UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

MATEMÁTICA FINANCEIRA EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS: UM OLHAR CRÍTICO

Émerson Fittipaldi Suassuna de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti

Campina Grande - PB
Outubro/2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

MATEMÁTICA FINANCEIRA EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS: UM OLHAR CRÍTICO

por

Émerson Fittipaldi Suassuna de oliveira †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

O48m Oliveira, Émerson Fittipaldi Suassuna de.

Matemática financeira em alguns livros didáticos: um olhar crítico / Émerson Fittipaldi Suassuna de Oliveira. – Campina Grande, 2018.

108 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação: Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti".

Referências.

1. Matemática Financeira. 2. Livros Didáticos – Ensino Médio. 3. Matemática Financeira – Estudo e Ensino. I. Cavalcanti, Alexsandro Bezerra. II. Título.

CDU 51:336(07)(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECÁRIA SEVERINA SUELI DA SILVA OLIVEIRA CRB-15/225

MATEMÁTICA FINANCEIRA EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS: UM OLHAR CRÍTICO

por

Émerson Fittipaldi Suassuna de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: 10/10/2018

BANCA EXAMINADORA:

Alexsandro B. Cavalcanti

Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti
Universidade Federal de Campina Grande

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Universidade Estadual da Paraíba

Gilberto S. Matos

Prof. Dr. Gilberto da Silva Matos
Universidade Federal de Campina Grande

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Outubro/2018

Dedicatória

À minha digníssima Myrelle Leal Campos Sousa(Lela), pela compreensão nos momentos de estresse e pelo incentivo nas horas de esgotamento físico e mental. Enfim, pela ajuda, nos momentos que mais precisei. Com você por perto, meus passos ficaram mais leves. Te amo.

Agradecimentos

A Deus, por se fazer presente em todos os momentos da minha vida, fortalecendo-me e iluminando meus pensamentos, para que eu pudesse vencer todos os desafios.

À minha amada namorada Myrelle Leal Campos Sousa, pelo amor, carinho e respeito. Além da paciência e apoio durante essa jornada de mais de dois anos do curso que percorremos juntos.

Ao meu filho, Igor Rodrigues Suassuna, por, no seu silêncio de compreensão, me dar forças inimagináveis.

À minha família, especialmente minha mãe, Terezinha Dutra Suassuna, pela ajuda que sempre deu em toda a minha vida.

Ao orientador, Prof. Dr. Alexsandro Bezerra Cavalcanti, pela honra de aceitar o convite para orientar este trabalho.

Ao coordenador do PROFMAT-UFCG Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, pelo apoio fundamental ao longo desse trajeto, sem o qual não teria alcançado êxito.

Ao amigo, Oséias Pereira Matias da Silva, que foi sempre solícito a todos os alunos do curso, que, com sua sabedoria, humildade e vontade de ajudar, contribuiu bastante pelo êxito nessa caminhada.

Aos professores, Dr. Aldo Trajano Lourêdo e Prof. Dr. Gilberto da Silva Matos, por aceitarem fazer parte da banca examinadora.

Aos meus colegas e amigos de curso, pelo apoio e incentivo nos momentos mais difíceis e pela amizade fortalecedora.

Ao Corpo Docente da UFCG de Campina Grande(PB), especialmente aos professores do PROFMAT, por contribuir para a expansão do conhecimento adquirido.

Finalmente, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho, será feita uma análise dos capítulos referentes ao conteúdo de Matemática Financeira em três livros didáticos do Ensino Médio; dois deles, datados de 2010 e 2014, adotados em escolas públicas de Campina Grande(PB), e o terceiro, mais antigo, publicado em 1995, para que seja possível ter, também, uma ideia da evolução da abordagem desse conteúdo ao longo desse período. Como referências para a análise dos livros, foram usadas as orientações oficias, da Constituição Federal do Brasil, e, principalmente, as leis e as diretrizes da educação básica, que norteiam as metas e os objetivos a serem alcançadas pelo sistema de ensino do país. Dessa forma, sob um olhar crítico em torno dos livros analisados pelos parâmetros elencados, foram feitas considerações, prestigiando os pontos positivos de cada livro e, simultaneamente, propondo mudanças quando assim for necessário.

Palavras Chaves: Ensino Médio. Livros Didáticos. Matemática Financeira.

Abstract

In this work, an analysis of the chapters concerning the content of Financial Mathematics will be done in three high school textbooks: two of them, dated 2010 and 2014, adopted in public schools in Campina Grande (PB), and the third, published in 1995, so that it is also possible to have an idea of the approach of this content throughout this period. As reference for the analysis of the books, the official guidelines of the Federal Constitution of Brazil were used, and especially the laws and guidelines of basic education, which guide the goals and objectives to be achieved by the country's education system. Thus, under a critical look around the books analyzed by the parameters listed, considerations were made, highlighting the positive points of each book and simultaneously proposing changes when necessary.

Keywords: High School. Textbooks. Financial Mathematics.

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

ABEFIM	Associação Brasileira de Educadores Financeiros
BNDES	Banco Nacional do Desenvolvimento
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FGV - SP	Fundação Getúlio Vargas - São Paulo
IBOVESPA	Índice da Bolsa de Valores de São Paulo
ICMS	Imposto Sobre Circulação de Mercadorias e Serviços
IPI	Imposto sobre Produtos Industrializados
IPMF	Imposto Provisório sobre Movimentações Financeiras
IPVA	Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores
LDB	Lei de diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PETROBRAS	Petróleo Brasileiro
PIB	Produto Interno Bruto
PNE	Plano Nacional da Educação
PROCOM	Programa de Proteção e Defesa do Consumidor
SAC	Sistema de Amortização Constante
SELIC	Sistema Especial de Liquidação e Custódia
SPC	Serviço de Proteção ao Crédito
TR	Taxa Referencial

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Constituição da República Federativa do Brasil, no capítulo *III* - seção *I*, artigo 205, fala que:

> "A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho".

É notória a preocupação da legislação brasileira quanto a educação voltada à preparação do educando para os desafios da vida, nos âmbitos social, familiar e laboral. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), como exemplo, no artigo 35, reforça o que consta na constituição federal e afirma que o Ensino Médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, tem como finalidades, entre outras:

- a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- a compreensão dos fundamentos científicos-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina

Sendo assim, para o aluno, é essencial a concomitância entre o aprendizado teórico e sua respectiva aplicação prática, de modo que o permita resolver problemas cotidianos, tratar informações de forma crítica e funcione como suporte na tomada de decisões. Quando potencializada pela escola, a capacidade de aprendizagem apresenta melhor resultado.

Porém, na contramão do que postulam as técnicas pedagógicas modernas, a matemática tem sido ensinada de forma mecânica. Baseada na repetição excessiva de exercícios semelhantes, sem incentivo ao efetivo raciocínio lógico, tal forma de ensino, além de errônea, induz ao fracasso do aprendizado.

O novo Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), preconiza que em um mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:

- saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
- enfrentar problemas de diferentes naturezas;
- participar socialmente, de forma prática e solidária;
- especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado.

Uma formação com tal ambição exige, portanto, métodos de instrução compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:

- comunicar-se e argumentar;
- defrontar-se com problemas, compreendê-los e enfrentá-los;
- participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
- fazer escolhas e proposições;
- tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender.

O Plano Nacional da Educação (PNE) de 2014, tem como uma das metas institucionalizar o programa de renovação do Ensino Médio, a fim de incentivar práticas pedagógicas com abordagens interdisciplinares estruturadas pela relação entre teoria e prática. Na Lei de Diretrizes e Base(LDB) da Educação Nacional, o artigo *II*, diz que a educação, dever da família e do estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. Também afirma que o aluno deve ter a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria e prática, no ensino de cada disciplina.

Outrossim, conforme a LDB o estudante deve ficar apto a compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas, exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. Além disso, o meio acadêmico deve valorizar a diversidade de saberes e as vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que possibilitem a compreensão das relações próprias ao mundo do trabalho e a realização de escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao projeto de vida.

Levando em conta a proposta de mudança da educação, na qual o aluno passa a assumir papel ativo no processo de ensino-aprendizagem, a Matemática Financeira sendo um ramo da matemática aplicada, se encaixa naturalmente nessa nova dinâmica de ensino. Além disso, a proposta é ainda mais apropriada por se tratar de um assunto com relevância progressiva na vida de cada cidadão. Nesse contexto, evidencia-se uma sociedade com índices nacionais de endividamento cada vez mais expressivos, frutos de uma má educação financeira que leva muitas pessoas a recorrer à financiamentos com juros altíssimos, notadamente os juros referentes a pagamentos com atraso das faturas dos cartões de crédito, uso do cheque especial, entre outros.

O educador financeiro e presidente da Associação Brasileira de Educadores Financeiros(Abefim), Reinaldo Domingues, destaca que grande parcela da população brasileira se encontra endividada e inadimplente, o que ocasionam problemas que vão muito além do dinheiro, incluindo até mesmo abalo nas relações familiares e condições de saúde.

Sem possuir educação financeira, aponta Reinaldo (2016), as pessoas desconhecem o valor do dinheiro ao longo do tempo e as formas corretas de utilizá-lo e, então, ficam a um passo das dívidas. Nesse sentido, vale ressaltar que quando são expostos à sociedade de consumo, crianças e adolescentes, necessitam ter uma preparação adequada pelos pais e pela escola, de modo que não estejam suscetíveis ao descontrole de suas finanças no futuro.

Segundo Lima (2011) uma crise nas finanças pessoal tem o mesmo potencial destrutivo que a desarmonia entre corpo e mente, ou seja, torna o indivíduo propenso a ter doenças. O problema é sério e pode desencadear em depressão, ansiedade, aumento ou perda de apetite e, principalmente, um abalo na autoestima. Segundo o psicólogo e terapeuta holístico André Lima, "Ter muitas dívidas ou viver sempre em dificuldades financeiras é como ter uma doença e isso precisa ser tratado".

Esses foram aspectos que motivaram a escolha do assunto em questão. Logo, de acordo com Dias e Tassote (2011), aliar a Matemática Financeira ao exercício da cidadania é de grande valia na tarefa de reverter o quadro obscuro relatado em relação a esse conteúdo e no lançamento de ideias na busca por um ensino cada vez mais contextualizado e ligado na formação integral do cidadão. .

Dessa forma, a análise dos livros didáticos com esse novo olhar dos parâmetros curriculares nacionais é de suma importância, já que os livros são, no cotidiano dos alunos das escolas públicas, sua principal ferramenta. O livro texto é o instrumento utilizado no dia-a-dia do alunado e esse deve estar alinhado com as novas diretrizes educacionais que prezam pelo desenvolvimento dos discentes numa formação que os tornem cidadãos conscientes, além de aptos ao trabalho que exercem ou exercerão e ao uso das modernas tecnologias.

1.1 Objetivos

Esse trabalho tem como objetivo geral analisar como é abordado o tema Matemática Financeira em três livros didáticos do Ensino Médio, sendo um deles mais antigo, e os outros dois livros mais recentes adotados em duas escolas públicas da rede estadual de Campina Grande(PB). Como objetivos específicos, visa-se comparar as sequências que foram abordados os conteúdos programáticos dos três livros aqui analisados, como os assuntos foram apresentados em cada livro, fazendo comparações quando assim for pertinente, e por fim, verificar a luz do que se preza nos novos parâmetros nacionais da educação se os livros didáticos estão em conformidade com o propósito de capacitação dos alunos ao trabalho e o uso de tecnologias, preparando-os para que se transformem em cidadãos mais conscientes na sociedade. Ademais, tem-se por finalidade a proposição de mudanças, caso necessário, na abordagem dos livros didáticos, tendo como base as normas oficiais que regem o Ensino Médio no Brasil.

1.2 Organização

No primeiro capítulo, o assunto abordado é introduzido, elencando a importância do mesmo nos dias atuais. Nesse mesmo capítulo, são apresentados os objetivos gerais e os específicos desse trabalho.

No segundo capítulo, será explorado o histórico da Matemática Financeira, ou seja, sua evolução no decorrer do tempo e que fatores levaram ao seu desenvolvimento. Sobre esse último, vale salientar a dificuldade de encontrar informações nos livros por estar ligado não só a Matemática, mas também, a evolução econômica das sociedades e ao aparecimento/aperfeiçoamento da escrita, já que existem poucos registros da antiguidade que foram preservados.

No terceiro capítulo, está situada a Fundamentação Teórica, isto é, os conceitos fundamentas da Matemática Financeira, notadamente os que são mais relevantes para o Ensino Médio.

No quarto capítulo, será analisado o livro Matemática de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola - volume 1, de 1995, Capítulo 10, que tem como título: Noções sobre Matemática Financeira. A análise desse livro servirá para se ter noção da evolução quanto ao tratamento da Matemática Financeira ao longo de um período de, aproximadamente, 20 anos, já que os outros livros analisados são de 2010 e 2014.

No quinto capítulo, há a análise do livro Matemática: Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce et. al, volume 3, 2010, Capítulo 6. Esse, por sua vez, é adotado na Escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio Major Veneziano.

No sexto capítulo, será avaliado o livro de Matemática(Ensino Médio) de Luiz Roberto Dante, volume 3, parte 1, 2014, capítulo 1. Vale frisar que tal livro é adotado na Escola

Estadual do Ensino Fundamental e Médio Monte Carmelo, na qual leciono desde o ano de 2013.

Existirá, então, a conclusão do estudo realizado, com análises mais detalhadas sobre os livros didáticos mencionados e sendo propostas, quando necessário, mudanças pertinentes..

Capítulo 2

Um histórico da Matemática Financeira

Segundo Boyer (1974) afirmações sobre a origem da Matemática, seja da Aritmética ou Geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, num intervalo de tempo que pode ter perpassado por milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de colocar seus registros e pensamentos na forma escrita. Para informações da pré-história, são utilizadas interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia e de extrapolação retroativa, conjectural, a partir dos documentos que sobreviveram.

Boyer (1974) afirma que em certa época, pensou-se que a Matemática se ocupava do mundo que os sentidos percebem. Nessa perspectiva, onde o desenvolvimento inicial da matemática está relacionado com a solução de problemas práticos, a Matemática Financeira, sendo ramo da Matemática Aplicada, apresenta forte conexão com o cotidiano e as necessidades da sociedade.

Tendo como ponto de corte o primeiro registro formal de juros, que ocorreu em 2.000 a.C., divide-se a história da Matemática Financeira em dois períodos: o anterior a esse primeiro registro formal de juros, chamado de antecedentes históricos e o período posterior, intitulado de desenvolvimento da Matemática Financeira.

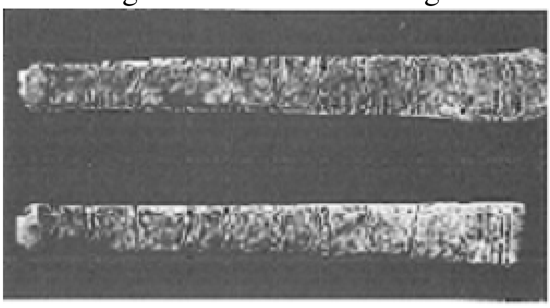
2.1 Antecedentes históricos

Eves (2004) descreve que os primeiros povos viviam da caça de pequenos animais selvagens e das frutas, castanhas e raízes que colhiam. Habitavam, em geral, os espaços abertos das savanas, verdadeiros oceanos de uma erva alta que cobria a maior parte das porções habitáveis da África, sul da Europa, sul da Ásia e América Central. Eram nômades e constantemente se deslocavam de um lugar para outro à procura de alimento e em resposta às mudanças climáticas. Sua cultura foi edificada em um mundo duro e hostil, onde a busca do alimento era uma constante indeclinável. Tudo tinha que se adaptar à caça: seus instrumentos de pedra, madeira, osso e carapaça de animais eram desenhados ou para a caça ou para a preparação de alimentos; o fogo, que dominaram, era usado para cozer e se aquecerem nos períodos frios, notadamente à noite; sua arte retratava cenas de caçadas; sua religião era uma tentativa tímida de entender e submeter a imensidão rude que os cercava e, apenas obscuramente, se prendia à ideia de destino final.

Mas, segundo Zarlenga (2002), iniciando cerca de 30.000 a.C., um aperfeiçoamento progressivo é evidente na existência humana.

Eves (2004) afirma que por ter sido uma época em que quase todas as pessoas eram caçadores nômades, a Idade da Pedra registrou limitados avanços científicos e intelectuais. Mas não se deu porque faltasse inteligência às pessoas do período em questão. Por volta de 20.000 a.C., os caçadores das savanas haviam desenvolvido uma cultura complexa que incluía a feitura de ferramentas, linguagem, religião, arte, música e comércio. Os progressos na matemática e ciência, todavia, eram obstados pelas estruturas social e econômica da época em questão. Mas com o aumento populacional tem-se, também, uma necessidade de se anotar o que pertencia a cada pessoa na caçada, por exemplo, um preludio do pensamento científico. A figura a seguir, datada por volta de 18.000 a.C, ilustra o que se fala.

Figura 2.1: Osso de Ishango



Fonte: (Eves, 1992, p. 10)

Como os povos da Idade da Pedra eram caçadores e não agricultores, Eves (2004) diz que esses tinham de se deslocar em consonância com as estações e com o sazonamento de frutas e castanhas. Só tinham condições de levar consigo ferramentas pequenas, fáceis de transportar, roupas e objetos pessoais. Não havia lugar nessa sociedade para o volumoso equipamento necessário para fundir metais nem para as dimensões de uma biblioteca; daí porque na Idade da Pedra não se desenvolveram ferramentas metálicas nem a linguagem escrita. Não havia cidades, e as savanas só podiam fornecer alimentos suficientes para cerca de quarenta pessoas por centena de milha quadrada. Nessa vida ocupada, e muitas vezes curta, um caçador não tinha tempo para ponderar questões de filosofia e ciência

Nas civilizações primitivas, nas quais os homens sobreviviam tirando diretamente da natureza os produtos para suprir suas necessidades, as trocas comerciais praticamente não ocorriam.

O mundo passou por mudanças e no Oriente Médio e Ásia Central, essa transformação não foi tão simples. Conforme a vegetação murchava, os ribeiros secavam e as dunas de areia punham-se em marcha a partir dos novos desertos. Os animais que haviam vivido nessas regiões deixavam-nas, abrindo caminho para alguns oásis, deixando-os quando esses secavam. Os homens, em sua fuga ante o avanço das imensas dunas, seguiam os animais. Eventualmente estabelecendo-se nas margens dos desertos em regiões úmidas e semelhantes a oásis. Esses novos lugares eram como cisternas para todas as formas de vida, incluindo seres humanos, e grande número de homens e mulheres passaram a viver neles depois de sua fuga do deserto.

Segundo Eves (2004) perto do final do período referente a Idade da Pedra, em certas partes do mundo, os povos foram impelidos para uma agricultura intensiva e de grande escala, em virtude de mudanças do clima no mundo. As vastas e ervosas savanas, onde os caçadores do período referente a Idade da Pedra viviam, começaram a se contrair no fim do período Neolítico, como acontece ainda hoje. Em alguns lugares, as florestas em expansão começaram a invadir as savanas; em outros, essas se tornaram áridas e sem vida, transformando-se em desertos. Conforme o meio ambiente mudava, o homem adaptava-se como podia. Na Europa, sul da África, sudeste da Ásia e a leste das Américas do Norte e Sul, os povos se deslocaram para novas florestas e se tornaram caçadores dos bosques, o que requeria uma adaptação menor.

Zarlenga (2002) sustenta que por volta de 6000 a.C. o cavalo foi domado e as ovelhas, cabras e o gado foram domesticados. Além disso, por volta de 5000 a.C. se dissemina uma cultura mista baseada na criação de animais e na jardinagem. A grande revolução do arado, por volta de 4500 a.C., foi consolidada nos 500 anos seguintes. Esse arado, considerado uma invenção formidável para a época, permitiu, rapidamente, o surgimento das primeiras cidades.

Com todas essas mudanças, há uma divisão maior do trabalho, enquanto uns cuidam da agricultura, outros ficam no pastoreio, com cada vez mais excedente de produção, levando tanto ao aumento das trocas comerciais e, também, uma liberação de força de trabalho para outros fins, como de proteção das vilas em ascensão e para trabalhos filosóficos, intensificando novas descobertas e o avanço das ciências.

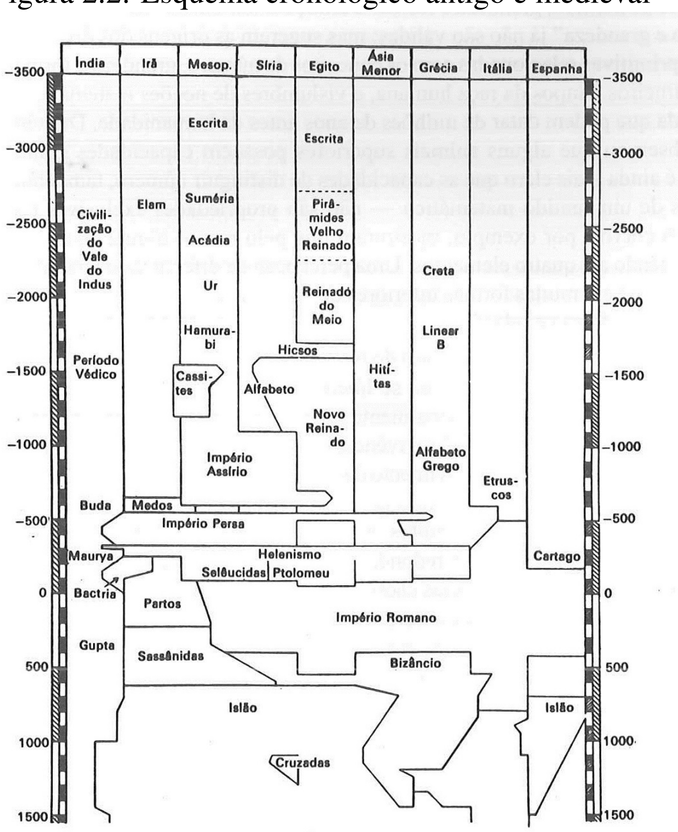
Antes do quarto milênio a.C., uma forma primitiva de escrita estava em uso tanto no vale mesopotâmico como no Nilo. Na região, os primeiros registros pictográficos, que passaram por um processo de gradual convencionalização, evoluíram para uma ordem linear de símbolos mais simples.

O quarto milênio antes da era atual, de acordo com Smith (1958), foi um período de notável progresso cultural, que propiciou o uso da escrita, a descoberta da roda e o uso de alguns metais. Como no Egito durante a primeira dinastia, que começou pelo fim desse maravilhoso milênio, também no vale mesopotâmio havia por essa época uma civilização de alto nível. Ali os sumérios tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Esses registros sumerianos dão a informação de que quase 3000 anos antes de Cristo seus comerciantes estavam familiarizados com contas, recibos, notas, contas e sistemas de medidas. Em nenhuma parte do mundo têm provas claras da matemática comercial, tão cedo como as reveladas por essas tábuas (Boyer 1974).

Segundo Eves (2004) uma das mudanças foi a criação da escrita, por volta de 3.200 a.C.. O cultivo da terra significou irrigação dos vales do norte da África e do Oriente médio onde a chuva era muito escassa; as periódicas cheias do Amarelo, do Nilo, do Tigre e do Eufrates significaram construções de barragens, atividade que requeria não só a cooperação e a arte da engenharia como também, igualmente, um sistema de preservação de registros. Os agricultores precisavam saber quando as enchentes ou a estação das chuvas chegariam, e isso significava calendários e almanaques. Os proprietários de terra mantinham anotações escritas sobre a produção agrícola e traçavam mapas que as cheias e as chuvas pudessem vir conforme as tabelas e, no processo, observavam o movimento das estrelas. Todas essas atividades deram origem a novas classes de homens educados: sacerdotes, escribas e astrólogos.

Na figura 2.2, tem-se um Esquema cronológico, que vai de 3500 a.C até 1500 d.C, mostrando os principais povos em cada período, além de acontecimentos marcantes de cada época.

Figura 2.2: Esquema cronológico antigo e medieval



Fonte: (Boyer, 1996, p. 2)

Assim, de acordo com Eves (2004), junto com a capacidade de ler e escrever veio a necessidade de novas tecnologias. Os primeiros engenheiros planejaram barragens e sistemas de irrigação. Os arados de metal eram melhores do que os de madeira; o homem aprendeu a forjar o bronze por vota de 3000 a.C. A necessidade de instrumentos especializados levou ao aparecimento de mais uma nova classe social: os artesãos especializados.

Outra importante mudança, segundo Eves (2004), foi a disseminação de um estilo de vida sedentário. Ao contrário dos caçadores e colhedores, os agricultores não precisavam viajar grandes distâncias à procura de alimentos. Eles construíram aldeias e vilas permanentes. Com isso, pequenas cidades brotavam ao longo das margens dos rios. Perto de 2500 a.C. as cidades de Mênfis e Tebas despontavam como as metrópoles líderes do Egito. Dessa forma, de acordo com Zarlenga (2002), a forma de organização social e econômica tomada por essas comunidades urbanas iniciais no Egito, Assíria e Suméria é conhecida como o antigo sistema oriental.

Concomitantemente com essa evolução Andrade (2017) afirma que, também, se iniciou, paulatinamente a comunicação entre os primeiros grupos humanos, além de ter começado as trocas de mercadorias a partir das quantidades excedentes que cada um possuía, sem a preocupação de sua equivalência em valor monetário. Surgiu, então, a primeira forma de comércio entre as sociedades: a troca direta de produtos, chamada de escambo.

Zarlenga (2002) diz que, com o passar do tempo, numa sociedade pré-monetária, na qual as mercadorias eram trocadas umas pelas outras, começou a haver necessidade de um meio de troca que pudesse ser usado com mais facilidade, já que as mercadorias nem sempre se equivaliam em valor ou os comerciantes poderiam não necessitar da mercadoria a ser recebida por uma troca. Então, algumas mercadorias começaram a ser procuradas mais que outras e, essas, gradativamente, passaram a servir como meio de troca universal, aceito nas transações comerciais, dando origem à moeda, inicialmente moeda-mercadoria. Tais produtos necessitavam ter especificidades tais como: valor unitário elevado, portabilidade, divisibilidade e composição consistente.

Um exemplo de produto que virou moeda-mercadoria foi o sal, que foi bem valorizado na antiguidade. O sal foi usado como meio de pagamento do ordenado dos soldados romanos, tendo, portanto, a origem do termo salário devido a esse fato. Com o sal recebido, os soldados romanos compravam o que precisavam, usando-o como moeda-mercadoria.

Evidentemente, isso ocorria porque nessas sociedades não existiam, ainda, as moedas. Mas carregar sal ou outros produtos não era muito prático. Então, com o desenvolvimento do comércio e, consequentemente, a intensificação das transações comerciais, este inconveniente foi ficando cada vez mais latente.

Robert (1982) proclama que para a possibilidade de troca, era preciso que certas premissas estivessem dadas, por exemplo, que enquanto umas comunidades produzissem determinadas coisas em troca das quais, e visando sua utilidade, outras comunidades estivessem dispostas a dar uma parte do excedente produzido, por esses bens, dando início a produção destinada à troca sistemática.

Assim, afirma Robert (1982), que com o tempo, algumas tribos das hordas se especializaram na lavoura e outras no pastoreiro. Esta foi à primeira grande divisão social do trabalho, que ocorreu quando diferentes coletividades (e mais tarde certos indivíduos) se dedicaram a determinadas atividades no campo da produção. Se antes todos os produtos elaborados pela comunidade eram consumidos por ela mesma, agora, nas tribos pastorais, por exemplo, apareceram excedentes de couros, lãs, etc. Mas, ao mesmo tempo, tiveram necessidade de produtos da terra. Nas tribos agrícolas, pelo contrário, apareceu um excedente de grãos, mas careciam de produtos próprios ao pastoreio.

Mais tarde, os ofícios começaram a se desenvolver: tecelagem, ferraria, olaria, etc. Gradualmente, as pessoas que praticavam algum ofício, chamados de oficiais, foram se destacando da comunidade. É, então, que ocorre a segunda grande divisão social do trabalho: os ofícios se separam da economia rural. Dessa maneira, a esfera de intercâmbio de mercadorias ampliou-se consideravelmente.

De acordo com Robert (1982), no início, o intercâmbio era realizado pelos chefes das tribos ou anciãos do clã. Eles representavam a comunidade nas transações de troca e tudo aquilo que trocavam pertencia à comunidade. Mas, com o aprofundamento efetivado na divisão do trabalho e o desenvolvimento da produção, assim como com o aperfeiçoamento dos instrumentos de trabalho, tornou-se possível o emprego de um menor número de pessoas na realização das tarefas da comunidade. Por exemplo, uma família podia lavrar uma parcela ao cuidar e manter um rebanho ou trabalhar no tear. O trabalho coletivo deu lugar ao individual, a propriedade social começou a se transformar em propriedade privada e a troca de mercadorias passou gradualmente às mãos dos chefes de família.

A partir disso que se inicia a decomposição do regime comunal primitivo. Aquelas famílias cujos membros tinham em seu poder parcelas mais férteis ou ocupavam, na comunidade, cargos de chefia, isto é, militares ou sacerdotes, aproveitavam sua posição para seu enriquecimento pessoal. Apoderaram-se, então, de uma parte considerável da propriedade social e dos meios de produção e, como consequência, a maioria dos membros da comunidade ficou lançada na indigência, pois, eliminada a propriedade social, não adquiriu propriedade privada.

Assim, prossegue Robert (1982), o enriquecimento, sem dúvida, foi mais rápido para aqueles que obtinham escravos com produto de campanhas militares. Além disso, os ricos reduziam à escravidão não apenas os empobrecidos e endividados. Como nessa época, com seu trabalho, o homem já podia produzir maior quantidade de bens além daqueles que necessitava para sua manutenção, era possível apropriar-se dessa sobra e além disso, os ricos, prevalecendo-se dos privilégios outorgados pelo poder econômico, forçavam aqueles que decaíam economicamente a trabalharem cada vez mais. A antiga igualdade, a propriedade comum e o trabalho coletivo haviam desaparecido.

Robert (1982) diz que, sem dúvida, neste período, o dinheiro ainda não surgira: os diferentes produtos elaborados especialmente para o intercâmbio não eram trocados por dinheiro, mas por outros produtos, também elaborados para serem trocados. Portanto, um artigo (mercadoria) era trocado por outro.

Presume-se que, nessa sociedade, segundo Zarlenga (2002), os empréstimos foram feitos em grãos de sementes, animais e ferramentas para agricultores. Uma vez que um grão de semente poderia gerar uma planta com 100 novas sementes de grãos, após a colheita, os agricultores poderiam pagar a dívida, com uma quantidade maior de grãos após a colheita, que seria o equivalente aos juros nessa época. Da mesma forma, quando os animais foram emprestados, poderiam ser reembolsados com um valor fixado na forma de novos animais nascidos.

Evidentemente, essa forma de juros, nem sempre era vantajosa para quem emprestava as sementes. Nesse sentido, mesmo recebendo uma quantidade maior no futuro, em termos de valor, muitas vezes, essas sementes passavam a valer menos para trocar com outras mercadorias porque, em decorrência de grandes safras, tinham seus valores de troca depreciados. Estes obstáculos foram sendo superados com a evolução dos meios de troca.

Portanto, afirma Robert (1982), em lugar do regime comunal, aparecia a sociedade escravista, na qual se opunham, pela primeira vez, duas classes fundamentais: a dos escravistas e a dos escravos. Tem início a época das sociedades classistas. A história dessa época é a da luta de classes e, ao mesmo tempo, a do surgimento e a do desenvolvimento monetário.

Boyer (1974) afirma que com desenvolvimento da produção mercantil, a troca direta tornou-se cada vez mais complicada e difícil. Para realização da troca foi, então, preciso encontrar um certo artigo, em troca do qual fosse possível obter qualquer outro. Esse artigo tinha como premissa ser sempre encontrado no mercado e qualquer pessoa deveria estar disposta a aceitá-lo.

Algumas ferramentas passaram, com o tempo, a ter valor monetário. Provavelmente, começou na forma de utensílios utilizáveis e evoluiu para um dinheiro simbólico primitivo, como representações de ferramentas (Boyer, 1974).

Pode ter sido uma forma inicial do que é chamado dinheiro das ferramentas (pás, facas, machados, ganchos). Esse tipo de dinheiro presumivelmente começou como ferramentas reais e utilizáveis, valorizadas por sua função. Depois, com o tempo, à medida que seu uso como dinheiro se tornou dominante e seu uso de ferramentas tornou-se sem importância para seu valor, eles se formaram à medida que o dinheiro se tornou sua característica definidora, enquanto seu possível uso como ferramentas tornou-se quase inexistente (Boyer, 1974).

Os dinheiros de instrumento foram usados sobre áreas geográficas substanciais, dentro das tribos ou das nações que reconheceram e sancionaram formas particulares deles. O sistema oriental de metal por peso ainda era potencialmente relevante para negociações mais distantes (Boyer, 1974).

Zarlenga (2002) afirma que nas primeiras culturas da cidade, todas as formas de bens trocáveis podiam ser usadas como dinheiro, estimando que de 12 a 20 dessas commodities foram monetizadas. Também se pensou que as listas de preços, como as tabelas de preço de Hamurábi (e as de Mergulho e Mesopotâmia), foram mal interpretadas, pois os controles de preços são realmente taxas de câmbio oficiais, referentes a várias commodities, quando usadas como dinheiro. Isso significava que os mutuários, dependendo da colheita para reembolsar empréstimos, não seriam prejudicados pela oferta sazonal de mercado e pela procura, uma vez que o aumento da oferta de sua colheita tende a baixar os preços do mercado. Assim, o efeito de monetizar essas commodities era o de estabelecer preços mínimos para eles, quando usado para reembolsar empréstimos.

Entre os objetos de comércio que desempenharam o papel do dinheiro, os metais tiveram maior receptividade, pois, em virtude de suas propriedades naturais, eram os mais aptos a serem usados. O cobre, ouro e a prata foram utilizados antes de outros metais. Por um período histórico muito extenso, o ouro não assumiu a função de dinheiro porque sua extração exigia um trabalho árduo, e além disso, achava-se em mãos de poucas pessoas. Por esta razão, em Roma, foram utilizadas pequenas barras de cobre não cunhadas, cujos valores eram determinados conforme o peso. Posteriormente, apareceram com o peso já marcado, o que veio a ser o começo do dinheiro cunhado e aferido (Boyer, 1974).

Robert (1982) certifica que algumas fontes mais autorizadas testemunham que na Assíria, há quatro mil anos atrás, o ouro cunhado ja era conhecido, ou seja, a forma primitiva das moedas. Mas esta cunhagem de moedas foi uma experiência isolada e de pouca duração.

Figura 2.3: Escultura em bronze dos Arameus encontrado na Assíria

Fonte: (Smith, 1958, p. 39)

Segundo Heichelheim (1970) essa forma de dinheiro, de ferramentas metálicas, foi popular entre os gregos e outros novos grupos raciais, especialmente para o comércio mais local. Esses não foram cuidadosamente pesados e examinados, mas foram aceitos se tivessem forma e aparência tradicionais.

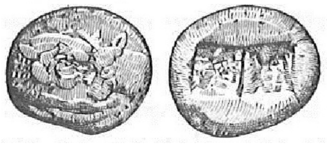
Mas, a utilização de barras fundidas dificultava a circulação das mercadorias. Cada vez que se efetuava uma transação era preciso verificar a qualidade e o peso das barras. Para evitar estes incômodos, os ricos e notáveis no mundo dos negócios começaram a prover-se de barras cunhadas e aferidas garantindo assim o peso e a qualidade do ouro que entrava na liga da barra (Boyer, 1974).

Segundo Rossetti e Schimiguel (2011) ainda há um debate sobre quando a cunhagem de moedas começou, mas, supõe-se que as primeiras surgiram em uma região chamada Lídia(atual Turquia), no século VII a.C. Seu uso, por sua vez, veio a ser mais disseminado por volta de 3000 a.C.. Posteriormente, o valor das moedas passou a ser definido, também, pela nobreza do material empregado, como o ouro e a prata, por exemplo.

Inicialmente, cada cidade cunhava suas moedas, que tinham forma bastante bruta e apenas umas das faces carimbadas. Com o tempo, as cunhagens foram sendo restringidas para que houvesse um maior padrão Boyer (1974).

Esta tarefa logo foi embarcada pelos governos, que se atribuíram o direito exclusivo de cunhar dinheiro em forma de moedas Robert (1982). Posteriormente, foram criados novos meios de pagamento, notadamente, o papel moeda.

Figura 2.4: Moedas antigas(aproximadamente em 550 a.C.)



Fonte: (Smith, 1958, p. 56)

Figura 2.5: Moeda com a figura de Pitágoras

Fonte: (Smith, 1958, p. 70)

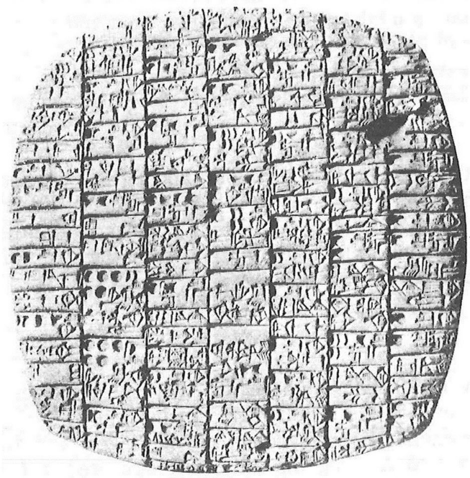
Como foi visto, houve a evolução dos meios de pagamento nas transações comerciais, o que facilitou os empréstimos, que eram tomados como base em um pagamento futuro pelo meio de troca equivalente ao que se foi emprestado, mais a quantidade adicional. Como exemplo, supondo que um agricultor pegou emprestado um saco de sementes da tomate e ficou de pagar no final da colheita dois sacos de sementes do mesmo fruto. Então, se esses dois sacos fossem equivalentes a 1 kg de sal, portanto, ficaria estabelecido que, ao final da colheita, esse agricultor teria que pagar para liquidar seu empréstimo um quilograma de sal, além dos juros previamente estabelecidos.

Isso deixava os credores em posição mais cômoda, já que o sal tendia a manter seu valor de troca ao longo de um período à outro. Mas, mesmo assim, com o tempo, foram sendo necessárias novas formas de pagamento, e foi visto que a evolução levou à cunhagem de moedas, que eram mais fáceis de transportar e tinham uma aceitação mais generalizada e, assim, podendo-se expandir cada vez mais os empréstimos, já que a facilidade de aceitação das moedas e sua praticidade facilitou e muito as transações em geral.

Evidentemente, com as comunidades cada vez mais se especializando, tendo, portanto, um aumento crescente nos excedentes produzidos, o comércio foi se intensificando. Ademais, com esse progresso da humanidade, foram sendo necessárias obras de engenharia, além de instrumentos que realizavam cálculos. Concomitantemente, é notória uma evolução na Matemática, notadamente, com o surgimento da escrita, em que temos registros mais antigos e relevantes preservados do Egito e da Mesopotâmia.

Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de 50.000 tábuas. Os museus de Paris, Berlim e Londres, além das Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábuas. Essas são de tamanho variável, desde as pequenas de umas poucas polegadas quadradas até algumas do tamanho aproximado de um livro, sendo a espessura destas últimas, em torno do seu centro, de aproximadamente uma polegada e meia. Os escritos aparecem tanto em apenas uma das faces da tábula, quanto em ambas e, frequentemente, em seu contorno arredondado. Das cerca de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, que são de tábuas e listas de problemas matemáticos (Eves, 2004).

Figura 2.6: Tablet Sumeriano 2800 a.C. aproximadamente



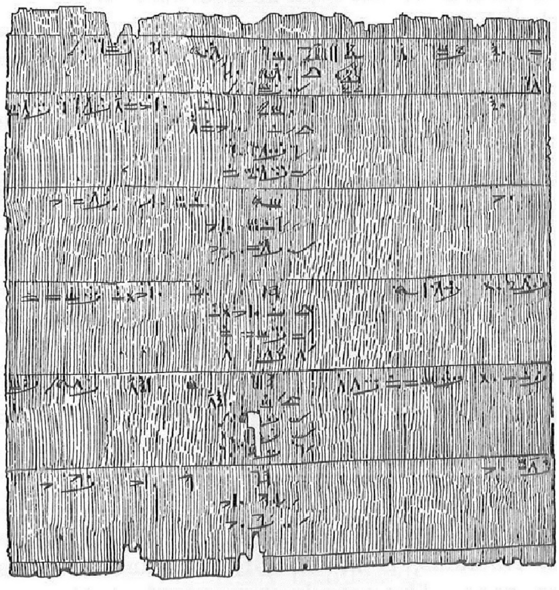
Fonte: (Smith, 1958, p. 36)

De acordo com Noé (2014), muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas, que envolvem cálculos usando multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados, cubos, e de exponenciais. Quanto às últimas, provavelmente eram usadas, juntamente com a interpolação, em problemas de juros compostos. As tábuas de inversos, por sua vez, eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação.

Boyer (1974) diz que muito das informações vigentes sobre a matemática egípcia vem do Papiro Rhind ou de Ahmes(em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.). Tal escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio, de cerca de 2000 a 1800 antes de Cristo. É possível que parte desse conhecimento tenha provindo de

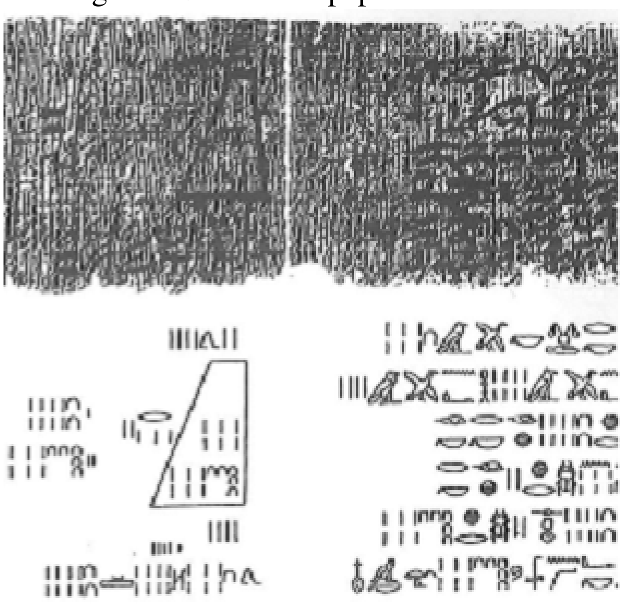
Imhotep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide há cerca de 5000 mil anos. Além do Papiro de Kahun, há o Papiro de Berlim, duas pranchas de madeira de Akhmim(Cairo) de cerca de 2000 a.C., um rolo de couro contendo listas de frações unitárias e datando do fim do período dos hicsos, e um importante papiro chamado Golonishev ou de Moscou.

Figura 2.7: Uma página do papiro de Ahmes



Fonte: (Smith, 1958, p. 48)

Figura 2.8: Parte do papiro de Moscou



Fonte: (Boyer, 1996, p. 7)

Os egípcios deixaram várias contribuições na Matemática, como em operações aritméticas, com frações, na geometria, trigonometria, entre outros. Segundo Boyer (1974), o historiador grego Heródoto diz que o apagamento das demarcações pelas inundações do Nilo tornou necessários os mensuradores. Muitos problemas de Ahmes mostram, também, conhecimento dos egípcios de manipulações equivalentes à regra de três.

De qualquer modo, a matemática egípcia parece ter ficado estagnada por cerca de 2000 anos, após um início bastante auspicioso. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias, isto é, com denominador um. Mas, apesar dessas e outras frações serem manipuladas livremente no tempo de Ahmes, a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios (Boyer 1974).

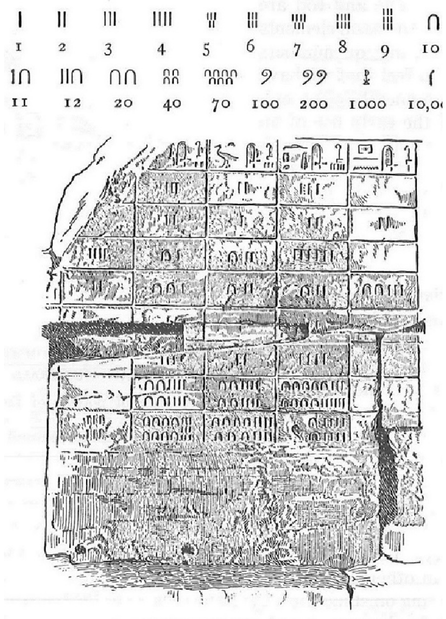
O conhecimento revelado pelos papiros é quase todo prático e o elemento principal nas questões eram os cálculos. Quando parecem entrar elementos teóricos, o objetivo pode ter sido o de facilitar a técnica e não a compreensão. Mesmo a geometria egípcia, outrora louvada, parece na verdade mais como um ramo da aritmética aplicada, onde entram relações de congruência elementares. O motivo aparentemente é o de fornecer artifícios à mensuração e não o de conseguir melhor compreensão. As regras de cálculo raramente são motivadas e dizem respeito apenas a casos concretos específicos (Boyer 1974).

Os papiros de Ahmes e Moscou, principais fontes modernas de informação, podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito; outras evidências fornecidas por inscrições sobre monumentos, fragmentos de outros papiros matemáticos, e documentos de ramos aparentados da ciência servem para confirmar a impressão geral de que a matemática egípcia parece ter permanecido notavelmente uniforme durante uma longa história. Em todos os seus estágios, era construída em torno da operação de adição, uma desvantagem que conferia aos cálculos dos egípcios um peculiar primitivismo, combinado com uma ocasional e assombrosa complexidade (Boyer 1974).

O fértil vale do Nilo tem sido descrito como o maior oásis do mundo no maior deserto do mundo. Regado por um dos rios mais "bem-educados"do mundo e geograficamente protegido em larga extensão da invasão estrangeira, era o abrigo de um povo pacífico que levava uma vida calma e sem desafios. O amor aos deuses benevolentes, o respeito à tradição, a preocupação com à morte e as necessidades dos mortos. Tudo isso encorajou um alto grau de estagnação. A geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo, como Heródoto acreditava, mas os egípcios pouco a aproveitaram (Boyer 1974).

Para realizações matemáticas mais progressistas, entretanto, deve-se examinar o vale fluvial mais turbulento, conhecido como Mesopotâmia, o qual, de acordo com Mol (2013), teve uma grande importância nesse período, pois é considerada o berço da civilização, região que compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao território do Iraque e regiões adjacentes da Síria, Turquia e Irã, no período que se estende aproximadamente de 3500 a.C. até o começo da era cristã. Dentre os reinos mesopotâmicos, merece destaque aquele baseado na cidade da Babilônia, cujo apogeu

Figura 2.9: Numerais Egípcios



Fonte: (Smith, 1958, p. 46)

ocorreu entre 1800 a.C. e 1500 a.C., destacando-se o reino de Hamurábi, que conquistou toda a região em torno de 1700 a.C. Por isso, há a convenção de se referir como Babilônia à civilização mesopotâmica, ao menos no período de 2000 a.C. a 600 a.C.

Na mesopotâmia, onde o barro era abundante, marcas em forma de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletas moles que depois eram cozidas em fornos ou ao calor do sol. Esse tipo de escrita chama-se cuneiforme(da palavra latina cuneus, cunha) em razão da forma dos sinais. O significado a ser transmitido em cuneiforme era determinado pelos arranjos das marcas em cunha. Documentos cuneiformes tinham grande durabilidade; por isso muitos milhares de tais tabletas sobreviveram até hoje, muitas datadas de cerca de 4000 anos.

Por isso, há bem mais registros da Babilônia, em forma de tabletas, em comparação aos poucos registros egípcios, que eram escritos em papiros, muito mais vulneráveis à ação do tempo. Assim, estão disponíveis muito mais documentos matemáticos da Mesopotâmia que sobre do Egito. Apenas de um local, por exemplo, a área da antiga Nipur, existem, aproximadamente, 50.000 tabletas (Boyer 1974).

Mas contrariamente à opinião popular, afirma Eves (2004), a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia, a qual localizava-se numa região que era rota de grandes caravanas, ao passo que o Egito se manteve em semi-isolamento. Nem tampouco o sereno rio Nilo necessitava de obras de engenharia e esforços administrativos na mesma extensão que os caprichosos Tigre e Eufrates.

A matemática mesopotâmica, como a do vale do Nilo, se baseava na adição de inteiros e frações unitária. A matemática da babilônia foi considerada superior a Egípcia, e o segredo da clara superioridade dos babilônios está indubitavelmente entre os que viviam entre os dois rios, que deram o passo muito feliz de estender o princípio da posição das frações. Isto significa que os babilônios dominavam o poder da computação que a moderna notação decimal para frações confere. A precisão nas aproximações era relativamente fácil de conseguir para os Babilônios com sua notação para frações, a melhor que qualquer civilização tenha possuído até a Renascença (Boyer 1974).

Entre as tabletas babilônias encontram-se algumas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. Tabelas exponenciais(ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as dez primeiras potências para bases 9, 16, 1, 40 e $3,45$ (todos quadrados perfeitos) (Boyer 1974).

Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. A interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três.

Vê-se um exemplo claro do uso prático da interpolação em tabelas exponenciais num problema que pergunta quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20 ao ano; a resposta dada é $3;47.13,20$. Parece inteiramente claro que o escriba usou interpolação linear entre os valores para $(1/12)^3$ e $(1/12)^4$, usando a fórmula para juros compostos:

$$a = P(1+r)^n, \text{ onde } r \text{ é 20 ou } 12/60.$$

E tirando valores de uma tabela exponencial com potências de $1/12$.

Prossegue Boyer (1974) afirmando que uma tabela que os babilônios achavam muito útil não é geralmente incluída nos manuais de hoje. É uma tabulação dos valores n^3+n^2 para valores inteiros de n, tabela essencial na álgebra babilônia; esse assunto atingiu nível consideravelmente mais alto na Mesopotâmia que no Egito. Muitos textos de problemas do período Babilônico antigo mostram que a solução da equação quadrática completa não constituía dificuldade séria para os Babilônios, pois tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais e multiplicar ambos os membros por quantidades equivalentes para remover frações ou eliminar fatores. Somando $4ab$ a $(a-b)^2$, podiam obter $(a+b)^2$, pois muitas fórmulas simples de fatoração lhes eram familiares. Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não fora inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam bem nesse papel. Que tais palavras possam ter sido usadas num sentido abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um "comprimento" com uma "área", ou uma "área" com um "volume". Tais problemas tomados literalmente, não podiam ter base em mensuração.

Segundo Eves (2004), há tábulas nas coleções de Berlim, Yale e do Louvre que contêm problema sobre juros compostos e há algumas tábulas em Istambul que parecem ter sido originalmente tábuas de a elevado a n para n de 1 a 10 e para $a = 9$, 16, 100, 225. Com essas tábuas podem-se resolver equações exponenciais do tipo a elevado a $x = b$.

Em uma tábula de Louvre, por cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?

Os homens do período referente a idade da pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a idade do bronze parece ter surgido a necessidade deste conceito e sua notação.

As civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas de babilônias, embora tal designação não seja inteiramente correta. A cidade de Babilônia não foi a princípio, nem foi sempre em períodos posteriores, o centro da cultura associada com os dois rios, mas a convenção sancionou o uso informal do nome “babilônica" para a região durante o período que abrange de 2000 até aproximadamente 600 a.C. (Boyer 1974).

Mol (2013), portanto, conclui que os babilônios desenvolveram um extenso conhecimento de cálculos e medidas, que se aplicava, sobretudo, a problemas de natureza econômica e comercial: câmbio de moedas, troca de mercadorias, taxas de juros simples e compostos, cálculo de impostos e problemas de divisão de colheitas.

Rossetti e Schimiguel (2011) anunciam que mesmo as tábulas mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecido. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. As tábulas mostram que os sumérios antigos já utilizavam adaptados à época, tipos de contratos legais, faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endosso.

Também, na Mesopotâmia, temos uma quantidade bem maior de registros preservados até hoje, isso pelo método da escrita cuneiforme, bem mais resistente a intempéries do tempo que os registros dos Egípcios que eram feitos nos papiros.

Também temos que a Matemática na Mesopotâmia é considerada mais desenvolvida que a Egípcia.

Eves (2004) faz uma cronologia interessante para termos uma ideia do avanço computacional nessa época. Há um cetro estimado em 3100 a.C. em que estão gravados em hieróglifos egípcios alguns números da ondem de centenas de milhares e milhões, superestimando os resultados de uma vitoriosa campanha militar. Em 2600 a.C. A grande pirâmide de Gizé foi construída e, indubitavelmente envolvia alguns problemas de matemática e de engenharia.

Dessa forma, não por acaso, Robert (1982) considera que um dos primeiros indícios formais do uso de juros e impostos apareceu na Babilônia, no ano de 2000 a.C.

2.2 O desenvolvimento da Matemática Financeira

O desenvolvimento da Matemática Financeira se deve, sobretudo, a disseminação da propriedade privada, do crescente excedente de produção, levando ao aumento das trocas e dos empréstimos. Essa evolução só é possível, e ocorre concomitantemente, pela criação e aperfeiçoamento dos meios que facilitaram as transações comerciais e financeiras, que se devem:

- Ao aperfeiçoamento e à disseminação da escrita;
- Ao desenvolvimento dos meios de pagamento;
- À evolução dos conhecimentos matemáticos;
- À criação e ao desenvolvimento dos bancos;
- Ao aparecimento e aperfeiçoamento das tecnologias.

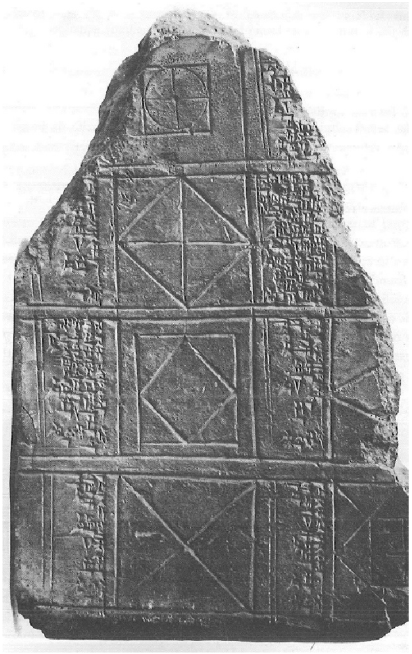
2.2.1 História da matemática e evolução das tecnologias: Atenção especial aos fatos relacionados com a Matemática Financeira

Smith (1958) afirma que a Caldéia e Babilônia são sinônimos, cada nome se referindo à terra que se estende ao longo do rio Tigre e Eufrates em direção ao norte da Assíria, distrito montanhoso coberto de floresta que originalmente cercava a antiga capital de Assur. Na verdade, é conveniente considerar como um grande grupo todos aqueles povos semíticos descendentes dos errantes das pastagens do sul que se estabeleceram em Assíria, na região de Nínive, na Ásia Menor e ao longo da costa fenícia. Também é conveniente incluir uma tribo não-semítica, os sumerianos, que habitavam na terra da frente do golfo persa, diretamente nos caminhos principais do comércio mundial.

Essas pessoas, vindas da região montanhosa à leste, desenvolveram um sistema numeral, de modo que os numerais por eles usados no século 28 A.C são atualmente conhecidos através de certas inscrições. Residindo em um país baixo, formado por depósitos aluviais e, portanto, privados de pedras para fins monumentais, os primitivos sumerianos recorreram ao uso de tijolos para a preservação de seus registros. Sobre a superfície das tábuas de argila, pressionavam com uma vara redonda e pontiaguda, sendo o resultado um caráter circular, semicircular ou em forma de cunha (cuneiforme) (Smith, 1958).

Para Eves (2004) a matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse veio surgir a partir da evolução da sociedade para formas mais avançadas. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo, na África, o Tigre e Eufrates, na Ásia Ocidental, o Indo e Ganges, no sul da Ásia Central, o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental.

Figura 2.10: Uma parte de um texto cuneiforme



Fonte: (Struik, 1967, p.28)

Com a drenagem do pântanos, o controle das inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviam para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo, primordialmente, como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e engenharia. Essas requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos. A criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios, para dividir a terra e além da instituição de práticas financeiras e comerciais, para o lançamento, a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis para formas mais avançadas (Eves, 2004).

Há dificuldades em localizar no tempo as descobertas feitas no Oriente Antigo. Uma dessas dificuldades reside na natureza estática da estrutura social e no prolongado isolamento de certas áreas. Outra dificuldade se deve aos materiais de escrita sobre os quais as descobertas se preservaram. Os babilônios usavam tábulas de argila cozida e os egípcios de pedras e papiros, tendo esses últimos, felizmente, existência duradoura em virtude do pouco comum clima seco da região. Mas, os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível, como casca de árvore e bambu. Assim, enquanto se dispõe de apreciável quantidade de informações definidas sobre a matemática dos antigos babilônios e egípcios, muito pouco se conhece sobre essa matéria, com certo grau de certeza, no que diz respeito à China e Índia na mesma época. Consequentemente, a matemática dos séculos pré-helênicos se limita à Babilônia e ao Egito (Eves, 2004).

Com a evolução do aprendizado matemático, notadamente, os necessários ao maior desenvolvimento da Matemática Financeira, além do desenvolvimento econômico, com aprimoramento dos meios de pagamento e, por fim, com a evolução dos meios de guardar conhecimento, preservados para o futuro, teve-se, então, com mais clareza, registros do cálculo de juros. Entretanto, como visto, os empréstimos iniciaram-se bem antes do início da escrita, em que eram realizados, no geral, por meio das sementes para produção na agricultura para aqueles que necessitavam plantar, mas não possuíam os meios de produção.

Proclo, talvez citando Eudemo, atribuiu a Pitágoras duas descobertas matemáticas específicas: a construção dos sólidos regulares e a teoria das proporcionais. Embora haja dúvida sobre até que ponto isso deve ser tomado literalmente, há forte probabilidade de que a afirmação esteja de acordo com a direção do pensamento pitagórico. A teoria das proporções claramente se ajusta ao esquema de interesses matemáticos dos gregos antigos, e não é difícil achar uma provável fonte de inspiração. Conta-se que Pitágoras soube na Mesopotâmia das três médias, aritmética, geométrica e a subcontrária(mais tarde chamada harmônica), e da proporção áurea que relaciona duas delas: o primeiro de dois números está para a sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número. Essa relação é a essência do algoritmo babilônico para extração de raiz quadrada, portanto o relato é ao menos plausível. Em algum momento, porém, os pitagóricos generalizavam esse trabalho acrescentando sete novas médias para perfazer dez ao todo. Se b é a média de a e c, onde $a < c$, então três quantidades estão relacionadas por uma das equações seguintes;

- $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}$;
- $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$;
- $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$;
- $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$;
- $\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$;
- $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$;
- $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$;
- $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$;
- $\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$;
- $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$.

As notações gregas primitivas para os inteiros não eram excessivamente incômodas e serviam bem aos seus objetivos. Era no uso de frações que o sistema era fraco. Além dos egípcios, os gregos se sentiram tentados a usar frações unitárias, e para estas tinham uma representação simples. Escreviam o denominador e depois simplesmente o seguiam de um sinal diacrítico ou acento para distingui-lo do inteiro correspondente. Assim $1/34$ se escrevia $\lambda\delta'$. Isto, é claro, podia ser confundido com o número $30(1/4)$, mas podia-se supor que o contexto ou palavras explicativas esclarecessem a situação. Em séculos posteriores, frações comuns gerais e sexagesimais passaram a ser usadas; serão discutidas adiante em conexão com a obra de Arquimedes, Ptolomeu e Diofante.

A história da matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos depende necessariamente, em grau indesejável, de conjecturas e inferências, pois faltam inteiramente documentos da época. Há muito mais incerteza quanto à matemática grega de 600 A.C. a 450 a.C. do que acerca da álgebra babilônica ou da geometria egípcia de cerca de 1700 a.C. Nem mesmo os artefatos matemáticos dos primeiros tempos da Grécia se preservaram. É evidente que algum tipo de ábaco era usado nos cálculos, mas a natureza e maneira de operar tal ábaco devem ser inferidas do ábaco romano e de algumas referências casuais em autores gregos. Heródoto, escrevendo no começo do quinto século a.C., diz que, ao contar pedrinhas, a mão dos gregos ia da esquerda para a direita e a dos egípcios da direita para a esquerda. Um vaso de um período um pouco posterior mostra um coletor de tributos com um ábaco que era usado não só para múltiplos decimais inteiros do dracma mas para subdivisões não decimais. Começando da esquerda, as colunas designam miríades, milhares, centenas e dezenas de dracmas, respectivamente, sendo os símbolos expressos em notação herodiana. Depois, seguindo a coluna de unidades para dracmas, há colunas para abdos(seis abdos = um dracma) para meio abdo, e quarto de abdo. Aqui vemos como as civilizações antigas evitaram o uso excessivo de frações; simplesmente subdividiam as unidades de comprimento, peso e dinheiro tão eficazmente que podiam calcular em termos de múltiplos inteiros das subdivisões.Essa é sem dúvida a explicação da popularidade, na antiguidade, das subdivisões duodecimais e sexagesimais, pois o sistema decimal aqui fica em forte desvantagem. Frações decimais eram raramente usadas, seja pelos gregos seja por outros povos do ocidente, antes do período da Renascença. O ábaco pode ser facilmente adaptado a qualquer sistema de numeração ou qualquer combinação de sistemas; é provável que o uso amplamente difundido do ábaco explique ao menos em parte o desenvolvimento estranhamente tardio de uma notação posicional consistente para inteiros e frações.

O conceito de razão de Eudoxo exclui o zero e esclarece o que se entende por grandezas da mesma espécie. Um segmento de reta, por exemplo, não pode ser comparado, em termos de razão, com uma área; nem uma área com um volume. Após essas observações preliminares sobre razões, Euclides dá na definição 5 do livro V a célebre formulação de Eudoxo: "Diz-se que duas grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente.

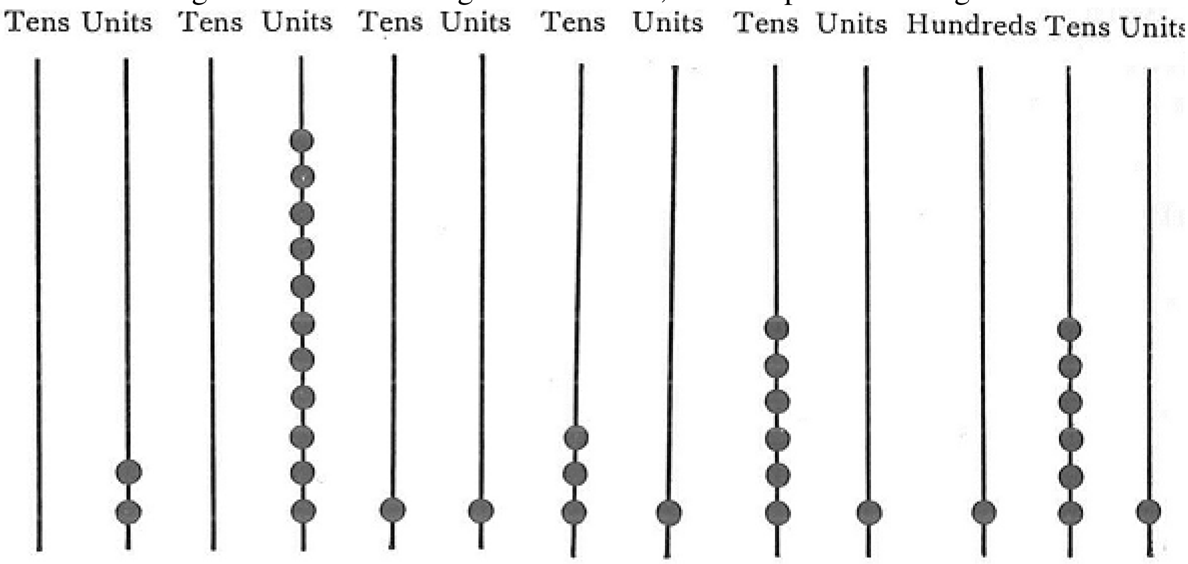
Isto é , $a/b = c/d$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$.

A definição de Eudoxo de igualdades de razões se assemelha ao processo de multiplicação cruzada em uso hoje para frações em que temos: $a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$, processo equivalente a reduzir ao mesmo denominador.

Os numerais em barras de 300 a.C. não eram apenas uma notação para escrever o resultado de um cálculo. Barras verdadeiras, de bambu, marfim ou ferro, eram carregadas em uma sacola pelos administradores e usados para cálculos. As barras eram manipuladas com tal destreza que um escritor do século onze descreveu-as como “voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar seu monimento". Provavelmente era mais rápido efetuar cancelamentos com barras sobre uma tábua de contar do que em cálculos escritos. Na verdade, o uso de barras sobre uma tábua era tão eficiente que o ábaco ou moldura rígida com fichas móveis sobre arames não foi usado tão cedo quanto se tem suposto em geral. As primeiras descrições claras das formas modernas, conhecidas na China como saun phan e no Japão como o soroban, são do século dezesseis; mas formas precursoras parecem ter sido usadas talvez mil anos antes. As palavras abacus provavelmente deriva da palavra semítica abq ou pó, indicando que em outra regiões, como na China, o instrumento proveio de uma bandeja de areia usada como tábua de contar. É possível, mas nada certo, que o uso da tábua de contar na China preceda o europeu, mas não se dispõe de datas definidas e dignas de fé. No museu Nacional em Atenas há uma placa de mármore, datando provavelmente do quarto de século A.C. que parece ser uma placa de contar; e quando um século antes Heródoto escreveu “Os egípcios movem a mão da direita para a esquerda para calcular, enquanto que os gregos a movem da esquerda para a direita", provavelmente ele se referia ao uso de algum tipo de placa de calcular. Quando exatamente tais instrumentos cederam lugar ao ábaco propriamente dito é difícil determinar; nem podemos saber os aparecimentos de ábaco na China, Arábia e Europa foram ou não acontecimentos independentes. O ábaco árabe tinha dez bolas em cada arame, sem barra central, enquanto que o chinês tinha cinco fichas superiores e cinco inferiores em cada arame, separadas por uma barra. Cada ficha superior num ábaco chinês equivale a cinco inferiores; um número é marcado fazendo deslizar as fichas adequadas até encontrar na barra.

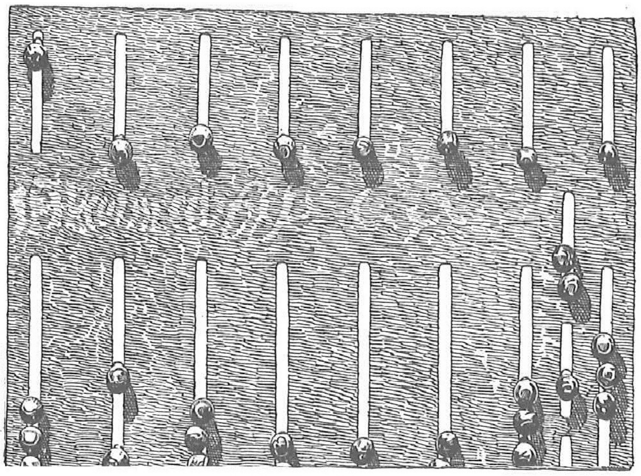
Deve-se notar que a referência a nove símbolos, em vez de dez, significa que os hindus ainda não tinham dado o segundo passos na transição para o moderno sistema de numeração, a introdução de uma notação para uma posição vazia, isto é, um símbolo zero. A história da matemática possui muitas anomalias, e a não menor dessas é que “a mais antiga ocorrência in-dubitável de um zero na Índia se acha numa inscrição de 876", isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais. Não se sabe sequer se o número

Figura 2.11: Ábaco originário da Índia, na Mesopotâmia ou Egito



Fonte: (Smith, 1958, p. 159)

Figura 2.12: Ábaco Romano



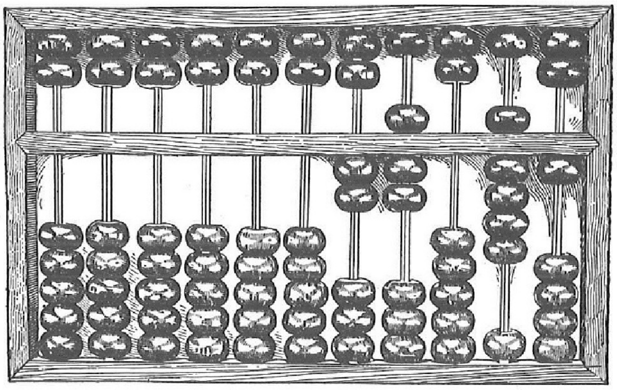
Fonte: (Smith, 1958, p. 167)

zero(diferente do símbolo para a posição vazia) surgiu em conjunção com os outros nove numerais hindus. É bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá.

A história do zero para ocupar um lugar na notação posicional fica mais complicada ainda quando se observa que o conceito apareceu independentemente, bem antes dos dias de Colombo, no hemisfério ocidental como no oriental. Com a introdução, na notação hindu, do décimo numeral, um ovo de ganso para o zero, o moderno sistema de numeração para os inteiros estava completo.

Diz-se, às vezes, que pelo fim da Idade Média havia duas espécies de matemáticos, os

Figura 2.13: Moderno Ábaco Chinês



Fonte: (Smith, 1958, p. 169)

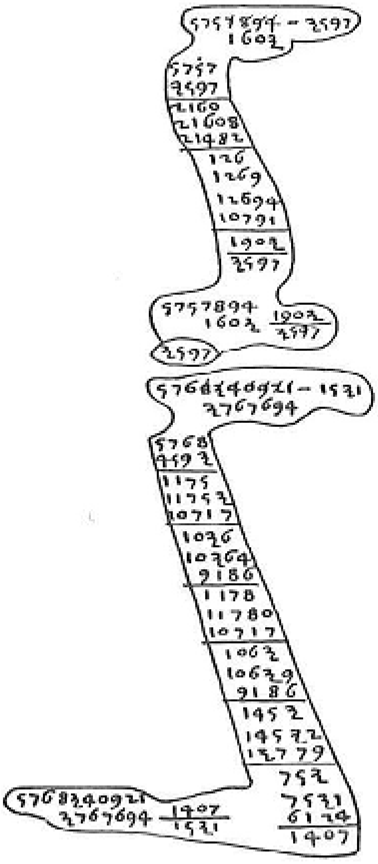
das escolas religiosas ou de universidades e os que se ocupavam de negócios e comércio, e que entre as duas havia rivalidade. Parece haver pouco fundamento para essa tese; certamente ambos os grupos participaram da difusão dos numerais indo-arábicos. No século *XIII* autores de várias classes sociais ajudaram a popularizar o “algoritmo" mas mencionaremos somente três deles: Alexandre de Villedieu, John de Jalifax e Leonardo de Pisa.

Liber abaci, completado em 1202 é um livro que depois de expor os processos usuais algorítmicos ou aritméticos, inclusive a extração de raízes, demora-se em problemas sobre transações comerciais, usando um complicado sistema de frações para calcular câmbios de moedas. É uma das ironias da história que a vantagem principal da notação posicional, sua aplicabilidade a frações, escapasse completamente aos que usavam os numerais indo-arábicos durante os primeiros mil anos de sua existência. Em relação a isso, Fibonacci tem tanta responsabilidade quanto qualquer outro, pois usou três tipos de frações: comuns, sexagésimas, e unitárias, mas não frações decimais.

O século treze apresenta um progresso tão grande com relação ao que o precede na Idade Média que ocasionalmente, e não imparcialmente, tem sido considerado como "o maior dos séculos". Vimos como, na obra de Leonardo de Pisa, a Europa ocidental veio a rivalizar com as outra civilizações no nível de suas realizações matemáticas; mas isto era apenas uma pequena parte do que estava acontecendo com a cultura latina em seu todo. Muitas das universidades famosas, Bolonha, Paris, Oxford e Cambridge, foram fundadas no fim do século doze ou início do treze.

Desde o nadir no sétimo século até a obra de Fibonacci e Oresme no século treze e no quatorze o progresso foi notável; mas os esforços somados de todas as civilizações medievais não foram em nenhum sentido comparáveis às realizações matemáticas da Grécia antiga. O progresso da matemática não foi continuamente ascendente em nenhuma parte do mundo, Babilônia, Grécia, China, Arábia ou mundo romano, e não deve constituir surpresa que na Europa ocidental um declínio se inicie após a obra de Bradwardine e Oresme. Em 1349 Thomas Bradwardine tinha sucumbido perante a Peste Negra, a pior peste que jamais

Figura 2.14: Mais antigo exemplo de divisão moderna



Fonte: (Smith, 1958, p. 140)

assolou a Europa. As avaliações do número dos que morreram da epidemia, no curto espaço de um ou dois anos, variam entre um terço e metade da população. A catástrofe inevitavelmente causou severas perturbações e quebra do espírito. Se observamos que a Inglaterra e a França, as nações que tinham assumido a liderança na matemática do século quatorze, foram além disso devastadas pela Guerra dos Cem Anos e pela Guerra das Rosas, o declínio da cultura será compreensível. As universidades italianas, alemãs e polonesas durante o século quinze tomaram a frente na matemática ao escolasticismo decadente de Oxford e Paris, e é principalmente aos representantes desses países.

O primeiro livro impresso na Europa Ocidental data de 1447, e pelo fim do século mais de 30.000 edições de várias obras estavam circulando. Dessas, poucas eram obras matemáticas; mas essas junto com os manuscritos existentes, forneceram uma base para a expansão.

A primeira metade do século dezesseis viu surgir uma nuvem de álgebras alemãs, entre as mais importantes delas a Coss(1525) de Christoph Rudolff(aproximandamente entre 1500 – 1545), a Rechnung(1527), e a Arithmetica integra(1544) de Michael Stiffel(cerca de 1487 – 1567). A primeira é especialmente importante por ser das mais antigas obras impressas a usar frações decimais, bem como o símbolo moderno para raízes; a segunda merece menção pelo fato de nela, uma aritmética comercial, o chamado triângulo de Pascal ser impresso, na página de rosto, quase um século antes do nascimento de Pascal. A terceira obra, a aritmética íntegra de Stifel, foi a mais importante de todas as álgebras alemãs do século dezesseis. Inclui, também, o triângulo de Pascal, mas o aspecto mais importante é seu tratamento dos números negativos, radicais, e potências. Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pôde reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que aparecia com uma única forma; mas teve de explicar, por uma regra especial, quando usar $+$ e quando usar $-$. Ainda mais, até ele se recusou admitir números negativos como raízes de uma equação. Stifel, um ex-monge que se tornou pregador luterano itinerante, e foi, por algum tempo, professor de matemática em Jena, foi dos muitos autores a difundir os símbolos alemães $+$ e $-$ às custas da notação italiana p e m. Conhecia muitíssimo bem as propriedades dos números negativos, apesar de chamá-los numeri absurdi. Quanto aos números irracionais ele se mostrava um tanto hesitante, dizendo que eles estão escondidos sob uma espécie de nuvvem de infinidade. Chamando também a atenção para as relações entre progressões aritméticas e geométricas, como Chuquet fizera com as potências de dois de 0 a 20, Stiefel estendeu a tabela incluindo $2-1 = 1/2$ e $2-2 = 1/4$. Sem, no entanto, usar notação exponencial).Para as potências da quantidade incógnita em álgebra Stifel na Arithmetica integra usou abreviações para as palavras alemãs coss, zensus, cubus, e zenzizensus; mas num tratado postorior. De algorithmi numerorum cossicorum ele propôs usar uma única letra para a incógnita e repetir a letra para indicar potências superiores da incógnita, esquema empregado mais tarde por Harriot.

John Napier, como Viéte, não era matemático profissional. Era um proprietário escocês, Barão de Murchiston, que administrava suas grandes propriedades e escrevia sobre vários assuntos. Num comentário sobre o livro das revelações, por exemplo, ele afirmava que o papa em Roma era o anti-Cristo. Ele só se interessava por certos aspectos da matemática, particularmente os que se referiam a computação e trigonometria. As barras de Napier eram bastões em que itens de tabuadas de multiplicação eram esculpidos numa forma que se prestava ao uso prático; as analogias de Napier e a regra de Napier das partes circulares eram regras mnemônicas ligadas à trigonometria esférica.

Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar sues resultados, o que colocaria a origem de suas ideias em 1594 aproximadamente. Ele pensara nas sequências, publicadas vez por outra, de potências sucessivas de uma dado número, como na Arithmetica integra de Stifel cinquenta anos antes e como nas obras de Arquimedes. Em tais sequências era evidente que as somas e diferenças dos índices das potências correspondiam a produtos e quocientes das próprias potências; mas uma sequência de potências inteiras de uma base, tal como dois, não podia ser usada para computações porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação demasiado imprecisa. Enquanto Napier refletia no assunto, O Dr. John Craig, médico de James VI da Escócia, falou-lhe no uso da prostaférese na Dinamarca.

A chave da obra de Napier pode ser explicada muito simplesmente. Para conservar próximo os termos numa progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1-10^{-7}$ (ou $0,9999999$). Assim, os termos na progressão de potências crescentes ficam realmente próximos, próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais Napier multiplicou cada potência por 10^7. Isto é, se $N = 10^7(1-\frac{1}{10^7})^L$, então L é o logaritmos de Napier do número N.

A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiásticos estava Henry Briggs, o primeiro Savilian professor de geometria em Oxford. Em 1615 ele visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de dez, e Napier disse que tinha pensado nisso e concordava. Napier uma vez tinha proposto uma tabela usando $log1 = 0elog10 = 10^{10}$ (para evitar frações). Os dois homens finalmente concordaram em que o logaritmo de um deveria ser zero e que o logaritmo de dez deveria ser um. Mas Napier já não tinha a energia suficiente para pôr em prática essas ideias. Morreu em 1617, o ano em que sua Rhabdologia, com a descrição de suas barras, apareceu. O segundo de seus clássicos tratados sobre logaritmos, o Mirifici logarithmorum canonis apareceu postumamente em 1619.Por isso recaiu sobre Briggs a tarefa de construir a pirmeira tabela de logaritmos comuns, ou briggsianos. Em vez de tomar as potências de um número próximo de dez, como fizera Napier, Briggs começou com $log10 = 1$ e depois achou outros logaritmos tomando raízes sucessivas. Calculando que $\sqrt{10} = 3,162277$, Briggs tinha que $log3,162277 = 0,5$, e de $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{31,62277} = 5,623413$ tinha que $log5,623413 = 0,75$. Continuando desse modo, ele calculou outros logaritmos comuns. No ano da morte de Napier, 1617, Briggs publicou seu Logarithmorum chilias prima, isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1000, cada um calculado com quatorze casas. Em 1624, em Arithmetica logarithmica, Briggs ampliou a tabela incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, novamente com 14 casas. O trabalho com logaritmos podia a partir daí ser realizado exatamente como hoje, pois para as tabelas de Briggs todas as leis usuais sobre logaritmos se aplicavam. Incidentalmente, é do livro de Briggs de 1624 que provêm nossas palavras mantissa e característica. Enquanto Briggs estava computando suas tabelas de logaritmos comuns, um contemporâneo, John Speidell, calculou os logaritmos naturais das funções trigonométricas publicando-se em seu New Logarithmes de 1619. Alguns logaritmos naturais já tinham aparecido antes, em 1616, numa tradução para o inglês feita por Edward Wright($1559-1615$) da primeira obra de Napier sorbre logaritmos. Poucas vezes uma descoberta nova pegou tão depressa quanto a invenção dos logaritmos, e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos que eram mais que suficientes para a época.

Burgi e Stevin, por exemplo, ajudaram o desenvolvimento das frações decimais. Na matemática do século dezesseis há tendências variadas e conflitantes; mas podemos perceber nela, tanto quanto na ciência,os resultados de uma confrontação entre ideias estabelecidas e novos conceitos, e entre visão teórica e as exigências de problemas práticos. Vieté,o maior matemático da França então, em 15794 tinha recomendado insistentemente o uso de frações decimais em vez de sexagesimais. Em 1585 uma recomendaçao ainda mais forte em favor da escala decimal para as frações tanto como para inteiros foi feita pelo principal matemático dos Países Baixos, Simon Stevin de Bruges.

É claro que Stevin não foi em nenhum sentido o inventor das frações decimais, nem o primeiro a usá-las sistematicamente. Na China antiga encontra-se um uso mais do que incidental de frações decimais, como também na Arábia medieval e na Europa do Renascimento; quando Viéte as recomendou diretamente em1579 elas já eram geralmente aceitas pelos matemáticos ue se encontravam nas fronteiras da pesquisa. Entre o povo em geral,no entanto, e mesmo entre praticantes de matemática, as frações decimais só se tornaram amplamente conhecidas quando Stevin se dispôs a explicar o sistema de modo elementar e completo.

Blaise Pascal quando tinha dezoito anos dedicou-se a planejar uma máquina de calcular, e nos anos seguintes construiu e vendeu umas cinquenta máquinas.

A L'hospital é frequentemente atribuído o cálculo com exponenciais, pois ele estudou não só as curvas exponenciais simples $y = X^x$ de $x = 0$ a $x = 1$ ele achou a notável representação como série infinita:

$$\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots .$$

Este resultado ele obteve escrevendo $x^x = e^{xlnx}$, expandindo isso na série exponencial e integrando termo a termo, usando integração por partes.

É uma das ironias da história que, enquanto Bourbaki e muitos outros matemáticos puros perseguiram o objetivo de substituir cálculos por ideias, engenheiros e matemáticos aplicados desenvolveram um instrumento que fez reviver o interesse por técnicas numéricas e algorítmicas e afetou fortemente a composição de muitos departamentos de matemática: o computador. Na primeira metade do século a história das máquinas de computação envolveu mais estatísticos, físicos e engenheiros elétricos que matemáticos. Máquinas de calcular de mesa e sistemas de cartões perfurados eram indispensáveis para negócios, bancos e para as ciências sociais. A régua de calcular se tornou símbolo do engenheiro; e integradores de vários tipos eram usados por físicos, geodesistas e estatísticos. Lápis e papel continuavam a ser os instrumentos principais do matemático. A situação mudou um tanto por volta de 1940 por causa do envolvimento de matemáticos no esforço de guerra. Embora a maior parte do empenho viesse de físicos e engenheiros, numerosos matemáticos jovens desempenharam um papel no desenvolvimento do computador eletrônico digital automático. Alguns dos pioneiros permaneceram no campo da computação; outros foram para campos novos relacionados mais de perto com a nova tecnologia; alguns se voltaram para a matemática aplicada; uns poucos voltaram a suas áreas anteriores. A maior parte destes matemáticos estava iniciando suas carreiras quando se envolveram com computadores, muitos tendo obtido seus Ph.D. na década de 1930 – 1940.

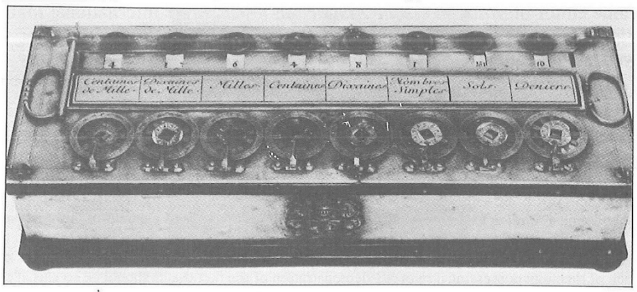
Atualmente, a Matemática Financeira possui inúmeras aplicabilidades no cotidiano, englobando situações relacionadas ao ganho de capital, pagamentos antecipados e posteriores, porcentagem, financiamentos, descontos comerciais entre outros produtos do meio financeiro, isso se deveu a continuação do desenvolvimento da matemática e, concomitantemente, o progresso da sociedade, notadamente, o surgimento e desenvolvimento dos bancos, e a evolução dos meios de troca, em que chega-se ao papel-moeda, que facilita enormemente as transações em geral.

Já vimos que para o surgimento do juros, tivemos uma evolução da sociedade em que grupos nômades desenvolveram técnicas agrícolas e de criação de animais e com o desenvolvimento de novas formas de arar passaram a ter excedentes que foram com o tempo sendo trocados entre as pessoas e entre as comunidades, os quais forçaram com o desenvolvimento desse comércio, a que houvesse uma evolução nesse meio de troca, inicialmente sendo uma troca direta de mercadorias, passando para uma troca por uma mercadoria específica, e, posteriormente passou-se a usar barras fundidas e enfim, moedas cunhadas.

Concomitantemente com isso, a matemática também teve uma evolução, em que temos os registros mais significativos do Egito e da Babilônia. Também temos o desenvolvimento de locais onde se efetuavam os depósitos, e, posteriormente, se faziam transferências de forma contábil entre pessoas, sem necessidade de utilização de moedas. Além de depósitos, também empréstimos e outras transações. Esses fatores levaram forçosamente ao surgimento e aprimoramento dos cálculos de juros.

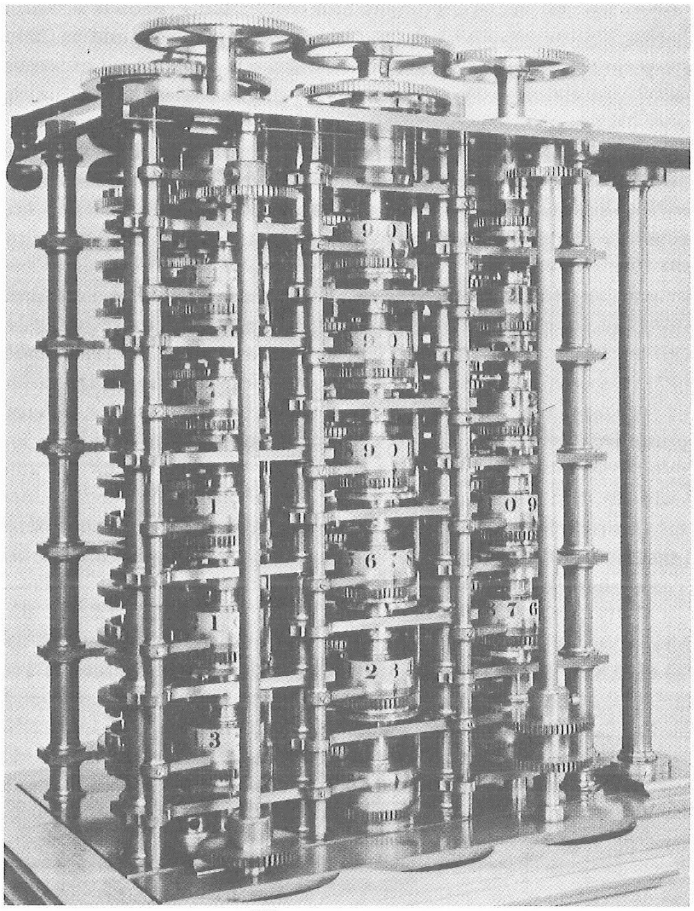
A evolução da matemática financeira a partir desse tempo tem muito haver com a das formas de se emprestar o dinheiro, que também tem uma relação muito intrínseca com a criação e evolução das instituições bancárias e o avanço da tecnologia, que facilitaram enormemente os cálculos. Além do aperfeiçoamento da Matemática, com novas descobertas, que também facilitariam os cálculos. As quais vamos nos ater a seguir.

Figura 2.15: Uma das máquinas aritméticas de Pascal



Fonte: (Eves, 1992, p. 636)

Figura 2.16: Parte da Máquina de Babbage que calcula diferenças



Fonte: (Eves, 1992, p. 637)

2.2.2 O surgimento das instituições bancárias

No mundo antigo, declara Boyer (1974), entre os egípcios, babilônios e mais tarde entre os gregos e romanos, estavam amplamente difundido o costume segundo o qual os cidadãos mais abastados deviam confiar a custódia de seu ouro aos sacerdotes.

Hudson (1994) observa que os templos tiveram avanços na alimentação, duas refeições por dia, para sustentar agricultores trabalhando em terras do templo. Isso provavelmente deu origem ao sistema de contagem sexagesimal da região para unidades de peso e monetárias. Na medida em que as rações alimentares deviam ser consumidas duas vezes ao dia, os templos e palácios dividiam suas mensurações mensais em 60 unidades(seu calendário usava um mês de 30 dias), o que tornava a típica refeição pequena um quarto $1/60$ da alocação mensal do alqueire. Este sistema na base 60 se espalhou por toda a economia da Suméria. Incluindo as unidades de peso usadas para medir a prata. As instituições maiores baseavam seus sistemas contábeis na equivalência de uma mina de prata por alqueire de cevada. Esta paridade permite que as instituições mantenham contas em um padrão bi-monetário, calculado prontamente e igualmente em termos de prata e cevada. para conveniência contábil, os juros sobre o empréstimo de prata foram calculados em $1/60$ por mês, que era $12/60$ por ano, ou 20%.

Os templos egípcios faziam transferências de grãos entre os depositantes, até mesmo para agências em diferentes cidades, sustentando a visão de que os grãos haviam sido monetizados. O Egito tinha a maior e mais populosa população do mundo mediterrâneo, tornando-se mais uma nação, ou pelo menos um estado fluvial, do que uma cidade-estado. Tinha uma das classes sacerdotais mais avançadas, que Heródoto nos diz que traçou sua cronologia há 17 mil anos, mas nenhuma moeda do faraó jamais foi encontrada. No entanto, escaravelhos de vidro e porcelana foram encontrados em grande número, o que levou à especulação de alguns historiadores monetários de que, em determinado momento, os escaravelhos constituíam um sistema monetário (Boyer 1974).

Robert (1982) afirma que o templo de Artemis ou o Oráculo de Apolo, em Delfos, que emprestavam o dinheiro recebido para custódia, recebiam juros por estas somas uma tal quantidade de ouro e prata que muitas vezes ultrapassava aquela que recebiam por seus vaticínios que, a bem da verdade, também não era pequena.

Boyer (1974) sugere que os templos antigos, dando como exemplo, os da Grécia antiga, tiveram um papel fundamental no desenvolvimento do comércio e também na introdução dos metais, o ouro principalmente, não mais só algo ornamental, mas usado, também, como moeda. Ao redor dos templos, tendiam a se formar aglomerados de pessoas, com isso, muitos comerciantes se dirigiam para esses locais com o objetivo de comercializar seus produtos. Além disso, as autoridades dos templos encorajava o comércio de várias formas. Construíram estradas e as mantinham seguras, além de oferecerem um local para que fossem feitos as transações comerciais.

Os templos foram paulatinamente, substituindo as doações ou taxações em sementes ou animais, entre outros, para o recebimento em ouro, algo que não precisaria ser consumido, sendo acumulado cada vez mais, que com o tempo esses templos passaram a ter um grande acúmulo de ouro. Boyer (1974) sugere que a abundância em ouro que estavam armazenadas nos templos após séculos de acúmulos sucessivos, foi umas das razões para torná-lo um meio de pagamento. Paulatinamente, sendo usado nos empréstimos e aceito pelo comerciantes como meio pagamento. Na época de Homero, por exemplo, a relação entre lingotes de ouro e gado era de 1 boi ou vaca para 130 gramas de ouro. Essa convenção parece ter sido adotada ao longo do mediterrâneo por vários séculos.

Pesquisas recentes sobre as atividades monetárias dos templos mesopotâmicos, mostra uma conexão entre dívida e origem do dinheiro. Lá, segundo Hudson (1994) encontramos as primeiras transcrições de contrações de dívidas com o respectivo juros, que eram precificados em cevada e prata. Já Zarlenga (2002) postula que os templos desenvolveram dinheiro como uma ferramenta de contabilidade, um meio de denominação de dívida, a fim de padronizar seus procedimentos contábeis.

Os templos naturalmente passaram a atuar como uma forma inicial de banco, guardando tesouros, fazendo empréstimos, transferindo quantias de uns para outros, para isso cobrando por seus serviços e , também, pelos empréstimos concedidos, inicialmente em sementes ou outros meios, e posteriormente em metais, e finalmente através das moedas (Boyer 1974).

E por fim, Robert (1982) conclui que a igreja cristã não só deu continuidade à tradição das operações creditícias dos antigos sacerdotes, que considerava pagãos, mas desenvolveu-as em grande escala. A Igreja Católica criou o "Banco do Espírito Santo", com um fabuloso capital inicial.

2.2.3 A criação do papel moeda

Na china, país de cultura milenar, na época do reinado da poderosa dinastia Tan($618-907$), estava em circulação uma moeda de cobre chamada Iuam-Pao, cujo peso era de $3,8$ gramas. Entretanto, somente um enorme quantidade destas pequenas moedas de cobre podia representar um valor considerável. Com o desenvolvimento da produção e da troca, o transporte, a custódia e a contagem das moedinhas necessárias ao fechamento de algumas transação vultosas se converteram numa tarefa árdua e onerosa. Em 650, para facilitar a circulação mercantil, o imperador emitiu, impresso em papel de excelente qualidade, um papel-moeda chamado Pao-Tsão, com um valor de 10.000 Iuam-Pao, cada um. Este pode ser considerado o primeiro papel moeda da História. Não existia moeda fracionária, por isto o Pao-Tsão era empregado somente para transações vultosas. Entre outras virtudes, tinha a vantagem de poder ser trocada livremente, a qualquer momento, pela moeda metálica em circulação e era, além disso, muito fácil de transportar e, na época, representava um grande valor pois ocupava pouco espaço e por isso não era preciso contratar pessoal especializado para custodiá-la. Consequentemente, o papel-moeda tornou-se popular entre os mercadores (Robert, 1982).

Este processo de emitir papel-moeda se espalhou, mas a sua emissão desenfreada, sem lastro, levou a uma desvalorização desses papéis em várias localidades, os quais perderam a credibilidade. Para que estes começassem a ser aceitos novamente, foi preciso criar regras mais rigorosas para sua emissão, as quais nem sempre foram cumpridas.

Mas tivemos um período de pouco progresso na humanidade, as trocas comerciais se arrefeceram, este período é conhecido com a baixa idade média.

Eves (2004) afirma que o período que vai da queda do Império Romano, que se estende da metade do século V ao XI, é conhecido como Baixa Idade Média. Durante esse período a civilização na Europa Ocidental atingiu níveis muito baixos: o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos. Apenas monges dos monastérios católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino O período foi marcado por muita violência física e intensa fé religiosa. A ordem social cedeu lugar a uma outra feudal e eclesiástica.

Os romanos nunca tiveram inclinação para a matemática abstrata; ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática, ligados ao comércio e à engenharia civil, lhes interessavam. Com a queda do império Romano e a cessação subsequente de grande parte do comércio leste-oeste e, ainda, com o abandono de projetos estatais de engenharia, mesmo esse interesse minguou e não seria exagero dizer que, afora a elaboração do calendário cristão, muita pouca matemática se fez durante o meio milênio da Baixa Idade média (Eves, 2004).

Nos séculos XIV e XV, quase um milênio depois da queda de Roma, a civilização europeia medieval começa, por fim, a dar lugar à civilização moderna. Ironicamente, porém, o caminho para a modernização começou com uma renovação de interesse pela arte e a ciência antigas. O comércio com os muçulmanos e os gregos bizantinos impulsionou o crescimento de várias cidade italianas depois de 1300, entre elas Veneza, Gênova e Florença. Os árabes e os gregos bizantinos haviam preservado cuidadosamente grande parte da arte e da ciência dos tempos clássicos da Grécia e de Roma e a agora transmitiam seu conhecimentos aos mercadores italianos.

Em junho de 1716, no prédio de um velho hotel, foi fundado o primeiro banco emissor da França, chamado "Banque Géneral". Seu fiador, o duque Felipe de Orléans, seu diretor, John Law. A patente real concedida à instituição bancária, outorgava a John Law o direito de emissão de papel-moeda e obrigava os cofres do Estado a trocar os bilhetes do banco por ouro e a aceitá-los para o pagamento de impostos. Ao mesmo tempo, a patente determinava os fins do banco. Aumentar a circulação monetária, por fim à usura, liquidar com translado de dinheiro entre Paris e as províncias, conceder aos estrangeiros a possibilidade de um depósito seguro para seu bens monetários. Além de facilitar aos súditos a venda de suas mercadorias e o pagamento de impostos (Robert, 1982).

Os metais preciosos afluíram torrencialmente ao banco. Era cada vez maior a quantidade de ouro e prata que chegava à caixa do banco para ser trocada por papel moeda. O entusiasmo não tinha limites. Um rico comerciante de cidade Lião disse a John Law: "Senhor, essa ideia foi maravilhosa, genial! Antes, o valor da moeda flutuava com muita frequência. Todos se negavam a conceder empréstimos pois na realidade ninguém se sentia seguro de que receberia o dinheiro com o mesmo conteúdo de ouro ou prata. Os estrangeiros se negavam a concluir qualquer transação conosco. Agora, cofiam novamente em nós"(Robert, 1982.

O fenômeno que consiste em emitir papel-moeda numa quantidade superior àquela necessária para efetuar a circulação e que produz uma brusca elevação dos preços, chama-se inflação, a qual também pode ocorrer pela redução da oferta de mercadorias, pela escassez ou, como ocorreu no caso de John Law, quando a classe dominante lança emissões de papel-moeda para cobrir o déficit do orçamento provocado por gastos militares. Em tais casos a espiral altista eleva-se velozmente, os trabalhadores passam a adquirir no comércio uma quantidade menor de produtos com seu salário e, consequentemente, seu nível de vida cai (Robert, 1982).

De qualquer maneira, a grande aventura financeira de John Law não foi inútil. Os economistas chegaram a certas conclusões, desenvolveram e aperfeiçoaram a ideia de John Law e puseram-na à prova em seus respectivos países. No decorrer do século $XVIII$, na maioria dos países europeus, foi introduzido o sistema de papel-moeda (Robert, 1982).

Nos séculos XIX e XX, o papel moeda difundiu-se por todo o mundo. O sonho de John law se realizou. De fato, o papel, como meio de circulação, substituiu o ouro, mas, enquanto existir dinheiro não será possível destroná-lo. O meio para a circulação mercantil entre os países é o ouro e, além disso, em cada país os bilhetes de banco cumprem o papel de substituir o verdadeiro dinheiro: o ouro. O vínculo existente entre o papel-moeda e o ouro é testemunhado pelo fato de que quando um país qualquer emite papel-moeda, em cada bilhete de banco é expressamente assinalado seu respaldo em ouro, ou seja, aquela quantidade de ouro que este bilhete substitui ou representa (Robert, 1982).

Entretanto, o sistema de papel-moeda, como signo de ouro ou de dinheiro estabelecido sobre o princípio da livre conversibilidade, foi perdendo espaço, tendo seu golpe final quando em 1933, os Estados Unidos da América, renunciaram ao sistema. A partir desta época, o papel-moeda praticamente não foi trocado por ouro, em parte alguma. E o dólar americano passou, paulatinamente, a ser a moeda de troca aceita por todo o mundo (Robert, 1982).

Com o desenvolvimento do comércio e o aprimoramento do sistema de empréstimos, foram surgindo também bancos particulares. As iniciadoras desta atividade foram as cidades-estado da Itália, que tinham um vasto comércio, cujo raio de ação se estendia aos mais distantes confins do mundo conhecido. O primeiro banco privado foi fundado pelo Duque Vitali em 1157, em Veneza. Apos este, nos séculos XII, XIV E XV toda uma rede bancária foi criada (Robert, 1982).

Depois da descoberta da América e, consequentemente, do impetuoso florescimento do comércio na Europa Ocidental, surgiram poderosas casas bancárias em finais do século XVI e início do $XVII$. Apareceu então uma nova espécie de transação: a conta-corrente, que existe ainda hoje. Sua essência é a seguinte: os possuidores de dinheiro, tendo à frente o comerciante, depositam no banco uma determinada quantia em dinheiro sob a denominação de conta-corrente. Mais tarde, se o comerciante necessita efetuar um pagamento, preenche um formulário impresso pelo próprio banco, chamado cheque (Robert, 1982).

O segundo ramo de comércio de dinheiro foi constituído pelas letras de câmbio. Por exemplo, um produtor vende sua mercadoria a um comerciante, por uma soma determinada, este não fazendo o pagamento correspondente imediatamente, mas pede ao vendedor um prazo para fazê-lo. O comprador se obriga diante do vendedor, agora seu credor, a pagar em dinheiro e num prazo determinado, a dívida contraída. Esta obrigação chamada letra de câmbio que é uma carta de crédito mediante a qual o devedor se compromete a pagar num determinado prazo, ao possuidor da letra de câmbio, a soma nela estipulada. É muito frequente que o possuidor da letra de câmbio ou sacador precise do dinheiro antes que prazo se encerre. Entrega, então, a letra de câmbio ao banco, que imediatamente paga a soma estipulada, deduzindo dela, naturalmente, o juro pelo tempo de vencimento (Robert, 1982).

Assim, assegura Shiguekiyo (2008), que a necessidade de guardar essas moedas, e de efetuar negociações, sem ter que carregá-las deu origem às instituições bancárias, que emitiam recibos equivalentes à quantia nelas depositadas.

Também, ao longo da história, o homem notou uma possível relação entre tempo e dinheiro. Percebeu que esse perdia valor ao longo do tempo. Dessa forma, a correção monetária deveria ser feita, aumentando o poder de compra do capital. A ideia de juros pode ser atribuída aos primeiros indícios de civilizações, em que já vimos o exemplo das sementes que eram emprestadas e devolvidas numa quantidade maior. Contudo, com o desenvolvimento do comércio, dos meios de pagamento e dos bancos, temos, então, o aperfeiçoamento na forma de se obter juros. Aqueles que depositam nos bancos seus excedentes monetários passam a receber juros por esses depósitos, que são usados pelos bancos para emprestar cada vez mais quantias aqueles que necessitavam de capital para investir, cobrando juros desses.

Isto foi facilitado enormemente com a criação do papel moeda, em que facilitou os depósitos e empréstimos. A criação da conta-corrente simplificou , também, enormemente, as transações financeiras, que , muitas vezes era uma operação contábil de débito e crédito, de uma conta para outra.

As práticas financeiras eram utilizadas no intuito da acumulação de capital, as formas econômicas de movimentação dos capitais foram adaptadas de acordo com a evolução das sociedades e da tecnologia. Atualmente, a calculadora HP12C tem seu uso disseminado, principalmente em bancos e financeiras, facilitando enormemente o cálculos de juros.

Figura 2.17: Calculadora Financeira HP12C

Fonte: (Mercado Livre)

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

3.1 Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira

Antes de mais nada vamos conceituar o que é matemática financeira, para, posteriormente, irmos elencando conceitos de elementos importantes e fundamentais para o entendimento deste assunto.

Segundo (Santos, 2005, pág. 157) a Matemática Financeira pode ser conceituada, de forma simplificada, como o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A matemática financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo(time value money). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são taxas de juros, capital e o tempo.

3.1.1 Juro

O conceito fundamental da matemática financeira é o de juros, representado, normalmente, pela letra J, e que significa a remuneração do capital após um determinado número de períodos.

Em outras palavras, se temos determinado capital e vamos permitir que uma pessoa o use por um certo tempo, é justo que recebamos um aluguel dessa pessoa, sendo chamado de juro, que tem outras denominações: rendimento, ganho ou remuneração do capital.

Do ponto de vista da economia, os fatores de produção são divididos em trabalho, capital, terra e capacidade empresarial; a cada um desses fatores corresponde, por sua participação em um certo processo produtivo, uma remuneração denominada, respectivamente, de salário, juro, aluguel e lucro.

Faro (2012) conceitua o juro como sendo uma remuneração, a qualquer título, atribuída ao fator capital; ou intuitivamente, é o prêmio pago a um agente econômico por postergar o consumo. Portanto, juro é a remuneração referente ao uso do capital por um determinado tempo.

Assim, por exemplo, ao emprestarmos uma certa quantia por determinado período de tempo, costumamos cobrar uma dada importância de tal modo que no fim do prazo estipulado disponhamos não só da quantia emprestada, como também de um acréscimo que compense a não utilização do capital por nossa parte durante o período de empréstimo. Alternativamente podemos dizer que o ato de poupar, que implica abdicar de consumir no presente, é motivado por um prêmio, traduzido na possibilidade de um maior consumo futuro, que é denominado juros.

3.1.2 Capital inicial ou valor presente

Teixeira (1998) define o Capital inicial como sendo uma quantia que um indivíduo tem, inicialmente, disponível e concorda em ceder a outro, temporariamente, mediante determinada remuneração oriunda desse empréstimo, a qual chamamos de juros e que, incorporados ao valor emprestado, resultarão no montante. Os juros que se recebem ou que se pagam a título de aluguel do dinheiro não são estabelecidos arbitrariamente, mas obedecem a alguns parâmetros do mercado financeiro, ou seja, à oferta e a procura do dinheiro.

Outras denominações de capital são: principal, valor inicial, valor aplicado ou depósito inicial. Representamos o capital com a letra C, mas ele também pode ser identificado por P, de principal ou VP(valor presente).

3.1.3 Montante ou valor futuro

O Montante, de acordo com Bruni (2012), é o resultado total que se obtém da aplicação do capital inicial, ou seja, é quanto se recebe ou se paga pelo empréstimo do capital. Matematicamente, representa a soma do capital inicial mais os juros capitalizados durante o período. Representamos o montante pela letra M, mas ele também pode ser identificado pela letra S, do inglês sum(montante) e também VF(valor futuro)

$$M = C + J,$$

Onde:

- C é o capital inicial e
- J é o juro referente ao tempo que se utilizou o capital inicial.

3.1.4 Período

O Período é definido como sendo o espaço de tempo pelo qual o capital ficou aplicado. Este dado vem representado por um número de períodos que podem ser, por exemplo, dias, meses, trimestres, anos, etc.

Assim, Neto (1998), representa o número de períodos pela letra n, mas ele também pode ser identificado pela letra t, de tempo. Lembrando que nas fórmulas de matemática financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo.

3.2 Taxa de Juros

A Taxa de Juros é a relação entre juro e o capital, ou seja, é o fator que determina qual é a remuneração do capital em um determinado espaço de tempo(mês, semestre, ano, etc). Ou seja, a taxa de juros pode ser interpretada como sendo o "preço" cobrado pela utilização da unidade de capital durante o período considerado; ou ainda, de maneira mais livre, como sendo o "preço do dinheiro".

Adotamos a notação i, que vem do inglês interest(taxa), mas a taxa de juros também pode ser identificada pela letra j. A taxa de juros pode ser representada de duas formas, e que é fácil passar de uma forma para outra.

3.2.1 Taxa percentual

Penido (2008) descreve que a Taxa percentual é a taxa de juros que se refere a 100 unidades de capital(percentual = por 100). Esta é a maneira mais usual de se apresentarem as taxas de juros, e todos nós estamos habituados a escutar: A inflação do ano atingiu 6 por cento. O rendimento das cadernetas de poupança no mês passado foi de $0,8$ por cento.

Sendo definida pela fórmula abaixo;

$$i(\%) = (\tfrac{J}{C} \times 100).$$

3.2.2 Taxa unitária

A taxa unitária é a taxa de juros que se refere a uma unidade de capital. Sendo, portanto, expressa como abaixo. Então, a fórmula da taxa de juros, para um período, é a seguinte:

$$i = \tfrac{J}{C}.$$

Assim, diz Puccini (2018) ao depararmos com uma taxa na forma percentual, para inseri-la nas fórmulas devemos, antes, transformá-la em sua forma unitária, bastando dividi-la por 100. Inversamente, ao depararmos com uma taxa na forma unitária, basta multiplicá-la por 100 para obter a sua forma percentual. Veja algumas formas equivalentes entre taxas percentuais e unitárias no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Exemplo de taxa de Juros

Forma Percentual	Para transformar na forma unitária	Forma unitária
20 % ao ano	$\frac{20}{100}$	0,2 ao ano
6 % ao trimestre	$\frac{6}{100}$	0,06 ao trimestre
2 % ao mês	$\frac{2}{100}$	0,02 o mês
0,3 % ao dia	$\frac{0,3}{100}$	0,003 ao dia

3.3 Regimes de capitalização e de juros

No fundo, declara Morgado (2015), só há um único problema de Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo. E para isso utilizamos, notadamente, dois regimes de juros para esses deslocamentos, os quais veremos a seguir.

3.3.1 Juros Simples

Penido (2008) define os juros simples como sendo os juros em que temos a capitalização simples, ou seja, são aqueles em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial; não incide, pois, sobre os juros acumulados. Ou seja, os juros não são capitalizados e, consequentemente, não rendem juros. Portanto, os rendimentos de cada período são sempre os mesmos, pois os juros são calculados sobre o capital inicial, e os montantes crescem linearmente, como em uma progressão aritmética.

Sabendo-se que neste regime de capitalização a taxa varia linearmente em função do tempo, então, afirma Sobrinho (1997), que se quisermos converter a taxa diária em mensal, basta multiplicarmos a taxa diária por 30; se desejarmos uma taxa anual, tendo a mensal, basta multiplicarmos esta por 12, e assim por diante.

Assim, afirma Lopes (2002), o valor dos juros, portanto, depende do prazo (n), do capital inicial (C) e da taxa de juros (i) da aplicação. Assim, os juros referentes a uma aplicação inicial C no prazo de 1 mês e juros de $i\%$ a.m. é dado por:

$$J = C \times i.$$

Para um prazo de 2 meses temos:

$$J = (C \times i) + (C \times i).$$

Portanto,

$$J = 2 \times C \times i.$$

Da mesma forma, para um prazo de 3 meses temos:

$$J = C \times i + C \times i + C \times i.$$

Portanto,

$$J = 3 \times C \times i.$$

Dessa forma, para um prazo de n meses, temos:

$$J = C \times i + C \times i + C \times i + ... + C \times i.$$

Com a parcela $C \times i$ se repetindo n vezes, Logo:

$$J = C \times i \times n.$$

Onde:

- J é o valor dos juros;
- C é o capital inicial;
- i é a taxa de juros;
- n é o prazo da aplicação(na mesma unidade que a taxa de juros).

Perceba que pela fórmula podemos calcular o valor do juro para qualquer prazo (n). Entretanto, admite-se que o juro e o principal são devidos apenas no fim do prazo de aplicação, a menos que haja mudança na convenção (Mathias, 2008).

Da mesma forma que calculamos os juros simples pela fórmula acima, podemos calcular, manipulando esta fórmula, a taxa de juros da operação, o prazo, além do capital inicial, desde que tenhamos os outros dados da mesma.

- Cálculo do Capital Inicial

  $C = \frac{J}{i \times n}$.

- Cálculo da taxa de juros

  $i = \frac{J}{C \times n}$.

- Cálculo do período

  $n = \frac{J}{C \times i}$.

Confira o exemplo a seguir: Um capital de $R\$$ $40.000,00$ foi aplicado à taxa de juros simples de 5% ao mês, durante 12 meses. Qual foi o montante após 12 meses ?

Tem-se que: $M = C + J$ (I), em que: $J = C \times i \times n$ (II), Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$M = C(1 + i \times n)(\text{III})$$

Em que:

- $C = 40.000,00$;
- $i = 5\%$ ao mês;
- $n = 12$.

Substituindo os valores em (III), tem-se:

$$M = 40.000,00(1 + 0,05 \times 12) \Rightarrow M = 64.000,00.$$

Nos juros simples a capitalização se dá sempre sobre o capital inicial, no caso $R\$$ $40.000,00$. Como a taxa de juros é de 10% ao mês, temos que os juros são de $R\$$ $4000,00$ por mês. Em doze meses temos:

$$J = C \times i \times n \Rightarrow J = 40.000,00 \times 0,1 \times 12 \Rightarrow J = 48.000,00.$$

Em que o montante final, após os doze meses é:

$$M = C + J \Rightarrow M = 40.000,00 + 48.000,00 \Rightarrow M = 88.000,00.$$

3.3.2 Juros Compostos

Uma das grandes aplicações de Progressões Geométricas é a Matemática Financeira, notadamente em Juros Compostos. Sendo que a operação básica da Matemática Financeira refere-se ao empréstimo.

Alguém que dispõe de um capital C(chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e, após esse prazo, recebe seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juros. A soma $C + J$ é chamada de montante M. A razão $i = J/C$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros.

Proposição: Segundo Morgado (2015), no regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante:

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

Demonstração: Inicialmente tem-se um Capital inicial que será chamado de C_0. Ao término do primeiro período de capitalização obtêm=se C_1 que é formado pelo capital inicial C_0 mais os Juros J_1 referente ao período 1. Dessa forma: $C_1 = C_0 + J_1 \Rightarrow C_1 = C_0 + C_0 \times i$, já que $J_1 = C_0 \times i$. Portanto, tem-se que $C_1 = C_0(1+i)$.

No segundo período tem-se $C_2 = C_1 + J_2$, já que fala-se de juros compostos, ou seja, os juros, em cada período, incidem tanto sobre o capital inicial, como também dos juros anteriores. É sabido, também que: $J_2 = C_1 \times i$, sendo J_2 o juros referente ao segundo período, portanto, tem-se que:

$$C_2 = C_1 + C_1 \times i \Rightarrow C_2 = C_1(1+i) \Rightarrow C_2 = C_0(1+i)(1+i) \Rightarrow C_2 = C_0(1+i)^2.$$

No terceiro período tem-se: $C_3 = C_2 + J_3$, mas $J_3 = C_2 \times i$, fazendo as substituições, obtêm-se:

$$C_3 = C_0(1+i)^2 + C_2 \times i \Rightarrow C_3 = C_0(1+i)^2 + C_0(1+i)^2 \times i \Rightarrow C_3 = C_0(1+i)^2 \times (1+i) \Rightarrow$$
$$C_3 = C_0(1+i)^3.$$

Para um período genérico n, tem-se:

$$C_n = C_{n-1} + J_n$$

Mas $J_n = C_{n-1} \times i$, portanto, chega-se a:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} \times i \Rightarrow C_n = C_{n-1} \times (1+i) \text{ (I)}$$

Sabendo-se que: $C_{n-1} = C_{n-2} \times (1+i)$ (II). Logo, substituindo (II) em (I), tem-se:

$$C_n = C_{n-2} \times (1+i) \times (1+i) \Rightarrow C_n = C_{n-2} \times (1+i)^2.$$

Por recorrência, tem-se, portanto, que:

$$C_n = C_{n-n} \times (1+i)^n.$$

Logo:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n.$$

Nesta fórmula, afirma Mathias (2008), a taxa de juros i refere-se à mesma medida de tempo utilizada para os n períodos e, além disto, deve ser expressa na forma unitária porque estamos operando algebricamente. Observe que a fórmula exprime o montante, ao fim de n períodos, como uma função exponencial do capital inicial aplicado.

Portanto, de acordo com Neto (1998), no regime de juros compostos considera-se que os juros de cada período são acrescidos ao capital formando o montante (capital somados aos juros) do período. Este montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante(constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores), e assim por diante.

Utilizar-se-á o mesmo exemplo já usado nos juros simples, em que tem-se um capital de $R\$$ $40.000,00$ aplicado a taxa de juros de 10% ao mês, durante 12 meses. Neste caso os juros são diferentes em cada mês porque estes, a partir do segundo mês, são calculados sobre os montantes do mês imediatamente anterior. Calcula-se, portanto, os juros e o montante final após os 12 meses, a seguir:

$$C = C_0(1+i)^n \Rightarrow C = 40.000,00(1+0,1)^{12} \Rightarrow C = 125.537,14 \text{ mil reais.}$$

Percebe-se que esse processo de formação de juros é diferente daquele descrito para os juros simples, onde unicamente o capital rende juros, não ocorrendo remuneração sobre os juros formados em períodos anteriores. Também pode-se chamar o capital de valor presente PV e o montante de valor futuro FV.

Portanto, outro modo de “ver"a fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$, é que uma quantia, hoje igual a C_0, transformar-se-à, depois de n períodos de tempo, em uma quantia igual a $C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é PV, equivalerá, no futuro, depois de n períodos de tempo, a $FV = PV(1+i)^n$.

Esta fórmula é fundamental na equivalência de capitais: Para obter o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$ e para obter o valor atual(valor presente), basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$ (Morgado, 2015).

3.3.3 Comparando juros simples com juros compostos

Vai-se comparar os montantes obtidos do exemplo em que se faz uma aplicação de $R\$$ $4,00$, a juro de 10% ao mês.

No sistema de juros simples, os juros são obtidos em função do tempo, por meio da equação $J = C \times i \times t$ ou $J = 4 \times 0,1 \times t$.

Esta função tem uma equação do tipo da função linear $f(x) = ax$, cujo gráfico é uma reta que passa pela origem (Dante, 2014).

Ainda no sistema de juros simples, o montante é obtido a partir da função: $M = 4 + 0,4t$, que é uma função afim $f(x) = ax + b$, cujo gráfico é uma reta, partido do ponto $(0,4)$.

Veja o Quadro 2 abaixo em que tem-se os montantes em função do tempo t, a partir do tempo 0 até o décimo segundo mês. Onde: $M = 0,4t + 4$.

Quadro 2: Juros Simples.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	4	4,4	4,8	5,2	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8	8,2	8,6

No sistema de juros compostos, o montante é obtido em função do tempo por meio da equação $M = 4 \times (1+i)^t$, que envolve uma função exponencial $f(x) = a \times b^x$.

Veja o quadro 3 em que temos os montantes em função do tempo t, a partir do tempo 0 até o décimo segundo mês. Onde: $M = C(1+i)^n$, neste caso tem-se:

- $C = 4$;
- $i = 0,1$;
- $n = 12$.

Quadro 3: Juros Compostos.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...	11	12
M	4	$4,4$	$4,84$	$5,32$	$5,85$	$6,44$	$7,08$	$7,79$	...	$11,41$	$12,55$

Fazendo uma analogia entre os procedimentos matemáticos utilizados para o cálculo de taxas equivalentes e os regimes de capitalização simples e composta, notamos que as operações básicas usadas no primeiro são a multiplicação e a divisão, enquanto as utilizadas no segundo são, respectivamente, a exponenciação e a radiciação. Note que estas operações se adaptam perfeitamente ao comportamento relativo à especificidade de cada regime pois, no de capitalização simples, existe a característica da linearidade inerente à progressão aritmética, daí o uso da multiplicação e divisão; por outro lado, no regime de capitalização composta, deve-se utilizar as operações específicas de forma a captar o comportamento exponencial implícito à progressão geométrica própria desse regime (Teixeira, 1998).

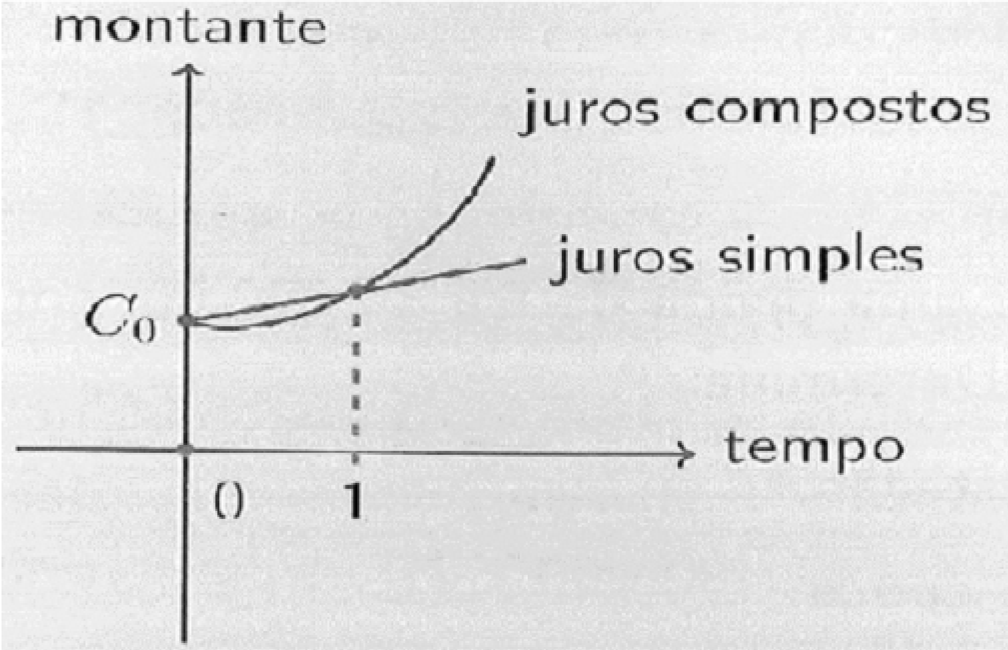
Olhando para os gráficos de evolução de um mesmo principal C_0 a juros de taxa i, a juros simples e compostos, observa-se que o montante a juros compostos é superior ao montante a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É por isso que juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere a taxa de juros combinada (Morgado, 2015).

3.3.4 Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Existem algumas situações em que a taxa utilizada na operação não coincide com o período de capitalização. Por exemplo, aplica-se $RS\ 1.000,00$ a juros compostos por três meses à taxa de 70% ao ano, capitalizados mensalmente. Note que, apesar da taxa ser expressa em termos anuais, a capitalização se dá a cada mês. Isto implica estar-se utilizando uma taxa nominal anual quando, efetivamente, a remuneração do capital se dá em termos mensais. Para tanto, faz-se necessária a distinção entre taxa nominal e efetiva.

Taxa nominal(i) é aquela cuja unidade do período a que se refere não coincide com a unidade do período de capitalização.

Figura 3.1: Comparando juros



Fonte: (Morgado, 2015, p. 103)

Taxa efetiva(I) é aquela que efetivamente é utilizada nos cálculos de juros em uma operação financeira.

Dada uma taxa de juros nominal procede-se, para cálculo da respectiva taxa de juros efetiva, por convenção, de maneira igual ao sistema de capitalização simples, isto é, calcula-se a taxa proporcional à dada, relativa à unidade de tempo mencionada para a capitalização, e, posteriormente, apura-se exponencialmente a taxa efetiva à nominal.

Ou seja, se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que:

$$1+I=(1+\tfrac{i}{n})^n,$$

onde:

- n é a frequência de períodos relativos à capitalização da taxa efetiva;
- I é a taxa efetiva;
- i é a taxa nominal.

Exemplo: A taxa efetiva semestral correspondente a 24% ao semestre com capitalização mensal é I tal que:

$$1+I=(1+0,04)^6.$$

Dai, $I=26,53\%$ ao semestre.

3.4 Sistema de Amortização

Segundo Ferreira (2009) amortizar é extinguir (dívidas) aos poucos ou em prestações. Também significa abater (parte de uma dívida), efetuando o pagamento correspondente. Enfim, é a redução de uma dívida por meio de pagamento parcial ou gradual acertado entre as partes.

Neto (1998), considera que os sistemas de amortização são desenvolvidos basicamente para operações de empréstimos e financiamentos de longo prazo, envolvendo desembolsos periódicos do principal e encargos financeiros.

Entretanto, afirma Luz (2017), atualmente pode-se constatar estas operações em compras cotidianas no comércio em geral.

3.4.1 Desconto Bancário

Quando um banco empresta dinheiro(crédito pessoal ou desconto de duplicatas), o tomador do empréstimo emite uma nota promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada valor de face da promissória (Morgado, 2015).

O banco, então, desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe-a pelo valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A(menor que F, naturalmente). A diferença $F - A$ é chamada de desconto.

Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula $A = F(1 - d \times t)$, onde:

- d é a taxa fixada pelo banco e chamada de taxa de desconto bancário;
- t é o prazo da operação(medido na unidade de tempo a que se refere a taxa);
- F é o valor de face da promissória;
- A quantia recebida pelo cliente.

Demonstração: O desconto D que é aplicado pelo banco corresponde ao valor de face da promissória, menos o valor que cliente recebe, ou seja:

$$D = F - A \Rightarrow A = F - D \text{ (I)}$$

Também tem-se que: $D = F \times d \times t$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtêm-se:

$$A = F - (F \times d \times t) \Rightarrow A = F(1 - dt).$$

Exemplo: Pedro desconta uma promissória de valor $R\$ \ 100,00$, com vencimento no prazo de 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é 12% ao mês.

1. Quanto Pedro receberá ?

2. Qual a taxa mensal de juros que Pedro está pagando ?

Solução: Tem-se, nesta questão, que $F = 100$, $t = 2$ e $i = 0,12$. Logo, substituindo esses valores em $A = F(1 - d.t)$, temos:

$$A = 100(1 - 0,12 \times 2) \Rightarrow A = R\$\ 76,00.$$

Se i é a taxa mensal de juros à qual cresce a dívida de Pedro, temos:

$$C = C_0(1+i)^t \Rightarrow 100 = 76(1+i)^2 \Rightarrow i = 0,1471 \Rightarrow i = 14,71\% \text{ a.m..}$$

3.4.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

O sistema de amortização constante(SAC) recebe esse nome porque a prestação nesse sistema é dividida em dois valores: O primeiro valor é fixo, chamado de amortização, sendo obtido dividindo-se o valor do empréstimo pelo número de prestações a serem pagas. O segundo valor são os juros referentes ao saldo devedor em cada etapa. Esse cálculo de juros é muito usado no financiamento imobiliário.

Exemplo: Uma dívida de $R\$\ 1000,00$ foi contraída pelo SAC, com taxa de juros de 5% ao mês, em 5 meses.

Solução: Veja que, neste caso, a amortização em cada prestação vai ser obtida dividindo-se $R\$\ 1000,00$(o valor do empréstimo) por 5(número de prestações a serem pagas). Obtendo-se, portanto, como resultado o valor de $R\$\ 200,00$. Os juros incidirão sobre o saldo devedor em cada etapa.

- No período 0, data do empréstimo, o saldo devedor é de $R\$\ 1000,00$.

- No período 1, após um mês do empréstimo, temos uma prestação de $R\$\ 250,00$, referente a amortização constante de $R\$\ 200,00$ e os juros de $R\$\ 50,00$. Portanto, o saldo devedor passa a $R\$\ 800,00$.

- No período 2, ao término do segundo mês do empréstimo, temos uma prestação de $R\$\ 240,00$, referente a amortização constante de $R\$\ 200,00$ e juros de $R\$\ 40,00$. Portanto, o saldo devedor passa a $R\$\ 600,00$.

- No período 3, ao término do terceiro mês do empréstimo, temos uma prestação de $R\$\ 230,00$, referente a amortização constante de $R\$\ 200,00$ e juros de $R\$\ 30,00$. Portanto, o saldo devedor passa a $R\$\ 400,00$.

- No período 4, ao término do quarto mês do empréstimo, temos uma prestação de $R\$\ 220,00$, referente a amortização constante de $R\$\ 200,00$ e juros de $R\$\ 20,00$. Portanto, o saldo devedor passa a $R\$\ 200,00$.

- No período 5, ao término do quinto mês do empréstimo, temos uma prestação de $R\$ \ 210,00$, referente a amortização constante de $R\$ \ 200,00$ e juros de $R\$ \ 10,00$. Portanto, o saldo devedor passa a $R\$ \ 0,00$, no caso há a quitação do empréstimo.

Quadro 4: Comportamento de uma dívida contraída pelo SAC.

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	1000,00	–	–	–
1	800,00	200,00	50,00	250,00
2	600,00	200,00	40,00	240,00
3	400,00	200,00	30,00	230,00
4	200,00	200,00	20,00	220,00
5	0,00	200,00	10,00	210,00

Portanto, temos as seguintes expressões para cada item do quadro 4:

- $A = \frac{D}{N}$;
- $D_k = \frac{N-K}{N} \times D$;
- $P_K = D_k \times i + A$.

Onde:

- A é o valor da amortização constante;
- D é o valor da dívida contraída;
- N é o números de prestações pactuada na tomada do empréstimo;
- K é o período do empréstimo;
- i é a taxa de juros do empréstimo;
- D_K é a dívida no período K;
- P_K é a prestação no período K.

3.4.3 Sistema de Amortização Francês

De acordo com Poitras, citado por Hazzan (2007, p. 219), o sistema Francês foi desenvolvido pelo matemático e físico belga Simom Stevin, no século XVI. Todavia, foi utilizado pelo matemático e economista inglês Richard Price, no século $XVIII$, no cálculo previdenciário da época, dessa forma, ficou conhecido no Brasil como sistema Price.

A grande característica desse sistema é que as prestações pagas têm sempre o mesmo valor, isto é, são constantes, permitindo ao devedor e ao credor uma programação financeira (Luz, 2017).

3.4.4 Séries uniformes

Como a grande característica do sistema francês é que as prestações pagas têm sempre o mesmo valor, então este sistema se encaixa perfeitamente nas séries uniformes.

Nas séries uniformes um conjunto de quantias(chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade(apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme (Morgado, 2015).

Proposição: O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, num tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a (Morgado, 2015):

$$A = P \times \frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}.$$

Demonstração

O valor da serie na época 0 é:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}.\text{(I)}$$

Que é a soma dos n termos de uma progressão geométrica, ou seja:

$$A = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \text{ (II)}.$$

Em que:

$$a_1 = \frac{P}{1+i} \text{ e } q = \frac{1}{1+i}.$$

Substituindo em (II), tem-se:

$$A = \frac{P}{1+i} \times \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-\frac{1}{1+i}} \text{ (III)}.$$

Entretanto:

$$1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i}.$$

Substituindo em (III), tem-se, então:

$$A = \frac{P}{1+i} \times \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{\frac{i}{1+i}} \Rightarrow A = P \times \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{i} \Rightarrow A = P \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Portanto, isolando P acharemos a fórmula que calcula a prestação no sistema francês de amortização, também chamado de tabela Price.

$$P = \frac{A \times i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Onde:

- A é o valor financiado;
- P é a prestação constante;
- i é a taxa de juros utilizada na operação;
- n é a quantidade de prestações do financiamento.

Exemplo: Vamos utilizar o mesmo problema que usamos no sistema SAC, em que temos um empréstimo de $R\$ \ 1000,00$, que será pago em 5 prestações mensais, a primeira paga um mês após a efetivação do empréstimo, com uma taxa de juros de 5% a.m..

Solução: Sabe-se que no sistema Price as prestações são constantes. Então, acha-se, inicialmente, o valor da prestação utilizando a fórmula seguinte:

$$P = \frac{A \times i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Em que:

- $A = 1000$;
- $n = 5$;
- $i = 5\%$ a.m.

Substituindo os valores acima descrito na fórmula, tem-se:

$$P = \frac{1000 \times 0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-5}} \Rightarrow P = \frac{50}{1-(1{,}05)^{-5}} \Rightarrow P = \frac{50}{1-0{,}7835} \Rightarrow P = \frac{50}{0{,}2165} \Rightarrow P = 230,97.$$

Quadro 5: Comportamento de uma dívida contraída pelo sistema Price.

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	1000,00	–	–	–
1	819,03	180,97	50,00	230,97
2	629,01	190,02	40,95	230,97
3	429,49	199,52	31,45	230,97
4	219,99	209,50	21,47	230,97
5	0,00	219,99	10,98	230,97

Portanto, no sistema de amortização francês, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, tem-se:

1. $D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$;

2. $J_k = i \times D_{k-1}$.

Em que:

- D_K é a dívida no período k;
- D_0 é a dívida contraída;
- J_K é o juros referentes ao período k;
- i é a taxa de juros da operação;
- n é o tempo da operação.

3.5 Comparando o sistema SAC com o sistema francês de amortização

Sabemos que a grande característica do sistema SAC é que tem-se uma amortização constante do valor tomado como empréstimo e faz-se isso, dividindo-se o valor solicitado pela quantidade de prestações do financiamento, o resto da parcela é os juros de cada período, enquanto que no sistema francês de amortização, calcula-se uma prestação fixa de acordo com o valor solicitado, taxa de juros e tempo do empréstimo. Essa prestação fixa é a grande característica desse sistema de amortização.

Vamos observar o quadro abaixo que temos o valor financiado, os juros e as prestações nos dois sistemas de financiamentos analisados aqui, usando os exemplos já mostrados.

Os Quadros 6, 7 e 8, em que temos um comparativo de uma mesma dívida sendo financiada pelos sistemas SAC e Price. Os primeiros valores em cada coluna se referem ao sistema SAC e os segundos ao sistema Price.

Quadro 6: Comparando as amortizações no SAC e no sistema Price.

Período	S. devedor(SAC)	S. devedor(Price)	Amortização(SAC)	Amortização(Price)
0	$1000,00$	$1000,00$	$-$	$-$
1	$800,00$	$819,03$	$200,00$	$180,97$
2	$600,00$	$629,01$	$200,00$	$190,02$
3	$400,00$	$429,49$	$200,00$	$199,52$
4	$200,00$	$219,99$	$200,00$	$209,50$
5	$0,00$	$0,00$	$200,00$	$219,99$

Quadro 7: Comparando as prestações e juros nos sistemas SAC e Price.

Período	Prestação(SAC)	Prestação(Price)	Juros(SAC)	Juros(Price)
0	–	–	–	–
1	$250,00$	$230,97$	$50,00$	$50,00$
2	$240,00$	$230,97$	$40,00$	$40,95$
3	$230,00$	$230,97$	$30,00$	$31,45$
4	$220,00$	$230,97$	$20,00$	$21,47$
5	$210,00$	$230,97$	$10,00$	$10,98$
$TOTAL$	$1.150,00$	$1.154,85$	$150,00$	$154,85$

Com o Quadro 8 abaixo temos as diferenças entre o sistemas de amortização de forma mais clara, veja:[2]

Quadro 8: Comparação geral do Sistema SAC e Price.

	SAC	Price
Prestações	Decrescentes	Constantes
Amortizações	Constante	Crescente
Juros	Decrescentes	Decrescentes
Premeira prestação	Mais cara	Mais barata
última prestação	Mais barata	Mais cara

Percebe-se que a prestação no sistema SAC é inicialmente maior que no sistema Price, mas vai diminuindo ao longo do tempo, até praticamente se igualar na metade do período de financiamento e, a partir dai, a prestação do SAC será menor que na do Price. Como a prestação inicia-se maior no sistema SAC, temos uma amortização maior do saldo devedor, levando a incidência, portanto, de menos juros ao longo do financiamento. Podemos constatar que os juros totais pagos no sistema SAC deste financiamento foi de $R\$ \ 150,00$, enquanto no sistema Price foi de $R\$ \ 154,85$.

Então, aconselha-se as pessoas a fazerem seus financiamentos imobiliários pelo sistema SAC já que paga-se menos juros ao longo do financiamento. Evidentemente, outros fatores precisam ser analisados, entre eles, se a pessoa poderá arcar com essa prestação inicial mais alta. No caso da resposta ser negativa é indicado, então, que financie seu imóvel pelo sistema francês.

Capítulo 4

Análise do livro Matemática de Edwaldo Bianchini

Na análise do livro de Bianchini (1995), volume 1, segue-se a ordem do referido livro, no qual o assunto é dividido em dois tópicos e alguns sub-tópicos, cujos conteúdos são comentados ao longo desse capítulo.

Inicialmente, verifica-se que o capítulo referente à Matemática Financeira está no volume 1 de sua coleção, mas seu conteúdo foi apresentado antes de abordar os assuntos de Progressão Aritmética(P.A.) e de Progressão Geométrica(P.G.), que se encontram em outro volume da coleção. Sendo as progressões assuntos essenciais para o entendimento da Matemática Financeira, recomenda-se que essa sequência seja revista.

Colocar-se-ão os tópicos do livro para que seja possível ter melhor entendimento da análise do mesmo.

4.1 Noções sobre Matemática Financeira

4.1.1 Porcentagem

O capítulo é iniciado com várias fotos, mostrando como a Matemática Financeira é importante no dia-a-dia, pois, notícias em jornais, rádios, televisão e outros meios de comunicação estão repletos de fatos que envolvem esse assunto. A abordagem apresentada foi interessante, uma vez que motiva o aluno e o induz a perceber o quanto esse assunto é relevante na vida.

A seguir, Bianchini (1995) descreve o que cada foto representa na realidade, explicando o que cada notícia expressa de fato e realiza os cálculos fornecidos em cada figura. Portanto, o livro tem um ótimo início, mostrando o quão comum é o uso da Matemática Financeira no cotidiano.

O autor, parte, então, para um exemplo, que deveria estar na seção de descontos (salienta-se que não há essa seção no livro). Tal exemplo apresenta o anúncio de uma promoção para a venda de um carro que custa $R\$\ 20.000,00$, que, se pago no ato da compra, tem um desconto de 24% e pede para calcular o valor do carro nessa forma de pagamento. O método de resolução do livro é uma regra de três simples para encontrar, a partir daí, o desconto e, por fim, calcular o preço do carro à vista. Posteriormente, ele resolve de outra maneira, a partir da ideia de porcentagem, segundo a qual 24% seria equivalente à $24/100$. Enfim, multiplica o valor do carro por essa fração, encontra o valor do desconto e faz a diferença entre o preço anunciado e o do desconto, encontrando, assim, o valor procurado.

Diante do exposto, verifica-se a maior viabilidade da inserção do exemplo em questão na seção de descontos, para, assim, calcular o preço da seguinte forma:

$$A = F(1 - d.t).$$

Onde:

- d é a taxa de desconto;
- t o prazo da operação, medido na unidade de tempo a que se refere a taxa;
- A será o valor com desconto;
- F o valor sem o desconto.

Assim, de acordo com o enunciada da questão, tem-se: $F = 20.000,00$, $d = 24\%$ e $t = 1$. Logo:

$$A = 20.000(1 - 0,24 \times 1) \Rightarrow A = 20.000(1 - 0,24) \Rightarrow A = 20.000 \times 0,76 \Rightarrow A = 15.200.$$

Portanto, o carro custaria $R\$\ 15.200,00$.

O exemplo 2 do livro é sobre uma dívida de $R\$\ 60.000,00$ que foi paga com atraso e que, por isso, teve um acréscimo de 2% à título de juros e de multa. No livro, o exercício é resolvido utilizando regra de três simples, por meio da qual, de início, encontra-se o valor dos juros e, após isso, somam-se os juros ao capital inicial. O autor também soluciona a questão de outro modo, que seria $1,02$ de $R\$\ 60.000,00$.

Recomenda-se que este exemplo esteja na seção de juros compostos, com a resposta da seguinte forma:

$$\begin{gathered} M = C(1 + i \times n) \Rightarrow M = 60.000,00(1 + 0,02 \times 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow M = 60.000,00 \times 1,02 \Rightarrow \\ \Rightarrow M = 61.200,00. \end{gathered}$$

Onde:

- M é o valor final ou montante;

- C é o capital inicial;
- i é a taxa de juros;
- n é o prazo da aplicação (na mesma unidade que a taxa de juros).

Em sequência, são iniciados, no livro de Bianchini (1995), os exercícios propostos, em um total de oito. Os dois primeiros exercícios não são recomendados pelo novo paradigma do ensino, pois tratam-se de cálculos puros, apenas mecânicos e sem raciocínio. Nesse contexto, são várias as alternativas de questões do tipo: calcule 26% de $300,00$.

A questão 3 tem a mesma ideia do exemplo 1. Logo, deveria estar na seção de descontos, que fala em uma compra à vista com desconto de 16%, e pergunta por quanto ficaria o valor do bem. A questão 4, por sua vez, deveria estar na seção de juros compostos.

A questão 5 deveria ser retirada do livro já que pede o cálculo de um imposto sobre outro, algo que viola as leis brasileiras, por não ser possível a duplicidade de imposto.

A questão 6 (que também deveria estar na seção de descontos) é o problema mais interessante da seção, já que leva o estudante a fazer uma escolha entre duas opções de compras, referentes a um mesmo produto: uma no valor de $R\$\ 4.000,00$, mas com desconto de 30%, se comprado à vista, ou, em outra loja, com o preço de $R\$\ 3.500,00$, mas tendo desconto de 25%, se paga no ato da compra. Esse modelo de questão é muito recomendado, já que leva o aluno a fazer escolhas entre opções disponíveis, usando seus conhecimentos sobre o assunto, algo que é indispensável à vida.

O autor, na questão 7, afirma que não há diferença para um comerciante, quando entre duas escolhas:

a) Vender uma mercadoria com 25% de desconto à vista;

b) Vender com 1 mês de prazo para pagamento e trocando a duplicata, por dinheiro, no mesmo dia da venda, em um banco que cobra 25% do total da transação, a título de remuneração pelo serviço prestado.

É verdade que, em termos monetários, o comerciante recebeu a mesma quantia pela venda do produto nas duas opções de venda. Todavia, na opção b), há vários trâmites, que requerem tanto tempo do comerciante ou do seu funcionário, quanto dinheiro. O autor fala em duplicata, já que o cliente não pagou, mas assinou a duplicata, com o compromisso de pagamento um mês após a data da assinatura.

Duplicata é um documento com regras e obrigações para quem compra, mas para o comerciante oferecer esse crédito, ele faz consultas ao cadastro do cliente no SPC e no SERASA, que cobram pelo serviço. Além disso, o comerciante teria que se deslocar ao banco com a duplicata, para que fosse efetivado o crédito do valor da venda com o desconto, exigindo mais tempo do mesmo e mais gasto com deslocamento. Portanto, a primeira venda, é, sem dúvida, a mais vantajosa para o comerciante, que já recebe a quantia na hora da efetivação da venda, sem nenhum trâmite extra.

A questão 8 também é uma exercício de desconto, semelhante ao quesito 6, já comentado.

Tem-se, então, o exemplo 3, que por tratar-se de uma questão mais adequada ao capítulo de probabilidade, aconselha-se a sua retirada do capítulo de Matemática Financeira.

A seguir, há a continuação dos exercícios propostos, com as questões 9, 10 e 11. A questão 9 é semelhante aos exercícios 1 e 2 e a questão 10 repete o raciocínio do exemplo 3. A questão 11 é, novamente, sobre desconto, já explicado em questões anteriores. Portanto, é recomendado retirá-las do livro.

Posteriormente, tem-se o exemplo 4, que envolve um reajuste de 30% no salário de $R\$\ 600,00$ de uma funcionária que, por ter faltado ao trabalho, teve um desconto de $x\%$ e recebeu, com isso, $R\$\ 702,00$. Diante desses fatos, pede-se para determinar o valor percentual do desconto.

Esta questão deveria estar na seção de desconto, que, como já foi dito, é inexistente no livro. A resposta do livro se dá da seguinte forma:

Inicialmente, o autor acha o novo salário, com reajuste de 30%, usando $R\$\ 600,00 + 0,3 \times R\$\ 600,00 = R\$\ 780,00$. A partir desse valor e do efetivamente recebido, nota-se que houve um desconto de $R\$\ 78,00$. O autor usa regra de três e acha quanto esse desconto representa em termos percentuais do novo salário, chegando ao valor de 10%.

Aconselha-se o uso da fórmula de juros compostos, do seguinte modo:

$$C = C_0 \times (1+i) \Rightarrow C = 600 \times (1+0,3) \Rightarrow C = R\$\ 780,00.$$

Portanto, esse seria o salário reajustado da funcionária, mas ela recebeu $R\$\ 702$. Para saber o desconto, em termos percentuais, basta usar novamente essa fórmula.

$$C = C_0 \times (1+i) \Rightarrow 702 = 780(1+i) \Rightarrow 1+i = 0,9 \Rightarrow i = -0,1 \Rightarrow i = -10\%.$$

Portanto, houve um desconto de 10% no salário da funcionária, por ter faltado ao trabalho. Recomenda-se que fosse dada a quantidade de faltas que a funcionária teve no mês e os dias que ela trabalhou, e, a partir disso, pedir para que fosse verificado se o desconto no seu salário está correto. Essas análises comparativas são essenciais no cotidiano.

Tem-se, então, o exemplo 5, que é bem vindo na Matemática Financeira, já que envolve cobrança de impostos e sonegação, tendo o mérito, além do exposto, de incentivar as pessoas a pedirem nota fiscal ao realizarem suas compras. Em resumo, a questão descreve que foi vendido um produto por $R\$\ 40,00$ e o comerciante não repassou para o governo os 18% de ICMS(Imposto sobre circulação de Mercadorias e Serviço). E, escreve Bianchini (1995) que o lucro do comerciante deveria ser de 25% sobre o custo da mercadoria, determinar:

a) O valor do imposto sonegado; b) qual foi o custo da mercadoria; c) a porcentagem de lucro do comerciante.

O valor do imposto sonegado é de fácil obtenção. Basta multiplicar $0,18\times$ por $R\$\ 40,00$, obtendo-se $R\$\ 7,20$.

Para achar o custo da mercadoria, o autor criou uma fórmula para permitir seu cálculo, sendo que, nesse caso, a aplicação dos conhecimentos de juros compostos seria suficiente. Nesse sentido, é válido frisar que o menor uso possível de fórmulas leva a um melhor entendimento por parte do aluno. Assim, o autor resolveu a questão:

$$C + 0,25C + I = 40,00.$$

Como o imposto é $R\$\ 7,20$, tem-se:

$$C + 0,25C + 7,20 = 40,00 \Rightarrow 1,25C = 32,8 \Rightarrow C = 26,24.$$

Onde:

- C é o custo da mercadoria;
- I é o ICMS sobre essa mercadoria.

Recomenda-se que essa questão estivesse na seção de juros compostos e fosse usada a seguinte fórmula: $C = C_0(1+i)$. Como: $C = 32,80$ e $i = 0,25$, tem-se:

$$32,8 = C_0(1+0,25) \Rightarrow C_0 = \frac{32,8}{1,25} \Rightarrow C_0 = 26,24.$$

Para solucionar o item c), o autor usa regra de três. Para tanto, é recomendado o uso da fórmula de juros compostos, onde $C = 40$, $C_0 = 26,24$ e tendo como resposta $0,5244$, ou seja , 54%.

Nessa questão, é proposto o uso de um texto motivador sobre o ICMS, para que os alunos pudessem entender melhor como o mesmo é cobrado e a sua finalidade.

O autor continua os exercícios propostos com mais 9 questões.

A questão 12 é baseada no item a) do exemplo anterior. A questão 13 é interpretada como desnecessária por ser praticamente igual ao exercício anterior. Sendo assim, a sua resolução seria mecânica, contrariando as normas e diretrizes da educação básica.

A questão 14 é sobre desconto e, portanto, deveria estar em outra seção. Mostra que será descontado os vales que o funcionário usou durante o mês e quer saber a porcentagem do seu salário que foi descontada. Recomenda-se adequar essa questão a realidade, já que os vales estão, na prática, em valores numéricos e o cálculo a ser realizado seria somar os valores dos vales e descontar do salário o valor encontrado. É, também, uma questão bem semelhante ao exemplo 4.

A questão 15 está de acordo com os novos parâmetros curriculares, pois fala de uma dívida vencida e não paga, sujeita à multa. Entretanto, após um acordo, o credor oferece um desconto sobre o total da dívida. Essas questões são boas por serem práticas, isto é, facilmente visualizadas no cotidiano. Ressalva-se que a mesma deveria estar na seção de desconto.

A questão 16 é do estilo do exemplo 4, mas os dados foram organizados em uma tabela, por ser de extrema recorrência na vida. Essa é mais uma questão que deveria estar na seção de descontos.

Na questão 17 tem-se o problema de um comerciante que reduz os preços em 10%, se arrepende e, depois, reajusta suas mercadorias, também, em 10%. Diante da situação, quer saber se os novos preços são maiores, menores ou iguais aos iniciais. Essa questão seria melhor apresentada dando como exemplo um mercado de ações no qual as ações cairiam uma porcentagem e, depois, subiriam a mesma porcentagem, questionando se as ações tinham voltado ao patamar inicial. Como foi feita a pergunta, se percebe que quando baixa o preço em um determinado percentual, para retomar o preço, precisa haver o aumento em um percentual maior que o anterior. Considera-se ser uma questão que trabalha problemas cotidianos, portanto, é recomendado alterar o exemplo, apenas, para um mercado de ações, até porque um comerciante baixar os preços e logo após se arrepender dá uma ideia ruim de amadorismo.

A questão 18 é mais uma das típicas questões que envolve um tema prático, ao menos, da época em que o livro foi lançado. Fala do IPMF, que era o imposto sobre movimentações financeiras através da liquidação de um cheque pelo banco emissor, a partir do qual o correntista pagaria a porcentagem de $0,25\%$ sobre o valor do cheque, a título de imposto. O problema foi a definição dada: IPMF, o imposto do cheque, representava uma cobrança de $0,25\%$ sobre o valor dos cheques emitidos, o que não condiz com a realidade. Se o cheque fosse emitido, poderia passar de uma pessoa para outra, sem a cobrança do imposto. Esse seria cobrado quando o cheque fosse depositado em uma conta e, havendo saldo, seria descontado o percentual referente ao imposto. O banco recolheria, então, tal valor para uma conta do governo brasileiro.

A questão 19 também é sobre IPMF, mas, nesse caso, não é considerada satisfatória por dizer quanto de imposto que foi cobrado relativo a um cheque e por pedir o valor do mesmo, fato que ressalta a sua inaplicabilidade prática.

A questão 20, também sobre o imposto do cheque, é vista como exercício reflexivo da realidade, sendo, portanto, recomendada. Nela, é pedido para calcular a porcentagem do imposto sobre o valor líquido recebido quando o cheque foi compensado.

O exemplo 7 é mais complexo. Informa a inflação acumulada em 2 meses, que foi de $78,2\%$, e pede: a) a inflação do segundo mês, sabendo que a do primeiro foi de 32%. b) a inflação do primeiro mês, sabendo que a do segundo foi de 35%.

A resposta no livro é bem confusa. Atribui um valor x ao mês a ser descoberto e, então, usa regra de três até achar um valor. O item b) é resolvido usando esse mesmo raciocínio.

Primeiro, aconselha-se que essa questão esteja na seção de juros compostos. Assim, o aluno teria conteúdo suficiente para responder a questão. Nesse sentido, teria-se uma resposta, rápida e fácil, através da fórmula de juros compostos, que é de fácil entendimento pelo aluno:

$$C = C_0(1+i) \Rightarrow 178,2 = 132(1+i) \Rightarrow 1,35 = 1+i \rightarrow i = 0,35.$$

Ou seja, a inflação do segundo mês é de 35%.

Além do exposto, também é recomendado que o exemplo envolva um aumento de algo concreto, como, por exemplo, o reajuste da gasolina.

O exemplo 7 não é recomendado, já que não tem aplicabilidade prática. Aconselha-se retirar esse exemplo do livro.

Na página 228, do livro de Bianchini (1995), são retomados os exercícios propostos, agora do 21 ao 25.

As questões 21 e 22 estão de acordo com o exemplo 6, que já foi comentado. Recomenda-se, pois, manter apenas a questão 21, já que não é eficaz ao aprendizado do aluno estar resolvendo várias questões de mesmo raciocínio, em um processo puramente mecânico.

A questão 23 é considerada relevante por refletir a realidade. Nela, é mostrado um tanque com óleo e água, imiscíveis, sendo informada a quantidade de cada um. Então, pede para calcular a porção de água que deveria ser retirada do tanque, através de uma torneira, para que o óleo passasse a corresponder a 25% do líquido restante. Questões desse estilo são recomendadas.

A questão 24 trata do urso Panda, espécie ameaçada de extinção. O autor explana que existem, na China, apenas 750 desses bichos, sendo 52% fêmeas. Pede, dessa forma, para supor que esses Pandas comecem a morrer e que, dos animais restantes, apenas 25% fossem fêmeas. A partir disso, questiona a quantidade de machos e, também, de fêmeas que morreram. Tal questão usa a mesma ideia do problema anterior e, portanto, requer uma reformulação que leve os alunos a pensarem sobre os motivos da extinção desses animais e o que fazer para salvá-los. Por exemplo, poderia ser perguntado quanto tempo levaria para que fosse atingida uma população de 10.000 Pandas, se essa crescesse 1% ao ano.

A questão 25 é sobre juros compostos, mas o assunto não foi apresentado, ainda, no livro. Logo, é indicada a mudança dessa questão para a seção adequada.

4.2 Juros

O autor incia a seção com o seguinte problema: a importância de $R\$ 600,00$ é aplicada numa instituição financeira à taxa de 6% ao mês, durante 3 meses. Qual o montante após esse tempo? Tal abordagem é vista como pertinente, sobretudo, por ser um problema encontrado no cotidiano.

Após o exemplo apresentado, o autor introduz o conceito de juros, e divide a sua classificação em simples e compostos. Contudo, quando vai definir juros simples, por meio da fala "Nos juros simples os juros só serão acrescentados ao capital inicialmente aplicado após o término da aplicação", comete um grave erro. Nesse aspecto, a definição correta seria: nos juros simples, os juros a cada período são calculados sempre sobre o capital inicial.

Dessa forma, os juros seriam calculados ao final de cada mês e não ao final da aplicação que é de 3 meses.

Posteriormente, segue-se a definição de juros compostos, que está bem explanada. Em seguida, abre a seção de juros simples.

4.2.1 Juros Simples

O autor começa a seção retomando o exemplo apresentado no início do capítulo. Infelizmente, a maneira que ele mostra o cálculo dos juros amplia a confusão em torno do conceito de juros simples. Observe como o exemplo é exposto:

1. após o primeiro período, os juros serão: $0,06 \times R\$\ 600,00 = R\$\ 36,00$
2. após o segundo período, os juros serão: $R\$\ 36,00 + R\$\ 36,00 = R\$\ 72,00$;
3. após o terceiro período, os juros serão: $R\$\ 72,00 + R\$\ 36,00 = R\$\ 108,00$.

O autor faz uma celeuma entre juros simples e acumulados, prejudicando a assimilação do assunto pelo alunado. Além de, anteriormente, ter definido, de forma equivocada, o conceito de juros simples. Por fim, é notório que a seção em questão precisa ser reescrita, com a definição correta e com a melhor organização do exemplo dado.

A seguir, há a dedução da fórmula de juros simples, à qual recomenda-se acrescentar uma etapa. Veja:

1. após o primeiro período, o total de juros será: $C \times i$.
2. após o segundo período, o total de juros será: $C \times i + C \times i$.
3. após o terceiro período, o total de juros será: $C \times i + C \times i + C \times i$.
4. após o t-ésimo período, o total de juros será: $C \times i + C \times i + C \times i + ... + C \times i + C \times i + C \times i$, em que temos t parcelas iguais a $C \times i$.

Assim, segundo o autor, a fórmula que fornece o total de juros simples é:

$$J = C \times i \times t.$$

Sugere-se acrescentar uma etapa depois do passo 4, para melhor entendimento do alunado, que seria;

Colocando a expressão comum $C \times i$ em evidência, teria-se:

$C \times i(1 + 1 + ... + 1)$, com t parcelas igual a 1, portanto: $C \times i \times t$.

Em seguida, o autor informa a fórmula do montante final, que seria dado por: $M = C + J$.

O autor não substitui o J pela seu equivalente $C \times i \times t$, passando a fórmula do montante para: $M = C + C \times i \times t$, que, colocando C em evidência, teria-se:

$$M = C(1 + i \times t).$$

Tem-se, então, o primeiro exemplo desta seção. Nele, uma pessoa aplica a terça parte do seu capital a 5% ao mês, a quarta parte a 8% ao mês e o restante a 6% ao mês. No fim do mês recebe $R\$ \ 1.480,00$ de rendimentos, solicitando, por fim, o cálculo do capital inicial. Considera-se esse um exemplo já bem mais elaborado, mas que poderia ter sido mais bem explicado, já que, no exemplo, o capital inicial é investido em várias aplicações, que rendem juros diversos. Teria sido mais esclarecedor se o autor tivesse explicado ao aluno um pouco das aplicações financeiras, que podem apresentar rendimentos e riscos distintos. Além disso, a resolução do autor não utiliza os conceitos anteriores e, por isso, se torna um pouco confusa, não facilitando a compreensão do aluno.

É indicada a seguinte resposta para o exemplo proposto: $J = C \times i \times t$, mas, nesse exemplo, $t = 1$, assim tem-se:

$$J = C \times i \text{ (I)}$$

Em que C foi dividido em três aplicações dos seguintes valores:

1. a terça parte, ou seja, $C/3$;
2. a quarta parte, ou seja, $C/4$;
3. e o restante ou seja, $(5 \times C)/12$.

Portanto, tem-se que $C = C/3 + C/4 + (5 \times C)/12$. Substituindo esse resultado em I, a seguir:

$$J = (\tfrac{C}{3} \times i_1 + \tfrac{C}{4} \times i_2 + \tfrac{5\times C}{12} \times i_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1480 = (\tfrac{C}{3} \times 0,05 + \tfrac{C}{4} \times 0,08 + \tfrac{5\times C}{12} \times 0,06) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = R\$ \ 24.000,00.$$

A seguir, tem-se o segundo exemplo, que pede para determinar em quanto tempo um capital quadruplicará a juros simples, de 10% ao mês. Está, portanto, em consonância com a realidade prática, visto que o aluno terá que perceber que os juros, nesse caso, é igual a $3 \times C$. Uma vez que o capital quadruplicou, tem-se que ficou $4 \times C$, em que: C é o capital inicial e $3 \times C$ os juros. Logo, substitui-se na fórmula: $J = C \times i \times n$, com $J = 3 \times C$.

A seguir, há a continuação dos exercícios propostos, do exercício 26 ao 32.

As questões 26, 27, 29 e 30 são aplicações diretas da fórmula de juros simples. Na questão 26 é pedido para que se calcule os juros simples de uma aplicação, sendo fornecidos o valor, prazo e os juros da mesma. A questão 27, solicita que se encontre o valor da taxa, sendo fornecidas as outras variáveis. Já na questão 29, pergunta-se o tempo de uma aplicação, sendo fornecidas as outras variáveis. Já a questão 30 quer saber o capital inicial, sendo apresentadas as demais variáveis. São questões em que suas soluções são obtidas substituindo os valores fornecidos diretamente na fórmula, tornado-as muito mecânicas, não acrescentando muito para os conhecimentos dos alunos. Portanto, recomenda-se que, apenas, umas dessas questões permaneça na bateria de exercícios.

A questão 28 pede o Montante e dá as outras variáveis. É o uso direto da fórmula. Deveria ser uma questão, também, mais contextualizada.

Nas questões 31 e 32, usa-se o mesmo raciocínio do exemplo 2 para suas resoluções. Aconselha-se, portanto, que só permaneça uma dessas questões.

De acordo com o exposto, indica-se que a maior quantidade das questões não foram bem escolhidas, pois, apenas era necessário usar diretamente a fórmula para suas resoluções, em um processo, puramente, mecânico. Dessa forma, propõe-se questões mais elaboradas, que estejam de acordo com a realidade.

4.2.2 Juros Compostos

Bianchini (1995) apresenta uma boa definição de juros compostos, salientando que tal modalidade de juros é o adotado nas transações em geral. Após isso, vem um exemplo explicativo, seguido pela dedução da fórmula $M = C \times (1+i)^n$, de juros compostos, que está clara e de fácil entendimento.

Posteriormente à dedução da fórmula, tem-se o exemplo 1, que versa sobre juros da caderneta de poupança. Um bom exemplo, no qual, apenas, o montante dos juros está fora da realidade atual, já que à época da impressão do livro, a inflação era bem mais elevada que hoje. No exemplo, prossegue o questionamento do autor: se a caderneta de poupança rende 10% ao mês, e aplicando uma quantia de $R\$ \ 720,00$ por 4 meses, qual seria o montante após esse período. É uma questão de fácil resolução, já que é necessário, apenas, a aplicação direta da fórmula em sua resolução.

Tem-se, então, a questão 33, que, para sua resolução, foi usado o mesmo raciocínio do exemplo anterior. Essa questão se divide, na realidade, em 4, já que tem as alternativas de a) à d), nas quais é requerido o mesmo raciocínio de resolução. Assim, é recomendada a permanência de, apenas, uma dessas alternativas, o que evita a resolução mecânica pelo alunado.

A seguir, têm-se o exemplo 2 e o exercício 34 . Para ambos, por se tratarem, mais uma vez, da simples aplicação de fórmula, é sugerida a retirada do livro.

Bianchini (1995) apresenta, na sequência, o exemplo 3, que fornece os dados das variáveis da fórmula de juros compostos e, assim, pede para encontrar o valor da variável não fornecida. Por ser um modelo de questão que já foi explorado em questões anteriores, tornando, dessa forma, seu processo de resolução, puramente, mecânico, recomenda-se sua retirada do livro. Com esses mesmos argumentos, é sugerida, também, a retirada do exemplo

4 e dos exercícios 35 e 36 do livro.

A questão 5 é mais um exemplo de aplicação direta da fórmula. Conjectura-se que o objetivo do autor seja mostrar que, para conseguir achar a resposta, é preciso usar Logaritmos, assunto visto em capítulos anteriores. O conteúdo de Matemática Financeira é riquíssimo em questões que têm relação direta com a realidade. Desse modo, não é coerente a repetição de exercícios cujas resoluções sejam alcançadas através de mera substituição em fórmulas. Logo, tanto a questão 5, quanto o exercício 37, semelhantes, têm como recomendação serem retirados do livro.

Tem-se, na sequência, um quadro denominado "Relembrando conceitos", que, apresenta, novamente, as fórmulas de juros simples e compostos. Aconselha-se que, nesse quadro, fossem introduzidas as definições de juros simples e compostos, consideradas de maior relevância para o entendimento do assunto exposto.

Tem-se, então, uma bateria final de exercícios. Inicialmente, com os problemas complementares, que vão da questão 38 a 51.

Os problemas 38 e 43 são uma repetição das questões 1 e 2, já comentadas.

A questão 39 é uma variação do problema 38, inadequado, e, portanto, deveria ser retirada do livro.

A questão 40 é um problema de Física, no qual a resposta é obtida a partir da seguinte fórmula:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta T}.$$

Considera-se que as questões 41 e 42 estão em conformidade com o sugerido pelas atuais normas do ensino básico, já que falam de remarcações sucessivas de uma mercadoria e pedem para saber, no fim, o percentual total de reajuste dessa mercadoria. Entretanto, dada à semelhança de raciocínio, é recomendada a permanência de apenas uma dessas questões.

A questão 44 é o modelo de problema que deveria ser mais explorado em Matemática Financeira: é preciso que escolhas sejam feitas de acordo com as opções fornecidas. Nesse problema, é questionado o melhor investimento para $R\$\ 500.000,00$, com a taxa de aplicação constante, sendo dadas duas opções de investimentos:

1. Em que o capital fica aplicado por 32 dias, sendo resgatado, no final da aplicação, $R\$\ 700.000,00$;

2. Em que o capital fica aplicado por 40 dias, sendo resgatado, no final da aplicação, $R\$\ 740.000,00$.

A questão 45 tem como mérito levar o estudante a perceber, com mais clareza, a diferença prática entre juros simples e compostos.

A questão 46 está totalmente alinhada às novas diretrizes da educação, já que fala de uma promoção que houve e, em seguida, pede para que o cliente realize os cálculos para descobrir o real desconto oferecido nessa promoção. Transcreve-se, abaixo, a referida questão:

(Faap -SP) Uma certa loja faz a seguinte promoção: "Compre sua televisão hoje por $R\$ \ 142.805,00$ e nós lhe devolveremos o dinheiro daqui a 4 meses". Se a taxa de inflação é de 30% ao mês, qual o desconto que está sendo oferecido?

Por sua vez, deve-se frisar que, nesse problema, o assunto explorado, que é desconto, não foi apresentado no livro.

A questão 47 é considerada exemplar, já que usa tabela e um tipo de sua aplicação na realidade, que é a tabela de imposto de renda. Mesmo assim, nesse caso, é sugerida ainda a incorporação de uma explicação a respeito do funcionamento dessa tabela, por ser de uso incomum e esporádico. Para tanto, uma sugestão seria a de apresentar, como exemplo-base, uma tabela, com suas corretas instruções de funcionamento e, a seguir, pedir, ao aluno, a resolução de problemas a ela associados.

A questão 48 também está de acordo com as modernas normas que regem o ensino, já que trata do IPMF, que não mais existe, apesar de terem propostas para retorná-lo à ativa. Quando em funcionamento, tratava-se de um imposto de $0,25\%$ sobre qualquer movimentação financeira efetuada em conta-corrente.

A questão 49 é semelhante ao problema 23 e, portanto, recomenda-se sua retirada do livro.

A questão 50 é considerada de difícil entendimento. A seguir, esse problema é enunciado e respondido:

A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a $R\$ \ 2.000,00$. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo.

Essa questão é resolvida a partir de um sistema de duas equações e de duas incógnitas, com X e Y correspondendo, respectivamente, aos valores de venda e de custo da mercadoria.

Monta-se, então, o sistema de equações. Tem-se no enunciado que o preço de venda (X) menos o preço de custo (Y) da mercadoria é igual a 2.000. Assim, foi formada a equação (I).

Fala, também, que, se a mercadoria for vendida com desconto de 10%, portanto a $0,9X$, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Desse modo, a mercadoria foi vendida por $1,2Y$. Assim, tem-se que $0,9X = 1,2Y$, logo $0,9X - 1,2Y = 0$ (II).

$$\begin{cases} \text{X - Y = 2000 (I)} \\ \text{0,9X - 1,2Y = 0 (II).} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontra-se: $X = 8.000$ e $Y = 6000$.

A questão foi considerada mais adequada para Olimpíadas de Matemática. Sugere-se, portanto, que seja inserida em uma seção à parte, de questões olímpicas ou problemas de aprofundamento.

O problema 51 aborda a escolha em pagar o IPVA à vista ou a prazo, de acordo com os dados oferecidos pela questão. Logo, está em consonância com a realidade e leva o aluno a fazer as melhores escolhas de acordo com as opções disponíveis.

Por fim, tem-se a seção testes, que é a continuação dos problemas propostos, indo da questão 52 a 65, sendo questões de múltiplas escolhas retiradas dos mais diversos vestibulares do país.

A questão 52 é recomendada porque, além de ter uma tabela, os dados são comumente usados pela disciplina de Geografia, sendo, portanto, interdisciplinar e colocando à tona o problema da evasão escolar.

A questão 53 está de acordo com as normas atuais da educação. Trata de um negociante que recebeu uma encomenda de $4,05$ toneladas de café torrado. Então, pede para supor que o café em grão perde 19% de seu peso na torrefação. A partir do exposto, pergunta quantas toneladas de café em grão são necessárias para que o negociante atenda exatamente à encomenda.

A questão 54 deveria ser retirada da bateria de testes, por ser um problema sem aplicabilidade prática. Desse modo, poderia ser explorada na seção de questões olímpicas ou de aprofundamento.

É valorizada a questão de número 55, cujo objetivo é o de descobrir a média de crescimento de uma empresa ao longo de um período informado, sendo dados os valores fabricados pela empresa em duas datas.

Recomenda-se retirar as questões 56 e 59 da bateria de testes, pois, além de serem problemas sem aplicabilidade prática, não deveriam estar na seção de Matemática Financeira, já que suas resoluções não requerem tal assunto. '

A questão 57, também, é considerada adequada. Nela, é fornecida uma razão entre homens e mulheres, a partir da qual é pedida a porcentagem de mulheres inscritas num vestibular. Ressalva-se que essa questão deveria ficar em uma seção separada, de questões olímpicas ou de aprofundamento.

A questão 58 usa tabela e mostra a remarcação de preços da sexta básica de forma sucessiva, sendo um exemplo prático do cálculo de juros acumulados.

A questão 60 é recomendada, já que envolve opções de compra e, portanto, tem grande utilidade prática. Entretanto, infelizmente, foi exigido, apenas, descobrir um preço. Seria mais interessante, nesse aspecto, perguntar a opção mais vantajosa, monetariamente, para o cliente.

A Questão 61 serve para a compreensão, por exemplo, do mercado da Bolsa de Valores, na qual uma desvalorização de 20%, necessita, para que exista a recuperação do dinheiro investido, de uma valorização maior que os 20% de desvalorização, já que o percentual de valorização é aplicado sobre um montante menor que o valor original. No mesmo raciocínio, se o dinheiro render 20% e depois desvalorizar 20%, terá uma quantia menor que a inicial. Sugere-se que sejam inseridas no livro essas colocações e, também, um texto esclarecedor, ao alunado, quanto ao funcionamento das Bolsas de Valores, dos seus riscos e oportunidades.

A questão 62 fala que uma loja de departamentos instrui seus vendedores a calcular o preço da mercadoria, pelo cartão de crédito, dividindo o preço à vista por $0,8$. Dessa forma, apresenta as opções em porcentagem e questiona quanto o comprador deverá pagar pelo produto. Trata-se, portanto, de uma questão bem prática e que deve ser elogiada.

A questão 63 é de grande aplicabilidade prática porque envolve as metas de uma loja, visando, com o desconto oferecido, alavancar as vendas e atingir os objetivos almejados, situação presente em todos os ramos de atividades.

A questão 64, por envolver a pura aplicação de cálculos matemáticos, é recomendada que esteja em uma seção de questões olímpicas ou de aprofundamento.

Finalmente, tem-se a questão 65, recomendada, já que aborda o uso do cartão de crédito e, portanto, aborda um conhecimento que precisa ser repassado aos brasileiros. Mesmo assim, ainda são sugeridos alguns ajustes para que consiga transmitir, com clareza, ao alunado, a desvantagem de pagar o mínimo da fatura em um cartão de crédito. Ademais, seria benéfico o acréscimo de textos informativos sobre esse tema, já que estar com dívidas no cartão de crédito é um problema bem comum no Brasil.

Capítulo 5

Análise do Livro Matemática: Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce et. al.

No livro de Iezzi (2010), o assunto Matemática Financeira está no livro 1, adotado nos primeiros anos do Ensino Médio. Esse livro tem início com conjuntos e funções. Na sequência, têm-se os logaritmos e as progressões. Por fim, é abordado o assunto de Matemática Financeira. Com relação à tal sequência, considera-se ser a mais adequada, pois, sabe-se que a Matemática Financeira está bem ligada às Funções Afins, às Funções Exponenciais, às Progressões Aritmética e Geométrica, e aos Logaritmos.

5.1 Porcentagem

O livro de Gelson Iezzi começa o capítulo de Matemática Financeira com uma revisão sobre porcentagem, salientando que nela existe, sempre, uma fração com denominador 100. Por isso, são chamadas de razões centesimais, taxas percentuais ou porcentagens.

Segundo o autor, as porcentagens podem ser expressas de duas maneiras: em forma de fração com denominador 100 ou na forma decimal(dividindo-se o numerador pelo denominador). Veja alguns exemplos:

1. $30\% = \frac{30}{100} = 0,30$;
2. $4\% = \frac{4}{100} = 0,04$

O autor, então, apresenta 3 exemplos. No primeiro, tem-se que em um lote de 50 lâmpadas, 13 apresentaram defeito. O autor pede, então, a razão entre o número de lâmpadas defeituosas pelo total de lâmpadas. O autor responde deixando o denominador sendo 100, veja:

$$\frac{13}{50} = \frac{26}{100} = 26\%$$

Tal forma de resolução é apontada como satisfatória para o problema em questão, por ser de fácil entendimento e prática, principalmente quando o denominador é facilmente transformado para 100, como no exemplo anterior, que é necessário apenas multiplicar por 2 (obviamente, o numerador foi multiplicado pelo mesmo número).

Outra forma, não mencionada pelo autor, seria a de efetuar a divisão de $\frac{13}{50} = 0,26$, ou seja, 26%.

Recomendam-se questões no estilo desse exemplo, já que há grandes chances de serem encontrados problemas semelhantes para serem resolvidos no próprio ambiente de trabalho.

No exemplo 2, o autor quer saber o número de reprovados em um exame para se conseguir a habilitação, sabendo-se que a taxa i de reprovação foi de 15% num total de 380 participantes.

O autor resolve tal exemplo usando proporção, mas não explica o procedimento em si. Como trata-se de uma seção de revisão, é sugerido que Iezzi mencione o conceito usado. Ademais, poderia, ao menos, mencionar que 15 e 100 são proporcionais a X e 380. Logo:

$$\frac{15}{100} = \frac{X}{380} \Rightarrow X = 57 \text{ reprovados.}$$

O autor forneceu uma segunda maneira de resolver o mesmo exemplo, através do cálculo direto de 15% de 380, ou seja:

$$\frac{15}{100} \times 380 = 57 \text{ reprovados.}$$

O exemplo 3 é semelhante ao 2. Dessa forma, sugere-se a sua retirada do livro. Tem-se, então, uma bateria de exercícios do 1 ao 12.

A primeira questão é vista como dispensável e, portanto, é sugerida a sua retirada do livro, já que pede apenas para calcular a porcentagem de uma quantidade.

A questão 2 versa sobre um tema recorrente no cotidiano, pois muitos dos empregos, hoje em dia, tem esse modelo de salário em que o trabalhador recebe um valor fixo e tem um valor variável de acordo com suas vendas. Questões desse tipo recomenda-se fortemente, já que prepara o aluno pra vida e para seu trabalho. Essa questão, explora, também, o que foi pedido no exercício 1, mas contextualizado, como é recomendado pelas diretrizes curriculares nacionais. Na questão fala de um vendedor que recebe um salário fixo de $R\$ \ 250,00$ mais 4% sobre o total das vendas no mês que foram de $R\$ \ 15.000,00$ e pede para que se calcule o salário do vendedor.

A questão 3 recomenda-se que seja retirada do livro. É um exercício semelhante ao 1. Aconselha-se problematizar as questões, ou seja, que não se tenha exercícios de cálculo puro.

Sugere-se que a questão 4 seja reformulada, tornando-a mais de acordo com o que necessita-se no dia-a-dia. No lugar de se querer saber o salário de uma pessoa, sabendo-se em que ela gastou seus proventos, já que sabe-se, obviamente, nosso salário. A questão deveria falar quanto a pessoa ganha, e elencar seus gastos de acordo com os tipos de despesas, por exemplo, teríamos: gastos com alimentação, lazer, saúde, etc. A questão, então, poderia pedir a porcentagem do salário que ainda não foi gasto. Com esse dado, informar que os economistas sugerem que se guarde 20% do salário, e, a partir disso, pedir para o aluno sugerir meios para que isso fosse possível.

Aconselha-se que o autor coloque a questão 5 em uma seção de exercícios de aprofundamento, para aqueles alunos que desejem espontaneamente resolvê-la, já que tem-se um exemplo mais adequado a preparação do aluno para uma olimpíada de Matemática.

Recomenda-se que a questão 6 seja remodelada. Por exemplo, poderia ser algo como: Uma mistura de 120 litros continha apenas álcool e gasolina, sendo 70% de gasolina. O governo liberou que a gasolina poderia ter até 40% de álcool, sabendo disso, o dono do posto resolveu colocar álcool nessa mistura para que passasse a ter 40% de álcool. Quanto de álcool é necessário colocar a mais na mistura ? Veja uma forma de resolver essa questão:

$$\frac{36+X}{120+X} = \frac{40}{100} \Rightarrow 40 \times 120 + 40 \times X = 100 \times 36 + 100 \times X \Rightarrow 48 + 0,4X = 36 + X \Rightarrow$$
$$0,6X = 12 \Rightarrow X = 20 \text{ litros.}$$

A questão 7 é considerada um problema que reflete a realidade prática, já que explora a interpretação de um gráfico.

A questão 8 deve ser remanejada para a seção de aumentos e descontos, já que pede o salário após o aumento de $5,4\%$.

Sugere-se que a questão 9 seja retirada do livro. Com a sugerida modificação da questão 6, tem-se que essas duas questões passam a ter o mesmo raciocínio, sendo que a questão 6 um problema prático, da vida cotidiana, do trabalho.

Considera-se o problema 10 de acordo com os parâmetros curriculares nacionais, já que existem muitos dados na forma de proporção no cotidiano e saber tratá-los, além de interpretá-los, é muito importante. No exemplo 2, há um cálculo usando proporção.

Recomenda-se que a questão 11 seja remanejada para uma seção de problemas de aprofundamento, direcionada aos alunos que pretendem se aprofundar no assunto ou se preparar para Olimpíadas de Matemática.

A questão 12 versa sobre arremessos no basquete, fornecendo um objetivo de acertos na forma percentual. Muitos treinos, nos esportes, têm metas e essas são em porcentagens. Por isso, questões desse tipo são recomendadas.

5.2 Aumentos e Descontos

Iezzi (2010) começa a seção com um exemplo, método considerado adequado ao aprendizado. Sugere-se, apenas, uma mudança em uma palavra que o autor usou. Veja:

> “Certa loja vende uma máquina de lavar roupas por $R\$$ $750,00$. Se a loja **fizer** um aumento de 6% no seus preços, quanto a máquina passará a custar?".

Sugere-se a troca da palavra "fizer"por "aplicar"ou, então, que o autor reformule a frase. Poderia ficar: se a loja aumentar em 6% seus preços, quanto a máquina passará a custar?

Também é indicada a troca da palavra "preferem"na frase seguinte:

> “Dado o elevado custo de alguns eletrodomésticos, muitas pessoas preferem o pagamento parcelado".

Indaga-se o seguinte: será que as pessoas preferem mesmo o pagamento parcelado ou foi a opção possível naquele momento? O assunto Matemática Financeira tem como uma de suas funções a de preparar as pessoas para fazerem as melhores escolhas, financeiramente. Portanto, não é conveniente afirmar que as pessoas preferem o pagamento parcelado, por exemplo. Desse modo, é viável mostrar o quanto, muitas vezes, é vantajoso esperar um pouco mais e comprar à vista. O autor usa a seguinte ideia para aumentos e descontos.

1. Se o aumento for de $i\%$, multiplicamos o preço original por $i+\frac{i}{100}$;
2. Se o desconto for de $i\%$ multiplicamos o preço original por $i-\frac{i}{100}$.

Em seguida, o autor apresenta alguns exemplos. O primeiro é sobre um aumento de 20%. Dessa forma, tem-se $i=0,2$, logo, $1+i=1,2$. Assim, deve-se multiplicar o preço original por $1,2$. No caso de um desconto de 30%, multiplica-se o preço original por $1-\frac{30}{100}=0,7$.

5.3 Variação Percentual

Nessa seção Iezzi (2010) apresenta a fórmula:

$$P=\frac{V_1-V_0}{V_0}=\frac{V_1}{V_0}-1.$$

A qual pode ser usada para achar a variação percentual de um produto, em que:

1. V_0 é o valor inicial de um produto;
2. V_1 é o valor desse produto em uma data futura;
3. P é a variação percentual do preço deste produto no período considerado.

Considera-se que esta seção deveria ser retirada do livro já que esse assunto está incluso em juros e quanto mais fórmulas são fornecidas, mais complicado o assunto parecerá para o aluno, e consequentemente, possivelmente, o desestimulando.

Tem-se, então, alguns exercícios resolvidos. Já que sugere-se a retirada dessa seção do livro, seus exemplos podem ser realocados para a seção de aumentos e descontos.

O exemplo 1 fala que o PIB(Produto Interno Bruto) de um país subiu 3% passando para 412 bilhões. Pede-se então para achar o PIB antes do crescimento. Aconselha-se que se faça exatamente o contrário, dê o PIB antes do crescimento e peça o PIB depois do aumento percentual informado, já que na realidade é o que necessita-se fazer.

Apresenta-se as mesmas recomendações da questão 1 para a questão 2, já que pede o preço original após uma redução. Seria interessante, para que a questão fique de acordo com a realidade prática, que se calcule o novo preço após o desconto.

A questão 3 é um problema que versa sobre aumentos sucessivos. Questões desse estilo estarão em outras seções do livro, portanto, recomenda-se que seja retirado do livro.

Tem-se, então, a continuação dos exercícios, agora do 13 ao 27.

As questões 13 e 14 são semelhantes aos exemplos do livro.

A questão 15 também é para calcular o novo preço de um produto dado um percentual de aumento ou desconto. Essa questão já foi explorada nos exemplos e exercícios 13 e 14.

A questão 16 é semelhante a 14, mas como aborda aumento de condomínio, acha-se necessário a manutenção dessa questão, entretanto, seria interessante adicionar um texto motivador sobre custos de um condomínio, com sugestões de práticas que podem diminuir esses gastos.

A questão 17 diz que um produto teve seu preço reajustado de $R\$ \ 25,00$ para $R\$ \ 32,00$ e quer saber o percentual de reajuste. Aconselha-se uma modificação nessa questão. Veja a seguir a questão sugerida. Um país teve uma inflação de 5% num período de 1 ano. Sabendo disso um cabeleireiro reajusta o valor do corte de cabelo de $R\$ \ 25,00$ para $R\$ \ 32,00$. Então, pergunta se este aumento foi maior, igual ou menor que a inflação oficial?

A questão 18, também, mantendo a sua lógica, sugere-se que seja modificada para que tenha uma aplicabilidade prática mais evidente. Por exemplo, pode-se elaborar esta questão da seguinte forma: Um posto de gasolina, após o anúncio de redução de 10% no preço da gasolina na PETROBRAS, anunciou que seu preço baixaria de $R\$4,00$ para $R\$3,80$. Calcular o percentual dessa redução e pedir para que se compare com a redução percentual da PETROBRAS, sugerindo um debate em sala de aula sobre as possíveis causas da diferença de percentual, caso houver.

A questão 19 trabalha com uma tabela, algo encontrado com frequência nas leituras que faz-se ao longo da vida. Nessa tabela, tem-se a variação do preço de um produto semanalmente, durante 4 semanas. Sugere-se modificar apenas os questionamentos. Ao invés dos itens a), b) e c), recomenda-se apenas um item pedindo a variação do percentual do produto da semana 1 a 4. As outras questões são uma repetição dessa.

As questões 20, 21, 22 e 23 recomenda-se retirar do livro. Uns são problemas já exploradas nos exercícios anteriores, outras não são questões práticas, do cotidiano.

A questão 24 é um problema que recomenda-se fortemente. Fala de um aumento do plano de saúde de 140% devido a mudança de faixa etária e que a cliente procurou o PROCOM que determinou que a seguradora reduzisse a nova mensalidade em 40%, e pede para calcular o aumento que foi aplicado na mensalidade original após a redução exigida pelo PROCOM. Recomenda-se, também, um texto motivador sobre preços dos planos de saúde por faixas etárias. Esse tema é bastante usual e importante, portanto, merece destaque nos livros didáticos.

A questão 25 fornece o valor de uma conta com a cobrança de 10% e que vai ser dividida por três pessoas e pede para que seja calculado o que cada um pagaria caso a conta não cobrasse os 10%. Considera-se uma questão prática. Recomenda-se que também fosse pedido quanto cada um pagaria na conta original e que fosse perguntado ao aluno o que ele acha dessa cobrança. Recomenda-se a introdução de um texto motivador sobre esse tema, algo que depara-se usualmente, notadamente em bares e restaurantes.

A questão 26 versa sobre o comprometimento do salário de um trabalhador devido as prestações de um financiamento imobiliário. Recomenda-se que, para tornar claro aos alunos os motivos das recomendações dos especialistas sobre o máximo que deveríamos comprometer da nossa renda com prestações, que seria de 30%, acrescente-se, também, um texto explicando esses problemas que podem surgir, diariamente, no cotidiano . Considera-se que, da forma como é colocado no texto, que o patamar é de 30%, sem um texto que informe, alerte os motivos desse limite, vai ser só uma questão de cálculo puro, não ficará o ensinamento do quão importante é ter-se um fluxo financeiro controlado e positivo.

A questão 27 versa sobre a escolha entre comprar à vista ou parcelado. Recomenda-se, fortemente, questões do tipo por serem de acordo com as antigas e, mais ainda, as novas diretrizes da educação que é preparar o aluno para sua vida e para o trabalho.

5.4 Juros

Inicialmente, Iezzi (2010) mostra através de exemplos o quanto os juros estão presentes no cotidiano das pessoas, seja em um empréstimo que realizamos, ou em opções de investimento que tem-se em um banco, na compra de um imóvel, ou, também, nas contas de água, luz, etc, que atrasamos.

A seguir, o autor apresenta a definição de termos comumente encontrados quando trata-se de juros. Considera-se, essa sequência apresentada, uma ótima introdução.

5.4.1 Juros Simples

O autor define juros simples e, em seguida, introduz a fórmula $C \times i$ que gera em n períodos juros de:

$$J = C \times i \times n.$$

Considera-se que essa fórmula foi introduzida de forma muito brusca. Aconselha-se que haja um dedução da mesma, facilitando, assim, o entendimento do aluno, evitando que apenas a decore.

Tem-se, então, um exemplo que é a aplicação de juros simples sobre um empréstimo a ser pago em mais de um período, o que não reflete a realidade. Esses empréstimos são efetuados a juros compostos, portanto, recomenda-se que seja substituído. Poderia ter colocado um exemplo em que há um atraso numa conta de energia e pedir para calcular o valor dos juros e multa que será cobrado na próxima fatura.

Em seguida, tem-se os exercícios resolvidos 4, 5 e 6. Os exemplos 4 e 5 são mais adequados para juros compostos e recomenda-se retirar dessa seção. O exemplo 6 é sobre duas opções de pagamento, à vista por $R\$\ 880,00$ ou a prazo sendo pago $R\$\ 450,00$ no ato da compra e $R\$\ 450,00$ um mês após a aquisição do bem em questão, e pede-se para calcular os juros cobrados nesse financiamento. Na resposta o autor usou a fórmula de montante:

$$M = C \times (1 + i \times n).$$

Com:

- $M = 450,00$;
- $C = 430,00$;
- $n = 1$.

Já que foi-se pago $R\$\ 450,00$ no ato da compra, portanto, o financiamento é de $R\$\ 430,00$, o qual é pago com $R\$\ 450,00$.

Substituindo os valores informados na fórmula do montante, tem-se:

$$450,00 = 430,00(1+i) \Rightarrow i = \tfrac{450,00}{430,00} - 1 \Rightarrow i = 4,65\%.$$

Recomenda-se, nessa questão, o uso da fórmula de juros.

$$J = C \times n \times i.$$

Com:

- $J = 20,00$;
- $C = 430,00$;
- $n = 1$.

Substituindo os valores informados na fórmula de juros simples, tem-se:

$$20,00 = 230,00 \times 1 \times i \Rightarrow i = \frac{20,00}{230,00} = 0,0465 \text{ ou } 4,65\%.$$

Tem-se, então, a continuação dos exercícios, das questões 28 a 37.

Recomenda-se retirar as questões 28 a 33, além da 36, do livro, já que são sobre empréstimos ou aplicações em mais de um período, regidos a juros simples, o que não é usual no nosso cotidiano.

A questão 34 é bem parecida com o exercício resolvido 6, o qual já teceu-se comentários.

A questão 35 é sobre opções de pagamento à vista ou parcelado, algo possível e provável que se depare ao longo da vida. Sugere-se, apenas, que seja introduzido um texto esclarecedor, sobre vantagens de se comprar à vista.

A questão 37 é outro problema que considera-se de acordo com as normas atuais da educação. Recomenda-se que tivesse um exemplo de uma questão desse estilo, com imagem de uma das contas a seguir: energia, água, gás, etc.

5.4.2 Juros Compostos

Iezzi (2010) inicia esta seção com um problema a ser resolvido. Descobrir quanto uma pessoa terá em uma caderneta de poupança aos 18 anos de idade, se foi aplicado $R\$ 500,00$ em seu nome ao nascer e que esta poupança rende juros de $0,8\%$ ao mês.

Considera-se a ideia de começar com um problema motivador seja excelente. Mas, infelizmente, o exercícios proposto é um pouco fantasioso ao colocar que os juros da poupança será de $0,8\%$ a.m. durante todo esse período. Além do mais, alerta-se que é necessário explicar ao aluno que não está sendo colocado os efeitos inflacionários sobre o poder futuro de compra nessa questão, ou seja, esse cálculo não se encontra os juros real. Salientando-se que juros real positivo, aumenta o poder de compra, juros real negativo, diminui o poder de compra. Recomenda-se, portanto, que todos os exemplos e exercícios sejam de acordo com a realidade que vivemos, assim prepara-se o aluno para a vida cotidiana e ao trabalho.

Em seguida, o autor vai descrevendo como seria calculado os juros em cada período. Recomenda-se, nesse caso, o uso de um exemplo prático, que torna o entendimento mais fácil.

Tem-se, então, a dedução da fórmula de montante em juros compostos, a qual, recomenda-se uma melhor explicação de cada etapa da sequência proposta, até chegar a fórmula deduzida pelo autor:

$$M_n = C \times (1+i)^n.$$

Tem-se, então, dois exemplos, o 6 e o 7. No exercício 6 o autor resolve de dois modos. O primeiro modo, em que vai calculando os juros passo-a-passo, deveria ter sido utilizado no início do texto, para deixar mais claro a parte teórica. No segundo modo de resolução, foi utilizando a fórmula $M_n = C(1+i)^n$.

O exemplo 7 é a resolução do problema proposto inicialmente, da caderneta de poupança.

Depois tem-se os exercícios resolvidos 7 e 8. Recomenda-se modificar o exemplo 7, para que fique mais de acordo com o que encontra-se no dia-a-dia. Abaixo descreve-se a questão original.

Um investidor aplicou $R\$ \ 10.000,00$ em um fundo de investimento que rende 20% ao ano, a juros compostos. Qual será o tempo mínimo necessário para que o montante dessa aplicação seja $RS \ 60.000,00$?

Recomenda-se a colocação de um objetivo para quem fez a aplicação, como, por exemplo, comprar um carro. Também, recomenda-se o uso do conceito de juros real, em que tem-se os juros descontados da inflação. Portanto, esta questão poderia ser da seguinte forma.

Um investidor, sabendo dos benefícios da compra à vista, pretende aplicar uma quantia de $R\$ \ 60.000,00$ em um fundo de investimento que lhe fornece juros reais de 6% ao ano. Este investidor pretende comprar um automóvel que custa $R\$ \ 100.000,00$. Sabendo-se que à vista esse automóvel tem um desconto de 10%, em quanto tempo, em anos, esta pessoa teria a quantia para comprar esse bem ?

O exemplo 8 é um problema adequado para perceber que, dependendo dos dados fornecidos na questão, pode-se encontrar qualquer variável da fórmula:

$$M_n = C(1+i)^n.$$

No caso, são fornecidos o montante, período de capitalização e o capital inicial, pedindo-se, em seguida, que se encontre a taxa de juros.

5.4.3 Juros Compostos com taxa de juros variável

Iezzi (2010) fala que, muitas vezes, temos taxas de juros variáveis, mensalmente. Veja a seguir:

> "Quando isso ocorre, pode-se calcular os montantes mês a mês, lembrando que o princípio de capitalização acumulado é o mesmo".

Tem-se, então, o exemplo 8 em que fala da valorização de um lote padrão de ações de uma empresa, que inicialmente tem seu valor em $R\$ \ 80,00$. Tendo aumentos sucessivos de 20% e 30% por dois meses seguidos. Pede-se, então, para calcular o valor final do lote de ações.

O autor resolve este problema da seguinte forma:

1. No final do primeiro período, o lote passará a valer $80 + 30\%$ de $80 = 80 + 0,3 \times 80 = 80 + 24 = 104$ reais.

2. No final do segundo período, com valorização de 20%, o lote passará a valer $104 + 20\%$ de $104 = 104 + 20,8 = 124,80$ reais.

O autor, então, pede para que se observe que o valor do lote no final de janeiro é $1,3 \times 80$, e o valor do lote no final de fevereiro é $1,2 \times 1,3 \times 80$.

Recomenda-se que o autor seja mais claro nesta seção. Inicialmente ele só fala de se calcular os montantes mês-a-mês e é assim que o faz no exemplo.

Considera-se a maneira apresentada por Dante (2014) na observação para resolver o problema de juros compostos com taxas de juros variáveis muito mais simples e direta.

Dante (2014) usa o fator acumulado para resolver essas questões. $F_{acumulado} = f_1 \times f_2 \times f_3 \times f_4 ...$, Onde:

- f_1 é a taxa de juros do período 1;
- f_2 é a taxa de juros do período 2;
- f_3 é a taxa de juros do período 3;
- f_4 é a taxa de juros do período 4 e assim por diante.

Considera-se essa forma de explicação bem mais recomendada, por ser de fácil entendimento.

Exemplo: Um lote de ações valorizou 5%, 3% e 6% em 3 meses consecutivos. Qual a valorização total, desse lote de ações, durante esses 3 meses?

Resolução: Usando a fórmula de fator acumulado, tem-se:

$$F_{acumulado} = f_1 \times f_2 \times f_3$$

Com:

- $f_1 = 1,05$;
- $f_2 = 1,03$;
- $f_3 = 1,06$.

Logo:

$$F_{acumulado} = 1,05 \times 1,03 \times 1,06 \Rightarrow F_{acumulado} = 1,146.$$

Portanto, a valorização, nos três meses, foi de $14,6\%$.

Tem-se, então, a continuação dos exercícios do 38 ao 49. O exercício 38 pede os juros e o montante, dados o capital, a taxa de juros e o prazo. Na letra b) desse exercício, o autor coloca a taxa de juros em meses e o prazo em ano. O autor não ressaltou ao longo do texto que é obrigatório ter os períodos expressos na mesma unidade, ou seja, se uma variável estiver em mês e a outra em ano, por exemplo, deve-se passar uma delas para a base da outra, de modo que as duas variáveis estejam na mesma base. Neste caso, ou passa-se a variável que está em mês para ano ou a outra que está em ano para mês, de forma que ambas estejam ou em ano ou em mês.

Recomenda-se a questão 39 por apresentar um problema distinto dos anteriores, em que pede-se para calcular o montante de uma aplicação usando duas taxas de juros diferentes. Uma de 1% a.m. e outra de 2% a.m. Ótima questão para perceber-se que tem-se um montante bem diferente no final do prazo solicitado.

Calculando, inicialmente, usando a taxa de 1% ao mês. O valor aplicado é de $R\$\ 480,00$ e o prazo é de 12 meses.

$$M_1 = 480,00 \times (1+0,01)^{12} \Rightarrow M_1 = 540,88.$$

Usando, agora, a taxa de juros de 2% ao mês, mantendo os mesmos valores para as outras variáveis, tem-se:

$$M_2 = 480,00(1+0,02)^{12} \Rightarrow M_2 = 608,76.$$

Recomenda-se que este problema seja remanejado para os exemplos, tendo como finalidade, a sugestão de se incentivar um debate, em sala de aula, sobre a diferença de montantes ao final de um ano, em que tem-se a diferença percentual de apenas 1%, entre uma aplicação e outra.

Além disso, sugere-se introduzir um texto explicativo, alertando que nos financiamentos imobiliários, em que os prazos são de muitos anos, em geral, 30 anos, tem-se que uma pequena diferença nas taxas de juros geram um valor bem maior a ser pago. A partir disso, aconselhar os leitores a procurarem vários bancos para que possam conseguir a menor taxa possível, fazendo com que haja uma economia muito boa em pagamento de juros ao longo do financiamento, pela diminuição ao máximo da taxa de juros desse empréstimo, mesmo que esta diminuição de juros seja em um percentual pequeno.

Recomenda-se retirar as questões 40, 41, 42, 43 e 44 do livro texto, já que suas resoluções repetem os raciocínios das questões anteriores.

A questão 45 problematiza sobre a compra de ações em dólares. Considera-se que o autor deveria ter abordado a taxa de câmbio, um ótimo assunto a ser explorado e que, de uma maneira ou outra, afeta a vida de todos, seja no aumento do preço de produtos importados, a exemplo do trigo, que afeta o preço do pão, etc, quanto nos preços dos produtos exportados.

Recomenda-se que seja introduzido um texto informativo, que esclareça o quanto a variação da taxa de câmbio afeta a vida de todos.

Sugere-se, também, a reformulação dessa questão. Por exemplo, poder-se-ia introduzir o seguinte problema: Se o investidor, ao comprar os 1000 dólares, e se cada dólar valesse 3 reais e após 3 meses estivesse em 4 reais. Então, pede-se para calcular o valor que foi investido em reais e quanto é o montante após 3 meses também em reais. Encontrar, além disso, os juros reais obtidos pelo investidor, considerando apenas o valor inicial aplicado e o valor recebido após o término da aplicação.

A questão 46 é um problema já explorado em questões anteriores, portanto, recomenda-se que seja retirada do livro.

A questão 47 fala de desvalorização de imóveis, tema importante, por isso considera-se essa uma ótima questão. Recomenda-se a inserção de um texto motivador sobre as vantagens e desvantagens de se comprar um imóvel. A resposta à essa pergunta está relacionada as taxas de juros. Portanto, um texto sobre esse tema seria muito adequado e relevante.

A questão 48 é sobre juros compostos com taxas de juros variáveis que é bem mais facilmente resolvido com o método de Dante (2014, que já foi comentado ao longo do texto.

A questão 49 é do mesmo estilo do problema 48, mas com o diferencial que tem-se, neste caso, aumentos e descontos na mesma questão, o que é importante para o aluno. Uma recomendação é que fosse alertado ao aluno que se, por exemplo, você tem $R\$ \ 100,00$ aplicados em ações e estas se desvalorizam 10%, indo para $R\$ \ 90,00$. Para que suas ações voltem ao patamar de $R\$ \ 100,00$ terão que subir mais que os 10% da desvalorização, já que se subirem 10% irá para $R\$ \ 99,00$. Para retornar ao patamar de $R\$ \ 100,00$, terá que valorizar em: $M = C_0(1+i)^n \Rightarrow 100,00 = 90,00(1+i) \Rightarrow i = 0,111...$, ou seja, as ações teriam que se valorizar em $11,111...\%$.

Tem-se, então, um texto sobre contas à vista ou a prazo, em que o autor fornece dois exemplos, e, em seguida, pede para verificar a melhor opção de aquisição de um bem.

No livro de Morgado (2015) tem-se uma ótima forma de resolver estes problemas, que é comparar os montantes em uma mesma data.

No exemplo do livro tem-se duas opções: Uma à vista no valor de $R\$ \ 800,00$ e a outra à prazo em 4 parcelas de $R\$ \ 210,00$, sendo a primeira um mês após a compra, sendo informado que o dinheiro rende $0,7\%$ ao mês. Resolve-se esta questão usando a ideia de Morgado (2015) trazendo o montante que é pago nas 4 prestações para o tempo presente, e compara-se esse montante com o valor do pagamento à vista. Assim, o menor valor entre as opções disponíveis, é a melhor opção. Veja a seguir o cáculo do problema descrito:

$$M_0 = \frac{210,00}{1+0,07} + \frac{210,00}{(1+0,07)^2} + \frac{210,00}{(1+0,07)^3}.$$

Resolvendo, encontra-se que:

$$M_0 = 826,22.$$

Ou seja, comprando a prazo vê-se que gastar-se-ia $R\$ 26,22$ a mais. Portanto, é mais vantajoso a compra à vista. Recomenda-se, portanto, manter o texto, modificando apenas a forma da resolução já que este método de morgado é bem melhor que o apresentado por Iezzi (2010) que é muito trabalhoso, levando, possivelmente, a desmotivação do aluno.

5.5 Juros e Funções

Iezzi (2010), nesta seção, faz uma ótima comparação entre juros simples e compostos, em que relaciona juros simples a função afim e a progressão aritmética e os juros compostos a função exponencial e a progressão geométrica. Usando o mesmo exemplo para os dois regimes, e fazendo uma comparação entre os dois montantes período a período e montando uma tabela para cada exemplo. Após isso, o autor coloca os resultados em um mesmo gráfico para que se possa visualizar a diferença entre os dois regimes de juros. Vê-se que os dois gráficos se interceptam na primeira capitalização.

Recomenda-se que o autor, também, enfatize que para $0 < x < 1$, o montante a juros simples é maior que o a juros compostos.

5.5.1 Compras à vista ou a prazo II

Nesta seção, Iezzi (2010) introduz o conceito de valor atual, o qual recomendou-se na seção Compras à vista ou a prazo I. Imagina-se que a forma como o autor passou este conceito confunde os alunos. Usando o mesmo exemplo do livro sugere-se que o autor use a seguinte ideia de valor atual:

$$V_{atual} = \frac{P_1}{1+i} + \frac{P_2}{(1+i)^2} + \frac{P_3}{(1+i)^3}.$$

Com:

$$P_1 = P_2 = P_3 = 400.$$

Em que $i = 5\%$.

Tem-se, então, a seção exercícios complementares, do exercício 1 ao 44.

A primeira questão diz que um uma liga metálica de ouro e prata de 50g, em que o teor de ouro é 12% e pede para achar a quantidade de prata que se deve retirar dessa liga para que o teor de ouro passe a ser de 15%. Questão que recomenda-se fortemente porque pode-se deparar com algo do tipo dependendo da profissão que vai-se exercer no futuro.

A questão 2 apresenta um texto de uma pesquisa sobre analfabetismo e pede para, de acordo com os dados fornecidos, calcular o número de brasileiros analfabetos absolutos em Matemática entre 15 e 64 anos. Essas questões são muito recomendadas já que em leituras de jornais, revistas, etc sempre encontra-se dados estatísticos, porcentagens e é muito importante entender o que cada dado representa para entender-se os textos.

A questão 3 trata de um processo seletivo, onde são dados as porcentagens de aprovados em cada etapa e pede para calcular a partir desses dados alguns valores. Algo que tem relação direta com o cotidiano, portanto, questão que se enquadra nas diretrizes curriculares nacionais.

Elogia-se a questão 4 já que problematiza algo concreto que ocorreu em uma comunidade, que foi a porcentagem de moradores atingidos por uma doença e a porcentagem daqueles que adoeceram, indo ao óbito. Dessa forma, pede-se para calcular a taxa de mortalidade das pessoas infectadas por essa doença na comunidade.

A questão 5 é da UF-CE e fala do processo da fabricação do pão, no qual há uma evaporação da água e pede-se o percentual de água evaporada durante o processo, dados que 40% do pão é formado por água e que a massa inicialmente tinha 47g e foi reduzida para 35g, sabendo-se que apenas água foi perdida no processo. Questões como essa que o problema reflete algo da nossa realidade é muito recomendado.

A questão 6 tem a mesma ideia do exercício 5, portanto, sugere-se que ele seja retirado do livro.

A questão 7 envolve PIB, renda per capta e metas de governo. Algo bem de acordo com a realidade prática. Primeiro define renda per capta de um país como a razão entre o PIB e a população economicamente ativa. Em seguida, afirma que o governo de um certo país pretende aumentar a renda per capta em 50% no prazo de 20 anos. A partir dessas informações pergunta-se: Se, nesse período, a população economicamente ativa aumentar em 20%, qual deverá ser o acréscimo percentual do PIB ?

Utilizando a definição dada na questão tem-se que:

$$R = \frac{PIB}{P} \ (I).$$

Em que:

- R é a renda;
- PIB é o produto interno bruto do país em questão;
- P é a população desse país.

Tem-se que a renda aumentou 50%, portanto, ficará $1,5R$, a população aumentará nesse período 20%, portanto, ficará em $1,2P$, e seja $X\%$ o quanto aumentará o PIB. Substituindo em (I), tem-se:

$$1,5R = \frac{X \times PIB}{1,2P} \Rightarrow \frac{X}{1,2} = 1,5 \Rightarrow X = 0,8 \text{ ou } 80\%.$$

A questão 8 recomenda-se retirar do livro. Pede que se descubra um valor inicial emprestado fornecendo o valor do quanto foi recebido de juros. Questões desse estilo não são encontradas no nosso dia-a-dia.

A questão 9, apesar de bem elaborada, recomenda-se que seja modificada a pergunta da letra b). Ao invés de pedir os juros simples, que seja pedido juros compostos já que temos um período de capitalização de mais de um mês, o que na prática cotidiana é usado os juros compostos.

Recomenda-se que as questões 10, 11, 16, 18, 21, 25, 28 sejam retiradas dessa seção. Recomenda-se transferi-las para uma seção de questões de aprofundamento, para aqueles alunos que pretendem se aprofundar na Matemática Financeira.

A questão 12 é uma questão prática sobre o valor de um pacote turístico que tem a previsão de ficar mais barato nos próximos 10 anos numa taxa de 2% ao ano. Na letra b) o autor pede para usar a calculadora científica. Recomenda-se que o livro texto coloque exemplos usando a calculadora e mostrando os passos de como resolver esses problemas por meio desse aparelho eletrônico.

Na questão 13 o autor se refere a um grande aumento no preço da tomate, que em 2 meses foi de 62%. Dado que no primeiro mês o aumento registrado foi de 20%, pede, então, o percentual de aumento registrado no segundo mês. Recomenda-se que nesta seção seja introduzido um texto motivador sobre sazonalidade dos produtos agrícolas. Debatendo alternativas para não se adquirir produtos que estão em alta de preços. Algo bem recorrente no cotidiano, em que compra-se quase que diariamente produtos agrícolas para nos alimentarmos.

A questão 14 é, também, uma questão recomendada, já que introduz o conceito de margem de contribuição unitária. Familiarizando os alunos com a parte financeira de uma empresa.

A questão 15 representa algo da realidade prática, que versa sobre dois aumentos sucessivos da gasolina e pede para calcular a porcentagem em que a gasolina deverá ser reduzida para que seu preço volte ao patamar inicial.

Na questão 19 pede-se o tempo em anos para que o dinheiro em uma aplicação, que rende 20% ao ano, seja suficiente para comprar um imóvel que se valoriza a taxa de 8% ao ano. Questões desse tipo recomenda-se fortemente, já que provavelmente nosso alunado se deparará com algo semelhante durante sua vida. Sugeriríamos um texto motivador sobre algo que muitos se perguntam: Deixar o dinheiro aplicado e pagar aluguel ou comprar um imóvel ?

Na questão 20 usa-se o conceito de valor atual para calcular o valor da prestação de uma compra em 2 parcelas, sendo a primeira no ato da aquisição do bem. O valor à vista do produto é de $R\$ \ 102,00$ e a taxa de juros cobrada pela loja é de 4%. A seguir tem-se uma ideia diferente de resolução da do livro:

$$V = P + \frac{P}{1+i} \Rightarrow 102 = P + \frac{P}{1{,}04} \Rightarrow 106{,}08 = 1{,}04P + P \Rightarrow 2{,}04P = 106{,}08 \Rightarrow P = 52{,}00.$$

Onde:

- V é o valor atual;
- P é a prestação.

A questão 22 recomenda-se que seja reformulada para que se adeque a realidade. Ao invés da comissão ser sobre o salário base como se dá na questão, propõe-se que seja sobre o valor das vendas que este vendedor realize. Assim, passa-se a refletir, de forma mais fidedigna, a realidade.

Depara-se comumente com o problema abordado na questão 23 que é a dúvida que tem-se ao ir-se a um posto abastecer o veículo: colocar álcool ou gasolina? Sugere-se duas mudanças nessa questão.

1. Todos os carros, hoje em dia, vêm com um selo que diz quanto ele gasta de álcool e gasolina na cidade e estrada. Então recomenda-se que tivesse nessa questão uma foto desse adesivo para que se possa fazer a opção por gasolina ou álcool de acordo com o preço e com o consumo de cada combustível;

2. Seja acrescentado um texto motivador em que sejam elencadas as vantagens e desvantagens de cada um desses combustíveis.

Na questão 24 tem-se um estudo do BNDES, publicado em um jornal o qual afirma que o setor siderúrgico tinha como meta investir $46,4$ bilhões de reais no período de 2007 a 2011. Esse valor equivale a um aumento de 140% em relação aos valores aplicados no período de 2001 a 2005. Em seguida pede-se que, de acordo com esses dados, calcule-se o total investido pelo setor no período de 2001 a 2005. Nesta questão recomenda-se uma letra b) em que tenha a projeção de inflação nesse período e, então, pedir-se para calcular o aumento real de investimento nesse período.

Recomenda-se, também, um texto que mostre a diferença entre rendimento bruto e real(em que se desconta os impostos e também a taxa inflacionária do período em questão).

Na questão 26 têm-se um problema de aumentos e descontos sucessivos. Recomenda-se a sua retirada do livro, em virtude de já ter-se questões com o mesmo raciocínio em problemas anteriores, evitando que o aluno responda essa questão mecanicamente, sem precisar de novos raciocínios.

Capítulo 6

Análise do livro Matemática(Ensino Médio) de Luiz Roberto Dante

Analisa-se o livro de Dante (2014), volume 3, parte 1, que divide a Matemática Financeira em 6 tópicos, os quais serão comentados ao longo desse capítulo.

Inicialmente, afirma-se que o capítulo referente à Matemática Financeira está adequadamente inserido no volume 3, parte 1, de sua coleção, já que trata-se de um livro do terceiro ano do ensino médio, e, portanto, o assunto é apresentado após a abordagem dos assuntos de Progressão Aritmética(P.A.) e de Progressão Geométrica(P.G.), além de Função Linear, de Função Exponencial e de Logaritmos.

6.1 Situação Inicial

Inicialmente, no livro de Dante, tem-se um panfleto no qual há a oferta de uma tv 42 polegadas, que pode ser comprada por meio de duas formas de pagamentos: à vista por $R\$\ 4000,00$, ou em 2 prestações de $R\$\ 2005,00$, sendo a primeira paga no ato da compra e a segunda 1 mês após a aquisição do bem. Tem-se, então, a seguinte questão: sabendo que é possível a obtenção de juros de 1% ao mês em uma aplicação financeira, qual das alternativas é a mais vantajosa ?

Considera-se, portanto, que o autor apresenta uma ótima introdução, com um problema que reflete a realidade prática. Entretanto, é aconselhado ao autor a introdução da opção de compra no cartão crédito, modalidade de pagamento em ascensão nos dias atuais. Contudo, a falta de um maior conhecimento sobre juros, leva muitos brasileiros a usarem incorretamente essa modalidade de crédito.

6.2 Revisão de Razão e Proporção

Nesta seção, tem-se uma revisão dos conteúdos de razão e proporção. Considera-se que o assunto foi bem explorado, o qual, também, contempla cálculos com porcentagem, algo bem importante para o entendimento da Matemática Financeira.

O autor, também, falou de densidade demográfica, mas cometeu um equívoco quando definiu erroneamente os conceitos de populoso e povoado. Portanto, manter-se-ia o exemplo que está de acordo com a realidade em que vivemos, mas recomenda-se o ajuste nos argumentos apresentados no livro, de tal forma que os conceitos de populoso e povoado sejam corrigidos.

1. Populoso tem relação direta com a população absoluta.

2. Povoado está relacionado à população relativa ou densidade demográfica.

O autor explora, também, o conceito de escala, o que considera-se muito apropriado já que é algo que reflete realidade, em várias situações, como em uma compra de um imóvel na planta, onde tem-se maquetes do empreendimento.

Também, nessa seção, Dante (2014) define razões equivalentes da seguinte forma:

> “Dizemos que duas razões são equivalente se, ao serem escritas na forma irredutível, elas resultam em um mesmo número".

Recomenda-se o uso do conceito de razões equivalentes apresentada por Silva (2010):

> “Duas ou mais frações são equivalentes quando possuem representação numérica diferente, mas expressam quantidades iguais".

Tem-se, então, 3 exemplos. O primeiro é sobre razões equivalentes. A segunda e terceira questões têm o objetivo que passe-se os dados informados para a forma de frações.

Em seguida tem-se uma bateria de testes com 5 questões. Ressalva-se que para a resolução dos problemas 1 e 2, necessita-se do conceito de frações complementares, assunto que não foi revisado no livro.

A questão 3 é sobre escala. Apesar do autor ter expressado a definição de escala, Acha-se que deveria ter sido introduzido um exemplo anterior abordando esse tema, já que é um assunto em que os alunos se confundem muito e, também, por ser algo relevante no nosso cotidiano.

Sugere-se a retirada da questão 4 do livro, por ser algo que não encontramos na realidade. Este tipo de questão pode ser apresentada em uma seção de aprofundamento, no final do capítulo, em que sua resolução ficaria mais restrita a alguns alunos que assim o desejassem.

A questão 5 é um problema que está de acordo com a realidade prática. Além de incentivar o uso da calculadora, que é importante, usa tabela e aborda, também, um assunto de geografia, em que são fornecidos dados de alguns estados como: área, densidade demográfica, tamanho da população e pede-se para que os alunos calculem alguns desses dados que não foram informados, a partir de outros dados fornecidos. Por fim, pergunta qual estado tem a maior população, o que tem a maior área e qual tem a maior densidade demográfica.

6.2.1 Proporção

O autor inicia a seção com um exemplo em que tem-se duas frações equivalentes e logo em seguida vem o conceito de proporções. Considera-se bem didático esse forma de passar o assunto, facilitando, assim, o seu entendimento pelo corpo discente.

Em seguida tem-se algumas propriedades das frações. Acha-se que a propriedade fundamental das proporções já seria suficiente para os alunos, em que Dante (2014) assim a define:

"Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios"

A representação simbólica é:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c.$$

O autor fornece outras proporções, fato que não considera-se relevante para todo o alunado, portanto, aconselha-se que a sua apresentação deveria ser numa seção a parte de aprofundamento no final do capítulo. A seguir tem-se as proporções comentadas.

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então tem-se as seguinte proporções:

1. $\frac{a+b}{b+d} = \frac{a}{b}$;
2. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$;
3. $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$;
4. $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$.

6.3 Grandezas proporcionais

Tem-se, então, os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Segundo Dante (2014) duas grandezas são proporcionais quando, ao multiplicar-se uma delas por um número, a outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo valor.

6.3.1 Grandezas diretamente proporcionais

Dante (2014) apresenta um exemplo e a seguir define grandezas diretamente proporcionais da seguinte forma:

> "Grandezas são diretamente proporcionais se uma das grandezas for multiplicada ou dividida por um número, a outra grandeza também ficará multiplicada ou dividida pelo mesmo número".

Aconselha-se que seja colocado a palavra respectivamente após a palavra ficará, na definição anterior, garantindo, assim, a ordem, já que, em grandezas diretamente proporcionais, se uma grandeza for multiplicada por um número a outra também será, obrigatoriamente, multiplicada pelo mesmo número e se uma grandeza for dividida por um valor, a outra será, necessariamente, dividida pelo mesmo valor.

6.3.2 Grandezas inversamente proporcionais

Em seguida Dante (2014) apresenta um exemplo sobre proporcionalidade inversa, o qual afirma que quanto mais operários são colocados para construir um muro, menor será o tempo para que esse seja construído. Então, o autor define grandezas inversamente proporcionais como segue:

> "As grandezas números de operários e dias trabalhados são inversamente proporcionais, pois, ao multiplicarmos uma das grandezas por um número, a outra grandeza fica dividida por esse número".

Acha-se que Dante (2014) deveria ter apresentado essa definição, seguindo o mesmo raciocínio da definição de grandezas diretamente proporcionais.

Dante (2014) faz uma ressalva importante, o qual afirma que na prática dobrar-se o número de funcionários não é garantia de que o tempo gasto para construir o muro seja dividido por 2. Isso se deve a existência de vários fatores que influenciam na produtividade do trabalhador.

6.3.3 Coeficiente de proporcionalidade

Nesta seção, o autor apresenta os conceitos de números diretamente e inversamente proporcionais de forma bem clara, veja a seguir:

Pode-se, então, dizer que os números reais não nulos a, b, c , d, ... , n são diretamente proporcionais aos números $a^{'}$, $b^{'}$, $c^{'}$, $d^{'}$, ... , $n^{'}$, nessa ordem, se e somente se:

$$\frac{a}{a^{'}} = \frac{b}{b^{'}} = \frac{c}{c^{'}} = \frac{d}{d^{'}} = ... = \frac{n}{n^{'}}$$

Dize-se que os números reais não nulos a, b, c , d, ... , n são inversamente proporcionais aos números reais $a^{'}$, $b^{'}$, $c^{'}$, $d^{'}$, ... , $n^{'}$, nessa ordem, quando são diretamente proporcionais aos números:

$$\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}, \frac{1}{d'}, \dots, \frac{1}{n'}.$$

Ou seja:

$$\frac{a}{\frac{1}{a'}} = \frac{b}{\frac{1}{b'}} = \frac{c}{\frac{1}{c'}} = \frac{d}{\frac{1}{d'}} = \dots = \frac{n}{\frac{1}{n'}} \Rightarrow a \times a' = b \times b' = c \times c' = \dots = n \times n'.$$

Em seguida tem-se os exercícios resolvidos 4, 5 e 6. O exercício 4 é para verificar a proporcionalidade direta dos números 15, 20 e 35 aos números 12, 16 e 21. Um exercício com resolução direta.

O exemplo 5 resolve-se com o uso do mesmo raciocínio apresentado no problema anterior, sendo que, neste caso, já se afirma que os números são proporcionais, dando incógnitas e pedindo para encontrar seus valores. Sugere-se que é suficiente a apresentação de, apenas, um dos dois exemplos. Além disso, aconselha-se que, de preferência, haja um maior refinamento do mesmo tornando-o um problema mais apropriado para a realidade prática.

o exemplo 6 tem o mesmo estilo do 5, sendo que é de proporcionalidade inversa. Reiteramos a sugestão que fizemos no exemplo anterior para esse problema.

6.3.4 Divisão de uma quantia em partes proporcionais

Dante (2014) mostra como fazer esta divisão através de um ótimo exemplo de três sócios que tinham participação diferentes em uma empresa; e mostrou como deve ser repartido o lucro proporcionalmente ao que cada um tem direito.

Acha-se que, com o conteúdo já ministrado até o presente, o aluno já teria condição de resolver esse problema. Além disso, considera-se que a forma como foi resolvido o exercício pelo autor mais confunde que ajuda. Aconselha-se a se encontrar a participação em porcentagem de cada membro na empresa e, a partir dos valores encontrados, multiplicar essa porcentagem pelo lucro, encontrado, assim, a resposta procurada.

A seguir, tem-se dois exercícios que versam sobre repartição de uma herança, a partir das idades dos herdeiros. É um exemplo bem complexo que deveria estar numa seção de aprofundamento, na parte final do livro.

6.4 Regra de três

Segundo Dante (2014), quando a resolução de um problema envolve a comparação de duas ou mais grandezas proporcionais, pode-se usar uma técnica conhecida como regra de três, pois, a partir de três números conhecidos de uma proporção, calcula-se o quarto número.

6.4.1 Regra de três simples

Dante (2014) explica muito bem como se calcular a regra de três simples com dois exemplos práticos, que envolvem ração, vacas e tempo de duração da ração.

6.4.2 Regra de três composta

Dante (2014) apresenta muito bem esse tópico. Inicialmente, o autor fala que quando um problema envolve mais de duas grandezas que, tomadas duas a duas, são direta ou inversamente proporcionais, aplica-se, na resolução, a regra de três composta. A seguir o autor apresenta o seguinte problema: Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 metros de tecido. Pode-se afirmar que, para fazer 12 metros do mesmo tecido, com o dobro de largura, 15 operários, trabalhando 6 horas por dia precisarão de quantos dias para cumprirem essa tarefa?

Tem-se, então, o exercício resolvido 9 que é um exemplo semelhante ao anterior sobre regra de três composta.

Segue-se, então, com uma bateria de exercícios, do 6 ao 17. No exercício 6, pede-se para verificar se os números dados são diretamente, inversamente ou não proporcionais. Exercício semelhante ao exemplo já apresentado no livro.

O exercício 7 é uma variação do 6, já que afirma que os números são diretamente proporcionais, mas fornece apenas alguns dados para que se descubram as incógnitas. Esse exercício deveria ser remanejado para uma seção de aprofundamento, em que apenas uma parte dos alunos o resolveria.

As questões 9, 10 e 11 têm a mesma lógica de resolução. Aconselha-se a permanecer a questão 10, já que envolve um problema que se quer calcular um rendimento de uma aplicação em poupança.

As questões 8, 12, 14 e 15 são problemas de regra de três simples. Aconselha-se a deixar apenas a questão 12, já que é o suficiente para verificar o aprendizado do aluno. A resolução de muitas questões com o mesmo raciocínio torna o aprendizado da matemática algo mecânico, exatamente o que se quer evitar.

A questão 13 é uma variação do exemplo dos sócios, com o diferencial que não se sabe a porcentagem de participação deles na empresa. Aconselha-se que este exercício seja reformulado para que fique mais de acordo com a realidade, onde notoriamente se saberia a participação de cada um no negócio.

A questão 16 é um problema de regra de três composta, em que pede-se para calcular um vazamento em litros, de acordo com os dados fornecidos pela questão. Sugere-se que seja acrescentado um texto motivador sobre desperdício de água, além de que se pedisse para calcular o valor monetário referente a quantidade de água desperdiçada.

A questão 17 é de regra de três composta com 4 grandezas. Recomenda-se manter essa questão para que o aluno perceba que usa a mesma ideia da questão 16, que é com três grandezas.

6.5 Porcentagem

Dante (2014) define porcentagem como uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100 ou qualquer representante equivalente a ela.

O autor fornece, então, exemplos para esclarecer sua definição. Acha-se que ficou bem didático essa sequência.

Em seguida, tem-se o percentual de uma quantia. Dante mostra como calcular uma porcentagem de uma quantia através de exemplos, possivelmente a forma mais simples de se explicar esse assunto e de fácil compreensão.

O que recomenda-se para melhorar este tópico seria que Dante colocasse mais exemplos práticos de acordo com a realidade, substituindo os exercícios de cálculo puro.

No exemplo 3, página 22, por exemplo, o autor pergunta: "A quantia de $R\$ 36,00$ corresponde a quantos por cento de $R\$ 20,00$?"

Tem-se, então, os exercícios resolvidos 10, 11, 12 e 13. O exercício 10 fornece valor do salário de Felipe e diz que o salário de Renato corresponde a 85% desse salário. Em seguida, pede para se encontrar quanto Renato recebe. Aconselha-se fornecer o salário de Felipe e dá um percentual de aumento a esse salário e pedir para calcular quanto ficou o salário de Felipe, após o aumento. Poderia-se, também, aproveitar o exemplo para debater a diferença salarial entre homens e mulheres. Uma sugestão de questão seria: Dado o salário de um executivo e sabendo-se que em média as mulheres ganham 30% a menos que os homens para realizar as mesmas funções e tarefas, quanto seria o salário de uma executiva que trabalhasse na mesma função/cargo do executivo em questão. Também poderia ser acrescentado mais um texto motivador sobre este importante tema da atualidade.

A questão 11 é um problema muito interessante sobre a redução do IPI(Imposto sobre produtos industrializados) que houve em 2012. Segundo o texto, levou a uma queda de até 10% nos preços dos carros. Então, em seguida é fornecida a quantidade de carros vendidos e o aumento percentual de suas vendas em relação ao ano anterior. Acha-se que essa questão pode ser bem mais explorada, com novos dados, como, por exemplo, quanto de impostos o governo deixou de arrecadar com essa redução de IPI, se os preços dos carros caíram na mesma proporção dos impostos, etc.

A questão 12 é uma nota de jornal com alguns dados sobre empreendedorismo. A questão é excelente por ser mais um problema que reflete nossa realidade. Aconselha-se que se faça mais indagações sobre esse problema, aproveitando o máximo de sua riqueza de tema. Por exemplo, poder-se-ia pedir para calcular um preço de um produto com margem de lucro de 10% ou discutir-se o motivo que leva tantos empreendedores a falência. Um dos motivos tem muito a ver com a matemática, mais especificamente, o não aprendizado pelo aluno do assunto Matemática Financeira. Dessa forma, o empreendedor não sabe distinguir o que é lucro e custo do seu negócio. Pela relevância do tema, aconselha-se, também, a introdução de um texto motivador que esclareça melhor a diferença desses dois termos.

Para a questão 13 recomenda-se que o autor a retire do livro ou a modifique, já que fala do lucro que um cambista teve numa venda, mesmo dando desconto. Como o cambismo é uma atividade ilegal no Brasil não recomenda-se essa questão. Além do mais, no exercício, o cambista tem um lucro bem interessante, o que pode incentivar os alunos a praticarem essa atividade considerada criminosa. Essa questão pode ser modificada, trocando o cambista por uma vendedora de cachorro quente, por exemplo, que vende seus sanduíches em um dia de jogo.

Tem-se, então, a continuação dos exercícios, indo do 18 ao 25. A questão 18 recomenda-se ser retirada do livro, já que é uma problema sem conexão com a realidade.

Recomenda-se que a questão 19 seja realocada para a seção de juros.

A questão 20 está de acordo com as modernas leis de diretrizes e bases da educação, já que envolve biologia com dados matemáticos. Além do exposto, temos, também, o uso de intervalos, em que pede para calcula-se um percentual dos extremos do intervalo. Recomenda-se, portanto, fortemente problemas como esse.

A questão 21 é um excelente problema que mostra a mudança da caderneta de poupança a partir de 2012, em que seus rendimentos passam a depender do percentual da taxa SELIC. Para SELIC acima de $8,5\%$ ao ano tem-se seu rendimento de $6\%a.a$ mais a TR(taxa referencial). Abaixo desse valor tem-se um rendimento de 70% da SELIC mais TR, e pede-se para que sejam feitos cálculos dos juros em que a SELIC está acima dos $8,5\%$ e abaixo desse percentual. Incentiva-se, fortemente, questões desse estilo.

A questão 22 é uma questão do ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio), que envolve gráfico e porcentagem. Excelente questão.

A questão 23 deveria estar na seção de desconto.

A questão 24 mostra três ofertas e pergunta:

1. Qual dessas ofertas vale a pena aproveitar? Discuta com seus colegas.

2. Compare a oferta 1 com a 3. Em qual delas é mais vantajoso comprar duas peças?

Inicialmente, sugere-se que fosse acrescentado nessa seção um texto motivador sobre necessidade ou não de se comprar algo, para que não adquira-se algum produto por consumismo. Também sugere-se passar essa questão para a seção de desconto ou juros. Analisando as perguntas apenas focando no valor do desconto, para saber-se qual é o maior, tem-se:

1. O maior desconto percentual é quando se leva mais de 4 peças, tendo um desconto de 50%.

2. Esse item pede para comparar a oferta 1 com a 3. Pede-se que seja remodelada essa questão já que a oferta 1 não tem o desconto com 3 peças. Isso porque a oferta 3 diz que se levar 2 peças a terceira é grátis. Portanto, adquire-se, ao todo, 3 peças.

A questão 25 é uma questão do ENEM, considera-se bem elaborada e de acordo com a realidade. Essa questão alerta sobre o perigo de tabagismo, algo presente na nossa vida e, alertar o alunado sobre os efeitos colaterais do cigarro é muito importante.

Tem-se, então, a seção leitura, que aborda o tema inflação, apresentando seu conceito e, além disso, o autor alerta que esse é um grande problema econômico que tem-se enfrentado ao longo da história do Brasil. O autor apresenta, em seguida, as causas da inflação. Propõe-se que seja introduzido no texto algo sobre a inflação inercial(um dos maiores problemas na época da hiperinflação no país). Sugere-se, também, que sejam apresentados alguns indicadores que medem a inflação no Brasil.

6.6 Fator de atualização

Dante (2014) define fator de atualização da seguinte forma:

> “O fator de atualização (F) é a razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente e futuro). Constitui uma ferramenta importante no trabalho da Matemática Financeira".

Então Dante (2014) mostra que esse fator de atualização pode ser maior ou menor que 1 ou o próprio 1. Considera-se que o conteúdo foi explicado de forma simples e clara.

6.6.1 Aumentos e Descontos

Segundo Dante (2014) para compor vários aumentos e/ou descontos, basta multiplicar os vários fatores individuais e, assim, obter o fator acumulado, que nada mais é do que o fator de atualização entre o primeiro e o último valor considerado, independentemente dos valores intermediários.

$$f_{acumulado} = f_1 \times f_2 \times f_3 \times f_4 \times ...$$

Essa é uma ótima forma de calcular aumentos e descontos sucessivos, principalmente quando as taxas são diferentes de um período para outro.

Tem-se, então, o exercício resolvido 14 o qual apresenta uma aplicação direta de aumentos sucessivos, no caso sobre o percentual acumulado após dois meses de inflação. Esse é um ótimo exercício já que apresenta um tema relevante do nosso cotidiano.

O exercício resolvido 15 é um exemplo em que se deseja saber qual o percentual de aumento que se deve dar para que o valor de uma peça, que foi dado 20% de desconto, volte ao preço original.

Dante (2014) resolve esse problema usando fator acumulado, da seguinte forma:

$$f_{acumulado} = f_1 \times f_2 = 1.$$

Questão desse tipo também pode ser resolvida usando a ideia de juros compostos, da seguinte forma:

$$C = C_0 \times (1+i) \Rightarrow 100 = 80 \times (1+i) \Rightarrow i = 0,25 \text{ ou } 25\%.$$

No exemplo 16 calcula-se o valor de uma prestação, dados os juros que incidem na compra a prazo. Eis o exemplo: Uma geladeira, cujo preço à vista é de $R\$ \ 680,00$ tem um acréscimo de 5% no seu preço se for paga em 3 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação? Esse é um problema que, possivelmente, as pessoas deparar-se-ão ao longo da vida, portanto, é uma questão que segue as normas oficias que regem a educação no Brasil.

A questão 17 é um problema que pode-e usar o fator acumulado de atualização. Tem-se uma tabela com 5 variações sucessivas do dólar, de segunda à sexta. A questão poderia trazer um texto sobre o que representa para um país as variações cambiais e seu reflexo na vida das pessoas.

Tem-se, então, uma bateria de exercícios. Partindo do exercício 26 ao 41.

A questão 26 é para escrever o fator de atualização sendo dado várias porcentagens. Essa questão recomenda-se que seja retirada dos exercícios já que isso vai ser explorado em outras questões, as quais sugere-se, fortemente, que se espelhem na realidade.

A questão 27 pede para que o aluno interprete cada fator de atualização, definindo se é aumento ou desconto e qual o valor da taxa.

1. $f = 1,13$;
2. $f = 0,7$;
3. $f = 2$;
4. $f = 0,95$;
5. $f = 30$.

Recomenda-se essa questão já que, por exemplo, para $f = 2$, pode-se pensar que tem-se um aumento de 200%, que na realidade é um aumento de 100%.

A questão 28 é do mesmo estilo do problema 14 o qual já comentamos, portanto, recomenda-se sua retirada do livro.

As questões 29, 30 e 31 deveriam estar na seção de juros compostos.

A questão 32 é do mesmo estilo da questão 15, portanto, recomenda-se sua retirada do livro.

A questão 33 é um problema que leva o aluno a escolher, entre duas opções, a melhor financeiramente. Sugere-se que questões desse tipo sejam muito bem exploradas no capítulo de matemática financeira.

A questão 34 é um problema em que tem-se uma tabela que se refere ao índice da bolsa de valores, algo muito importante na realidade. A ressalva que faz-se é que esta questão deveria estar na seção de juros compostos, além de que deveria ter um texto motivador sobre o funcionamento do IBOVESPA, que é a bolsa de valores de São Paulo.

A questão 35 é um problema sobre porcentagem. Recomenda-se a sua retirada do livro, já que não encontra-se problemas desse tipo no cotidiano. Outra sugestão é que essa questão poderia estar em uma seção de aprofundamento, específica para aqueles alunos que queiram se aprofundar mais no tema.

As questões 36 e 37 são do mesmo estilo. Sugere-se que esses problemas sejam reformulados, já que informa um valor de aumento percentual de uma calça e, a partir disso, pede-se para encontrar o valor da calça. Esses exemplos são hipotéticos, já que sabe-se o preço do que vamos comprar. O que aflige a população no dia-a-dia, muitas vezes, é não saber o verdadeiro juros embutidos em uma compra. Assim, sugere-se que esses exercícios sejam reformulados para pedirem, por exemplo, que se encontre esses juros.

A questão 38 problematiza o aumento no fluxo de veículos em uma rua, após a mesma ser asfaltada. Recomenda-se, fortemente, problemas desse tipo, que refletem a realidade.

Tem-se, na questão 39, um problema em que têm-se que escolher entre duas opções de descontos. Um de 55% ou dois sucessivos de 30%.

A questão 40 é do mesmo estilo da 37. Aconselha-se, portanto, retirá-la do livro.

A questão 41 deveria ser remanejada para a seção de juros compostos.

6.7 Termos importantes da Matemática Financeira

Nessa seção são introduzidos os termos capital(C), juros(j), montante(M) e taxa de juros(i). Termos importantes da Matemática Financeira que foram introduzidos de forma bem didática.

6.8 Juros Simples

Dante (2014) apresenta muito bem a definição de juros simples:

> "Se um capital C é aplicado durante t unidades de tempo e a taxa $i\%$ de juros por unidade de tempo incide apenas sobre o capital inicial, os juros j são chamados de juros simples".

Tem-se, então, o exercício resolvido 18. Considera-se um ótimo problema, em que o estudante vai descobrir os juros que pagará ao não comprar uma mercadoria à vista. Neste caso do exemplo encontra-se um juros absurdamente alto de 50%. Veja a seguir as duas opões:

1. comprar à vista por $R\$ 500,00$;

2. Comprar em duas parcelas iguais de $R\$ \ 300,00$, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês adiante.

6.9 Juros Compostos

Dante (2014) inicia o capítulo dando um exemplo em que realiza cálculos usando juros simples e compostos, ficando bem evidente a diferença entre esses dois regimes de juros. Vê-se, claramente, que nos juros compostos, a partir da segunda capitalização, os juros são aplicados sobre o capital inicial, mais os juros da primeira capitalização. Em sequência o autor mostra o desenvolvimento desses cálculos chegando a seguinte fórmula:

$$M = C_0 \times (1+i)^t.$$

Dante (2014) explica que nesse regime de juros, de taxa de juros i, um capital C_0, transforma-se em n períodos de tempo, em um montante:

$$C_n = C_0 \times (1+i)^n.$$

Em seguida, tem-se vários exercícios resolvidos do 19 ao 24.

Os exercícios 19 e 20 são sobre juros compostos. São questões de rendimento de aplicação, algo muito comum no cotidiano, mas de fácil resolução.

A questão 21 é um problema retirado do ENEM, que apresenta um dilema cotidiano: Comprar logo tendo que pagar juros ou esperar ter a quantia para comprar à vista. Nesta questão tem-se que calcular o tempo que seria necessário esperar para que o dinheiro disponível aplicado a juros de 2% ao mês atinja o valor do bem. Para esse tipo de questão recomenda-se, fortemente, e sugere-se, além disso, que seja disponibilizado um texto sobre as vantagens de se comprar à vista, algo bem necessário no nosso país já que os juros dos empréstimos ou financiamentos são muito altos.

A questão 22 quer saber o tempo necessário para que um capital dobre se aplicado a juros de 30% ao ano. Recomenda-se questões desse tipo.

A questão 23 é do mesmo estilo do problema 22. Avalia-se, portanto, que deveria ser retirada do livro.

A questão 24 é para se escolher entre duas formas de pagamento, sabendo-se que o dinheiro rende 1% ao mês.

1. Comprar à vista;

2. Comprar em 2 prestações de $R\$ \ 2005,00$, sendo a primeira paga no ato da compra.

Recomenda-se, fortemente, que os exercícios propostos dos livros didáticos tenham problemas desse tipo, os quais depara-se no cotidiano. Além do mais, a grande maioria dos brasileiros não sabe calcular qual a melhor opção para ele, quando se depara com escolhas desse tipo.

Tem-se, então, os exercícios para que o aluno resolva, que vão do 42 ao 57.

A grande maioria dos exercícios desta seção o autor recomenda o uso da calculadora, o que é uma ótima sugestão já que cálculos com juros compostos são muitas vezes inviáveis sem o uso desse aparelho eletrônico. Além disso, na nossa vida, é usado, com mais frequência, a calculadora financeira HP 12C. Sugere-se, portanto, que seja acrescentado exemplos com o uso dessa calculadora, ensinando o aluno a usá-la.

Das questões 42 a 52, além da questão 55 são todas problemas em que tem-se o uso direto das fórmulas de juros simples ou compostos, sugerindo-se o uso de uma calculadora para suas resoluções.

Nota-se muitas questões de juros simples, o que não recomenda-se, já que os juros comumente usados são os juros compostos.

A questão 53 é um problema que se refere a um investimento para o futuro. Aconselha-se adaptá-la para que possa ser um problema que ocorre na prática. Esse problema poderia ser: Sabendo-se que uma universidade particular de Medicina custa no total, se pago à vista, $R\$ 500.000,00$. Sabendo-se disso, um pai quer saber quanto deveria depositar em um fundo de investimentos com juros de 1% ao mês para que sua filha, que nasceu hoje, tenha, ao completar 18 anos, o valor nesse investimento que pague a faculdade de Medicina?

A questão 54 é um problema sobre juros compostos, em que se quer calcular o tempo necessário para se conseguir um certo montante, dado a taxa de juros.

Na questão 56, da FGV-SP(Fundação Getúlio Vargas- São Paulo), em que necessita-se usar a tabela de potências, pede-se para calcular um montante formado a partir de uma aplicação inicial de $R\$ 10.000,00$, aplicados a juros compostos de $1,5\%$ ao mês.

Recomenda-se a questão 57 do livro , já que pede para comparar dois empréstimos, um sendo realizado a juros simples e outro a juros compostos.

6.10 Conexão entre juros e funções

Nesta seção Dante (2014) correlacionou juros simples com função linear e juros compostos com função exponencial, usando o mesmo exemplo para fazer a comparação gráfica entre os dois regimes de juros. Percebe-se que ao capitalizarmos o capital inicial após o primeiro período, os montantes de juros simples e juros compostos coincidem. A partir desse ponto, o gráfico do regime de juros compostos está sempre acima do gráfico do montante a juros simples. Em outras palavras, para qualquer valor de t, $t > 1$, o montante da dívida a juros compostos é maior do que o montante da dívida a juros simples.

6.11 Equivalência de taxas

Segundo Dante (2014) é possível provar que, se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativa ao tempo t e i é a taxa de crescimento relativo ao período t, e se $T = n \times t$, então:

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

Considera-se uma ótima definição e tem-se, antes, um exemplo esclarecedor.

Dante (2014) fala rapidamente de equivalência de taxas, aconselha-se que haja uma maior explicação sobre esse assunto.

Na livro de Dante (2014), num quadro separado, denominado fique atento, página 35, tem-se:

1. taxa de juros é uma taxa de crescimento;
2. Quando dizemos "12% ao ano com capitalização mensal estamos falando de 1% ao mês.

Esse item 2 deveria ser melhor explicado, já que é algo muito aplicado no comércio e a população não sabe distinguir a diferença dessas taxas. Pagando, no geral, mais juros que imagina.

A seguir, tem-se a seção de exercícios resolvidos. Das questões 25 a 29.

A questão 25 é sobre taxa equivalente, problema parecido com o exemplo dado na página 25.

A questão 26 é parecida com o problema 25. A diferença encontrada é que nessa questão é pedido a taxa de juros mensal equivalente a uma taxa anual de 50%. Enquanto a questão anterior dava a taxa mensal e queria saber a anual.

A questão 27 é muito interessante. Fala de uma bomba que retira, em cada sucção, 3% da água de um poço. Quer saber quanto restará de água no poço depois de 20 sucções.

A questão 28 é uma aplicação das taxas proporcionais. No exemplo, o autor deveria ter mencionado que esse seria o rendimento da poupança e, também, explicado a mudança da lei sobre rendimentos da poupança. Aconselha-se, fortemente, que nesse assunto sejam explorados fatos relacionados com o nosso cotidiano, algo presente em grande número de transações realizadas diariamente.

A questão 29 é um problema que fala do código de defesa do consumidor. Recomenda-se, fortemente, esse estilo de questão, por ser um problema do nosso cotidiano.

É retomada, então, a seção de exercícios, das questões 58 a 65.

A questão 58 é um problema que pede para calcular o crescimento de uma cultura de bactérias em um dado período, sabendo-se que esta aumenta numa taxa de 20% por minuto. A questão 61 tem o mesmo raciocínio dessa questão, portanto, aconselha-se que seja retirada da bateria de exercícios.

As questões 59 e 60 são semelhantes ao exemplo 27 o qual já foi comentado. Recomenda-se que fique uma das questões e a outra seja retirada da bateria de exercícios, já que a intenção não é ficar repetindo questões, como uma espécie de decoreba, mas que o aluno consiga resolver problemas que possam surgir na sua vida, além de não ser algo mecânico, repetido.

As questões 62, 63 e 64 são equivalentes ao exemplo 25. Sugere-se que permaneça apenas uma dessas questões e as outras duas sejam retiradas da bateria de exercícios.

A questão 65 é um excelente problema. Veja a seguir: A renda per capta é definida como o quociente do produto interno bruto(PIB) pela população economicamente ativa. Se nos próximos 10 anos a população crescer $1,32\%$ ao ano, quanto deverá crescer anualmente o PIB para que a renda per capta aumente 10% na próxima década? Essa questão leva o aluno a pensar e raciocinar mais, além de ser algo prático, a solução de um problema enfrentado por países como o Brasil que precisam aumentar sua renda per capta, e, além disso, melhorar a vida da população mais pobre. Poderia ser também introduzido um texto motivador nesta questão sobre esse tema.

6.12 Equivalência de Capitais

Nesta seção Dante (2014) afirma: "A principal questão da Matemática Financeira é deslocar quantias no tempo"

Assim, o autor faz uma outra leitura para a fórmula $C_n = C_0 \times (1+i)^n$. Segundo Dante (2014), uma quantia hoje igual a C_0, será transformada, depois de n períodos de tempo, em uma quantia igual a $C_0 \times (1+i)^n$, a taxa de $i\%$ ao período.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais. Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$. Para obter o valor presente, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

Capítulo 7

Conclusões

Como foi visto ao longo do trabalho, a Matemática Financeira está presente nas nossas vidas desde a antiguidade. Por volta de 3000 A.C, por exemplo, já eram empregados cálculos de juros compostos, em razão da mudança no estilo de vida humano e, também, com o passar do tempo, da apropriação individual dos meios de produção. Posteriormente, empréstimos começaram a ser feitos e, com isso, foi-se percebendo o valor do "dinheiro"ao longo do tempo. Logo, a cobrança de juros passou a ser recorrente e, desde então, é notória a evolução da Matemática Financeira.

Atualmente, no Brasil, com a redução da inflação, observa-se uma sociedade que recorre, cada vez mais, a empréstimos e financiamentos. Uns a curto prazo, como o cartão de crédito, outros a médio prazo, como financiamento de veículos, e, por fim, os de longo prazo, tendo como exemplo mais presente na nossa vida, o financiamento imobiliário.

Ademais, foi visto que, tanto na Constituição do Brasil, quanto na mais recente Lei de Diretrizes da Educação Básica e nos PCNs, há maior ênfase em um ensino que esteja, efetivamente, conectado com a realidade vivida pelas pessoas e que as prepare para os convívios social e laboral. Portanto, o modelo de aprendizado no qual o aluno assume posição passiva, resolvendo questões de forma mecânica, não tem mais lugar na contemporaneidade.

Evidentemente, os livros didáticos necessitam estar conectados com essa nova realidade, por serem instrumentos de grande relevância para o processo ensino-aprendizagem, mais notadamente nas escolas públicas, nas quais, frequentemente, funcionam como único material disponível para os discentes.

Foi nesse contexto que foram analisados 3 livros didáticos do Ensino Médio; um mais antigo, datado de 1995, e outros dois, mais recentes, que são adotados em duas escolas públicas do município de Campina Grande(PB), sendo um datado de 2010 e outro de 2014. Para tanto, será comparada a evolução entre esses livros, verificando se houve avanço na abordagem do assunto ao longo do tempo, de acordo com os parâmetros descritos neste trabalho, e, ainda, se cada livro, individualmente, está em consonância com os objetivos de preparar os alunos para a vida cotidiana e para seus futuros empregos.

De início, o livro de Edwando Bianchini e Herval Paccola, de 1995, contém o assunto

Matemática Financeira no seu volume 1, antes de serem apresentados os assuntos de Progressões Aritméticas e Geométricas, o que deveria ser modificado, uma vez que tais conteúdos estão conetados com a Matemática Financeira.

Além disso, em relação à maneira como a matéria em questão é abordada no livro, existem várias ressalvas a fazer. Apesar de, a princípio, o autor já introduzir o capítulo com notícias dos meios de comunicação, nas quais o assunto é abordado, são encontrados ao longo do livro muitas questões que não tratam de assuntos deparados no cotidiano, com resoluções mecânicas e aplicações direta da fórmula, além da repetição excessiva de exemplos, apenas com alterações de valores.

Em relação ao conteúdo, deve ser corrigida e aperfeiçoada a definição de juros simples, uma vez que se encontra inadequada, dificultando enormemente o aprendizado do aluno. Quanto aos conteúdos, pois, sente-se falta de seções como a de desconto e equivalências de taxas.

Percebe-se, também, que o autor resolve muitos exemplos propostos por meios que ele criou para conseguir resolver estes problemas, sendo que os mesmo podem ser resolvidos com o conteúdo da Matemática Financeira. Sugere-se que o mesmo modifique essas resoluções.

Enfim, é recomendada a introdução de novos conceitos importantes e não abordados pelo autor, a correção da definição de juros simples, a resolução das questões, utilizando os conceitos abordados, e uma mudança radical nos exercícios apresentados, já que a grande maioria dos mesmos são de resolução mecânica, ao contrário do que indicam as diretrizes curriculares; isto é, o uso de exercícios que se relacionem com a atual realidade.

Em relação ao livro de Gelson Iezzi, foi considerada a localização do assunto Matemática Financeira no livro didático a mais adequada, pois é introduzido após os assuntos de funções, logaritmos, P.A e P.G., que são pré-requisitos para o bom entendimento do tema. Outrossim, tem uma teoria bem mais robusta e clara que no livro de Bianchini, mas ainda assim, há muitas coisas a serem melhoradas.

No início do capítulo, existe uma seção de revisão, na qual, nos exemplos, o autor usa a ideia de proporção sem explicar o conteúdo. Em seguida, o que foi visto com recorrência ao longo do livro, há exemplos e exercícios com raciocínios repetidos e questões de cálculo puro, sem problematização. Com relação as questões de cálculo puro, recomenda-se o agrupamento em uma seção à parte, no final do capítulo, para que sejam respondidas por aqueles alunos que desejam se aprofundar mais no assunto.

Vale salientar o uso inadequado de uma palavra no texto, sendo, portanto, sugerida sua substituição por outra palavra mais adequada ao contexto. Logo, é necessário que exista uma grande preocupação gramatical por parte dos autores, já que a interpretação de uma questão pode ser totalmente diversa da desejada se as palavras não estiverem adequadamente postas.

Diante do exposto, é recomendado que os exercícios sejam formulados de forma que retrate a realidade do aluno e que, também, os prepare para futuros desafios da vida e do trabalho. Para tanto, é indispensável a substituição de muitos exercícios do livro e a modificação de outros. Como exemplo emblemático, destaca-se uma das questões na qual o autor faz a seguinte colocação: “Dados os custos elevados de alguns eletrodomésticos, muitas pessoas, preferem o pagamento parcelado". Como visto no decorrer do trabalho, trata-se de uma colocação errônea, uma vez que, o intuito deste assunto, além de outros, é de preparar o estudante para o trabalho e para a vida social. Logo, o livro deve mostrar, por exemplo, o quanto as compras à vista são, em geral, mais vantajosas que as compras à prazo, que embutem juros, muitas vezes, altíssimos. Pesquisas indicam que os brasileiros, no geral, compram à prazo apenas vendo se conseguem pagar a prestação, em um cálculo bem superficial, não tendo ideia do quanto estão, de fato, pagando de juros e o quanto isso afeta seu orçamento. Tal situação, portanto, contribui para o país possuir uma das mais altas taxas de juros do mundo.

É sugerida, ainda, a retirada da seção sobre Variação Percentual do livro, uma vez que o assunto abordado já está contemplado na seção de juros compostos, e que seja ampliada a seção de juros simples, com a introdução de um exemplo e de maior detalhamento na apresentação de sua fórmula. Ainda na seção de juros simples, sugere-se a troca de questões, que são mais adequadas para juros compostos, por questões que envolvam, por exemplo, atrasos de contas de energia, de água e de gás, nas quais o assunto é, efetivamente, aplicado. Além disso, a seção de juros compostos com taxas variáveis está um pouco confusa; esse assunto foi melhor abordado por Dante.

Enfim, percebe-se que esse livro tem uma grande evolução em relação ao livro de Bianchini, sendo abordados mais assuntos, com a teoria mais clara, além de ser encontrada uma quantidade maior de exercícios que envolvem problemas cotidianos. Contudo, ainda é necessário o aprimoramento de alguns tópicos, a retirada de seções irrelevantes e, principalmente, melhorar ainda mais a qualidade dos exercícios, pois, ainda, foram encontrados problemas típicos de juros compostos na seção de juros simples. Ademais, têm, também, muitos exercícios que necessitam do mesmo raciocínio para sua resolução, sendo assim bem mecânicos e outros de cálculos puros, sem conexão com a realidade que vivemos.

No livro de Dante (2014), o assunto Matemática Financeira está no volume 3, parte 1. Sugere-se que tal assunto fique em sequência imediata à P.G, que se encontra no volume 1, como ocorreu no livro de Gelson Iezzi (2010).

Inicialmente, o autor coloca um problema que é possível encontrar no dia-a-dia, o que funciona como motivação, pois o aluno percebe, desde o início, a importância do assunto na sua realidade prática. Entretanto, o autor, infelizmente, confunde os conceitos de povoado e populoso na seção de revisão sobre razão e proporção. Foi elucidadora a maneira como o assunto foi abordado, tendo correlação com a geografia, mas o equívoco mencionado deve ser corrigido.

Além de que, não foi considerada a definição de razões equivalentes a mais apropriada, dando a entender que deve-se deixar as razões na forma irredutível para afirmar se são equivalentes ou não, o que não é obrigatório e, muitas vezes, teria o processo de resolução bem mais demorado. Além disso, há a revisão de proporção, na qual são apresentadas várias fórmulas de frações equivalentes, que foram consideradas desnecessárias, já que a propriedade fundamental das proporções já seria suficiente. As outras fórmulas poderiam, por exemplo, ficar em uma seção de aprofundamento, ao final do capítulo.

Foi encontrado, também, um pequeno lapso na definição de grandezas diretamente proporcionais, sendo necessária a introdução da palavra “respectivamente", para que se garanta a ordem correta dos termos apresentados no livro.

Em relação aos exercícios, foram identificados, ainda, apesar de em menor escala, muitos com o mesmo raciocínio de resolução, o que é inadequado, por tornar o processo de aprendizagem mecânico, além de outros descontextualizados, de cálculos puramente matemáticos, sem problematização com algo da realidade prática. Por sua vez, positivamente, a parte teórica desse livro está muito boa, dispondo de ótimos exemplos, de fácil entendimento, e de uma sequência de conteúdos excelente.

Enfim, percebe-se que houve uma melhora significativa dos livros ao longo do tempo. O primeiro livro analisado de Biachini (1995) tinha muito a melhorar, tanto pela forma que os conteúdos eram abordados, quanto pela pouca teoria apresentada, além de exercícios, em sua maioria, descontextualizados e da presença de um erro grave na definição de juros simples. O livro de Iezzi (2010), por sua vez, possui muito mais teoria, com definições mais claras e de melhor entendimento. Ademais, seus exemplos e exercícios contêm bem mais questões ligadas com a realidade prática. Finalmente, o livro de Dante (2014), em termos teóricos, com as correções a serem feitas, evidentemente, está bem próximo do que se almeja de um livro didático atual, com uma sequência muita boa de conteúdos, abrangente, além de fácil e claro entendimento. Em relação aos exercícios, não houve uma evolução em comparação ao livro de Gelson Iezzi (2010), pois ainda há muitos exercícios que não representam a realidade prática, e outros repetitivos, resolvidos de forma mecânica.

Sugere-se, além do exposto, que as questões tenham um maior foco em investimentos e não em empréstimos e financiamentos, já que a preparação do aluno para ser um consumidor consciente, que faz, no geral, suas compras à vista, já que é mais vantajoso para o consumidor, também, deve ser uma premissa no ensino da Matemática Financeira.

Outrossim, sentiu-se a ausência nos três livros didáticos analisados, do conteúdo de sistemas de amortização, tanto o SAC, quanto o sistema francês de amortização, que são encontrados, notadamente, nos financiamentos imobiliários, algo que, possivelmente, os alunos se depararão no futuro, ao financiar imóveis.

Além de que, é aconselhada a introdução de duas seções extras em todos os livros: uma abordando o manuseio da calculadora Hp 12C, usada em cálculos financeiros, com algumas questões sendo resolvidas com uso da calculadora, e a outra, com a resolução de algumas questões pelo Excel. Tais ferramentas, são importantíssimas para a vida prática, sendo, portanto, essenciais em livros didáticos.

Assim, com as mudanças sugeridas, espera-se que os referidos livros ajudem, ainda mais, a preparar os alunos para o trabalho e para a vida social, tornando-os cidadãos financeiramente conscientes.

Referências Bibliográficas

[1] Andrade, Ricardo Luiz. *Resolução de Problemas: uma proposta para o ensino de Matemática Financeira*, Profmat. Universidade Federal de Mato Grosso. Sinop. 2017

[2] Ávila, Leonardo. *Tabela SAC - Sistema de Amortização Constante*, 2014. Visto em:http://www.clubedospoupadores.com/financiamentos/tabela-sac-sistema-de-amortizacao-constante.html. Acesso em: 11/06/2018.

[3] Bianchini, Edwaldo; Paccola, Heval. *Matemática*, Volume 1, Moderna, São Paulo, 1995.

[4] Boyer, Carl Benjamim. *História da Matemática*, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[5] Bruni, Adriano Leal; Famá, Rubens. *Matemática Financeira*, Editora Atlas S.A., São Paulo, 5.ed., 2012.

[6] *Calculadora hp 12c gold(fotos reais)*, visto em: https://lista.mercadolivre.com.br/calculadora-hp-12c-gold-28fotos-reais29. Acesso em: 08/09/2018.

[7] Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com alterações determinadas pelas Emendas Constitucionais de revisão números 1 a 6/94, pelas Emendas Constitucionais números 1/92 a 91/2016 e pelo Decreto Legislativo número 186/2008- Brasília: Senado Federal, Coordenação de Edições técnicas, 2016.

[8] Dante, Luiz Roberto. *Matemática*, Editora Ática, São Paulo, 1.ed., Volume 3, 2014.

[9] DIAS, M. V., TASSOTE, E. M., VIANA, *A matemática financeira: um alicerce para o exercício da cidadania*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade do Vale do Sapucaí. Pouso Alegre, 2011.

[10] Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

[11] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*, Editora Saunders, E.U.A, 1992.

[12] Faro, Clovis; Lachtermacher, Gerson. *Introdução à Matemática Financeira*, Editora FGV, Rio de Janeiro, 1.ed., 2012.

[13] Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo dicionário Aurélio da Lingua Portuguesa*, Editora Positivo, Curitiba, 4.ed., 2009.

[14] Hazzan, Samuel; Pompeo, José Nicolau. *Matemf́ica Financeira*, Editora Saraiva, São Paulo, 6.ed., 2007.

[15] Heichelheim, Fritz M. *An Ancient economic history*, 1938, trans. J. Stevens, editora Leyden : Sijthoff, 1970.

[16] Huson, Michael and Baruch Lavine. it Privatization in the Ancient Near Eastand Classical World, Peabody Museum, Harvard University, Volume 1, 1994.

[17] Iezzi, Gelson; Osvaldo, Dolce et al . *Matemática Ciência e Aplicações*, Editora Saraiva, São Paulo, 9.ed., Volume 3, 2010.

[18] *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Encontrado em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em 07/ 06/ 2018.

[19] Lima, André. *Falta de dinheiro e dívidas abalam a autoeestima*, 2011. Encontrado em: http://www.minhavida.com.br/bem-estar/materias/12864-falta-de-dinheiro-e-dividas-abalam-a-autoestima. Acesso em 07/06/ 2018.

[20] Lopes, João do Carmo. *Economia Monetária*, 8.ed., Editora Atlas, São Paulo, 2002.

[21] Luz, Katson Roger Ferreira da. *Proposta de um livro didático com recursos de vídeoaulas e calculadora HP 12C para o ensino de Matemática Financeira nos cursos técnicos a distância*, Dissertaç ao de Mestrado(PROFMAT), Universidade Federal de Acre, Rio Branco, 2017.

[22] Mathias, Washington Franco; Gomes, José Maria. *Matemática Financeira*, Editora Atlas S.A., São Paulo, 5.ed., 2008.

[23] Mol, Rogério Santos. *Introdução à história da Matemática*, CAED-UFMG, Belo Horizonte, 2013.

[24] Morgado, Augusto César. *Matemática Discreta*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2.ed., 2015.

[25] Neto, Alexandre Assaf. *Matemática Financeira e suas aplicações*, Editora Atlas S.A., São Paulo, 4.ed., 1998.

[26] SILVA, Marcos Noé Pedro da. *Fração Equivalente*, Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/fracao-equivalente.htm>. Acesso em 15 de setembro de 2018.

[27] PCN+, Ensino Médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Encontrado em: https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/ciencias-da-natureza-matematica-e-suas-tecnologias-mais.pdf. Acesso em 07/06/ 2018.

[28] Penido, Eduardo. *Matemática Financeira Essencial*, Editora Atlas S.A., São Paulo, 1.ed., 2008.

[29] Puccini, Abelardo de Lima. *Matemática Financeira(Objetiva e Aplicada)*, Editora Elsevier, São Paulo, 9.ed., 2011.

[30] Domingos, Reinaldo *Os sete fatores que levam ao endividamento e à inadimplência*, 2016. Disponível em: https://www.brasil247.com/pt/247/seudinheiro/223989/Os-7-fatores-que-levam-ao-endividamento-e-à-inadimplência.htm. Acesso em 07/06/ 2018.

[31] Robert, Jozsef. *A origem do dinheiro*, Global editora, São Paulo, 1982.

[32] Rosetti Junior, H.; Schimiguel, J.. *A História do dinheiro e a Educação Matemática Financeira*, 2011. Disponível em: <http://www.administradores.com.br> Acesso em: 12 de março 2018.

[33] Santos, G. L. da C. *Matemática Financeira Objetiva e Aplicada*, São Paulo, Saraiva, 6.ed., 2005.

[34] Shiguekiyo, Carlos Tadashi. *Enciclopédia do estudante: matemática I*, Editora Moderna, São Paulo, 1.ed., 2008.

[35] Smith, David Eugene. *History of Mathematics* Dover Publications, New York, 1958.

[36] Sobrinho, José Dutra Vieira. *Matemática Financeira*, Editora Atlas S.A., São Paulo, 6.ed., 1997.

[37] Struik, Dirk J., *A Concise History of Mathematics*, Editora Dover, New York, 1967.

[38] Texeira, James; Netto, Scipione. *Matemática Financeira*, Editora Makron Books, São Paulo, 1.ed., 1998.

[39] Zarlenga, Stephen A. *The lost science of money* American Monetary Institute, New York, 2002.