UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE (UFAC)
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

FRANCISCO MARCOS FERREIRA DOS REIS

UMA ABORDAGEM SOBRE A RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS E A TEORIA DOS GRAFOS PLANARES

RIO BRANCO-ACRE
SETEMBRO - 2018

FRANCISCO MARCOS FERREIRA DOS REIS

UMA ABORDAGEM SOBRE A RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS E A TEORIA DOS GRAFOS PLANARES

Artigo apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Acre; PROFMAT, de caráter profissional, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Manoel Domingos Filho

Rio Branco – Acre
2018

UMA ABORDAGEM SOBRE A RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS E A TEORIA DOS GRAFOS PLANARES

RESUMO

Este trabalho traça uma relação entre a Teoria dos Grafos Planares e a Relação de Euler para poliedros convexos. Apresentando uma sucessão de definições e argumentos, embasados em trabalhos de autores reconhecidos ou que fizeram contribuições significativas no âmbito da temática aqui abordada, com o intuito de demonstrar o Teorema de Euler para Poliedros Convexos.

Palavras chave: Mergulho; Isomorfismo; Homeomorfismo.

AN APPROACH ON EULLER'S RELATIONSHIP FOR CONVEX POLYESTS AND THE THEORY OF PLANAR GRAPHS

ABSTRACT

This paper draws a relation between the Theory of Planar Graphs and the Euler's Relation to convex polyhedra. This paper presents a series of definitions and arguments based on the work of renowned authors or those who have made significant contributions in the context of the subject matter, in order to demonstrate the Euler Theorem for Convex Polyhedra.

Key words: Diving; Isomorphism; Homeomorphism.

1. INTRODUÇÃO

Pretende-se com este trabalho **mostrar uma prova** da Relação de Euler para Poliedros Convexos utilizando-se unicamente as definições de **Imersão de um Poliedro em um Plano**, e a conceituação de **Planaridade em Grafos**. Tal apresentação está voltada para a utilização do conceito de grafo, e modela o problema da prova que geralmente é apresentada com ferramentas matemáticas de caráter mais algébrico ou geométrico.

Busca-se também mostrar a aplicabilidade da teoria dos grafos à geometria espacial e estimular o estudo da teoria dos grafos.

Para o leitor interessando em informações de cunho histórico o problema apresentado a Euller é vinculado a cidade de Königsberg, cortada pelo Rio Prególia, onde existiam duas ilhas que juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes, Discutia-se na cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma, e retornar-se a ponte de origem. Onde Euller, em 1736, concluiu que não existia caminho que possibilitasse tal passeio, solucionado este problema com o modelo de um grafo.

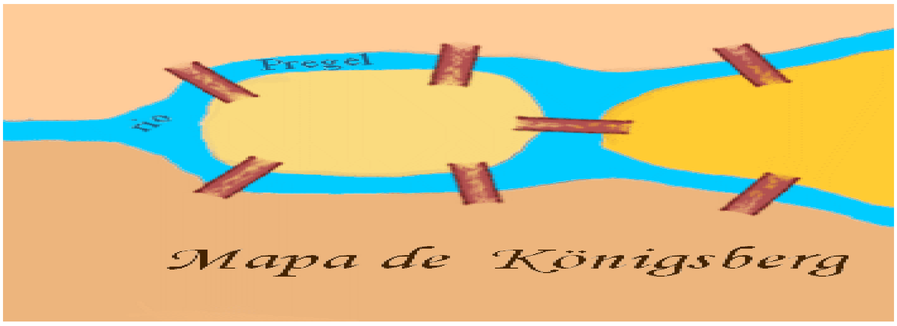


Figura – 1: Mapa ilustrativo da antiga cidade Konigsberg com suas duas ilhas e sete pontes, que desde 1946 é denominada Kaliningrado na Rússia

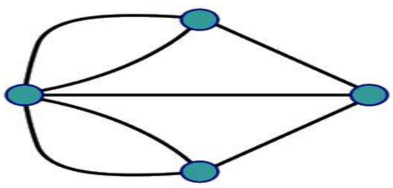


Figura – 2: Modelo com grafo de Euler para a representação do mapa de Konigsberg

A apresentação deste trabalho se dará inicialmente com uma apequena revisão sobre os poliedros convexos, em seguida são apresentadas as definições e proposições sobre grafos que são utilizadas para a demonstração da relação de Euler.

Tem-se a certeza que os aspectos teóricos aqui apresentados não desenvolvem teoria matemática nova, entretanto, busca-se apresentar tais resultados sob um novo olhar didático na apresentação dos conceitos e resultados alcançados, esperando ser esta a nossa principal contribuição.

Busca-se também observar todos os conceitos matemáticos necessários ao resultado final de modo seqüencial. Se, o leitor a partir dessa apresentação mostrar interesse sobre a teoria dos grafos, sugerimos consultar fontes especificas que se encontram no decorrer do texto

Assim, espera-se que os temas aqui levantados sirvam como estímulos para aplicações metodológicas, modelos que ajudem na absorção do conhecimento de forma mais didática possível no exercício da capacidade de abstração dos alunos na ocasião de aulas, dentre outros eventos expositivos de cunho científicos ligados os grafos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 – POLÍGONOS: PRINCIPAIS DEFINIÇÕES

Antes de fazermos qualquer tipo de afirmação sobre poliedros, faz-se necessária e coerente a apresentação de algumas definições acessórias para maior esclarecimento e compreensão ao que se objetiva com este trabalho sem maiores aprofundamentos, pois se parte do pressuposto de que o leitor já tem certo conhecimento de conceitos básicos relacionados ao estudo da geometria.

Definição (1): (Polígonos). Sejam A_1, A_2, A_3, A_4,..., An, uma seqüência de **n** pontos distintos de um plano sendo o natural **n** ≥ 3.

Suponhamos ainda que, os **n** segmentos de reta consecutivos:

$$A_1A_2;\ A_2A_3;\ A_3A_4;...;\ A_{n-1}A_n;\ A_nA_1$$

Definidos por estes pontos tenham as seguintes propriedades:

i) Nenhum par desses segmentos se intersecta, salvo em seus pontos extremos.

ii) Dois destes segmentos que tenham uma extremidade em comum, não são colineares, ou seja, não estão contidos em uma mesma reta.

Nestas condições a reunião desses **n** segmentos é denominada **polígono**.

Como ilustração apresento as figuras abaixo classificadas segundo a definição anterior:

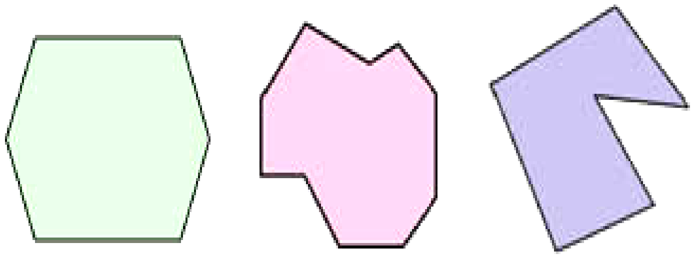


Figura – 3: Exemplos de figuras poligonais

As figuras (4) e (5); Apresentam ilustrações de figuras **que sob certas condições** podem não ser reconhecidas como polígonos

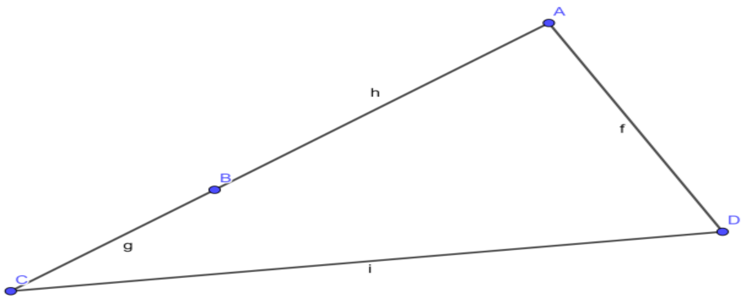


Figura – 4: O quadrilátero de vértices A, B, C, D não representa um polígono

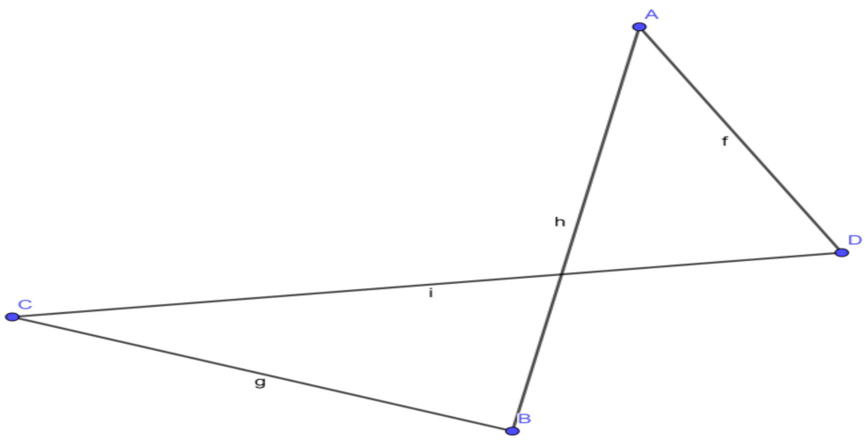


Figura – 5: O quadrilátero ABCD não representa um polígono

Observação: Veja que em conformidade com o que foi definido. A figura (4) não representa um polígono expresso pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$; Pelo fato de que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ serem colineares. Entretanto, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, e, $\overline{DA}$, expressam um triângulo que é notoriamente um polígono.

Perceba ainda que, na figura (4) em relação ao quadrilátero ABCD existem segmentos consecutivos e colineares simultaneamente. Em quanto na figura (5) no quadrilátero ABCD, existem segmentos não consecutivos se intersectando, condições rejeitadas pela definição.

Definição (2): Considere o polígono definido pela sequencia de pontos:

$A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$

Então:

1) Os pontos $A_1; A_2; A_3; A_4; \ldots; A_n$ são denominados vértices do polígono

2) Os $A_n\hat{A}_1A_2; A_1\hat{A}_2A_3; \ldots; A_{n-1}\hat{A}_nA_1$; São ditos ângulos internos

3) O segmentos, $\overline{A_1A_2}$; $\overline{A_2A_3}$; $\overline{A_3A_4}$; ...; $\overline{A_{n-1}A_n}$; São denominados lados do polígono

4) Se dois lados de um polígono possuem um vértice comum. Então esses lados são consecutivos, ou seja, lados consecutivos não podem ser colineares.

5) E ainda, lados consecutivos não podem se intersectar.

6) Um polígono de **n** vértices, tem **n** lados e **n** ângulos internos.

7) O valor da soma dos **n** lados de polígono é dito **perímetro** desse polígono.

8) Um polígono divide o plano que o contém em duas regiões; Uma **região limitada** geralmente descrita como interior do polígono; E outra **região não limitada**, descrita como exterior ao polígono, veja a figura (6).

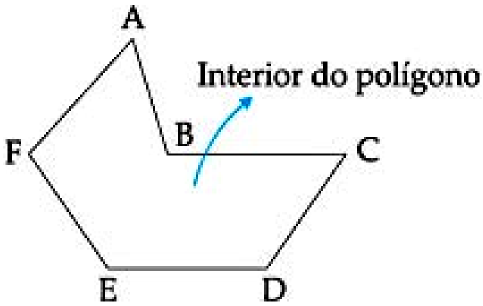


Figura – 6: Exemplo de região interior a um polígono, ou região poligonal

Dadas as informações apresentadas sobre polígonos até aqui, vejamos uma definição que estabelece o que vem a ser um polígono convexo.

Definição (3): (Convexidade) Diz-se que um polígono é **convexo** se para alguma reta suporte dos lados desse polígono, esta reta deixa todo o polígono em um dos semiplanos por ela definidos. Caso contrário o polígono é dito **não convexo**, ou **côncavo**. Veja figura (7).

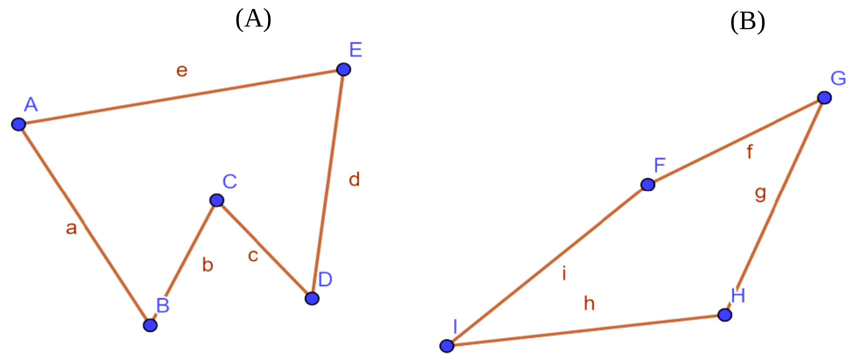


Figura – 7: (7A) polígono não convexo; (7B) polígono convexo

Em (A), vê-se um polígono **não convexo,** enquanto que em (B) vemos um **polígono convexo**. Faz-se importante mencionar que considerando a definição a seguir podemos apresentar outra definição para polígonos convexos ou não convexos, entretanto não se está sugerindo que uma ou outra é melhor, faço a apresentação pela importância topológica do conceito de região limitada e ponto interior a uma região limitada.

Definição (4): Define-se região poligonal à **reunião de um polígono com seu interior**.

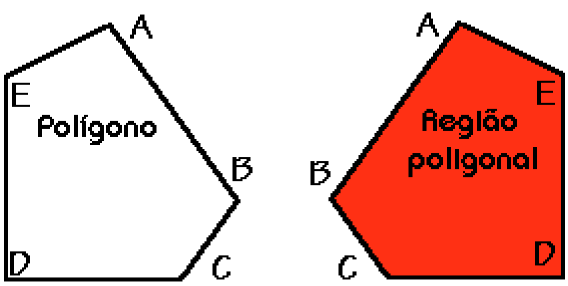


Figura – 8: Visualização do polígono como contorno de uma região poligonal

Definição (5): Um polígono é dito convexo se, para dois pontos distintos quaisquer de sua região poligonal o segmento de reta que tem como extremidades estes pontos sempre é interior a esta região.

É de primordial importância, no sentido de melhor formalizar algumas conclusões que se pretende apresentar com este trabalho que estamos tomando como verdade que.

Corolário (1): Se um polígono é o contorno de uma região poligonal. Pela definição (4), todo subconjunto de pontos dessa região é interior ao polígono.

Depois desta última proposição, já dispomos de fundamentações teóricas para apresentar uma possível definição para sólidos geométricos do espaço tridimensional, denominados **poliedros.** Pois de modo pouco formal e mais intuitivo pode-se entender poliedros como formas equivalentes aos polígonos, entretanto, em uma espaço como uma dimensão a mais.

A rigor não se tem uma definição específica do que vem a ser um poliedro, sendo por muitas vezes necessário estabelecer critérios ou concessões para que se apresentar uma definição mais coerente.

Contudo, o leitor deve está se perguntando sobre qual a finalidade deste encaminhamento dos conceitos aqui apresentados. Uma resposta bastante objetiva para esta indagação é apresentada a seguir, após definir-se formalmente o que é um grafo. Veremos que poliedros podem ser considerados como grafos não planos, e que grafos na realidade são certos tipos de diagramas compostos por pontos e segmentos de reta que ligam estes pontos. Assim, é importante perceber que cada uma das faces de um poliedro é na realidade uma região poligonal que tem em seu contorno pontos e segmentos de reta que ligam estes pontos.

Portanto, toda esta abordagem inicial se justifica, pois se pretende com esse procedimento introdutório, garantir uma melhor absorção por parte do leitor no tocante ao tema aqui defendido.

Segundo o professor, Eduardo Wagner (2015), cabe ao educador zelar pelo cuidado ao apresentar uma definição aceitável para este tipo de sólido.

2.2 - POLIEDROS

Segundo Wagner (2015) Diz-se que um poliedro é um sólido formado por uma reunião de uma quantidade finita de polígonos planos, onde cada lado de um polígono também é lado de um, e apenas um outro polígono, em que na superfície desse sólido sempre se pode traçar um caminho de um ponto interior a um desses polígonos a outro ponto interior de outro polígono atravessando apenas lados de polígonos.

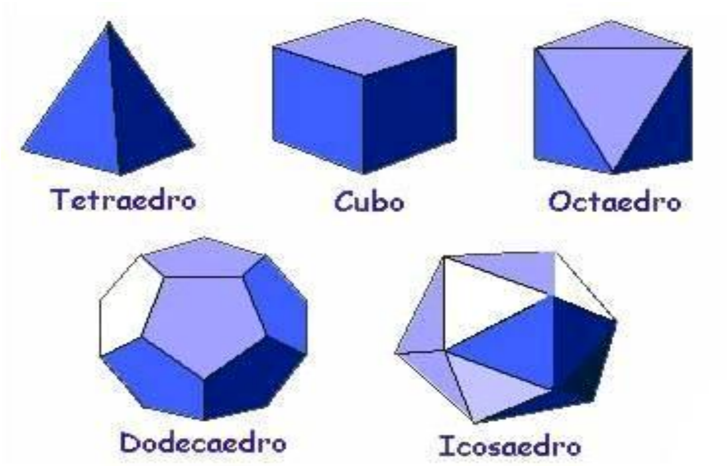


Figura – 9: Exemplos de poliedros convexos

2.3 - POLIEDROS CONVEXOS E NÃO CONVEXOS

De modo semelhante ao que foi definido sobre convexidade para polígonos, vejamos a definição (6), que firma o mesmo conceito para poliedros.

Definição (6): Dado um poliedro arbitrário, diz-se que este **é convexo** se para toda reta do espaço que o atravessa (passa por sua região interior) intersecta apenas duas de suas faces. Em caso contrário o poliedro será dito **não convexo**.

Outra forma de se definir poliedros convexos, equivalente a que foi mostrada acima é: Um poliedro é dito convexo se, para todo plano que contenha qualquer uma de suas faces, este plano divide o espaço em dois subespaços de modo que o poliedro está contido em apenas um deles.

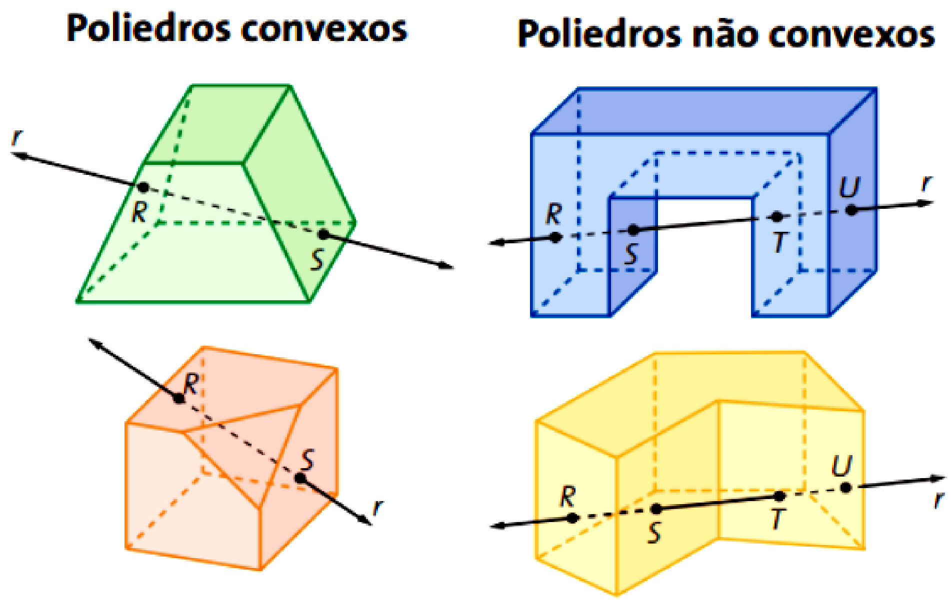


Figura – 10: Primeira definição referente à classificação de poliedros quanto a sua convexidade (reta que passa pela região interior)

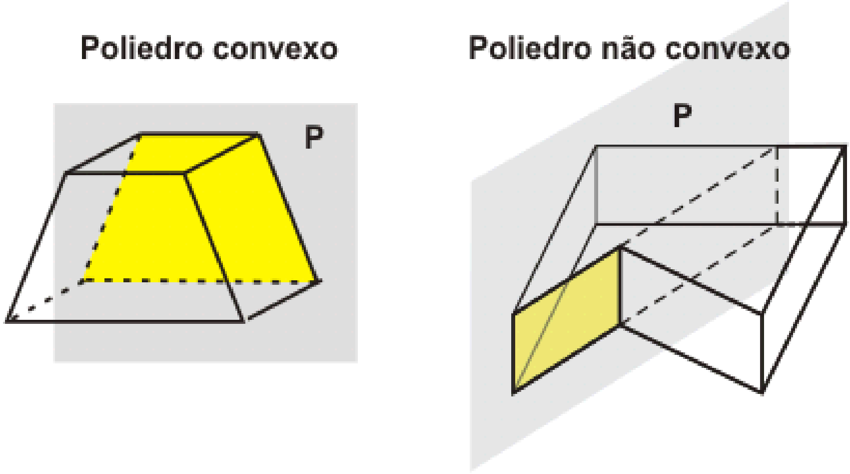
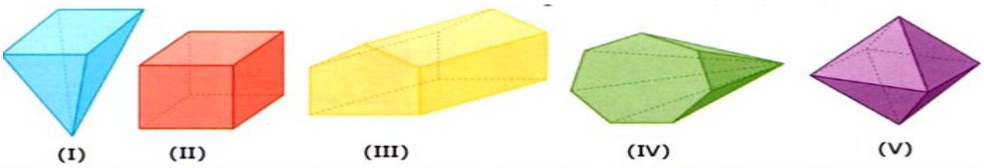


Figura – 11: Segunda definição referente à classificação de poliedros quanto a sua convexidade (plano que contem uma face)

Todo poliedro é composto pelos seguintes elementos:

- **Faces (F)**: São os polígonos que formam sua superfície.
- **Arestas (E)**: São os lados ou segmentos de reta de cada uma das faces.
- **Vértices (V)**: Conjunto de pontos de intercessão entre um par de arestas.

Veja a tabela abaixo com algumas ilustrações de **poliedros convexos** e seus respectivos números de arestas, vértices, e faces.



Poliedro	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas
(I)	5	5	8
(II)	6	8	12
(III)	7	10	15
(IV)	8	8	14
(V)	8	6	12

Tabela – 12: Elementos de cada um dos poliedros; (I), (II), (III), (IV), (V)

Analisando a tabela acima se pode intuitivamente perceber uma relação entre os números de faces, arestas, e vértices. Tal relação pode ser escrita genericamente do seguinte modo

$V + F - E = 2$

Esta relação é conhecida na matemática por Relação de Euler para poliedros convexos, ou em contextos em que se utiliza mais fortemente o rigor matemático, esta relação também é dita Característica de Euler. Aqui, neste trabalho, a demonstração dessa relação sob um ponto de vista não usual nos estudos de geometria no espaço é o principal objeto a ser apresentado.

Para tanto ainda se fazem necessárias alguma informações e definições que não aparecem com freqüência nas grades de conteúdos para as disciplinas de geometria, fundamentalmente a nível médio.

Um delas é o conceito de **Grafo**, especificado e detalhado mais adiante; Assim como o conceito de **Mergulho de um Poliedro Convexo no Plano**, o que agora já temos fundamentação teórica suficiente para apresentarmos.

Definição (7): Sendo (P) um poliedro convexo, define-se **mergulho** deste poliedro em um plano (α) arbitrário, a uma função bijetora "f" que a cada vértice de (P) associa um ponto em (α), de modo que a relação de adjacência dos vértices com as arestas a que conectam é preservada.

Ou seja, como todo poliedro convexo é um subconjunto limitado no espaço, pelos polígonos que formam sua superfície em $\mathbb{R}^3$, podemos definir:

Definição (8): Se X e Y são conjuntos denominados espaços topológicos, então

a) Dizemos que uma função f: X $\rightarrow$ Y, é um homeomorfismo, se (f) é bijetora, e tanto (f) como sua inversa (f^{-1}) são contínuas.

b) Dizemos que f: X $\rightarrow$ Y, **é um mergulho** se, (f) é um homeomorfismo entre X e o subespaço f(X) de Y.

Para termos uma idéia geométrica do significado desta última definição veja as figuras, (13A) e (13B) baixo. Em que, na figura (13A) a projeção do cubo no plano horizontal representa um mergulho desse sólido no referido plano, pois a relação de adjacência dos vértices com as arestas é preservada.

Por outro lado, na figura (13B) em que existem duas projeções distintas do prisma regular convexo, uma no plano vertical que representa um mergulho, e outra no plano horizontal que não pode ser definida como mergulho pelo fato de não preservar a relação de adjacência entre vértices e arestas, o que significa que a função que a cada vértice e aresta no poliedro associa um ponto e um segmento no plano não é bijetora. Com isso, pode-se concluir que na realidade todo mergulho de poliedro convexo em um plano é também uma projeção desse sólido, mas a recíproca, no entanto, não é verdadeira. Ou seja, nem toda projeção desse tipo pode representar um mergulho no plano.

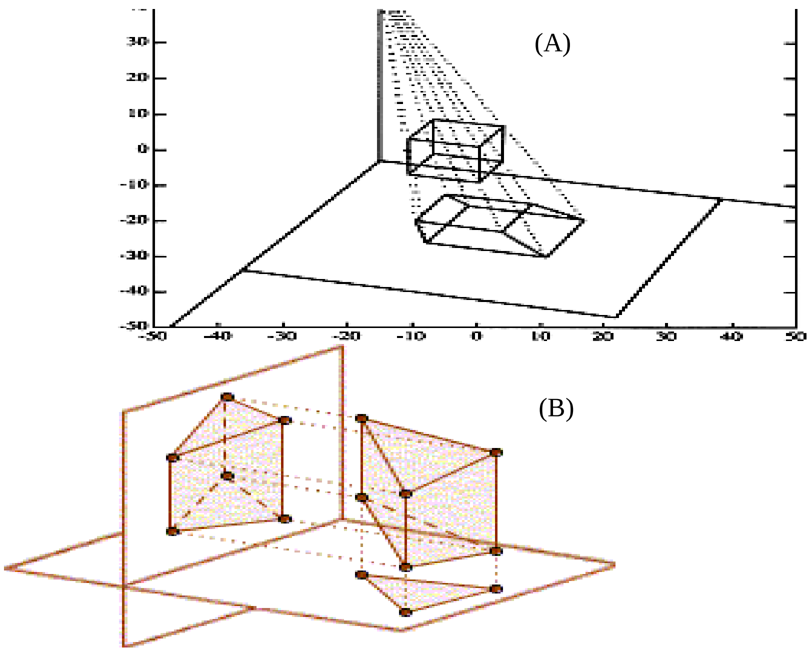


Figura – 13: Exemplos de projeções de poliedros convexos no plano

2.4 – GRAFOS

2.4.1 TIPOS E CLASSIFICAÇÃO DE GRAFOS

A seguir apresenta-se a definição do objeto matemático em foco neste trabalho, que é a idéia de grafo.

Definição (9): Um grafo G = (V, E, P_G) consiste em "V", um conjunto não vazio de vértices, e "E" um conjunto de arestas, com P_G uma relação de incidência que associa a cada aresta um par não ordenado de vértices de G não necessariamente distintos. Podendo ser representado graficamente usando-se pontos ou vértices e arcos ou segmentos de retas como arestas, conforme ilustra a figura (14):

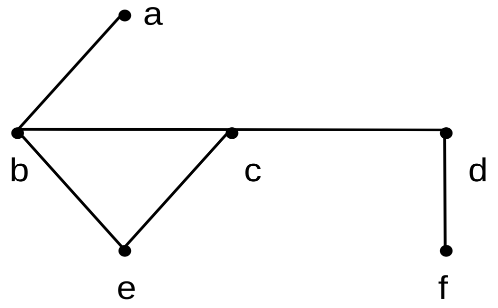


Figura – 14: Exemplo de um grafo

Com isso, se **e** é uma aresta e **u**, **v** vértices, onde **e** $\in$ **E,** e **u** e **v** $\in$ **V**, tais que P_G (e) = uv. Então se diz que esta aresta conecta os vértices, e estes vértices são extremidades da aresta citada.

Vale ressaltar um ponto bastante relevante neste momento, apesar de que sob um primeiro olhar, nos parece bastante óbvio que, como todo diagrama pode ser entendido como a representação esquemática feito através de gráficos, de linhas, de pontos. Então, certos tipos de **diagram**a podem representar grafos . Com isso, é natural imaginarmos que para um determinado grafo, devem existir mais de um diagrama que o represente.

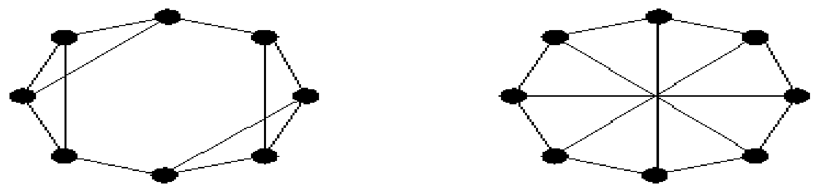


Figura – 15: Diagramas diferentes que representam o mesmo grafo

As extremidades de uma aresta (vértices) são ditas incidentes à aresta, e vice-versa. Dessa maneira dois vértices distintos são denominados adjacentes quando são incidentes a uma mesma aresta e duas arestas distintas que são incidentes ao mesmo vértice serão denominadas arestas adjacentes.

Definição (10): Um grafo no qual cada aresta **e** conecta dois vértices diferentes e duas arestas nunca conectam o mesmo par de vértices é chamado de **grafo simples** (Figura – 16A), do contrário se o grafo possui arestas múltiplas conectando o mesmo par de vértices são ditos **multigrafos** (Figura – 16B).

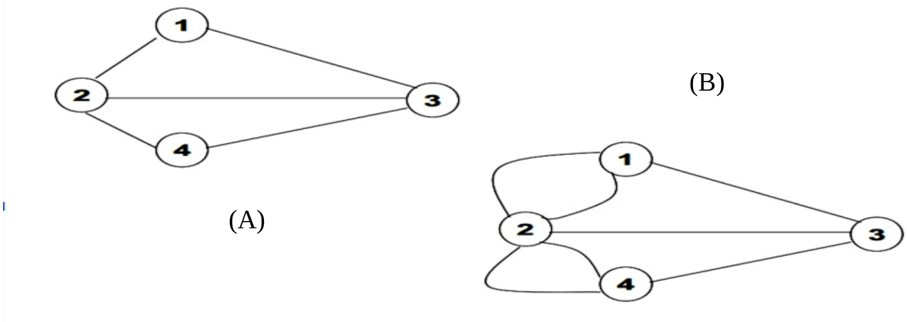


Figura – 16: (16A) Vê-se um Grafo Simples. Enquanto que na Figura (16B); Vemos um multigrafo

Assim, quando existem “m” arestas diferentes associadas ao mesmo par não ordenado de vértices (u, v), diz-se que (u, v) é uma **aresta de multiplicidade m**. Pode-se pensar neste conjunto de arestas como um conjunto de (m – 1) cópias diferentes de uma aresta (u, v).

É importante ressaltar que um grafo pode ser classificado como **orientado**, ou **não orientado**. Um grafo **orientado** tem suas arestas orientadas indicando um sentido adotado para se percorrer, de uma extremidade sua, a outra extremidade.

Ou seja, se o par (e, c) representa uma aresta qualquer de um grafo em que suas extremidades são os vértices **e, c**, vale que (e, c) ≠ (c, e), do contrário o grafo é classificado como **não orientado**. Neste trabalho, será observado o estudo com grafos **não orientados**.

(A) (B)

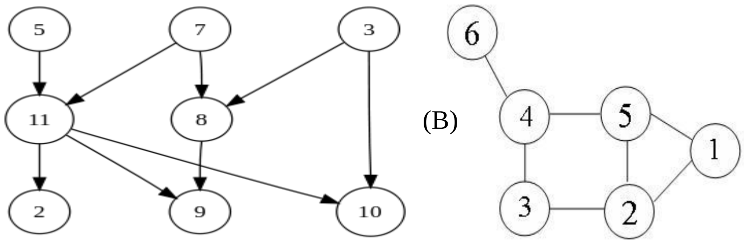


Figura – 17: (17A) Temos a imagem de um grafo orientado. Em (17B), vemos um grafo não orientado

Segundo Rosen (2009) o conjunto de vértice V de um grafo G pode ser infinito. Um grafo com um conjunto infinito de vértices é chamado **grafo infinito** e, de modo semelhante, um grafo com um número finito de vértices é chamado de **grafo finito**. Aqui neste trabalho abordaremos apenas os grafos finitos.

Se precisarmos incluir em um grafo arestas que conectem vértices a si mesmos, estas arestas são chamadas de **laços**. Os grafos que possuem multiplicidade de arestas e laços são geralmente chamados de **pseudografos**.

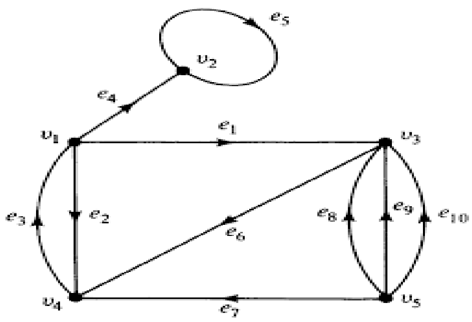


Figura – 18: Exemplo de pseudografo em que a aresta $\mathbf{e_5}$ é um laço, e $\mathbf{e_8}$, $\mathbf{e_9}$, $\mathbf{e_{10}}$ são arestas múltiplas.

2.4.2. TERMINOLOGIA BÁSICA

Aqui apresentaremos a terminologia mais utilizada nas referencias concernentes a este tema.

Definição (11): Um vértice **v** de um grafo não orientado é adjacente a outro vértice distinto, se houver uma aresta que os una.

Observação: Em geral em um grafo **não orientado** não se representa **laços**, estas representações dependem do que o diagrama do grafo vai modelar, e da intenção de autores do tema, em casos que se necessita representar situações específicas. Para atingir o que objetiva este trabalho, será considerado o estudo dos grafos não orientados e sem laços.

Definição (12): Um grafo simples (Q) é dito **completo** e denotado por **K** se todo vértice de (Q) é adjacente aos demais vértices.

Nestes termos, um grafo **completo** com número de vértices igual a **n** é denotado por $\mathbf{K_n}$, como se vê a seguir:

(A)

(B)

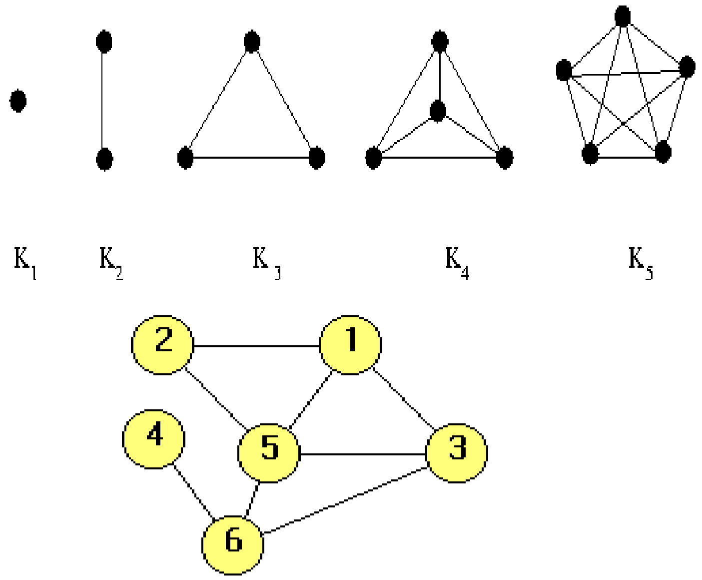


Figura – 19: Em (19A) grafos completos; Enquanto em (19B) vemos um grafo não completo

Veja que K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 formam uma sucessão de grafos completos, pois dado um de seus vértices, este é sempre adjacente aos demais. Enquanto em (19B) tomando-se um vértice qualquer nem sempre este vértice será adjacente aos restantes, por este fato não pode ser dito completo

2.5 - SUBGRAFOS

A fim de deixar mais clara as definições seguintes, lembramos ao leitor o conceito de uma **função com restrição ao seu domínio**.

Definição (13): Sendo **A, B** e **X** conjuntos não vazios tais que existe uma função **f** de **A** em **B**. Chamaremos de **restrição** de **f** em relação a **X**, a função **f |** da forma:

$f: X \subset A \rightarrow B$; Onde também se denota.

$f|_X: X \to B$, onde $f|(x) = f(x)\ \forall\ x \in X$.

A definição (13) apresentada tem enorme significância quando se pretende chegar a conclusões a respeito de um grafo estudando apena uma de suas regiões isoladamente. Pois, como todo grafo depende da existência a uma relação de incidência, ou função de incidência, que associa arestas e vértices. Qualquer subconjunto de aresta e vértices deste grafo, ou seja, qualquer subgrafo integrante de um grafo arbitrário fica submetido a esta mesma relação de incidência.

Definição (14): Dados dois grafos, G e H, diz-se que H é um **subgrafo** de G (e denota-se por $H \subseteq G$), se os conjuntos $V(H) \subseteq V(G)$, e ainda $E(H) \subseteq E(G)$, com P_H uma **restrição** de P_G ao conjunto E(H). Ou seja, se **e** é uma aresta de H, então:

$P_H(\mathbf{e}) = P_G(\mathbf{e})$.

e ainda;

$P_G|_{E(H)}$; $E(H) \to V(G) \times V(G)$

$e \to P_G|_{E(H)}(e) = P_G(e)$

i) Com isso, é convencional se representar $H \subseteq G$, quando se pretende dizer que H é **subgrafo** de G.

ii) Se, $H \subseteq G$, e $H \neq G$, dizemos que H é **subgrafo próprio** de G.

iii) Se, H é subgrafo de G. Então G é **supergrafo** de H.

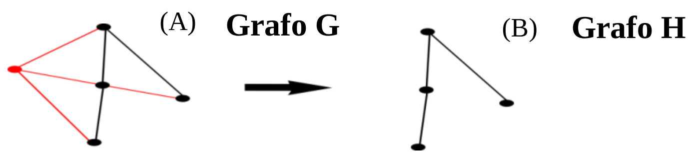


Figura – 20: Exemplo de um subgrafo H (Figura - 20B), de um grafo G (Figura – 20A)

2.6 - GRAFOS BIPARTIDOS

Definição (15): Um grafo Q é **bipartido** se existir uma partição do conjunto de vértices de Q, em dois conjuntos disjuntos X e Y (uma bipartição), tal que não existem arestas entre qualquer par de vértices de X, e nem entre qualquer par de vértices de Y. Em outras palavras quaisquer arestas de Q tem uma extremidade em X e a outra em Y.

Definição (16): Um grafo é **bipartido completo** se for simples e bipartido em (X,Y) conjuntos em que cada vértice de X é adjacente a cada vértice de Y.

Sendo | X | = (cardinalidade do conjunto de vértices de X) = m. E de modo análogo, | Y | = (cardinalidade do conjunto de vértices de Y) = n. Então se denota este grafo bipartido por $\mathbf{K_{m,\,n}}$. Veja as figuras abaixo:

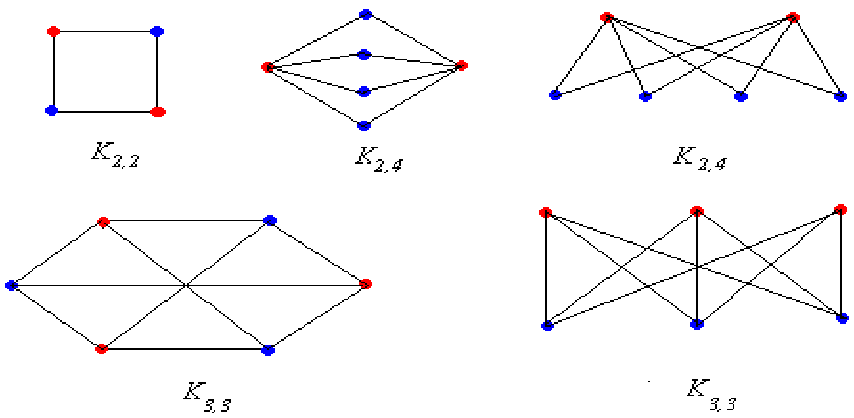


Figura – 21: Exemplos de grafos bipartidos

Proposição (1). Se, Q é um grafo bipartido completo. Então, existe apenas uma partição do conjunto de vértices desse grafo denotada por (X, Y).

Demonstração: Seja Q um grafo bipartido completo. Supomos que (X, Y), e (X', Y') são bipartições de Q fixamos um vértice $\mathbf{v} \in \mathbf{V(G)}$ qualquer.

Dessa forma, sem perda de generalidade se $\mathbf{v} \in X$ e sabendo que Q é um grafo bipartido completo, temos que:

i) $X = \{u \in \mathbf{V(Q)};$ e a aresta $uv \notin \mathbf{E(Q)}\}$

ii) $Y = \{w \in \mathbf{V(Q)};$ e a aresta $wv \in \mathbf{E(Q)}\}$

Por outro a bipartição (X', Y') é uma bipartição de Q, o que nos permite supor que $\mathbf{v} \in X'$, então:

iii) $X' = \{u \in \mathbf{V(Q)};$ e a aresta $uv \notin \mathbf{E(Q)}\}$

iv) $Y' = \{w \in \mathbf{V(Q)};$ e a aresta $wv \in \mathbf{E(Q)}\}$

Onde concluímos que: $X = X'$; e $Y = Y'$. ■

Definição (17): Dado um grafo G = (V, E, P_G), dizemos que o **grau de um vértice "v"**, com v $\in$ V(G), denotado por $\mathbf{d_g(v)}$, **como sendo o número de arestas de G incidentes a v**.

Definição (18): Um grafo G é **k-regular,** se todos os seus vértices têm grau igual a **k**, e é dito **regular** se for k-regular para algum k.

Um exemplo trivial de grafos k-regular é caso particular para k =0, o que nos fornecesse o grafo nulo ou 0-regular (grafo que não possui arestas)

2.7 - GRAFOS IGUAIS E GRAFOS ISOMORFOS

Nesta seção, vamos estabelecer as condições para que dois grafos sejam ditos iguais ou equivalentes.

Definição (19): Dois grafos G = (V(G), E(G), P_G); H = (V(H), E(H), P_H), **são iguais se**; V(G) = V(H); E(G) = E(H); e $P_G = P_H$.

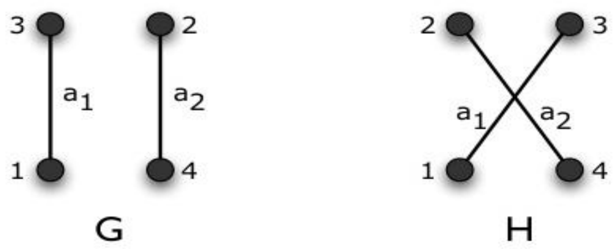


Figura – 22: G e H são grafos iguais

Definição (20): Dois grafos G e H são **isomorfos** se existirem funções bijetoras

f e **g**, tal que:

f: V(G) → V(H); g: E (G) → E(H);

Em que P_G (e) = uv, se e somente se, P_H (g(e)) = f(u)f(v), em que **uv**, **f(u)f(v)** são arestas.

Assim, tomando o par de funções (f, g) é chamado de par de isomorfismo entre G e H. Lembrando pelo que se define matematicamente como função é necessariamente uma relação entre dois conjuntos, a funções **f** e **g** citadas estabelecem uma relação de equivalência entre G e H. Com isso, sempre se pode denotar dois grafos isomorfos como equivalentes (G ~ H).

Assim, ao dizermos que os grafos G, H, e L são isomorfos corresponde a dizer que são equivalentes, e valem as propriedades.

i) G ~ G

ii) Se, H ~ G. Então H ~ G

iii) Se, G ~ H e H ~ L. Então H ~ L

Quanto aos grafos simples em que suas arestas se definem por seus respectivos extremos, a relação de isomorfismo fica resumida a bijeção existente entre seus receptivos conjuntos de vértices que preserva a adjacência.

Outra conseqüência natural dessa definição é que o isomorfismo preserva o grau dos vértices já que **f** e **g** são bijetoras.

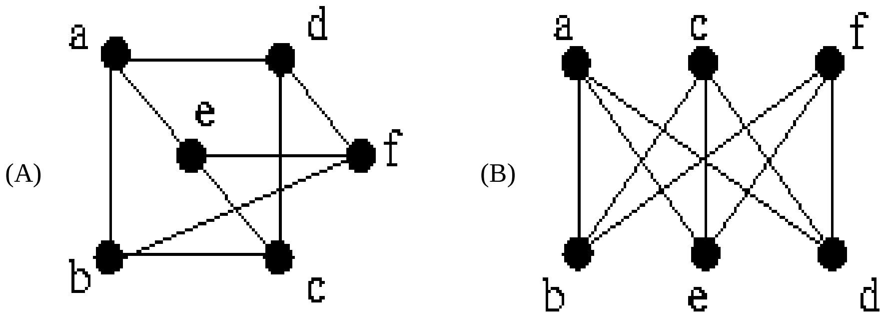


Figura – 23: As figuras (23A) e (23B) mostram grafos isomorfos

2.8 - PASSEIOS, CAMINHOS E TRILHAS

Definição (21): Dado um grafo G, chamaremos de **passeio** a toda seqüência não vazia **S** da forma:

S = (v_0e_1 v_1e_2 $v_2e_{3\ldots}$ e_k v_k), para algum k natural.

Onde;

i) (v_0, v_1, v_2 $_{\ldots,}$ v_k) ∈ V(G); (e_1, e_2, e_3, $_{\ldots}$ e_k) ∈ E(G);

ii) Os vértices, $\mathbf{v_{i-1}}$ e $\mathbf{v_i}$ são extremos da aresta $\mathbf{e_i}$. Como i = 1,2,3...,k

Em geral, se o passeio **S** possui todas as arestas distintas, este passeio recebe o nome de **trilha**. E ainda, se todos os vértices são distintos, essa trilha recebe o nome de **caminho**.

iii) Diz-se que um **circuito** é uma trilha fechada, ou seja, é uma trilha que contem pelo menos uma aresta tal que $v_0 = v_k$.

iv) Um **ciclo** ou caminho fechado é um passeio com pelo menos uma aresta, e em que não ocorrem repetições de vértices ou arestas, exceto os vértices inicial (v_0) e final (v_k)

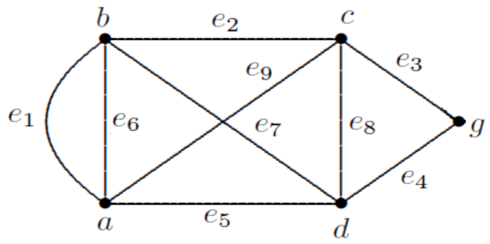


Figura – 24: Exemplo de grafo com passeio, trilha e ciclo

Na figura (19), podemos citar como exemplos:

Exemplo (1): **Passeio**; ($ae_1be_7de_8ce_2$)

Exemplo (2): **Trilha**; ($ae_6be_1ae_5de_7b$)

Exemplo (3): **Ciclo**; ($ae_9ce_3ge_4de_5a$)

Definição (22): (Conexidade) Um grafo G é dito **conexo**, se para quaisquer pares de vértices de (u, v) ∈ V(G), sempre existe um caminho que une u com v. Do contrários o grafo é denominado **desconexo**.

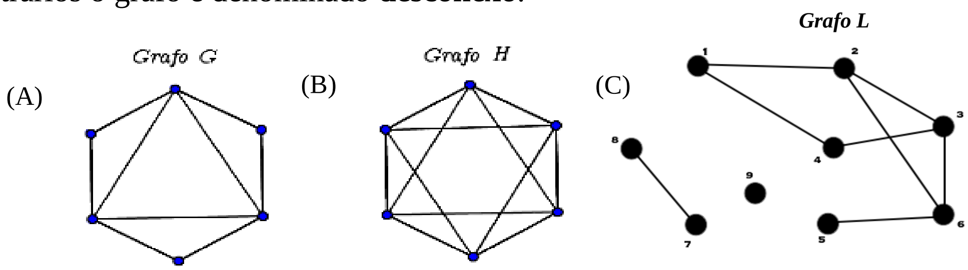


Figura – 25: (A) **G** é um grafo conexo; (B) **H** é um grafo mais fortemente conexo do que G; **L** é desconexo

2.8.1. HOMEOMORFISMOS ENTRE GRAFOS

É importante perceber-se que dadas as formas distintas de se representar um grafo, deve existir uma possibilidade de que mesmo que as representações sejam distintas estes grafos ainda tenham a mesma forma ou seja até mesmos iguais, a definição (23) apresenta a possibilidade de se transformar grafos em outros grafos.

Definição (23): Dado um grafo G conexo, uma **operação** denominada **inserção de vértices** é uma transformação que permite se criar um novo grafo G’’ inserindo-se novos vértices que subdividem arestas de G.

Definição (24): Dado um grafo G conexo, uma **operação** denominada **fusão de arestas** é uma transformação que permite se suprimir vértices de G, desde que estes nunca sejam comuns a duas arestas, criando-se um novo grafo G’’’onde as duas arestas que insidiam em cada vértice retirado agora formam apenas uma aresta em G’’’.

Com as definições apresentadas é bastante intuitivo e razoável se concluir que uma transformação é o oposto da outra

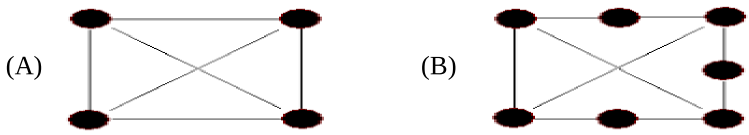


Figura – 26: Em (23B) temos um grafo obtido de (23A) por inserção de vértices, o que equivale dizer que em (23A) temos um grafo obtido de (23B) por fusão de arestas.

Definição (25): (Homeomorfismo de Grafos) Dois grafos **G e H** conexos são **homeomorfos**, se são isomorfos, ou tornam-se isomorfos por aplicações sucessivas inserção de vértices ou fusão de arestas.

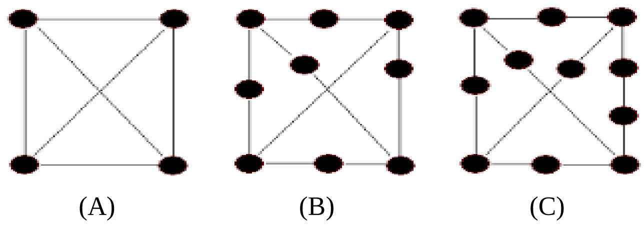


Figura – 27: Exemplos de grafos homeomorfos

2.9 - PLANARIDADE

Definição (26): (Rosen 2009). Diz-se que um grafo é planar se o mesmo puder ser representado por um diagrama no plano sem que arestas se cruzem, (em que um cruzamento de arestas é a intersecção de retas ou arcos que as representam, em um ponto diferente de sua extremidade comum).

Tal diagrama é chamado de **representação planar do grafo**. Assim, um grafo pode se chamar planar mesmo que ele seja usualmente representado com cruzamentos, desde que seja possível redesenha-lho de uma maneira diferente, sem cruzamentos. Veja a figura a seguir onde apresentamos o grafo K_4 de dois modos distintos em que no segundo evitamos que segmentos se cruzem:

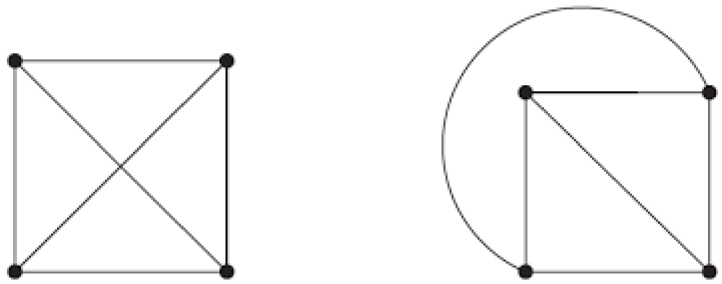


Figura - 28 – Duas possíveis representações de K_4

O grafo Q_3 mostrado abaixo também é planar, pois pode ser desenhado sem nenhum cruzamento de arestas como se pode ver abaixo:

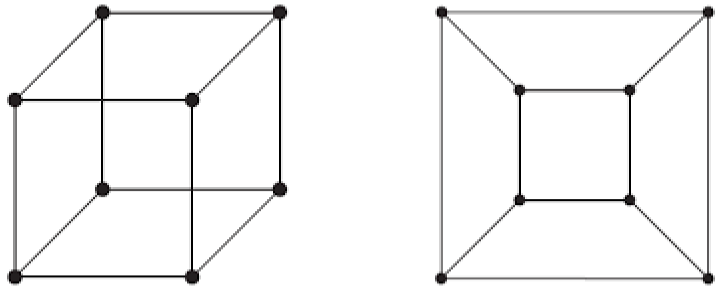


Figura - 29 – Duas possíveis representações de Q_3

Fazendo uma investigação mais minuciosa em relação ao modo de se identificar quando um grafo é ou não planar, não é difícil perceber que essa identificação se torna mais árdua quanto maior for o número de vértices do grafo estudado. O que nos leva a usar o teorema abaixo que estabelece uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja planar, demonstrado pela primeira vez em 1930 pelo matemático polonês Kuratowski.

TEOREMA DE KURATOWSKI

Um grafo é planar, se e somente se, não possui nenhum subgrafo isomorfo a K_5 ou a $K_{3.}$

Contudo, se faz muito importante justificar o interesse no estudo desse tipo de grafo, que de modo imediato está diretamente relacionado com a possibilidade de se estudar estruturas como os **poliedros convexos** que do ponto de vista da Teoria dos Grafos são grafos não orientados, não planos que sempre podem determinar um **homeomorfismo no plano** ou **mergulho no plano** do poliedro inicialmente tomado.

O **mergulho** de um grafo (que pode ser a representação planar de um poliedro convexo) é uma coleção de pontos e curvas em um plano que verificam as seguintes condições.

i) Cada vértice do grafo é associado a um ponto no plano.

ii) A vértices distintos são associados pontos distintos (ou seja, não há dois vértices aos quais seja associado o mesmo ponto).

iii) A cada aresta do grafo é associada uma curva no plano. S e a resta e = xy. Então os pontos extremos para curva e são exatamente os pontos associados a “x” e a “y”. Além disso, nenhum outro vértice se situa sobre esta curva.

Definição (27): Se todas as curvas são simples (não se cruzam a si mesmas) e se as curvas de duas arestas não se interceptam (exceto em uma extremidade, se ambas são incidentes com o mesmo vértice), então dizemos que o **mergulho é livre de cruzamentos**.

Com o embasamento de todas as definições apresentadas anteriormente, temos as ferramentas para discutirmos o objetivo principal desse trabalho, a seguir.

3. RESULTADOS

3.1 RELAÇÃO DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

Relação de Euler: Seja G um grafo simples planar e conexo, com **e** arestas, **v** vértices que represente a mergulho de um poliedro convexo no plano. E seja ainda r o número de regiões (ou faces) G. Então:

$r = e - v + 2$

Demonstração:

A direção lógica assumida para esta demonstração consiste em se gerar uma sucessão de grafos planares $K_1 = G_1, G_2, G_3, G_4 ..., G_n, G_{n+1} = G$; onde G_{n+1} é obtido de G_n acrescentando-se uma nova aresta a G_n , assumindo-se a existência dessa sucessão a demonstração será feita por indução sobre o número de arestas (e). Assim, tomamos a mais simples representação de um grafo planar, que denominamos por (K_1), em que o índice dessa representação indica a quantidade de vértices (v_1) do grafo. E, na realidade este grafo (K_1) corresponde a um único ponto no plano.

Para, o grafo K_1 vale que:

v_1 = (número de vértices de K_1) = 1

e_1= (número de arestas de K_1) = 0

r_1= (número de regiões ou faces de K_1) = 1

Assim, $e_1 - v_1 + 2 = 0 – 1 + 2 = 1 = r_1$

Hipótese de indução:

Consideramos agora que:

$r_n = e_n – v_n + 2$, para algum natural **n**.

Como G_{n+1} é G_n acrescido da aresta $e_{n+1} = \{v_n , v_{n+1}\}$. Temos aqui duas possibilidades:

O ponto (v_{n+1}) é vértice na representação planar de G_n, ou seja, se realiza uma conexão possível, mas inexistente em G_n que não preserve sua planaridade, e assim:

$e_{n+1} = e_n + 1$; $r_{n+1} = r_n + 1$; $v_{n+1} = v_n$

Logo:

$r_{n+1} = r_n + 1 = (e_n – v_n + 2) + 1 = (e_{n+1} – 1– v_{n+1} + 2) + 1 = e_{n+1} – v_{n+1} + 2$

Entretanto, G_{n+1} também pode ser obtido com o acréscimo de $e_{n+1} = \{ v_n , v_{n+1}\}$, onde v_{n+1} não é um vértice de G_n sem perda de generalidade, o que resulta em:

$e_{n+1} = e_n + 1$; $r_{n+1} = r_n$; $v_{n+1} = v_n + 1$

$\Rightarrow r_{n+1} = r_n = (e_n – v_n + 2) = (e_{n+1} – 1– v_n + 2) = (e_{n+1} – v_n + 1) =$

$= (e_{n+1} – v_{n+1} + 1 + 1) = e_{n+1} – v_{n+1} + 2$

Ou seja, a hipótese de indução se confirma em cada um dos casos possíveis, o que mostra a validade da tese.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em matemática sempre se faz necessário observar possíveis soluções de questões já conhecidas, sob um novo olhar, outro ponto de vista.

Pensando dessa forma, objetivou-se instigar o leitor a conhecer a utilização da Teoria dos Grafos para a demonstração de proposições de domínio público, como por exemplo, a que representa a parte principal desta obra. E que sempre se mostrou uma relação bastante útil, no estudo da geometria e de outras áreas da matemática.

Vale ressaltar que este trabalho não apresenta algo novo, esta mesma demonstração pode ser consultada pelo leitor em alguns dos referenciais bibliográficos apresentados. Pois, a utilização do conceito de grafo para modelagem em matemática apresenta ampla bibliografia difundida com enorme rigor e qualidade teórica.

Entretanto, o que se produz neste trabalho, é uma abordagem sequencial de conceituação objetiva que mapeia uma parte da teoria dos grafos traçando um caminho construtivo do conhecimento que pode propiciar a quem se interessa pelo tema, uma visão mais geral da correlação entre o estudo dos Poliedros Convexos e Grafos Planares.

Portanto, espero que esta produção venha a alcançar todas as pessoas que buscam e pesquisam sobre maneiras distintas de se pensar e fazer matemática, e que este trabalho venha a ajudar estudantes de matemática que estejam tentando encontrar uma introdução ao estudo dos grafos sob um aspecto mais didático, que aponte para abordagens mais aplicadas.

Contudo, destaca-se o rigor empregado como estrutura dessa teoria, que é reconhecida por matemáticos de todo o mundo, como uma área da matemática que muito tem ainda a oferecer.

Toda a pesquisa desenvolvida para a conclusão deste trabalho foi baseada na condição de se exprimir as ligações de tópicos do estudo dos grafos de modo mais claro, buscando-se sempre novas descobertas a respeito do tema, e atualizações para que a linguagem e a notação sempre se apresentassem mais contemporânea a fim de facilitar o acesso a estas novas informações.

5. REFERÊNCIAS

[1] Boaventura Netto, Paulo Oswaldo. – Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. 2 ed. – Edgard Blücher. São Paulo, SP. 2001

[2] Scheinerman, Edward R. Trad. (Farias, Alfredo Alves De). – Matemática Discreta; Uma introdução. 1ed – Editora Thomson. 2001

[3] Santos, Manoel Lázaro de Santana. Planaridade em grafos: Teorema de Kuratowski. Dissertação (mestrado em Matemática). Orientadora. Giovana Siracusa Gouveia. São Cristovão. São Paulo. SP. 2017

[4] Parreira, José Roberto Penachia. Poliedros e o Teorema de Euler. Dissertação (mestrado em Matemática). Orientador. Prof.Dr. Durval José Tonon. Universidade Federal de Goiás. 2014.

[5] Sat, Cristiane Maria. Homomorfismos de grafos. Dissertação (mestrado em Ciência da Computação). Orientador Prof.Dr. Yoshiharu Kohayakawa. Universidade de São Paulo. SP. 2008

[6] Guillemin, Victor. Pollack. Differential Topology. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs. New Jersej.Massachusetts. 1974

[7] Lima, Elon Lages. Lima, Paulo Cezar Pinto. Carvalho, Eduardo Wagner. Morgado, Augusto Cesar. A matemática do ensino médio. Vol. 02; 6 ed. - Rio de Janeiro.RJ. SBM. 2006

[8] Rosen, Kenneth. – Matemática discreta e suas aplicações. 6 ed. Mcgraw-Hill. 2009