Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Valter Costa Fernandes Junior

A construção do conjunto dos números reais utilizando a teoria de cortes

Juiz de Fora

2018

Valter Costa Fernandes Junior

A construção do conjunto dos números reais utilizando a teoria de cortes

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Nelson Dantas Louza Júnior

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes Junior, Valter Costa.
A construção do conjunto dos números reais utilizando a teoria de cortes / Valter Costa Fernandes Junior. – 2018.
42 f.

Orientador: Nelson Dantas Louza Júnior
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

1. Números Reais. 2. Teoria dos Cortes . 3. Formação de professores. I. Louza Júnior, Nelson Dantas, orient. II. Título.

Valter Costa Fernandes Junior

A Construção do Conjunto dos Números Reais Utilizando a Teoria de Cortes

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

.

Aprovada em: 25 de julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

____

Prof. Dr. Willian Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

____

Prof. Dr. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a conclusão deste trabalho às pessoas mais presentes e importantes na minha vida:

Meus pais (in memoriam), Valéria e Valter que nunca deixaram de confiar em mim, partilho a alegria deste momento.

Ao senhor Eduardo que o considero como um avô e minhas avós, Emiliane (in memoriam) e Luzia, agradeço pelo carinho e aconchego.

A minha irmã Nathália, que mesmo longe me apoiou em cada momento nesta caminhada.

A todos os familiares que me ajudaram e torceram por mim.

A minha amada esposa, Aline, por ser tão importante na minha vida e por estar sempre ao meu lado. Obrigado por fazer possível a concretização deste trabalho.

A minha pequena Angelina, que neste último ano chegou como um presente, me inspirando e incentivando a novas conquistas.

A família Fernandes, composta pelo senhor Manoel, dona Angelina, Ângela Mara, Mariane e Danilo por se tornarem mais que especiais em cada palavra e gesto, meu muito obrigado!

Aos meus amigos do mestrado, pelos momentos divididos juntos. Foi muito bom estar com vocês!

Ao Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) - Campus Bambuí por permitir e incentivar a realização deste trabalho.

Aos novos amigos do IFMG que em uma simples conversa, numa pelada ou mesmo num cumprimento fizeram parte dessa história. Especialmente o Geraldo Henrique Alves Pereira por me auxiliar na edição do texto.

Ao professor, orientador, Nelson Dantas Louza Júnior não só pela orientação deste trabalho, mas também pelos ensinamentos nas disciplinas lecionadas.

A todos os professores e funcionários do Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – que com ensinamentos e orientações me ajudaram ativa ou passivamente neste projeto.

Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

Com todos vocês, divido a alegria deste momento.

Obrigado!

RESUMO

O presente trabalho surge de um incômodo do autor sobre a construção do conjunto dos Números Reais, mais especificamente na parte axiomática. Sendo assim, buscou-se novas formas de pensar tal objeto matemático com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre o assunto. Como objetivo principal desse trabalho, nossa ideia foi esmiuçar a teoria dos cortes, facilitando o entendimento das demonstrações e propriedades para aqueles que tenham o interesse em conhecer ou estudar tal teoria, podendo vir a ser um manual para os interessados (possivelmente professores ou futuros professores de matemática). Pesquisar ou analisar a forma como é posto e trabalhado o conjunto dos números reais nos livros didáticos do ensino médio é o objetivo secundário de nosso trabalho. Em relação ao objetivo principal, esmiuçamos a teoria dos cortes nos baseando quase que na totalidade no livro *A construção dos números*, colocamos nosso toque pessoal nas demonstrações, nos comentários e incluímos alguns resultados como pré requisitos. Em relação ao objetivo secundário, foi analisada a abordagem de cinco livros didáticos sobre o conteúdo de números reais. Para tal, criamos eixos de análise a fim de focar o nosso olhar para alguns elementos que consideramos importantes, a saber: definição de número real; propriedades operatórias; correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta numerada e; intervalos reais. Acreditamos que, a construção do conjunto dos números reais por meio da teoria dos cortes pode agregar mais formas de pensar o objeto de nosso estudo. Essa construção não é muito trabalhada nos cursos de formação de professores, assim pensamos que nosso trabalho pode ser uma oportunidade de difundir essa teoria para docentes e futuros docentes.

Palavras-chave: Números Reais. Teoria dos Cortes. Formação de professores.

ABSTRACT

The present work arises from an annoyance of the author on the construction of the set of Real Numbers, more specifically in the axiomatic part. Thus, we sought new ways of thinking such a mathematical object in order to deepen knowledge about the subject. As the main objective of this work, our idea was to scrutinize the cut theory, facilitating the understanding of the demonstrations and properties for those who have an interest in knowing / studying such a theory and could be a manual for those interested (possibly teachers or future teachers of math). Searching / analyzing how the set of real numbers in high school textbooks is presented and taught is the secondary objective of our work. In relation to the main purpose, we have broken down the theory of cuts by relying almost entirely on the book "The construction of numbers", we have put our personal touch on the statements, in the comments and included some results as prerequisites. In relation to the secondary objective, the approach of five textbooks on the content of real numbers was analyzed. To do this, we create axes of analysis in order to focus our look at some elements that we consider important, namely: definition of real number; operations properties; one-to-one correspondence between the real numbers and the points of a numbered line; intervals. We believe that the construction of the set of real numbers through the theory of cuts can add more ways of thinking the object of our study. This construction is not much worked on teacher training courses, so we think that our work may be an opportunity to spread this theory to teachers and teachers to be.

Key-words: Real Numbers. Cut Theory. Teacher training.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\exists$	Existe
$\in$	Pertence
$\forall$	Para todo
$\Rightarrow$	Implica
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais
$\subset$	Está contido
$>$	Maior
$<$	Menor
$\Leftrightarrow$	Equivale
$\notin$	Não pertence
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números Racionais
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
$A \setminus B$	Diferença entre dois conjuntos A e B $(A - B)$
$\subseteq$	Está contido ou é igual
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho surge de um incômodo do autor sobre a construção do conjunto dos Números Reais, mais especificamente em sua parte axiomática. Sendo assim, buscou-se novas formas de pensar tal objeto matemático com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre o assunto. Normalmente, no ensino básico (fundamental e médio), os números reais são definidos como a união dos números racionais com os números irracionais. Justifica-se a definição dos irracionais pelo problema dos segmentos incomensuráveis, o principal deles a medida da hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos medem 1 unidade de comprimento. No livro *Análise Real* as propriedades operatórias no conjunto dos reais, como associatividade (soma e multiplicação), comutatividade (soma e multiplicação), elemento neutro (soma e multiplicação), inverso (soma e multiplicação) e a distributividade, são postas como axiomas. Enquanto na teoria dos cortes, aqui pesquisada e esmiuçada, essas operações, no conjunto dos números reais, não são axiomáticas e, sim, construídas a fim de estabelecer o conjunto. Claro que a teoria apresentada nessa pesquisa também se baseia em axiomas. Porém, tal axiomática é posta para as operações no conjunto dos números naturais com os axiomas de Peano, daí na construção dos números reais as operações de soma e produto são definidas e as propriedades demonstradas.

Como objetivo principal desse trabalho, nossa ideia foi esmiuçar a teoria dos cortes, facilitando o entendimento das demonstrações e propriedades para aqueles que tenham o interesse em conhecer ou estudar tal teoria, podendo vir a ser um manual para os interessados (possivelmente professores ou futuros professores de matemática).

Pesquisar ou analisar a forma como é apresentado e trabalhado o conjunto dos números reais nos livros didáticos do ensino médio é o objetivo secundário de nosso trabalho.

Sobre a organização do trabalho, o mesmo foi dividido em três capítulos, fora a introdução, que são: análise de livros do ensino médio; construção dos números reais e; considerações finais.

No capítulo 2 foi analisada a abordagem de cinco livros didáticos sobre o conteúdo de números reais. Para tal, criamos eixos de análise a fim de focar o nosso olhar para alguns elementos que consideramos importantes, a saber: definição de número real; propriedades operatórias; correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta numerada e; intervalos reais.

No capítulo 3 "construção dos números reais", esmiuçamos a teoria dos cortes nos baseando quase que na totalidade no livro *A construção dos números*. Além disso, colocamos nosso toque pessoal nas demonstrações, nos comentários e incluímos alguns resultados como pré requisitos.

No capítulo 4 "considerações finais", foram feitas análises mais gerais do trabalho e ponderações sobre os objetivos do mesmo. Apontamos também, potencialidades ao se pensar os números reais pela teoria dos cortes.

2 ANÁLISE DE LIVROS DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo traremos uma breve análise sobre como vem disposto o assunto Números Reais em cinco livros didáticos do ensino médio, que são:

1 – *Matemática: Ciências e aplicações*;

2 – *Matemática para compreender o mundo*;

3 – *Matemática: Interação e Tecnologia*;

4 – *Matemática: Contexto e aplicações*;

5 – *Contato Matemática.*

Para a análise em questão criamos categorias que acreditamos ser importante analisar: definição dos números reais; propriedades operatórias; correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta numerada.

2.1 DEFINIÇÃO DE NÚMERO REAL

Em nossa análise, notamos que, todos os livros trazem uma revisão sobre os conjuntos numéricos começando pelos naturais, passando pelos inteiros, até chegar nos racionais e irracionais. A forma de exposição do conteúdo difere de um para outro em relação a forma como é exposto, a ênfase em um determinado conteúdo e na contextualização de situações do cotidiano onde usamos tais números. Focamos mais no conjunto dos números racionais e irracionais, pois todos os livros definem o conjunto dos números reais como a união dos dois conjuntos citados acima.

Sobre o conjunto dos racionais, o terceiro livro *Matemática: Interação e Tecnologia* não faz um estudo sobre fração geratriz de uma dízima periódica, enquanto os outros quatro o fazem. Acreditamos ser importante esse estudo, pois é o que nos mostra, na prática, que um número que é uma dízima periódica, em sua representação decimal, é racional, pois pode ser escrito na forma de fração.

Todos os livros trazem o conceito de haver infinitos racionais em um intervalo, mostrando com exemplos ou com atividades. A parte geométrica também é trabalhada nos textos, onde é mostrada, com exemplos, posições de alguns racionais na reta numerada. Importante destacar que no quarto livro *Matemática: Contexto e aplicações* é explorado na parte geométrica a ideia de que os racionais deixam "buracos" na reta numerada, ou seja, há pontos que não podem ser associados a números racionais e a esses pontos que faltam para completar a reta são associados números que serão chamados de irracionais.

Em todos os livros explicam-se os irracionais pela sua forma decimal, que não pode ser finita e nem uma dízima periódica, pois ambas representações podem ser escritas na forma de fração. Nos livros 1, 2 e 4 é demonstrado que $\sqrt{2}$ não é racional, enquanto que nos livros 3 e 5, não se encontra tal demonstração, apesar de ser explorada e discutida as aproximações para $\sqrt{2}$. Também é trabalhado a parte geométrica na reta numerada, mostrando a relação e a posição de alguns irracionais com racionais ou inteiros "próximos".

2.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

Como as propriedades operatórias já foram justificadas nos subconjuntos dos reais, estas passam a valer também para todos os reais. Porém, apesar de intuitivo, o esclarecimento dessas propriedades poderia ter sido feita de forma geométrica, na reta numerada.

No livro 1 *Matemática: Ciências e aplicações* os conceitos de valor absoluto (módulo), oposto e de inverso de um número são trabalhados na parte destinada aos números racionais. Adiante, todos esses conceitos são assumidos para todos os reais, ou seja, também para os irracionais. A ideia de ordem no conjunto dos números Reais não é explicitada, mas ao trabalhar a posição dos números reais na reta numerada o conceito, mesmo que indireto, está sendo explorado. Como prática, principalmente no cotidiano, o referido livro traz técnica de aproximação de irracionais por racionais. Nos exercícios, referentes ao conteúdo dos números reais, é possível encontrar atividades que tratam de operações aritméticas entre racionais e irracionais, assim como entre dois irracionais, atividades essas que parecem ter por intuito fazerem os alunos pensarem nas possibilidades de resultados para essas operações.

Enquanto que o livro 2 *Matemática para compreender o mundo* não apresenta os conceitos de valor absoluto (módulo), oposto e de inverso de um número real. Por outro lado, explicita a relação de ordem do conjunto dos números reais. Nos exercícos são trabalhados aproximações de irracionais por racionais e situações operatórias entre racional e irracional e, entre dois irracionais, com o mesmo parecer feito na análise do livro 1.

Os livro 3 *Matemática: Interação e tecnologia* e o livro 5 *Contato Matemática* são bem suscintos com o conteúdo dos números reais, o primeiro traz algumas propriedades operatórias entre racionais e irracionais e, entre dois irracionais, enquanto que o segundo não trabalha tais propriedades. Em ambos, os conceitos de valor absoluto (módulo), oposto e de inverso de um número real não são explorados, o que nos leva a crer que os autores transferem as ideias trabalhadas (não nos livros) nos conjuntos pertinentes para os reais, assumindo-os como verdade e com o mesmo significado.

Por fim, o livro 4 *Matemática: Contexto e aplicações* traz os conceitos de valor absoluto (módulo), oposto e de inverso de um número e, estes, são trabalhados no conjunto real como um todo. A relação de ordem é bem explorada. São trabalhadas as aproximações de números irracionais por racionais. Por outro lado, não é explorada as operações entre racionais e irracionais e, entre dois irracionais.

2.3 CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA ENTRE OS NÚMEROS REAIS E OS PONTOS DE UMA RETA NUMERADA

Notamos que, os livros *Matemática para compreender o mundo*, *Matemática: Contexto e aplicações* e *Contato Matemática* citam a propriedade de completude dos números reais, que caracteriza-se pela bijeção entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta, porém o último livro não aprofunda a explicação sobre este conceito.

A ideia dos cortes de Dedekind poderia ser útil, pois podemos pensar na definição dos cortes na reta numerada. De acordo com o que é convencional na matemática, cada ponto da reta numerada define, na mesma, duas semirretas com origem no ponto dado, uma à esquerda do ponto e a outra a direita do ponto. Se a distância do ponto à origem da reta numerada for um valor racional, então o ponto representa o número racional definido pela distância até a origem, se o ponto estiver à esquerda da origem terá o sinal negativo. Porém, se a distância do ponto em questão à origem não for um valor racional, diremos que esse ponto representa um número irracional, cujo valor é a distância entre o ponto e a origem, se o ponto estiver à direita de zero e, o valor oposto ao valor da distância, se o ponto estiver à esquerda de zero.

2.4 INTERVALOS REAIS

É trabalhado em todos os livros os intervalos reais e suas operações. Tais operações se definem e constituem como um caso particular da teoria de conjuntos, uma vez que os intervalos reais nada mais são que subconjuntos do conjunto dos Números Reais. Acreditamos que falta ênfase para explicar o motivo da criação de uma nova notação para conjuntos, explicação essa que seria o conjunto dos reais ser completo.

3 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

A construção dos números Reais que apresentaremos neste trabalho explora os subconjuntos dos números racionais. Dessa forma vamos rever alguns conceitos estabelecidos para o conjunto dos números racionais, que seriam pré requisitos para a construção dos números Reais.

Definição 1. *Seja K um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de soma e produto em K e denotaremos por $+$ e $\cdot$, respectivamente.*

Assim,

$$\begin{array}{ll} + : K \times K \to K & \cdot : K \times K \to K \\ (a, b) \to a + b & (a, b) \to a \cdot b \end{array}$$

O conjunto K será um corpo se as seguintes propriedades são verificadas quaisquer que sejam a, b e $c \in K$.

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(associatividade da soma);*

(2) $\exists\, 0 \in K$ *tal que* $a + 0 = 0 + a = a$ *(existência de elemento neutro para a soma);*

(3) $\forall\, x \in K$ *existe um único* $y \in K$*, denotado por* $y = -x$*, tal que* $x + y = y + x = 0$ *(existência de inverso aditivo);*

(4) $a + b = b + a$ *(comutatividade da soma);*

(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *(associatividade do produto);*

(6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$*;* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *(distributividade à esquerda e à direita);*

(7) $\exists\, 1 \in K$, $0 \neq 1$, *tal que* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall\, x \in K$ *(o elemento 1 é a unidade de K);*

(8) $\forall\, x, y \in K$, $x \cdot y = y \cdot x$ *(comutatividade do produto);*

(9) $x, y \in K$, $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $y = 0$ *(o conjunto K não possui divisores de zero);*

(10) $\forall\, x \in K$, $x \neq 0$, $\exists\, y \in K$ *tal que* $x \cdot y = y \cdot x = 1$ *(existência do inverso multiplicativo).*

Definição 2. *Se um corpo estiver munido de uma relação de ordem compatível com suas operações aritméticas, ele é chamado de corpo ordenado.*

Teorema 3.0.1. *Seja um corpo ordenado $K \neq \{0\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) O conjunto $\mathbb{N} \subset K$ dos números naturais não é limitado superiormente;

(ii) para todo par a, b de elementos de K, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$;

(iii) dado $a > 0$ em K, existe $n \in \mathbb{N} \subset K$ tal que $n^{-1} < a$.

Um corpo K que assume as condições do Teorema 3.0.1 diz-se arquimediano.

Teorema 3.0.2. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é arquimediano.*

A demonstração do Teorema 3.0.2, passa primeiro por provar que o conjunto $\mathbb{Q}$ (Racionais) é um corpo ordenado e, depois, mostrar que o mesmo é arquimediano. Nós não apresentaremos tais demonstrações, pois nossa intenção é apenas usar os resultados, mas as demonstrações e discussões podem ser vistas nos livros *Análise Real*, *A Construção dos Números* e *Introdução à Álgebra*, maiores detalhes sobre as obras estão nas referências bibliográficas.

Partindo do pressuposto que as operações com frações e números decimais já estão consolidadas e conhecidas, juntamente com os resultados mostrados acima sobre o conjunto dos números Racionais, vamos agora para o objetivo principal desse trabalho que é esmiuçar a construção do conjunto dos Números Reais, por meio da teoria dos cortes.

Definição 3. *Um conjunto α de números racionais diz-se um corte se satisfizer as seguintes condições:*

(i) $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$;

(ii) se $r \in \alpha$ e $s < r$ (s racional), então $s \in \alpha$;

(iii) em α não existe elemento máximo.

A definição formal de elemento máximo é: dizemos que um elemento a de um conjunto ordenado A é máximo, se $x \leq a$, para todo $x \in A$.

Analogamente, definimos elemento mínimo: dizemos que um elemento a de um conjunto ordenado A é mínimo, se $x \geq a$, para todo $x \in A$.

Exemplo 1. *Vamos mostrar que o conjunto $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \dfrac{3}{5}\right\}$ é um corte.*

Vamos denominar por α o conjunto $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \dfrac{3}{5}\right\}$. Primeiramente, notemos que $0 \in \mathbb{Q}$ e $0 < \dfrac{3}{5}$, ou seja, $0 \in \alpha$. Isso mostra que $\alpha \neq \emptyset$. Por outro lado, $1 \in \mathbb{Q}$, $1 > \dfrac{3}{5}$ e, consequentemente, $1 \notin \alpha$, daí temos $\alpha \neq \mathbb{Q}$. Assim, o item (i) da definição está provado.

Seja $r \in \alpha$, assim temos que $r < \dfrac{3}{5}$. Se $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s < r$ então $s < \dfrac{3}{5}$, ou seja, $s \in \alpha$. Assim fica provado o item (ii) da definição.

Para provarmos o item (iii) da definição, suponha, por absurdo, que $r \in \alpha$ seja o elemento máximo. O número racional

$$q = \frac{r + \frac{3}{5}}{2}$$

é tal que $r < q < \frac{3}{5}$, onde chegamos no absurdo, pois r é o elemento máximo de α, mas $q \in \alpha$ e $r < q$.

De fato,

$$r < \frac{3}{5} \Leftrightarrow r + r < \frac{3}{5} + r \Leftrightarrow r = \frac{r + r}{2} < \frac{\frac{3}{5} + r}{2} = q$$

e

$$r < \frac{3}{5} \Leftrightarrow r + \frac{3}{5} < \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \Leftrightarrow q = \frac{r + \frac{3}{5}}{2} < \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{5}.$$

Pela definição, pode parecer intuitivo que um corte α seja limitado superiormente. A seguir esta propriedade será demonstrada, mas antes vamos a seguinte definição: Seja X um conjunto não vazio de $\mathbb{Q}$. Dizemos que X é limitado superiormente se existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $y \geq x$, para todo $x \in X$, dizemos que y é uma cota superior. Analogamente, se existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $z \leq x$, para todo $x \in X$, então X é limitado inferiormente e, neste caso, dizemos que z é uma cota inferior.

Propriedade 3.0.3. *Todo corte é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado superiormente.*

Demonstração. Seja α um corte, como $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$, então existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $t \notin \alpha$. Suponha que exista $r \in \alpha$ onde $t < r$, então, pelo item (ii) da definição de corte, temos que $t \in \alpha$, absurdo. Logo $t > r$, para todo $r \in \alpha$, isto é, t é cota superior de α, o que significa que o corte α é limitado superiormente.

□

Se todo corte é limitado superiormente, então todo corte admite um conjunto de cotas superiores, onde cada cota superior é definida como um elemento/número que é maior ou igual a todo número do conjunto/corte. Em símbolos: se a é uma cota superior de α, então $a \geq x$, para todo $x \in \alpha$.

O conjunto das cotas inferiores de um conjunto A é definido como todos os elementos/números que são menores ou iguais a todo número do conjunto/corte. Assim, se b é uma cota inferior de A, então $b \leq x$, para todo $x \in A$.

A proposição a seguir nos mostra que um corte não possui cotas inferiores, ou seja, não existe um racional $z \notin \alpha$, α um corte, tal que $z \leq r$, para todo $r \in \alpha$.

Proposição 3.0.4. *Sejam α um corte e $r \in \mathbb{Q}$. Então, r é cota superior de α se, e somente se, $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se r é uma cota superior de α, então $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, pois caso contrário, o conjunto α teria r como elemento máximo, contradizendo o item (iii) da definição de corte.

($\Leftarrow$) Se $r \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ não for cota superior de α, então existirá $s \in \alpha$ tal que $r < s$, o que é um absurdo pois contradiz o 2º item da definição de corte. □

Todo número racional r determina um único corte, o que geometricamente seriam todos os racionais à esquerda de r na reta numerada convencional, é o que nos diz a proposição a seguir.

Proposição 3.0.5. *Se $r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$, então α é um corte e r é a menor cota superior de α.*

Demonstração. Pela definição de α no enunciado da proposição, temos que r é uma cota superior. Suponhamos, por absurdo, que exista $s \in \mathbb{Q}$, com $s \neq r$ tal que s seja uma cota superiormenor que r. Assim, $s < r$ e, consequentemente, $s \in \alpha$. Porém, se $s \in \alpha$ e s é cota superior, então s é elemento máximo de α, o que contradiz o item (iii) da definição de corte. □

Definição 4. *Em geral, denomina-se o supremo (cota superior mínima) de um conjunto A a menor das cotas superiores do conjunto A.*

Definição 5. *Os cortes do tipo da proposição anterior são denominados cortes racionais e representamos por r^*.*

A propriedade que virá a seguir mostra uma forma de determinar se um corte é racional. Enquanto que o próximo teorema nos fornece um exemplo de um corte que não é racional e, o mesmo, não possui cota superior mínima.

Propriedade 3.0.6. *Todo corte que possui cota superior mínima é racional.*

Demonstração. Seja α um corte que possui cota superior mínima, digamos $r \in \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que todo racional $x < r$ pertence a α.

Suponha, por absurdo, que existe $y < r$ tal que $y \notin \alpha$, temos duas opções para y:

(i) $y > x$, para todo $x \in \alpha$. Assim, y é uma cota superior de α menor do que a cota superior mínima r, absurdo.

(ii) $y < x$, para algum $x \in \alpha$. Como α é um corte, então, pelo segundo item da definição de corte, $y \in \alpha$, absurdo.

Portanto, todo elemento $x < r$ pertence a α e, assim sendo, α pode ser definido como $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$ e, todo corte definido dessa forma é racional, logo α é racional. □

Uma observação importante, estamos lidando com o conjunto dos números racionais, então a ideia de cota superior mínima só faz sentido, se esta for um racional.

Antes de passarmos ao próximo teorema, vamos definir alguns símbolos referentes ao conjunto dos números racionais, que são:

(i) $\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos racionais, exceto o número 0;

(ii) $\mathbb{Q}_+$ é o conjunto dos racionais não negativos;

(iii) $\mathbb{Q}_+^*$ é o conjunto dos racionais positivos;

(iv) $\mathbb{Q}_-$ é o conjunto dos racionais não positivos;

(v) $\mathbb{Q}_-^*$ é o conjunto dos racionais negativos.

Teorema 3.0.7. *Seja $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+ | x^2 < 2\} \bigcup \mathbb{Q}_-^*$. Então, α é um corte que não é racional.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que $1 \in \mathbb{Q}_+$ e $1^2 < 2$, ou seja, $1 \in \alpha$. Isso mostra que $\alpha \neq \emptyset$. Por outro lado, $2 \in \mathbb{Q}$, $2^2 > 2$ e, consequentemente, $2 \notin \alpha$, daí temos $\alpha \neq \mathbb{Q}$. Assim, o item (i) da definição está provado.

Seja $r \in \alpha$, assim temos que $r^2 < 2$ ou $r \in \mathbb{Q}_-^*$. Se $s \in \mathbb{Q}_+$ tal que $s < r$ então $s^2 < r^2 < 2$, ou seja, $s \in \alpha$. Se $r \in \mathbb{Q}_-^*$ e $s < r$, então $s \in \mathbb{Q}_-$ e, pela própria definição do conjunto α, temos que $s \in \alpha$. Assim fica provado o item (ii) da definição.

Para provarmos o item (iii) da definição, seja $r \in \alpha$. Temos que $r \in \mathbb{Q}_+$, com $r^2 < 2$, ou $r \in \mathbb{Q}_-^*$. Se $r \in \mathbb{Q}_-^*$, então não pode ser elemento máximo de α, pois, por exemplo, $1 \in \alpha$ e $1 > r$. Se $r \in \mathbb{Q}_+$, seja $0 < h < min\left\{1, \dfrac{2-r^2}{2r+1}\right\}$, daí temos:

$$h < \frac{2-r^2}{2r+1} < \frac{2-r^2}{2r+h} \Rightarrow h(2r+h) < 2-r^2$$
$$\Leftrightarrow 2rh + h^2 < 2 - r^2 \Leftrightarrow r^2 + 2rh + h^2 = (r+h)^2 < 2$$

. Ou seja, $r + h \in \alpha$ e $r + h > r$, o que significa que α não possui elemento máximo.

Daí, concluímos que α é um corte.

Para mostrar que α não é um corte racional vamos verificar que α não possui cota superior mínima, ou seja, para todo $y \in \mathbb{Q}_+$, com $y^2 > 2$ existirá um $h > 0$ tal que $(y-h)^2 > 2$. De fato, seja $0 < h < \dfrac{y^2-2}{2y}$, temos:

$$h < \frac{y^2-2}{2y} < \frac{y^2-2}{2y-h} \Rightarrow h\,(2y-h) < y^2 - 2 \Leftrightarrow h\,(h-2y) > 2 - y^2$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 2hy + h^2 > 2 \Leftrightarrow (y-h)^2 > 2\ .$$

Logo, α é um corte que não é racional. □

3.1 RELAÇÃO DE ORDEM E OPERAÇÕES COM CORTES

Como no livro texto a que nos baseamos, denominaremos por C o conjunto de todos os cortes (não confunda tal conjunto com um corte) e, no mesmo, definiremos as operações de "+"(soma), "."(multiplicação) e uma relação de ordem. Nesta seção demonstraremos e validaremos todas as propriedades operatórias dos Números Reais usadas de forma intuitiva no ensino básico e, por que não, também no ensino superior. Por exemplo, o que garante que a soma (ou produto) de um racional com um irracional é realmente comutativa? Usamos essa propriedade sem termos o conhecimento de uma demonstração formal.

A proposição a seguir não está no livro texto que nos norteia, formulamos a mesma para facilitar demonstrações futuras. Para conjuntos, em geral, essa proposição é falsa, mas se tratando de corte a afirmação é válida.

Proposição 3.1.1. *Sejam $\alpha, \beta \in C$. Se $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, então $\alpha \subset \beta$.*

Demonstração. Seja $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Assim, existe $y \in \beta$ tal que $y \notin \alpha$ e, pela proposição 3.1.7, y é uma cota superior de α. Dado $x \in \alpha$ então $x < y$, pelo fato de y ser cota superior de α e, pelo item (ii) da definição de corte, temos que $x \in \beta$, ou seja, $\alpha \subset \beta$. □

Na demonstração da proposição acima, há uma sutileza que é a seguinte: se $y \in \beta$ tal que $y \notin \alpha$, ou seja, $y \in \beta \setminus \alpha$, então y é uma cota superior de α. De fato ela é verdadeira, pois caso contrário (y não ser cota superior de α), teríamos uma contradição por causa do 2º item da definição de corte.

Definição 6. *Sejam $\alpha, \beta \in C$. Dizemos que α é menor do que β e escrevemos $\alpha < \beta$ quando $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Equivalentemente, $\alpha \subset \beta$.*

Definição 7. *Se $\alpha \in C$ e $\alpha > 0^*$, α chama-se corte positivo. Se $\alpha < 0^*$, α é dito corte negativo. Se $\alpha \geq 0^*$, α chama-se corte não negativo e se $\alpha \leq 0^*$, α chama-se não positivo.*

Propriedade 3.1.2. *Se $p, q \in \mathbb{Q}$, então $p^* \leq q^*$ se, e somente se, $p \leq q$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $p^* \leq q^*$, então temos duas situações a analisar:

(I) $p^* = q^*$. Suponha, sem perda de generalidade, que $p < q$. Assim, o número racional $x = \dfrac{p+q}{2} \in q^*$, porém $x \notin p^*$, o que é um absurdo, pois $q^* \setminus p^* = \emptyset$. Logo $p = q$.

(II) Se $p^* < q^*$, então $q^* \setminus p^* \neq \emptyset$, ou seja, existe $x \in q^*$ tal que $x \notin p^*$. Daí, temos que $p < x < q$, ou seja, $p < q$.

($\Leftarrow$) Suponha que $p \leq q$.

Se $p = q$, então, pela definição dos conjuntos p^* e q^*, temos $p^* = q^*$.

Se $p < q$, então $p < \dfrac{p+q}{2} < q$, ou seja, $\dfrac{p+q}{2} \in q^*$ e $\dfrac{p+q}{2} \notin p^*$. Daí, $q^* \setminus p^* \neq \emptyset$ e, segue que, $p^* < q^*$.

$\square$

Propriedade 3.1.3. *Para $\alpha, \beta \in C$, valem as equivalências:*

1. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$ *e* $\alpha \neq \beta$*;*
2. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$.

Demonstração. (1) ($\Rightarrow$) Seja $\alpha < \beta$, temos que $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Assim, existe $x \in \beta$ tal que $x \notin \alpha$, o que mostra que $\alpha \neq \beta$. Por outro lado, se $r \in \alpha$, então $r < x$, onde $x \in \beta \setminus \alpha$. Porém, pela definição de corte, para todo $r < x$ com $x \in \beta$, teremos $r \in \beta$, o que mostra que $\alpha \subset \beta$.

Se ($\Leftarrow$) $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$, então $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, ou seja, $\alpha < \beta$.

(2) ($\Rightarrow$) Seja $\alpha \leq \beta$, se $\alpha < \beta$ já mostramos que $\alpha \subset \beta$. Por outro lado, se $\alpha = \beta$, dado um $x \in \alpha$ temos que $x \in \beta$, pois $\beta \setminus \alpha = \emptyset$. Daí, temos $\alpha \subset \beta$.

($\Leftarrow$) Seja $\alpha \subset \beta$, então ou $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha = \beta$, então $\alpha \leq \beta$ e, se $\alpha \neq \beta$, como $\alpha \subset \beta$, temos pelo item (1) que $\alpha < \beta$, ou seja, $\alpha \leq \beta$.

$\square$

Teorema 3.1.4 (Tricotomia)**.** *Para $\alpha, \beta \in C$, temos que uma e apenas uma das possibilidades a seguir ocorre*

$$\alpha = \beta \textit{ ou } \alpha < \beta \textit{ ou } \alpha > \beta.$$

Demonstração. Se $\alpha = \beta$, então $\alpha \setminus \beta = \emptyset$ e $\beta \setminus \alpha = \emptyset$, o que, por definição, exclui as outras duas possibilidades.

Sejam $\alpha, \beta \in C$, onde $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$, então teríamos $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$ e, consequentemente, $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \alpha$, ou seja, $\alpha = \beta$, absurdo. $\square$

Teorema 3.1.5. *A relação $\leq$ é uma relação de ordem em C.*

Demonstração. Uma relação R é dita de ordem em um conjunto A, se são satisfeita três propriedades, a saber: reflexiva, antissimétrica e transitiva. Assim, vamos mostrar que $\leq$ é uma relação de ordem em C. Para isso, sejam $\alpha, \beta, \gamma \in C$, temos:

(I) $\alpha \leq \alpha$, pela definição de corte, logo a propriedade reflexiva é satisfeita;

(II) Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \alpha$ e, pela teoria de conjuntos, isso nos garante $\alpha = \beta$. Assim, a propriedade antissimétrica é satisfeita.

(iii) Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \gamma$. Assim, se $x \in \alpha$, então $x \in \beta$ (pois $\alpha \subseteq \beta$) e, como $\beta \subseteq \gamma$ segue que $x \in \gamma$, ou seja, $\alpha \subseteq \gamma$. Logo, $\alpha \leq \gamma$ e a propriedade transitiva é satisfeita. $\square$

Teorema 3.1.6. *Sejam $\alpha, \beta \in C$. Se $y = \{r + s \mid r \in \alpha$ e $s \in \beta\}$, então $y \in C$.*

Demonstração. Como $\alpha, \beta \in C$, então $\alpha \neq \emptyset$ e $\beta \neq \emptyset$. Assim, seja $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, o elemento $(r+s) \in y$ o que mostra que $y \neq \emptyset$. Por outro lado, sejam r_1 e s_1 cotas superiores de α e β, respectivamente. Assim, $r_1 + s_1 > r + s$ para todos $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, isto significa que $(r_1 + s_1) \notin y$ e, consequentemente, $y \neq \mathbb{Q}$. Portanto, o 1º item da definição de corte é satisfeito.

Para mostrar que o 2º item da definição de corte também é válido, sejam $t = (r+s) \in y$, onde $r \in \alpha$, $s \in \beta$ e $z < t$. Daí, existe racional $s_1 = z - r < s$ tal que $z = r + s_1 < r + s = t$. Como $s \in \beta$, então $s_1 = z - r < s$ e, segue que, $s_1 \in \beta$. Logo, $z = r + s_1 \in y$ e, o 2º item da definição de corte é satisfeito.

Vamos mostrar que y não possui elemento máximo. Dado $t \in y$ temos que $t = r+s$ para algum $r \in \alpha$ e algum $s \in \beta$. Como, $r \in \alpha$ e $s \in \beta$ existem $r_1 \in \alpha$ e $s_1 \in \beta$, tais que $r_1 > r$ e $s_1 > s$ e, segue que, $t_1 = r_1 + s_1 > r + s = t$ e $t_1 \in y$. Logo, y não possui elemento máximo e o 3º item da definição de corte é satisfeito. $\square$

Definição 8. *Para $\alpha, \beta \in C$, definimos $\alpha + \beta$ como sendo o corte do teorema anterior, ou seja,*

$$\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\}.$$

Propriedade 3.1.7. *Se $p, q \in \mathbb{Q}$, então $p^* + q^* = (p+q)^*$.*

Demonstração. Seja $x \in p^* + q^*$, então $x = a + b$ com $a \in p^*$ e $b \in q^*$. Como $a < p$ e $b < q$, então $x = a + b < p + q$ e, segue pelo item (ii) da defința̧ão de corte, que $x \in (p+q)^*$. Daí, $p^* + q^* \subset (p+q)^*$. (I)

Por outro lado, seja $x \in (p+q)^*$. Assim temos que $x < p + q$ e, tal valor x, pode ser escrito como soma de dois racionais $a = x - q$ e $b = x - p$ de forma que $a < p$ e $b < q$, ou seja, $a \in p^*$ e $b \in q^*$. Dessa forma, $x \in p^* + q^*$ e, consequentemente, $(p+q)^* \subset p^* + q^*$. (II)

De (I) e (II), concluímos que $p^* + q^* = (p+q)^*$.

$\square$

Teorema 3.1.8. *A adição em C é comutativa, associativa e tem 0^* como elemento neutro.*

Demonstração. Vamos mostrar que a adição é comutativa. Sejam $\alpha, \beta \in C$, temos que

$$\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in \beta\} = \{s + r \mid s \in \beta \text{ e } r \in \alpha\} = \beta + \alpha$$

.

A associatividade é válida,

$$(\alpha+\beta)+\gamma = \{(r+s)+t \mid (r+s) \in (\alpha+\beta) \text{ e } t \in \gamma\} =$$
$$\{r+(s+t) \mid r \in \alpha \text{ e } (s+t) \in (\beta+\gamma)\} =$$
$$\alpha+(\beta+\gamma)$$

.

Por fim, temos que 0^* é o elemento neutro da adição. De fato, seja $\alpha + 0^* = \{r+s \mid r \in \alpha \text{ e } s \in 0^*\}$, daí temos que $r+s < r$ para todo $r \in \alpha$, pois $s < 0$. Logo, o conjunto $\alpha + 0^*$ é o próprio α, ou seja, $\alpha + 0^* = \alpha$.

□

Lema 3.1.9. *Sejam $\alpha \in C$ e $r \in \mathbb{Q}_+^*$. Então existem números racionais p e q tais que $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q não é cota superior mínima de α e $q - p = r$.*

Demonstração. Sejam $r \in \mathbb{Q}_+^*$, dado arbitrariamente e, $s \in \alpha$, temos a sequência

$$s,\ s+r,\ s+2r,\ ...,\ s+nr,\ ... ,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(s+mr) \in \alpha$ e $[s+(m+1)r] \notin \alpha$. De fato, vamos usar o Princípio da Boa Ordenação (P.B.O) para mostrar a veracidade da afirmação.

Lembrando que, o enunciado do P.B.O nos diz que "todo subconjunto não-vazio dos naturais possui menor elemento".

Assim, seja $A = \{m \in \mathbb{N} \mid [s+(m+1)r] \notin \alpha\}$, temos que $A \neq \emptyset$. De fato, sendo $q \in \mathbb{Q}$ uma cota superior de α, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(m+1)\dfrac{r}{q-s} > 1$ ($\mathbb{Q}$ é arquimediano) e, segue que, $s+(m+1)r > q$, ou seja, $s+(m+1)r$ é uma cota superior de α e, consequentemente, $s+(m+1)r \notin \alpha$. Portanto, A é um subconjunto não-vazio dos naturais e, pelo P.B.O, A possui menor elemento $m_1 = m+1$, logo m é tal que $s+mr \notin A$, ou seja, $s+mr \in \alpha$.

Voltando à demonstração do lema, se $[s+(m+1)r]$ não for cota superior, então temos

$$p = (s+mr) \in \alpha \text{ e } q = [s+(m+1)r] \notin \alpha$$

e

$$q - p = (s+mr+r) - (s+mr) = r$$

Por outro lado, se $[s+(m+1)r]$ for cota superior mínima, então tomemos $p = \left(s+mr+\dfrac{r}{2}\right) \in \alpha$ e $q = \left[s+(m+1)r+\dfrac{r}{2}\right] \notin \alpha$. A afirmação $q = \left[s+(m+1)r+\dfrac{r}{2}\right] \notin \alpha$ é clara, pois $[s+(m+1)r]$ é uma cota superior e

$$q = \left[s+(m+1)r+\frac{r}{2}\right] > [s+(m+1)r].$$

A afirmação "$p = \left(s + mr + \dfrac{r}{2}\right) \in \alpha$, se $[s + (m+1)r]$ for cota superior mínima" é válida, pois $p = \left(s + mr + \dfrac{r}{2}\right) < q = \left[s + (m+1)r + \dfrac{r}{2}\right]$.

Daí temos:

$$q - p = \left(s + mr + r + \frac{r}{2}\right) - \left(s + mr + \frac{r}{2}\right) = r$$

$\square$

Teorema 3.1.10. *Seja $\alpha \in C$. Existe um único $\beta \in C$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. Como nos casos dos inteiros e racionais, tal β denota-se por $-\alpha$ e se chama simétrico (ou inverso aditivo) de α.*

Demonstração. Seja $\beta = \{q \in \mathbb{Q} \mid -q$ é cota superior não mínima de $\alpha\}$, vamos mostrar que β é o único corte simétrico a α. Primeiro, demonstraremos que $\alpha + \beta = 0^*$. De fato, para $r \in \mathbb{Q}^*_+$, pelo Lema anterior, existem racionais p e $-q$ tais $p \in \alpha$, $-q \notin \alpha$, $q \in \beta$ (pela definição de β), $-q$ é cota superior não mínima de α e $-q - p = r > 0$. Isto implica em $p + q = r < 0$ e, segue que, $\alpha + \beta = 0^*$.

Vamos demonstrar que β é um corte.

Como α é um corte, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x \notin \alpha$ e x não é cota superior mínima. Assim, $x \in \beta$, ou seja, $\beta \neq \emptyset$. Por outro lado, dado $y \in \alpha$, como y não é cota superior de α, então $-y \notin \beta$, logo $\beta \neq \mathbb{Q}$. Portanto, o item (i) da definição de corte é válido.

Vamos provar o item (ii) da definição de corte. Se $s < q$, $q \in \beta$, temos que $-q < -s$. Como $-q$ é cota superior não mínima de α, então $-s$ também o é, ou seja, $s \in \beta$. Logo, o item (ii) da definição de corte também é válido.

Por fim, seja $q \in \beta$, $-q$ é cota superior não mínima de α e, pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe $-p < -q$ onde $-p$ também é uma cota superior de α. Se $-p$ não for a menor das cotas superiores de α, então $p \in \beta$ e $p > q$. Se $-p$ for a cota superior mínima de α, então o racional $-p - q$ tal que $-p < \dfrac{-p-q}{2} < -q$ é uma cota superior não mínima de α, ou seja, $\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \in \beta$, com $q < \left(\dfrac{p+q}{2}\right) < p$. Logo, o item (iii) da definição de corte é válido.

Para demonstrar a unicidade do corte simétrico a α, sejam β_1 e β_2 cortes tais que $\alpha + \beta_1 = 0^*$ e $\alpha + \beta_2 = 0^*$. Assim temos:

$$\beta_1 = \beta_1 + 0^* = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0^* + \beta_2 = \beta_2\ .$$

Logo, o simétrico de um corte α é único. $\square$

No teorema anterior, a ideia para construir o conjunto

$$\beta = \{q \mid -q \text{ é cota superior não mínima}\}\,,$$

candidato a simétrico de α, aparece quando observamos os cortes racionais. Por exemplo, o simétrico do corte 2^* é -2^* e vice-versa, pois $2^* + (-2)^* = 0^*$. Note que, todo elemento $r \in 2^*$ é tal que $-r$ é cota superior não mínima de $(-2)^*$ e, para todo elemento $s \in (-2)^*$ temos que $-s$ é cota superior não mínima de 2^*.

Definição 9. *Como nos casos de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, definimos a subtração em C por $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, $\forall\ \alpha, \beta \in C$.*

Proposição 3.1.11. *Para $\alpha, \beta, \gamma \in C$, vale:*

(i) $-(-\alpha) = \alpha$;

(ii) $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$;

(iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$;

(iv) $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$;

(v) $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$.

Demonstração. (i) Temos, por definição, que $-(-\alpha)$ é simétrico de $-\alpha$, logo $-(-\alpha) - \alpha = 0^*$. Somando α aos dois lados da igualdade e usando o fato de $-\alpha + \alpha = 0^*$, obtemos:

$$-(-\alpha) - \alpha + \alpha = 0^* + \alpha \Leftrightarrow -(-\alpha) = \alpha$$

.

(ii) Temos que $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$ e, pela comutatividade da adição, obtemos $\beta - \alpha = -\alpha + \beta$.

(iii) Pelo item (i) temos que $-(-\beta) = \beta$ e, segue que, $\alpha + [-(-\beta)] = \alpha + \beta$.

(iv) Temos, por definição, que $-(\alpha + \beta)$ é simétrico de $\alpha + \beta$ e, segue que, $(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = 0^*$. Somando $-\alpha$ e $-\beta$ aos dois lados da igualdade e usando a propriedade associativa para agrupar, obtemos:

$$-\alpha - \beta + (\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = -\alpha - \beta + 0^* \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \alpha + \beta - \beta - (\alpha + \beta) = 0^* - \alpha - \beta \Leftrightarrow -(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$$

.

(v) Pelo item (iv), temos que $-\beta - \gamma = -(\beta + \gamma)$. Daí, $\alpha - (\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma$.

□

Teorema 3.1.12. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in C$ tais que $\alpha \leq \beta$. Então $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*

Demonstração. Vamos mostrar que, dada a hipótese do teorema, $(\beta + \gamma) \setminus (\alpha + \gamma) \neq \emptyset$ ou $(\beta + \gamma) = (\alpha + \gamma)$.

Se $\alpha = \beta$, então, por definição, $(\beta + \gamma) = (\alpha + \gamma)$.

Se $\alpha < \beta$, então $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \subset \beta$. Seja $y \in (\alpha + \gamma)$, assim $y = r + s$ com $r \in \alpha$ e $s \in \gamma$. Pelo fato de $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, tomemos $t \in (\beta \setminus \alpha)$. Daí, temos que, $r + s < t + s$ e, como $(t + s) \in (\beta + \gamma)$, então $(r + s) \in (\beta + \gamma)$ (pelo 2º item da definição de corte). Portanto, $y = (r+s) \in (\beta+\gamma)$ o que significa que $(\alpha+\gamma) \subset (\beta+\gamma)$, ou seja, $(\beta+\gamma)\setminus(\alpha+\gamma) \neq \emptyset$. $\square$

Teorema 3.1.13. *Para $\alpha, \beta \in C$ com $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, seja*

$$\gamma = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r \in \mathbb{Q} \mid r = p.q,\ com\, p \in \alpha,\ q \in \beta,\ p \geq 0\ e\, q \geq 0\}.$$

Então, γ é um corte e $\gamma \geq 0$.

Demonstração. Temos que, como $-1 \in \mathbb{Q}^*_-$, então $-1 \in \gamma$. O que mostra $\gamma \neq \emptyset$. Por outro lado, seja y uma cota superior comum a α e β, assim $y^2 > p.q \geq 0$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Logo $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Assim, o 1º item da definição de corte é satisfeito.

Seja $y < r$, com $r \in \gamma$. Se $r \in \mathbb{Q}^*_-$, então $y \in \mathbb{Q}^*_-$, isto é, $y \in \gamma$. Se $r = p.q$ com $p \in \alpha$, $q \in \beta$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$, então existem p_1 , $q_1 \in \mathbb{Q}_+$ tal que $y = p_1.q_1 < r = p.q$. Notemos que y pode ser escrito como $p.x$, onde $x = \dfrac{p_1.q_1}{p}$ e, como $y < r$, então $x < q$. Daí, $p \in \alpha$ e $x \in \beta$ pois $x < q$. Assim, $y \in \gamma$. Logo o 2º item da definição de corte também está satisfeito.

Suponha que exista $y \in \gamma$ tal que y seja o elemento máximo do conjunto γ. Claramente, $y > 0$ e, daí, $y = p.q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Como α e β são cortes e não possuem elemento máximo, existem $p_1 \in \alpha$ e $q_1 \in \beta$ tais que, $p_1 > p$ e $q_1 > q$. Assim, $y_1 = p_1.q_1 > p.q = y$ pertence a γ, absurdo. Logo, γ não possui elemento máximo, satisfazendo o 3º item da definição de corte.

$\square$

Definição 10. *Dado $\alpha \in C$, definimos o valor absoluto de α (ou módulo de α), representado por $|\alpha|$, do seguinte modo:*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & se \quad \alpha \geq 0^*; \\ -\alpha, & se \quad \alpha < 0^*. \end{cases}$$

Notemos que,

$$|-\alpha| = \begin{cases} -\alpha, & \text{se} \quad -\alpha \geq 0^*; \\ -(-\alpha), & \text{se} \quad -\alpha < 0^*. \end{cases}$$

O que é equivalente a

$$|-\alpha| = \begin{cases} -\alpha, & \text{se} \quad \alpha < 0^*; \\ \alpha, & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*. \end{cases}$$

Assim, temos que $|\alpha| = |-\alpha|$.

Em relação ao livro que nos norteia, que defini o produto para cortes positivos antes de apresentar a definição de valor absoluto e só depois defini o produto para os outros casos, nós decidimos apresentar o produto para todos os casos em uma única definição e antes da definição de valor absoluto, que vem a seguir.

Definição 11. *Se $\alpha, \beta \in C$, definimos:*

$$\alpha.\beta = \begin{cases} |\alpha||\beta|, & se \quad \alpha > 0^*,\ \beta > 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & se \quad \alpha \leq 0^*,\ \beta \geq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & se \quad \alpha \geq 0^*,\ \beta \leq 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & se \quad \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*. \end{cases}$$

Proposição 3.1.14. *Para $\alpha, \beta \in C$, temos $(-\alpha).\beta = \alpha.(-\beta) = -\alpha\beta$ e $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.*

Demonstração. Pela definição do produto entre dois cortes, temos:

$$(-\alpha).\beta = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha > 0^*,\ \beta > 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha \leq 0^*,\ \beta \geq 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*,\ \beta \leq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*. \end{cases}$$

$$\alpha.(-\beta) = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha > 0^*,\ \beta > 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha \leq 0^*,\ \beta \geq 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*,\ \beta \leq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*. \end{cases}$$

$$-\alpha.\beta = \begin{cases} -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha > 0^*,\ \beta > 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha \leq 0^*, \beta \geq 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*, \beta \leq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Logo, $(-\alpha).\beta = \alpha.(-\beta) = -\alpha\beta$.

Novamente pela definição de produto entre dois cortes, temos

$$(-\alpha).(-\beta) = \begin{cases} |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha > 0^*,\ \beta > 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha \leq 0^*,\ \beta \geq 0^*; \\ -(|\alpha||\beta|), & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*,\ \beta \leq 0^*; \\ |\alpha||\beta|, & \text{se} \quad \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*. \end{cases}$$

que é a definição de $\alpha\beta$, ou seja, $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

$\square$

Teorema 3.1.15. *A multiplicação de cortes é comutativa, associativa, tem 1^* como elemento neutro e, se $\alpha, \beta, \gamma \in C$, vale:*

i) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ *(distributiva);*

ii) $\alpha.0^* = 0^*$*;*

iii) se $\alpha \leq \beta$ *e* $\gamma \geq 0^*$*, então* $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$*;*

iv) se $\alpha \leq \beta$ *e* $\gamma < 0^*$*, então* $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$*;*

v) se $\alpha \neq 0^*$ *em* C*, existe um único* $\beta \in C$ *tal que* $\alpha\beta = 1^*$*. Esse corte chama-se inverso de* α *e é denominado por* α^{-1}*.*

Demonstração. Vamos mostrar que a multiplicação é comutativa. Sejam $\alpha, \beta \in C$, com $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$, temos que

$$\alpha.\beta = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r.s \mid \text{com } r \in \alpha \text{ , } s \in \beta \text{ , } r \geq 0 \text{ e } s \geq 0\} =$$

$$\mathbb{Q}^*_- \cup \{s.r \mid \text{com } s \in \beta \text{ , } r \in \alpha \text{ } s \geq 0 \text{ e } r \geq 0\} = \beta.\alpha$$

.

Se um dos cortes α e β for menor do que 0^*, sem perda de generalidade faremos $\alpha < 0^*$, então $-\alpha > 0^*$ e temos:

$$(-\alpha).\beta = \beta.(-\alpha) \Leftrightarrow -\alpha.\beta = -\beta.\alpha \Leftrightarrow \alpha.\beta + \beta.\alpha - \alpha.\beta = \alpha.\beta + \beta.\alpha - \beta.\alpha \Leftrightarrow \beta.\alpha = \alpha.\beta \text{ .}$$

Por fim, se $\alpha < 0^*$ e $\beta < 0^*$, então $-\alpha > 0^*$ e $-\beta > 0^*$ e temos:

$$(-\alpha).(-\beta) = (-\beta).(-\alpha) \Leftrightarrow \alpha.\beta = \beta.\alpha \text{ .}$$

Nas duas últimas situações, que envolvem cortes negativos, usamos a comutatividade provada para cortes positivos e os resultados sobre regras de sinal e propriedades da soma.

Vamos mostrar agora que a propriedade associativa é válida, sejam $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$, temos:

$$(\alpha.\beta).\gamma = \mathbb{Q}^*_- \cup \{(r.s).t \mid (r.s) \in (\alpha.\beta) \text{ e } t \in \gamma \text{ , com } r, s \geq 0 \text{ e } t \geq 0\} =$$

$$\mathbb{Q}^*_- \cup \{r.(s.t) \mid r \in \alpha \text{ e } (s.t) \in (\beta.\gamma) \text{ , com } r \geq 0 \text{ e } s, t \geq 0\} =$$

$$\alpha.(\beta.\gamma).$$

Se α ou β forem negativos, sem perda de generalidade, faremos $\alpha < 0^*$, daí $-\alpha > 0^*$ e temos:

$$(-\alpha.\beta).\gamma = -\alpha.(\beta.\gamma) \Leftrightarrow (\alpha.\beta).\gamma + (-\alpha.\beta).\gamma = (\alpha.\beta).\gamma - \alpha.(\beta.\gamma)$$

$$\Leftrightarrow 0^* = (\alpha.\beta).\gamma - \alpha.(\beta.\gamma) \Leftrightarrow \alpha.(\beta.\gamma) + 0^* = \alpha.(\beta.\gamma) + (\alpha.\beta).\gamma - \alpha.(\beta.\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \alpha.\left(\beta.\gamma\right) = \left(\alpha.\beta\right).\gamma\ .$$

Se $\alpha > 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$, temos:

$$\left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) = \alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) + \left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) = -\left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) + \alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 0^* = -\left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) + \alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right] + 0^* = -\alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right] - \left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) + \alpha\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right] = -\left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) \Leftrightarrow \alpha.\left(\beta.\gamma\right) = \left(\alpha.\beta\right).\gamma\ .$$

Se $\alpha < 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma < 0^*$, temos:

$$\left(-\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) = -\alpha.\left[\beta.\left(-\gamma\right)\right] \Leftrightarrow \left(\alpha.\beta\right).\gamma = \alpha.\left(\beta.\gamma\right)\ .$$

Se $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma > 0^*$, como $\left(-\alpha\right).\left(-\beta\right) = \alpha.\beta$, então o resultado segue como na primeira situação onde lidamos com cortes positivos.

Se $\alpha < 0^*$, $\beta < 0^*$ e $\gamma < 0^*$, como $\left(-\alpha\right).\left(-\beta\right) = \alpha.\beta$ e $\left(-\beta\right).\left(-\gamma\right) = \beta.\gamma$, temos:

$$\left(\alpha.\beta\right).\left(-\gamma\right) = \left(-\alpha\right).\left(\beta.\gamma\right) \Leftrightarrow \left(\alpha.\beta\right).\gamma = \alpha.\left(\beta.\gamma\right)\ .$$

Em todas as situações acima demonstradas, usamos as definições e resultados sobre regras de sinais para produtos, que já foram estabelecidas.

Por fim, temos que 1^* é o elemento neutro da multiplicação. De fato, se $\alpha > 0^*$ temos $\alpha.1^* = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r.s \mid \text{com } r \in \alpha\ ,\ s \in 1^*\ ,\ r \geq 0 \text{ e } s \geq 0\}$, daí temos que $r.s < r$, pois $s < 1$. Logo, o conjunto $\alpha.1^*$ é o próprio α, ou seja, $\alpha.1^* = \alpha$. Por outro lado, se $\alpha < 0^*$ então $-\alpha > 0^*$. Daí, $-\alpha.1^* = -\alpha$ e, como $-\alpha.1^* + \alpha.1^* = 0^*$, segue que, $-\alpha + \alpha.1^* = 0^* \Leftrightarrow \alpha - \alpha + \alpha.1^* = \alpha + 0^* \Leftrightarrow \alpha.1^* = \alpha$

Agora, vamos provar os cinco itens do teorema.

(i) Vamos analisar as condições para α, β e γ mostrando que a distributiva é válida em cada caso.

(a) Sejam α, β e γ cortes positivos, temos:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r(s+t) \mid r \in \alpha \text{ e } (s+t) \in (\beta+\gamma)\ ,\ \text{com } r \geq 0 \text{ e } s+t \geq 0\}$$

e

$$\alpha.\beta + \alpha.\gamma = \mathbb{Q}^*_- \cup \{r_1 s_1 + r_2 t_1 \mid r_1 s_1 \in \alpha\beta \text{ e } r_2 t_1 \in \alpha\gamma\ ,\ \text{com } r_1, s_1 \geq 0 \text{ e } r_2, t_1 \geq 0\}\ .$$

Notemos que, se tomarmos $r_1 \geq r_2$ (sem perda de generalidade), no conjunto $\alpha.\beta + \alpha.\gamma$ e, considerarmos $t = \dfrac{r_2.t_1}{r_1}$, teremos $t \leq t_1$, o que nos mostra que $t \in \gamma$. Assim, $r_1 s_1 + r_2 t_1 = r_1 s_1 + r_1 t$, ou seja,

$$\alpha.\beta + \alpha.\gamma = \mathbb{Q}_-^* \cup \{r_1 s_1 + r_1 t \mid r_1 s_1 \in \alpha\beta \text{ e } r_1 t \in \alpha\gamma \text{ , com } r_1, s_1 \geq 0 \text{ e } r_1, t \geq 0\}.$$

Seja $a \in \alpha(\beta + \gamma)$, temos duas situações: $a \in \mathbb{Q}_-^*$ ou $a \geq 0$. Se $a \in \mathbb{Q}_-^*$, então $a \in (\alpha.\beta + \alpha.\gamma)$. Se $a \geq 0$, então $a = r(s+t) = rs + rt$, com $r \in \alpha$, $s \in \beta$, $t \in \gamma$, $r \geq 0$ e $(s+t) \geq 0$ e, segue que, $a \in (\alpha.\beta + \alpha.\gamma)$. Portanto, $\alpha(\beta+\gamma) \subset (\alpha.\beta + \alpha.\gamma)$. (I)

Seja $a \in (\alpha\beta + \alpha\gamma)$, temos duas situações: $a \in \mathbb{Q}_-^*$ ou $a \geq 0$. Se $a \in \mathbb{Q}_-^*$, então $a \in [\alpha(\beta+\gamma)]$. Se $a \geq 0$, então $a = r_1 s_1 + r_1 t = r_1(s_1 + t)$, com $r_1 \in \alpha$, $s_1 \in \beta$ e $t \in \gamma$ e, segue que, $a \in [\alpha(\beta+\gamma)]$. Portanto, $(\alpha\beta + \alpha\gamma) \subset [\alpha(\beta+\gamma)]$. (II)

De (I) e (II) concluímos que $\alpha.(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

(b) Se $\alpha < 0^*$, $\beta > 0^*$ e $\gamma > 0^*$, usando a condição mostrada em (a), temos:

$$-\alpha(\beta+\gamma) = -\alpha\beta - \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha(\beta+\gamma) - \alpha(\beta+\gamma) = \alpha(\beta+\gamma) - \alpha\beta - \alpha\gamma \Leftrightarrow$$

$$0^* + \alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma) - \alpha\beta - \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma)$$

(c) Se $\beta > \gamma > 0^*$, usando as condições mostradas em (a) e (b), temos:

$$\alpha\beta = \alpha[(\beta-\gamma)+\gamma] = \alpha(\beta-\gamma) + \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha(\beta-\gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

Usando o resultado acima, temos:

$$\alpha\gamma = \alpha[\beta + (\gamma-\beta)] \Leftrightarrow \alpha\gamma = \alpha[\beta + (\gamma-\beta)] \Leftrightarrow \alpha\gamma = \alpha\beta + \alpha(\gamma-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma - \alpha\beta = \alpha(\gamma-\beta).$$

Nesse caso, provamos que a distributiva é válida para cortes negativos, desde que na soma entre parênteses os cortes envolvidos não sejam simultaneamente negativos. Dessa forma, falta provar que a distributiva é válida para a seguinte situação:

(d) $\beta < \gamma < 0^*$.

Assim, usando a distributiva nas condições já provadas, temos:

$$\alpha\gamma = \alpha[(\gamma+\beta)-\beta] = \alpha(\gamma+\beta) - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha(\gamma+\beta) - \alpha\beta + \alpha\beta = \alpha(\gamma+\beta).$$

Note que, $\gamma + \beta < 0^*$ e $-\beta > 0^*$ recaindo na condição (c).

(ii) Temos:

$$\alpha.0^* = \alpha(\beta-\beta) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0^*.$$

(iii) Primeiramente, notemos que, se $\alpha = \beta$, então por definição $\alpha\gamma = \beta\gamma$. E, se $\gamma = 0^*$, teremos $\alpha\gamma = \beta\gamma = 0^*$. Isto é, a igualdade entre $\alpha\gamma$ e $\beta\gamma$ é satisfeita.

Vamos mostrar que $(\beta\gamma) \setminus (\alpha\gamma) \neq \emptyset$, se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0^*$. Do fato de $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, existe $x \in \beta$ tal que $x \notin \alpha$. Seja $r \in \gamma$ com $r > 0$. Temos que $xr > sr$, para todo $s \in \alpha$ e, xr é uma cota superior de $\alpha\gamma$, o que nos mostra que $(\beta\gamma) \setminus (\alpha\gamma) \neq \emptyset$, ou seja, $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

(iv) Se $\beta \geq \alpha$, então $\beta - \alpha \geq \alpha - \alpha = 0^*$. Por outro lado, se $\gamma < 0^*$, então $-\gamma > 0^*$. Assim, temos:

$$-\gamma\,(\beta - \alpha) \geq -\gamma.0^* = 0^* \Leftrightarrow -\gamma\beta + \gamma\alpha \geq 0^* \Leftrightarrow \gamma\beta - \gamma\beta + \gamma\alpha \geq \gamma\beta + 0^* \Leftrightarrow \gamma\alpha \geq \gamma\beta\ .$$

(v) Se $\alpha > 0^*$, então seja $\beta = \mathbb{Q}_- \cup \Big\{s \in \mathbb{Q}_+^* \mid s.p < 1 \text{ com } p \in \alpha \text{ e } p > 0\Big\}$. Vamos mostrar que β é um corte.

Temos que, se $-1 \in \mathbb{Q}_-$, então $-1 \in \beta$. O que mostra $\beta \neq \emptyset$. Por outro lado, seja $p \in \alpha$, $p > 0$, como $\mathbb{Q}$ é arquimediano, existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $r.p > 1$ assim $r \notin \beta$, isto é, $\beta \neq \mathbb{Q}$. Assim, o 1º item da definição de corte é satisfeito.

Seja $y < s$, com $s \in \beta$. Se $s \in \mathbb{Q}_-$, então $y \in \mathbb{Q}_-$, isto é, $y \in \beta$. Se $s > 0$, então $y.p < s.p < 1$, com $p > 0$ e $p \in \alpha$. Logo $y \in \beta$. Portanto, o 2º item da definição de corte também está satisfeito.

Suponha que exista $s_1 \in \beta$ tal que s_1 seja o elemento máximo do conjunto β. Claramente, $s_1 > 0$ e, daí, $s_1.p < 1$, com $p \in \alpha$ e $p > 0$. Notemos que, $s_1 < \dfrac{1}{p}$ e $s_1.p < \dfrac{1 + s_1.p}{2} < 1$. Daí,

$$s_1.p < p\left(\frac{\frac{1}{p} + s_1}{2}\right) < 1$$

onde o número racional $s = \left(\dfrac{\frac{1}{p} + s_1}{2}\right)$ pertence a α e $s > s_1$, mas isso é um absurdo. Logo, β não possui elemento máximo, satisfazendo o 3º item da definição de corte.

Assim temos que β é um corte, vamos mostrar agora que β, como definido acima, é o único corte que satisfaz $\alpha.\beta = 1^*$. Suponha que β_1 seja um corte tal que $\alpha.\beta_1 = 1^*$, então $\alpha.\beta = \alpha.\beta_1$ e, segue que,

$$\alpha.\beta - \alpha.\beta_1 = 0^* \Leftrightarrow \alpha\,(\beta - \beta_1) = 0^* \Leftrightarrow \beta - \beta_1 = 0^* \Leftrightarrow \beta = \beta_1$$

o que mostra que o corte β é único. $\square$

Proposição 3.1.16. *Se $\alpha \in C$, temos que $r \in \alpha$ se, e somente se, $r^* < \alpha$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in C$. Se $r \in \alpha$, como $r \notin r^*$ temos que $\alpha \setminus r^* \neq \emptyset$, isto é, $r^* < \alpha$.

Por outro lado, se $r^* < \alpha$, então $\alpha \setminus r^* \neq \emptyset$ e, daí, segue que, existe $x \in \alpha$ tal que $x \notin r^*$. Assim, $x > r$, pois caso contrário teríamos $x \in r^*$. Logo pelo 2º item da definição de corte temos que $r \in \alpha$. □

Teorema 3.1.17. *Se $\alpha, \beta \in C$ e $\alpha < \beta$, então existe um corte racional r^* tal que $\alpha < r^* < \beta$.*

Demonstração. Como $\alpha < \beta$, então $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$. Assim, existe $x \in \beta$ tal que $x \notin \alpha$. Por outro lado, o fato de β não possuir elemento máximo, nos garante existir $y > x$ em β e, claramente, $y \notin \alpha$. Sendo $r = \dfrac{x+y}{2}$, o corte $r^* = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^*$ definido por $\dfrac{x+y}{2}$, como $x < r < y$, então $x \in r^*$, $x \notin \alpha$, $y \in \beta$ e $y \notin r^*$ emplica $r^* \setminus \alpha \neq \emptyset$ e $\beta \setminus r^* \neq \emptyset$. Ou seja, $\alpha < r^* < \beta$. □

Definição 12. *O conjunto C dos cortes será, a partir de agora, denominado de conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Os cortes racionais serão identificados, via injeção j, com os números racionais. Todo corte que não for racional será denominado número irracional.*

Esta associação dos cortes racionais, via injeção, com os números racionais, se dá da seguinte forma: cada corte racional é definido por um único número racional que é cota superior mínima, então a função

$$\begin{gathered}\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \\ \phi(q) = q^*\end{gathered}$$

que associa cada número racional q a um corte racional (onde q é cota superior mínima) é injetora. De fato, sendo q_1 e q_2 números racionais, se $q_1 \neq q_2$ com $q_1 < q_2$ (sem perda de generalidade), então $q_1 < q = \dfrac{q_1+q_2}{2} < q_2$, ou seja $q \notin q_1^*$ e $q \in q_2^*$, isto é, $q_2^* \setminus q_1^* \neq \emptyset$ e, consequentemente, $q_1^* \neq q_2^*$, logo ϕ é injetora.

Podemos ir mais além nesse estudo da relação entre cortes racionais e números racionais, se restringirmos o contradomínio de ϕ aos cortes racionais, a função que associa cada número racional q a um corte racional (onde q é cota superior mínima) é sobrejetora e, consequentemente, bijetora. De fato, todo corte racional r^* é definido por um número racional, ou seja, a função ϕ é sobrejetora. Logo, ϕ é bijetora.

A função ϕ transfere as propriedades operatórias dos números racionais para os cortes racionais, como exemplos: $\phi(r+q) = (r+q)^* = r^* + q^* = \phi(r) + \phi(q)$ (já demonstrada na Propriedade 3.1.7) e $|\phi(q)| = |q|$.

Notemos que, o conjunto C dos cortes, que definimos como o conjunto $\mathbb{R}$ dos reais, satisfaz todas as propriedades de um corpo ordenado, sendo assim, por construção o conjunto dos números reais é um corpo ordenado.

No conjunto dos números reais há subconjuntos especiais que são denominados Intervalos Reais e os mesmos possuem notações próprias que são:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

Diz-se que um intervalo fechado $[a, b]$ é não degenerado se $a \neq b$.

Com a definição 12, o Teorema 3.1.17 nos mostra uma importante propriedade dos números reais, que é a existência de um número racional entre dois quaisquer reais diferentes, ou com outras palavras, todo intervalo não degenerado em $\mathbb{R}$ possui números racionais. Sendo $\alpha < r^*$, existe r_1 racional tal que $\alpha < r_1^* < r^*$ e isto nos mostra que exitem infinitos cortes racionais maiores que α e menores que β, ou seja, em qualquer intervalo não degenerado de números reais existem infinitos números racionais.

Os teoremas e definições a seguir tratam de propriedades topológicas do conjunto dos números Reais.

Teorema 3.1.18 (Dedekind)**.** *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que:*

i)$\mathbb{R} = A \cup B$;

ii) $A \cap B = \emptyset$;

iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;

iv) se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$.

Nessas condições existe um, e apenas um, número real γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, para todo $\alpha \in A$ e para todo $\beta \in B$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\alpha = \gamma = \beta$ não pode acontecer, pois iria contradizer o item (ii) do teorema. Assim, ou $\alpha \leq \gamma < \beta$ ou $\alpha < \gamma \leq \beta$, ou seja, em ambos os casos temos $\alpha < \beta$, que é o item (iv) do teorema. Assim, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \in \beta$ e $r \notin \alpha$ (lembrando que $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$).

Pelo item (iv) do teorema, temos $\alpha < \beta$, logo existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \in \beta$ e $r \notin \alpha$

(lembrando que $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$) $\square$

Corolário 3.1.19. *Nas condições do teorema anterior, ou existe em A um número máximo, ou, em B, um número mínimo.*

Demonstração. Já mostramos no teorema anteiror que ou $\alpha \leq \gamma < \beta$ ou $\alpha < \gamma \leq \beta$. Dessa forma, se $\alpha \leq \gamma < \beta$, então $\gamma \in A$, o que significa que A possui número máximo e B não possui número mínimo. Por outro lado, se $\alpha < \gamma \leq \beta$, então $\gamma \in B$ e, consequentemente, B possui número mínimo e A não possui número máximo. $\square$

Definição 13. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$:*

i) Dizemos que A é limitado superiormente se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \geq x$, $\forall x \in A$. Um tal k diz-se cota superior de A.

ii) Dizemos que A é limitado inferiormente se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq x$, $\forall x \in A$. Um tal s diz-se cota inferior de A.

iii) A diz-se limitado se for limitado superiormente e limitado inferiormente.

iv) Suponhamos que A seja limitado superiormente e que exista uma cota superior de A, digamos s, que seja mínima (no sentido de que qualquer cota superior de A seja maior ou igual a s). Neste caso s diz-se supremo de A e é denotado por $supA$.

v) De modo análogo, define-se ínfimo de A (para conjuntos A limitados inferiormente), denotado por $infA$, como sendo uma cota inferior máxima para o conjunto A.

Uma propriedade muito importante do conjunto dos números reais, que é o mesmo ser completo, pode ser provada agora. Primeiro, vamos a definição seguinte.

Definição 14. *Diz-se que um corpo ordenado K é completo, se todo subconjunto X, não vazio, de K, limitado superiormente, $X \subset K$ possui supremo $s = supX \in K$.*

Com a Definição 14 posta, o próximo teorema nos diz que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo.

Teorema 3.1.20. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado superiormente, então existe $supX$.*

Demonstração. Seja A definido da seguinte forma:

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \text{ para algum } x \in X\} .$$

O conjunto $B = \mathbb{R} \setminus A$ é o conjunto das cotas superiores de X. Vamos mostrar que A e B satisfazem as quatro condições do Teorema 3.1.18. De fato:

(i) Por construção, temos que $\mathbb{R} = A \cup B$;

(ii) Pela construção do conjunto B temos que $A \cap B = \emptyset$;

(iii) Como $X \neq \emptyset$, então $A \neq \emptyset$ e, consequentemente, $B \neq \emptyset$;

(iv) Sejam α e β, tais que $\alpha \in A$ e $\beta \in B$. Como para algum $x \in X$ temos $\alpha < x$ e β é uma cota superior de X, então $\alpha < \beta$.

Assim, de acordo com o teorema, existe um, e apenas um, número real γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, para todo $\alpha \in A$ e para todo $\beta \in B$. Esse número real γ é o supremo de X, pois γ é a menor das cotas superiores de X.

$\square$

O próximo teorema nos mostra que o conjunto dos números Reais é arquimediano e na demonstração usamos a definição de supremo de um conjunto.

Teorema 3.1.21. *O conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é ilimitado em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. O conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é limitado inferiormente, assim vamos mostrar que ele não é limitado superiormente. Para isso, suponha, por absurdo, que o conjunto dos números naturais seja limitado superiormente. Assim, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que α seja o supremo de $\mathbb{N}$. Dessa forma, como $n+1 \in \mathbb{N}$, então $\alpha \geq n+1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que, $\alpha - 1 \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois $\alpha - 1$ seria uma cota superior menor do que α.

Logo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais é ilimitado em $\mathbb{R}$. $\square$

As definições 12 e 13, juntamente com o teorema 3.1.22, permitem demonstrar uma propriedade importante, que é a existência de infinitos números irracionais entre dois reais distintos. No final da seção demonstraremos essa propriedade.

Definição 15. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos a potência a^n recursivamente como sendo 1, se $n = 0$ e, para $n > 1$, como sendo $a.a^{n-1}$. Finalmente, se $a \neq 0$, definimos a^{-n} como sendo $(a^{-1})^n$.*

Teorema 3.1.22. *Seja a um real positivo e $n > 0$ natural. Existe um único número real positivo que é solução da equação $x^n = a$.*

Demonstração. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n < a\}$, notemos que $\dfrac{a}{a+1}$ é menor do que a e 1, ou seja, $\dfrac{a}{a+1} < a$ e $\dfrac{a}{a+1} < 1$. Daí, segue que, $\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n < \dfrac{a}{a+1} < a$, o que nos mostra que $\dfrac{a}{a+1} \in A$ e, com isso, $A \neq \emptyset$.

Por outro lado, temos que $a+1$ é cota superior de A, pois como $a+1>1$, então $(a+1)^n > a > x^n$ e, consequentemente $a+1 > x$, para todo $x \in A$. Assim, A é limitado superiormente e, dessa forma, A possui supremo.

Seja α o supremo do conjunto A, vamos mostrar que $\alpha^n < a$ e $\alpha^n > a$ não pode acontecer, assim pela tricotomia dos números reais, teremos que ter $\alpha^n = a$.

Suponha $\alpha^n < a$, vamos mostrar que existe $0 < h < 1$ tal que $(\alpha+h)^n < a$. Temos:

$$(\alpha+h)^n = \left(\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha h^{n-1} + h^n\right)$$

$$(\alpha+h)^n = \alpha^n + h\left(\binom{n}{1}\alpha^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha h^{n-2} + h^{n-1}\right)$$

$$(\alpha+h)^n = \alpha^n + h\left(\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha h^{n-2} + h^{n-1} - \alpha^n\right)$$

Como $0 < h < 1$, então

$$(\alpha+h)^n < \alpha^n + h\left(\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha + 1 - \alpha^n\right)$$

$$(\alpha+h)^n < \alpha^n + h\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right]. \ (I)$$

Se fizermos

$$h < \frac{a-\alpha^n}{(\alpha+1)^n - \alpha^n}$$

o que é possível pois $\mathbb{R}$ é arquimediano, teremos

$$h < \frac{a-\alpha^n}{(\alpha+1)^n - \alpha^n} \Leftrightarrow h\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right] < a - \alpha^n \Leftrightarrow \alpha^n + h\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right] < a,$$

pois $(\alpha+1)^n - \alpha^n > 0$. Daí, e da desigualdade (I), obtemos:

$$(\alpha+h)^n < \alpha^n + h\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right] < a$$

de onde chegamos ao absurdo de $\alpha^n < a$.

Suponha $\alpha^n > a$, vamos mostrar que existe $0 < k < 1$ tal que $(\alpha-k)^n > a$. Temos:

$$(\alpha-k)^n = \left(\alpha^n - \binom{n}{1}\alpha^{n-1}k + \binom{n}{2}\alpha^{n-2}k^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\alpha k^{n-1} + (-1)^n k^n\right)$$

$$(\alpha-k)^n = \alpha^n - k\left(\binom{n}{1}\alpha^{n-1} + \cdots - (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\alpha k^{n-2} - (-1)^n k^{n-1}\right)$$

$$(\alpha-k)^n = \alpha^n - k\left(\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1} + \cdots - (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\alpha k^{n-2} - (-1)^n k^{n-1} - \alpha^n\right)$$

Como $0 < k < 1$, então

$$(\alpha - k)^n > \alpha^n - k\left(\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha + 1 - \alpha^n\right)$$

$$(\alpha - k)^n > \alpha^n - k\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right].\ (II)$$

Se fizermos

$$k < \frac{\alpha^n - a}{(\alpha+1)^n - \alpha^n}$$

o que é possível pois $\mathbb{R}$ é arquimediano, teremos

$$k < \frac{\alpha^n - a}{(\alpha+1)^n - \alpha^n} \Leftrightarrow k\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right] < \alpha^n - a \Leftrightarrow a < \alpha^n - k\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right],$$

pois $(\alpha+1)^n - \alpha^n > 0$. Daí, e da desigualdade (II), obtemos:

$$(\alpha - k)^n > \alpha^n - k\left[(\alpha+1)^n - \alpha^n\right] > a$$

de onde chegamos ao absurdo de $\alpha^n > a$.

Portanto a única opção possível para o supremo α do conjunto A é, o mesmo, ser igual a a, ou seja, $\alpha = a$.

□

Definição 16. *Dado um número real positivo a, o único número real positivo que é solução da equação $x^n = a$, estabelecido pelo teorema anterior, chama-se raiz n-ésima de a e é denotado por $\sqrt[n]{a}$ ou por $a^{\frac{1}{n}}$. A raiz n-ésima de a permite que se defina expoente racional do seguinte modo: se m e n são inteiros positivos, $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ e, como para expoentes inteiros, $a^{-\frac{m}{n}} = \left(a^{-1}\right)^{\frac{m}{n}}$.*

Será que todo intervalo dos reais, não degenerado, possui infinitos números irracionais, assim como acontece com os números racionais? Utilizando as hipóteses do teorema 3.1.17 juntamente com as propriedades discutidas para os racionais, sejam os números racionais r_1 e r_2, distintos, tais que $\alpha < r_1^* < r_2^* < \beta$. Pelo fato de $\mathbb{Q}$ ser arquimediano, tomemos $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{p} < r_2 - r_1$. Dessa forma, para algum $m \in \mathbb{Z}$, com $m \neq 0$, teremos $r_1 < \frac{m\sqrt{2}}{p} < r_2$. O corte

$$\gamma = \mathbb{Q}_-^* \bigcup \left\{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < \frac{2m^2}{p^2}\right\}$$

é um corte não racional e tal que $\alpha < r_1^* < \gamma < r_2^* < \beta$, logo existe um número irracional entre α e γ. Se tomarmos subintervalos contidos em (r_1, r_2), concluímos que existem, na verdade, infinitos números irracionais entre α e β. A prova de que o corte γ não é racional é análoga à demonstração do teorema 3.0.7.

3.2 REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS

A representação dos números reais na forma decimal é importante e nos fornece outra possibilidade de entender os números racionais e irracionais. Podemos determinar se um número é racional ou irracional pela sua representação decimal e essa definição é muito utilizada, principalmente nos livros didáticos do ensino médio.

Teorema 3.2.1 (representação decimal dos números reais)**.** *(i) A cada número real α, não negativo e menor do que 1, corresponde uma única sequência de dígitos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, satisfazendo:*

(a) $0 \le n_k \le 9$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$;

(b) $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ não possui infinitos dígitos consecutivos iguais a 9; e

(c) definindo, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, S_k como a soma $\frac{n_1}{10} + ... + \frac{n_k}{10^k}$, α será o supremo do conjunto $S = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

(ii) Reciprocamente, a cada sequência de dígitos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, satisfazendo (a) e (b) acima, e definindo s_k como em (c), corresponde um único número real α, não negativo e menor do que 1, que é o supremo do conjunto limitado superiormente $S = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que se $\alpha \in [0, 1[$, então existe n natural, com $0 \le n \le 9$ tal que $\dfrac{n}{10} \le \alpha$. De fato, temos que, $0 \le 10.\alpha < 10$ e, consequentemente, $10.\alpha$ pertence a um dos intervalos $[n, n+1[$, com $0 \le n \le 9$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, o intervalo $[n_k, n_k + 1[$, ao qual $10.\alpha$ pertence, nos determinará o natural $0 \le n_k \le 9$ que é o maior dos naturais menores que $10.\alpha$. Logo, $n_k \le 10.\alpha$ implica $\dfrac{n_k}{10} \le \alpha$.

Vamos, agora, provar por indução em n, que se

$$\alpha > \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} ,$$

então existe um natural n_k, com $0 \le n_k \le 9$, tal que

$$\alpha \ge \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k}$$

onde $k \in \mathbb{N}$. De fato, já provamos para $k = 1$, suponha verdadeira a afirmação

$$\alpha > \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} ,$$

logo

$$0 < \alpha_1 = \alpha - \left(\frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}}\right) < 1 ,$$

e assim temos que existe um $0 \le n_k \le 9$ máximo que satisfaz, $\dfrac{n_k}{10} \le \alpha - \alpha_1$. Como $\dfrac{n_k}{10^k} \le \dfrac{n_k}{10}$, então $\dfrac{n_k}{10^k} \le \alpha - \alpha_1$ e, daí,

$$\alpha \ge \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k}$$

onde $k \in \mathbb{N}$.

Com o resultado acima, vamos agora provar o teorema.

(a) Seja α um número real não negativo e menor do que 1. Assim existe

$$n_1 = max\left\{n_k \in \mathbb{N} \mid \frac{n_k}{10} \leq \alpha \text{ , } 0 \leq n_k \leq 9 \text{ e } k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

tal que $\dfrac{n_1}{10} \leq \alpha$. Se $\alpha = \dfrac{n_1}{10}$, então α está associado a sequência $(n_1, 0, 0, 0, ...)$. Se $\alpha \neq \dfrac{n_1}{10}$, então existe

$$n_2 = max\left\{n_k \in \mathbb{N} \mid \frac{n_1}{10} + \frac{n_k}{10^2} \leq \alpha \text{ , } 0 \leq n \leq 9 \text{ e } k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

e, se $\alpha = \dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2}$, então α está associado a sequência $(n_1, n_2, 0, 0, 0, ...)$, enquanto que, para $\alpha \neq \dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2}$ existirá um

$$n_3 = max\left\{n_k \in \mathbb{N} \mid \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} \leq \alpha \text{ , } 0 \leq n_k \leq 9 \text{ e } k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

e continuando a análise associamos α a uma sequência que pode ter uma das seguintes formas: $(n_1, n_2, \cdots, n_k, 0, 0, 0, \cdots)$ no caso em que $\alpha = \dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \dfrac{n_k}{10^k}$ ou $(n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots, n_k \cdots)$ no caso em que $\alpha > \dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{n_k}{10^k} + \cdots$, onde não tenhamos uma sequência infinita de dígitos 0. Daí, temos α associado a uma sequência do tipo $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, onde $0 \leq n_k \leq 9$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Suponha que a sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ associada a α tenha infinitos dígitos consecutivos iguais a 9, a partir de uma posição k, dessa forma temos:

$$\alpha = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots$$

. A soma

$$\frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots$$

é uma série geométrica (ou progressão geométrica) infinita e, cuja razão é $\dfrac{1}{10}$, o que nos permite calcular seu valor, a saber:

$$\frac{9}{10^k} + \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots = \frac{\frac{9}{10^k}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{k-1}} \text{ .}$$

Logo,

$$\alpha = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{1}{10^{k-1}} = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k-1} + 1}{10^{k-1}}$$

. Como a sequência infinita de dígitos 9, por suposição, começa na posição k, então $0 \leq n_{k-1} < 9$ e, consequentemente, $0 \leq n_{k-1} + 1 \leq 9$. Portanto, α está associado a uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, com $0 \leq n_k \leq 9$ e não possuindo uma infinitos dígitos consecutivos iguais a 9.

(c) Suponhamos, por absurdo, que $\beta \in [0,1]$ seja o supremo do conjunto S, onde $\beta \neq \alpha$. Por construção, α é uma cota superior de S, logo $\beta < \alpha$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{10^k} \leq \alpha - \beta$. Daí temos:

$$\alpha - S_k < \frac{1}{10^k} < \alpha - \beta \Leftrightarrow \beta < S_k \ ,$$

o que é um absurdo, pois β é supremo do conjunto S e S_k é um elemento de S.

(ii) Seja S e S_k como definidos no enunciado, onde $0 \leq n_k \leq 9$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que S é limitado superiormente pela série geométrica (progressão geométrica) $\dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \cdots + \dfrac{9}{10^k} + \cdots = 1$. Assim, como todo subconjunto limitado dos reais possui supremo, temos que o número real α, supremo de S, é o número associado à sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

$\square$

Definição 17. *Definição da representação decimal de um número real:*

i) dado um número real α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, seja $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ a sequência de dígitos correspondente a α, sem infinitos noves consecutivos, construída na primeira parte do teorema acima. A representação decimal de α se define como sendo a expressão $0, n_1n_2n_3n_4....$ Se $n_k \neq 0$ e $n_l = 0$, para todo $l > k$, convenciona-se representar $0, n_1n_2n_3n_4...$ por $0, n_1n_2n_3n_4...n_k$, que será dita representação decimal finita de α.

ii) Se $\alpha \geq 1$, seja n_0 o maior natural que é menor do que ou igual a α. Seja $0, n_1n_2n_3n_4...n_k...$ a representação decimal de $\alpha - n_0$ definida em (i). Definimos a representação decimal de α como sendo a expressão $n_0, n_1n_2n_3n_4...n_k....$

iii) Se $\alpha < 0$, definimos sua representação decimal como sendo $-r$, onde r é a representação decimal de $-\alpha$.

3.3 $\mathbb{R}$ NÃO É ENUMERÁVEL

Usaremos a mesma definição do livro "Análise Real", para conjuntos enumeráveis.

Definição 18. *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.*

De posse da definição de conjunto enumerável, podemos provar que $\mathbb{R}$ não é enumerável, comecemos pelo lema a seguir.

Lema 3.3.1. *O intervalo $I =]0, 1[$ não é enumerável.*

Demonstração. Vamos mostrar que $I \setminus I' \neq \emptyset$ qualquer que seja $I' \subset I$ com I' enumerável. Assim, dado I' um subconjunto enumerável de I, temos que I' pode ser escrito de forma ordenada como

$$I' = \{x_0, x_1, x_2, ...\},$$

onde

$$x_0 = 0, x_{00}x_{01}x_{02}x_{03}...$$

$$x_1 = 0, x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}...$$

$$x_2 = 0, x_{20}x_{21}x_{22}x_{23}...$$

$$...$$

$$x_k = 0, x_{k0}x_{k1}x_{k2}x_{k3}...$$

$$...,$$

pois existe uma bijeção entre I' e o conjunto dos números naturais. Cada x_k, com $k \in \mathbb{N}$ foi escrito de acordo com a definção para representação de números decimais, dada acima, sem infinitos noves consecutivos.

Vamos mostra que existe $x \in I$ tal que $x \notin I'$, para isso seja x escrito em sua representação decimal como: $x = a_0a_1a_2a_3...$, de tal forma que o dígito decimal a_n seja diferente de 9, 0 e do dígito decimal x_{nn} da representação de x_n. Pela bijeção entre os números reais e representações decimais, sem infinitos noves consecutivos, temos que x é o único elemento escrito como $a_0a_1a_2a_3...$ e é diferente de todos os elementos de I', ou seja, $I \setminus I' \neq \emptyset$. Daí, concluímos que, todo subconjunto enumerável de I é diferente de I. Logo I não pode ser enumerável.

$\square$

Teorema 3.3.2. *O conjunto dos números reais é não enumerável.*

Demonstração. Se o conjunto dos números reais fosse enumerável, então todo subconjunto de $\mathbb{R}$ seria enumerável, mas mostramos no lema anterior que $I =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ não é enumerável. Portanto, $\mathbb{R}$ não é enumerável. $\square$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que, a construção do conjunto dos números reais por meio da teoria dos cortes pode agregar mais formas de pensar o objeto de nosso estudo. Essa construção não é muito trabalhada nos cursos de formação de professores, assim pensamos que nosso trabalho pode ser uma oportunidade de difundir essa teoria para docentes e futuros docentes.

O objetivo principal foi esmiuçar a teoria dos cortes - que nos mostram uma construção dos números reais - a fim de fazer um manual para que professores já há algum tempo sem estudar teorias matemáticas avançadas (diga-se da graduação) ou mesmo graduados, pudessem ter um material mais detalhado nas demonstrações, com o intuito de facilitar o entendimento. Para atingir tal objetivo, nos baseamos na sequência construída no livro *A construção dos números*. Como o foco foi a construção dos números reais, enunciamos alguns resultados e definições como pré requisitos, uma vez que, precisavamos de conceitos estabelecidos, principalmente para o conjunto dos racionais, pois a teoria dos cortes é constituída por tipos especiais de subconjuntos dos racionais.

Não é nossa pretensão querer que seja utilizada a teoria dos cortes no ensino básico, isto está fora da realidade de nosso sistema de ensino, porém o professor que atua em tal nível educacional pode, por meio dessa teoria, tentar levar novas discussões e explicações para a sala de aula. Por exemplo, a própria definição de corte já nos dá uma interpretação geométrica, que acreditamos ser rica, cada ponto da reta numerada divide a mesma em duas semirretas, daí podemos discutir com os alunos a propriedade que diz: o conjunto dos números reais é completo, que também pode ser pensado como uma correspondência biunívoca entre os números reais e pontos da reta. Pode-se explicar essa propriedade partindo de um ponto e definindo: se a distância do mesmo à origem da reta numerada for um valor/número não racional, então definimos este ponto como relacionado a um valor/número irracional, como só temos duas opções para os pontos da reta numerada, em relação à distância até a origem, então todo ponto representa um número racional ou um número irracional, ou seja, todo ponto representa um número real.

Em nossa análise sobre cinco livros didáticos, podemos concluir que os conjuntos numéricos são tratados como uma revisão e entendemos isso, uma vez que ambos já foram estudados no ensino fundamental com maior espaço nos livros e possivelmente nas aulas. O problema, não é novidade e várias pesquisas em educação matemática já nos mostram, que os alunos, em geral, saem com muita defazagem do ensino fundamental para o ensino médio e, como o conteúdo sobre o conjunto dos números reais normalmente é trabalhado na parte final do ensino fundamental, muito dos conceitos e propriedades ainda não estão bem assimilados pelos discentes. Assim, acreditamos que, o conjunto dos números reais deveria ser abordado com um pouco mais de cuidado, tendo um espaço maior nos livros para poder apoiar o professor.

Outro ponto sobre os livros didáticos, como é um livro para alunos, o professor não pode apoiar-se em relação a profundidade dos conteúdos. O apoio do livro didático ao professor, é dado na metodologia e dinâmica da aula, porém muitos parecem apoiar-se neles, também como uma fonte de conhecimento mais profundo, então, no caso dos números reais, prentendemos que nosso trabalho sirva aos docentes como apoio ao aprofundamento dos conteúdos. Lógico, sabemos que muitos deles teem dificuldades quando o assunto é reciclagem pela falta de tempo e por isso, talvez, não consigam pegar um livro de matemática avançada para estudar.

Por fim, este trabalho pode sim ser um manual de reciclagem ou de consulta para professores ou futuros docentes que queiram ou precisem ampliar seus conceitos sobre os números reais.

REFERÊNCIAS

[1] BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia*, volume 1, 2.ed. São Paulo: Leya, 2016.

[2] DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações*, volume 1, 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

[3] FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[4] GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[5] IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*, volume 1, 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[6] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável*, volume 1, 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[7] SMOLE, K. S. et al. *Matemática para compreender o mundo*, volume 1, 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[8] SOUZA, J. R. et al. *#Contato matemática*, volume 1, 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.