



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Tiago Berto Soares

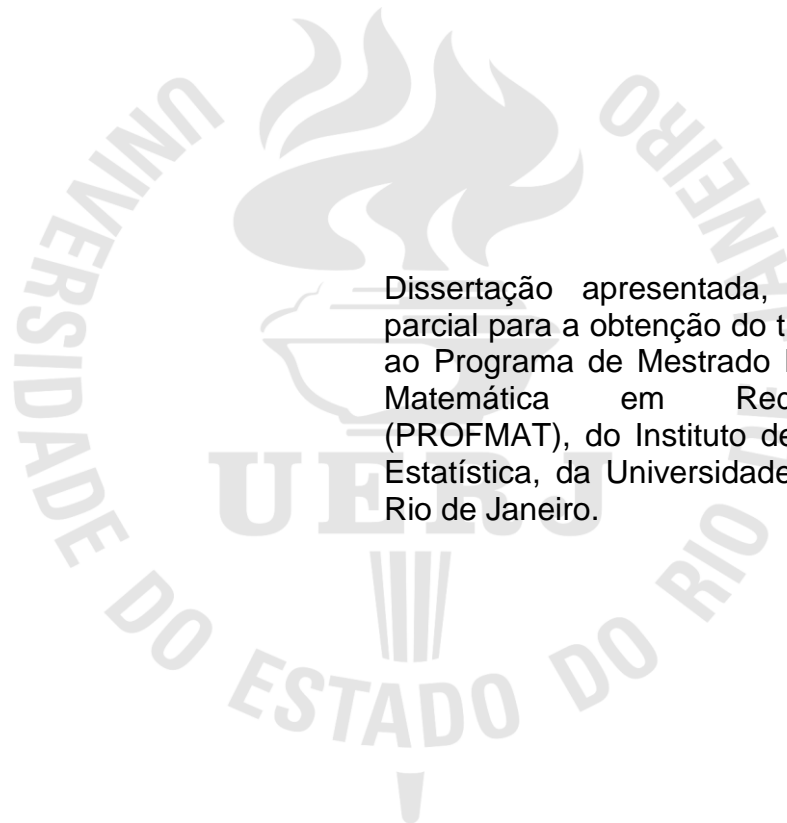
Mágicas e matemática

Rio de Janeiro

2017

Tiago Berto Soares

Mágicas e matemática



—Dissertação apresentada, com requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa

Coorientador: Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S676

Soares, Tiago Berto.

Mágicas e matemática / Tiago Berto Soares. - 2017.

71f.: il.

Orientador: Marcus Vinicius Tovar Costa.

Coorientador: Augusto Cesar de Castro Barbosa.

Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) -
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e
Estatística

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Jogos em educação
matemática - Teses. I.Costa, Marcus Vinicius Tovar. II.Barbosa, Augusto
Cesar de Castro. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto
de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 37:51

Rosalina Barros *CRB/7 - 4204* - Responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
deste projeto final.

Assinatura

Data

Tiago Berto Soares

Mágicas e matemática

Dissertação apresentada, com requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 24 de agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa - Orientador
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa - Coorientador
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dra. Aline Lima Guedes Machado.
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

A minha filha Giovanna, que tem sido minha fonte de inspiração, amor, esperança e toda minha razão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as conquistas e pela oportunidade de realizar esse trabalho.

Aos meus pais, Lusinete e Adilson, por sempre acreditarem que era possível, me incentivando a nunca desistir.

À minha esposa, Raquel, por estar sempre ao meu lado me encorajando e cuidando para que as coisas aconteçam da melhor maneira possível.

À equipe de professores da UERJ, em especial aos queridos professores Marcus Vinícius Tovar Costa, Augusto Cesar de Castro Barbosa e Claudia Ferreira Reis Concórdio que vêm tentando extrair o meu melhor.

Ao meu velho baralho, por ter sido um objeto importante para a construção desse trabalho.

Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente.

Leibnitz, 1715

RESUMO

Soares, Tiago Berto. **Mágicas e matemática**. 2017. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

Um dos grandes obstáculos no ensino-aprendizagem da Matemática é a falta de motivação dos alunos. A maioria dos estudantes têm uma certa rejeição pela disciplina e, isso de alguma forma, cria um bloqueio no processo de assimilação das informações lecionadas. É consenso que truques de mágica encantam pessoas do mundo inteiro, trazendo a atenção e despertando a curiosidade. Nesta dissertação de Mestrado, buscamos uma interseção entre a mágica e a Matemática, utilizando truques com a Matemática como fonte de inspiração e alternativa motivadora para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Utilizando-se de um jogo de cartas convencional, foi possível desenvolver um bom número de truques nos quais a Matemática está presente. Para cada um deles, construímos uma explicação matemática adequada. A fundamentação teórica em Educação Formal, Informal e Não Formal é formalmente apresentada, com o objetivo de enfatizar a importância na busca de alternativas em despertar o interesse em aprender Matemática. Fizemos uso da Engenharia Didática em todas as suas etapas como metodologia para a aplicação e desenvolvimento deste trabalho. Como produto final desta dissertação foi desenvolvido um *blog* apresentando todos os estágios deste trabalho.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem. Mágica. Engenharia Didática. Educação Formal, Informal e Não Formal.

ABSTRACT

Soares, Tiago Berto. **Magical and mathematical**. 2017. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

One of the major obstacles in Mathematics teaching-learning process is the lack of student motivation. Most students have a certain rejection of the subject and this, in some regard, is related to a lock in the content learning process. It is a general consensus that magic tricks delight people from all over the world, bringing attention and arousing curiosity. In this Master's dissertation, we seek to build a bridge linking *Magic and Mathematics*, making use of tricks with Mathematics as a source of inspiration and as an alternative motivation for learning the mathematical concepts. Using a conventional card game, it was possible to develop a good number of tricks, in which Mathematics is clearly present. For each one of them, we construct the adequate mathematical explanation. A theoretical foundation in Formal, Informal and Non-Formal Education is formally presented to emphasize the importance of searching for alternatives that aim to awaken student interest in learning Mathematics. For the application and evaluation of this work we make use of the Didactic Engineering methodology and all its stages. As a final product a blog was created with all the processes stages detailed.

Keywords: Teaching-Learning. Magic. Didactic Engineering. Formal, Informal and Non Formal Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O triângulo didático.....	21
Figura 2 – Baralho completo com 4 naipes e 13 cartas em cada naipe.....	32
Figura 3 – Carta virada para baixo (carta da esquerda) e carta virada para cima (carta da direita).....	33
Figura 4 – O baralho após sofrer um “corte” (Ato de dividi-lo em dois grupos de cartas)	33
Figura 5 – Um corte completo (Após o corte, o reagrupamento dos dois montes altera a ordem inicial).....	34
Figura 6 – O baralho dividido em 4 montes, sendo da esquerda para a direita, monte 1, monte 2, monte 3 e monte 4.....	34
Figura 7 – Nove cartas de espadas, em sequência de Ás a 9.....	35
Figura 8 – Visualização da sequência de cartas após um “corte completo”.....	36
Figura 9 – Resultado da primeira divisão das cartas em dois montes com o reagrupamento em seguida.....	36
Figura 10 – Resultado da segunda divisão das cartas em dois montes seguida por reagrupamento.....	37
Figura 11 – Resultado da terceira divisão das cartas em dois montes seguida por um reagrupamento.....	37
Figura 12 – Todas as cartas formando uma progressão aritmética com 52 termos de razão 1, dando destaque ao posicionamento das três cartas.....	41
Figura 13 – Progressão aritmética com 26 termos e razão (-2) e o posicionamento das cartas escolhidas.....	41
Figura 14 – Progressão aritmética com 13 cartas de razão 4 e o destaque no posicionamento das cartas escolhidas.....	42
Figura 15 – Progressão aritmética de 7 termos de razão (-8) destacando as cartas escolhidas.....	42
Figura 16 – Valor da carta e valor de cada naipe.....	45

Figura 17 – Quatro montes, o primeiro (da esquerda para a direita) com valor 3, o segundo com valor 5, terceiro com o valor 2 e o quarto com uma carta virada para baixo sobre ele.....	48
Figura 18 – Anotações no quadro (Parte 1).....	53
Figura 19 – Anotações no quadro (Parte 2).....	54
Figura 20 – Anotações no quadro (Parte 3).....	56
Figura 21 – Anotações no quadro (Parte 4).....	59
Figura 22 – Anotações no quadro (Parte 5).....	61
Figura 23 – Anotações no quadro (Parte 6).....	62
Figura 24 – Anotações no quadro (Parte 7).....	63
Figura 25 – Relato dos alunos sobre a experimentação.....	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PA	Progressão Aritmética
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
	Um pouco de História das Mágicas com Matemática.....	16
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
1.1	Didática	18
1.2	Jogos matemáticos na Educação Matemática	22
1.3	Sequências Didáticas	23
1.4	Engenharia Didática como Metodologia de pesquisa	24
1.4.1	<u>Etapas da Engenharia Didática</u>	25
1.5	Educação Formal, Informal e Não Formal	27
1.5.1	<u>Conceitos e Objetivos</u>	27
2	MÁGICAS COM MATEMÁTICA	31
2.1	Mágicas Matemáticas	31
2.1.1	<u>Apresentação de um baralho com 52 cartas</u>	31
2.2	Mágica número 1: Reorganizando as cartas (Potenciação)	34
2.2.1	<u>Revelando a mágica 1</u>	35
2.3	Mágica número 2: As três últimas cartas (Progressão aritmética)	39
2.3.1	<u>Revelando a mágica 2</u>	40
2.4	Mágica número 3: Número de cartas no monte do meio (Expressões Algébricas)	43
2.4.1	<u>Revelando a mágica 3</u>	44
2.5	Mágica número 4: A carta sorteada (Expressões Algébricas e Equações do 1° grau)	45
2.5.1	<u>Revelando a mágica 4</u>	46
2.6	Mágica número 5: O coração das cartas (Equação do 1° com duas Variáveis)	47
2.6.1	<u>Revelando a mágica 5</u>	48

3	APLICANDO ALGUMAS MÁGICAS	51
3.1	Aplicando a Mágica 1.....	51
3.2	Aplicando a Mágica 2.....	57
	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....	67
	REFERÊNCIAS.....	68

INTRODUÇÃO

A dificuldade dos professores em ensinar Matemática e dos alunos em aprender tem sido algo alarmante e um tanto desafiador. Sabemos que, de um modo geral, as aulas são apresentadas de forma clássica, onde o professor expõe o conteúdo de um determinado tópico, faz um exemplo e em seguida são feitos exercícios similares. Em geral, este tipo de abordagem não leva à construção do saber da forma mais adequada. Uma das possíveis alternativas para despertar o desejo em aprender Matemática é através de atividades lúdicas. Este trabalho trata de mágicas estruturadas com conceitos matemáticos. O importante, nessa perspectiva, é criar situações de aprendizagem com significado, pois assim o educando forma uma parceria entre a aprendizagem e o prazer. Para Gardner (1962), por exemplo:

“O elemento jogo, que torna divertida a matemática recreativa, pode tomar vários aspectos: um quebra-cabeça ao ser resolvido, um jogo de competição, uma mágica, paradoxo, falácia ou simplesmente Matemática com um toque qualquer de curiosidade ou diversão” (GARDNER, 1962, p.13).

Com as transformações tecnológicas e sociais, é natural esperar que ocorram mudanças também no processo ensino-aprendizagem. No entanto, as aulas de Matemática, de um modo geral, continuam sendo ministradas sem grandes mudanças significativas quando comparadas, por exemplo, com aquelas que eram ministradas no início do século passado. Por outro lado, constatamos um número considerável de alunos desinteressados e não participativos.

Será que a forma com que abordamos os conteúdos não seria também responsável por tal desinteresse ou a culpa é exclusiva dos alunos? Tentar abordar todos os elementos responsáveis pelo desinteresse dos alunos seria algo muito complexo, pois existem diversos fatores que prejudicam diretamente a aprendizagem em sala de aula. Propomos abordar a Matemática em sala de aula utilizando como ferramenta algo que atrai a atenção de muitas pessoas no mundo, a mágica. Com isso, não estamos postulando que os problemas com desinteresse se findarão, mas analisamos se a magia pode resgatar o interesse de alguns alunos que não entendem o porquê de se estudar Matemática.

No primeiro capítulo tratamos da fundamentação teórica apresentando uma introdução acerca da didática da Matemática, abordando tópicos como Transposição Didática definida por Chevallard (1985), Contrato Didático e Situações Didáticas definidas por Brousseau (1986, 2008). Em seguida, falamos sobre a importância dos jogos para o ensino da Matemática na visão de Moura (2002). Ainda nesse capítulo, definimos o que é uma sequência didática e, assim, introduzimos a Engenharia Didática, metodologia adotada ao longo deste trabalho, para aplicação das “mágicas”. Nela, vemos uma sequência didática aplicada em quatro etapas: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Como principais referências no assunto citamos os trabalhos de Artigue (1996) e Brousseau (2006).

Para falar de mágicas como elemento no ensino da Matemática fizemos um estudo sobre Educação Formal, Informal e Não Formal, uma vez que entendemos que um indivíduo pode aprender em diversos ambientes.

Neste trabalho, realizamos a construção de uma didática a partir das experiências adquiridas em sala de aula. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

“...é consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor conheça sua prática.” (PCN,1998,p.42)

No segundo capítulo, mostramos algumas mágicas e suas revelações apresentando os conceitos matemáticos a elas relacionados e a proposta de como aplicá-las em sala de aula, explorando assuntos como potenciação, progressão aritmética, expressões algébricas, equações do 1º grau e equações lineares de coeficientes unitários. Esses truques foram aplicados a uma turma de 1º ano do Ensino Médio em uma escola Estadual localizada em Duque de Caxias, RJ. Os professores dessa turma vinham, com frequência, se queixando dos alunos quanto à falta de atenção, desrespeito e total desinteresse. Desta forma, esta turma foi escolhida para que fosse experimentada uma didática alternativa à usual, visando uma possível melhora no rendimento desses alunos.

No terceiro capítulo, é tratado o desempenho e resultados obtidos com a aplicação das mágicas na forma de sequências didáticas e a validação das atividades. Foi realizada uma análise geral para entender se as hipóteses feitas na

análise a priori foram atendidas. As duas “mágicas” aplicadas na experimentação abordaram situações distintas, a primeira fala de um assunto já conhecido pelos alunos, potenciação, e a outra trata de um tema novo a ser estudado, progressão aritmética. Durante a aplicação dessas “mágicas”, fizemos um detalhamento sobre a aprendizagem através da aplicação dos truques, sua revelação com a exposição dos conceitos matemáticos e atividades propostas.

Um pouco de história das mágicas matemáticas

Os primeiros relatos da arte de criar ilusões registrados na história são do Egito, com cerca de 2000 a.C, onde um mágico chamado Dedi fazia truques nos quais colocava a cabeça em animais decapitados trazendo-os de volta a vida. Esses registros encontram-se em um papiro exposto no *Berlin State Museum*. Ao longo da história os mágicos tiveram momentos de altos e baixos pois, no período em que a Igreja ganhava força na Europa, fazer mágica era algo arriscado sendo considerado bruxaria. O primeiro livro sobre mágicas data do século XVI e foi escrito por um fazendeiro chamado Reginaldo Scot, da cidade de Kent, Inglaterra. Conta-se que ele estava tão cansado das cruéis condenações e de tudo que era ruim, associados a demônios e superstições, que resolveu estudar a arte das mágicas e acabou por escrever o livro *The Discovery of Witchcraft* (A Descoberta da Bruxaria)(1566-1625). Nesse livro ele explica alguns fundamentos da mágica. Quando o rei James VI assumiu o trono, na Inglaterra, ordenou que destruíssem todos os exemplares, por considerá-los profanos. No entanto, por sorte, alguns livros sobreviveram e podem ser encontrados até hoje.

Um pioneiro em associar mágicas à Matemática foi o matemático italiano Luca Pacioli (1445-1517), com a grande e inédita obra *De Viribus Quantitatis* (1496) que abordava problemas de recreação, problemas geométricos e provérbios. Muitos anos se passaram até o matemático e mágico Norman Gilbreath criar o chamado princípio de Gilbreath, princípio matemático exclusivo para truques com cartas onde uma organização entre as cartas se comporta com uma determinada propriedade. Na atualidade, podemos destacar o matemático e escritor americano Martin Gardner (1914-2010), um dos nomes que muito contribuiu para o ensino da Matemática de forma lúdica e que se tornou um especialista em matemática recreativa. Gardner escreveu cerca de 70 livros dando uma grande contribuição para a popularização da Matemática. Em 1956 publicou *Mathematics, Magic and Mystery* (Matemática, Mágica e Mistério) (Gardner, 1956) e, no final desse mesmo ano, o editor da *Scientific American* convidou-o para escrever mensalmente uma coluna chamada *Mathematical games* (Jogos Matemáticos), trabalho que realizou durante 25 anos. Mais recentemente, aqui no Brasil, temos algumas obras de divulgação dessa parceria entre mágica e Matemática, com o livro “Mágicas Matemáticas e outros

mistérios” (Sampaio-Malagutti, 2006) de João Carlos Vieira Sampaio e Pedro Luiz Aparecido Malagutti, “A Magia da Matemática” (Sá, 2010) e “Matematruques” (Sá, 2017) de Ilydio Pereira de Sá.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Didática

Para Libânio (1994), a didática é a arte de transmitir conhecimentos, ou seja, envolve técnicas de dirigir e orientar a aprendizagem. No dicionário Houaiss (2012) encontramos como definição de didática: “parte pedagógica que tratará dos preceitos científicos que orientam a atividade educativa de modo a torná-la mais eficiente”. Portanto, a didática é essencial para que um professor tome decisões, analisando a forma mais clara e as reais condições de ensino.

Segundo Libâneo (1991, p. 79), devemos entender o processo de ensino como:

“o conjunto de atividades organizadas do professor e dos alunos, visando alcançar determinados resultados (domínio de conhecimentos e desenvolvimento das capacidades cognitivas), tendo como ponto de partida o nível atual de conhecimentos, experiências e de desenvolvimento.”

Assim, a didática orienta o professor na forma de ensinar e mostra ao aluno como se pode aprender, alcançando todas as situações que cercam o ensino/aprendizagem.

Nesse contexto, entendemos o quanto a didática é importante, e podemos levantar a seguinte questão: o que seria a didática da Matemática? Pais (2015) procura definir didática da Matemática da seguinte forma:

“A didática da Matemática é uma das tendências da grande área da educação Matemática, cujo objetivo de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica como no território teórico da pesquisa acadêmica” (PAIS, 2015).

D’Amore (2007) diz que “no passado, vários autores sustentavam que ensinar é uma arte, fruto de características pessoais que não podem ser aprendidas nem transmitidas, com a radical conclusão de que a pesquisa didática é inútil”. O autor entende que, apesar desse pensamento incorreto, a didática considerada como arte trouxe alguns resultados positivos, pois o objeto de trabalho era o ensino da

Matemática e objetivava a criação de situações para melhorar o ensino desta ciência. O autor relata que “a eficácia das aprendizagens não é exclusiva apenas desses ‘artistas da didática’ embora, obviamente, partindo de situação de atenção e interesse, é provável que cresça a motivação e, portanto, a volição”. (D’Amore, 2007,p.35).

O autor cita como resultado interessante da didática como arte, a criação de ambientes favoráveis, estruturados e atividades com utilização de jogos lógicos, jogos de movimentos e, até mesmo, danças, estruturadas na Matemática.

Segundo D’Amore (2007,p.37) a didática da Matemática pode ser dividida em duas partes, didática A e didática B, sendo a didática A “como divulgação das ideias, fixando a atenção na fase do ensino” e didática B “como pesquisas empíricas, fixando a atenção na fase de aprendizagem”.

Para Wachiliski (2007) o Brasil, na década de 80, sofreu a influência de duas fortes correntes da didática da Matemática, a corrente francesa e a norte americana. Segundo o autor, a corrente norte americana valorizava o ensino da Matemática através da resolução de problemas ligados à realidade do aluno. Para o autor, a corrente norte americana foi uma das mais influentes na construção dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Ao falar da corrente francesa na didática da Matemática, Wachiliski (2007) apresenta termos como Transposição Didática e Contrato Didático. O termo Transposição Didática, teorizado pelo francês Yves Chevallard nos diz que:

“Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os ‘objetos de ensino’. O ‘trabalho’, que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de Transposição Didática”. (WACHILISKI, 2007, p.9)

Para Chevallard (1985), a Transposição Didática segue a seguinte sequência “objeto de saber → objeto a ensinar → objeto de ensino”, e cita como exemplo:

“ – a noção de distância (entre dois pontos) é utilizada espontaneamente ‘desde sempre’;
 - o conteúdo matemático de distância é introduzido em 1906 por Maurice Fréchet (objeto de saber matemático);
 - no primeiro ciclo do ensino secundário francês, a noção Matemática de distância, surgida a partir da definição de Fréchet, aparece em 1971 no programa da classe do quarto ano (objeto a ensinar);
 - seu tratamento didático varia com os anos a partir de sua designação como objeto a ensinar: continua o ‘trabalho’ de transposição”. (CHEVALLARD,1985,p.40)

Quanto ao termo Contrato Didático, Wachiliski (2007) cita as pesquisas de Guy Brousseau (1986) e aponta que “o Contrato Didático não só lida com as questões sociais, mas também se preocupa com as cognitivas, considerando os conhecimentos que estão em jogo no processo de ensino-aprendizagem da Matemática” (WACHILISKI, 2007, p.17).

É importante ressaltar que existe a possibilidade de ocorrer uma ruptura do Contrato Didático, apesar dessa ruptura não ser apresentada de forma clara, pois os aspectos em torno do ensino-aprendizagem são implícitos. Como exemplos dessa ruptura do Contrato Didático, temos, por exemplo, o caso em que o aluno não apresenta interesse em resolver um problema matemático proposto pelo professor. Para o autor, nesse caso, o quebra do Contrato Didático ocorre quando o que era esperado pelo professor, em relação a participação do aluno, não acontece. Sendo necessário uma pequena investigação para entender os motivos que geraram essa ruptura. Outro exemplo, o caso em que o professor apresenta um problema matemático que está além do nível intelectual ou cognitivo do aluno. Nesse caso, o autor classifica como problema sem solução.

Segundo Silva, Ferreira e Tozetti (2015) a didática da Matemática, para Brousseau (1996a, b), tem como perspectiva que “o processo de transmissão, na Didática da Matemática, deve se centrar nas atividades didáticas que têm como objetivo o ensino que priorize, especificamente, os saberes matemáticos”, o autor desenvolveu uma teoria chamada de teoria das situações didáticas, contribuindo para um melhor entendimento do processo ensino-aprendizagem.

Para Brousseau (1996a, b) as situações didáticas podem ser modeladas segundo o triângulo didático, conforme a figura 1 na página seguinte, e é dividida em três partes: situação de ação, situação de formulação e situação de validação.

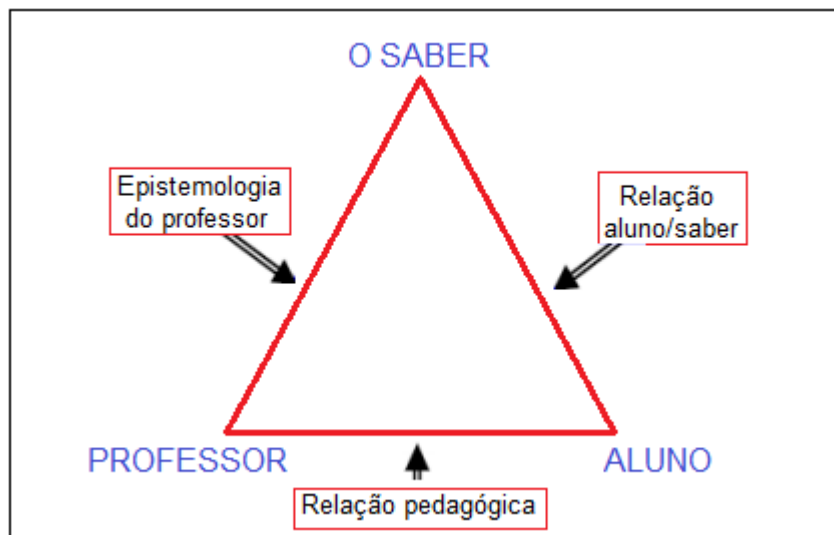
Os autores Silva, Ferreira e Tozetti (2015) apontam que “para Brousseau (1996a) a situação didática é utilizada para descrever os modelos que delinham as atividades do professor e do aluno”.

Na situação de ação, Silva, Ferreira e Tozetti (2015) afirmam que, nessa fase, os alunos, ao competirem, tomam decisões e, ao fim de algumas etapas, refletem sobre o resultado. Para os autores, em relação ao aluno, é importante que:

“ao longo do jogo/problema desenvolva estratégias e tome novas decisões (algumas intuitivas). Observa-se que são necessárias várias partidas (jogo), até que o aluno seja capaz de formular uma tática,

justificá-la e, finalmente, tirar conclusões”. (SILVA, FERREIRA e TOZETTI, 2015)

Figura 1 – O triângulo didático



Fonte: Brousseau, 1986, p.12

Na situação de formulação, os autores relatam que “A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade de o sujeito retomá-lo”. Nesse contexto, os alunos são direcionados a explicitar todas as estratégias utilizadas, fazendo uma formulação verbal expondo o conhecimento implícito.

Na situação de validação, os autores afirmam ser “o momento que permite distinguir um novo tipo de formulação: um emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente”. Os autores ainda dizem que:

“nessa situação os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, às intimidações, etc”. (SILVA, FERREIRA e TOZETTI, 2015)

Assim, o aluno não pode apenas comunicar uma informação, é preciso demonstrar que a sua fala é verdadeira dentro de um sistema determinado.

Nesse contexto, os autores concluem que as relações de um aluno com o meio podem ser classificadas em três categorias: “a) troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisões); b) troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens); c) troca de opiniões”. Dessa forma,

essas três categorias exibem as estratégias que os alunos utilizam para desenvolver as situações didáticas propostas.

Os autores ainda apontam um momento posterior às três situações chamado de institucionalização. Para os autores, nesse momento, “o professor reassume a ação, estabelecendo quais conhecimentos obtidos nas etapas anteriores são relevantes e quais são descartáveis, configurando o estatuto de objeto aos conhecimentos obtidos”.

1.2 Jogos matemáticos na Educação Matemática

Segundo Moura (2002), a construção de ideias matemáticas para um aluno acontece quando o mesmo se sente estimulado através de algum desafio com significado, e que esse desafio seja capaz de gerar aprendizagem. Dessa forma, torna-se importante o professor planejar situações problemas com significado, escolhendo materiais que sirvam para a realização desse trabalho.

A Matemática recreativa defendida por Gardner (1962) vem se tornando algo cada vez mais comum nas escolas. Nos últimos anos, o uso dos jogos, como ferramenta de ensino, tem sido constante. Moura (2002, p.73) lembra que:

“os congressos brasileiros sobre jogos realizados na Universidade de São Paulo, em 1989 e em 1990, já faziam referência a jogo no ensino da Matemática. O mesmo podemos notar nos Encontros Nacionais de Educação Matemática, realizados em 1987, e nos Encontros Regionais de Educação”.

Para o autor, os resultados obtidos com a utilização de jogos justificava sua importância no ensino da Matemática, sendo relevante uma análise sobre esta tendência para que pudessemos melhorar nosso papel como educadores.

O autor divide o jogo na educação Matemática em duas concepções, a primeira em que “A criança, colocada diante de situações lúdicas, apreende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, apreende também a estrutura Matemática presente” (MOURA, 2002, p.80). A segunda concepção, para o autor, seria que:

“o jogo deve estar carregado de conteúdo cultural e, assim, o seu uso requer um certo planejamento que considere os elementos sociais em que se insere. Sendo visto como conhecimento feito e também se fazendo. É

educativo. Esta característica exige o seu uso de forma intencional, sendo assim, requer um plano de ação que permita a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais”. (MOURA, 2002, p.80)

Nessa perspectiva, Moura (2002) entende que o jogo tem papel fundamental no desenvolvimento de habilidades em resolver problemas, tornando possível que o aluno construa um plano de ação para buscar determinados objetivos e, “desta maneira, o jogo aproxima-se da Matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e mais, permite trabalhar os conteúdos culturais inerentes ao próprio jogo” (MOURA, 2002, p.81).

1.3 Sequências Didáticas

Para Zabala (2007, p.18), “sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos”.

Para Dolz e Shneuwly (2004), as sequências didáticas são instrumentos que direcionam o professor na construção das aulas. Para os autores, as atividades devem ser criadas a partir dos conhecimentos prévios dos alunos e, a cada etapa, buscar o aumento do grau de dificuldade visando ampliar a capacidade desses estudantes.

Isso nos mostra que uma sequência didática pode ser estruturada de acordo com as necessidades do projeto que se deseja construir. Propomos a seguir como uma sequência didática pode ser estruturada:

1º passo: Apresentar o projeto aos alunos;

2º passo: Investigar, através de conversas ou atividades propostas, os conhecimentos prévios dos alunos;

3º passo: Executar as atividades relacionadas ao projeto apresentado, analisando a construção do conhecimento e a superação das dificuldades apresentadas;

4º passo: Verificar se houve aprendizagem com a realização da sequência didática.

Nesse contexto, Peretti e Tonin da Costa (2013) dizem que seria interessante utilizar atividades práticas para a construção de uma sequência didática tais como jogos, desafios, problemas, mágicas etc., apresentando dificuldades que estimulem a construção do conhecimento.

1.4 Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que surgiu no início dos anos 80 na estruturação da didática francesa (ARTIGUE, 2008, p.10). Esta metodologia busca, nas experiências em sala de aula, a construção de um caminho para se ensinar Matemática. Segundo Artigue (1988), o professor é tratado como um engenheiro que elabora um projeto utilizando conhecimentos do seu domínio, ou seja, enfrenta os problemas com todas as ferramentas que estão a sua disposição.

Para Silva, Ferreira e Tozetti (2015), a Engenharia Didática é um método onde se aplica a teoria das situações didáticas citadas anteriormente. Os autores dizem que a Engenharia Didática “Surgiu como uma forma de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da escola da Didática da Matemática Francesa”.

Um dos pioneiros no uso da Engenharia Didática em Matemática foi Guy Brousseau (1986), sendo Michèlle Artigue (1996) uma das grandes responsáveis em divulgar para o mundo essa metodologia. Autores brasileiros que têm contribuído com pesquisas sobre a Engenharia Didática são: Silvia Dias Alcântara Machado (2002), Luiz Carlos Pais (2002) e Saddo Ag Almouloud (2007). Segundo Artigue (1988, p.3), “A Engenharia Didática, encarada como metodologia de pesquisa, caracteriza-se em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala, quer dizer, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino”.

Segundo Pais (2015), um dos fatores que justificam a utilização da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa é o fato dela contemplar tanto as dimensões teóricas como experimentais da pesquisa didática. Para o autor, “uma das vantagens dessa forma de conduzir a pesquisa didática decorre dessa sua dupla ancoragem, interligando o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa”. Para Pais (2015):

“A Engenharia Didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e prática. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido”. (PAIS, 2015, p. 99)

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática como referencial de pesquisa voltada para o ensino da Matemática é dividida em quatro etapas: Análises Preliminares, Concepção e Análise a Priori, Experimentação e Análise a Posteriori e Validação da Experiência.

1.4.1 Etapas da engenharia didática

I - Análises Preliminares.

Nessa primeira etapa o professor busca entender as dificuldades de seus alunos no qual irá realizar uma ação didática, fazendo uma investigação dos conhecimentos prévios e analisando o método ou forma atual de ensino e seus resultados. Portanto, nessa fase é importante localizar as dificuldades cognitivas de aprendizagem que os alunos apresentam em determinados conteúdos. A respeito da análise preliminar, Pais (2015) diz que:

“Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo” (PAIS, 2015, p. 101).

II - Concepção e Análise a Priori.

Nessa fase o professor precisa entender quais são as variáveis que estarão sob seu controle. Se faz necessário uma análise geral e outra local, com seu público alvo, e assim fazer uma descrição do objeto a ser estudado, tentando prever uma melhora nos resultados esperados após a experimentação. Para isso, criam-se hipóteses que deverão ser validadas na análise a posteriori. É importante também apontar os problemas ligados ao objeto estudado. Ao incorporar modificações no

modo de lecionar um conteúdo matemático, precisamos, de fato, entender se essas modificações irão melhorar o desempenho do aluno. Para Artigue (1996), com relação à análise a priori, seu objetivo é:

“Determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos. Para isso, ela funde-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori.”(ARTIGUE,1996,p.205).

III - Experimentação.

Nesse momento, iremos para a parte prática de toda a teoria e hipóteses apontadas na análise a priori, aplicando uma sequência didática com um grupo específico e registrando as observações realizadas durante a prática. De acordo com Machado (2002):

“consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise a priori. Assim, a experimentação pressupõe: - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa e da população de alunos que participará da experimentação; - o estabelecimento do contrato didático; - a aplicação do instrumento de pesquisa; - o registro das observações feitas durante a experimentação.” (MACHADO, 2002, p. 206).

No que diz respeito ao contrato didático, é importante que o professor não interfira de forma explícita na formação do conhecimento. É necessário que o aluno confronte o problema utilizando seus conhecimentos anteriores, mesmo que isso seja uma solução parcial do problema.

IV - Análise a Posteriori e Validação.

Nessa fase, reunimos todas as informações obtidas na fase da experimentação, para que assim seja feita a validação das hipóteses da pesquisa. Daí, poderemos dizer se houve aprendizagem ou não dos estudantes com as experiências vividas em sala de aula ou fora dela. Sobre esse ponto, Artigue(1988), diz que:

“A análise a posteriori se apoia no conjunto de dados recolhidos quando da experimentação, (...) mas também nas produções dos alunos em sala de aula ou fora dela. Esses dados são geralmente completados por dados obtidos pela utilização de metodologias externas: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele”.(ARTIGUE, 1988, p.10).

Portanto, essa validação é obtida através do confronto dos dados da análise a priori com a análise a posteriori e assim confirmando ou não as hipóteses citadas inicialmente.

1.5 Educação Formal, Não Formal e Informal

1.5.1 Conceitos e Objetivos

Para Brandão (1981), a educação está presente no cotidiano de todos, sendo transmitida em diversos lugares como nas igrejas, na escola, em casa etc. Assim, o professor não é o único agente responsável em sua construção. O autor ressalta que existem inúmeras educações e que cada uma delas contribuem para a manutenção dos saberes que estruturam uma sociedade. Sabendo disso, vamos conhecer os conceitos e objetivos de três tipos de educação, a Educação Formal, Não Formal e Informal.

Para Chagas (1993), a principal característica da Educação Formal é a sua estruturação, sendo desenvolvida em instituições próprias onde o aluno deve seguir um programa pré-determinado. Ou seja, depende de um currículo com estruturas hierárquicas, abrangentes a nível nacional, fiscalizada por órgãos do Ministério da Educação.

De acordo com Gohn (2006), a Educação Não Formal, tem como principal objetivo a cidadania, sendo elaborada em coletivo e executada por prática social. Uma importante característica é o não desenvolvimento de um currículo pré-definido.

Segundo Gohn (2006), a Educação Informal está relacionada ao processo, não institucionalizado, de transmitir conhecimento, sendo adquiridos através de tradições culturais, comportamentos presentes numa sociedade, etc.

A autora também diz que alguns investigadores consideram como sinônimos a Educação Não Formal e a Informal. Assim, para distinguir a diferença entre estes conceitos, ela demarca os seus campos de desenvolvimento. Para a autora, o educador ou agente responsável pelo processo da construção do saber na

Educação Formal é o professor, na Não Formal o educador é o “outro” com quem se interage e na Educação Informal os agentes são os pais, amigos, vizinhos, colegas da escola, os meios de comunicação em massa etc. Além disso, a comparação da Educação Formal com a Não Formal é bastante natural. A autora diz que:

“A educação formal é aquela desenvolvida nas escolas, com conteúdos previamente demarcados; a informal como aquela que os indivíduos aprendem durante seu processo de socialização - na família, bairro, clube, amigos, etc., carregada de valores e cultura própria, de pertencimento e sentimentos herdados; e a educação não formal é aquela que se aprende “no mundo da vida”, via os processos de compartilhamento de experiências, principalmente em espaços e ações coletivas cotidianas.”(GOHN,2006, p. 28).

Apesar das definições e conceitos de cada uma das formas de educação, para Gohn (2006), os três tipos se complementam.

Sabendo que a Rede Estadual de Ensino segue o currículo mínimo com conteúdos pré-estabelecidos, ou seja, uma Educação Formal, vamos propor uma maneira não formal para falar de alguns desses conteúdos do currículo mínimo.

Na escola em que aplicamos truques de mágicas como meio não formal de apresentar conteúdos, localizada no município de Duque de Caxias, os professores definem como alunos interessados aqueles que fazem perguntas e participam das aulas, enquanto que os demais são enquadrados como desinteressados, bagunceiros ou preguiçosos.

A turma 1009, 1º ano do Ciep 201, escola mencionada acima, que participou das atividades com mágica, é classificada pela maioria dos professores como uma turma ruim e com baixo rendimento. Dessa forma, esta seria uma boa turma para a aplicação de uma nova didática e, se possível, verificar, de alguma forma, se parte dos problemas de aprendizado poderiam ser solucionados.

Dividimos os alunos dessa turma em grupos, para discutirmos a Matemática por traz de algumas “mágicas”. Grande parte desses truques foram aprendidos de maneira informal, alguns em reuniões familiares e outros brincando com amigos. Vale ressaltar que o professor, autor desse trabalho, já possuía habilidades em executar truques de mágica com cartas.

A ideia de utilizar a mágica como ferramenta para o ensino da Matemática surgiu de maneira bastante espontânea. Ao realizar alguns truques que traziam conceitos matemáticos embutidos e que poderiam ser equacionados, solucionados e revelados, foi possível perceber o quanto essa abordagem ao se falar de

Matemática, pode prender a atenção e despertar diversos elementos importantes na aprendizagem.

Ao longo desses doze anos de atividade junto à Rede Estadual de Ensino do RJ, por diversas ocasiões, a dinâmica da primeira aula do ano letivo foi apresentar “mágicas” do tipo:

- Pense em um número;
- Multiplique por 2;
- Some um valor n ;
- Divida por 2;
- Diminua pelo número que pensou.

O resultado é a metade do valor de n . Chamando de x o número pensado, podemos facilmente construir uma equação do 1º grau, conforme segue, atendendo os passos acima:

$$1^\circ \text{ passo: } x,$$

$$2^\circ \text{ passo: } 2x,$$

$$3^\circ \text{ passo: } 2x + n,$$

$$4^\circ \text{ passo: } \frac{2x + n}{2},$$

$$5^\circ \text{ passo: } x + \frac{n}{2} - x = \frac{n}{2}.$$

Esse truque tem se mostrado importante e cativante para se iniciar o ano com uma revisão em equações do 1º grau.

Efetuada uma pesquisa sobre mágicas com Matemática, encontramos grandes nomes no mundo da Matemática recreativa como Martin Gardner, João Carlos Sampaio, Pedro Luiz Malagutti e Ilído Pereira de Sá. Isso tornou a ideia de ensinar Matemática tendo como ferramenta a mágica como algo tangível. Para isso, se fazia necessário a construção de uma nova didática e nesse momento é que a Engenharia Didática tornou possível essa construção. Como a Engenharia Didática considera o professor como um engenheiro que pode conceber uma nova forma de ensinar, utilizando as experiências já obtidas em sala, vamos nos apoiar nessa metodologia fazendo uso das sequências didáticas, apresentadas no capítulo anterior.

Assim, a Engenharia Didática como metodologia de ensino torna possível a construção de um elo entre a teoria e a prática em sala de aula, justificando o porquê de sua escolha para a fundamentação teórica desse trabalho.

2 MÁGICAS COM MATEMÁTICA

2.1 Mágicas Matemáticas

A mágica pode ser inserida em diversos tópicos da Matemática. Sendo assim, ela pode ser entendida como mais um elemento na Engenharia Didática com o objetivo de tornar o processo ensino/aprendizagem mais efetivo. Utilizamos as quatro etapas da Engenharia Didática para que, assim, possamos entender como a interseção entre mágica e Matemática pode contribuir para a construção do conhecimento. Apresentamos uma sequência de truques justificados por princípios matemáticos com o objetivo de despertar a curiosidade e o interesse em aprender Matemática. É importante mencionar que, ao longo desse trabalho, o questionamento de diversos caminhos para a realização da mágica e se, a partir desses princípios, havia possibilidade de se criar novos truques, sempre foi uma questão de fundamental importância.

2.1.1 Apresentação de um baralho com 52 cartas

Neste capítulo são apresentados cinco truques abordando assuntos do Ensino Fundamental e Médio tais como:

– Mágica número 1: (Potenciação).

Tema tratado no sexto ano do Ensino Fundamental.

– Mágica número 2: (Progressão aritmética).

Tema tratado no segundo ano do Ensino Médio.

– Mágica número 3: (Expressão Algébrica).

Tema tratado no oitavo ano do Ensino Fundamental.

– Mágica número 4: (Equação do 1º grau e Expressões Algébricas).

Tema tratado no sétimo e oitavo anos do Ensino Fundamental.

– Mágica número 5: (Equação do 1º grau com duas variáveis).

Tema abordado no sétimo ano do Ensino Fundamental.

Esses truques foram realizados fazendo-se uso de um baralho. Para isso, é preciso conhecer e entender algumas nomenclaturas utilizadas com bastante frequência. Um Baralho completo tem 4 naipes definidos como famílias ou tipos de cartas e 13 cartas em cada naipe, sendo os naipes pretos ou vermelhos. Os naipes pretos divididos em espadas e paus e os vermelhos em ouros e copas, conforme a figura 2.

Figura 2 – Baralho completo com 4 naipes e 13 cartas em cada naipe.



Fonte: O Autor, 2016

Durante a realização das mágicas utilizamos expressões como carta virada para baixo ou para cima, figura 3. Utilizamos com frequência a expressão um “corte” no baralho, que significa dividi-lo em dois grupos de cartas conforme figura 4, sendo chamado de “corte completo” quando, após realizarmos um “corte” no baralho, reagrupamos os dois grupos de cartas em um grupo só, porém, mudando a sequência original que existia antes de ser dividido em dois grupos, conforme figura 5. Outra expressão muito utilizada é dividir o baralho em montes, conforme figura 6.

Figura 3 – Carta virada para baixo (carta da esquerda) e carta virada para cima (carta da direita).



Fonte: O Autor, 2016

Figura 4 – O baralho após sofrer um “corte” (ato de dividi-lo em dois grupos de cartas)



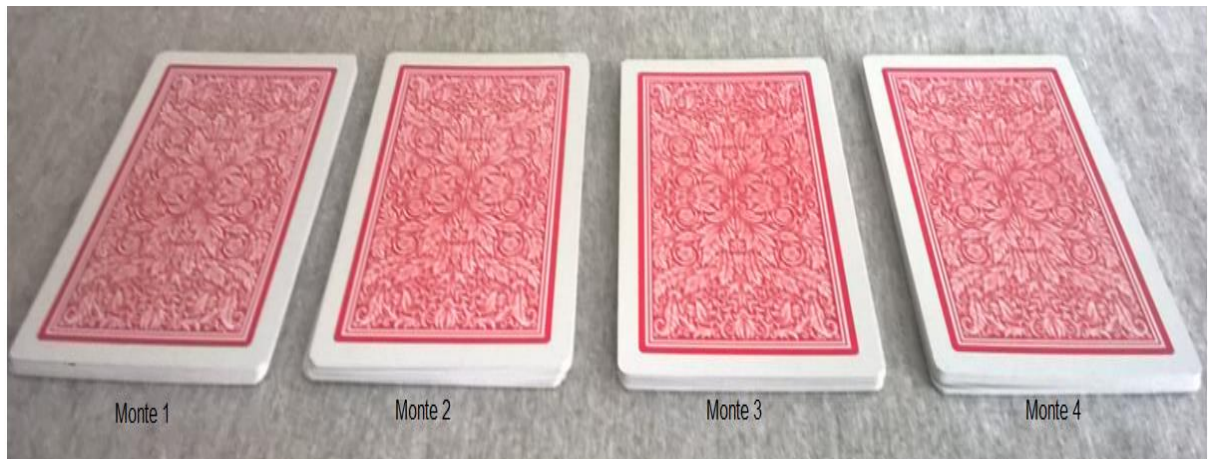
Fonte: O Autor, 2016

Figura 5 – Um corte completo (após o corte, o reagrupamento dos dois montes altera a ordem inicial)



Fonte: O Autor, 2016

Figura 6 – O baralho dividido em 4 montes, sendo da esquerda para a direita, monte 1, monte 2, monte 3 e monte 4.

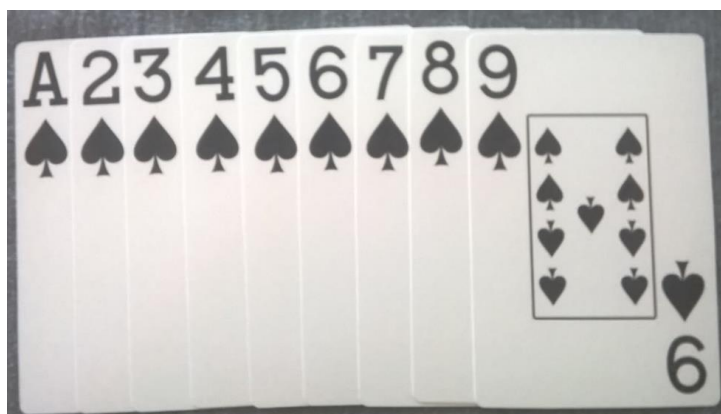


Fonte: O Autor, 2016

2.2 Mágica número 1: Reorganizando as cartas (Potenciação)

Nesse truque, utilizamos 9 cartas consecutivas de Ás a 9, como na figura 7. Estando essas 9 cartas em ordem e agrupadas, essas são apresentadas aos alunos e as viramos para baixo dando um corte completo. Em seguida, de forma alternada, dividimos as 9 cartas em dois montes com as cartas ainda viradas para baixo. Reagrupando os dois montes, mostramos, aos espectadores, a desorganização em relação à ordem inicial.

Figura 7 – Nove cartas de espadas, em sequência, de Ás a 9.



Fonte: O Autor, 2016

Novamente, repetimos o mesmo processo, um corte completo e a divisão em dois montes de forma alternada com as cartas viradas para baixo, terminando com o reagrupamento das cartas e mostrando novamente a desorganização que isso gerou em relação à ordem anterior das cartas. Por fim, fazemos pela terceira vez todo esse processo, mas sem mostrar ao espectador o resultado da organização das cartas. Damos um corte “mágico” (se necessário) e todas as cartas voltarão a formação inicial. O corte “mágico” será explicado na próxima seção.

Link para visualizar a performance do truque no Youtube:

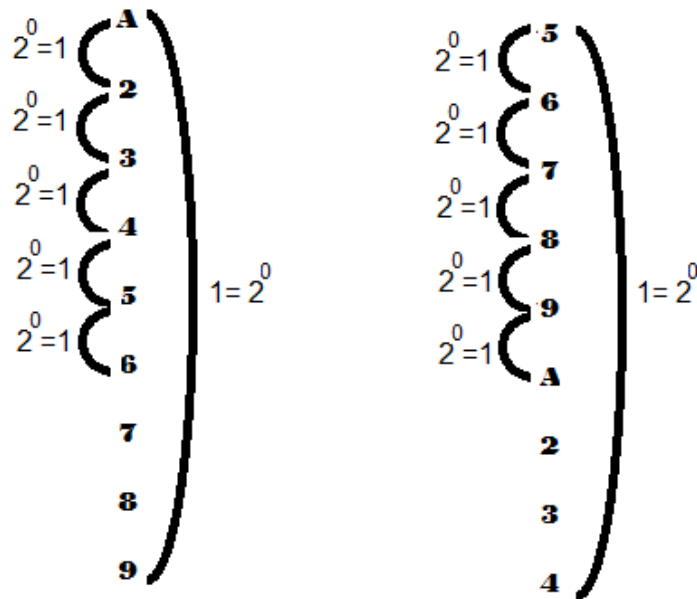
<https://www.youtube.com/watch?v=VBvqgVC1fKs>

2.2.1 Revelando a mágica 1

Ao fazermos um corte completo no conjunto de 9 cartas de Ás a 9, a diferença entre uma carta e a carta seguinte é de uma unidade que pode ser escrita da forma $1 = 2^0$ (figura 8). Observe que, depois do “corte completo”, essa diferença não muda em cada grupo (considerando que a sequência com as 9 cartas forma um ciclo), de acordo com o exemplo da figura 8.

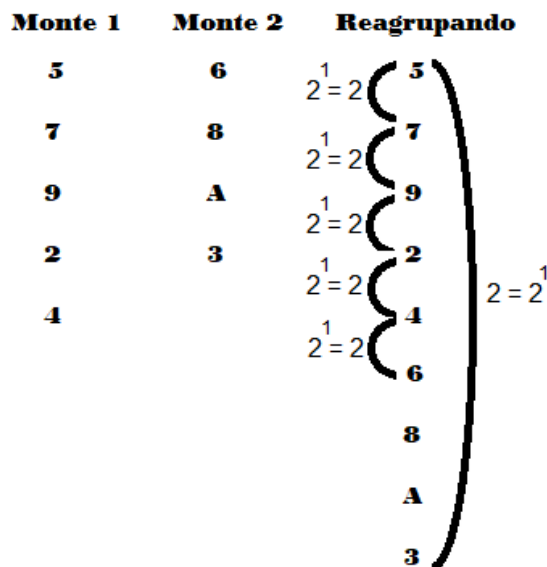
Ao dividirmos de forma alternada as 9 cartas em dois montes e, em seguida, ao reagruparmos as cartas em um único monte, ficamos com uma situação como da figura 9. Observe que a diferença entre as cartas agora é de 2 unidades, $2 = 2^1$.

Figura 8 – Visualização da sequência de cartas após um “corte completo”.



Fonte: O Autor, 2016

Figura 9: Resultado da primeira divisão das cartas em dois montes seguida de um reagrupamento.



Fonte: Autor, 2016

Repetindo o processo pela segunda vez, ficamos com a configuração como a da figura 10. Observe que, neste caso, a diferença entre as cartas aumentou de 2 para 4 unidades.

Figura 10 – Resultado da segunda divisão das cartas em dois montes seguida por um reagrupamento.

Monte 1	Monte 2	Reagrupamento
5	7	$2^2 = 4$ 5
9	2	$2^2 = 4$ 9
4	6	$2^2 = 4$ 4
8	A	$2^2 = 4$ 8
3		$2^2 = 4$ 3
		$2^2 = 4$ 7
		2
		6
		A

$4 = 2^2$

Fonte: O Autor, 2016

Repetindo pela terceira vez o mesmo processo chegamos às configurações apresentadas pela figura 11. Observe que neste momento a diferença entre as cartas nesta terceira etapa é de 8 unidades.

Figura 11 – Resultado da terceira divisão das cartas em dois montes seguida por um reagrupamento.

Monte 1	Monte 2	Reagrupamento
5	9	$2^3 = 8$ 5
4	8	$2^3 = 8$ 4
3	7	$2^3 = 8$ 3
2	6	$2^3 = 8$ 2
A		$2^3 = 8$ A
		$2^3 = 8$ 9
		8
		7
		6

$8 = 2^3$

Fonte: O Autor, 2016

Para finalizar, na etapa mostrada na figura 11, ao reagruparmos as cartas, devemos olhar a última carta de baixo para cima. No exemplo da figura 11 vemos a carta com o algarismo 5. Aqui devemos realizar o que chamamos de “corte mágico”, isto é, retiramos o número de cartas no algarismo indicado na última carta. Assim, devemos retirar 5 cartas que estão em baixo e colocá-las em cima. É importante observar que a organização das cartas acontece quando a diferença entre elas é de uma ou de oito unidades.

Analisando todas as etapas, podemos buscar uma forma geral para a realização do processo. Vimos que para reorganizar as 9 cartas, precisamos criar uma diferença de 8 unidades. Se a quantidade de cartas utilizadas fosse igual a 28, para reorganizá-las, devemos construir uma diferença de 27 unidades e isso pode ser feito com a divisão das 28 cartas em três montes. Esse processo de divisão deve ser realizado por três vezes gerando uma diferença de $27 = 3^3$, já que isso irá representar a mesma diferença de uma unidade quando olhamos as 28 cartas como um ciclo. É importante testar esse experimento com os alunos. Ao realizar esse truque com outras quantidades de cartas, percebemos que a reorganização acontece ao conseguirmos alcançar uma diferença entre as cartas equivalente ao total de cartas menos 1. As 9 cartas podem ser escritas como 2^3+1 , lembrando que ao obter uma diferença de 2^3 unidades, conseguimos reorganizar as 9 cartas. No segundo exemplo com as 28 cartas, podemos escrever essa quantidade como 3^3+1 . Dessa forma, conseguimos a diferença de 27 unidades reorganizando as 28 cartas.

Se quiséssemos utilizar 33 cartas a diferença necessária para reorganizar as cartas é de 32 unidades. Essas 33 cartas podem ser escritas da forma 2^5+1 . Observando os exemplos, percebemos que na organização das cartas surge a lei de formação

$$y^b + 1 = x ,$$

onde y , b e x são números inteiros maiores ou iguais a 1, sendo que y representa a quantidade de montes nos quais as cartas são divididas, b a quantidade de vezes necessária para repetir o processo de divisão entre os montes e x a quantidade de cartas utilizadas para a realização do truque.

Link para visualizar a solução do truque no Youtube:

<<https://www.youtube.com/watch?v=geaXEe4sKdU>>

2.3 Mágica número 2: As três últimas cartas (Progressão Aritmética)

Nesse “truque” vamos utilizar mais uma vez o baralho completo, figura 2. As cartas são apresentadas ao aluno com a face voltada para cima, e este escolhe três cartas. O aluno deve memorizar as cartas não deixando que o “mágico” saiba quais foram as escolhidas (deve ser aconselhado que as cartas sejam consecutivas e de mesmo naipe, pois facilita na memorização). As três cartas ficam com o aluno enquanto o restante do baralho, com a face virada para baixo, é devolvido ao “mágico” que em seguida o dividirá em quatro montes, figura 6. Após a divisão, o “mágico” pede para que o aluno coloque umas das cartas escolhidas sobre o primeiro monte e, em seguida, coloque algumas cartas, não todas, do segundo monte sobre o primeiro monte. Em seguida, esse processo é repetido com a segunda carta escolhida pelo aluno que agora ele a colocará sobre as cartas que restaram no segundo monte. O aluno deverá transferir algumas cartas do terceiro monte, não todas, colocando-as sobre o segundo monte. Para finalizar, o aluno repetirá esse processo usando o terceiro e quarto montes, ou seja, colocará a terceira e última carta sobre as cartas que restaram no terceiro monte e, em seguida, moverá algumas cartas, não todas, do quarto monte e as colocará sobre o terceiro monte. Nesse momento, o “mágico” deve reagrupar os quatro montes, começando do monte quatro até o monte um, ou seja, colocando o monte quatro sobre o monte três, o monte três sobre o monte dois e o monte dois sobre o monte um transformando-os em apenas um monte. Como último passo, o “mágico” deve distribuir de forma alternada as cartas em montes sendo um monte com as cartas viradas para cima e outro monte com as cartas viradas para baixo. O monte com as cartas viradas para cima deve ser descartado. Com o monte de cartas viradas para baixo o processo deve ser repetido, isto é, dividindo de forma alternada em um monte com cartas viradas para cima e outro com cartas viradas para baixo. O processo é repetido até restarem apenas três cartas e as três cartas restantes são exatamente as cartas escolhidas pelo aluno.

Link para visualizar a performance do truque no Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=LWHTmm9hU7k>

2.3.1 Revelando a mágica 2

O segredo do “truque” está no número de cartas em cada um dos 4 montes. Apresentamos uma possível solução para esse problema. Sem que o aluno perceba, no primeiro colocaremos 10 cartas, no segundo 15 cartas, no terceiro também 15 cartas e no quarto 9 cartas, todas viradas para baixo. O aluno irá colocar uma das cartas escolhida no primeiro monte, outra no segundo monte e a última no terceiro monte. Ao reagrupar os montes, colocando o quarto monte sobre o terceiro, o terceiro sobre o segundo e o segundo sobre o primeiro, nessa ordem, uma das cartas escolhidas estará na décima posição pois no quarto monte tinham 9 cartas que foram colocadas sobre a carta escolhida que estava no terceiro monte. Ao colocar o terceiro monte, que agora tem um total de 25 cartas, sobre o segundo monte fará com que a outra escolhida fique na vigésima sexta posição. Ao finalizar, colocando o segundo monte, que agora tem 41 cartas, sobre o primeiro monte, fará com que a última carta escolhida seja a quadragésima segunda carta. Após todo o processo de distribuição das três cartas sobre os montes e o reagrupamento das cartas num único monte, iniciamos o processo de eliminação das cartas. Podemos mapear as posições das 52 cartas como os 52 termos de uma progressão aritmética de razão 1, figura 12. Analisando o posicionamento das cartas escolhidas, de acordo com o número de cartas que colocamos em cada monte, sabemos exatamente a localização dessas cartas, figura 12, onde vemos, claramente, uma progressão aritmética com 52 termos de razão 1.

No processo para a eliminação das cartas que não fazem parte do conjunto solução, ou seja, para começar a eliminar as cartas diferentes das três cartas escolhidas pelo aluno, iniciamos com uma carta virada para cima e outra para baixo de forma alternada excluindo todos os termos ímpares (monte com cartas viradas para cima) da progressão resultando a situação mostrada figura 13.

Figura 12 – Todas as cartas formando uma progressão aritmética com 52 termos de razão 1, dando destaque ao posicionamento das três cartas.

$a_1 = 1$	$a_{14} = 14$	$a_{27} = 27$	$a_{40} = 40$
$a_2 = 2$	$a_{15} = 15$	$a_{28} = 28$	$a_{41} = 41$
$a_3 = 3$	$a_{16} = 16$	$a_{29} = 29$	$a_{42} = 42$
$a_4 = 4$	$a_{17} = 17$	$a_{30} = 30$	$a_{43} = 43$
$a_5 = 5$	$a_{18} = 18$	$a_{31} = 31$	$a_{44} = 44$
$a_6 = 6$	$a_{19} = 19$	$a_{32} = 32$	$a_{45} = 45$
$a_7 = 7$	$a_{20} = 20$	$a_{33} = 33$	$a_{46} = 46$
$a_8 = 8$	$a_{21} = 21$	$a_{34} = 34$	$a_{47} = 47$
$a_9 = 9$	$a_{22} = 22$	$a_{35} = 35$	$a_{48} = 48$
$a_{10} = 10$	$a_{23} = 23$	$a_{36} = 36$	$a_{49} = 49$
$a_{11} = 11$	$a_{24} = 24$	$a_{37} = 37$	$a_{50} = 50$
$a_{12} = 12$	$a_{25} = 25$	$a_{38} = 38$	$a_{51} = 51$
$a_{13} = 13$	$a_{26} = 26$	$a_{39} = 39$	$a_{52} = 52$

Fonte: O Autor, 2016

Figura 13 – Progressão aritmética com 26 termos e razão (-2) e o posicionamento das cartas escolhidas.

$a_1 = 52$	$a_{14} = 26$
$a_2 = 50$	$a_{15} = 24$
$a_3 = 48$	$a_{16} = 22$
$a_4 = 46$	$a_{17} = 20$
$a_5 = 44$	$a_{18} = 18$
$a_6 = 42$	$a_{19} = 16$
$a_7 = 40$	$a_{20} = 14$
$a_8 = 38$	$a_{21} = 12$
$a_9 = 36$	$a_{22} = 10$
$a_{10} = 34$	$a_{23} = 8$
$a_{11} = 32$	$a_{24} = 6$
$a_{12} = 30$	$a_{25} = 4$
$a_{13} = 28$	$a_{26} = 2$

Fonte: O Autor, 2016

Notemos que as cartas escolhidas ainda permanecem no monte com as cartas viradas para baixo representadas por termos pares da progressão aritmética que são a_6 , a_{14} e a_{22} . Logo, continuamos o processo de eliminação com a primeira carta virada para cima e a outra para baixo de forma alternada resultando em uma progressão aritmética de 13 termos, como na figura 14.

Figura 14: Progressão aritmética com 13 termos de razão 4 e o destaque no posicionamento das cartas escolhidas.

$a_1 = 2$	$a_8 = 30$
$a_2 = 6$	$a_9 = 34$
$a_3 = 10$	$a_{10} = 38$
$a_4 = 14$	$a_{11} = 42$
$a_5 = 18$	$a_{12} = 46$
$a_6 = 22$	$a_{13} = 50$
$a_7 = 26$	

Fonte : Autor, 2016

Notemos que as cartas escolhidas estão representadas por termos ímpares, o que nos obriga a começar a nova etapa do “truque” com uma carta virada para baixo e outra virada para cima de forma alternada eliminando os termos pares, conforme figura 15.

Figura 15 – Progressão aritmética de 7 termos de razão $(- 8)$ destacando as cartas escolhidas.

$a_1 = 50$	$a_5 = 18$
$a_2 = 42$	$a_6 = 10$
$a_3 = 34$	$a_7 = 2$
$a_4 = 26$	

Fonte: O Autor, 2016

Para finalizar, nessa última etapa, começamos com uma carta virada para cima e outra para baixo, pois assim excluimos os termos ímpares restando as três cartas escolhidas pelo aluno.

Link para visualizar a solução do truque no Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=yeiflm04bZA>

2.4 Mágica número 3: Número de cartas no monte do meio (Expressões Algébricas)

Nesse truque um aluno escolherá, dentre as 52 cartas de um baralho, uma quantidade arbitrária de cartas, porém, múltipla de 3. Estas cartas serão divididas em três montes com a mesma quantidade de cartas. O “mágico” solicitará ao aluno que ele retire dos montes das pontas (monte 1 e monte 3), a mesma quantidade de cartas, porém, inferior ao número de cartas em cada monte, considerando como monte 1 o monte da esquerda, o monte 2 o do meio e o monte 3 o da direita. Essas cartas deverão ser colocadas no monte do meio (monte 2). É importante anotar esse número de cartas retirado de cada monte, pois o “mágico” o utilizará no final do truque. Em seguida, pedirá que o aluno retire do monte do meio (monte 2) a mesma quantidade de cartas que restaram no monte da direita (monte 3). Vale lembrar que poderia ser escolhido o monte da esquerda (monte 1), pois ambos possuem a mesma quantidade de cartas. Para concluir, o “mágico” pergunta qual foi o número anotado pelo aluno e com essa informação é dito o número de cartas que estão no monte do meio (monte 2).

Link para visualizar a performance do truque no Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=Ui7uGMZAYl0>

2.4.1 Revelando a mágica 3

Seja n o número de cartas em cada monte e x o mesmo número de cartas retiradas de cada monte 1 e 3, e colocadas no monte 2.

Inicialmente temos a seguinte distribuição de cartas em cada monte:

<u>Monte 1</u>	<u>Monte 2</u>	<u>Monte 3</u>
n	n	n .

Após a retirada das x cartas do monte 1 e do monte 3, reagrupando-as no monte 2, temos:

<u>Monte 1</u>	<u>Monte 2</u>	<u>Monte 3</u>
$n - x$	$n + 2x$	$n - x$.

Subtraindo do monte 2 o total de cartas restante no monte 3, temos:

$$\begin{array}{c} \underline{\text{Monte 2}} \\ n + 2x - (n - x) = 3x \text{ cartas.} \end{array}$$

Assim, concluímos que o total de cartas do monte do meio (monte 2) é o triplo do valor retirado dos montes 1 e 3 e anotado pelo aluno.

Como exemplo numérico, suponhamos que o aluno tenha escolhido 30 cartas. Dividindo estas cartas em três montes, com a mesma quantidade em cada monte, teríamos a seguinte configuração:

<u>Monte 1</u>	<u>Monte 2</u>	<u>Monte 3</u>
10	10	10

Ao solicitar ao aluno que ele anote em um papel o mesmo número de cartas retiradas de cada monte 1 e 3, sendo este valor menor que o número de cartas em cada monte. Nesse caso um valor menor do que 10. Suponhamos que o valor escolhido seja 2. Em seguida, é pedido para que seja retirada essa quantidade de cartas do monte 1 e monte 3 colocando-as no monte do meio (monte 2).

<u>Monte 1</u>	<u>Monte 2</u>	<u>Monte 3</u>
$10 - 2$	$10 + 2 + 2$	$10 - 2$,

<u>Monte 1</u>	<u>Monte 2</u>	<u>Monte 3</u>
8	14	8

Nesse momento, o aluno retira do monte do meio (monte 2) a mesma quantidade de cartas que restaram no monte 3 (lembrando que poderia ser o monte 1 pois ambos têm a mesma quantidade).

Monte 2

$$14 - 8 = 6.$$

O resultado 6 é exatamente o triplo do valor anotado pelo aluno. Vale ressaltar que este truque pode ser realizado com um número ímpar de montes.

Link para visualizar a solução do truque no Youtube:

<<https://www.youtube.com/watch?v=dX5vxD0nE-4>>

2.5 Mágica número 4: A carta sorteada (Expressões Algébricas e Equações do 1º grau)

Nesse truque utilizamos, de modo semelhante ao anterior, um baralho com 52 cartas como na figura 2. Inicialmente, distribuímos uma carta de baralho (apenas uma) para cada aluno da turma e escrevemos no quadro a convenção numérica mostrada na figura 16.

Figura 16 – Valor da carta e valor de cada naipe.

	2	3	...	10	Valete	Dama	Rei	Ás
Valor da carta	2	3	...	10	11	12	13	14
Valor do naipe	Paus  = 1	Espadas  = 2	Ouros  = 3	Copas  = 4				

Fonte: SÁ, Ilydio, A magia da matemática, 2010.

Em seguida, peça que os alunos efetuem as operações, geradas pela seguinte sequência de instruções:

1. multiplicar por 2 o valor da carta;
2. somar 4 ao resultado obtido;
3. multiplicar a soma obtida por 5;
4. somar o valor do naipe da carta.

Para descobrir a carta de cada aluno temos que, apenas subtrair 20 do resultado que ele obteve; em seguida, separe com um ponto o algarismo da unidade. Esse algarismo indicará o naipe da carta e o número formado pelos demais algarismos indicará a carta do aluno.

Link para visualizar a performance do truque no Youtube:

<<https://www.youtube.com/watch?v=EGW9QrcVUtU>>

2.5.1 Revelando a mágica 4

Vamos representar por x o valor numérico da carta sorteada a um aluno e por b o valor do naipe escolhido. Seguindo as instruções, temos:

1° passo: $2x$,

2° passo: $(2x + 4)$,

3° passo: $(2x + 4).5 = 10x + 20$,

4° passo: $10x + 20 + b = 10x + b + 20$.

Observe que ao subtrairmos 20 teremos como solução $10x + b$. Assim, entendemos o porquê de subtrair o resultado final por 20. Dessa forma, o que restar corresponderá a $10x + b$, que é um número com dois ou três algarismos, sendo o algarismo da unidade representado por b que indicará o valor do naipe e os algarismos restantes indicarão o valor da carta sorteada pelo aluno. É importante lembrar que é possível criar variações desse truque desde que seja mantida a expressão $10x + b$.

Link para visualizar a solução do truque no Youtube:

<<https://www.youtube.com/watch?v=rTeJfdWwv-c>>

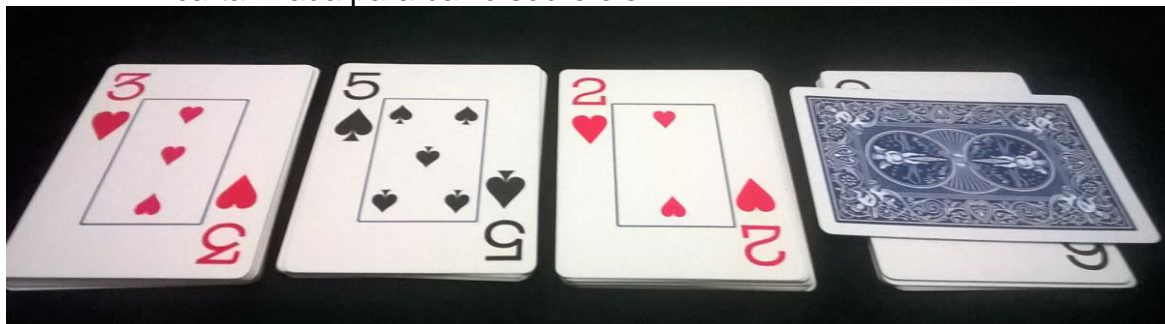
2.6 Mágica número 5: O coração das cartas (Equação do 1º grau com duas Variáveis)

Neste truque utilizamos novamente um baralho com 52 cartas como na figura 2. Inicialmente, o “mágico” divide o baralho em dois grupos: o grupo 1 (que ficará com o mágico), com 43 cartas e grupo 2 (que ficará com o aluno), com 9 cartas. No grupo 2, o “mágico” solicita que o aluno olhe as cartas e escolha uma de sua preferência; é importante que o “mágico” não veja qual foi a carta escolhida. Após o aluno escolher uma carta, o “mágico” pede para que ele coloque as sobras do grupo 2, viradas para baixo, sobre uma mesa. Em seguida, o “mágico” solicita ao aluno que coloque a carta escolhida em cima das cartas que estão na mesa, sobras do grupo 2, também virada para baixo. Neste momento, o “mágico” coloca todas as cartas do grupo 1 sobre a carta escolhida, reagrupando as 52 cartas novamente. Nesta etapa, o “mágico” irá fazer uma contagem regressiva, começando do valor 10, o “mágico” pega as 52 cartas que estão viradas para baixo e vira a primeira falando 10. Se coincidir a fala com o valor da carta, ele pára, ou seja, se ele falar 10 e sair a carta com o algarismo 10 (independente de qual seja o naipe, considerando Rei valendo 13, Dama 12, Valete 11 e Ás 1), ele pára a contagem e esse valor de coincidência da fala do “mágico” com o valor da carta representa uma pista para a descoberta da posição da carta escolhida, mas, se não coincidir, ele continua até ocorrer uma coincidência. Caso tenha acabado a contagem e nenhuma carta coincidiu, ele pega mais uma carta e coloca, virada para baixo, sobre essas dez cartas viradas para cima, finalizando o primeiro monte. Esse processo será repetido para a formação de quatro montes. Ao repetir esse processo em quatro montes, o somatório dos valores que coincidiram (a fala da contagem regressiva com valor da carta) fornecerá exatamente a posição da carta escolhida pelo aluno.

Exemplo: Suponhamos que no primeiro monte durante a contagem regressiva a coincidência entre a fala e a carta tenha ocorrido com o número 3. Dando início ao segundo monte imagine que houve uma coincidência com o algarismo 5, no monte três com o algarismo 2 e no monte quatro não houve coincidência. Neste caso, o mágico colocou uma carta virada para baixo sobre esse monte. A posição da carta escolhida pelo aluno será exatamente a soma $3 + 5 + 2 = 10$, conforme a figura 17.

Portanto, o “mágico” tira dez cartas do grupo de cartas que sobraram e a décima carta é a carta escolhida pelo aluno.

Figura 17 – Quatro montes, o primeiro (da esquerda para a direita) com o valor 3, o segundo com o valor 5, terceiro com o valor 2 e o quarto com uma carta virada para baixo sobre ele.



Fonte: O Autor, 2016

Link para visualizar a performance do truque no Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=C608ROJixg8>

2.6.1 Revelando a mágica 5

O segredo deste “truque” está na quantidade de cartas em cada grupo. No grupo 2, é forçado pelo “mágico”, sem que o aluno perceba, a construção de um grupo de nove cartas e delas o aluno escolhe uma, colocando as outras oito na mesa viradas para baixo e, em seguida, colocando também virada para baixo, a carta escolhida sobre as oito cartas que estão na mesa. Neste momento, o “mágico” coloca todas as cartas do grupo 1, que são 43 cartas, sobre a carta escolhida, fazendo com que a carta do aluno seja a quadragésima quarta carta. Em seguida, o “mágico” inicia a contagem regressiva da forma que segue.

Monte 1: falou 10 mas apareceu o algarismo 7, deixou o 7 na mesa e continuou; falou 9 e apareceu o algarismo 5, deixou o cinco sobre o 7 e continuou; falou 8 e saiu o algarismo 8. Como a fala coincidiu com o algarismo da carta, o “mágico” encerra a contagem e vai para o segundo monte. Observe que no primeiro monte já saíram 3 cartas (os algarismos 7, 5 e 8).

Monte 2: falou 10 mas apareceu o algarismo 3, deixou o 3 na mesa e continuou; falou 9 e apareceu o algarismo 9. Como a fala coincidiu com o algarismo da carta, o “mágico” encerra a contagem e vai para o terceiro monte. Observe que no segundo monte já saíram 2 cartas (os algarismos 3 e 9).

Monte 3: falou 10 mas apareceu o algarismo 9, deixou o 9 na mesa e continuou; falou 9 e apareceu o algarismo 5, deixou o 5 sobre o 9 e continuou; falou 8 e saiu o algarismo 6, deixou o 6 sobre o algarismo 5 e continuou; falou 7 e apareceu o algarismo 7, como a fala coincidiu com o algarismo da carta, o “mágico” encerra contagem e vai para o quarto monte. Observe que no terceiro monte já saíram 4 cartas (os algarismos 9, 5, 6 e 7).

Monte 4: a contagem regressiva não coincidiu em nenhum momento com os algarismos mostrados, logo o número de cartas no monte 4 será de 11 cartas, que são as 10 da contagem regressiva mais uma que colocamos por cima pra encerrar o monte que não gerou coincidência.

Como no monte 1 a coincidência foi com o algarismo 8, no monte 2 foi com o algarismo 9, no monte 3 com o algarismo 7 e no monte quatro não teve coincidência, implica que a posição da carta escolhida é exatamente a soma $8 + 9 + 7 = 24$. Logo, a vigésima quarta carta é a carta escolhida pelo aluno. Observe que no monte 1 tínhamos retirado um total de 3 cartas e a coincidência foi com o algarismo 8, que no final do processo também representa uma quantidade de cartas que é retirada, ou seja, o monte 1 foi responsável pela retirada de 11 cartas. Como no monte 2 tínhamos tirado 2 cartas e a coincidência foi com o algarismo 9, que também representará uma quantidade de cartas a serem retiradas, logo, o monte 2 também será responsável pela retirada de 11 cartas. A mesma situação acontece nos montes 3 e 4. Isso nos garante a retirada de 44 cartas sendo a última justamente a carta escolhida pelo aluno. Interessante notar que sempre sairão 11 cartas de cada um dos quatro montes, garantindo a retirada de 44 cartas.

Algebricamente podemos escrever no monte 1 que a coincidência aconteceu com um valor x sendo que já tinham saído um número y e visto que o número de cartas que saem de cada monte é igual a 11, podemos escrever: $x + y = 11$. Lembrando que no exemplo anterior, no monte 1, a coincidência aconteceu com a carta 8, então, neste caso, x é igual a 8 fazendo com que o y assumo o valor 3.

Se no monte 2 chamarmos o valor que coincidiu com a fala de z e chamarmos de w as cartas que já tinham saído na construção desse monte temos: $z + w = 11$.

Como vimos no exemplo, a coincidência no monte 2 aconteceu com a carta 9. Logo o z é 9 e o valor do w é 2. Isso vale para os demais montes. Assim, um questionamento pertinente a se fazer, logo após a aplicação e revelação do truque, é sobre o número de soluções inteiras não negativas que cada equação de coeficiente unitário pode admitir.

Toda equação da forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = p, \quad (p \in \mathbb{N}).$$

É chamada de equação linear de coeficientes unitários na qual as incógnitas são:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n.$$

Considerando, por exemplo, a equação $x + y = 11$, vamos encontrar o número de soluções inteiras não negativas. Exemplo de soluções (3,8); (0,11); (10,1).

O problema se resume em dividir 11 elementos em dois grupos, podendo não ter elemento em um dos grupos.

$$\begin{array}{l} \dots | \dots \dots \dots \dots \dots \dots (3,8) \\ | \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (0,11) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots | \dots (10,1) \end{array}$$

Podemos observar que cada solução está associada a uma disposição de um separador (|) e 11 elementos (.), ou seja, para calcularmos o número de soluções inteiras não negativas desta equação devemos calcular de quantas maneiras podemos dispor os elementos (.) e o separador (|).

Link para visualizar a solução do truque no Youtube:

<<https://www.youtube.com/watch?v=d4o0Lcu7Gy0&t=70s>>

3 APLICANDO ALGUMAS MÁGICAS

3.1 Aplicando a Mágica 1: Reorganizando as cartas (Potenciação)

As hipóteses levantadas na Análise a Priori eram as de que esse truque traria uma reflexão sobre o que é uma potência e como se “comportam” seus componentes, isto é, seja y um número real e b um número natural, uma potência de base y e expoente b é o número y^b tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^0 = 1 , \\ y^b = y^{b-1} \cdot y, \text{ para todo } b, b \geq 1 . \end{array} \right.$$

Dessa definição decorre que:

$$y^1 = y^0 \cdot y ,$$

$$y^2 = y^1 \cdot y = y \cdot y ,$$

$$y^3 = y^2 \cdot y = (y \cdot y) \cdot y = y \cdot y \cdot y .$$

e, de modo geral, para b natural e $b \geq 2$, temos que y^b é o produto de b fatores iguais a y .

Esperava-se que o aluno pudesse observar o crescimento da diferença entre as cartas após a divisão do baralho em dois montes de forma alternada seguido do reagrupamento. Assim, iniciando uma discussão para que fossem atendidas as hipóteses referidas acima.

Para a realização dessa tarefa, a turma foi dividida em grupos de aproximadamente 4 alunos. Após a realização do truque, aproveitando o fato dos alunos ainda estarem impactados, impressionados e curiosos, deu-se o início de um debate acerca do truque apresentado.

De imediato um aluno fez a primeira pergunta.

– “ Professor, você fez isso usando matemática?”

Um segundo aluno perguntou:

– “ Nós vamos aprender a fazer isso?”

Aproveitando esse momento de atenção, desenvolvemos os passos apresentados abaixo.

1° Passo: Foi proposto que considerassem as nove cartas como se fossem um ciclo, sendo assim, poderíamos girar no sentido horário ou no anti-horário.

2° Passo: Realizando o truque novamente (Mágica 1: Reorganizando as cartas), só que agora, após o término da primeira divisão das nove cartas em dois montes de cartas com o reagrupamento em seguida, foi mostrado aos alunos essa nova organização para que descrevessem o que eles percebiam de mudança em relação à organização inicial das cartas.

Não demorou muito e um aluno comentou:

– “Tá indo de dois em dois e antes era de um em um”.

Em pouco tempo todos concordaram com esse comentário. Aproveitando essa discussão, foi colocado no quadro o que estava acontecendo com a organização das cartas.

3° Passo: Repetindo o processo de distribuição das cartas em dois montes e em seguida reagrupando-as, foi mostrado novamente e perguntado novamente, o que era possível de se perceber na nova organização das cartas. Dessa vez, levou um pouco de tempo mas um aluno comentou:

– “Agora tá indo de quatro em quatro.”

Tivemos que recordar que as nove cartas formavam um ciclo e visualizar que se poderia girá-las no sentido horário ou anti-horário. Assim, todos perceberam que a diferença era de quatro unidades. Assim, anotamos no quadro mais essas observações.

4° Passo: Repetindo o processo pela terceira vez e mostrando aos alunos o resultado da organização das cartas, mais uma vez, foi perguntado o que era possível se perceber na nova organização. Tivemos respostas variadas dessa vez.

Um aluno de imediato falou:

– “Está indo de seis em seis.”

Um erro comum, pois como na primeira vez, ele viu que a diferença era de duas unidades, em seguida passou a ser de quatro unidades, levando-o a crer que essa diferença sempre cresceria de dois em dois. No entanto, não demorou muito para outro aluno discordar dizendo:

– “Não! Arrumou tudo novamente, tá indo de um em um.”

Depois de muita discussão um aluno comentou:

– “Professor, podemos dizer que está indo de oito em oito, já que podemos considerar como um ciclo?”

Após esse comentário, voltamos a anotar essas informações no quadro e, novamente, relembramos a ideia do ciclo. Com algumas explicações, todos perceberam a diferença de oito unidades.

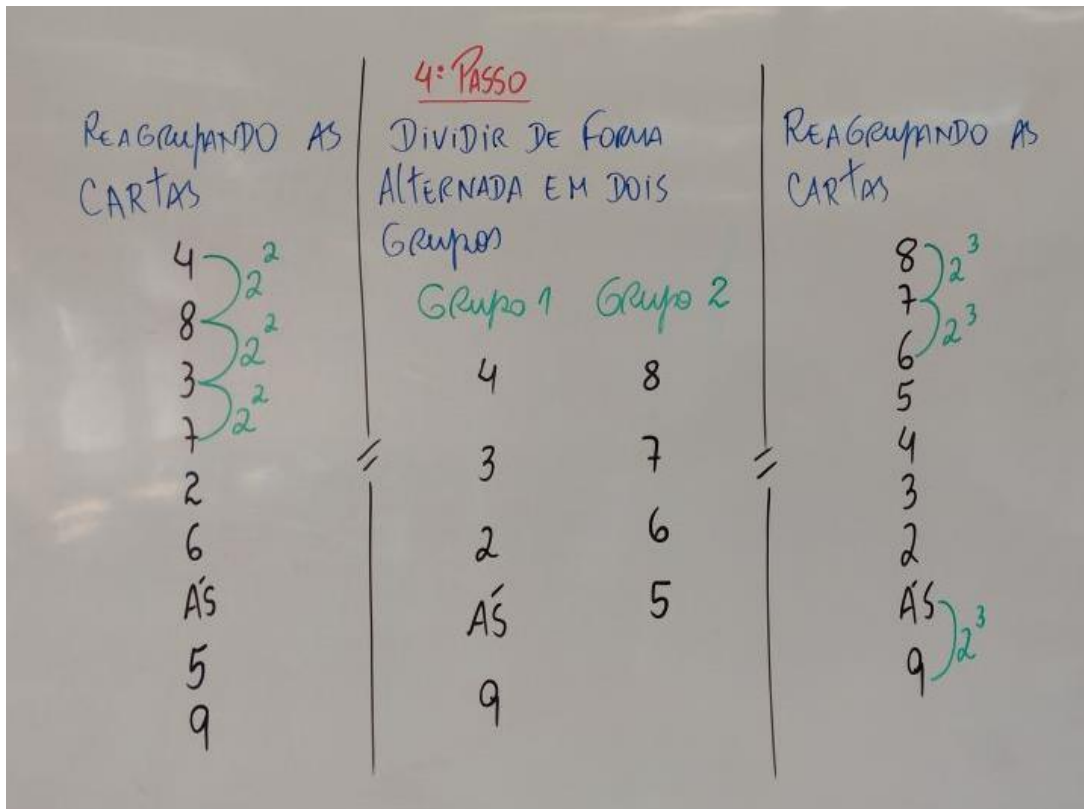
Como são alunos do 1º ano do ensino médio, o assunto potenciação já foi visto por eles algumas vezes mas, mesmo assim, alguns alunos continuam cometendo erros simples como, por exemplo, 2^3 igual a 6. Para buscar sanar essas dúvidas, voltamos às anotações feitas no quadro com o objetivo de extrair o máximo de informações relacionadas à potenciação encontradas nesse truque.

Não tivemos muita dificuldade em perceber que a diferença de duas unidades poderia ser escrita da forma 2^1 e que a diferença de quatro unidades da forma 2^2 . Neste momento, alguns alunos perguntaram se tudo sairia com potência de base 2. Desta forma, continuamos o processo para observar se isso realmente aconteceria. Restava explicitar uma potência de base 2 que resultaria em uma diferença de uma unidade e oito unidades. Um aluno percebeu que a diferença de oito unidades poderia ser escrita como 2^3 . A diferença de uma unidade foi a mais complicada de ser percebida e como escrevê-la na base 2. Enfim, com algumas explicações, foi possível escrevê-la como 2^0 . Todas essas anotações foram feitas no quadro conforme figuras 18 e 19.

Figura 18 – Anotações no quadro (Parte 1)

1º PASSO		2º PASSO		3º PASSO	
ORGANIZADAS		DIVIDIR DE FORMA ALTERNADA EM DOIS Grupos		DIVIDIR DE FORMA ALTERNADA EM DOIS Grupos	
Ás	2^0	Ás	2	2	4
2	2^1	3	4	6	8
3	2^2	5	6	Ás	3
4	2^3	7	8	5	7
5		9		9	
6					
7					
8					
9					

Figura 19 – Anotações no quadro (Parte 2)



Fonte: O Autor, 2016

Depois de todas as discussões e observações, tentamos entender se seria possível realizar o truque com outra quantidade de cartas. Para isso, começamos a observar o que tínhamos feito com as nove cartas. Lembramos que tínhamos dividido as nove cartas em dois montes e esse processo foi repetido três vezes para que as nove cartas correspondessem à formação inicial, conseguindo a diferença de 8 unidades entre as cartas ou 2^3 . Após esta revisão, o professor fez as seguintes perguntas:

- “Será que se dividirmos as cartas em três montes ao invés de dois, a potência passará a ser de base três?”
- “Quando dividimos as nove cartas em dois montes a diferença foi de duas unidades, ao dividirmos novamente a diferença passou a ser de quatro unidades e na terceira vez de oito unidades. Se dividirmos em três montes a diferença será de três unidades?”
- “Se dividirmos em três montes novamente a diferença será de nove unidades?”

Para que os alunos pudessem ver na prática e tentar responder essas perguntas, foi dado a cada grupo um baralho completo. Após algum tempo, eles

perceberam que se dividissem em três montes, a diferença entre as cartas cresceria numa potência de base 3, o que possibilitou a proposição da seguinte atividade.

– “Será possível que com 28 oito cartas posso realizar esse truque usando potência de base 3?”

Os alunos foram orientados a pegar dois naipes completos, resultando num total de 26 cartas e que completassem com os dois coringas, cartas extras, para chegar nas 28 cartas desejadas.

Ao praticarem o problema proposto, perceberam que na terceira vez que efetuaram a divisão das cartas em três montes, as 28 cartas estavam novamente com a diferença de uma unidade o que correspondia à organização inicial. Procuramos extrair algumas observações, já que foram efetuados apenas três vezes a divisão das cartas nos três montes, o que daria uma diferença de 27 unidades ou 3^3 , sendo que temos um total de 28 cartas. Neste momento, foi feito o seguinte comentário.

Quando tínhamos 9 cartas a última potência que gerou a organização das cartas foi 2^3 e com 28 cartas a potência foi de 3^3 , o que levou a pergunta:

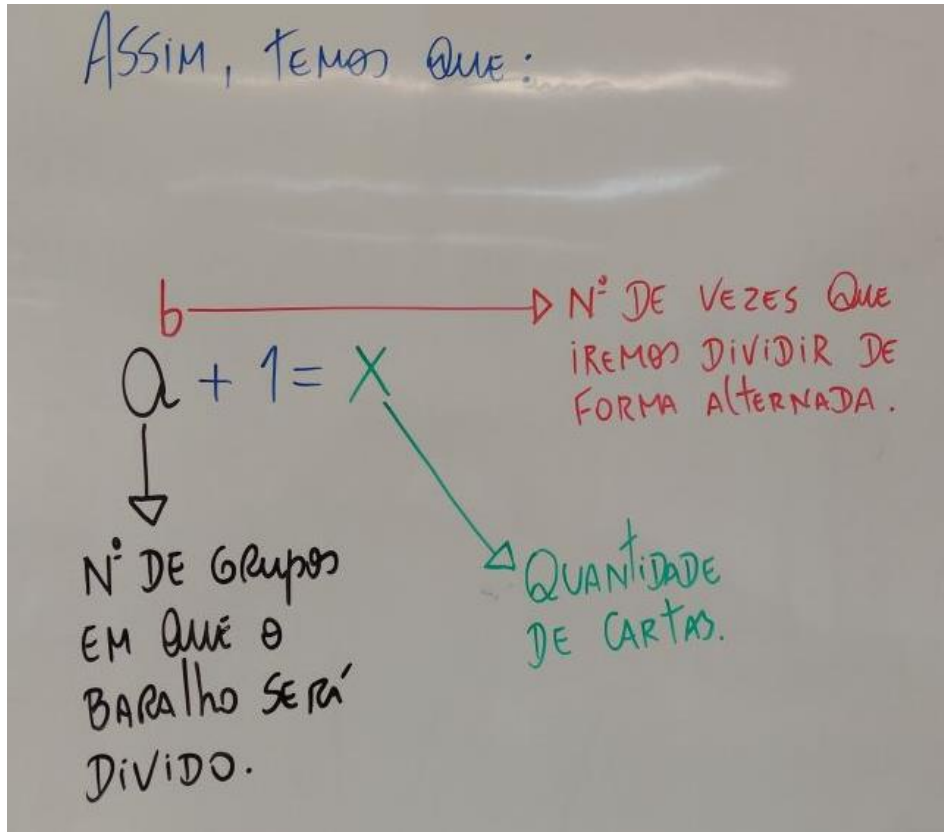
– “O que se pode perceber em relação a quantidade total de cartas e essas potências?”

Não demorou muito e um aluno comentou.

– “Tem sempre uma carta a mais, comparando com a potência.”

Com a concordância dos demais alunos, começamos a escrever no quadro a quantidade de cartas, sendo esta, a última potência mais uma unidade ficando assim, $2^3 + 1 = 9$, para o quantitativo de nove cartas e, $3^3 + 1 = 28$, para o caso com 28 cartas. A partir dessas observações, construímos uma expressão geral do tipo $a^b + 1 = x$, onde a base a representa o número de grupos ou montes nos quais o baralho é dividido, o expoente b representa a quantidade de vezes que o processo de dividir cartas de forma alternada será realizado e x o número total de cartas utilizada no truque. Essas discussões foram anotadas no quadro, conforme figura 20.

Figura 20 – Anotações no quadro (Parte 3)



Fonte: O Autor, 2016

Atividades Propostas

- 1) Dadas as quantidades de cartas abaixo, pratique a mágica que aprendemos anteriormente e expresse esse valor como uma potência mais uma unidade.
 - a) 17 cartas
 - b) 33 cartas
 - c) 50 cartas
 - d) 10 cartas

A turma foi dividida em 4 grupos, sendo 3 grupos com 4 alunos e um grupo com 3 alunos. Como resultado, observamos que a maioria dos alunos (3 grupos) apresentaram uma solução considerando a prática que realizamos. A alternativa a) foi a que mais gerou conflito pois alguns alunos dividiram em dois montes, fazendo

essa divisão quatro vezes, ficando da forma $2^4 + 1 = 17$, enquanto que outro grupo dividiu em quatro montes fazendo essa divisão por duas vezes tendo como solução $4^2 + 1 = 17$, sendo que ambas soluções estão corretas.

3.2 Aplicando a Mágica 2: As três últimas cartas (Progressão Aritmética)

Para esse truque temos como hipóteses de Análise a Priori a serem alcançadas, o que é uma progressão aritmética (P.A), os termos da progressão, a quantidade de termos e a razão da P.A. Novamente dividimos a turma em grupos, sendo 2 grupos com 4 alunos e dois grupos com 3 alunos. Foi aplicado o truque e mais uma vez os alunos apresentaram um semblante de espanto com grande curiosidade em descobrir o que estava por trás deste. A primeira observação feita por um aluno foi.

– “O segredo deve estar na quantidade de cartas em cada monte, né Professor?”

Como já tínhamos realizado a mágica 1, reorganizando as cartas, alguns alunos já estavam mais atentos e, assim, foi iniciada uma sequência de passos para a aplicação dessa experimentação.

1° Passo: Iniciamos uma discussão lembrando que foram utilizadas 52 cartas e que cada uma delas receberia o nome de termos de uma P.A. Sendo o primeiro termo chamado de carta 1, o segundo termo de carta 2, o terceiro termo de carta 3 e assim por diante.

2° Passo: Foi dito a quantidade de cartas em cada monte, ver página 40. O primeiro monte com 10 cartas, o segundo com 15 cartas, o terceiro com 15 cartas e o quarto com 9 cartas. Efetua-se as divisões dos quatro montes e, conforme mencionamos anteriormente quando revelamos o truque, distribuimos as três cartas escolhidas sobre eles e, assim, iniciamos uma discussão para entender a posição das cartas escolhidas após o reagrupamento em um único monte.

3° Passo: Sabíamos que no quarto monte tínhamos 9 cartas e essas seriam colocadas sobre o terceiro monte que tinha sobre ele uma das cartas escolhidas.

Portanto, conseguimos chegar à conclusão que uma das cartas escolhidas ficaria na décima posição, o que corresponde ao décimo termo da P.A com nome de carta 10 como chamamos no passo 1.

4° Passo: Neste momento, o terceiro monte já está agrupado com o quarto monte, obtendo um total de 25 cartas. Essas cartas, então, são colocadas sobre o segundo monte que tinha sobre ele outra das cartas escolhidas. Em seguida, foi levantada a seguinte questão:

– “Qual é a posição dessa segunda carta escolhida?”

Com um pouco de demora e dificuldade de alguns alunos, chegamos à conclusão que esta seria a vigésima sexta (vigésimo sexto termo da P.A.), com nome de carta 26 como chamamos no passo 1.

5° Passo: Tendo um total de 41 cartas no segundo monte, vamos colocá-las sobre o primeiro monte que tem sobre ele a última carta escolhida, levando à seguinte pergunta:

– “Qual seria a posição da última carta escolhida na sequência que estávamos construindo?”

Rapidamente foi dito por um aluno.

– “Posição 42, professor!”

Os demais concordaram e, assim, concluímos que essa última carta da sequência ocuparia a quadragésima segunda posição ou quadragésimo segundo termo da P.A com o nome de carta 42 conforme passo 1.

Essas observações foram transcritas no quadro para que não se perdesse nenhuma informação. Nesse momento, foi dito que tínhamos uma P.A. com 52 termos e que cada termo era o anterior somado com uma constante chamada razão da P.A. implicando na questão:

– “Qual seria o valor da razão nesse momento do truque?”

Um aluno comentou:

– “Não estou entendendo nada!”

Esse comentário levou à seguinte questão:

– “Qual valor foi somado no primeiro termo para obter o segundo?”

Rapidamente, grande parte dos alunos disseram 1. Então, essa é a razão da P.A. nessa etapa.

Após anotar no quadro todas as informações, iniciamos uma nova discussão, agora sobre o porque de começar com uma carta virada para cima e outra para baixo, lembrando que as cartas viradas para cima seriam eliminadas, ver página 40. Analisando o que tínhamos anotado no quadro, perguntamos:

– “Os termos das cartas escolhidas são pares ou ímpares?”

Todos concordaram que eram pares e logo foi percebido a necessidade de iniciar o processo com uma carta virada para cima, o que nos possibilitaria eliminar os termos ímpares. Todas as etapas dessa discussão estavam sendo anotadas no quadro, conforme figura 21.

Figura 21 – Anotações no quadro (Parte 4)

26/09/16
 XIAGO
 BERTO
 MATEMÁTICA

* CARTAS ESCOLHIDAS

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{52}$
 SÃO OS TERMOS DA P.A.
 TEMOS UMA P.A. COM
 52 TERMOS NA
 1ª ETAPA.
 P.A. DE RAZÃO 1.

MAGICA 2

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

$a_1 = 1$	$a_{14} = 14$	$a_{27} = 27$	$a_{40} = 40$
$a_2 = 2$	$a_{15} = 15$	$a_{28} = 28$	$a_{41} = 41$
$a_3 = 3$	$a_{16} = 16$	$a_{29} = 29$	$a_{42} = 42$ *
$a_4 = 4$	$a_{17} = 17$	$a_{30} = 30$	$a_{43} = 43$
$a_5 = 5$	$a_{18} = 18$	$a_{31} = 31$	$a_{44} = 44$
$a_6 = 6$	$a_{19} = 19$	$a_{32} = 32$	$a_{45} = 45$
$a_7 = 7$	$a_{20} = 20$	$a_{33} = 33$	$a_{46} = 46$
$a_8 = 8$	$a_{21} = 21$	$a_{34} = 34$	$a_{47} = 47$
$a_9 = 9$	$a_{22} = 22$	$a_{35} = 35$	$a_{48} = 48$
$a_{10} = 10$ *	$a_{23} = 23$	$a_{36} = 36$	$a_{49} = 49$
$a_{11} = 11$	$a_{24} = 24$	$a_{37} = 37$	$a_{50} = 50$
$a_{12} = 12$	$a_{25} = 25$	$a_{38} = 38$	$a_{51} = 51$
$a_{13} = 13$	$a_{26} = 26$ *	$a_{39} = 39$	$a_{52} = 52$

Fonte: O Autor, 2016

Assim que foi concluída essa primeira etapa, onde as cartas viradas para cima foram descartadas, continuamos o truque, só que agora com 26 cartas, ou seja, 26 termos de uma P.A., o que nos leva ao próximo passo.

6° Passo: Nessa nova etapa temos 26 termos e para facilitar a identificação de quem são esses termos, fizemos riscos no quadro, figura 21, eliminando os termos ímpares, restando os termos pares que são os 26 termos dessa nova P.A.

7° Passo: Mostrando na prática essa eliminação dos 26 termos ímpares, questionou-se:

– “Qual carta será o primeiro termo dessa nova P.A com 26 termos?”

Alguns alunos responderam carta 2 outros responderam carta 52. Ao mostrarmos novamente na prática, os que responderam carta 2 perceberam que estavam errados e concordaram que o correto era carta 52. Lembrando que as cartas escolhidas foram as cartas 10, 26 e 42.

8° Passo: Escrevemos os 26 termos no quadro, e foram feitas as seguintes perguntas:

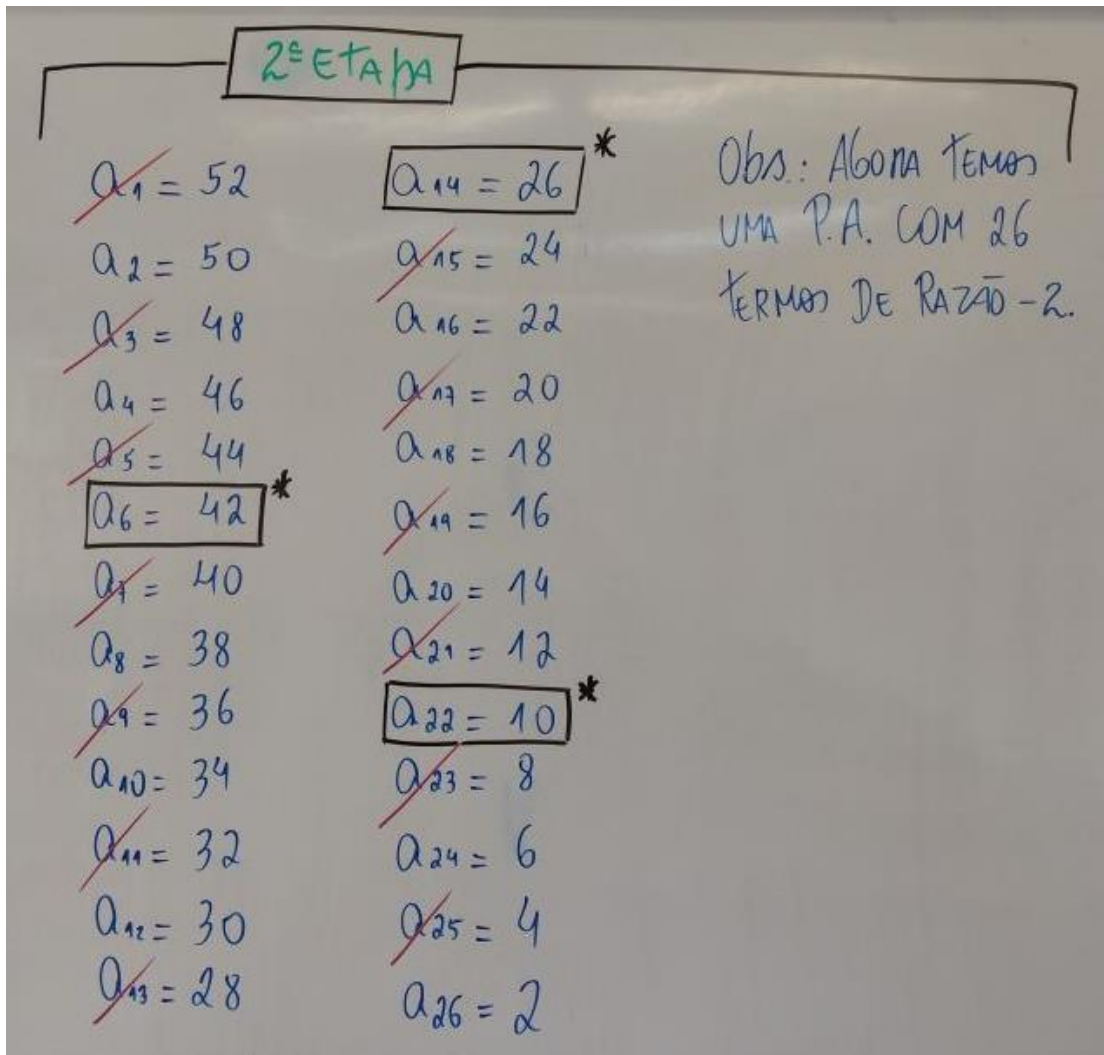
– “Os termos que representam as cartas escolhidas são pares ou ímpares?”

– “Qual a razão dessa nova P.A?”

Como já tínhamos aproveitado os cortes dos termos ímpares, figura 21, ficou fácil reescrever os 26 termos da nova P.A começando pela carta 52 como primeiro termo e a carta 2 como vigésimo sexto e último termo. A primeira pergunta foi facilmente respondida, já para a segunda tivemos duas respostas. Um grupo disse que a razão era 2 e outro – 2. Então, relembramos que deveríamos perguntar que valor somado no primeiro termo levaria ao segundo e assim por diante. Fizemos o experimento de somar 2 ao primeiro termo ficando com $52 + 2 = 54$. Imediatamente, o grupo que acreditava ser 2 a razão da P.A. entendeu que a razão correta era – 2.

9° Passo: Sabendo que as cartas escolhidas são termos pares dessa nova P.A, iniciamos eliminação das cartas ímpares colocando uma carta virada para cima e outra para baixo. Anotamos essas discussões e observações no quadro, conforme figura 22.

Figura 22 – Anotações no quadro (Parte 5)



Fonte: O Autor, 2016

Nessa etapa, após eliminar os termos ímpares com riscos como na figura 22, ficamos com uma P.A com 13 termos. Vamos para o próximo passo.

10º Passo: Iniciamos esta etapa com um questionamento de quem seria o primeiro termo dessa nova P.A com 13 termos. Nessa etapa, os alunos já estavam mais atentos e concluíram que seria a carta 2 e o último e décimo terceiro termo a carta 50. Duas perguntas foram feitas a seguir.

– “Os termos que representam as cartas escolhidas são pares ou ímpares?”

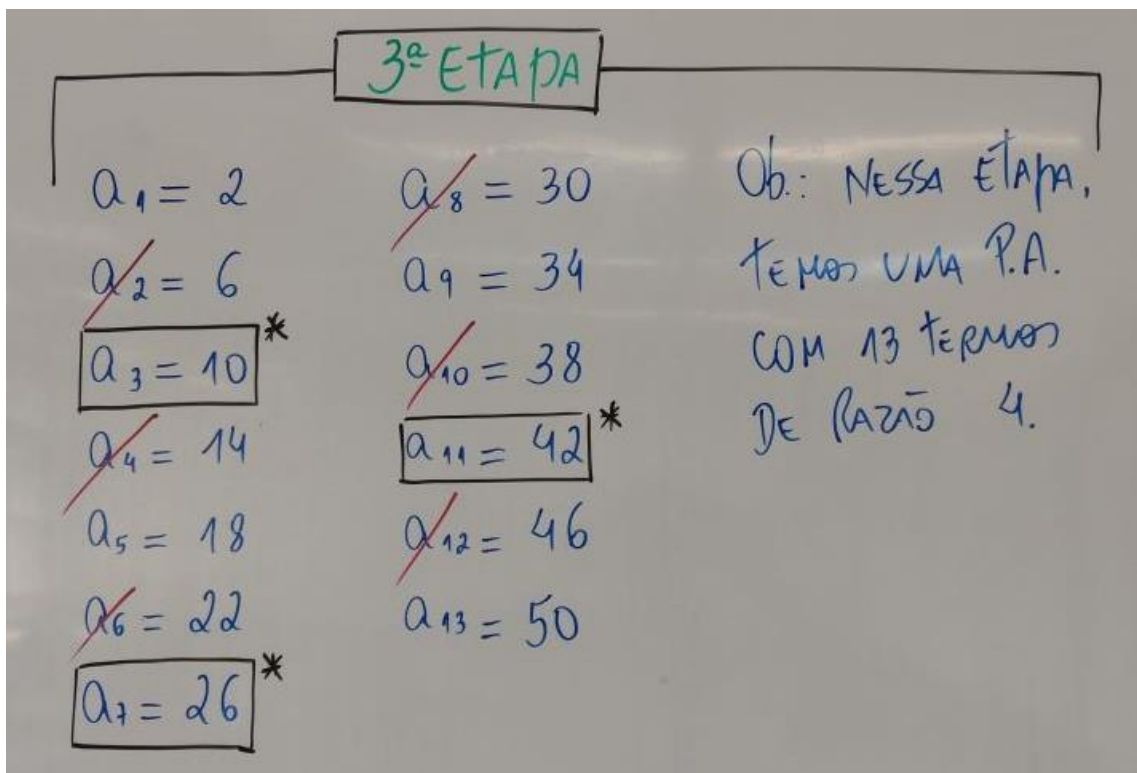
– “Qual a razão dessa nova P.A com 13 termos?”

Um aluno fez uma observação referente à primeira pergunta:

– “Ué, Professor. Agora os termos são ímpares?”

De fato, pois a carta 10 ocupa a posição do terceiro termo, a carta 26 a do sétimo termo e a carta 42 a do décimo primeiro termo. Quanto a segunda pergunta, a maioria concluiu que a razão era 4. Os que não entenderam, tiveram suas dúvidas sanadas pelos amigos do próprio grupo. Em seguida, os alunos fizeram como anteriormente, só que agora começando com uma carta virada para baixo e outra virada para cima. Assim, eliminando as cartas que correspondem aos termos pares. Para facilitar, novamente fizemos riscos nos termos eliminados dessa P.A que tínhamos anotado no quadro, conforme a figura 23.

Figura 23 – Anotações no quadro (Parte 6)



Fonte: O Autor, 2016

11º Passo: Após eliminar os termos pares, restou uma P.A com 7 termos. Questionou-se novamente quem seria o primeiro termo e quem seria o sétimo e último termo. Nessa etapa, com os alunos bem atentos, responderam de forma correta que o primeiro termo seria a carta 50 e o sétimo termo seria a carta 2. Anotamos essa nova P.A de 7 termos no quadro usando como referência a figura 24 e foi levantada a seguinte questão:

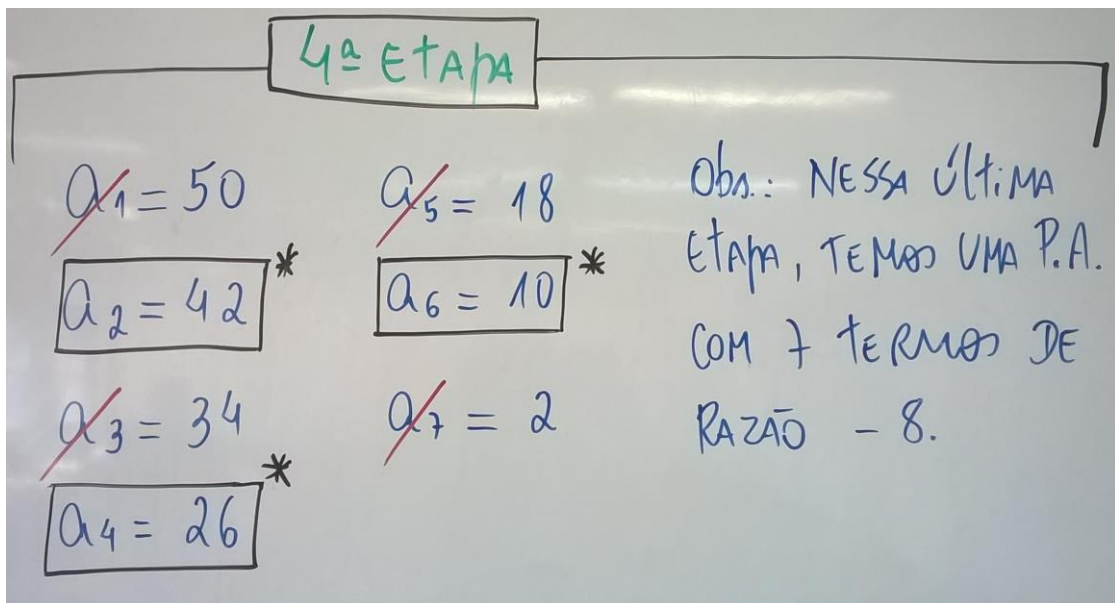
– “Qual a razão dessa nova P.A com 7 termos?”

Com um pouco de dificuldade concluímos que a razão era -8 . Poucos alunos disseram 8 como resposta e rapidamente foram lembrados do caso parecido, realizado anteriormente. Assim, foi dada sequência à experimentação. Ao observarmos as anotações do quadro, foi questionado se as cartas escolhidas correspondiam a termos ímpares ou pares. Nesse momento um aluno faz a seguinte observação:

– “Professor, os termos voltaram a ser pares.”

De fato, pois a carta 42 está no segundo termo, a carta 26 está no quarto termo e a carta 10 está no sexto termo. Anotamos as observações no quadro e fizemos, pela última vez, riscos nos termos ímpares para que visualizássemos que só restariam três cartas e essas correspondiam exatamente as três escolhidas no princípio do problema, conforme figura 24.

Figura 24 – Anotações no quadro (Parte 7)



Fonte: O Autor, 2016

Diferente da experiência da mágica 1 “Reorganizando as cartas”, onde o tema tratado “potenciação” já era conhecido pelos alunos, P.A é um assunto novo e a experimentação para se discutir algo novo mostrou-se bastante positiva. Em seguida, fizemos algumas atividades para verificar se algumas informações matemáticas ligadas ao truque foram bem esclarecidas.

Atividades Propostas

- 1) Dadas as progressões aritméticas, determine a razão e identifique o próximo termo de cada P.A.
 - a) $(-3, 0, 3, \dots)$
 - b) $(5, 5, 5, 5, \dots)$
 - c) $(4, 2, 0, -2, \dots)$

Desafio

Na Mágica 2, “As três últimas cartas”, são escolhidas 3 cartas e as 49 restantes são divididas em quatro montes sendo 10 cartas no primeiro monte, 15 no segundo monte, 15 no terceiro monte e 9 no quarto monte. Seria possível dividir essas 49 cartas em uma quantidade diferente de cartas em cada monte tornando possível a realização do truque? Dê um exemplo.

Nas atividades propostas, surgiu um questionamento na alternativa b) sobre qual seria a razão e se a sequência era uma P.A. Esses questionamentos fizeram com que discutíssemos a classificação de uma P.A, algo ainda não comentado. Aproveitando essa oportunidade, classificamos a letra a) como P.A crescente com razão igual a 3, a letra b) como constante de razão zero e a letra c) como decrescente de razão -2 . Obter os termos seguintes de cada P.A não foi dificuldade para a maioria dos alunos. O desafio foi solucionado por nenhum aluno sem a ajuda do professor. Após várias tentativas sem sucesso, o professor solicitou que os alunos observassem, novamente, a terceira etapa (figura 23) e, daí, retirassem uma possível distribuição das cartas nos 4 montes. Nesse momento, foi feita a seguinte pergunta:

“Se ao invés de começar com uma carta virada para baixo e outra para cima, fizéssemos o inverso, ou seja, com uma carta virada para cima e outra para baixo, quais cartas sobriam na quarta etapa?”

Os alunos responderam observando a terceira etapa (figura 23).

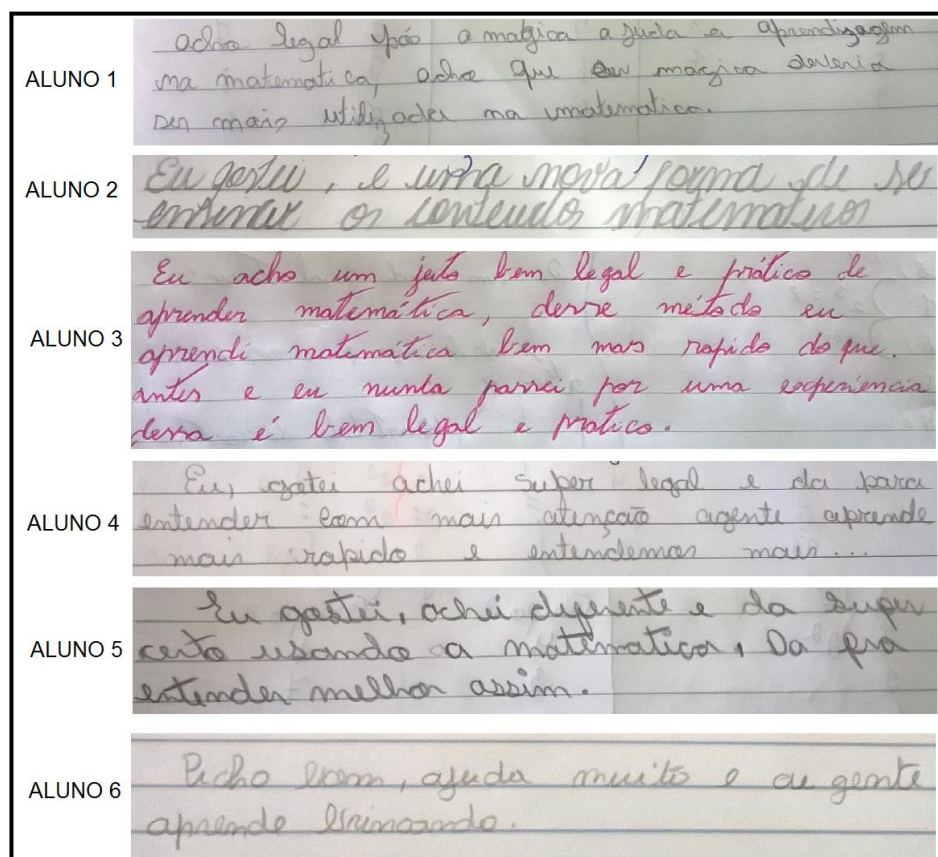
– “Cartas 6, 14, 22, 30, 38 e 46.”

Logo, se fizéssemos dessa forma, o primeiro termo da quarta etapa seria a carta 46, o segundo termo seria a carta 38, o terceiro termo seria a carta 30, o quarto termo seria a carta 22, o quinto termo seria a carta 14 e o sexto termo seria a carta 6. Nesse caso, se na quarta etapa continuássemos com uma carta virada para cima e outra para baixo, então restariam as cartas 38, 22 e 6 como as três últimas cartas. Portanto, ciente que essas seriam as três últimas cartas, fizemos uma nova distribuição de cartas para os 4 montes, colocando no monte 1 um total de 14 cartas, no monte 2 um total de 15 cartas, no monte 3 um total de 15 cartas e no monte 4 um total de 5 cartas.

Os alunos tiveram muita dificuldade em elaborar a nova distribuição das cartas e solicitaram para repetir a atividade em casa com mais calma.

Após a experimentação das duas mágicas, foi pedido para que alguns alunos relatassem a experiência de ter a “mágica” aliada ao ensino/aprendizagem da Matemática. Esses relatos podem ser vistos na figura 25.

Figura 25 – Relato dos alunos sobre a experimentação



Descrevemos a seguir, com correção, os relatos dos alunos, registrados na figura 23.

ALUNO 1: Acho legal, pois a mágica ajuda na aprendizagem da Matemática. Acho que a mágica deveria ser mais utilizada na Matemática.

ALUNO 2: Eu gostei, é uma nova forma de se ensinar os conteúdos matemáticos.

ALUNO 3: Eu achei um jeito bem legal e prático de aprender Matemática. Nesse método, eu aprendi Matemática bem mais rápido do que antes e eu nunca tinha passado por uma experiência dessa, é bem legal e prático.

ALUNO 4: Eu gostei, achei surper legal e dá para entender com mais atenção, a gente aprende mais rápido e entende mais.

ALUNO 5: Eu gostei, achei diferente e dá super certo usando a mágica. Dá para entender melhor assim.

ALUNO 6: Acho bom, e a gente aprende brincando.

Portanto, as hipóteses criadas na Análise a Priori foram bem atendidas nas anotações da experimentação, tornando válida as avaliações da pesquisa, não só pelo relato dos alunos, mas tomando por base, também, o registro do desenvolvimento das atividades em sala de aula.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Entendemos que não é possível ensinar todos os conteúdos matemáticos através de uma forma lúdica com jogos, mágicas e enigmas, porém, através dessa experimentação, registrada nesse trabalho, reforçou-se a ideia de que devemos buscar outras maneiras de ensinar Matemática. Ao serem apresentadas a mágica 1, “Reorganizando as Cartas”, e a mágica 2, “As Últimas Três Cartas”, foi despertado um novo olhar nos estudantes dessa pesquisa para a Matemática. Ver os alunos debaterem sobre potenciação, mesmo sendo um assunto já visto por eles, e aprenderem os principais conceitos sobre P.A, realmente, foi uma experiência gratificante. Os comentários em sala, relatos e ainda a busca de alunos de outras turmas querendo ver a Matemática em truques mágicos fizeram com que fosse concluído como positiva a quarta fase da Engenharia Didática. Reiteramos que é necessário que se complemente todas essas experimentações lúdicas com atividades tradicionais, como atividades em livros e em apostilas etc.

Esse trabalho, de fato, trouxe uma visão diferente de como se ensinar Matemática e, concordando com o que Artigue (1988) diz sobre a Engenharia Didática, é interessante tratar o professor como um “engenheiro” com a capacidade de construir uma didática com as ferramentas que estão à sua disposição. Nesse caso, essas ferramentas foram habilidades com mágicas já conhecidas pelo autor do trabalho.

Como produto final desse trabalho, além do relato da experiência desenvolvida em uma turma do CIEP 201, foi produzido um *blog* (<http://magicasematematica.blogspot.com.br/>) em que o professor interessado nesse tema pode encontrar a orientação adequada através de vídeos, onde são apresentados os truques de mágica em detalhes, com as devidas explicações da Matemática envolvida, *links* para acessar diversos filmes relacionados a essa pesquisa e indicações de livros e artigos.

Vale mencionar que parte desse trabalho foi apresentado, em forma de oficina, com uma excelente receptividade, na XII Semana do IME/UERJ em 2016 e na I Semana do Matemático no IME/UERJ em 2017.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag; Coutinho, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. Disponível em < <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/1981-1322.2008.v3n1p62/12137> >. Acesso 26/11/2016.

ALVES, Francisco Regis Vieira; Neto, Hermínio Borges. Uma Sequência Didática para explorar a regra de L'Hospital com o uso da Tecnologia. Disponível em < <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/9445/8147> >. Acesso 26/11/2016.

ARTIGUE, Michèlle. Engenharia Didática. In: BRUN, J. Didática das Matemáticas. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

ARTIGUE, Michèlle. Engenharia Didática.in. Didática das Matemáticas. Trab. Maria José Figueiredo, Delachaux et Niestlé, 1988.

BELMONTE, Sergio. Princípio de Gilbreath. Disponível em <<http://magiaymatematicas.blogspot.com.br/2013/12/principio-de-gilbreath.html>>. Acesso 26/11/2016.

BERENGUER, Maria Izabel Salles. Aplicação da Engenharia Didática no Ensino das Ciências Exatas. Disponível em <http://www.avm.edu.br/docpdf/monografiaspublicadas/t205982.pdf>. Acesso 26/11/2016.

Biblioteca Matemática da Universidade de Coimbra UC.PT. Disponível em http://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_matematicos/Gardner-M. Acesso 25/11/2016.

BORGES, Michele. A História da Mágica. Disponível em <<http://www.infoescola.com/artes/historia-da-magica/>>. Acesso 25/11/2016.

BRANDÃO, Carlos. O Que é Educação. São Paulo: Editora Brasiliense, 1981. 116 p. <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAFsQgAB/resenha-livro-que-educacao-carlos-rodrigues-brandao>. Acesso em 11/01/2017

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – Volume Introdutório. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BROUSSEAU, Guy. Problemes de Didatique des Decimaux. France texto p.38-128.

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques, vol.9, nº 3,p309- 336.Grenoble,1986.

BROUSSEAU, G. A Teoria das Situações Didáticas e a Formação do Professor. Palestra. São Paulo: PUC, 1996.

- CHAGAS, I. (1993). Aprendizagem não formal/ formal das ciências: Relações entre museus de ciência e escolas. Revista de Educação, 3 (1), 51-59. Lisboa.
<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/index.html/artigomuseus.pdf>. Acesso em 13/01/2017.
- CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.
- D`AMORE, Bruno. Elementos de Didática da Matemática [Tradução Maria Cristina Bonomi] São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contextos e Aplicações. E.M. Vol. Único. Editora: Ática, 2002.
- DAUDE, Rodrigo. Espaços Não Formais na Formação do Professor de Matemática. Disponível em <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/4363>>. Acesso 24/11/2016.
- DOLZ, J. e SCHNEUWLY, B. Gêneros e progressão em expressão oral e escrita. Elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona). In Gêneros Oraís e escritos na escola. Campinas (SP): Mercado de Letras. 2004.
- GARDNER, Martin. Divertimentos matemáticos. São Paulo: Ibrasa, 1967.
- GOHN, Maria da Glória. Educação não-formal, participação da sociedade civil e estruturas colegiadas nas escolas. Ensaio: aval. pol. públ. Educ., Rio de Janeiro, v.14, n.50, p. 27-38, jan./mar. 2006.
- GUIMARÃES, Gislaine. O Significado da Didática no Trabalho Pedagógico do Professor. Disponível em <<https://www.portaleducacao.com.br/educacao/artigos/58611/o-significado-da-didatica-no-trabalho-pedagogico-do-professor>>. Acesso em 23/11/2016.
- HOUAISS, Instituto Antônio. Dicionário da Língua Portuguesa. 4ª edição. Editora: Moderna. Rio de Janeiro, 2012.
- IEZZI, Gelson; Dolce, Osvaldo; Murakami, Carlos. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol. 2. 6ª Edição. Editora: Atual. São Paulo, 2005.
- IEZZI, Gelson; Dolce, Osvaldo; Murakami, Carlos, Hazzan. Fundamentos da Matemática Elementar. Vol. 5. 6ª Edição. Editora: Atual. São Paulo, 2005.
- LEIVAS, José; Cury, Helena. Transposição Didática: Exemplos em Educação Matemática. In: Educação Matemática em Revista –RS, n. 10, v. 1, p.65-74, 2009
Disponível em <http://www.unifra.br/professores/13935/Leivas_Cury-EMR.pdf> Acesso em 15/04/2017.
- LIBÂNIO, José Carlos. Didática. São Paulo: Cortez, 1991.
- LIBÂNIO, José Carlos. Didática. São Paulo: Cortez, 1994.

MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática: Temas e Metas. Vol. 2. Editora: Atual. São Paulo, 1997.

MACHADO, Silva Dias Alcântara. Educação Matemática: Uma Introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002.

Math.info, História de Luca Pacioli. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. Disponível em <<http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Pacioli>>. Acesso em 25/11/2016.

MOURA, Manoel. Jogos, Brinquedos, Brincadeiras e a Educação [Tizuko M. Kishimoto (org)] – 6.ed. – São Paulo: Cortez, 2002.

MORI, Iracema; Onaga, Dulce Satiko. Matemática Ideais e Desafios. E.F. 6º, 7º, 8º e 9º ano. Editora: Saraiva. 17ª edição. São Paulo, 2012.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática, uma análise da influência francesa. 2ª edição, Belo Horizonte: Autentica, 2002.

PAIS, Luis Carlos. Didática da Matemática; Uma análise da influência francesa – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PANTOJA, Lígia Françoise Lemos; Silva, Francisco Hermes Santos. Engenharia Didática: Articulando Um Referencial Metodológico Para o Ensino de Matemática na EJA. Disponível em <http://www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC6326_5869253T.doc>. Acesso 26/11/2016.

PERETTI, Lisiane; Tonin da Costa, Gisele Maria. Sequência Didática da Matemática. Revista de Educação do Ideau – Vol. 8 – Nº 17 - Janeiro - Junho 2013. Disponível em < http://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/31_1.pdf> Acesso em 14/04/2017.

PIVATTO, Wanderley; Shumahcher, Elcio. As Contribuições da Engenharia Didática Enquanto Campo Metodológico Para o Ensino de Geometria Esférica. Disponível em <<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/download/2071/1107>>. Acesso 26/11/2016.

POMMER, Wagner Marcelo. A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, 2013. 72 p. Disponível em <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf>. Acesso 26/11/2016.

SÁ, Ilidio Pereira. A Magia da Matemática: Atividades investigativas, curiosidades e histórias da Matemática. 3ª Edição. Editora: Ciência Moderna. 2010.

SÁ, Ilidio Pereira. Matematuques: Matemática recreativa para as aulas na escola básica. 1ª Edição. Editora: Ciência Moderna. 2017.

SAMPAIO, João Carlos; Malagutti, Pedro Luiz. Mágicas, Matemática e outros mistérios. Disponível em <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/malagutti.sampaio.pdf>. Acesso em 25/11/2016.

SHCAVAREN, Marcela. Alunos do Ensino Médio Ensinando Alunos do Ensino Fundamental, Uma Experiência Com Jogos Matemáticos. Disponível em http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6207_3472_ID.pdf. acesso 22/11/2016.

SILVA, Nilton; Ferreira, Marcus; Tozetti, Karla. Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau – PUC-PR, 2015. Disponível em <http://edurece.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/1_8159_8051.pdf> Acesso em 16/04/2017.

SOUZA, Roberta Nara Sodré; Cordeiro, Maria Helena. A contribuição da Engenharia-Didática para a prática docente de Matemática na Educação Básica. Disponível em <<http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI200.pdf>>. Acesso 26/11/2016.

WACHILISKI, Marcelo. Didática e Avaliação: Algumas Perspectivas da Educação Matemática – Curitiba: Ibpe, 2007.126p.

ZABALA, Antoni. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.