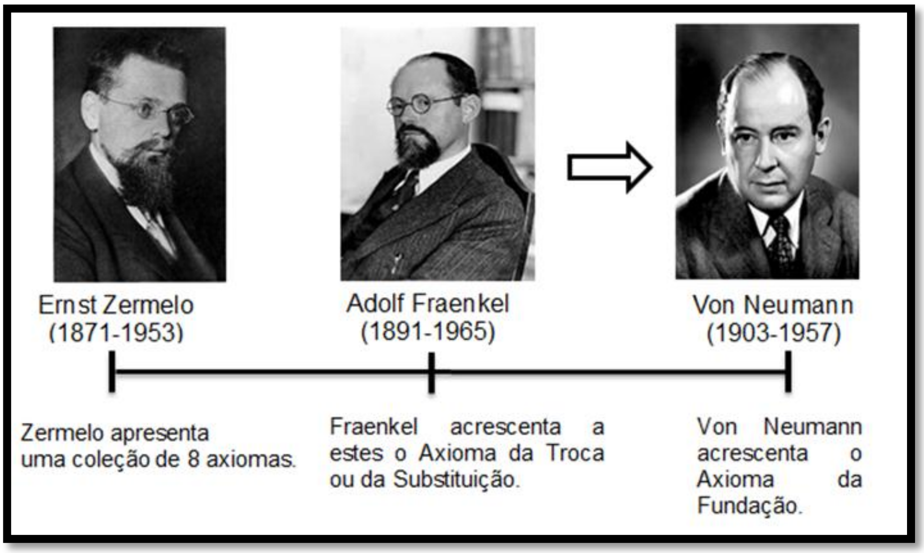
1.4.1 A necessidade de axiomatizar a teoria dos conjuntos

O paradoxo de Russel mostrou que a definição informal de conjunto existente até o início do século XX não era capaz de produzir uma matemática coerente. Desse paradoxo surgiu a seguinte indagação: “Quais seriam as propriedades capazes de definir um conjunto?”.

Com o objetivo de justificar os raciocínios intuitivos utilizados até então, alguns matemáticos se engajaram na tarefa de estabelecer, em primeiro lugar, proposições iniciais, consideradas evidentes por si mesmas, que dariam alicerce a uma Teoria dos Conjuntos (PAIVA, 2013), de maneira que as regras para formação de tais objetos, denominados conjuntos, estivessem bem especificadas. E com base nessas proposições, demonstrar todas as outras. As proposições evidentes por si mesmas são hoje designadas, indiferentemente, “postulados” ou “axiomas”. E dizemos: havia uma necessidade de “axiomatizar” a teoria. O intuito seria gerar um encadeamento lógico-dedutivo em que um número reduzido destas proposições e definições iniciais bastaria para demonstrar, uma após a outra, todos os teoremas que se seguiriam.

Três matemáticos contribuíram de maneira mais efetiva para o estabelecimento de um sistema axiomático da teoria, composto por 10 axiomas. São eles: Ernst Zermelo, Adolf Fraenkel e Von Neumann. Observe a ilustração a seguir:

Figura 2 – Autores da teoria



Fonte: Montada pelo autor, 2016.

De acordo com Ávila (2000, p. 10), "Ernst Zermelo (1871-1953) foi um dos matemáticos que mais sucesso teve nesse empreendimento de axiomatizar devidamente a teoria dos conjuntos". Para Ernst Zermelo, a teoria criada por Cantor e Dedekind poderia ser deduzida por oito axiomas propostos por ele. Entre os 8 axiomas apresentados por Zermelo se encontra o Axioma da Escolha, cuja aceitabilidade entre os matemáticos da época será discutida posteriormente. Como as maiores contribuições se devem a Ernst Zermelo e Adolf Fraenkel, o sistema axiomático é denominado por Teoria ZF (devido as iniciais dos sobrenomes), o ainda ZFC se considerarmos a adoção do Axioma da Escolha (Axiom of Choice, em inglês).

Segundo FARJADO :

> Há três tipos de axiomas no sistema de Zermelo-Fraenkel. Alguns axiomas, - o axioma do vazio e o axioma da infinidade – garantem a existência de conjuntos bem específicos. Outros axiomas – do par, da união, das partes, da escolha, da separação e da substituição – nos permitem construir conjuntos a partir de outros. Há outros dois axiomas – da extensão e da regularidade – que nos dizem a respeito da natureza dos conjuntos, ajudando-nos a entender o seu significado. (FARJADO, 2012, P.149)

Outros sistemas axiomáticos também foram bem sucedidos, como por exemplo, os sistemas de Von Neumann-Bernays-Gödel e de Morse-Kelley, que são chamados de NBG e MK, mas não nos aprofundaremos em tais sistemas.

1.4.2 Axiomas da teoria ZFC

Os axiomas a seguir serão apresentados em linguagem de primeira ordem, contendo apenas o símbolo não lógico $\in$, relativo à pertinência. O responsável por apresentar os axiomas na referida linguagem foi o matemático norueguês Thoralf Skolem (1887-1963). É de fundamental importância, para um leitor habituado apenas com os livros de ensino médio, entender que nos axiomas a seguir os conjuntos serão os elementos a que as variáveis (representadas com letras latinas minúsculas) se referem. Facilitando o entendimento, para a expressão $x \in y$, diremos que x é um elemento do conjunto y, ainda que x também seja um conjunto (Bianconi, 2011).

São eles:

(ZF1) **Axioma da Extensão ou Axioma da Determinação**:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Dois conjuntos que tenham os mesmos elementos são o mesmo conjunto. O tamanho do conjunto, ou seja, a sua extensão, seria determinada pelos seus membros. De acordo com Bianconi (2011, p.41), “O axioma da extensionalidade, por si só, não pode garantir que exista algum conjunto. Por isso, precisaremos postular a existência de alguns conjuntos, para construirmos outros a partir deles.”. O conjunto vazio, por sua simplicidade, deveria ser o primeiro a ser considerado.

(ZF2) **Axioma da Existência do Conjunto Vazio**

$$\exists x \forall y \neg (y \in x)$$

Existe pelo menos um conjunto que não possui elementos. Tal conjunto é denominado conjunto vazio e é designado por $\emptyset$. Esse conjunto é único segundo o Axioma da Extensão, pois se considerarmos dois conjuntos vazios A e B com $A \neq B$ então deve existir pelo menos um elemento de A que não pertença B, mas isso é um absurdo, visto que tanto A como B são conjuntos sem elementos. O conjunto vazio pode ser definido por $\emptyset = \{x \in A : x \notin x\}$, onde A é um conjunto qualquer fixado.

(ZF3) **Axioma da Separação ou da Especificação.**

$$\forall x \forall y \forall u (u \in y \leftrightarrow u \in x \ \wedge \ \mathrm{P}(u))$$

Este Axioma nos diz que, para todo conjunto $A\,(\leftrightarrow x)$ e toda condição (propriedade) $S(\leftrightarrow P)$, corresponde um conjunto $B(\leftrightarrow y)$ cujos elementos são exatamente aqueles elementos x de A para os quais $S(x)$ é válida.

Seguindo o encadeamento lógico a partir da teoria axiomática dos conjuntos, mostra-se necessário, ao definir um conjunto B por uma propriedade, especificar esse conjunto como subconjunto de um conjunto dado A (Axioma da Especificação). Portanto, não há espaço para o paradoxo de Russel.

(ZF4) **Axioma do Par**

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \ \wedge \ y \in \mathrm{z})$$

Dados dois conjuntos quaisquer, existe um conjunto a qual ambos pertencem.

(ZF5) **Axioma da União**

$$\forall x \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists u (y \in u \wedge \ u \in x))$$

Para toda coleção de conjuntos (classe), existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem pelo menos a um dos conjuntos da dada coleção de conjuntos (classe).

(ZF6) **Axioma da Potência**

$$\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x\big) \text{ ou } \forall x \exists y (y = \wp(x))$$

Para todo x existe um conjunto y formado por todos os subconjuntos de x. Se x é um conjunto então a classe $\wp(x)$ é um conjunto. Para todo conjunto, existe uma classe de conjuntos que contém como seus elementos todos os subconjuntos possíveis da classe dada.

(ZF7) **Axioma da Infinidade**

$$\exists x(\emptyset \in x \ \wedge \ \forall u(u \in x \rightarrow u^{+1} \in x)$$

Seja u^{+1} o conjunto sucessor de u. Existe um conjunto x tal que o vazio pertence a ele, e se o conjunto u pertencente a x então u^{+1} também pertence a x. Um conjunto que possui as mesmas propriedades de x é chamado de conjunto indutivo.

(ZF8) **Axioma da Substituição** (devido a Fraenkel)

$$\forall A\big(\forall x \in A, \exists!\, y: P(x,y)\big) \rightarrow \exists B, \forall x \in A,\ \exists!\, y \in B: P(x,y)$$

Seja $P(x,y)$ uma propriedade tal que para todo x existe um único y que satisfaça $P(x,y)$. Para todo conjunto A, existe um conjunto B tal que, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ para o qual $P(x,y)$ é válida.

Seu nome é devido ao esquema de substituição, ou seja, se existe alguma regra que associa a cada conjunto x que é elemento de A um único conjunto y (ou seja, esta regra faz o papel de uma função) então existe um conjunto B (único, pelo axioma da extensão) cujos elementos são estes y.

(ZF9) **Axioma da Fundação** (devido a Von Neumann)

$$\forall x,\ x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y(y \in x \ \wedge \ x \cap y = \emptyset))$$

Para todo conjunto x não vazio existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$. Todo conjunto não-vazio é disjunto de pelo menos um de seus elementos. Este axioma também é conhecido como Axioma da regularidade.

(ZF10) **Axioma da Escolha**

Para compreender o axioma da escolha é necessário definir o que seria uma função escolha. Uma função de escolha em uma família S de conjuntos é uma função f com domínio S tal que, para todo conjunto não vazio X em S, $f(X)$ é um elemento de X.

O Axioma da Escolha é o enunciado:

$$\forall X, X \neq \emptyset, \exists f \rightarrow f(X)$$

Dado um conjunto X qualquer, formado de conjuntos não-vazios, então existe uma função que possibilita a escolha de um único membro de cada conjunto de X, independente do domínio ao qual está inserido. Ou ainda: dada uma coleção de conjuntos, é possível formar um novo conjunto contendo exatamente um elemento de cada conjunto da coleção dada, Sanchis (2014).

2 AXIOMA DA ESCOLHA

Neste capítulo utilizaremos “A” maiúsculo e “E” maiúsculo sempre que falarmos do Axioma da Escolha e em alguns momentos utilizaremos apenas a expressão “o Axioma” para nos remeter ao Axioma da Escolha.

2.1 Pano de fundo histórico

Para entendermos o contexto histórico em que o surgimento do Axioma da Escolha está inserido é necessário citar a participação do matemático alemão David Hilbert (1862-1943). Além de ser membro da Royal Society, David Hilbert conviveu com os mais importantes matemáticos do século XX, tendo a companhia de Ernst Zermelo, como seu aluno, e John Von Neumann, como seu assistente, enquanto lecionava na Universidade de Göttingen.

No ano de 1900, durante o Congresso internacional de Matemáticos, em Paris, David Hilbert propôs uma lista de 23 problemas até então sem solução, estando convicto de que as soluções desses problemas poderiam delinear o desenvolvimento do conhecimento matemático do século XX. O primeiro dessa lista seria a conjectura de cantor sobre a hipótese do continum, que diz: Não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números inteiros e menos elementos do que o conjunto dos números reais. De acordo com David Hilbert a veracidade desta conjectura só poderia ser elucidada com a prova de uma proposição enunciada pelo próprio Georg Cantor, em 1883, para quem existiria um Princípio da Boa Ordenação, onde qualquer conjunto poderia ser bem ordenado.

Um conjunto A é bem ordenado se cada subconjunto não vazio de A possui um elemento mínimo. O artigo do Professor Irineu Bicudo, “Histórias paralelas: O V Postulado de Euclides e o Axioma da Escolha”, publicado pela Revista Brasileira de História da Matemática, Volume 5, descreve as definições de Cantor sobre conceitos relacionados a conjuntos ordenados.

Ernst Zermelo, ex-aluno de Hilbert, estimulado em provar o Princípio da Boa Ordenação, também conhecido como Teorema da Boa ordem, e já tendo elencado seu sistema axiomático para a teoria dos conjuntos, enuncia em 1904 o Axioma da Escolha para embasar a sua primeira demonstração.

A prova do teorema da boa ordenação poderia levar a elucidação da Hipótese do Continnum, o primeiro dos 23 problemas, pois conjuntos bem ordenados podem ser comparados entre si.

Quais conjuntos podem ser bem ordenados?

Hrbacek e Jech (1984, p.165, tradução nossa), falaram sobre isso dizendo que: “Curiosamente a questão foi colocada desta forma posteriormente ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos”. Cantor teria considerado bastante óbvio que todo conjunto pode ser bem-ordenado. Uma demonstração intuitiva desse fato seria:

1 Afim de bem ordenar o conjunto A, é suficiente construir um “mapeamento um-a-um” (uma função injetora) de algum ordinal ʎ para A.

Prosseguimos por recursão transfinita:

Seja $a \not\subset \mathrm{A}$. Definindo:

$$\mathrm{f}(0) = \begin{cases} \text{algum elemento de A}, & \text{se } \mathrm{A} \neq \emptyset \\ \mathrm{a}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathrm{f}(1) = \begin{cases} \text{algum elemento de A} - \{\mathrm{f}(0)\} & \text{se } \mathrm{A} - \{\mathrm{f}(0)\} \neq \emptyset \\ \mathrm{a}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Generalizando

$$\mathrm{f}(\alpha) = \begin{cases} \text{algum elemento de A} - \mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha) & \text{se } \mathrm{A} - \mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha) \neq \emptyset \\ \mathrm{a}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde a expressão “*ran*” vem da palavra range que siginifica enfileirar ou listar em inglês. Consideremos então que $\mathrm{A} - \mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha)$ seria o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A com exceção daqueles que foram enfileirados por um ordinal antecessor a $\boldsymbol{\alpha}$.

Exemplificando

Seja $A = \{\{7, 8\}, 10, \{6,15\}, 23\}$, ou seja, $A \neq \emptyset$. Temos pelo que foi definido que $\exists b_i \in A | b_i = f(0)$. b é algum elemento de A, $1 \leq i \leq n(A)$

Digamos que para $b_1 = \{7,8\}$ tenhamos $f(0) = \{7,8\}$. Observe que:

$A - \{7,8\} \neq \emptyset$, o que nos leva, pela definição, a prosseguir para $f(1) = 10$, e já que

$A - \{\{7,8\}\} - \{10\} \neq \emptyset$ prosseguimos $f(2) = \{6,15\}$ e $f(3) = 23$ para onde:

$$A - \{\{7,8\}\} - \{10\} - \{\{6,15\}\} - \{23\} = \emptyset$$

Assim $f(4) = a$ onde a é um conjunto que não está em A .Temos que o conjunto A está esgotado.

Definição 2.1.1 *Número de Hartogs*

Se A é um conjunto qualquer, então o número de hartogs de A é o menor ordinal α' tal que não existe uma injetora de α' em A.

Seja $h(A)$ o número de hartogs do conjunto A citado anteriormente, existe um estágio $\Lambda < h(A)$ em que $f(\alpha)$ não se esgota. (para o nosso exemplo, temos que $\alpha = \Lambda = 3$).

Para $\alpha < \beta < h(A)$, se $f(\beta) \neq a$, ou seja, $f(\beta)$ ainda não esgotou o conjunto A, então:

$$f(\beta) \in A - ran\,(f \upharpoonright \beta)$$

(neste caso a função "correu" , ou seja, "mapeou" o conjunto até um "antecessor" de β)

Observe que :

$$f(1) = algum\ elemento\ de\ A - \{f(0)\} = A - ran\,(f \upharpoonright 0).$$

Sendo $\alpha < \beta$ temos que $f(\alpha) \in A - ran\,(f \upharpoonright \beta)$. O que nos leva a $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Para exemplificar, voltemos ao conjunto $A = \{\{7, 8\}, 10, \{6,15\}, 23\}$, temos que a função não se esgota para $0 \leq \alpha \leq 3$ pois em $f(4)$ o conjunto está esgotado. Atribuindo valores de α, β e $\mathrm{h(A)}$ que satisfazem a condição $\alpha < \beta < h(\mathrm{A})$ como, por exemplo, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\mathrm{h(A)} = 4$. Observe que: $\mathrm{f}(\beta) = \mathrm{f}(2) \neq \mathrm{f}(4) = \mathrm{a}$.

Ou seja,

$$\mathrm{f}(\beta) \neq \mathrm{a}$$

Onde

$\mathrm{f}(\beta) = \mathrm{f}(2) = \{6,15\} \in \mathrm{A} - \mathrm{ran}(\mathrm{f} \restriction 2)$. Sendo $\mathrm{A} - \mathrm{ran}(\mathrm{f} \restriction 2) = \mathrm{A} - \{\mathrm{f}(0)\} - \{\mathrm{f}(1)\}$ o que nos leva, obviamente, a

$$\mathrm{f}(\beta) = \mathrm{f}(2) \neq \mathrm{f}(1) = \mathrm{f}(\alpha).$$

Em nosso exemplo o mapeamento de A se esgotou em $\Lambda = 3$.

Se $\mathrm{f}(\alpha) \neq \mathrm{a}$, $\forall \alpha < h(\mathrm{A})$ ou seja, se α ainda não esgotou o mapeamento de A, então a função f de $\mathrm{h(A)}$ em A seria injetora (one-to-one function). Este argumento contradiz a definição do número de Hartogs como o menor ordinal que não pode ser mapeado em A por uma função injetiva.

Seja $\Lambda = \inf\{\alpha < h(\mathrm{A}) \mid \mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{a}\}$, ou seja, considerando Λ o α mínimo tal que:

$\mathrm{f}(\alpha) = \mathrm{a}$, temos que $\mathrm{f} \restriction \Lambda$ será injetiva $\forall \alpha < \Lambda$. A “demonstração” estará completa se mostrarmos que a função ao “correr” até Λ o conjunto se esgotará, ou seja, algum elemento de $\mathrm{A} - \mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \restriction \Lambda) = \emptyset$, mais claramente $\mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \restriction \Lambda) \subseteq \mathrm{A}$.

Observe que pelo nosso conjunto exemplo $\mathrm{A} = \left\{\left\{7,\ 8\right\},\ 10\ ,\ \{6,15\}, 23\right\}$ temos

que $\mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \restriction 4) \subseteq \mathrm{A}$. Se $\mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \restriction \Lambda) \subset \mathrm{A}$ então $\mathrm{A} - \mathrm{ran}(\mathrm{f} \restriction \Lambda) \neq \emptyset$ e $\mathrm{f}(\Lambda) \neq \mathrm{a}$, contradizendo nossa escolha de Λ . O uso das aspas na palavra demonstração serve para indicar que o argumento possui algum erro, mas este erro pode não ser tão óbvio.

A tentativa de justificar a recursão transfinita pelo teorema da recursão (ver Hrbacek e Jech, teorema 4.5 do capítulo 7) nos leva a necessidade da existência de uma função G tal que f poderia ser definida por $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$ tal que a função G teria as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \mathrm{G}(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha) \in \mathrm{A} - \mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha) \ \text{ se } \ \mathrm{A} - \mathrm{ran}\,(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha) \neq \emptyset \\ \mathrm{G}(\mathrm{f} \upharpoonright \alpha) = \mathrm{a} \qquad\qquad , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Se A fosse bem ordenado, uma função G poderia ser facilmente definida.

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{o} < -\, menor\ elemento\ de\ A\ - ranx \quad se\ A - ranx \neq \emptyset \\ \qquad \mathrm{a} \qquad\qquad\qquad \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde $<$ é alguma boa ordenação de A. Na ausência de Boas-ordenações em A nehuma propiedade poderia ser usada para definir tal função G obviamente.

O que fizemos até agora foi tentar definir uma função capaz de listar os elementos de um conjunto A “um-a-um”.

Definição 2.1.2 *Função escolha:*

Seja S um sistema de conjuntos. A função g definida em S é chamada de função de escolha de S se $g(X) \in X,\ \forall X \neq \emptyset,\ X \in S$ onde X é um subconjunto de S.

Se admitirmos a existência de uma função g de escolha para $\wp\,(\mathrm{A})$ podemos prencher a lacuna da “demonstração” anterior definindo

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{g}(\mathrm{A} - \mathrm{ranx}) \text{ se } \mathrm{A} - \mathrm{ranx} \neq \emptyset \\ \mathrm{a} \qquad\qquad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim é possível provar o teorema a seguir, devido a Zermelo.

Teorema 2.1 *Um conjunto A pode ser Bem-ordenado se, e somente se, o conjunto $\wp\,(A)$ de todos os subconjuntos de A possui uma função de escolha.*

Provando a volta

($\Leftarrow$) Se $<$ ordena A, definiremos a função escolha g em $\wp\,(\mathrm{A})$ por

$$g(x) = \begin{cases} o\ menor\ elemento\ de\ x\ na\ boa\ ordenação < \quad Se\ x \neq \emptyset \\ \qquad \emptyset \qquad\qquad\qquad se\ \ x = \emptyset \end{cases}$$

O problema da Boa-ordenação fica agora reduzido a uma questão equivalente: “Encontrar uma função de escolha para $\wp\,(\mathrm{A})$”

Teorema 2.2 *Todo sistema finito de conjuntos possui uma função de escolha.*

Provando por indução:

Assumindo por hipótese que todo sistema com n elementos possui um função de escolha e considerando a cardinalidade de tal sistema S igual a n + 1, ou seja, $|S| = n + 1$.

Seja X um subconjunto de *S.* O Conjunto $S - \{X\}$ possui n elementos e consequentemente a função escolha g_x (pela hipótese).

Se o subconjunto X for o conjunto vazio então $g = g_x U\{(X, \emptyset)\}$ é uma função escolha de *S,* $\forall x \in X$.

Esta demonstração não pode ser generalizada para mostrar que todo sistema contável de conjuntos possui uma função de escolha.

Embora seja fácil encontrar uma função de escolha para o conjunto das partes dos naturais ou dos racionais, encontrar esta função para o conjunto das partes dos reais não seria.

Ainda que funções de escolha para sistemas infinitos de conjuntos de números reais tenham sido utilizadas por analistas do fim do século XIX, foram necessários vários anos para perceber que a suposição da existência de tais funções não é meramente trivial, por esse motivo algumas variações do Axioma da Escolha evitam o uso de funções de escolha. Exemplificando, uma dessas variações afirma que:

"Dado qualquer conjunto X de conjuntos não vazios dois a dois disjuntos, existe pelo menos um conjunto C que contém exatamente um elemento em comum com cada um dos conjuntos em X"

Segundo Sanchis (2014, p. 2) matemáticos do fim do século XIX e início do XX usavam o fato: dada uma coleção de conjuntos, é possível formar um novo conjunto contendo exatamente um elemento de cada conjunto da coleção dada. Este fato se assemelha com a variação do Axioma da Escolha citada no parágrafo anterior. Zermelo também fazia uso desse fato mesmo não estando claro que ele decorria de seu sistema axiomático. Até 1904 Zermelo não especificava um de seus axiomas para justifica-lo, até que no mesmo ano enuncia o décimo axioma da teoria ZFC, o Axioma da Escolha. Na verdade, Zermelo acreditava que o Axioma era consequência dos outros axiomas da teoria, mas Cohen demonstrou em 1963, que não.

Na variação do Axioma apresentada, dizer que existe um conjunto que contém exatamente um elemento em comum com cada um dos conjuntos da coleção dada, provocou discussões entre os matemáticos, uma vez que, para alguns a ausência de um algoritmo lógico ou regra que pudesse construir tal conjunto não permitia considera-lo um objeto matemático legítimo.

Apesar da busca de Zermelo e Hilbert pela prova ou refutação da Hipótese do Continnum ter motivado o aparecimento do Axioma da escolha no rescaldo da prova do Teorema da Boa ordenação, Gödel mostra em 1939 que a Hipótese de Cantor não poderia ser refutada pelo sistema ZFC.

2.2 **O Axioma**

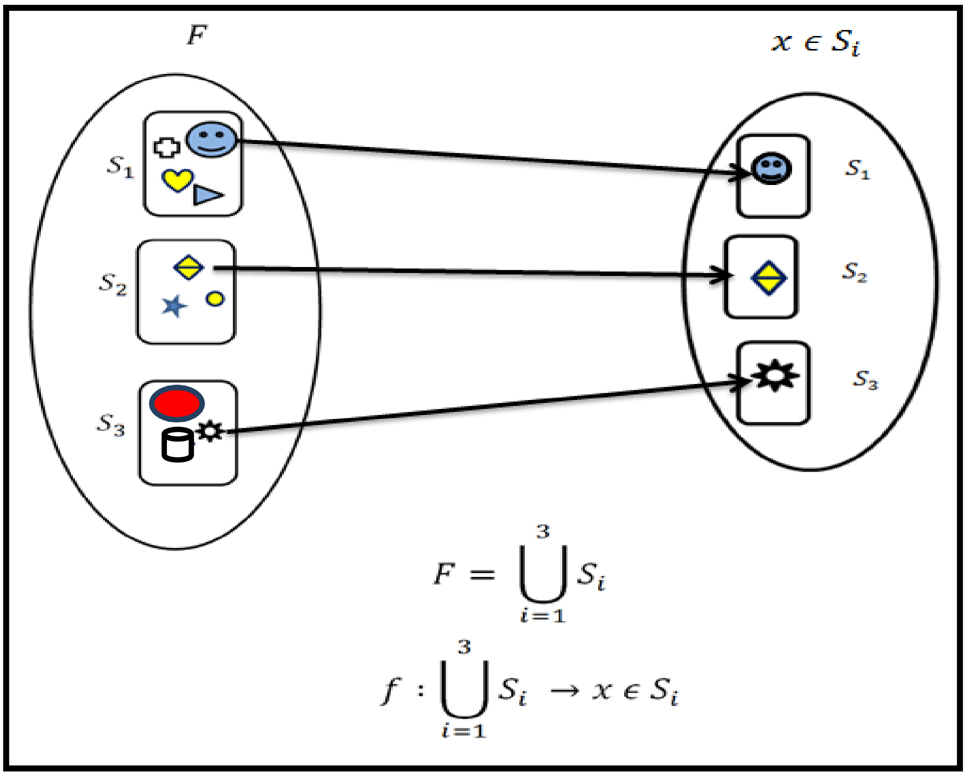
Nesta seção será utilizada uma definição do Axioma utilizada por Bicudo (2005) e construído um esquema de figuras para facilitar o entendimento do leitor.

Definição 2.2.1 *Axioma da Escolha:*

Se F for uma coleção de conjuntos não vazios dois a dois disjuntos existirá uma função f com domínio F, tal que $S \in F$, $f(S) \in S$. Tal função é chamada de função escolha.

Para entender melhor o Axioma e considerando F uma coleção finita podemos esquematizar a coleção de conjuntos de acordo com a figura abaixo:

Figura 3 – Esquema aplicado à definição 2.2.1



Fonte: O autor, 2016.

Foi possível escolher um elemento de cada subconjunto. Na figura 3 foi utilizada uma quantidade finita de subconjuntos em F mas segundo Bicudo:

> O que, intuitivamente falando, o Axioma preconiza é a possibilidade de, dados conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, em qualquer quantidade, escolhermos um membro em cada um desses conjuntos, isto é, fazermos, de uma vez, uma infinidade de escolhas. É claro que, se possuirmos um critério, uma regra para as escolhas, não teremos necessidade de apelar para o Axioma. Este é usado na ausência daquela. (BICUDO, 2005, p.11)

Bertrand Russel exemplificou uma situação em que haveria uma quantidade infinita de subconjuntos em F dizendo que para escolhermos uma coleção infinita de pares de sapatos, cada subconjunto S_i seria o pé esquerdo e direito de um par. Um critério de escolha seria escolher sempre o pé direito de cada par. Teríamos assim uma função escolha cuja relação está definida explicitamente, desta maneira o Axioma não seria necessário, uma vez que este afirma que a função escolha existe, e, portanto, um conjunto seleção, sem definir a relação que a rege.

Um caso em que uma quantidade infinita de subconjuntos em F necessitaria de uma função de escolha seria um exemplo em que F fosse uma coleção infinita de pares de meias. Sendo as meias de um par indistinguíveis entre si, um critério natural de seleção não existiria. Portanto, o Axioma da Escolha não se atém a especificar se a coleção F é finita ou não.

Uma coleção $Y \neq \emptyset$, tal que Y é um subconjunto infinito dos naturais, pode ter uma função de escolha especificada facilmente na medida em que por definição possui um menor elemento, logo podemos ter uma função que mapeia o conjunto a partir desse elemento . Existiria aqui uma escolha natural dos elementos.

Se o conjunto Y fosse subconjunto não vazio dos números reais a escolha dos elementos nunca acabariam pelo fato de Y ser infinito. A função escolha nunca seria produzida visto que não é possível especificar o menor elemento de alguns subconjuntos dos números reais.

3 AXIOMA DA ESCOLHA: EQUIVALÊNCIAS E O PARADOXO DE BANACH-TARSKI

Segundo Fraenkel (1958) “Raramente os praticantes da matemática, uma disciplina conhecida pela certeza de suas conclusões, diferem de forma tão veemente sobre uma de suas premissas centrais, como têm feito sobre o Axioma”. Ainda sim muitos matemáticos fizeram uso dele para chegar a algumas conclusões derivadas dos resultados de Zermelo, inclusive alguns que o atacaram.

<u>Equivalência 1:</u>

Uma das mais famosas equivalências do Axioma da Escolha é o princípio da Boa Ordenação que afirma: *Todo conjunto pode ser bem ordenado*.

<u>Equivalência 2:</u>

O produto cartesiano de um conjunto de conjuntos não vazios é não vazio.

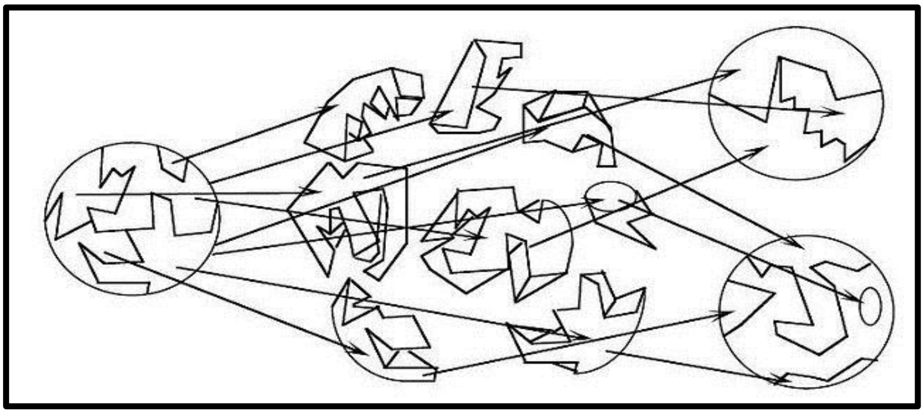
<u>Equivalência 3:</u>

Uma função será sobrejetora se e somente se for invertível à direita.

Essas equivalências demonstram a importância do Axioma para a Matemática. Um estudo aprofundado sobre elas pode ser encontrado em Hrbacek e Jech (1984) e Rubin (1963).

Uma das consequências surpreendentes do Axioma é o paradoxo de Banach-Tarski, que ao utilizá-lo afirma existir um número finito de subconjuntos provenientes da decomposição de qualquer esfera sólida que ao serem reorganizados através de movimentos rígidos formariam duas esferas sólidas de mesmo tamanho. A figura abaixo exemplifica a ideia do paradoxo:

Figura 4 – Paradoxo de Banach-Tarski



Fonte: http://gaussianos.com/video-the-banach-tarski-paradox/. Acesso em: 16 set. 2015.

Outro paradoxo menos conhecido é o Paradoxo de Hausdorff que afirma ser 2/3 da superfície da esfera congruente a 1/3 dela.

4 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Com o intuito de apresentar alguns conceitos sobre Paradoxos, Axiomas e Infinito foi ministrada uma palestra sobre esses temas no Colégio Estadual Natividade Patrício Antunes, localizado em Comendador Soares, Nova Iguaçu, Rio de Janeiro, nos dias 19 e 26 de julho de 2016. Os alunos participantes pertenciam a turmas do NEJA, noturno, módulos 3 e 4. Durante a palestra foram propostas perguntas cujas respostas deveriam provocar um debate de ideias entre os alunos. As atividades foram aplicadas utilizando 4 tempos de 50 minutos.

4.1 Atividade 1

Figura 5 - Questionário 1

1° Questionário / Anterior à apresentação. Turma:__________

Nome:____

1) O que é INFINITO para você? O que significa essa palavra?

____

____

____

2) Você já pensou em ter que fazer uma escolha infinita de Objetos?

____

____

____

3) O que é um Paradoxo para você? Poderia citar um exemplo?

____

____

____

4) Você já ouviu falar em Axioma? Saberia dizer o que significa?

____

____

Fonte: O autor, 2016.

Etapa 1: Antes do início da aula, enquanto os alunos ainda entram em sala, uma música foi escolhida para tocar ao fundo. A música selecionada é *Monte Castelo* (Anexo A), composição de Renato Russo (1960-1996), vocalista da Banda Legião Urbana. A razão de iniciar aula com esta música como pano de fundo será esclarecida na Etapa 2. O professor pausa a música. O 1° questionário é entregue. O Objetivo é analisar o conhecimento prévio dos alunos com os termos: Paradoxo, Axioma e Infinito.

Os alunos ficaram intrigados com as perguntas e se esforçaram para respondê-las. Um deles perguntou inclusive se poderiam utilizar o conceito de paradoxo que aprenderam na disciplina de língua portuguesa. O tempo gasto com esta etapa foi de aproximadamente 15 minutos, momento em que os questionários são recolhidos.

Etapa 2: Enquanto o professor recolhe todos os questionários da Etapa 1 a música *Monte Castelo* volta a ser tocada do início. Os alunos são orientados a ouvir a música atentamente e são informados que em sua letra está contida uma das respostas ao questionário que receberam.

Segundo SILVEIRA :

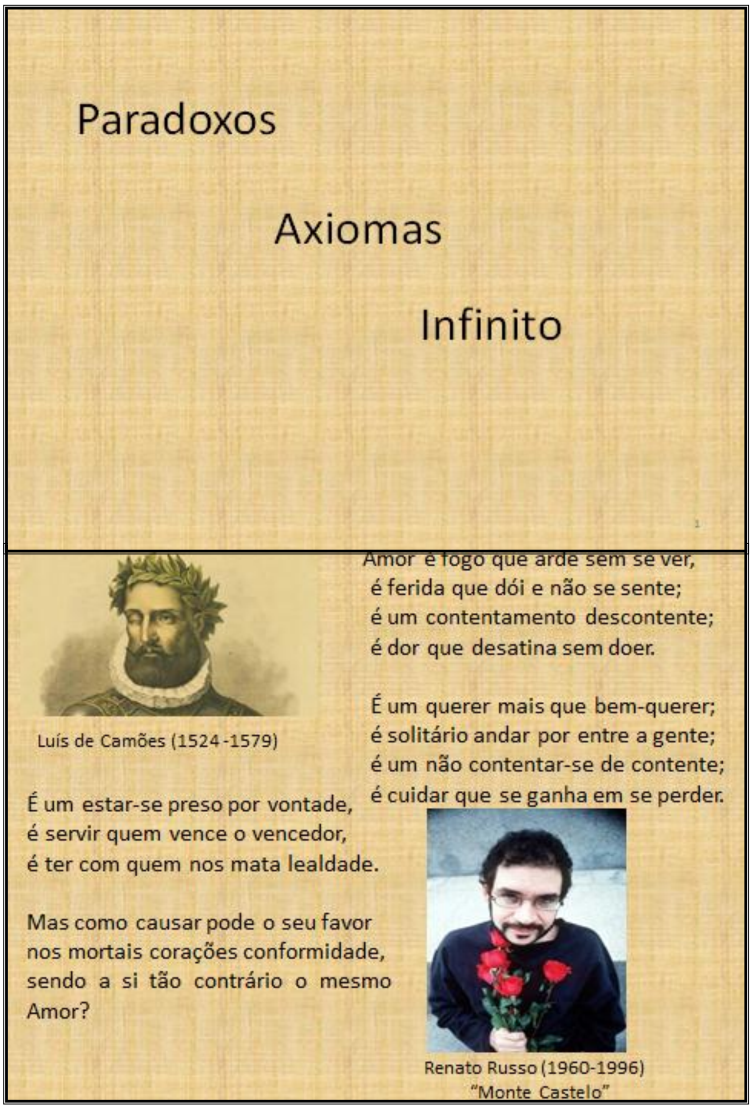
> Os símbolos matemáticos que adquirem vida própria na sua estrutura, e que para os alunos são “abstratos e sem sentido”, são diferentes das palavras da linguagem usual, que são dotadas de diferentes sentidos e que são bem mais sedutoras na perspectiva do aluno. (SILVEIRA, 2002)

Alguns conceitos matemáticos, assim como seus símbolos podem se apresentar demasiadamente abstratos para os alunos, então com a utilização da linguagem usual presente na música proposta espera-se que os alunos sejam seduzidos a buscar conceitos e ideias sobre o que seria um paradoxo; ainda que não saibam de antemão que esta é uma ferramenta usada pelo compositor. O professor deverá dialogar com os alunos estimulando a imaginação deles, afim de que eles possam construir alguns conceitos por conta própria.

A duração da música é de 3’47”. O professor convida os alunos a ouvirem novamente o intervalo que vai de 1’17” a 1’38” .

Etapa 3: Após a música ser finalizada uma exposição em forma de slides é apresentada na Figura 6.

Figura 6 - Slides 1 e 2

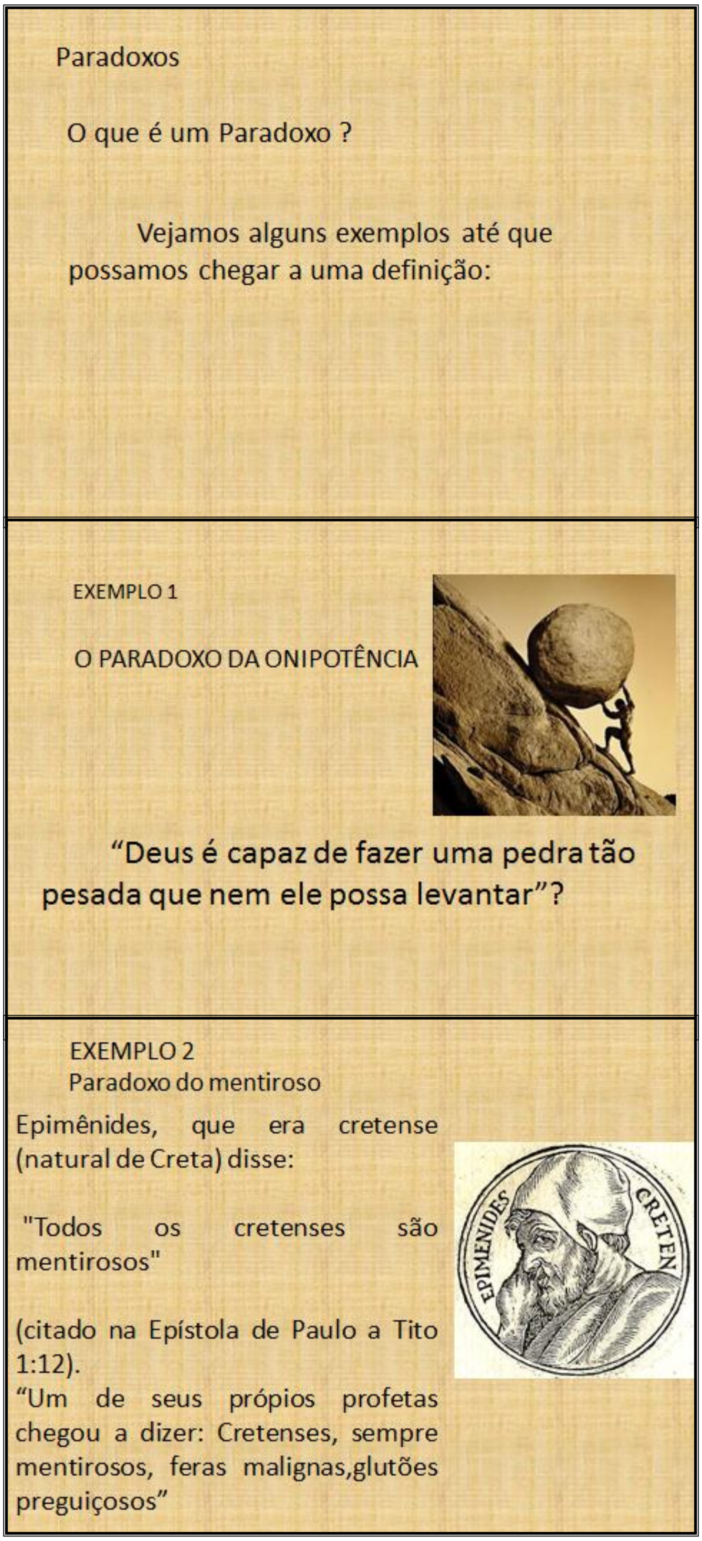


Legenda: De cima para baixo, slides 1 e 2, respectivamente.

Fonte: O autor, 2016.

No segundo slide o professor comenta que a composição de Renato Russo traz citações do poeta Luís Vaz de Camões e da Bíblia, mais especificamente de I Coríntios 13. A letra é analisada junto com os alunos e os versos que trazem a ideia de paradoxo são destacados e discutidos com os alunos. Nesse momento eles estão livres para debater os versos. O professor pede para que a turma se reúna em grupos de 4 alunos e continua com a apresentação dos slides, ver Figura 7 e 8.

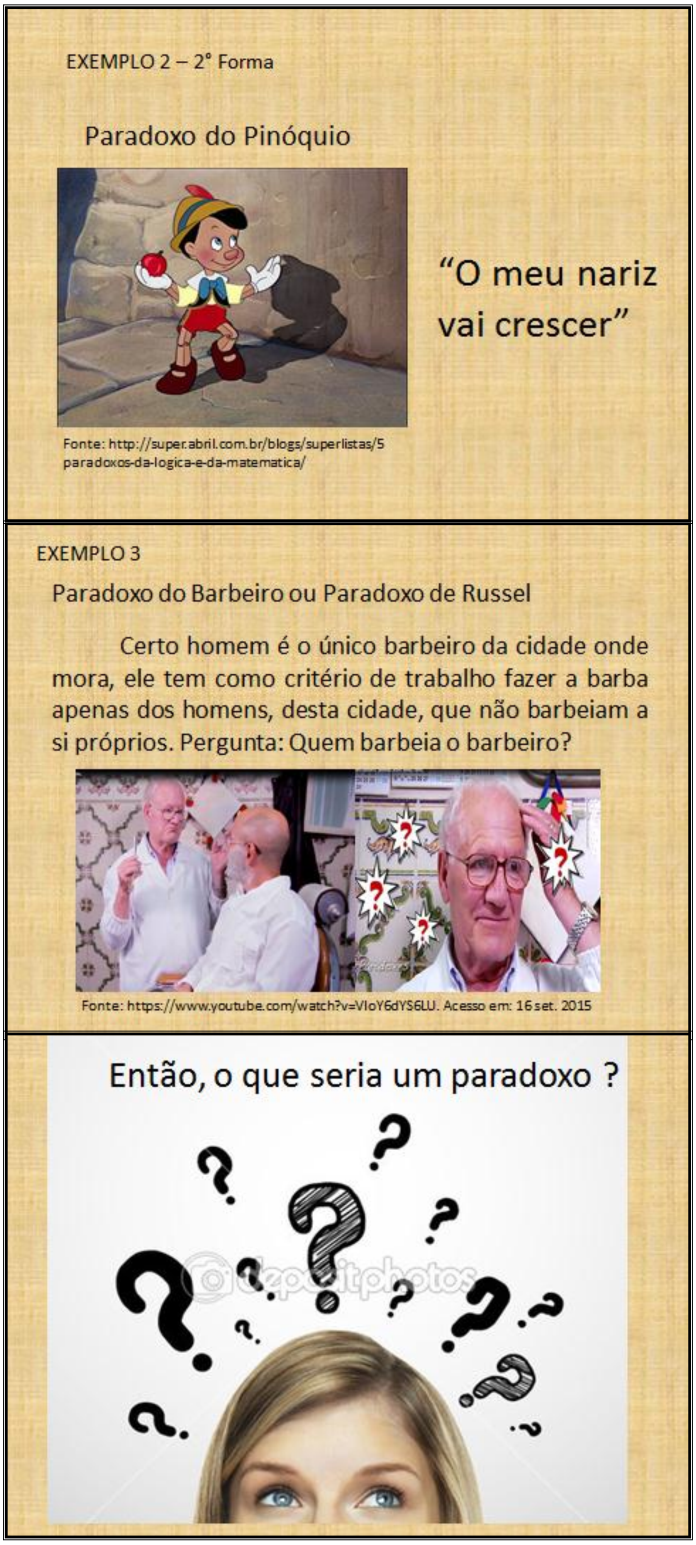
Figura 7 - Slides 3, 4 e 5



Legenda: De cima para baixo, slides 3, 4 e 5.

Fonte: O autor, 2016.

Figura 8 - Slides 6, 7 e 8



Legenda: De cima para baixo, slides 6, 7 e 8, respectivamente.

Fonte: O autor, 2016.

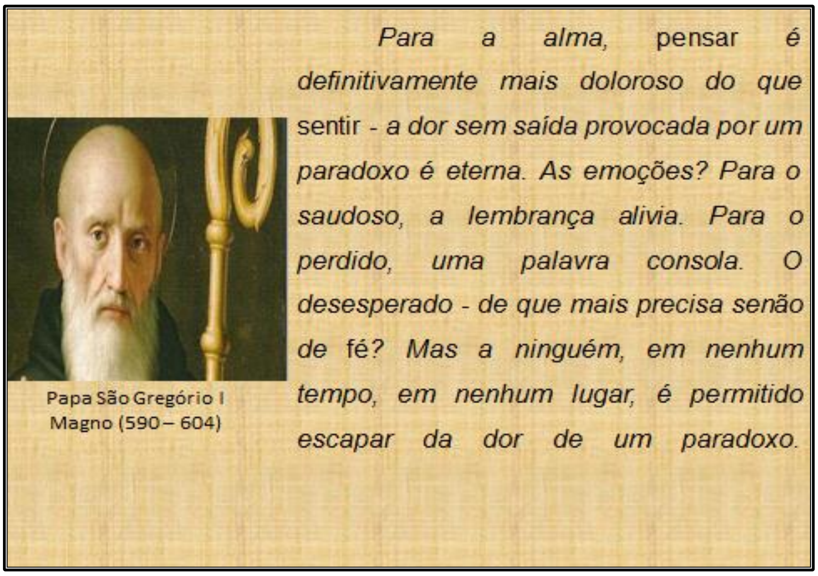
Durante os slides o professor convida os alunos a descobrir onde está o paradoxo em cada um dos exemplos. No paradoxo da onipotência, por exemplo, os alunos são levados a pensar qual seria a contradição de uma resposta positiva e qual seria a contradição de uma resposta negativa. Se Ele (Deus) pode tudo, tem que ser capaz também de fazer essa pedra. Mas se isso for verdade, Ele não é capaz de tudo, porque não pode levantar a pedra que Ele mesmo criou. Esse paradoxo especificamente gerou polêmicas, pois alguns alunos interpretaram que a função deste paradoxo seria por em xeque a Onipotência de Deus.

No exemplo 2, presente nos Slides 5 e 6, os alunos são levados a considerar a veracidade ou não das frases de Epimênides e Pinóquio. A turma chegou ao consenso de que a veracidade da frase: “Todo Cretense é um mentiroso” leva a conclusão de que Epimênides também está mentindo; ele também é um Cretense. Mas se ele também está mentindo, a sua declaração "Todo Cretense é um mentiroso" consequentemente é falsa. Independentemente da ordem da proposição, a conclusão é uma contradição. O mesmo também acontece com Pinóquio. Aqueles que conhecem a história sabem que o nariz do boneco cresce todas as vezes que ele mente. Esses ao analisarem a frase: “O meu nariz vai crescer”, sabem que se o nariz do boneco crescer, então a afirmação era verdadeira e nada deveria ter acontecido. Se o nariz não crescer, então a afirmação era uma mentira e o nariz deveria ter crescido.

No exemplo 3, slide 7, o paradoxo do barbeiro demorou um pouco mais para ser compreendido pelos alunos sendo necessária uma intervenção maior do professor no processo de análise dos grupos. Para maiores detalhes o leitor poderá recorrer à seção destinada ao Paradoxo de Russel. No slide 8 os alunos são provocados a pensar em uma definição sobre Paradoxos. Essa definição será apresentada após a atividade 3, nos slides 25 e 26, ver Figura 19.

A apresentação prossegue. Ver Figura 9 e 10.

Figura 9 - Slide 9

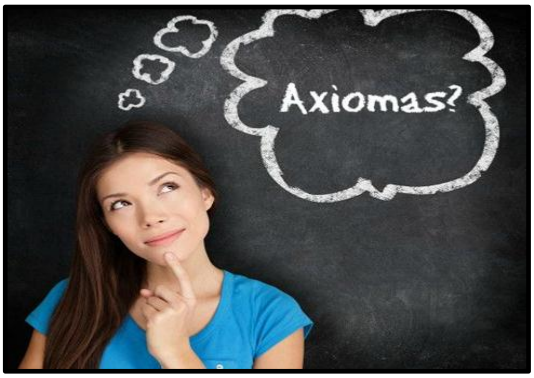


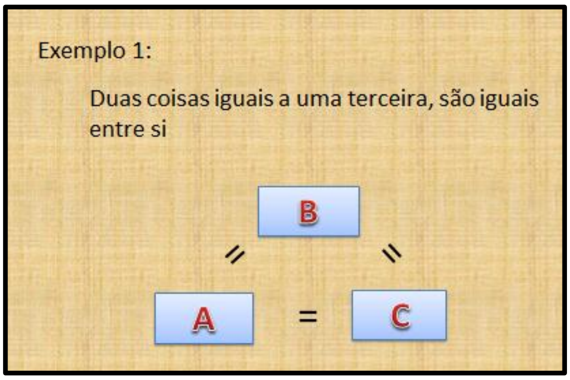
Fonte: O autor, 2016

Aqui, é dada aos alunos uma noção histórica, através das palavras do Papa São Gregório I Magno (590 – 604), de que eles não foram os únicos a sofrerem o incômodo intelectual provocado por um paradoxo.

Etapa 4: Agora os alunos são apesentados ao termo Axioma. A apresentação segue pelos slides. Ver Figura 10.

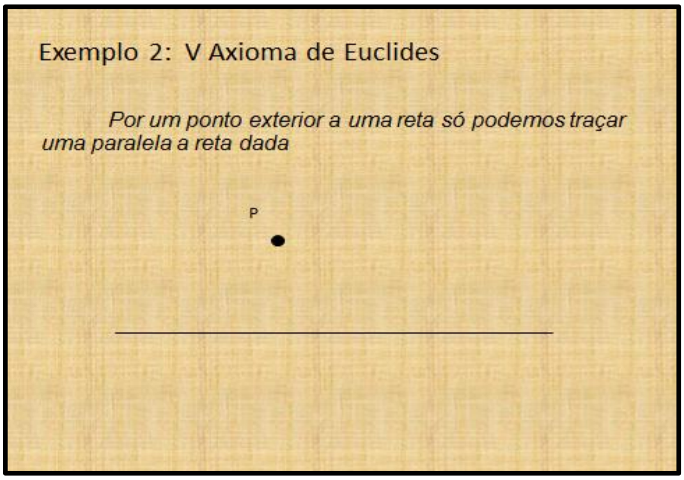
Figura 10 - Slides 10, 11 e 12 (continua)





(a) (b)

Figura 10 - Slides 10, 11 e 12 (conclusão)



(c)

Legenda: (a) slide 10; (b) slide 11; (c) slide 12

Fonte: O autor, 2016.

Após o slide 12 o professor pode prosseguir citando outros axiomas como, por exemplo, o terceiro Axioma de Peano que afirma existir um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um". Com isso espera-se que os alunos entendam Axioma como uma definição que não carece de demonstração. A definição correta será apresentada nos slides após a aplicação do 2° questionário.

4.2 Atividade 2

Nesta atividade os alunos são convidados a ler algumas considerações sobre o infinito. Ver Figura 11.

Figura 11 - Atividade 2 (continua)

INFINITO

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Infinito (do latim *infinítu*) é um adjetivo que denota algo que não tem início nem fim, ou não tem limites, ou que é inumerável. É também um nome que representa o que não tem limites. Usado em sentido figurado pode significar Deus, o Absoluto ou o Eterno.

O infinito fascina a humanidade há milhares de anos. Tanto o infinitamente grande quanto o infinitamente pequeno tem consumido anos de trabalho dos filósofos, matemáticos, físicos e engenheiros, e levado alguns deles literalmente à loucura.

O infinito pode ser visto de muitas perspectivas. A intuição percebe-o como uma espécie de "número" maior do que qualquer outro. Para algumas tribos primitivas é algo maior que três, representando "muitos", algo incontável. Para um fotógrafo o infinito começa a dez metros da lente, ao passo que para um cosmólogo pode não ser suficiente para conter o universo. Para um filósofo é algo que tem a ver com a eternidade e a divindade. Mas é na matemática que o conceito tem as suas raízes mais profundas, sendo a disciplina que mais contribuiu para a sua compreensão.

página 1

Figura 11 - Atividade 2 (conclusão)

O infinito sempre foi um tema controverso que afetou a mente humana. A sua aceitação como objeto de estudo na Matemática não foi pacífica, sendo ainda muito recente, apesar da longa história que lhe está associada. Faz-se uma pequena descrição das ideias relacionadas a este conceito desde a Grécia antiga até à Idade Média, distinguindo depois os séculos após o Renascimento devido à riqueza de descobertas que ocorreram. Salienta-se que só no século XIX é que Cantor mostrou, relativamente ao tamanho dos conjuntos, que há infinitos iguais e diferentes. As suas teorias para a teoria de conjuntos revolucionaram então a Matemática.

Aquiles e a tartaruga:

Aquiles corre contra uma tartaruga, sendo que a tartaruga começa dez metros adiantada, mas Aquiles corre ao dobro da velocidade da tartaruga. Quando Aquiles chega ao ponto onde a tartaruga começou, esta já avançou cinco metros. Quando Aquiles chega a esse ponto, a tartaruga voltou a adiantar-se 2,5 metros, e assim indefinidamente: Aquiles nunca consegue apanhar a tartaruga.

Paradoxo de Zenão.

REFERÊNCIAS

SAMPAIO, P. *Infinito: uma história a contar*. Revista Millenium, [S.l.], n. 34, p.205-222, 2008.

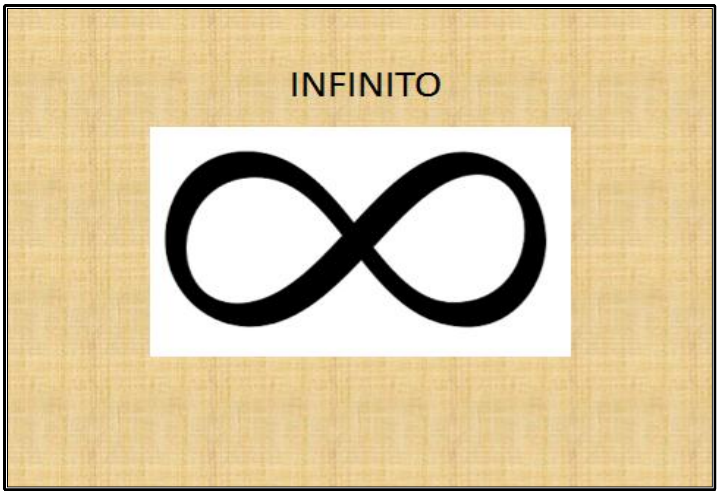
ALENCAR, M. O conceito do infinito. Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Disponível em:< http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Conceito_Infinito.pdf>. Acesso em: 07 de março de 2016.

página 2

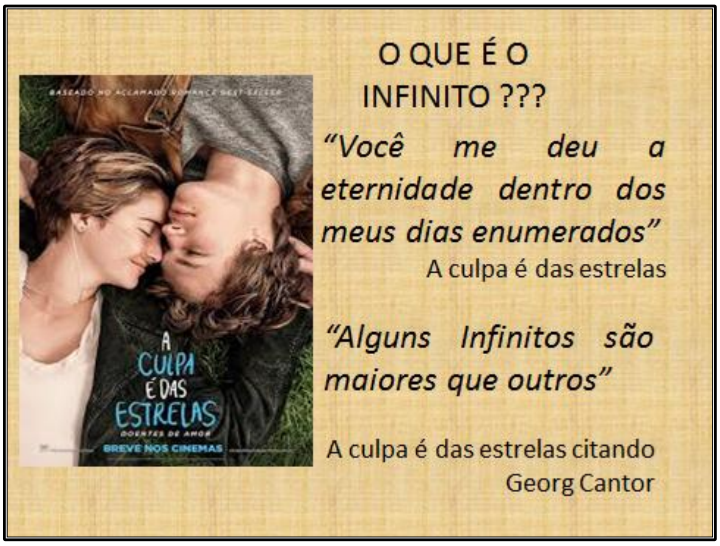
Fonte: O autor, 2016.

Etapa 1: Agora o conceito abordado será o Infinito. Concluído o slide de número 12 da atividade anterior os alunos são convidados a ler o texto “Infinito: algumas considerações”. Texto elaborado, a partir, de Sampaio (2008) e Alencar (2016). Após a leitura do texto os slides continuam. Ver Figura 12.

Figura 12 - Slides 13, 14 e 15 (continua)

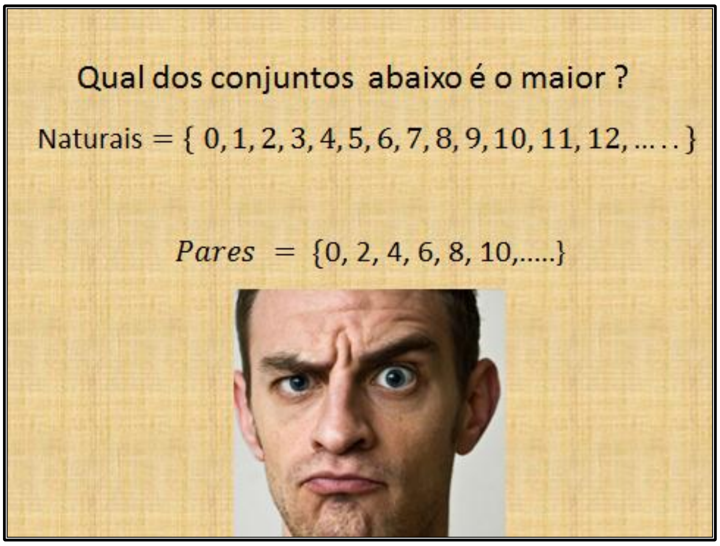


(a)



(b)

Figura 12 - Slides 13, 14 e 15 (conclusão)



(c)

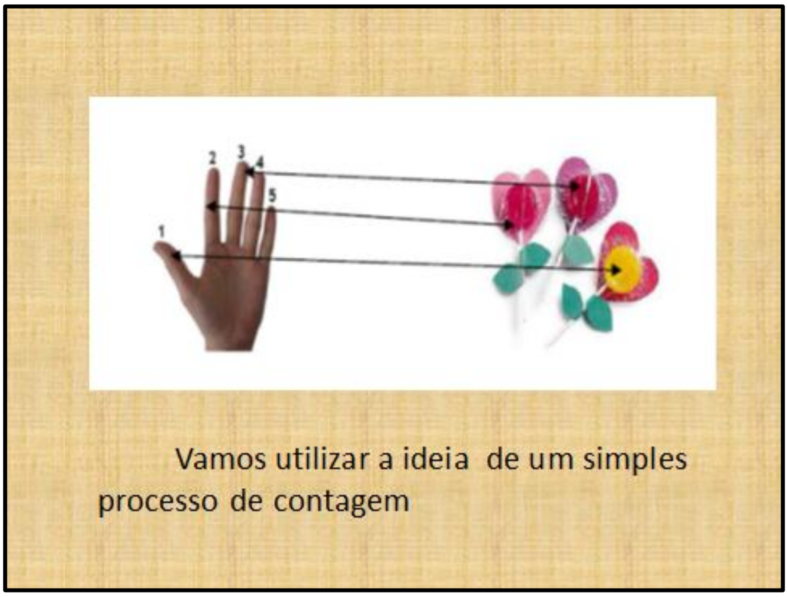
Legenda: (a) slide 13; (b) slide 14; (c) slide 15.

Fonte: O autor, 2016.

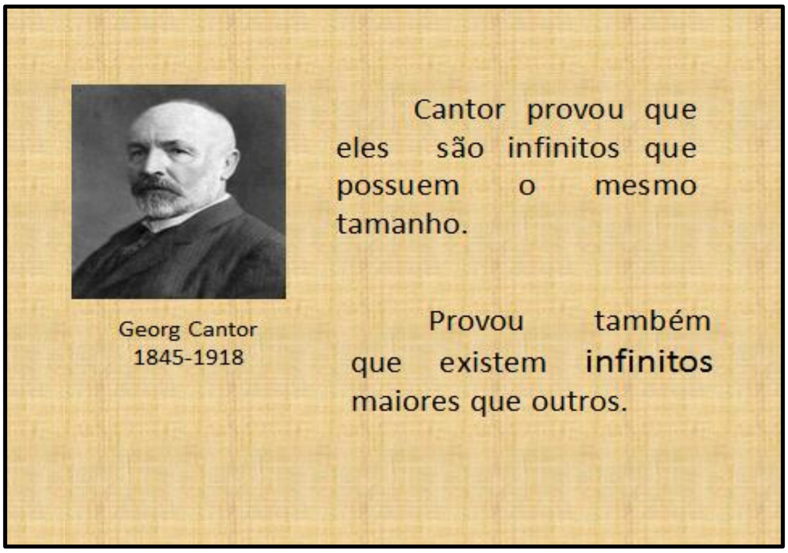
Inicialmente, no slide 14, frases do filme A culpa é das estrelas (2014), baseado no livro de mesmo nome de John Green, são utilizadas para gerar interesse sobre o conceito de infinito. Para desfazer a ideia de que infinito é o maior número possível ou um número muito grande o professor poderá inserir a seguinte pergunta: Qual é o maior número entre 0 e 1, desconsiderando o 1?. Qual é o primeiro número real maior que zero?.

No slide 15 os alunos ficam receosos em responder por que imaginam que a pergunta não deveria ser tão fácil de ser respondida. Como o conceito de bijeção raramente é trabalhado em turmas de módulo 2 do Neja, módulo anterior às turmas participantes deste trabalho, foi escolhida uma maneira de utilizar tais conceitos através da ideia de um simples processo de contagem utilizada no slide 16. Ver Figura 13.

Figura 13 - Slides 16 e 17



(a)



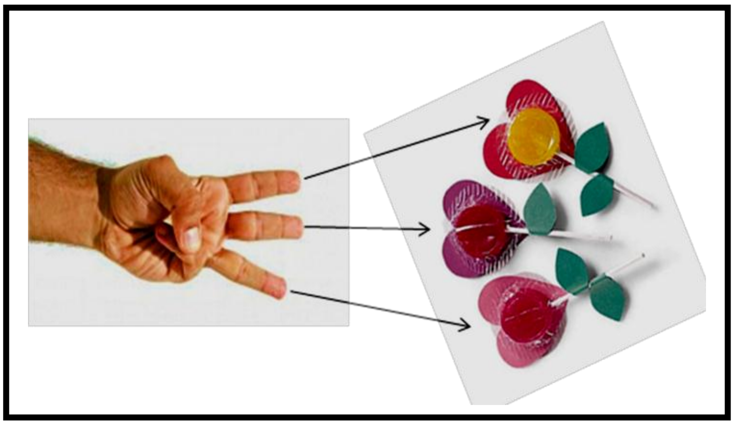
(b)

Legenda: (a) slide 16; (b) slide 17.

Fonte: O autor, 2016.

No slide 16 os alunos visualizam que para dois conjuntos, o da mão e dos pirulitos, terem a mesma quantidade de elementos (serem do mesmo tamanho) é necessário que haja uma correspondência entre os dedos tal que nenhum dedo fique de fora desta correspondência, ou seja, é necessária uma relação biunívoca. Para que a igualdade fosse verificada a situação deveria se apresentar como na Figura 14.

Figura 14 - Relação biunívoca



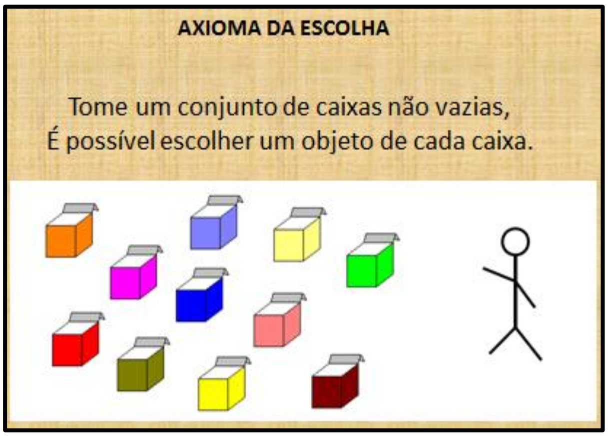
Fonte: http://www.comofazeremcasa.net/decoracao-e-lembrancinhas-com-pirulitos-para festa-de-dia-das-criancas/**.** Acesso em 07 de março de 2016.

A mesma ideia é utilizada para comparar o conjunto dos naturais e o conjunto dos pares. O professor utiliza o argumento para estabelecer uma bijeção entre os elementos do primeiro conjunto e os elementos do segundo conjunto, onde cada número natural está associado ao seu dobro. Os alunos demonstraram-se surpresos com os resultados.

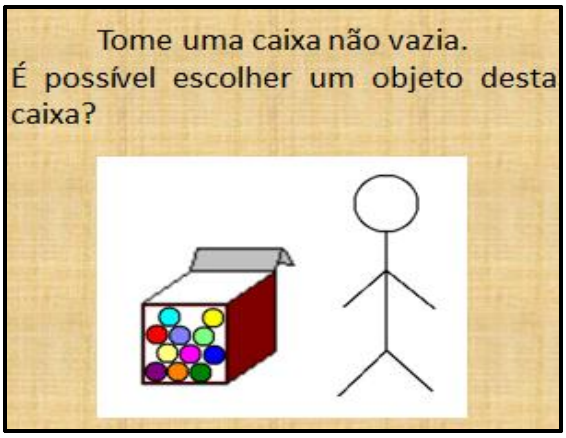
No slide 17, o professor comenta que Cantor provou que o conjunto dos números reais é um infinito maior que o infinito dos naturais.

Etapa 2: Um conceito intuitivo sobre Axioma da Escolha é apresentado. Os slides continuam, através de uma alegoria utilizada por PRITISH (2011), ver Figura 15

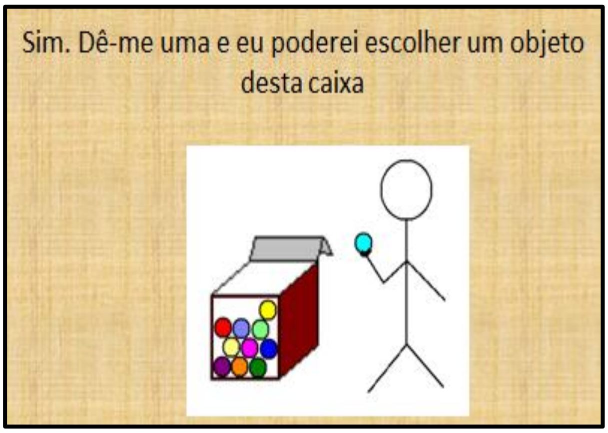
Figura 15 - Slides 18 a 22 (continua)



(a)



(b)



(c)

(d)

(e)

Legenda: (a) slide 18; (b) slide 19; (c) slide 20; (d) slide 21; (e) slide 22.

Fonte: O autor, 2016.

O professor provoca os alunos com a mesma pergunta presente no questionário 1 da Atividade 1, sobre escolha infinita de objetos.

O Axioma da escolha, proposto por Ernest Zermelo diz que existe uma maneira de selecionar um objeto de cada caixa, ainda que seja por meio de um processo infinito. Existe um conjunto de escolha que contém exatamente um objeto de cada caixa.

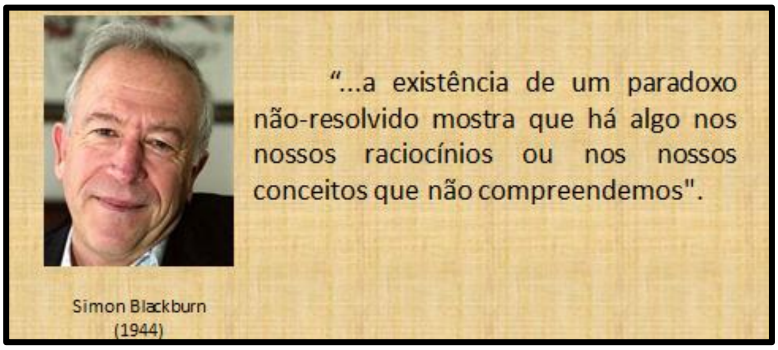
O professor prossegue dizendo que com este Axioma foi formulado um paradoxo intrigante, o Paradoxo de Banach-Tarski, ilustrado na Figura 16.

Figura 16 - Slide 23

Fonte:O autor, 2016.

Uma frase do Filósofo Simon Blackburn (1944) é apresentada na Figura 17.

Figura 17 - Slide 24



Fonte:O autor, 2016.

4.3 Atividade 3

Figura 18 - Atividade 3

2° Questionário / Após a apresentação. Turma:_________

Nome:____

1) O que você entende por INFINITO?

____

____

2) O que achou da ideia de fazer uma escolha infinita de Objetos?

____

____

3) O que você entende agora sobre Paradoxo?

____

____

4) Escolha um paradoxo da aula e dê sua opinião sobre ele.

____

____

____

5) O que você entendeu sobre Axioma?

____

____

6) Você sentiu dificuldade em compreender o Axioma da Escolha? O que lhe provocou maiores dificuldades?

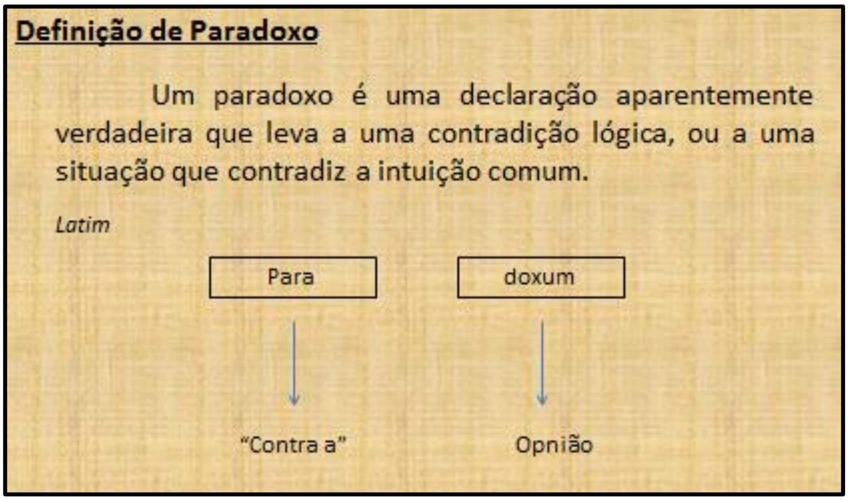
____

____

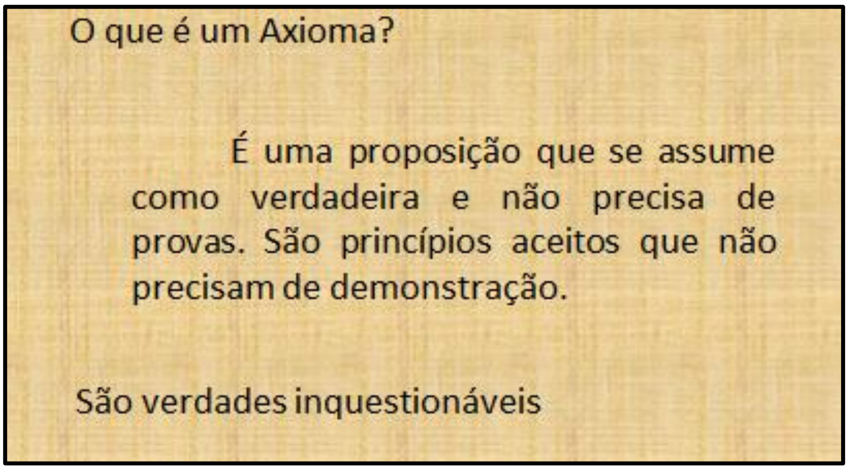
Fonte: O autor, 2016.

Na Atividade 3 (Figura 18) espera-se avaliar o progresso ou não do entendimento dos alunos com relação a infinito, paradoxo e axioma (incluindo o Axioma da Escolha). Após a Atividade 3 são apresentadas definições um pouco mais formais aos alunos sobre paradoxo e axioma, ver Figura 19.

Figura 19 - Slides 25 e 26



(a)



(b)

Legenda: (a) slide 25; (b) slide 26.

Fonte: O autor, 2016.

Através da análise das respostas dos questionários presentes nas atividades 1 e 3 o professor poderá avaliar se houve melhoria na compreensão dos temas abordados e se houve aumento do interesse dos alunos por esses temas.

4.4 Análise dos questionários

Aplicado o questionário 1 (Fig 5) a 27 alunos, encontramos como resposta à primeira pergunta “O que é INFINITO para você? O que significa essa palavra?”, 24 alunos respondendo que infinito é algo que nunca termina/sem fim; 1 aluno não respondeu pois não estava presente em sala de aula (aluno 28) e os outros três restante responderam, respectivamente, “eterno”, “nem começo, nem fim”, definiu infinito por um exemplo (Gráfico 1). O aluno 21 respondeu “O amor que eu sinto pelo meu filho e marido.” Na Figura 20 algumas respostas para INFINITO.

Figura 20 - “O que é INFINITO para você? O que significa essa palavra?” (continua)

É um acontecimento que nunca tem fim, é como se dizer um número que você conta e nunca termina.

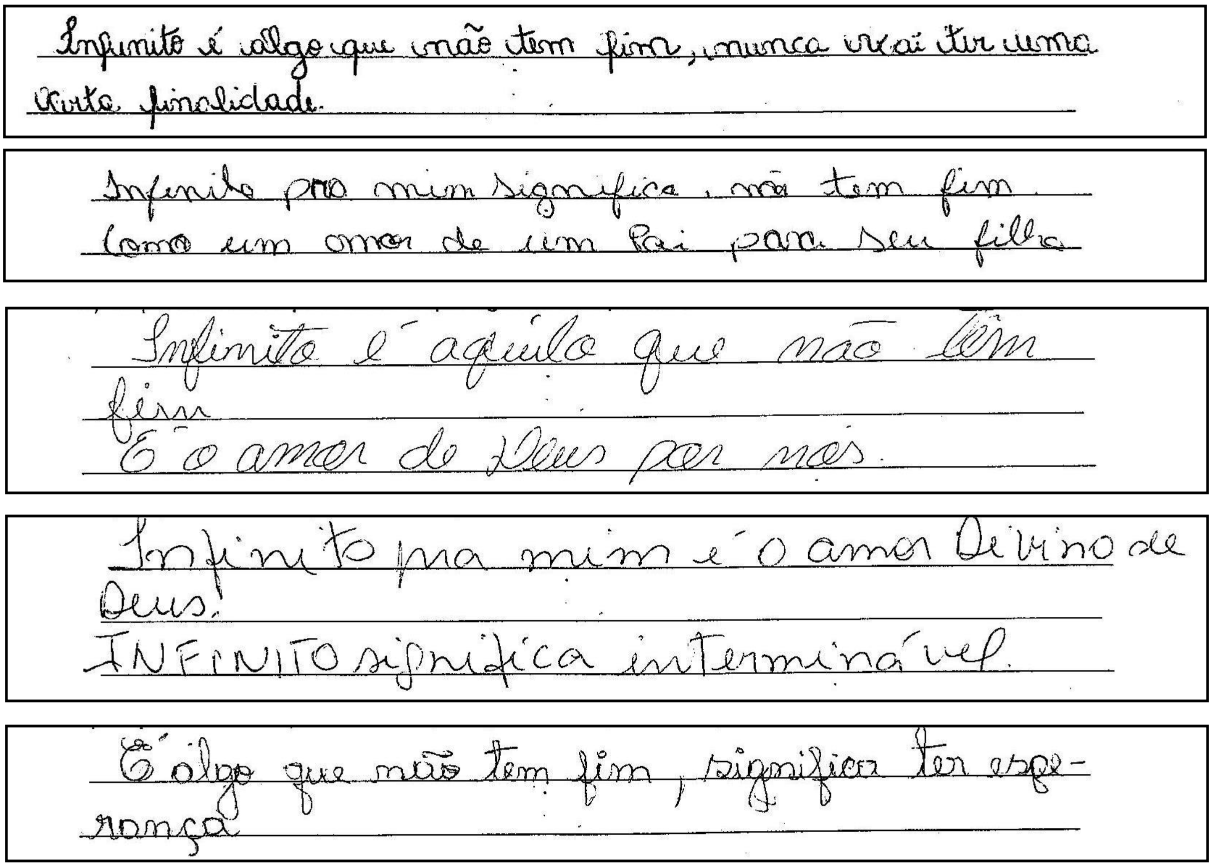
Para mim o que é infinito é o amor de Deus que não tem fim por que o amor dele é para sempre.

É um acontecimento que não tem fim como começar e não terminar direto sem parar por toda vida como tem escrever uma carta e não para mais?

Deus, o universo os números, um Circulo perfeito entre outros coisas. Para mim, algo que tem começo e não tem fim, um exemplo os números.

É algo que não tem fim.
O significado do infinito é algo que você não consegue ver o fim.

Figura 20 - “O que é INFINITO para você? O que significa essa palavra?” (conclusão)


Infinito é algo que não tem fim, nunca vai ter uma certa finalidade.

Infinito pro mim significa, não tem fim.
Como um amor de um Pai para seu filho

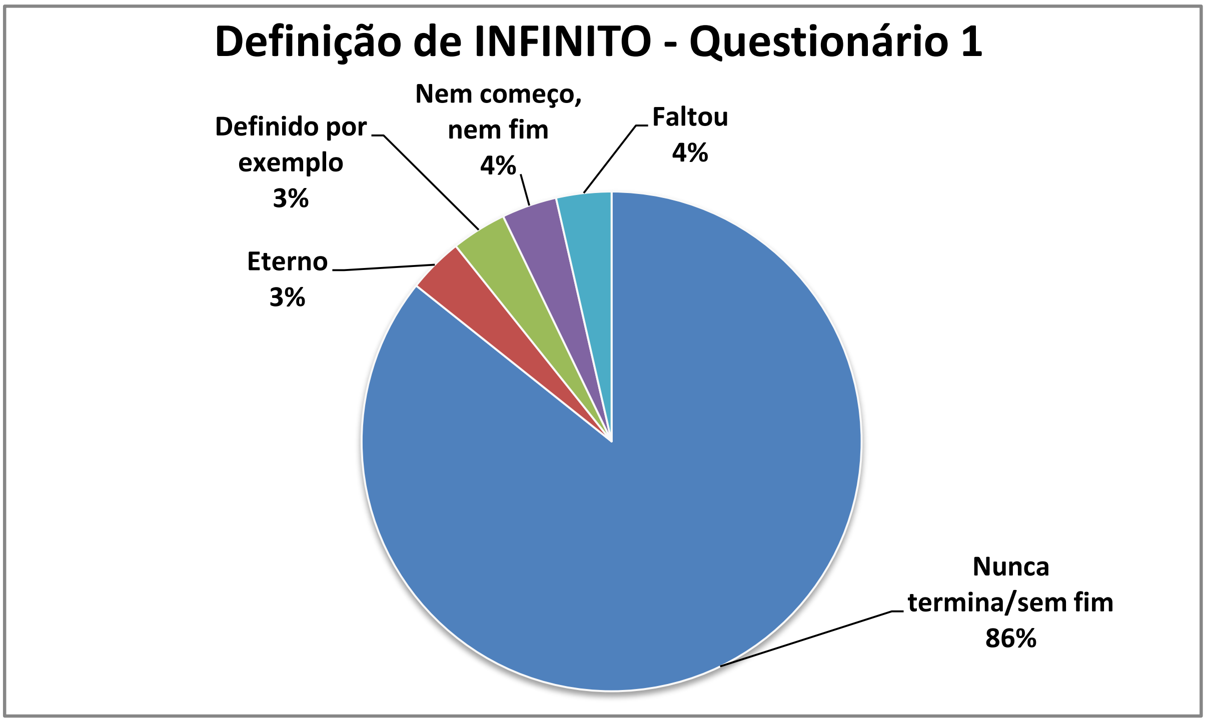
Infinito é aquilo que não tem fim
É o amor de Deus por nós.

Infinito pra mim é o amor Divino de Deus!
INFINITO significa interminável.

É algo que não tem fim, significa ter espe-rança

Fonte: O autor, 2016.

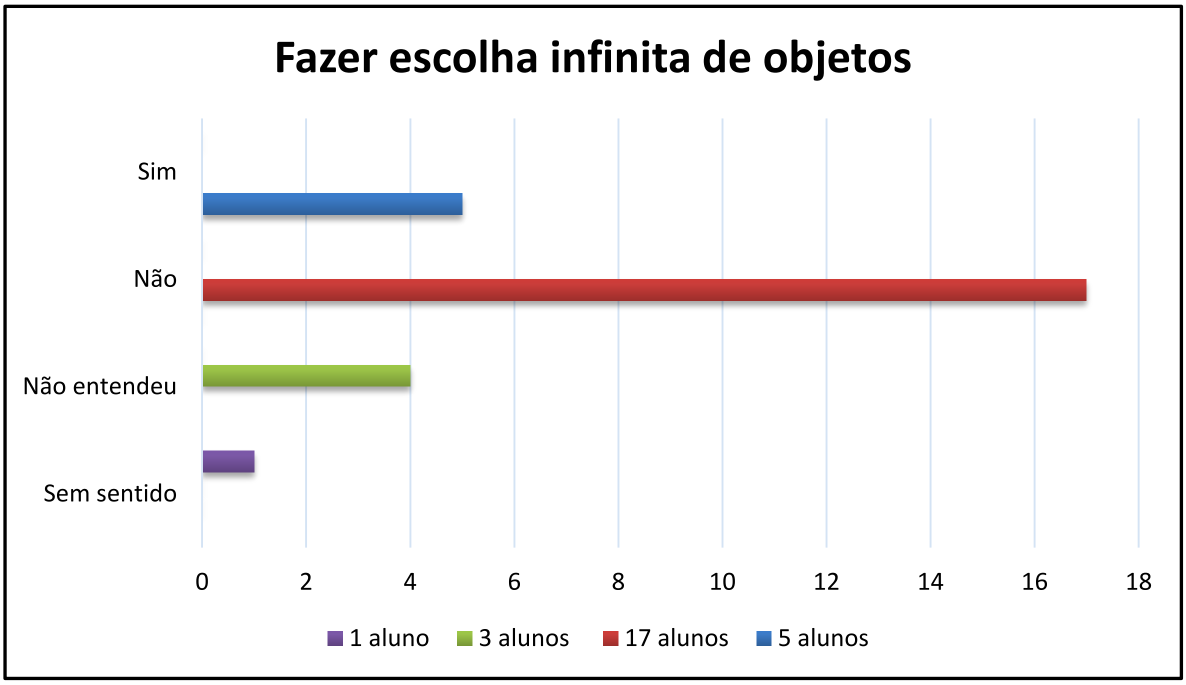
Gráfico 1- Respostas à pergunta 1 – Questionário 1



Fonte: O autor, 2016.

Com relação à segunda pergunta, “Você já pensou em ter que fazer uma escolha infinita de objetos?”, 2 não responderam, 17 responderam não, 5 responderam sim, 3 entendemos que a pergunta não foi clara e 1 aluno respondeu a uma outra pergunta (Gráfico 2). Naturalmente a maioria respondeu NÃO à essa pergunta ratificando a ideia que temos da dificuldade do aluno em relação ao conceito de infinito.

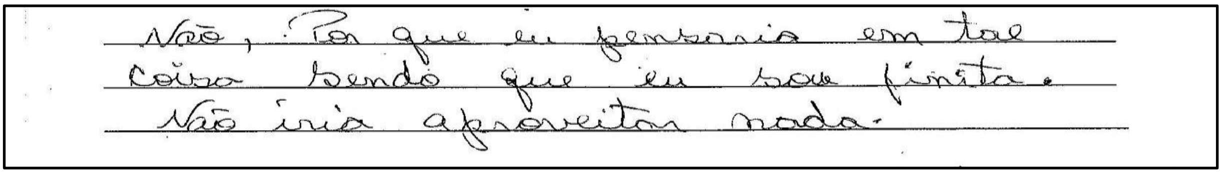
Gráfico 2 - Respostas à pergunta 2 – Questionário 1



Fonte:O autor, 2016.

Chamaram atenção duas respostas completamente opostas, as dos alunos 20 e 21, mostradas na Figura 21. Enquanto para um aluno não existe nenhum problema em contar uma quantidade infinita de objetos, para o outro isso seria impossível. O aluno 6 expõe essa impossibilidade através de um pergunta, “Não, porque se é infinito como iria escolher algo que não tem fim?”. O aluno 22 já responde de uma forma mais próxima da ideia matemática de uma escolha infinita (“Não, pois seria impossível eu fazer alguma escolha”).

Figura 21 - Você já pensou em ter que fazer uma escolha infinita de objetos?



(a)

(b)

Legenda: (a) aluno 20; (b) aluno 21.

Fonte: O autor, 2016.

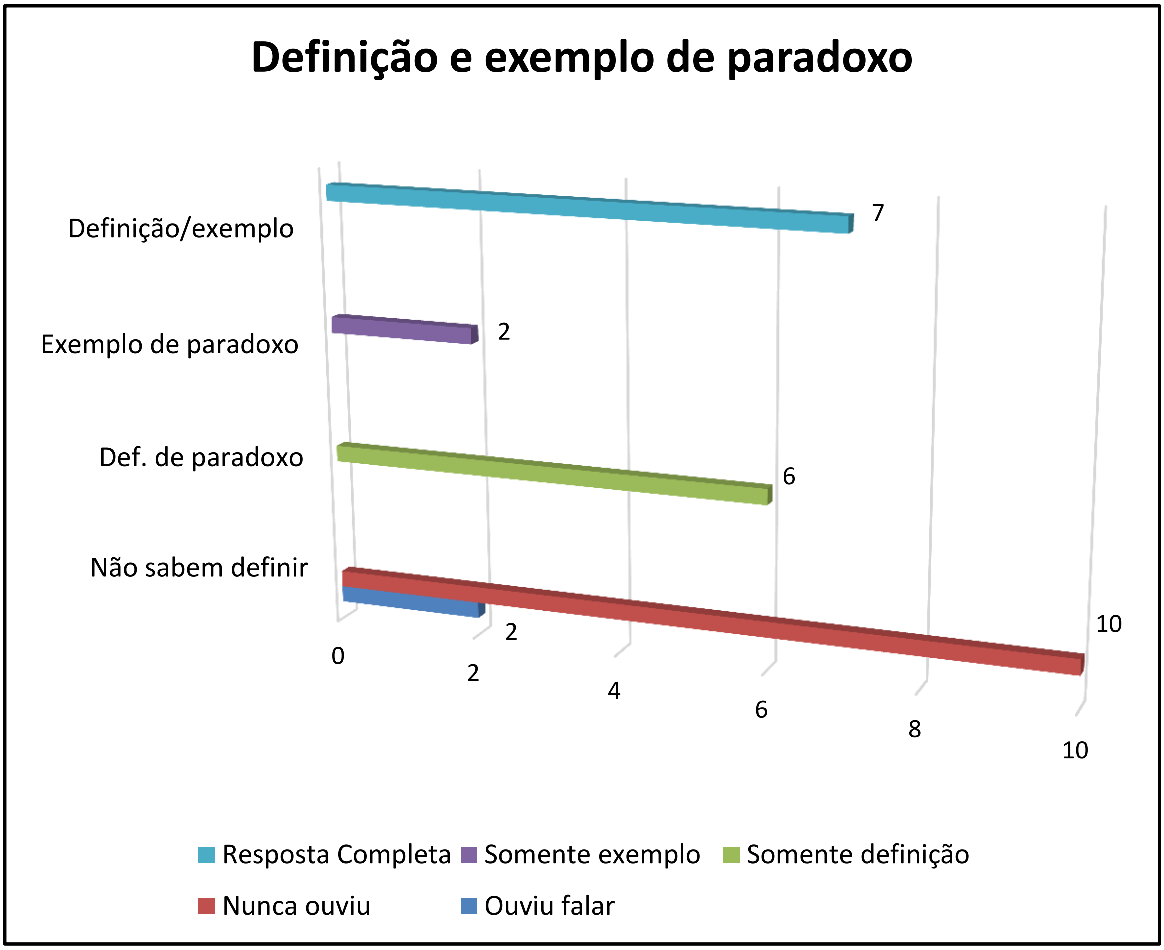
A pergunta 3 foi mais complexa para ser analisada. Ela se divide em duas questões: “O que é um Paradoxo para você?” e “Poderia citar um exemplo?”. Dos 27 alunos, 2 responderam que ouviram falar mas não sabem o que significa; 10 responderam não saber; 6 responderam a primeira parte da pergunta; 2 a segunda parte (exemplo de paradoxo) e os 7 restantes responderam as duas partes da pergunta (ver Gráfico 3).

Trechos das respostas da 1° parte (definição de paradoxo segundo os alunos):

- Conflito de ideias;
- Coisa que é mas não é;
- Fazer as coisas ao contrário;
- Uma contradição;
- Algo contra o que se pensa ser a verdade;
- Coisa oposta ao que realmente é;
- Uma figura de linguagem. Uma contraposição ideológica;
- Algo raro (aluno 14);
- Coisa que não vê e se sente;
- Tudo aquilo que eu penso e tenho certeza estar correto (aluno 18);
- Tudo ao contrário;
- Algo que é parecido ou que anda junto, ao lado (aluno 20);
- Opinião contrária ao que os outros pensam.

O autor não encontra motivo para justificar a disparidade de definição de paradoxo pelos alunos 14, 18 e 20 uma vez que os mesmos têm apresentado bom desempenho em matemática, estando sempre atentos em sala de aula. Os três alunos possuem mais de 35 anos. Convém ressaltar que a professora de português, sem especificar quais alunos, relatou a dificuldade dos alunos das turmas (Neja 3 e 4) em se expressarem por escrito.

Gráfico 3 - Respostas à pergunta 3 – Questionário 1



Fonte: O autor, 2016.

Pelos exemplos de paradoxo dados pelos alunos, observamos a influência da música Monte Castelo tocada antes do preenchimento do questionário 1.

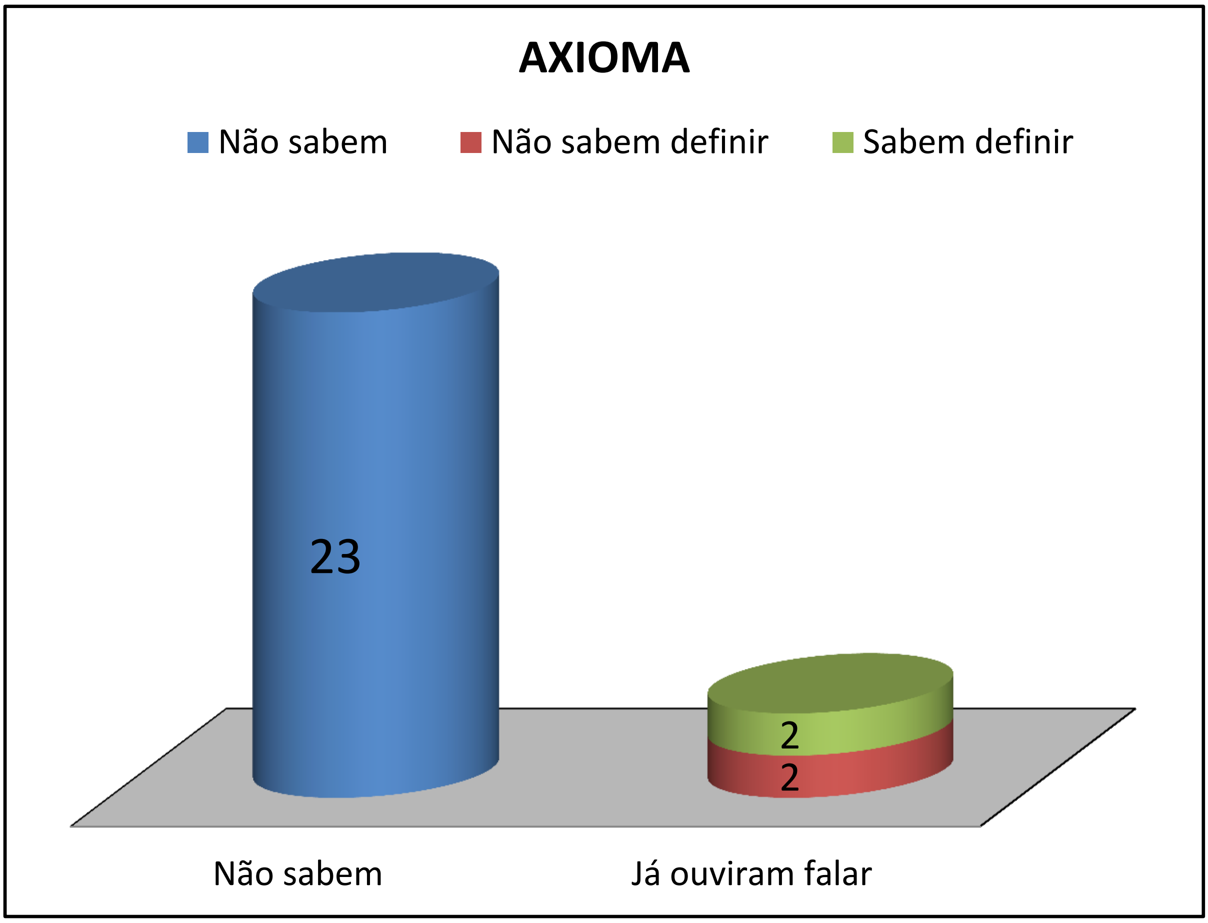
Exemplos de paradoxo (2° parte da pergunta 3):

- É um contentamento descontente (contradição);
- A ferida que dói e não se sente (música Monte Castelo);
- É quando você fala uma coisa e faz outra;
- Um exemplo seria: “Sois anjos que me tentas”;
- Exemplo: Buraco negro, viajem (sic) no tempo (aluno 14);
- Paradoxo, por exemplo, é um fenômeno que acontece quando duas linhas do tempo se cruzam, criando assim uma realidade diferente;
- Um exemplo seria a minha fé (aluno 18);
- Uma opinião contrária.

A última e quarta pergunta do questionário, “Você já ouviu falar em Axioma? Saberia dizer o que significa?”, foi respondida em sua maioria por NÃO (23 alunos).

Dos 4 restantes, metade ouviu falar mas não sabe o que significa enquanto os outros dois (9 e 10) definiram Axioma como: “Algo para construir argumentos” e “Argumentos”. Vale ressaltar que estes dois alunos estavam sentados próximos durante o preenchimento do questionário. Ver Gráfico 4.

Gráfico 4 - Respostas à pergunta 4 – Questionário 1



Fonte: O autor, 2016.

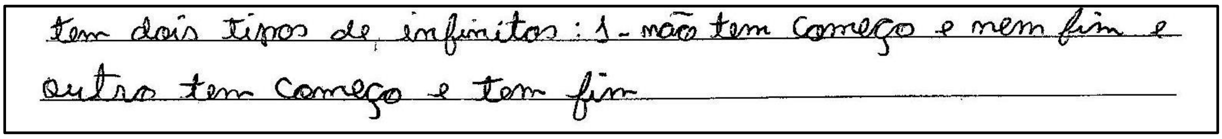
Com o objetivo de saber qual aprendizagem dos alunos em relação ao conceito de infinito após atividades de texto, slides e aula sobre intervalos, retornamos à pergunta 1 do questionário 1 no questionário seguinte (2). Ver Gráfico 5.

Gráfico 5 - Respostas à pergunta 1 – Questionário 2

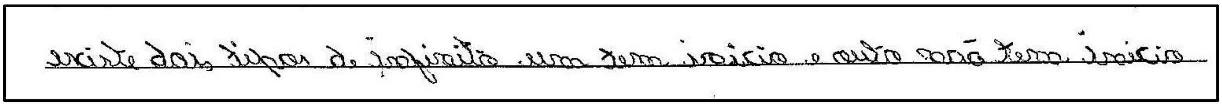
Fonte: O autor, 2016.

Para o questionário 2 o aluno 5 faltou. Da análise das respostas pudemos dividir em 7 categorias, segundo as respostas dos 27 alunos. Obtivemos 8 alunos respondendo que infinito é algo que nunca termina/sem fim; 1 aluno não respondeu pois não estava presente em sala de aula (aluno 5); 2 alunos (14 e 28) deram um exemplo; 9 alunos responderam que infinito nem começo, nem fim; 3 alunos (20, 21 e 24) responderam que tem começo e não tem fim; 2 alunos (16 e 17) deram duas definições, considerando a possibilidade de que o infinito pode ter início ou não (Figura 22). Os 3 alunos (13, 15 e 22) restantes apresentaram respostas absurdas (Figura 23). A experiência em sala de aula mostra que os alunos 13 e 15 apresentam nenhum interesse em estudar matemática e o aluno 22 tem dificuldade com a parte abstrata da matemática.

Figura 22 - “O que você entende por INFINITO?” – resposta com duas definições


tem dois tipos de infinitos: 1- não tem começo e nem fim e
outro tem começo e tem fim

(a)

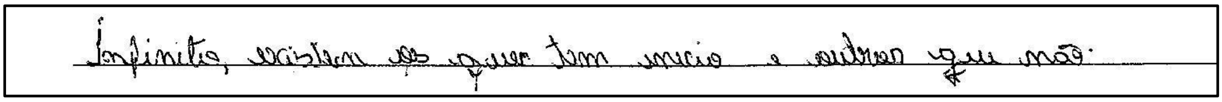

existe dois tipos de infinito um tem inicio e outro não tem inicio

(b)

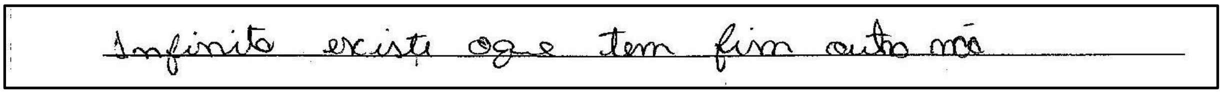
Legenda:(a) aluno 16; (b) aluno 17.

Fonte: O autor, 2016.

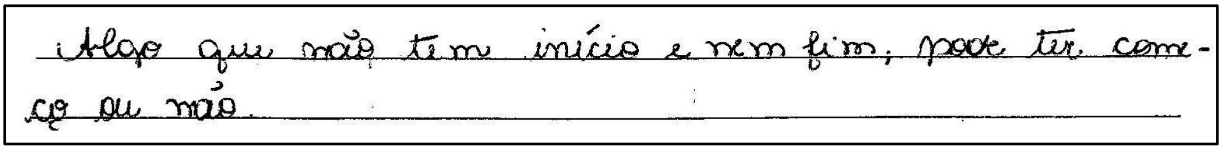
Figura 23 - “O que você entende por INFINITO?” – respostas absurdas


Infinito, existem os que tem inicio e outros que não.

(a)


Infinito existe oqe tem fim outo não

(b)


Algo que não tem início e nem fim, pode ter come-
ço ou não.

(c)

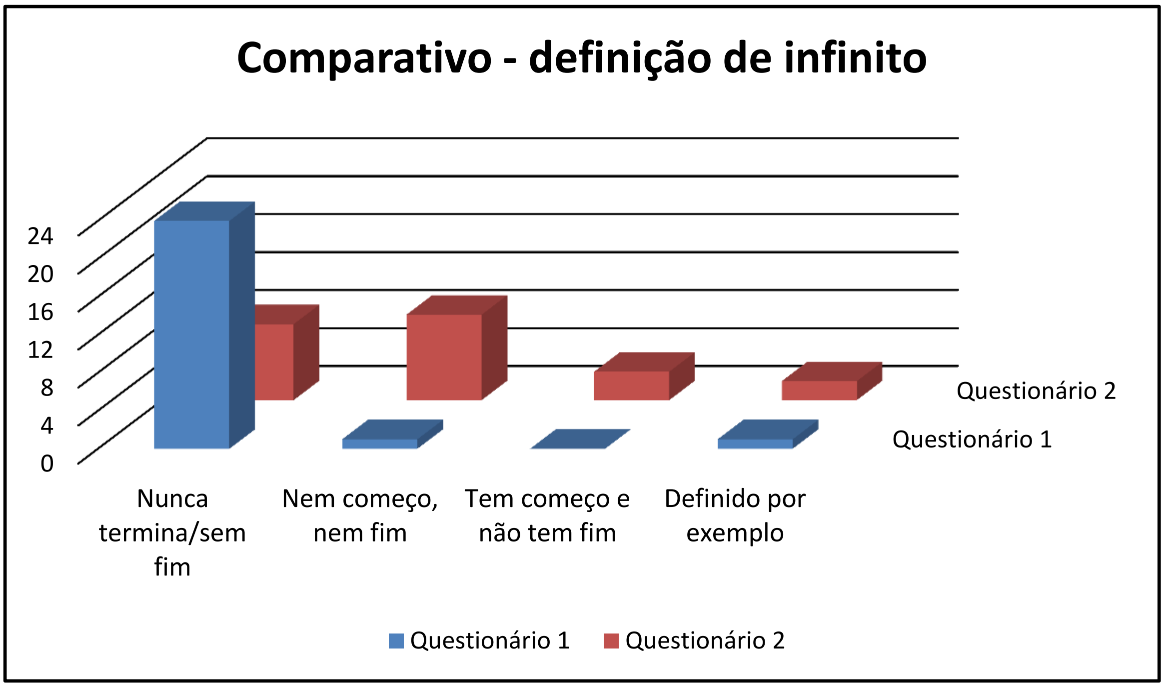
Legenda:(a) aluno 13; (b) aluno 15; (c) aluno 22.

Fonte: O autor, 2016.

Finalizando, observamos através das respostas que nenhum aluno considerou a possibilidade do infinito ser limitado, apesar do autor salientar durante a aula que no intervalo [0,1] há infinitos pontos.

No Gráfico 6, fazemos uma comparação entre as respostas da pergunta 1 do questionário 1 com a pergunta 1 do questionário 2, por ambas serem essencialmente iguais.

Gráfico 6 - Comparativo pergunta 1 questionários 1 e 2



Fonte: O autor, 2016.

Podemos observar, no Gráfico 6, que o conhecimento prévio de infinito não leva em conta a possibilidade de o infinito ter um ponto de partida (um começo). No questionário 1 para a maioria dos alunos é algo que nunca termina e/ou nunca tem fim. Após a aplicação das atividades essa grande maioria pensa na possibilidade do começo existir ou não para algo infinito (a maioria definiu o infinito como algo que não tem começo nem fim).

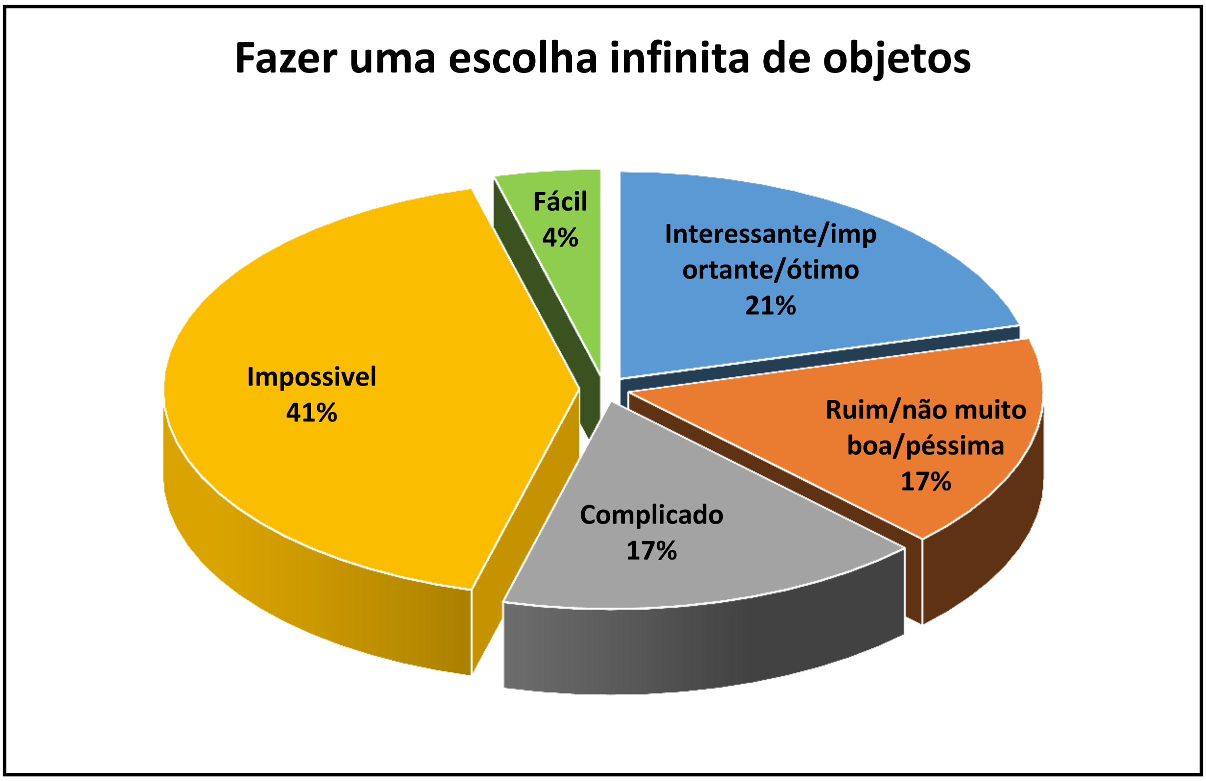
A pergunta 2 do questionário 2, “O que achou da ideia de fazer uma escolha infinita de objetos”, aplicada após a apresentação de todos os slides, dá-nos uma concentração de respostas de cunho negativo (ruim, difícil, impossível). Para os 27 alunos presentes obtivemos como respostas: (ver Gráfico 7)

- POSITIVAS: 5 afirmaram que a ideia é “importante” (aluno 7), “ótima” (aluno 22), “interessante” (alunos 1, 2 e 3);
- NEGATIVAS: 4 alunos classificaram como “não muito boa” (aluno 18), “ruim” (aluno 13), “ruim, pois sou finito” (aluno 17), “péssima” (aluno 24);
- FACILIDADE: 1 aluno considerou “fácil” (aluno 21, ver Figura 23);
- COMPLICAÇÃO: 4 alunos disseram que fazer uma escolha infinita é “muito demorada. Ficaria o resto da vida finita escolhendo objetos

infinitos” (aluno 26); é “difícil por ser indefinida” (aluno 19); é muito complicado (aluno 4); “complicada” (aluno 23);

- IMPOSSIBILIDADE: 10 alunos afirmam que “levariam uma eternidade” (alunos 6 e 12); é “impossível” fazer a escolha (alunos 10, 11 e 14); “não teria como fazer já que é infinita” (alunos 8 e 27); “acho que morreria escolhendo” (aluno 25); “é uma ideia impossível, pois não sobreviveríamos para separar uma infinita escolha de objetos. Algo interessante de pensar mas não teria como executar” (aluno 9); “não teria escolha por ser finito” (aluno 20).
- Respostas absurdas: alunos 15, 16 e 28 (Figura 24).

Gráfico 7 - Respostas à pergunta 2 – Questionário 2

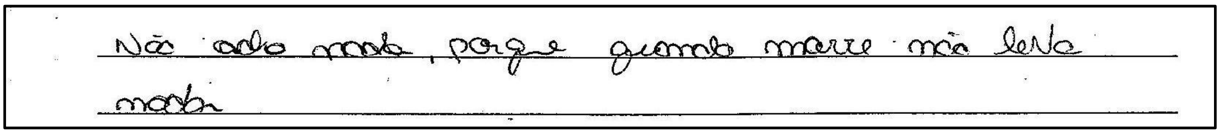


Fonte: O autor, 2016.

Figura 23 - “O que achou da ideia de fazer uma escolha infinita de Objetos?” – FACILIDADE (aluno 21)

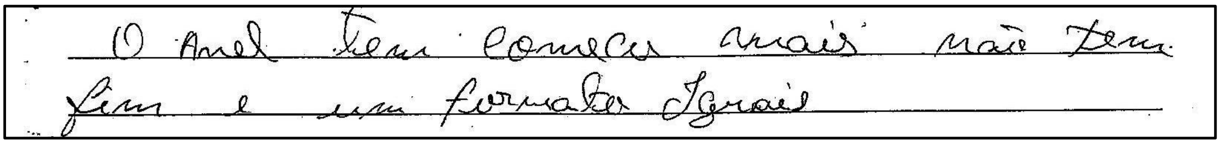
Fonte: O autor, 2016.

Figura 24 - “O que achou da ideia de fazer uma escolha infinita de Objetos?” – Respostas absurdas



(a)

(b)



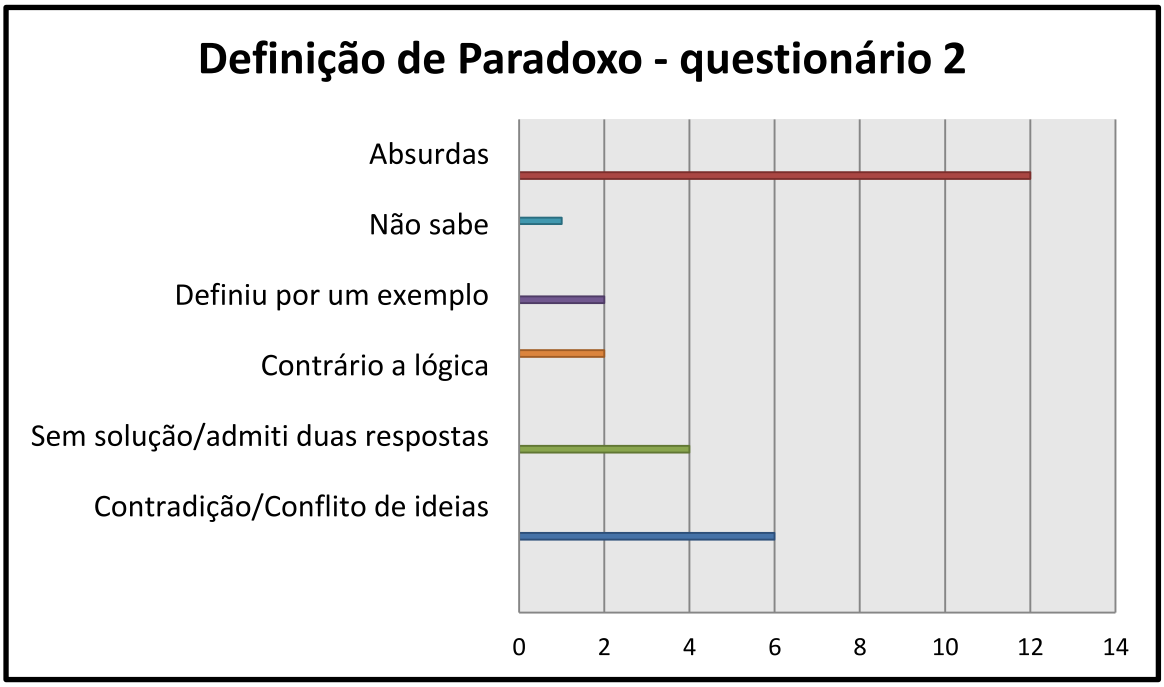
(c)

Legenda:(a) aluno 15; (b) aluno 16; (c) aluno 28.

Fonte: O autor, 2016.

Seguindo o mesmo critério e objetivo das análises referentes ao conceito de infinito abordado na pergunta 1 dos questionários 1 e 2, no qual se esperava observar a aprendizagem dos alunos após atividades de texto, slides e aula sobre intervalos, façamos uma comparação semelhante entre a primeira parte da pergunta 3 ,questionário 1 , “O que é um Paradoxo para você? Poderia citar um exemplo?” e a pergunta 3, questionário 2, “O que você entende agora sobre Paradoxo?”. Ver Gráfico 8.

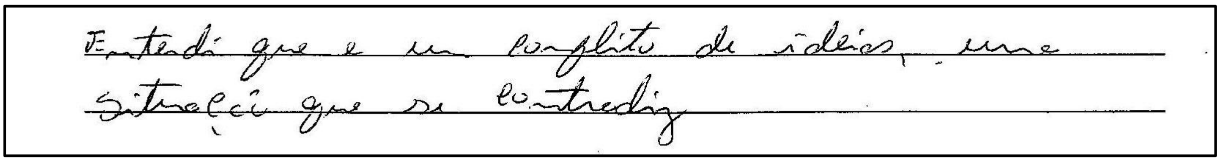
Gráfico 8 - Respostas à pergunta 3 – Questionário 2



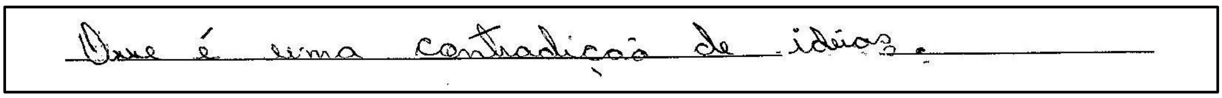
Fonte: O autor, 2016.

6 alunos definiram paradoxo como sinônimo de contradição ou conflito de ideias, ver Figura 25.

Figura 25 - “O que você entende agora sobre Paradoxo?”– Contradição ou conflitos de ideias (continua)

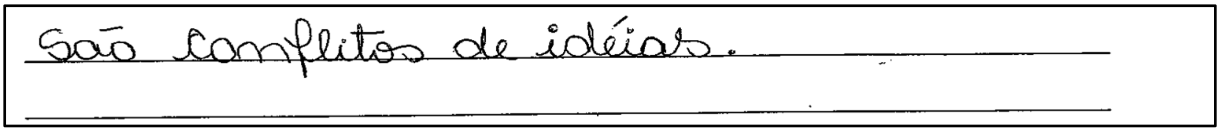

Entendi que é um conflito de ideias, uma situação que se contradiz

(a)

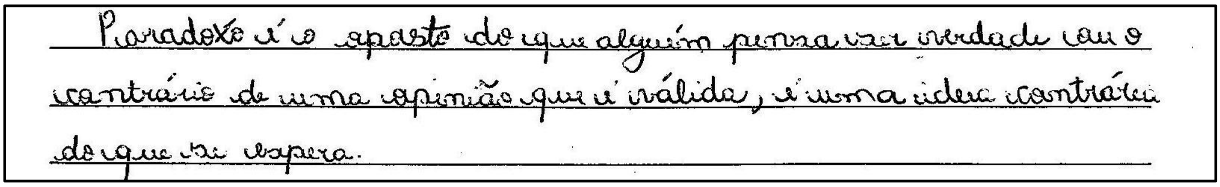

Que é uma contradição de ideias.

(b)

Figura 25 - “O que você entende agora sobre Paradoxo?”– Contradição ou conflitos de ideias (conclusão)


São conflitos de idéias.

(c)


Paradoxo é o oposto do que alguém pensa ser verdade ou o contrário de uma opinião que é válida, é uma ideia contrária do que se espera.

(d)

Legenda:(a) aluno 12; (b) aluno 6; (c) aluno 7; (d) aluno 9.

Fonte: O autor, 2016.

2 alunos definiram paradoxo dando um exemplo. O aluno 13 respondeu que paradoxo “É uma dor que dói e não se sente”; o aluno 16 que é “Sentir e ao mesmo tempo não sentir”, perdurando a influência da Música Monte Castelo na definição. Observa-se que esses alunos também deram exemplos que se enquadram na definição, dada pelos outros 6 alunos, de contradição ou conflito de ideias. 1 aluno não soube responder (aluno 27) e 12 deram respostas absurdas. O autor esperava que com a apresentação dos exemplos de paradoxo, presentes na atividade 3, os alunos pudessem criar uma definição de paradoxo de maneira autônoma. Porém a dificuldade desses alunos em se expressar pode ter influenciado na concentração de respostas absurdas. Vale ressaltar que uma definição mais formal de paradoxo foi dada na atividade 3, slide 25.

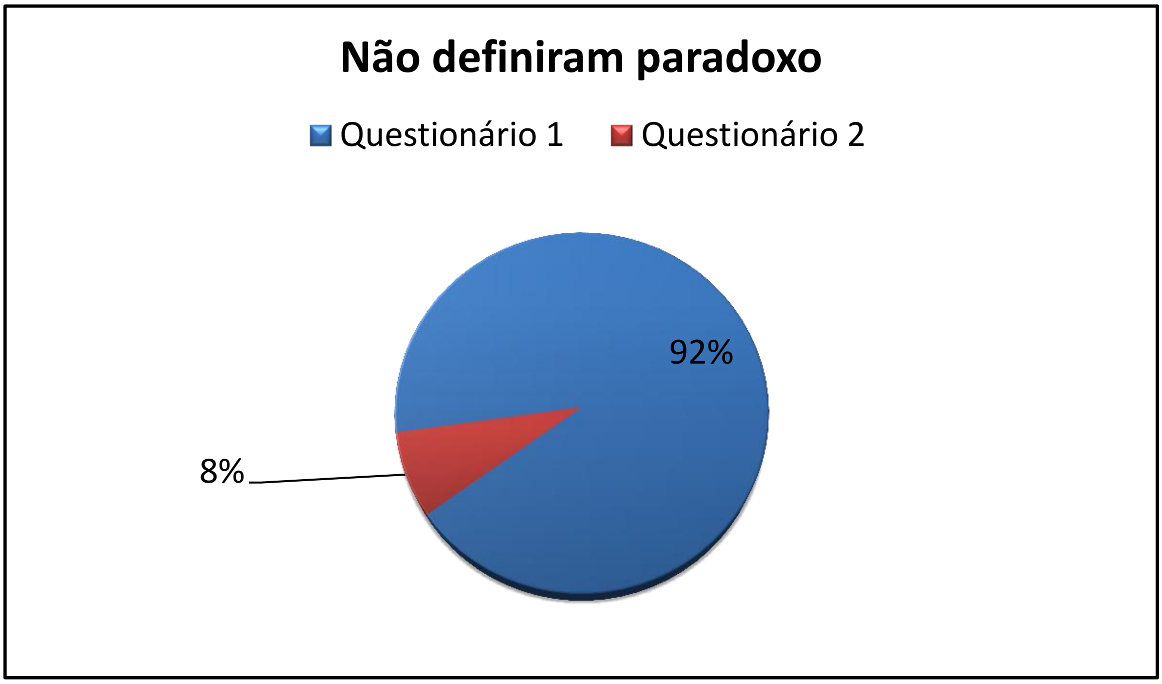
Os alunos 19, 20, 22 e 24 responderam que paradoxo é algo sem solução ou que admiti duas respostas. Veja alguns trechos:

- Raciocínio que não tem explicação. Tanto faz o sim como o não. As duas respostas tem sentido lógico.
- É aquilo que não tem solução.
- Uma situação que não tem uma resposta concreta.

Outros 2 alunos (alunos 23 e 25) consideraram que paradoxo é algo que contraria a lógica.

Comparando as respostas da definição de paradoxo antes dos textos e dos slides (questionário 1) e a após (questionário 2) obtivemos 12 alunos contra 1 não sabem definir paradoxo de alguma forma (Gráfico 9).

Gráfico 9: Definição de paradoxo – Questionários 1 e 2

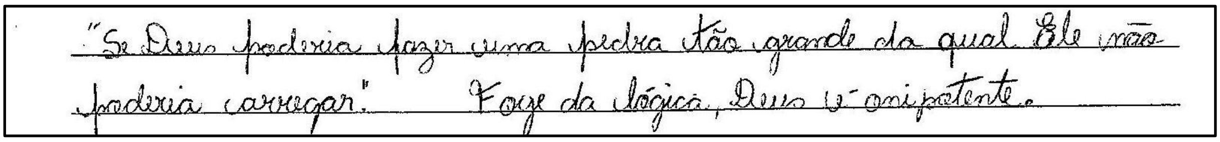


Fonte: O autor, 2016.

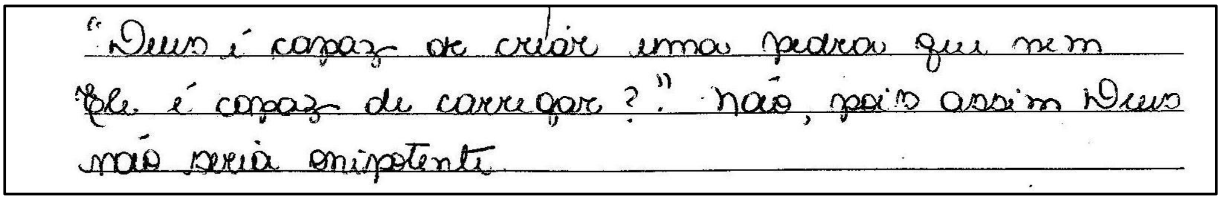
Entre os que definiram de alguma forma, encontramos 2 contra 5 fazendo menção a "conflito de ideias", enquanto "oposta", "tudo ao contrário", "contra o que se pensa ser a verdade", "opinião contrária" encontramos 4 contra 2, mostrando um entendimento melhor dos alunos da definição de paradoxo após as atividades já mencionadas. Foram encontradas no questionário 2 respostas mais próximas do conceito de paradoxo (alunos 19, 20, 22 e 24).

Na pergunta 4 do questionário 2, "Escolha um paradoxo da aula e dê sua opinião sobre ele", a maioria dos alunos, 15 ao todo, escolheu um paradoxo mas não opinou sobre ele. Outros 9 alunos responderam a questão de maneira completa, escolhendo um paradoxo e dando uma opinião sobre ele, observe na Figura 26 alguns exemplos.

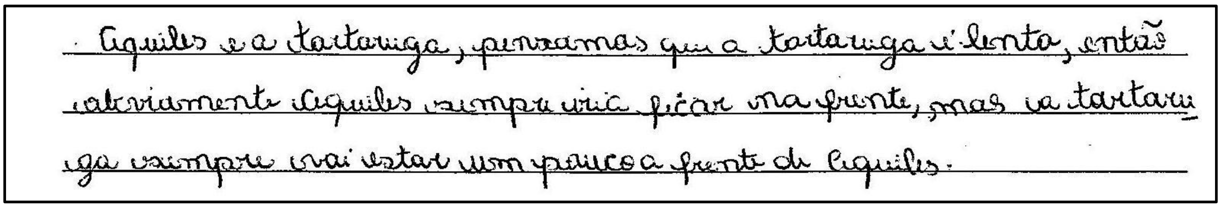
Figura 26 - “Escolha um paradoxo da aula e dê sua opinião sobre ele.”– Escolheu um paradoxo e opinou


"Se Deus poderia fazer uma pedra tão grande da qual Ele não poderia carregar." Foge da lógica, Deus é onipotente.

(a)


"Deus é capaz de criar uma pedra que nem Ele é capaz de carregar?" não, pois assim Deus não seria onipotente.

(b)

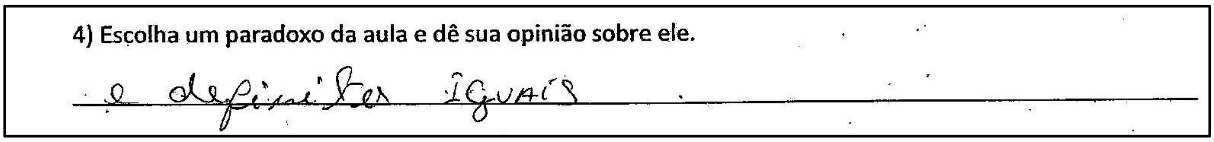

Aquiles e a tartaruga, pensamos que a tartaruga é lenta, então obviamente Aquiles sempre iria ficar na frente, mas a tartaruga sempre vai estar um pouco a frente de Aquiles.

(c)

Legenda: (a) aluno 25; (b) aluno 22; (c) aluno 9.
Fonte: O autor, 2016.

Vale ressaltar que o aluno 9 apresenta bom desempenho em interpretação de textos e redação, segundo a professora de língua portuguesa. O aluno 16 opinou sobre o conceito de paradoxo e não sobre um paradoxo apresentado na atividade em sala de aula dizendo que “O paradoxo é uma coisa que faz você ficar indeciso.” Este aluno foi classificado como tendo emitido uma opinião sobre o conceito. Um aluno não soube responder por não lembrar (“Não me lembro”, aluno 27) e o aluno 28 escreveu um absurdo (Figura 27)

Figura 27 - “Escolha um paradoxo da aula e dê sua opinião sobre ele.”– Resposta absurda



4) Escolha um paradoxo da aula e dê sua opinião sobre ele.

e definições iguais

Fonte: O autor, 2016.

Na Tabela 1 é apresentada uma análise geral da pergunta 4 do questionário 2.

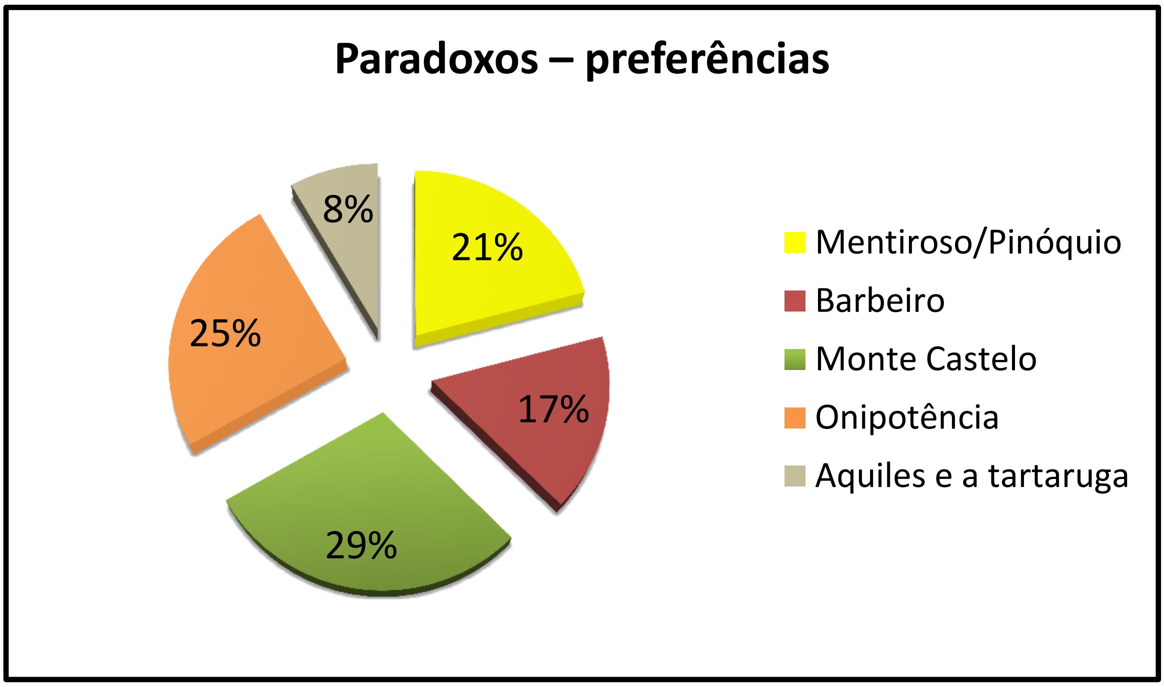
Tabela 1 - Paradoxo : Escolha e opinião

Escolheu um paradoxo e opinou	9
Escolheu um paradoxo e não opinou	15
Opinou sobre o conceito	1
Não soube responder / resposta absurda	2

Fonte: O Autor, 2016.

No Gráfico 10 podemos observar as preferências dos 24 alunos, que fizeram uma escolha, sobre os paradoxos apresentados em sala de aula.

Gráfico 10 - Paradoxos – preferências

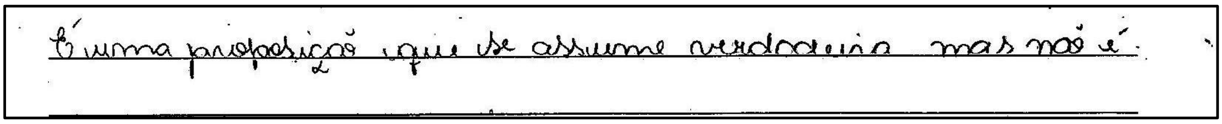


Fonte: O autor, 2016.

Observa-se que a Música Monte Castelo (7 alunos) e o paradoxo da Onipotência (6 alunos) se destacam na preferência. O apelo musical e as questões religiosas podem ter contribuído para que esse cenário de escolha se estabelecesse. 5 alunos escolheram o paradoxo do Mentiroso/Pinóquio; 4 alunos o paradoxo do Barbeiro e 2 alunos o paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

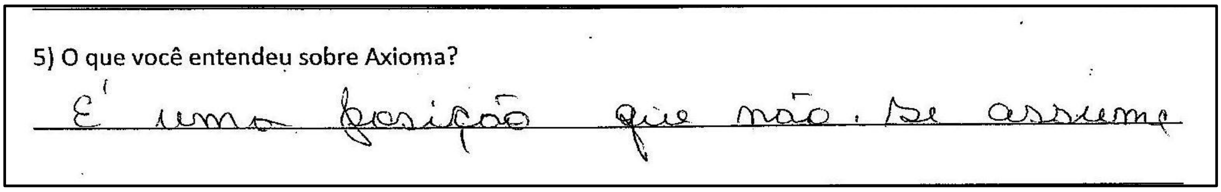
Para a 5° pergunta do questionário 2 obtivemos sucesso quando 17 alunos definiram ou chegaram próximo da definição de Axioma e 3 alunos tentaram exemplificar (alunos 4, 16 e 28). Em contrapartida, 1 aluno (aluno 1) define de forma errada (Figura 28) e 4 alunos não sabem a definição (“Nada”, alunos 2 e 15; “É impossível chegar a uma conclusão”, aluno 7; “Ainda não entendi”, aluno 13). O autor compreende que 2 respostas podem ser consideradas absurdas: aluno 20 (Figura 29), que possui mais de 40 anos, e aluno 24. Em relação ao aluno 20 o autor acredita no EJA nessa faixa de idade as dificuldades em matemática parecem estar relacionadas às dificuldades em língua portuguesa (interpretação de texto e redação). Durante 5 anos no EJA muitas vezes trabalhando nos três turnos (manhã, tarde e noite), o autor tem observado que alunos nessa faixa de idade parecem apresentar dificuldades intransponíveis em língua portuguesa. Certamente esta resposta absurda deve estar relacionada a isso. Outra resposta absurda, “Nada e Tudo”, do aluno 24, demonstra desinteresse.

Figura 28 - “O que você entende sobre Axioma.”– Resposta errada


É uma propozição que se assume verdadeira mas não é.

Fonte: O autor, 2016.

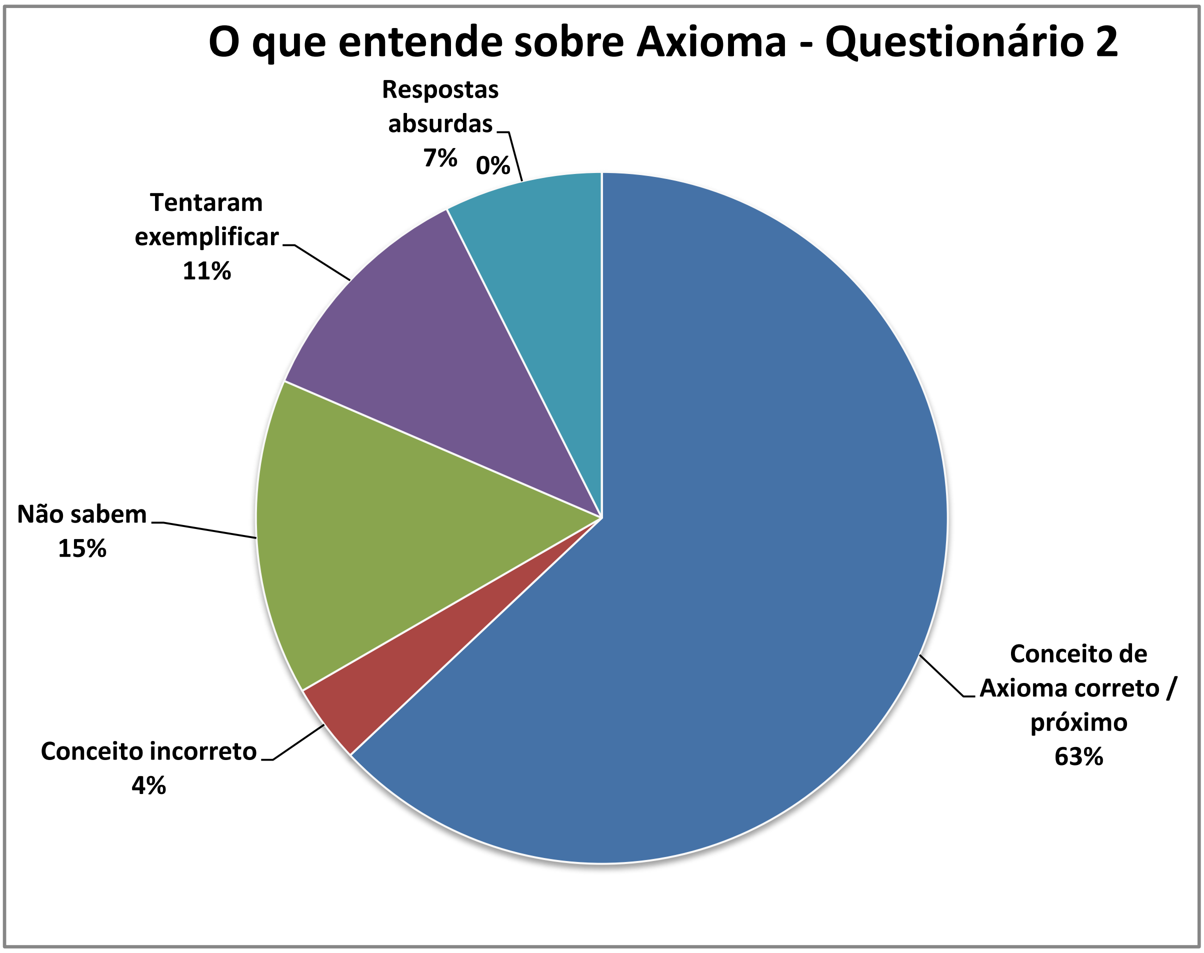
Figura 29 - “O que você entende sobre Axioma?”– Resposta absurda


5) O que você entendeu sobre Axioma?

É uma posição que não se assume

Fonte: O autor, 2016

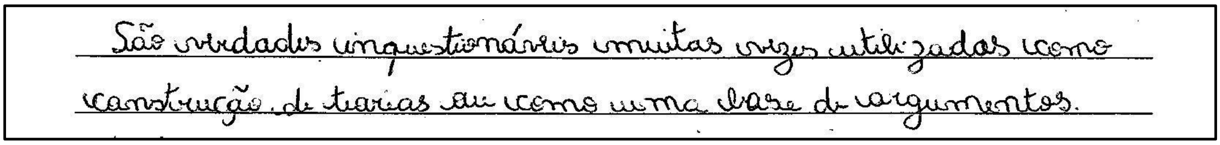
Gráfico 11 - Axioma – Questionário 2



Fonte: O autor, 2016.

Dos alunos que definiram axioma corretamente escolhemos algumas respostas: “verdades inquestionáveis”, “proposição que se assume verdadeira e não precisa de provas”, “verdade absoluta”. O aluno 9 escreveu a melhor resposta, ver Figura 30.

Figura 30 - “O que você entende sobre Axioma?”– Melhor resposta (aluno 9)



Fonte: O autor, 2016.

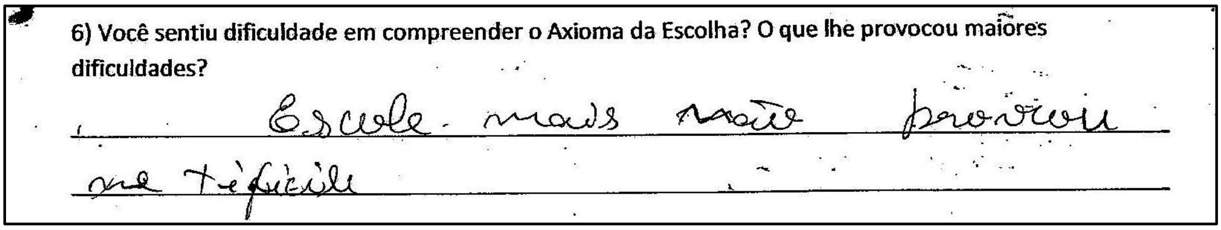
Aquelas respostas que o autor acredita estarem próximas do conceito, pela deficiência em se expressar por escrito, são dadas a seguir:

- É uma verdade absoluta (alunos 6 e 8);
- Tudo que tem uma resposta sem precisar de prova alguma (aluno 14);
- São coisas sem explicações (aluno 18);
- São situações e fatos que não precisam de explicação (alunos 22, 26);
- São situações que não precisam de explicação (aluno 27).

Em relação à última pergunta do questionário 2 dividida em duas partes, 14 responderam a primeira parte, 12 responderam ambas as partes e 1 aluno deixou em branco (aluno 7). Ver Gráfico 12.

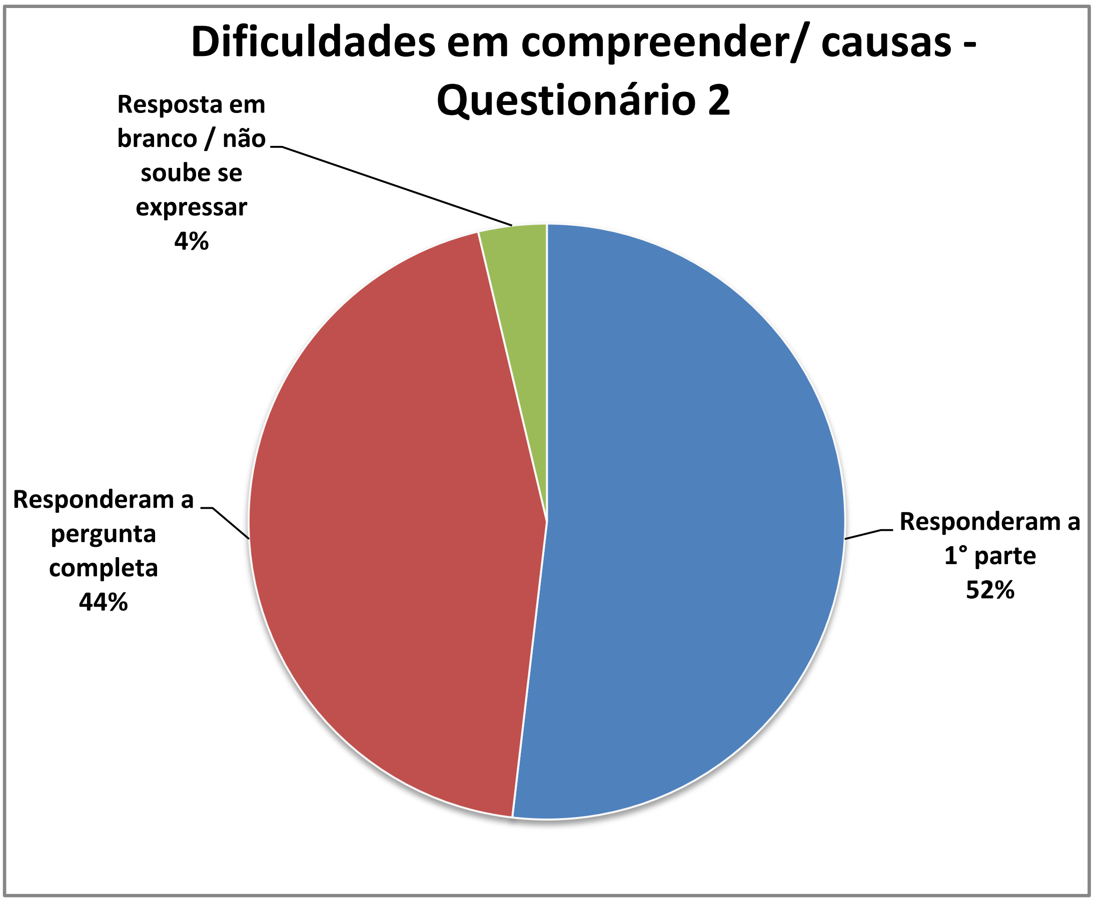
Dos alunos que responderam apenas a primeira pergunta, o aluno 27 escreveu “Eu não lembro”. Dentre os alunos que responderam a pergunta por completo, o aluno 28 não soube se expressar, ver figura 31.

Figura 31 - Questionário 2 – última pergunta (não soube se expressar)


6) Você sentiu dificuldade em compreender o Axioma da Escolha? O que lhe provocou maiores dificuldades?

Fonte: O autor, 2016.

Gráfico 12 - Axioma da escolha – Questionário 2



Fonte: O Autor, 2016.

A Tabela 2 associa as respostas encontradas na primeira parte da pergunta 6, “Você sentiu dificuldade em compreender o Axioma da Escolha?”, com as respostas da segunda parte, “O que lhe provocou maiores dificuldades?”.

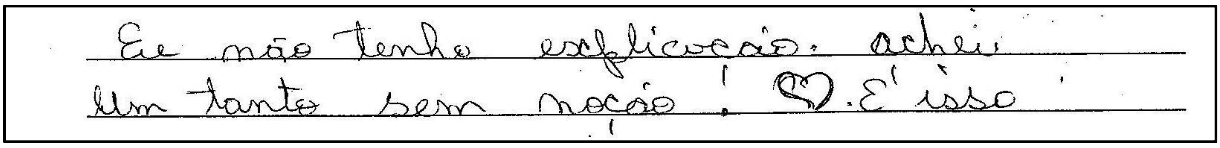
Tabela 2 – Sentiu dificuldades ? Quais são elas?

<table>
<tr><th>NÃO</th><th colspan="2">SIM</th><th colspan="2">UM POUCO</th><th>NÃO LEMBRO</th><th>EM BRANCO</th></tr>
<tr><td rowspan="8">10</td><td>3</td><td>E não disse as dificuldades (alunos 15, 18 e 19)</td><td rowspan="6">1</td><td rowspan="6">“Mesmo não tendo respostas aparentes sempre terá uma lógica.” (aluno 9)</td><td rowspan="8">1
(aluno 27)</td><td rowspan="8">1
(aluno 7)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Não entendeu nada (alunos 13,16,23 e 24)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td>aluno 1: “(...) pois não lembro o que é axioma”</td></tr>
<tr><td>aluno 2: “Porque a definição e (sic) diferente e eu não conheço essa palavra”</td></tr>
<tr><td>aluno 17: “Não entendi a definição”</td></tr>
<tr><td>aluno 21: “Me senti confusa”</td></tr>
<tr><td>1</td><td>aluno 20: Ver Figura 32</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">E não disse as dificuldades (aluno 10)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>aluno 28: “(Dificuldade na) escolha. Mais (sic) não provocou (em mim) dificuldades.”</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Fonte: O Autor, 2016.

Veja a seguir, Figura 32, a resposta do aluno 20, da qual se intui ter respondido SIM para a primeira parte da pergunta.

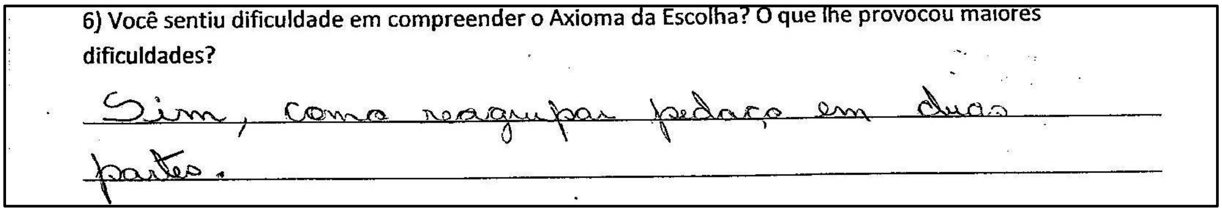
Figura 32 - Questionário 2 – última pergunta (aluno 20)



Fonte: O autor, 2016.

Dos 10 alunos que responderam NÃO à primeira parte, apenas 1 (aluno 6) respondeu a segunda parte da pergunta relatando uma dificuldade que faz alusão, provavelmente, ao Paradoxo de Banach-Tarski, ainda que não tenha se expressado de maneira clara, ver Figura 33.

Figura 33 - Questionário 2 – última pergunta (aluno 6), questionamento


6) Você sentiu dificuldade em compreender o Axioma da Escolha? O que lhe provocou maiores dificuldades?

Sim, como reagrupar pedaço em duas partes.

Fonte: O autor, 2016.

Houve 1 resposta em branco (aluno 7), uma resposta “Não lembro” (aluno 27), 2 respostas “Um pouco” e 13 respostas SIM. Foram incluídos 2 alunos que embora não sejam muito claros em suas repostas foram considerados SIM, por interpretação particular. As dificuldades de compreensão se concentraram na definição do Axioma da Escolha propriamente dito e não na definição do conceito de axioma, uma vez que na pergunta 5, “O que você entendeu sobre Axioma?”, os dados demonstraram que este conceito foi bem compreendido pela maioria dos alunos, ver gráfico 11.

CONCLUSÃO

A Teoria dos Conjuntos está presente em diversos ramos da matemática e entender como o tratamento ingênuo de suas proposições mais básicas, desprovidas de um sistema formal consistente, provocaram conflitos lógicos desconcertantes é um fator motivador para um olhar mais atento dos docentes para esta teoria.

O estudo das questões lógicas mais elementares (pré sistema formal de axiomas) envolvendo conjuntos, permite ao professor oferecer a seus alunos uma abordagem da teoria se baseando em linguagem usual e não apenas através de símbolos matemáticos que causam tanta aversão à disciplina em estudantes do ensino médio e até mesmo da graduação.

Ao analisarmos os dados da aplicação em sala de aula, observamos que os temas gerados pelo estudo da Teoria dos Conjuntos nesse TCC puderam provocar a curiosidade dos alunos em aprender mais sobre assuntos que pareciam por demais complexos, como os já comentados paradoxos, axiomas e infinito.

O autor acredita que a expectativa de que os alunos pudessem criar uma definição de paradoxo e relatá-la com certa eficiência esbarrou nas dificuldades de interpretação e, principalmente, de redação destes. Apesar disso, houve (dentre os que definiram paradoxo) uma melhoria na qualidade das respostas ao relatarem o que entendiam sobre este conceito no questionário final (questionário 2). Já a possibilidade de escolher um paradoxo e opinar sobre ele mostrou o quanto a música e questões que tocam a religiosidade podem provocar o interesse dos alunos, o que também de alguma forma permitiu com que eles abstraíssem, ao menos, intuitivamente o conceito. Houve êxito da aplicação em relação à definição de axioma, onde a maioria dos alunos se aproximou ou atingiu o conceito correto. Com relação ao Axioma da Escolha a turma se dividiu entre aqueles que não sentiram dificuldades em entendê-lo e aqueles que se sentiram confusos.

Espera-se que a partir deste TCC outros alunos do Profmat aprofundem seus conhecimentos sobre a Teoria dos Conjuntos e o Axioma da Escolha visando formas de apresentar conceitos importantes para a matemática de maneira mais acessível a alunos do ensino médio.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, M. *O conceito do infinito*. Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Disponível em:< http://www.difusaocientifica.com.br/artigos/Conceito_Infinito.pdf>. Acesso em: 07 de março de 2016.

ÁVILA, G . *Cantor e a teoria dos conjuntos*. Revista do professor de matemática, [S.l.], v. 43, n. 1, p. 6-14, 2000.

BACCARIN, F.L. *Conjuntos infinitos e suas surpresas: Uma sequência de atividades*. 2013. 89 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional– Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em:<bit.profmatsbm.org.br/xmlui/.../2011_00068_FABIO_LUIS_BACCARIN.pdf>. Acesso em: 17 de agosto de 2015.

BIANCONI, R. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2011. 141 p. Notas de Aula. Disponível em :< http://www.ime.usp.br/~mat/330/>. Acesso em : 02 de setembro de 2014.

BICUDO, I. Histórias Paralelas: o v postulado de Euclides e o Axioma da escolha. Revista Brasileira de História da Matemática, [S.l.], v.5, n° 9, p. 5-17, 2005.

BLASS, A. *Cohomology detects failures of The axiom of choice*. American Mathematical society, v. 279, n. 1, p. 257-269, set 1983. Disponível em : <http://www.ams.org/journals/tran/1983-279-01/S0002-9947-1983-0704615-7/S0002-9947-1983-0704615-7.pdf >. Acesso em : 04 de maio de 2015.

CARIELO, M. S. *Introdução à teoria ingênua dos conjuntos*. 2012. 5 f. Relatório da disciplina MS877 – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012. Disponível em:< vigo.ime.unicamp.br/Projeto/20121/ms877/ms877_Marcelo.pdf>. Acesso em: 17 de agosto de 2015.

FARJADO, R.A.S. *Lógica Matemática*. São Paulo : Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2012. 210 p. Notas de aula. Disponível em :< http://www.ime.usp.br/~fajardo/>. Acesso em : 17 de fevereiro de 2015.

FARJADO, R.A.S. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo : Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2012. 116 p. Notas de aula. Disponível em :<http://www.ime.usp.br/~fajardo/>. Acesso em : 17 de fevereiro de 2015.

HALMOS, P. R. *Naive Set Theory*. New York: New York-Verlag, 1974.

HEIN, N.; DADAM, F. *Teoria Unificada dos Conjuntos*. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to Set Theory*. 2. ed. New York: Dekker, 1984.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*, v.1. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*, v.7. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

KLINE, Morris. *O Fracasso da Matemática Moderna.* São Paulo, SP: Ed. Ibrasa, 1976

LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos Conjuntos*. Tradução de Fernando Vilain. Coleção Schaum. 1. ed. [S.l.]: Mcgraw-Hill do Brasil, LTDA, c1972.

LÖF, MARTIN . *100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it ?*. [S.l.], 2005. Disponível em: <people.kth.se/~kurlberg/colloquium/2005/MartinLooef.pdf> . Acesso em: 20 de outubro de 2014.

MARKARIAN, R. *A matemática na escola. Alguns problemas e suas causas*. Coleção explorando o ensino da matemática, [S.l], v.1, cap. 6, p. 275, 2004.

MEZABARBA, R. M. *Introdução a teoria ingênua dos conjuntos*. 2012. 155 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mato Grosso do Sul, 2011. Disponível em:< https://fernandobatista89.files.wordpress.com/2013/03/uma-introduc3a7c3a3o-c3a0-teoria-axiomc3a1tica-dos-conjuntos.pdf>. Acesso em: 13 de maio de 2015.

MOORE, G. H. *Zermelo's Axiom of Choice*: Its Origins, Development, and Influence. 1. ed. New York: Dover Publications, Inc, 2013.

MOREIRA, C. G. *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

O'CONNOR, J; ROBERTSON, E. *Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo*. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews.Scotland, fev 1999. Disponível em:< http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Zermelo.html>. Acesso em: 07 de março de 2016.

PONTE, J.P. *Investigações matemáticas em Portugal*. Investigar em Educação, n.2, p.93-169, 2003.

PRITISH, K. *Axiom of choice*. [S.l.] , 2011. Disponível em:<http://www.mit.edu/~pritish/kamath_axiom_of_choice.pdf>. Acesso em: 04 de maio de 2015.

RUBIN, H.; RUBIN J. Equivalents of the Axiom of Choice, 2.ed. Amsterdan: North-Holland Publishing Company, 1963.

RUSSELL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Tradução de Augusto J. Franco de Oliveira. 1. ed. Évora: CEHFC/EU, 2006.

SAMPAIO, P. *Infinito: uma história a contar*. Revista Millenium, [S.l.], n. 34, p.205-222, 2008. Disponível em:< http://revistas.rcaap.pt/millenium/article/view/8368/5957>. Acesso em: 07 de março de 2016.

SANCHIS, R. *O axioma da escolha, o lema de Zorn e o teorema de Zermelo*. [S.l.]. Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~rsanchis/AxiomaEscolha.pdf>. Acesso em: 02 de setembro de 2014.

SILVEIRA, M. *“Matemática é difícil”: Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos*, 2002. Disponível em: <http://www.anped.org.br/25/marisarosaniabreusilveirat19.rtf>. Acesso em 07 de março de 2016.

SOUZA, D.S. *História da teoria dos* conjuntos. In:______. *Teoria dos conjuntos no ensino fundamental: abordagem histórica*. Brasília:[s.n], 2005.p.2-4. Disponível em:<https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/DelsonSilvaSouza.pdf> . Acesso em: 17 de agosto de 2015.

SOARES, Flávia dos Santos. Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou retrocesso ? Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: PUC/RJ, Maio de 2001.

ANEXO – Monte castelo

Música: Monte Castelo

Legião Urbana

Composição: Renato Russo

Ainda que eu falasse
A língua dos homens
E falasse a língua dos anjos
Sem amor eu nada seria

É só o amor! É só o amor
Que conhece o que é verdade
O amor é bom, não quer o mal
Não sente inveja ou se envaidece

O amor é o fogo que arde sem se ver
É ferida que dói e não se sente
É um contentamento descontente
É dor que desatina sem doer

Ainda que eu falasse
A língua dos homens
E falasse a língua dos anjos
Sem amor eu nada seria

É um não querer mais que bem querer
É solitário andar por entre a gente
É um não contentar-se de contente
É cuidar que se ganha em se perder

É um estar-se preso por vontade
É servir a quem vence, o vencedor
É um ter com quem nos mata a lealdade
Tão contrário a si é o mesmo amor

Estou acordado e todos dormem
Todos dormem, todos dormem
Agora vejo em parte
Mas então veremos face a face

É só o amor! É só o amor
Que conhece o que é verdade

Ainda que eu falasse
A língua dos homens
E falasse a língua dos anjos
Sem amor eu nada seria