



Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Aplicação de alguns conceitos Trigonométricos
em problemas de Física da 1^a e 2^a séries do
Ensino Médio

Edson do Nascimento de Oliveira

Teresina

2018

Edson do Nascimento de Oliveira

Aplicação de alguns conceitos
Trigonométricos em problemas de Física da
1^a e 2^a séries do Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí - Campus Poeta Torquato Neto, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática no Ensino Básico

Orientador : Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Junior

Teresina

2018

O48a Oliveira, Edson do Nascimento de.
Aplicação de alguns conceitos trigonométricos em problemas de física da 1ª e 2ª séries do ensino médio / Edson do Nascimento de Oliveira. - 2018.
83f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

“Orientador(a): Prof.(a) Dr. Pedro Antônio Soares Junior.”

1. Interdisciplinaridade. 2. Trigonometria. 3. Mecânica.

I. Título.

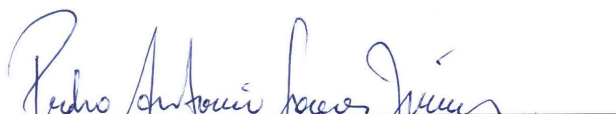
CDD: 516.24


EDSON DO NASCIMENTO DE OLIVEIRA


**APLICAÇÃO DE ALGUNS CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS EM
PROBLEMAS DE FÍSICA DO 1º E 2º ANOS DO ENSINO MÉDIO.**

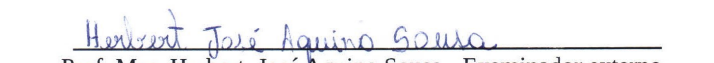
Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática
do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de
MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:


Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Junior - Examinador
Universidade Estadual do Piauí -UESPI


Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí -UESPI


Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto - Examinador externo
Universidade Federal do Piauí – UFPI


Prof. Msc. Herbert José Aquino Sousa - Examinador externo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Maranhão – IFMA

TERESINA
Maio/2018

Todos os direitos reservados.É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Edson do Nascimento de Oliveira graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI), foi professor em turmas de pré-vestibulares nas cidades de Teresina/PI e Timon/MA. É professor efetivo na rede pública no IFMA - Campus Zé Doca, durante o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI foi bolsista pela CAPES.

Dedicatória

Dedico esta dissertação a minha esposa, meus pais, irmãos, amigos e os professores, que pesquisam sobre o uso da Trigonometria na Física.

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar.

A minha esposa, Thayne, pelo amor e compreensão, por me incentivar e apoiar em todos os momentos, as minhas filhas Beatriz e Maria Clara que eu espero que sejam futuras leitoras dessa dissertação.

A minha irmã Sandra e aos meus irmãos, Flávio e Luís, pelos ensinamentos e valores voltados pelos princípios de união e respeito.

Aos meus pais, Carlito (in memoriam) e Luzia, pelo amor, carinho, apoio, por sua atenção e preocupação que proporcionaram conquistas em meus estudos.

Aos professores do PROFMAT/UESPI, Dr. Pedro Júnior, Dr. Afonso Norberto, Dr. Arnaldo Brito, Me. Hélder Borges e Dr. Neuton Alves pelas aulas esclarecedoras, em especial ao Professor Dr. Pedro Júnior, meu orientador, pelas disciplinas que ministrou no PROFMAT que me fizeram ter um olhar matemático mais rigoroso voltado para a conceituação, manipulação e aplicação, pelo companheirismo, pelos encontros que me ajudaram no desenvolvimento e conclusão deste trabalho, e por ter a oportunidade de ser o primeiro aluno do mestrado orientado por ele é uma honra.

A todos os meus amigos, da primeira turma do PROFMAT/UESPI pelas contribuições, experiências e aprendizado nesses dois anos.

Aos meus amigos Professor Alencar (IFPI- Campus Corrente) e Professor Jailson (SEDUC-MA) pela sincera amizade.

Gostaria de agradecer a todos os amigos colaboradores desse projeto, os que tiveram contato direto com esse trabalho. Entre eles (as) cito os amigos (as) Wladmilson Torres e Beatriz Carvalho não só com apoio moral, mas também muitas vezes com seu intelecto. Em especial Camila Correia e José Linhares, pela ajuda no Latex pois, tenho certeza que sem vocês não conseguiria realizar esta etapa do trabalho.

Por fim, a CAPES pelo apoio financeiro e Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo do papel Interdisciplinar de alguns conceitos Trigonométricos com ênfase em alguns tópicos da Física da primeira e segunda séries do Ensino Médio. Abordamos alguns conceitos Trigonométricos básicos tais como: ângulos em radianos, arcos, relações Trigonométricas no triângulo retângulo, lei do seno, lei do cosseno e funções Trigonométricas, os quais são importantes ferramentas utilizadas na solução de alguns problemas de Física do Ensino Básico. Assim, apresentamos várias situações problemas que evidenciam o uso dos referidos conceitos.

Palavras-chave: interdisciplinaridade. trigonometria. mecânica.

Abstract

The aim of this research is to study the interdisciplinary role of trigonometric concepts emphasizing some topics of physics in the first and second series of high school. This work discusses some basic trigonometric concepts such as trigonometric relations in the right triangle, law of the sines, law of the cosines, arcs, angles in radians and trigonometric functions, which are important tools used in the solution of some problems of Basic Physics. Thus, we present several situations that demonstrate the use of these concepts.

Keywords: interdisciplinary. trigonometric. mechanics.

Lista de Figuras

1	Região convexa (esquerda) e não convexa (direita)	18
2	Regiões angulares no plano	19
3	Ângulo raso	19
4	Ângulo agudo (esquerda), reto (centro), obtuso (direita)	19
5	Círculo de centro O	20
6	Radiano	21
7	Triângulo retângulo	22
8	Triângulos semelhantes	22
9	Lei dos cossenos	24
10	Triângulo inscrito	25
11	Ciclo trigonométrico	26
12	Ciclo trigonométrico orientado	26
13	Definição do seno e cosseno pelo ciclo trigonométrico	27
14	Relação entre senos e cossenos de arcos	28
15	Simetria entre os arcos de φ e x	30
16	Simetria entre os arcos de φ e x	31
17	Simetria entre os arcos de φ e x	32
18	Triângulo retângulo	33
19	Triângulo retângulo	34
20	Ciclo trigonométrico com arco de comprimento x	37
21	Gráfico da função <i>seno</i>	37
22	Ciclo trigonométrico com arco de comprimento x	39
23	Gráfico da função <i>cosseno</i>	39
24	Movimento do barco	41

25	Representação gráfica de vetores	44
26	Vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2	44
27	Soma vetorial	44
28	Vetores opostos	45
29	Componentes de um vetor	46
30	Lançamento oblíquo	47
31	Bola chutada com uma velocidade V_0	48
32	Triângulo retângulo	48
33	Movimento circular	50
34	Movimento circular	51
35	Polias em contato	52
36	Engrenagens em contato	52
37	Acoplamento de polias por correia	52
38	Bloco ligado a uma mola, com MHS	53
39	Projeção do ponto P sobre o diâmetro	54
40	Ponto P num instante t	54
41	Terra suposta esférica	59
42	Manivela girando com ângulo θ	61
43	Plano inclinado sem atrito	63
44	Plano inclinado sem atrito	63
45	Circulo Vertical	64
46	Bola lançada obliquamente	65
47	Bola lançada obliquamente	66
48	Força aplicada na caixa	67
49	Diagrama de forças	68

50	Triângulo retângulo	69
51	Plano Horizontal	70
52	Triângulo retângulo	71
53	Movimento de uma partícula no círculo	73
54	Movimento de uma partícula S e sua projeção Q	74
55	Triângulo retângulo	76
56	Gráfico horário da elongação de um móvel	77

Sumário

1	Introdução	16
2	Conceitos básicos de Trigonometria e alguns conceitos Físicos	18
2.1	Alguns conceitos Trigonométricos	18
2.1.1	Ângulo	18
2.1.2	Arco	20
2.1.3	Triângulo retângulo	21
2.1.4	Senos, cossenos e tangentes	22
2.1.5	Ciclo trigonométrico	25
2.1.6	Adição e subtração de arcos	28
2.1.7	Equações Trigonométricas	29
2.1.8	As funções Trigonométricas seno e cosseno	35
2.2	Conceitos Físicos	40
2.2.1	Movimento uniforme(MU)	40
2.2.2	Movimento uniformemente variado(MUV)	42
2.2.3	Vetores na Física	43
2.2.4	Componentes de um vetor	45
2.2.5	Lançamento oblíquo	46
2.2.6	Movimento Circular Uniforme(MCU)	49
2.2.7	Transmissão de Movimento Circular Uniforme	52
2.2.8	Movimento Harmônico Simples(MHS)	53
2.2.9	Cinemática do MHS	53
3	Algumas aplicações à Física	58
3.1	Ângulo em radiano no movimento circular	58

3.2	Seno, cosseno e tangente em vetores, plano inclinado e lançamento oblíquo	61
3.3	As funções Trigonométricas e o Movimento Harmônico Simples (MHS)	72
4	Considerações finais	79

1 Introdução

Para o autor em [23], a Trigonometria foi uma criação da matemática grega, e recebeu contribuições de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades de se medir distâncias inacessíveis, onde teoremas sobre razões entre lados de triângulos semelhantes eram usados em problemas ligados a Navegação, Agrimensura e Astronomia.

Conforme, em Lima (2013) “ objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, consistindo em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos)[...] ”([16], p.186). Em [11], temos as primeiras aplicações da Trigonometria, em que o principal problema era determinar distâncias que são difíceis de serem medidas, como por exemplo o cálculo sobre as distâncias Terra- Sol- Lua feito por Aristarco.

Devido as necessidades de se efetuar medições impossíveis de serem medidas por instrumentos convencionais, e de fazer parte no estudo de fenômenos naturais, a Trigonometria está relacionada com outras ciências. Por isso, este trabalho possui como tema central a aplicação do conhecimento Trigonométrico em problemas clássicos de Física que envolvem alguns conteúdos do primeiro e segundo ano do Ensino Médio, visto que os conceitos Trigonométricos são muito importantes para que o aluno se aproprie de conteúdos de outras áreas, a exemplo da Física, em que se trabalha com grandezas angulares, grandezas vetoriais e Movimento Harmônico Simples (MHS) cujas equações cinemáticas são descritas por funções trigonométricas.

Nesse entendimento, o tratamento dos conteúdos matemáticos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões, os diálogos sejam favorecidos e destacados, “O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas,

[...] ”([6], p. 19).

Deste modo, este trabalho objetiva, destacar a relevância da Trigonometria como recurso a ser utilizado na resolução de alguns problemas clássicos da Física, usar a interdisciplinaridade no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos no Ensino Médio e propor uma sequência didática envolvendo tópicos da Trigonometria subsidiados pela interdisciplinaridade.

Levando em conta os objetivos propostos, o presente trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1, temos a introdução. Depois no capítulo 2, apresentamos alguns conceitos básicos de Trigonometria e logo em seguida alguns conceitos de Física. No Capítulo 3, serão resolvidas dez questões clássicas que envolve a interdisciplinaridade com o uso de conceitos Trigonométricos em problemas de Física como também uso de conceitos Físicos em problemas de Trigonometria. E por fim, no capítulo 4 apresentamos as considerações finais.

2 Conceitos básicos de Trigonometria e alguns conceitos Físicos

Nesse capítulo abordamos alguns conceitos Trigonométricos e Físicos com objetivo de solucionar os problemas clássicos e interdisciplinares do capítulo 3.

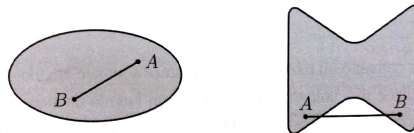
2.1 Alguns conceitos Trigonométricos

A teoria apresentada para os conceitos Trigonométricos pode ser encontrada em [2], [10], [15], [16], [17], [19], [22] e [27].

2.1.1 Ângulo

Definição 2.1. *Uma região R do plano é convexa quando, para todos os pontos $A, B \in R$, tivermos $AB \subset R$. Caso contrário, diremos que R é uma região não convexa.*

Figura 1: Região convexa (esquerda) e não convexa (direita)

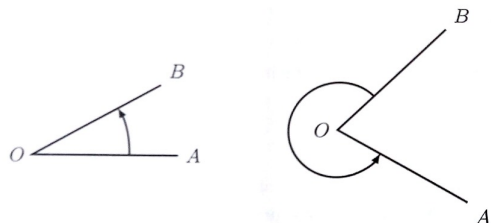


Fonte: [19], p.9

Definição 2.2. *Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .*

Conforme [19] um ângulo pode ser de dois tipos, convexo ou não convexo; na figura 2, o ângulo da esquerda é convexo e o da direita é não convexo.

Figura 2: Regiões angulares no plano

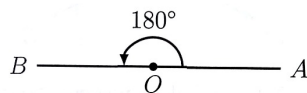


Fonte: [19], p.10

Observação 2.1. *Os ângulos quanto as suas medidas, podem ser:*

- a) *um ângulo raso (180°), se ele for formado por duas semirretas distintas e opostas sobre uma mesma reta*

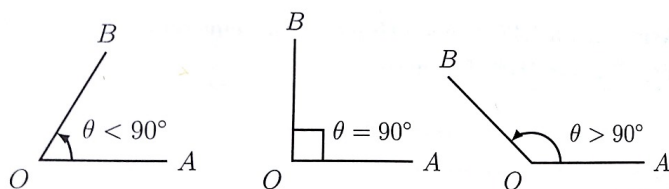
Figura 3: Ângulo raso



Fonte: [19], p.13

- b) *o ângulo $A\hat{O}B$, é agudo quando $0^\circ < A\hat{O}B < 90^\circ$, reto quando $A\hat{O}B = 90^\circ$ e obtuso quando $90^\circ < A\hat{O}B < 180^\circ$.*

Figura 4: Ângulo agudo (esquerda), reto (centro), obtuso (direita)



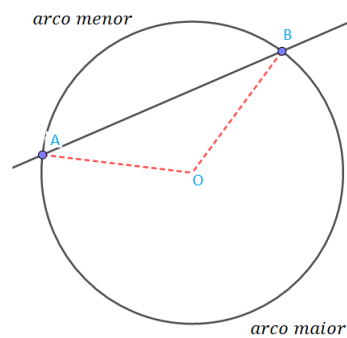
Fonte: [19], p.13

c) dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 90° são complementares, então se $\alpha + \beta = 90^\circ$, α é o complemento de β e vice-versa.

2.1.2 Arco

Definição 2.3. Dados dois pontos A e B de um círculo de centro O e traçando uma reta que passa por esses dois pontos, essa reta separa o plano em dois semiplanos e cada um desses semiplanos contém uma parte do círculo, estas partes são denominadas arcos determinados pelos pontos A e B . E como O é o centro do círculo então \widehat{AOB} é chamado de ângulo central, e a medida em graus do arco menor é por definição a medida do ângulo central \widehat{AOB} .

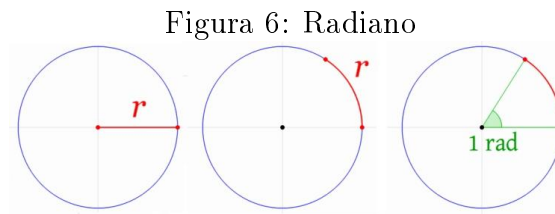
Figura 5: Círculo de centro O



Fonte: Próprio autor,(2018)

Observação 2.2. De acordo com [22], se os pontos A e B da figura 5 coincidirem na circunferência ela fica dividida em dois arcos, um arco nulo (comprimento nulo) e outro coincidindo com a circunferência denominado arco de uma volta.

Definição 2.4. A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.



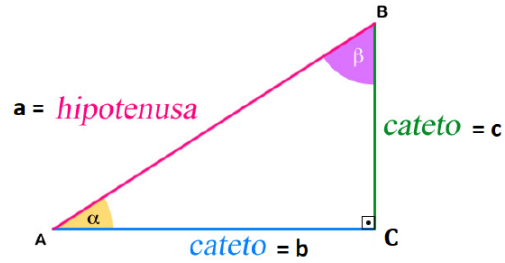
Fonte: Próprio autor,(2018).

Observação 2.3. Da definição acima tem-se que se α for um ângulo central em radianos e S for o comprimento do arco determinado por esse ângulo central gerado pelo raio R , então $\alpha = \frac{S}{R}$, ou seja, $S = \alpha \cdot R$.

2.1.3 Triângulo retângulo

Definição 2.5. Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa, e os outros dois lados são denominados catetos.

Figura 7: Triângulo retângulo

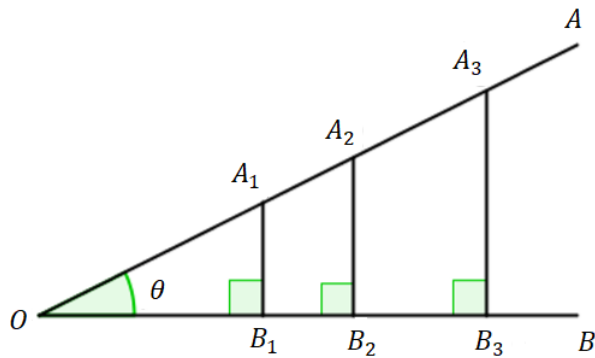


Fonte: Próprio autor,(2018).

2.1.4 Seno, cosseno e tangente

De acordo com [10], seja θ um ângulo agudo em $A\hat{O}B$ (figura 8), e tomando os pontos A_1, A_2, A_3 da semireta \overrightarrow{OA} , de modo que sejam perpendiculares $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}$, à semireta \overrightarrow{OB} . Os triângulos retângulos $A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3$, são semelhantes por terem os mesmos ângulos.

Figura 8: Triângulos semelhantes



Fonte: Próprio autor,(2018)

Da semelhança entre os triângulos $A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3$, podemos escrever as seguintes razões entre seus lados:

$$\text{i) } \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } \theta;$$

$$\text{ii) } \frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } \theta;$$

$$\text{iii) } \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \text{tg } \theta.$$

Observação 2.4. *Notemos que:*

a) a tangente de um ângulo pode ser obtida por:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}}{\frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}} = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta} = \text{tg } \theta.$$

b) devido a semelhança de triângulos, a relação seno, cosseno e tangente fica exclusivamente dependendo apenas do ângulo θ e não dos comprimentos dos lados do triângulo.

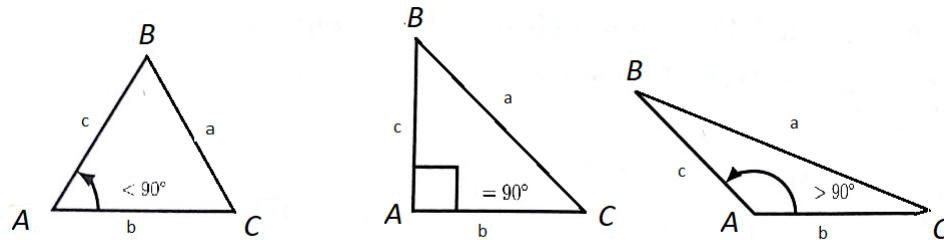
c) quando α e β são dois ângulos internos e complementares de um triângulo retângulo, temos $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$ assim como $\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha$ e $\text{tg } \alpha$ é o inverso de $\text{tg } \beta$.

d) da figura 7, de hipotenusa $\overline{BA} = a$ e catetos $\overline{BC} = c$ e $\overline{AC} = b$, segue-se que $b = a \cdot \text{sen } \beta$ e $c = a \cdot \text{cos } \beta$. Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, isto é, $\text{sen}^2 \beta + \text{cos}^2 \beta = 1$ que é a relação fundamental da trigonometria

Para situações em que se é necessário utilizar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo qualquer, temos a disposição duas leis fundamentais da Trigonometria: a lei do cosseno e a lei do seno.

Teorema 2.1 (Lei do cosseno). *Considere um triângulo ABC qualquer (a figura 9, representa o caso em que o ângulo \hat{A} é agudo, reto e obtuso).*

Figura 9: Lei dos cossenos



Fonte: Próprio autor,(2018).

Vale as seguintes relações conhecida como lei do cosseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

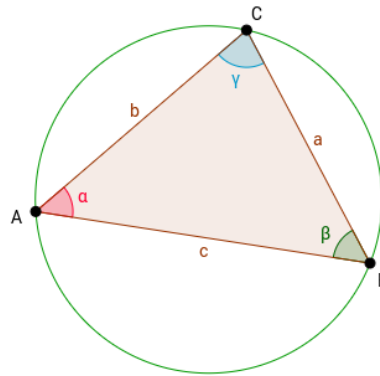
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Para o leitor interessado na demonstração e mais detalhes desse teorema destacamos [10] páginas 47 e 48 e [16] páginas 205 e 206.

Teorema 2.2 (Lei do seno). *Em qualquer triângulo ABC , os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

Figura 10: Triângulo inscrito



Fonte: Próprio autor,(2018).

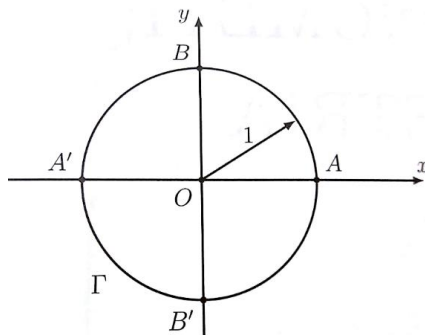
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r, \text{ (} r \text{ representa o raio do círculo circunscrito ao triângulo } ABC \text{.)}$$

Para maiores detalhes sobre esse teorema o leitor poderá consultar em [16], página 202 a 204 e [2], página 140 e 141.

2.1.5 Ciclo trigonométrico

Definição 2.1. *É um círculo Γ da figura 11, centrado na origem $O(0,0)$ de um sistema de coordenadas ortogonais, de raio 1 e comprimento 2π .*

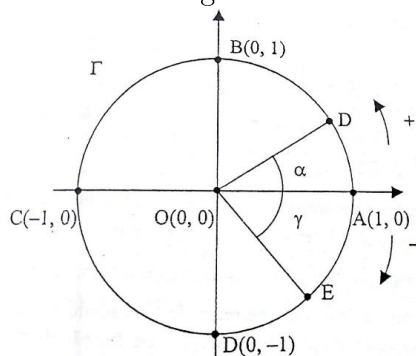
Figura 11: Ciclo trigonométrico



Fonte: [19] p.210

Conforme [10], há dois sentidos que se pode percorrer o ciclo trigonométrico (figura 12), o sentido anti-horário como positivo e horário como negativo.

Figura 12: Ciclo trigonométrico orientado



Fonte: Próprio autor,(2018).

Observação 2.5. Considerando uma função $f(\alpha)$ que associa para cada α um ponto D da circunferência da (figura 12) podemos afirmar que D é a imagem de α , e E a imagem de γ pela função f . Quando a função f é associada a uma circunferência trigonométrica de raio unitário, temos que essa circunferência é o ciclo trigonométrico. Sendo assim, a partir de D ou E percorrendo a circunferência trigonométrica em k voltas inteiras, percebemos que $f(\alpha) = f(\alpha \pm 2\pi) = f(\alpha \pm 4\pi) = \dots = f(\alpha \pm 2k\pi)$, do

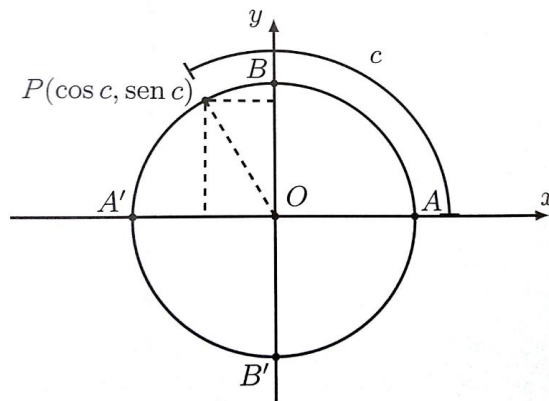
mesmo modo para $f(\gamma) = f(\gamma \pm 2\pi) = f(\gamma \pm 4\pi) = \dots = f(\gamma \pm 2k\pi)$. Então, todos os arcos da forma $\alpha \pm 2k\pi$ e $\gamma \pm 2k\pi$ possuem a mesma imagem e por isso recebem o nome de arcos c \acute{o} ngruos.

Defini \tilde{c} o 2.2. Para $c \in \mathbb{R}$, definimos o seno e o cosseno de c (radianos), abreviados respectivamente $\text{sen } c$ e $\text{cos } c$, por (c.f figura 13):

$$\text{cos } c = \text{abscissa de } P$$

$$\text{sen } c = \text{ordenada de } P$$

Figura 13: Defini \tilde{c} o do seno e cosseno pelo ciclo trigonom \acute{e} trico

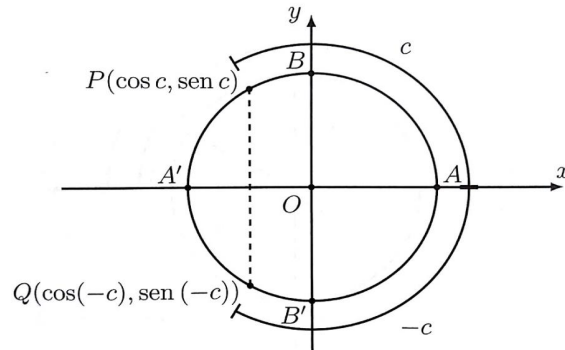


Fonte: [19], p.213

Observa \tilde{c} o 2.6. Por serem associados as coordenadas de um plano cartesiano o seno e o cosseno de arcos guardam certas rela \tilde{c} o \tilde{e} s simples entre si, a saber:

- a) se $P(\text{cos } c, \text{sen } c)$ e $Q(\text{cos}(-c), \text{sen}(-c))$ da figura 14, s \tilde{a} o pontos sim \acute{e} tricos em rela \tilde{c} o \tilde{e} ao eixo das abscissas (pertencentes a um arco sobre a circunfer \acute{e} ncia),

Figura 14: Relação entre senos e cossenos de arcos



Fonte: [19], p.219

então suas abscissas são iguais e suas ordenadas serão opostas, isto é, $\cos(-c) = \cos(c)$ e $\sin(-c) = -\sin(c)$

- b)** a ordenada (seno) como a abscissa (cosseno) de qualquer ponto (extremidade de um arco sobre a circunferência) estará sempre compreendida entre -1 e 1 , ou seja, para qualquer α real, temos:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

2.1.6 Adição e subtração de arcos

A seguir vamos apresentar as fórmulas de adição e subtração de arcos que são úteis na resolução de algumas equações trigonométricas. Assim para $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

a) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$;

b) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$;

c) $\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, sempre que $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} b$ e $\operatorname{tg}(a \pm b)$, estiverem definidas;

Observação 2.7. Quando $a = b$ nas fórmulas acima de adição, temos a seguir as identidades denominadas de arcos duplos:

a) $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$;

b) $\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a$;

c) $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$, sempre que $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{tg} 2a$ estiverem definidas.

Exemplo 2.1. Uma aplicação clássica das fórmulas de adição de arcos é o cálculo do seno e cosseno do arco trigonométrico de 75° . (Retirado de [19], exemplo 6.17, p. 224)

Solução

Para isso fazemos $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, então:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(75^\circ) &= \operatorname{sen}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \\ \cos(75^\circ) &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

As demonstrações dessas fórmulas de adição, subtração de arcos e arcos duplos são encontradas em [10], página 43 e [22], página 91.

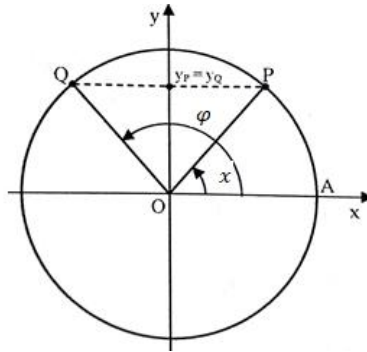
2.1.7 Equações Trigonométricas

Nesta seção apresentaremos as equações mais comuns do tipo: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \varphi$, $\cos x = \cos \varphi$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \varphi$ e $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$. A seguir apresentamos uma solução para cada uma dessas equações:

i) Equações do tipo $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \varphi$

Dois ângulos x e φ tem a mesma ordenada ou mesmo seno (figura 15) se, e somente se, as extremidades dos arcos x e φ forem simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

Figura 15: Simetria entre os arcos de φ e x



Fonte: [22], p.139

Logo, $\text{sen } x = \text{sen } \varphi$ quando $x = \varphi + 2k\pi$ ou $x = (\pi - \varphi) + 2k\pi$, sendo k um número inteiro.

Exemplo 2.2. *Quais os valores de x para os quais $\text{sen } 2x = \text{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$?*

Solução

Os valores de x devem satisfazer as equações:

$$2x = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou,

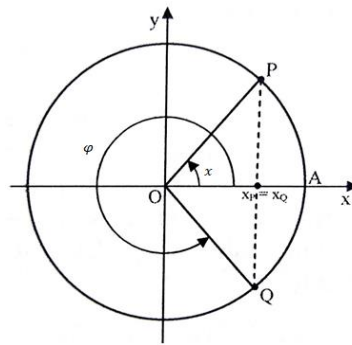
$$2x = \left(\pi - x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

ii) Equações do tipo $\cos x = \cos \varphi$

Dois ângulos x e φ tem a mesma abscissa ou mesmo cosseno se, e somente se, as extremidades dos arcos x e φ forem simétricos em relação ao eixo das abscissas

(figura 16). Então, $\cos x = \cos \varphi$ quando, $x = \varphi + 2k\pi$ ou $x = -\varphi + 2k\pi$, com k um número inteiro.

Figura 16: Simetria entre os arcos de φ e x



Fonte: [22], p.140

Exemplo 2.3. Resolver a equação $\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$

Solução

Esses arcos terão o mesmo cosseno quando,

$$x = \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

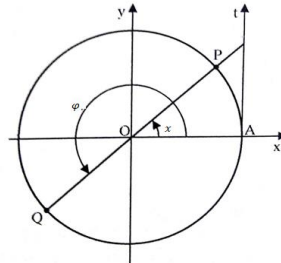
ou,

$$x = - \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + 2k\pi \Rightarrow 0 = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ (impossível, pois } k \text{ tem que ser inteiro).}$$

iii) Equações do tipo $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \varphi$

Dois ângulos x e φ tem a mesma tangente se, e somente se, as extremidades dos arcos x e φ coincidem ou são simétricos em relação a origem, logo $x = \varphi + k\pi$ sendo $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 17: Simetria entre os arcos de φ e x



Fonte: [22], p.140

Exemplo 2.4. Resolver a equação $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \sqrt{3}$

Solução: Sabe-se que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, assim podemos escrever a equação acima na seguinte forma, $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + x \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, os arcos que têm tangente trigonométrica igual a $\sqrt{3}$ são os arcos de 60° e 240° que em radianos são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, respectivamente. Desse modo temos:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou,

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

iv) Equações do tipo $a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x = c$

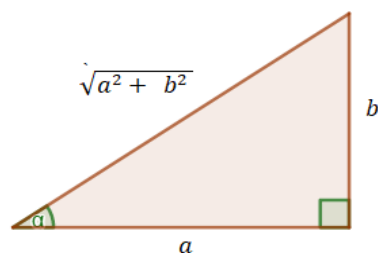
Uma técnica para resolver equações do tipo acima consiste em construir um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa $\sqrt{a^2 + b^2}$, conforme a figura 18. Dividindo a equação $a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x = c$ por $\sqrt{a^2 + b^2}$ que é diferente de zero, temos:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{cos} x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (i)$$

usando $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{sen} \alpha$ e $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{cos} \alpha$, e substituindo em (i), temos:

$$(\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \operatorname{sen} (x + \alpha) = c$$

Figura 18: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor,(2018).

Dessa forma equação $a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x = c$ pode ser escrita da forma do tipo seno, isto é,

$$a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x = c \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x + \alpha) \sqrt{a^2 + b^2} = c \quad (1)$$

Observação 2.8. *É importante notar que a equação, $a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x = c$, para a e b reais não simultaneamente nulos, só possui solução para determinados valores de c , à saber:*

Da equação (1), temos:

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow (x + \alpha) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

como o segundo membro tem que ser um arco cujo seno seja $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, então devemos ter sempre:

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

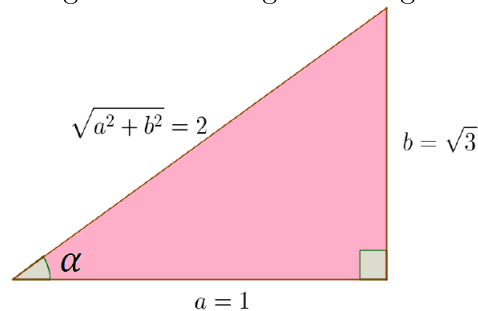
Para o leitor interessado em maiores detalhes sobre essa e outras transformações Trigonométricas poderá consultar [22] página 93, [10] página 62 e [19] página 224.

Exemplo 2.5. *Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \operatorname{cos} x = \sqrt{2}$.*

Solução

Comparando a equação $a \sin x + b \cos x = c$ com a equação $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$. Temos que $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ e $c = \sqrt{2}$, temos que $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, logo a equação $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ possui solução, desse modo, construindo o triângulo retângulo (Figura 19).

Figura 19: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor,(2018).

Fazendo as relações trigonométricas:

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Usando a equação (1), obtemos:

$$\sin(x + \alpha) \cdot 2 = \sqrt{2} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{4}$$

Resolvendo essa equação do tipo seno temos:

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

ou,

$$x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

2.1.8 As funções Trigonométricas seno e cosseno

Nesta seção serão analisados alguns conceitos envolvidos no estudo das funções *seno* e *cosseno* de modo que elas sejam definidas para todos os número reais e que sejam mantidas algumas relações básicas, como a relação fundamental da trigonometria e a noção de tangente, etc. Para as demonstrações e mais detalhes dessas funções e de outras funções trigonométricas o leitor poderá consultar em [10], [16] e [22].

Definição 2.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica quando existe o número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t + kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para $t \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f .*

Observação 2.9. *Conforme [22], como o número T é denominado período de f . Deve-se observar que a definição exige que o número T não dependa do valor de t escolhido no domínio em \mathbb{R} , pois, $f(t + T) = f(t)$ deve ser uma identidade, isto é, deve valer em qualquer t do domínio. Logo, devemos ter naturalmente que não somente t como também $t + T$ devem ser elementos do domínio.*

Exemplo 2.6. *Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(m \cdot x + n)$ tem período $T = \frac{2\pi}{m}$.*

Solução

Para que função do tipo seno seja periódica de período T positivo, basta que tenhamos a identidade, $f(t + T) = f(t)$, então:

$$a + b \cdot \text{sen}[m \cdot (t + T) + n] = a + b \cdot \text{sen}(m \cdot t + n)$$

$$\text{sen}[m \cdot (t + T) + n] = \text{sen}(m \cdot t + n) \quad (*)$$

Logo, dois ângulos θ e φ tem o mesmo seno se, e somente se, $\theta = \varphi + 2k\pi$ ou

$\theta = (\pi - \varphi) + 2k\pi$, em que k é um número inteiro. Assim, da igualdade em (*), temos:

i) $m \cdot (t + T) + n = (m \cdot t + n) + 2k\pi$;

ii) $m \cdot (t + T) + n = \pi - (m \cdot t + n) + 2k\pi$

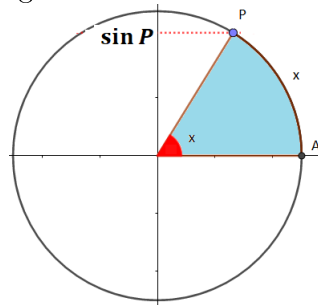
Portanto, afim de que T seja um período da função f , devemos ter $T = \frac{2k\pi}{m}$ (por i) ou, $T = \frac{\pi - 2mt - 2n + 2k\pi}{m}$ (por ii). Deve-se perceber que a segunda possibilidade não satisfaz a definição de função periódica, pois T dependerá do valor de t escolhido. Como o período é o menor $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$, então para $k = 1$, temos $T = \frac{2\pi}{m}$.

Observação 2.10. *Podemos utilizar o argumento perfeitamente idêntico para mostrar que a função cosseno do tipo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a + b \cdot \cos(m \cdot x + n)$ também tem período $T = \frac{2\pi}{m}$. Assim, como a função tangente da forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = a + b \cdot \operatorname{tg}(m \cdot x + n)$ possui período $T = \frac{\pi}{m}$.*

Definição 2.4. *Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P (Figura 20), a imagem de um arco de comprimento x . Define-se a função seno de um arco x como sendo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada x a ordenada do ponto P :*

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

Figura 20: Ciclo trigonométrico com arco de comprimento x

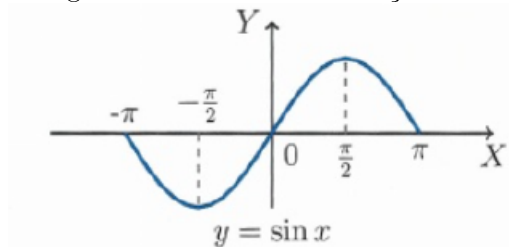


Fonte: Próprio autor,(2018).

Observação 2.11. *A partir da definição acima temos:*

- a) *domínio e a imagem da função $f(x) = \text{sen } x$ é $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$*
- b) *a função $f(x) = \text{sen } x$ é positiva para x pertencente ao primeiro e segundo quadrantes e negativa nos demais quadrantes*
- c) *para qualquer quadrante do arco x , sempre temos que, $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$, isto é, $f(x) = -f(-x)$, fazendo com que $f(x) = \text{sen } x$ seja uma função ímpar.*
- d) *a curva definida pelo gráfico (Figura 21) da função $f(x) = \text{sen } x$ recebe o nome de senóide.*

Figura 21: Gráfico da função seno



Fonte: [16], p.196

Para [22] uma forma mais geral de função Trigonométrica do tipo *seno* é $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(m \cdot x + n)$ onde cada elemento $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, traz uma transformação na função trigonométrica, com exceção do domínio que é o conjunto dos números reais. Desse modo, para entender o comportamento dessa função, basta fixar o valor de três dessas quatro constantes (a, b, m, n) e fazer, no mesmo sistema de eixos, gráficos de f variando a quarta constante. Desse modo percebe-se que:

i) m define o período; $p = \frac{2\pi}{m}$

ii) em n radianos, desloca o gráfico horizontalmente. Se n for positivo o gráfico é deslocado para a esquerda e se n for negativo o gráfico é deslocado para a direita;

iii) b altera a amplitude que é definida, como sendo o deslocamento máximo em relação a posição inicial, ou seja, como a função *seno* varia de -1 a 1 , temos:

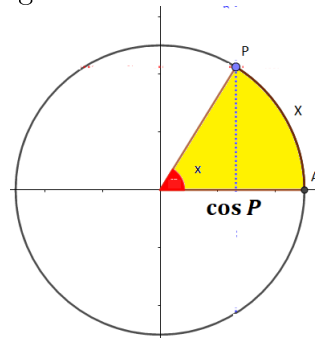
$$-b \leq b \text{sen } x \leq b;$$

iv) a desloca o gráfico verticalmente. Se a é positivo o gráfico é deslocado para cima e se a for negativo o gráfico é deslocado para baixo, em $|a|$ unidades de comprimento.

Definição 2.5. *Considere o ciclo trigonométrico e o ponto P (Figura 22), a imagem de um arco de comprimento x . Define-se a função cosseno de um arco x como sendo a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada x a abscissa do ponto P :*

$$f(x) = \cos x$$

Figura 22: Ciclo trigonométrico com arco de comprimento x

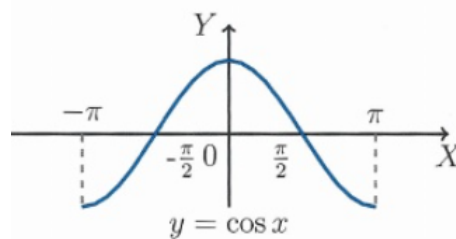


Fonte: Próprio autor,(2018).

Observação 2.12. *Conforme a definição temos:*

- a) *domínio e a imagem da função $f(x) = \cos x$ é $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$*
- b) *a função $f(x) = \cos x$ é positiva para x pertencente ao primeiro ou quarto quadrantes e negativa nos demais quadrantes.*
- c) *o gráfico (Figura 23) da função $f(x) = \cos x$ é chamado de cossenóide.*

Figura 23: Gráfico da função cosseno



Fonte: [16], p.196

- d) *independente do quadrante do arco x , sempre temos que, $\cos(x) = \cos(-x)$, isto é, $f(x) = f(-x)$, daí $f(x) = \cos x$ é uma função par.*

Assim, como $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, toda análise feita para a função $f(x) = a + b \cdot \sin(m \cdot x + n)$ é também válida para $f(x) = a + b \cdot \cos(m \cdot x + n)$.

2.2 Conceitos Físicos

Os conceitos físicos apresentados nessa seção são encontrados em [7], [8], [9], [1], [21], [29], [24], [3], [4] e [13]

2.2.1 Movimento uniforme(MU)

Definição 2.6. *É aquela que possui velocidade escalar instantânea constante.*

$$V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta T}$$

Observação 2.13. *Segundo [9], da definição acima, a velocidade escalar média é também constante, para qualquer intervalo de tempo, e seu valor coincide com a velocidade escalar instantânea. Assim teremos as seguintes equações:*

i) *velocidade média,*

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

ii) *função horária do espaço*

$$S = S_0 + V_0 t$$

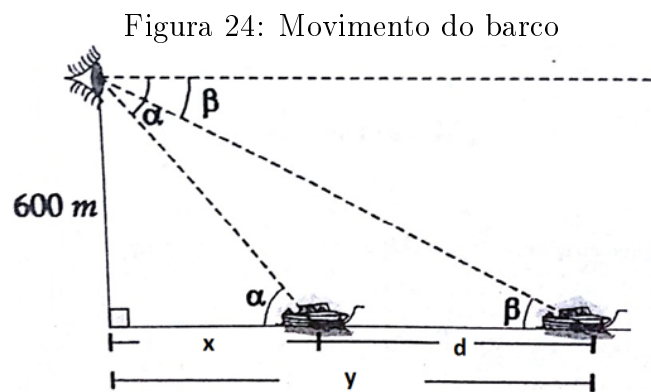
Nas equações acima o V_m , ΔS , Δt , S_0 e V_0 representam respectivamente, Velocidade média, variação da posição, variação do tempo, posição inicial e velocidade instantânea.

Exemplo 2.7. *(Reproduzido de [27], problema 13, p.55) Um pescador situado a 600 m sobre o nível do mar observa uma lancha em movimento com velocidade constante e em linha reta sob um ângulo de depressão α . Seis minutos depois, ele observa na*

mesma direção da lancha, mas agora com um ângulo de depressão β . Determine a velocidade da lancha em km/h sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} + 1$ e $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3} - 1$.

Solução

Representando a situação pela figura 24:



Fonte: [27], p.318

Do triângulo retângulo, tem-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{600}{x} \Rightarrow x = \frac{600}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow x = 300\sqrt{3} - 300$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{600}{y} \Rightarrow y = \frac{600}{\operatorname{tg} \beta} \Rightarrow y = 300\sqrt{3} + 300$$

Na figura 24, temos que $d = y - x$, ou seja, $d = 300\sqrt{3} + 300 - 300\sqrt{3} + 300$, portanto, $d = 600 \text{ m}$.

Com velocidade constante, temos :

$$V_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{600 \text{ m}}{6 \text{ min}} = \frac{0,6 \text{ km}}{0,1 \text{ h}} = 6 \text{ km/h}$$

2.2.2 Movimeto uniformemente variado(MUV)

Definição 2.7. *É aquele movimento que possui uma aceleração escalar instantânea constante e não-nula.*

Observação 2.14. *Em [9], decorre, imediatamente, que a aceleração escalar média é também constante, para qualquer intervalo de tempo, e seu valor coincide com o da aceleração escalar instantânea. Assim, as equações para o MUV, são:*

i) *velocidade Média*

$$V_m = \frac{V_0 + V}{2}$$

ii) *função horária da velocidade*

$$V = V_0 + at$$

iii) *função horária do espaço*

$$S = S_0 + V_0t + \frac{at^2}{2}$$

iv) *equação de Torricelli*

$$V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$$

Nas equações acima, V_0 , V , a , representam respectivamente, velocidade inicial, velocidade final, aceleração escalar.

Exemplo 2.8. *(ITA 2016-Adaptada) A partir do repouso, um foguete de brinquedo é lançado verticalmente do chão, mantendo uma aceleração constante de $5,00 \text{ m/s}^2$ durante os $10,0$ primeiros segundos. Desprezando a resistência do ar e adotando a aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$, qual a altura máxima atingida pelo foguete?*

Solução

Vamos dividir o problema em duas etapas. Na primeira etapa (i), o foguete sobe do

solo durante 10 segundos com aceleração constante de 5 m/s^2 e na segunda etapa (ii), o foguete continua subindo com desaceleração da gravidade até atingir a altura máxima onde a velocidade nesse ponto é nula. Assim:

- i) Usando a função horária do espaço para MUV, com H_1 (altura final nos 10 primeiros segundos), H_0 (altura inicial), temos:

$$H_1 = H_0 + V_0 t + \frac{at_1^2}{2}$$
$$H_1 = \frac{5 \cdot 10^2}{2} \Rightarrow H_1 = 250 \text{ m}$$

Aplicando a função horária da velocidade para determinar a velocidade V_1 na altura H_1

$$V_1 = V_0 + at$$

$$V_1 = 5 \cdot 10 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ m/s}$$

- ii) Empregando a equação de Torricelli na determinação da altura máxima H_2 onde a velocidade final nessa altura é $V_2 = 0$, temos:

$$V_2^2 = V_1^2 + 2g(H_2 - H_1)$$

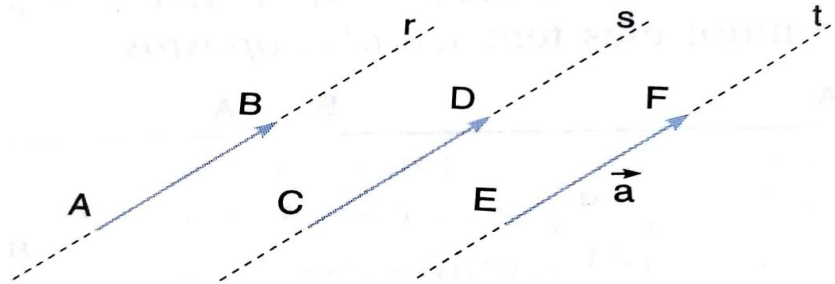
$$0 = 50^2 + 2(-10)(H_2 - 250)$$

$$H_2 = 375 \text{ m}$$

2.2.3 Vetores na Física

Definição 2.8. *Se considerarmos um segmento orientado \overrightarrow{AB} , não nulo, em seguida consideremos o conjunto de todos os segmentos orientados que tenham o mesmo módulo, mesma direção e o mesmo sentido de \overrightarrow{AB} . Esse conjunto é um vetor.*

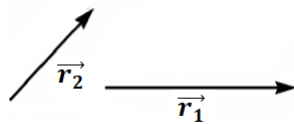
Figura 25: Representação gráfica de vetores



Fonte: [8], p.148

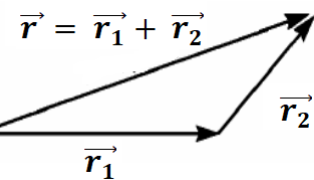
Segundo [21] para o movimento de uma partícula os vetores se caracterizam por um deslocamento, desse modo havendo dois deslocamentos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 (figura 26) podemos determinar o deslocamento resultante, chamado de soma vetorial representado por \mathbf{r} (figura 27).

Figura 26: Vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2



Fonte: [21], p. 42

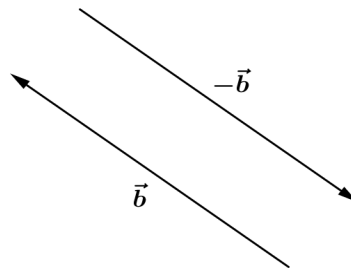
Figura 27: Soma vetorial



Fonte: [21], p. 42

Conforme [13], um vetor $-\vec{b}$ é um vetor com mesmo módulo e direção de \vec{b} porém sentido oposto (figura 28).

Figura 28: Vetores opostos



Fonte: [12], p.41

Observação 2.15. *Em muitas aplicações com vetores, nos deparamos com algumas forças, à saber:*

- a) *força eletromagnética normal (\vec{N}), cuja a direção é perpendicular a superfície de contato.*
- b) *força gravitacional peso (\vec{P}) representada pela força de atração entre massas, e sua equação é dada por,*

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \quad (2)$$

onde m representa a massa do corpo e g a aceleração da gravidade.

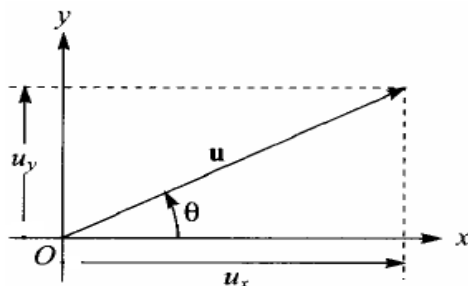
- c) *força de atrito (\vec{F}_{at}), que pode ser considerada como proporcional a força normal (\vec{N}). A constante de proporcionalidade é chamada de coeficiente de atrito, designado por (μ), e sua equação é da forma,*

$$|\vec{F}_{at}| = \mu \cdot |\vec{N}| \quad (3)$$

2.2.4 Componentes de um vetor

Segundo [21], se \vec{u} é um vetor qualquer, chamam-se componentes de \vec{u} segundo os eixos Ox e Oy as projeções u_x e u_y de \vec{u} sobre os eixos (figura 29). A magnitude de \mathbf{u} (ou módulo de \mathbf{u}) é dada por, $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

Figura 29: Componentes de um vetor



Fonte: [21], p.44

Sendo θ o ângulo formado entre u e o eixo horizontal u_x , então:

$$\text{sen}\theta = \frac{u_y}{|u|}, \quad \text{temos que } u_y = |\vec{u}| \cdot \text{sen}\theta \text{ (componente na vertical)}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{u_x}{|u|}, \quad \text{temos que } u_x = |\vec{u}| \cdot \text{cos}\theta \text{ (componente na horizontal)}$$

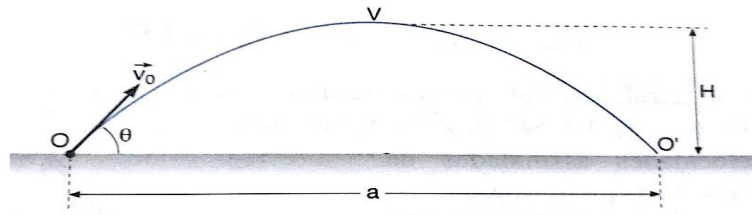
2.2.5 Lançamento oblíquo

De acordo com [1], quando uma partícula é lançada obliquamente (figura 30) de um ponto O sobre a superfície da terra, com velocidade \vec{v}_0 suficientemente pequena para que possa desprezar as resistências do ar, e com uma distância horizontal suficientemente pequena para que possa desprezar a curvatura da terra, a uma altitude suficientemente pequena para que a variação da gravidade com a altura possa ser desprezada, este lançamento é visto como a superposição de dois movimentos separados: um horizontal (MU), com velocidade escalar constante $v_0 \cos \theta$ com aceleração nula, e outro na vertical (MUV), com velocidade escalar inicial $v_0 \text{sen} \theta$ e aceleração $-g$. Neste caso, tem-se as seguintes equações:

Na direção horizontal a equação horária é do tipo:

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t$$

Figura 30: Lançamento oblíquo



Fonte: [9], p.227

Na vertical a equação horária e a equação da velocidade são, respectivamente:

$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \frac{g}{2}t^2$$

$$v_y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - gt$$

O Alcance (A) e a altura máxima (H_{mx}) são expressos por:

$$A = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g} \quad (4)$$

$$H_{mx} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \quad (5)$$

Equação geral da Trajetória :

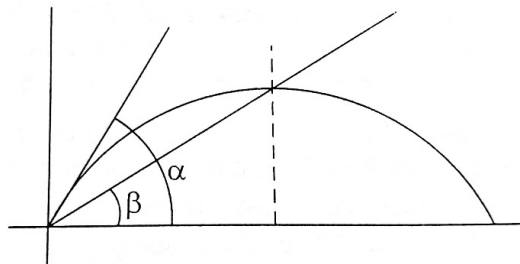
$$y(x) = (\operatorname{tg}\theta)x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (6)$$

Para o leitor interessado nas demonstrações das equações do lançamento oblíquo, recomendamos em [1], páginas 95 e 96.

Observação 2.16. *O maior valor possível para o seno de qualquer ângulo é 1, o qual ocorre para o ângulo de 90° . Na equação (4), para obter o valor de θ para que o Alcance seja máximo devemos ter $\operatorname{sen}(2\theta) = 90^\circ$, ou seja, $\theta = 45^\circ$. Assim, a expressão do Alcance máximo é dado por $A_{mx} = \frac{v_0^2}{g}$ metros. A altura máxima atingida por uma partícula para $\theta = 45^\circ$ é $H_{mx} = \frac{v_0^2}{4g}$ metros, isto é, $H_{mx} = \frac{A_{mx}}{4}$.*

Exemplo 2.9. (UECE-2007) Uma bola é chutada com uma velocidade v_0 onde a gravidade é g da superfície de um terreno plano segundo um ângulo α positivo acima da horizontal de acordo com a figura 31. Se β é o ângulo de elevação do ponto mais alto da trajetória, visto do ponto de lançamento, desprezando a resistência do ar, qual a razão $\frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha}$?

Figura 31: Bola chutada com uma velocidade V_0



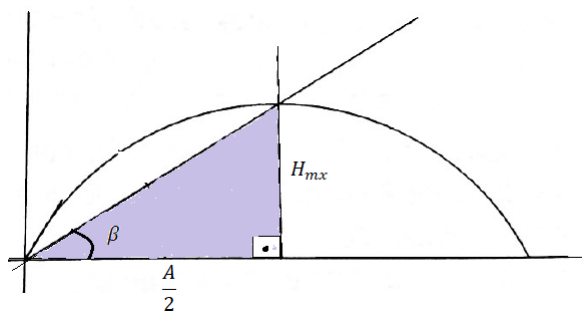
Fonte: UECE 2007

Solução

Desenvolvendo o arco duplo da equação (4), temos:

$$A = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \text{sen } \alpha \cos \alpha}{g} \quad (7)$$

Figura 32: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor, (2018)

No triângulo retângulo (figura 32), temos:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H_{mx}}{\frac{A}{2}} \quad (8)$$

Usando as equações de H_{mx} (equação 5) e A (equação 7), e substituindo na $\operatorname{tg} \beta$ (equação 8), temos:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2}}{2 \cdot v_0^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}$$

2.2.6 Movimento Circular Uniforme(MCU)

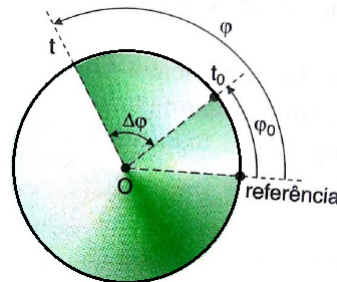
Definição 2.9. *É um movimento periódico, com a trajetória descrita por um corpo sendo um círculo cujo o módulo da velocidade angular (ω) é constante, de modo que a trajetória descreve arcos de círculos iguais em tempos iguais.*

Neste caso, se um corpo percorrer uma volta completa na circunferência em MCU, temos o Período (T) definido como sendo “ intervalo de tempo mínimo para o movimento repetir-se com as mesmas condições” ([9], p. 253). A frequência é (f) definida como “o número de vezes que o movimento se repete na unidade de tempo” ([9], p. 253).

A velocidade angular (ω) expressa em *rad/s* no movimento circular uniforme é o quociente entre o deslocamento angular ($\Delta\varphi$) expresso em radianos, pelo intervalo de tempo (Δt) em segundos como mostra a figura 33, assim temos:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (9)$$

Figura 33: Movimento circular



Fonte: [7], p.256

A equação horária do MCU é obtida a partir da equação 9, com φ e φ_0 os espaços angulares (figura 33) no instante t e $t_0 = 0$, respectivamente, temos:

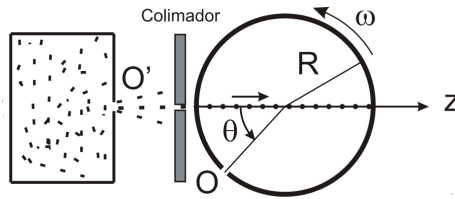
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (10)$$

A velocidade linear no MCU, é expressa pela equação:

$$v = \omega \cdot R \quad (11)$$

Exemplo 2.10. (Ita 2013) Um dispositivo é usado para determinar a distribuição de velocidades de um gás. Em $t = 0$, com os orifícios O' e O alinhados no eixo z , moléculas ejetadas de O' , após passar por um colimador, penetram no orifício O do tambor de raio interno R , que gira com velocidade angular constante. Considere, por simplificação, que neste instante inicial as moléculas em movimento encontram-se agrupadas em torno do centro do orifício O . Enquanto o tambor gira, conforme mostra a figura, tais moléculas movem-se horizontalmente no interior deste ao longo da direção do eixo z , cada qual com sua própria velocidade, sendo paulatinamente depositadas na superfície interna do tambor no final de seus percursos. Nestas condições, obtenha em função do ângulo θ a expressão para $V - V_{mim}$ em que V é a velocidade da molécula depositada correspondente ao giro θ do tambor e V_{mim} é a menor velocidade possível para que as moléculas sejam depositadas durante a primeira volta deste.

Figura 34: Movimento circular



Fonte: (ITA)2013.

Solução

Analisando o deslocamento da molécula, pelo eixo Z, para se depositar na parede interna do tambor:

$$\Delta S = 2R$$

para velocidade constante, temos:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow V = \frac{2R}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2R}{V}. \quad (i)$$

Analisando a velocidade angular do tambor:

$$\Delta \varphi = \theta$$

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\theta}{\omega}. \quad (ii)$$

Igualando as duas equações (i) e (ii), vem:

$$\frac{2R}{V} = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow V = \frac{2R\omega}{\theta}. \quad (iii)$$

Considerando a primeira rotação completa do tambor, para a determinação da velocidade mínima (V_{min}), temos:

$$\theta = 2\pi \text{ rad}$$

$$V_{min} = \frac{2R}{\Delta t_{min}} \text{ com, } \Delta t_{min} = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ logo:}$$

$$V_{min} = \frac{2R}{2\pi} \Rightarrow V_{mim} = \frac{2R\omega}{2\pi} \Rightarrow V_{mim} = \frac{R\omega}{\pi} \quad (iv)$$

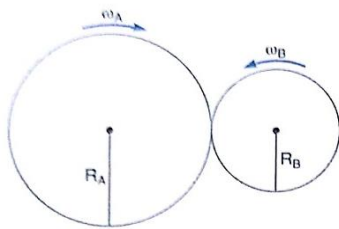
Fazendo (iii) - (iv):

$$V - V_{mim} = \frac{2R\omega}{\theta} - \frac{R\omega}{\pi} = \frac{\omega R(2\pi - \theta)}{\pi \theta}$$

2.2.7 Transmissão de Movimento Circular Uniforme

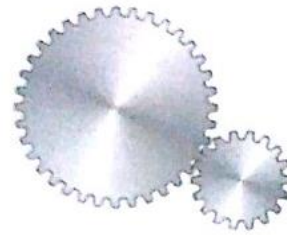
Segundo [9], há duas maneiras básicas de transmitir movimento circular entre duas rodas: por contato (figuras 35 e 36) e por correia (figura 37)

Figura 35: Polias em contato



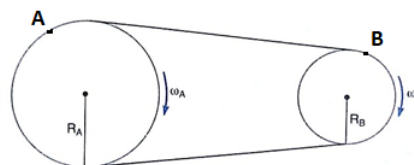
Fonte: [9], p.266

Figura 36: Engrenagens em contato



Fonte: [9], p.266

Figura 37: Acoplamento de polias por correia



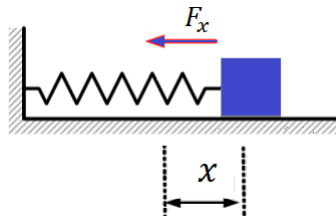
Fonte: [9], p.266

Observação 2.17. Na transmissão por contato, se tomarmos um ponto A e B na periferia das polias ou rodas dentadas, os pontos A e B descrevem os mesmos arcos num mesmo intervalo de tempo, então temos que a velocidade linear desses pontos são iguais. Se as polias tiverem em comum mesmo eixo, elas giram ângulos iguais em intervalos de tempos iguais, logo apresentarão velocidades angulares iguais.

2.2.8 Movimento Harmônico Simples(MHS)

Conforme em [29], o MHS é um movimento periódico e oscilatório realizado por um corpo, quando sobre ele atua uma força restauradora (F_x) (figura 38) diretamente proporcional ao deslocamento (x) da posição de equilíbrio, como na equação, $F_x = -k \cdot x$ (Lei de Hooke), onde k é uma constante de proporcionalidade em que seu valor depende do sistema em estudo.

Figura 38: Bloco ligado a uma mola, com MHS



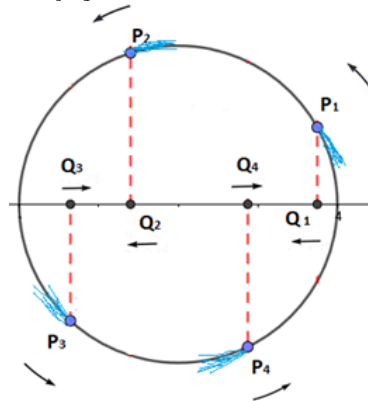
Fonte: Próprio autor,(2018).

2.2.9 Cinemática do MHS

As equações horárias do MHS podem ser obtidas a partir da lei de Hooke, usando equações diferenciais de 2ª ordem. Mas como esse trabalho pretende abordar conteúdos voltados para o Ensino Médio, usaremos uma técnica que consiste em analisar projeções de um MCU de um ponto P com sua projeção Q , se movimentando no sentido anti-horário representado sucessivamente nas posições P_1, P_2, P_3, P_4 , correspondentes à

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sobre um de seus diâmetros, fazendo uma relação entre o MHS e o MCU conforme a figura 39.

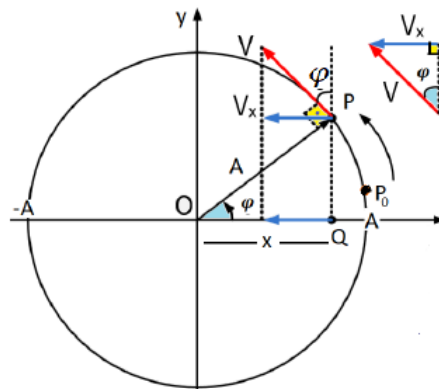
Figura 39: Projeção do ponto P sobre o diâmetro



Fonte: Próprio autor,(2018)

Neste caso, considerando a figura 40, algumas equações do MHS são:

Figura 40: Ponto P num instante t



Fonte: Adaptada de [25]

- a) a equação horária da posição em função do tempo, que é obtida supondo um ponto P_0 representando a posição inicial de um corpo que realiza um MCU. No instante posterior t , o corpo ocupa a posição P , cujo espaço angular é φ , que de

acordo com o triângulo retângulo OQP e com a equação (10), temos :

$$x = A \cdot \cos \varphi \Rightarrow x = A \cdot \cos(\varphi_0 + \omega t) \quad (12)$$

A grandeza $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ é denominada fase, e φ_0 é a fase inicial que é encontrada no instante $t = 0$. Embora tenhamos representado a equação horária do MHS em termos da função cossenoidal, poderíamos ter utilizado uma função senoidal, sendo que a única diferença estaria numa diferença de $\frac{\pi}{2}$ na fase inicial.

- b) A equação horária da velocidade em função do tempo, é determinada a partir da velocidade do corpo em P , que é perpendicular ao segmento de reta \overline{OP} e possui um módulo igual $v = \omega \cdot R$, ou seja, $v = \omega \cdot A$, cuja a componente dessa velocidade ao longo do eixo x é dada por,

$$v_x = -v \cdot \text{sen}(\varphi) \Rightarrow v_x = -\omega \cdot A \text{sen}(\varphi_0 + \omega t)$$

O sinal negativo foi colocado, porque, no instante considerado, o movimento do ponto Q é retrogrado (contra a orientação da trajetória)

- c) Equação de Torriceli para o MHS pode ser obtida a partir da equação horária da posição e da equação horária da velocidade, do seguinte modo:

$$x = A \cdot \cos(\varphi_0 + \omega t) \Rightarrow \cos(\varphi_0 + \omega t) = \frac{x}{A} \quad (13)$$

$$v_x = -\omega \cdot A \text{sen}(\varphi_0 + \omega t) \Rightarrow \text{sen}(\varphi_0 + \omega t) = \frac{-v_x}{\omega \cdot A} \quad (14)$$

Das equações (13) e (14), aplicando a relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\cos^2(\varphi_0 + \omega t) + \text{sen}^2(\varphi_0 + \omega t) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v_x^2}{\omega^2 \cdot A^2} = 1$$

Exemplo 2.11. (Reproduzido de [12], Problema 16, p.110 e solução retirada de [25])
 Duas partículas executam movimento harmônico simples com amplitudes e frequências idênticas, ao longo da mesma linha reta. Elas se cruzarão quando, movendo-se em sentidos opostos, seus deslocamentos forem iguais à metade de suas amplitudes. Determine a diferença de fase entre seus movimentos.

Solução

Usando a equação da posição em função do seno, temos:

$$x_1 = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$x_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

Do enunciado temos:

$$x_1 = \frac{A}{2} = A \operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(\omega t) \Rightarrow \omega t = 30^\circ \quad (i)$$

$$x_2 = \frac{A}{2} = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \Rightarrow \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} \quad (ii)$$

Usando as adição de arcos em (ii):

$$\operatorname{sen}(\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) = \frac{1}{2}$$

substituindo (i) em (ii):

$$\operatorname{sen}(30^\circ) \cdot \cos(\varphi) + \cos(30^\circ) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen}(\varphi) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\varphi) + \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\varphi) = 1 \quad (iii)$$

Aplicando a relação fundamental da trigonometria, em que o ângulo é (φ) , temos, $\operatorname{sen}(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$ e substituindo em (iii), temos:

$$\cos(\varphi) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 1$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 1 - \cos(\varphi) \quad (iv)$$

Elevando-se ambos os membros da equação (iv) ao quadrado, obtemos:

$$3 \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = 1 - 2 \cdot \cos(\varphi) + \cos^2 \varphi$$

$$4 \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\varphi) - 2 = 0 \quad (v)$$

Resolvendo a equação (v), obtemos:

$$\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0^\circ$$

ou,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ$$

Portanto, a diferença entre as fases será 120°

3 Algumas aplicações à Física

Neste capítulo, apresentamos algumas aplicações envolvendo os conceitos Trigonométricos e Físicos que foram desenvolvidos no capítulo 2, a título de ilustração de um trabalho interdisciplinar envolvendo essas disciplinas.

3.1 Ângulo em radiano no movimento circular

A Trigonometria é uma ferramenta essencial no estudo da cinemática angular, pois o entendimento de ângulo central correspondente a um arco em radianos é fundamental quando se analisa grandezas angulares e se faz necessário para o cálculo de velocidade angular e escalar, como também para se determinar o ângulo de giro por um roda, polia ou engrenagens ligados por contatos e por uma correia ou por um eixo em comum.

Nas aplicações 1 e 2, os conceitos Trigonométricos de ângulos em radianos, raio e comprimento de arcos se fazem indispensáveis.

- **Aplicação 1 (velocidade de um ponto na superfície da terra)**

(Adaptada [1], exemplo 5.11, p.105)

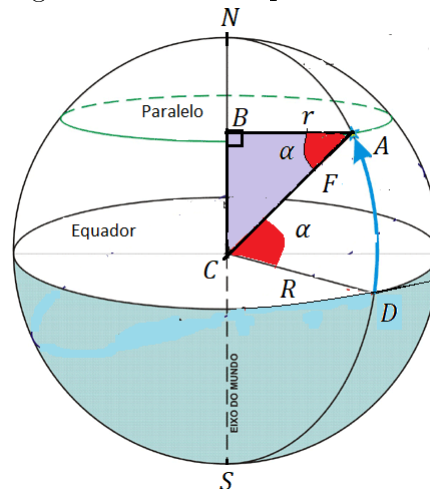
A Terra, suposta esférica, tem raio R , período de rotação T , gira uniformemente em torno do seu eixo com velocidade angular ω . Encontre uma expressão da velocidade escalar linear v de um ponto da superfície da Terra, devida apenas ao movimento de rotação em função da latitude (L).

Solução

Devido ao movimento de Rotação da Terra, todos os pontos na sua superfície movem-se com movimento circular uniforme. A latitude (L) do ponto A (figura 41) é definida como o ângulo α , que o raio $F = \overline{CA}$ faz com o raio $R = \overline{CD}$ no equador, como a Terra nessa aplicação é considerada esférica, então $F = R$. Quando a Terra gira em torno de \overline{NS} , um ponto A descreve uma circunferência de centro B e raio $r = \overline{AB}$, tal que, do triângulo retângulo destacado na figura 41, temos:

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{F} \Rightarrow r = F \cos(\alpha) \Leftrightarrow r = R \cos(\alpha) \quad (*)$$

Figura 41: Terra suposta esférica



Fonte: Próprio autor (2018)

A velocidade de um ponto na superfície da Terra é tangente à circunferência, e, dessa forma, paralela ao equador, assim, usando a equação (*) e substituindo na equação (11), temos:

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow v = \omega \cdot R \cos(\alpha) \quad (**)$$

Como o movimento de rotação da Terra é o giro que o planeta realiza ao redor de si mesmo, ou seja, ao redor do seu próprio eixo, o espaço angular do ponto A corresponde a uma volta ($2\pi \text{ rad}$) levando um tempo (T) denominado de período, assim:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T} \quad (***)$$

Substituindo (***) em (**), vem:

$$v = \omega \cdot R \cos(\alpha) = \frac{2\pi R \cos(\alpha)}{T} = \frac{2\pi R \cos(L)}{T}.$$

Observação 3.1. Usando o resultado da aplicação 1, podemos calcular a velocidade linear v de um ponto em Teresina (PI) com latitude aproximadamente 5° , considerando o raio da terra $R = 6371 \text{ Km}$. Temos:

$$v \approx \frac{2\pi \cdot 6371 \cdot \cos(5^\circ)}{24} \approx \frac{2\pi \cdot 6371 \cdot 0,996}{24} \approx 1,660,41 \text{ km/h} \approx 461,22 \text{ m/s}$$

Para [1], não sentimos os efeitos de tão alta velocidade porque estamos sempre nos movendo com essa velocidade e nossos corpos e sentidos estão acostumados a ela.

- **Aplicação 2 (Distância percorrida em função do ângulo de giro)**

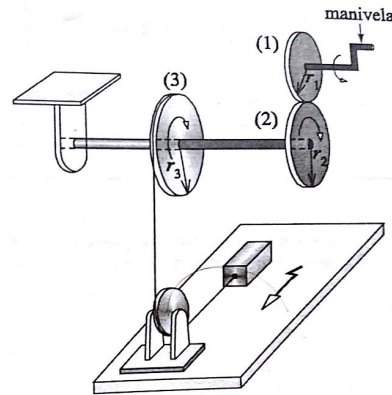
(Retirado de [27], exercício 34, p. 31)

Na figura 42, qual a distância em função de θ percorrida pelo bloco, se a manivela gira com o ângulo θ sem escorregar, sabendo-se que os raios das polias 1, 2 e 3 valem $6m$, $9m$ e $12m$ respectivamente ?

Solução

Por estarem em contato e sem escorregar, as polias 1 e 2 tem mesma velocidade linear

Figura 42: Manivela girando com ângulo θ



Fonte: [27], p.31

e conseqüentemente os comprimentos dos arcos (S_1 e S_2) definidos por elas são iguais, isto é:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \theta \cdot R_1 = \theta_2 \cdot R_2 \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{2\theta}{3} \text{ rad}$$

Notemos que as polias 2 e 3 tem eixo em comum, logo possuem velocidades angulares iguais, conseqüentemente descrevem os mesmos ângulos, ou seja,

$$\theta_2 = \theta_3 = \frac{2\theta}{3} \text{ rad.}$$

Como $S_3 = \theta_3 \cdot R_3$, temos:

$$S_3 = \frac{2\theta}{3} \cdot 12 = 8\theta \text{ m}$$

3.2 Seno, cosseno e tangente em vetores, plano inclinado e lançamento oblíquo

Em qualquer tema da Física do Ensino Médio, é inevitável trabalhar com dois tipos de grandezas: as grandezas escalares e as grandezas vetoriais. Por conta das grandezas vetoriais, que são representadas por vetores, à saber: velocidade, força, deslocamento, aceleração, etc., os conhecimentos de razões trigonométricas seno, cosseno, tangente,

teorema de Pitágoras, lei do seno e a lei do cosseno se fazem necessários, pois muitas das fórmulas que solucionam os problemas Físicos que envolvem essas grandezas utilizam esses temas.

- **Aplicação 3 (Plano inclinado sem atrito)**

(Adapada de [12], p.106)

Uma caixa de massa m encontra-se apoiada sobre um plano inclinado liso que forma um ângulo α com a horizontal e escorrega ladeira abaixo. Determine:

- a) a expressão da componente da Força responsável pelo movimento da caixa;
- b) a expressão da aceleração responsável pelo movimento.

Solução

a) Na figura 43, temos as forças aplicadas sobre a caixa: a força peso \vec{P} exercida pela terra e a força normal \vec{N} exercida pelo plano inclinado. O plano inclinado tem uma inclinação α com a horizontal, tem-se que a força Peso também forma um ângulo α com a direção normal N , pois α é o complemento do ângulo $(90^\circ - \alpha)$. Usando a decomposição da força peso em suas componentes, \vec{P}_x (horizontal) e \vec{P}_y (vertical) vide a figura 44, e aplicando a soma vetorial em $\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$, tem-se o triângulo retângulo de catetos \vec{P}_x e \vec{P}_y e hipotenusa \vec{P} .

Aplicando os conceitos de seno e cosseno,

$$\text{sen } \alpha = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P \cdot \text{sen } \alpha \Rightarrow P_x = m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{P_y}{P} \Rightarrow P_y = P \cdot \text{cos } \alpha \Rightarrow P_y = m \cdot g \cdot \text{cos } \alpha.$$

Considerando-se que a força resultante na vertical é nula, pois $N = P_y$, portanto, P_x é responsável pelo movimento da caixa.

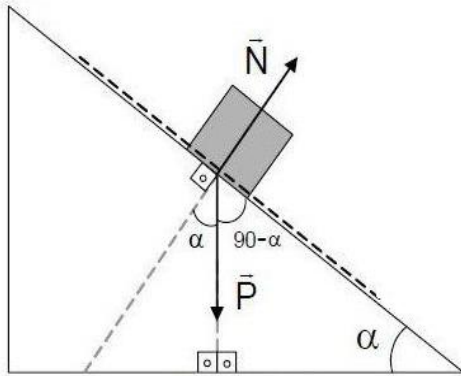


Figura 43: Plano inclinado sem atrito

Fonte: Próprio autor, (2018)

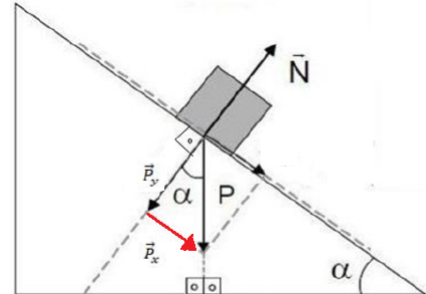


Figura 44: Plano inclinado sem atrito

Fonte: Próprio autor,(2018)

b) De acordo com o item a) a aceleração (a) adquirida pela caixa é causada pela componente P_x . Então pela segunda lei de Newton,

$$P_x = m \cdot a \Rightarrow P \cdot \text{sen } \alpha = m \cdot a \Rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen } \alpha = m \cdot a \Rightarrow a = g \cdot \text{sen } \alpha \quad (15)$$

• **Aplicação 4 (O Paradoxo de Galileu e os tempos de percurso)**

(Adaptado de [14], exercício 1.2, p. 9)

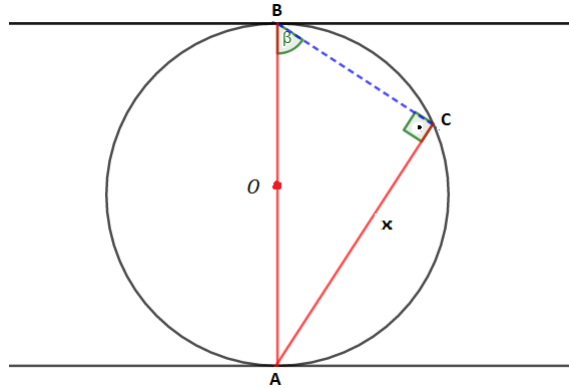
Mostre que corpos iguais abandonados num mesmo instante, a partir do ponto mais alto ou do ponto mais baixo de um círculo vertical por onde traçamos planos inclinados que cortam a circunferência, os tempos de descida destes corpos ao longo destes planos são iguais.

Solução

Considere um círculo vertical de centro O e diâmetro L e suas cordas \overline{AB} e \overline{AC} de comprimento L e x , respectivamente (figura 45) por onde os corpos podem deslizar livremente. No triângulo retângulo ABC , denotando o ângulo em $\hat{A}BC$ por β , tem-se:

$$\text{sen } \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{x}{L} \Rightarrow x = L \cdot \text{sen } \beta \quad (16)$$

Figura 45: Circulo Vertical



Fonte: Próprio autor (2018)

Suponhamos que dois corpos deslizem sobre essas cordas, uma partindo de B e outra de C ao mesmo tempo, a partir do repouso, então o corpo que se movimenta sobre o diâmetro (L) está sujeito à aceleração da gravidade (g), enquanto o corpo que desliza sobre \overline{AC} está com aceleração $a = g \cdot \text{sen } \beta$ (equação 15) da questão anterior.

Desprezando-se as forças de atrito, e a partir da equação horária da posição do corpo sobre o diâmetro, o tempo (t_1) necessário para percorrer \overline{AB} será dado por:

$$S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow L = \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \quad (17)$$

O tempo (t_2) de queda do corpo ao descer sobre \overline{AC} é :

$$x = \frac{at_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2x}{a}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2x}{g \cdot \text{sen} \beta}} \quad (18)$$

Substituindo-se a equação (16) em (18) obtemos:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L \cdot \text{sen } \beta}{g \cdot \text{sen } \beta}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g}} \quad (19)$$

Assim, das equações (17) e (19), temos, $t_1 = t_2$. Então, pode-se estender o resultado para mais corpos, já que o tempo de queda de corpos iguais abandonados

sobre o círculo vertical sempre se relaciona com o comprimento de uma corda e com sua aceleração, e esta por sua vez depende do seno do ângulo de inclinação.

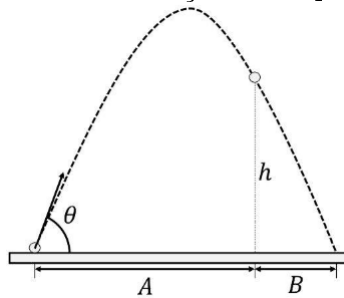
- **Aplicação 5 (Chutando na barra horizontal do gol)**

(Adaptada de [28], problema 3.58 p. 100 e resolvido em, [26])

No futebol americano, após um touchdown, o time tem a oportunidade de conquistar mais um ponto chutando a bola sobre a barra entre as través do gol. A barra fica a uma altura h acima do solo, e a bola é chutada do nível do solo obliquamente fazendo um ângulo θ com a horizontal a uma distância A metros da barra. Durante todo o movimento a bola fica sujeita somente à ação da gravidade. Sabendo que a bola toca a barra na altura h em relação ao solo, a linha vertical que passa pela bola divide a distância entre o ponto de lançamento e o ponto de retorno da bola ao solo em duas partes: A e B , conforme mostrado na

figura 46. Demonstre que $h = \frac{AB}{A+B} \operatorname{tg} \theta$

Figura 46: Bola lançada obliquamente

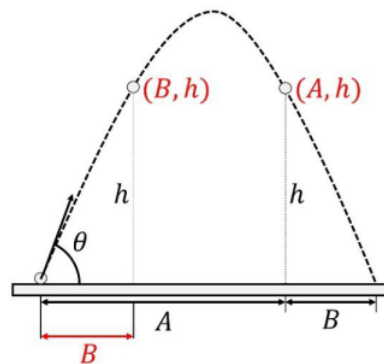


Fonte: Próprio autor, (2018).

Solução

Devido simetria da parábola (figura 47), temos um outro ponto que possui altura h e abscissa $x = B$. Vamos substituir esses dois pontos para chegar ao resultado pedido.

Figura 47: Bola lançada obliquamente



Fonte: Próprio autor,(2018).

Primeiramente, usando o ponto $(x, y) = (A, h)$ na equação 6, do lançamento oblíquo, vem:

$$h = (\operatorname{tg}\theta)A - \frac{g A^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot A - h}{A^2} \quad (*)$$

Substituindo o outro ponto $(x, y) = (B, h)$, na equação 6, temos:

$$h = (\operatorname{tg}\theta)B - \frac{g B^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot B - h}{B^2} \quad (**)$$

Fazendo (*) igual a (**), obtemos:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta \cdot A - h}{A^2} = \frac{\operatorname{tg}\theta \cdot B - h}{B^2}$$

$$B^2 \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot A - B^2 h = A^2 \cdot \operatorname{tg}\theta \cdot B - A^2 h$$

$$(A^2 - B^2)h = (A^2B - B^2A)\operatorname{tg} \theta$$

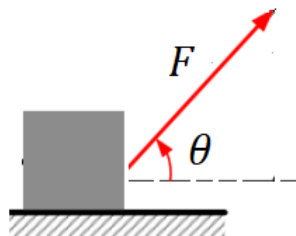
$$h = \frac{AB(A - B)}{(A^2 - B^2)}\operatorname{tg} \theta \Rightarrow h = \frac{AB}{A + B}\operatorname{tg} \theta$$

- **Aplicação 6 (Problema da Força mínima)**

(Adaptado de [18], exercício 235, p.88)

Uma caixa de massa m (figura 48), encontra-se apoiado sobre um plano horizontal áspero. O coeficiente de atrito entre o material da caixa e o plano vale μ . Se a gravidade no local vale g . Mostre que, a força mínima necessária para deslocar a caixa na direção horizontal, vale $F = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$

Figura 48: Força aplicada na caixa

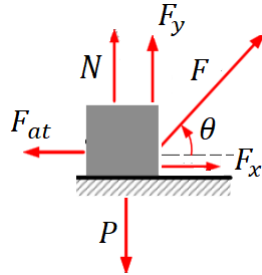


Fonte: Próprio autor, (2018)

Solução

Representando as forças que atuam no bloco pelo figura 49, temos:

Figura 49: Diagrama de forças



Fonte: Próprio autor, (2018)

na vertical,

$$N + F_y - P = 0 \Rightarrow N + F \operatorname{sen} \theta - P = 0 \Rightarrow N = P - F \operatorname{sen} \theta \quad (20)$$

Na horizontal, em iminência de escorregar, temos:

$$F_{at} = F_x \Rightarrow F_{at} = F \operatorname{cos} \theta \quad (21)$$

Substituindo a equação (20) na equação (3), temos:

$$F_{at} = \mu(P - F \operatorname{sen} \theta) \quad (22)$$

Substituindo a equação (21) na equação (22), vem :

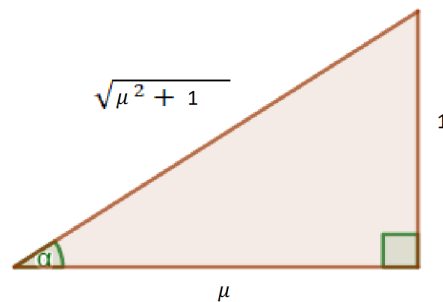
$$\mu(P - F \operatorname{sen} \theta) = F \operatorname{cos} \theta \Rightarrow F = \frac{\mu P}{(\operatorname{cos} \theta + \mu \operatorname{sen} \theta)} \quad (23)$$

Seja a função $g(\theta) = \operatorname{cos} \theta + \mu \operatorname{sen} \theta$, denominador da equação (23), construindo o triângulo retângulo (figura 50), e usando a substituição trigonométrica utilizada

em (1), obtemos a função $g(\theta) = \cos\theta + \mu\text{sen}\theta = \sqrt{\mu^2 + 1} \cdot \text{sen}(\theta + \alpha)$. Assim, substituindo na equação (23), temos:

$$F = \frac{\mu P}{(\cos\theta + \mu\text{sen}\theta)} \Rightarrow F = \frac{\mu P}{\sqrt{\mu^2 + 1} \cdot \text{sen}(\theta + \alpha)} \quad (24)$$

Figura 50: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor, (2018)

Neste caso, a equação (24) nos fornece o valor de F que torna iminente o escorregamento da caixa. Assim, o menor valor de F ocorrerá quando tivermos o maior valor do $\text{sen}(\theta + \alpha)$, isto é, $\text{sen}(\theta + \alpha) = \frac{\pi}{2}$, conseqüentemente,

$$F = \frac{\mu P}{\sqrt{\mu^2 + 1}} = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

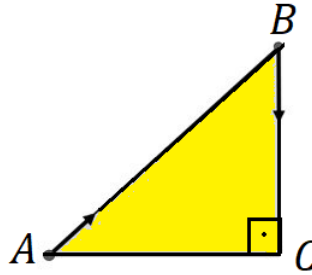
- **Aplicação 7 (O problema do tempo mínimo)**

(Adaptada de [18], questão 150, p. 62)

Em um triângulo retângulo, desenhado no plano horizontal, temos duas partículas posicionadas nos vértices como mostra a figura 51. Ambas começam a se movimentar com velocidade constante sobre os lados do triângulo. A partícula 1 percorreu o segmento \overline{AB} no mesmo intervalo de tempo que 2 percorreu o segmento \overline{BC} . Sabendo que o tempo necessário, contado a partir do início do

movimento, para que a distância entre as partículas seja a menor possível corresponde a uma fração f do tempo total do movimento. Determine o ângulo $\hat{A}BC$ em função dessa fração f .

Figura 51: Plano Horizontal



Fonte: Próprio autor, (2018).

Solução

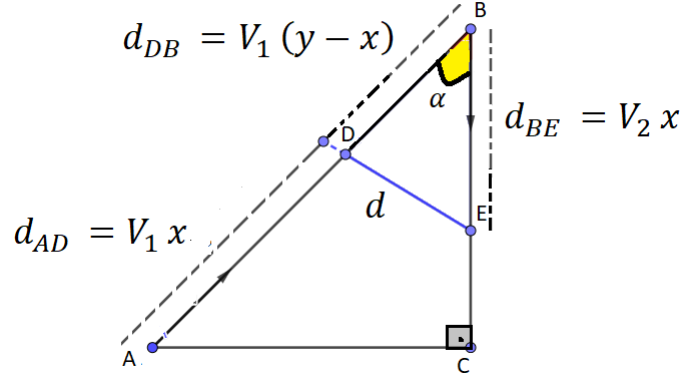
No triângulo ABC (figura 52), denotamos o ângulo $\hat{A}BC$ por α . Como as partículas se movem com velocidade constante sobre os catetos, podemos expressar as distâncias percorridas pelas partículas 1 e 2, respectivamente, por, $d_{AB} = V_1 y$ e $d_{BC} = V_2 y$. Sendo y o tempo total que cada partícula leva para percorrer os catetos. Seja, D o ponto entre A e B onde a partícula 1 se encontra após o instante mínimo de x segundos, E o ponto onde a partícula 2 se encontra entre os pontos B e C também no instante mínimo de x segundos, de modo que a distância entre D e E é mínima (figura 52). Logo a distância percorrida pela partícula 2 no instante x segundos no segmento \overline{BE} é $d_{BE} = V_2 x$, e após $(y - x)$ segundos a distância percorrida pela partícula 1 no segmento \overline{DB} é igual $d_{DB} = V_1 (y - x)$.

No triângulo ABC , temos:

$$\cos \alpha = \frac{V_2 y}{V_1 y} \Leftrightarrow V_2 = V_1 \cos \alpha \quad (25)$$

Aplicando a lei do cosseno no triângulo DBE (figura 52) e denotando o segmento

Figura 52: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor, (2018)

\overline{DE} por d , temos:

$$d^2 = V_1^2(y - x)^2 + V_2^2 x^2 - 2V_1(y - x)V_2 x \cos \alpha \quad (26)$$

Substituindo a equação (25) em (26), tem-se:

$$\begin{aligned} d^2 &= V_1^2(y - x)^2 + \cos^2 \alpha V_1^2 x^2 - 2V_1(y - x) \cos \alpha V_1 x \cos \alpha \\ &= V_1^2(y^2 - 2yx + x^2) + \cos^2 \alpha V_1^2 x^2 - 2yxV_1^2 \cos^2 \alpha + 2x^2V_1^2 \cos^2 \alpha \\ &= V_1^2[x^2(1 + 3 \cos^2 \alpha) - x(2y \cos^2 \alpha + 2y) + y^2] \end{aligned}$$

Sabendo-se que, $x^2(1 + 3 \cos^2 \alpha) - x(2y \cos^2 \alpha + 2y) + y^2$, representa uma equação de uma parábola na variável x com concavidade voltada para cima, o tempo mínimo será dado pela abscissa do vértice:

$$x = x_v = \frac{(2y \cos^2 \alpha + 2y)}{2(1 + 3 \cos^2 \alpha)} \Rightarrow x_v = \frac{y(\cos^2 \alpha + 1)}{(1 + 3 \cos^2 \alpha)}$$

Então, a fração f do tempo total do movimento é :

$$f = \frac{x_v}{y} = \frac{\frac{y(\cos^2 \alpha + 1)}{(1 + 3 \cos^2 \alpha)}}{y} = \frac{\cos^2 \alpha + 1}{1 + 3 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - f}{3f - 1}}$$

Portanto, $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{1-f}{3f-1}}$

3.3 As funções Trigonométricas e o Movimento Harmônico Simples (MHS)

O Movimento Harmônico Simples (MHS) é um movimento retilíneo com aceleração variável produzida por forças que se originam quando um corpo sai de sua posição de equilíbrio. Diz-se que um corpo oscila quando se move periodicamente em relação à sua posição de equilíbrio. O Movimento Harmônico Simples é um dos mais importantes dos movimentos oscilatórios, pois constitui uma boa aproximação de muitas das oscilações que ocorrem na natureza, à exemplo temos: bater das asas de um pássaro ou inseto, movimento dos pistões nos motores de automóveis, ondas do mar, ondas sonoras, etc..Esses movimentos são periódicos e por isso eles são modelados por funções seno e/ou cosseno.

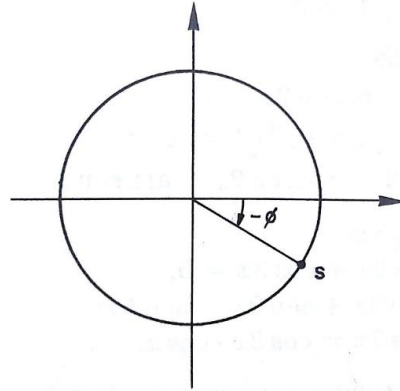
- **Aplicação 8 (Relação entre MCU e MHS)**

(Retirado de [10], exercício 13, p.65)

Uma partícula percorre, em sentido anti horário, o círculo de centro na origem e raio r , partindo, no instante $t = 0$, do ponto S , figura 53. Sua velocidade angular, constante, é ω radianos por segundo (isto é, em cada segundo ela percorre um arco de ω radianos). Seja Q a projeção ortogonal da partícula no eixo das abscissas. O movimento do ponto Q é dito harmônico simples e o ângulo ϕ indicado na figura 53 é chamado ângulo de fase. Diante das afirmações:

- a) determine a posição do ponto Q no instante t segundos;
- b) determine a amplitude (isto é, o afastamento máximo da origem) do movimento

Figura 53: Movimento de uma partícula no círculo



Fonte: [10], p.65

de Q ;

c) verifique que o movimento harmônico simples é periódico e determine o seu período;

d) determine a frequência (isto é, o número de períodos por segundo) do movimento harmônico.

Solução

Para resolver essa aplicação é necessário que façamos a relação entre o MHS e o MCU, pois sabemos que enquanto a partícula S efetua um MCU, sua velocidade angular ω é constante no sentido anti-horário de raio r , sua projeção Q , perpendicular no eixo das abscissas, efetua um MHS de forma simultânea.

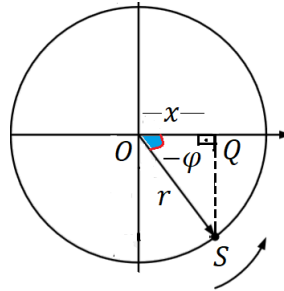
No triângulo OQS da figura 54, temos :

$$\cos(-\varphi) = \frac{x}{r} \quad (27)$$

Como a função cosseno é par, $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$, de (27), temos:

$$x = r \cos(\varphi) \quad (28)$$

Figura 54: Movimento de uma partícula S e sua projeção Q



Fonte: Próprio autor, (2018)

Como $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ e substituindo esses valor em (28), ficamos com:

$$x(t) = r \cos(\varphi_0 + \omega t). \quad (29)$$

Portanto, a Posição de Q no instante t segundos é dado por $x(t) = r \cos(\varphi_0 + \omega t)$.

b) Sabemos da trigonometria que o cosseno de um ângulo varia entre -1 e 1 , ou seja, $-1 \leq \cos(\varphi_0 + \omega t) \leq 1$. A amplitude que representa o máximo afastamento da origem do movimento de Q acontecerá quando o cosseno assumir o valor máximo, isto é, $\cos(\varphi_0 + \omega t) = 1$. Portanto da equação (29), a amplitude é máxima quando $x = r$.

c) Para verificar que o movimento é harmônico simples, basta notar que sua equação horária $x(t)$ é expressa em função do cosseno, isto é,

$x(t) = r \cos(\varphi_0 + \omega t)$. Para demonstrarmos que $x(t)$ é periódica de período T positivo, basta que tenhamos a identidade $x(t + T) = x(t)$, onde T não dependa do valor de t , isto é:

$$\begin{aligned} r \cos[\varphi_0 + \omega(t + T)] &= r \cos(\varphi_0 + \omega t) \\ \cos[\varphi_0 + \omega t + \omega T] &= \cos(\varphi_0 + \omega t) \end{aligned} \quad (30)$$

Logo, de acordo com a equação (31), obtemos:

$$T = \frac{|2\pi|}{\omega} \quad (*)$$

ou,

$$T = \frac{|-2\varphi_0 - 2\omega t + 2\pi|}{\omega}, \quad (**)$$

Desse modo, deve-se perceber que em (**), não satisfaz, pois T dependerá do valor de t escolhido. Portanto, $T = \frac{|2\pi|}{\omega}$.

d) Como a frequência é o inverso do período, temos:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{|2\pi|}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

• **Aplicação 9 (Mostrar que o movimento é harmônico simples)**

(Retirado de [10], exercício 14 p.66)

Uma partícula se movimenta sobre o eixo das abscissas de modo que sua abscissa no instante t em segundos é,

$$x(t) = \text{sen}(\pi t) + \sqrt{3} \cos(\pi t). (\text{distância em metros})$$

Mostre que o movimento da partícula é harmônico simples e determine a amplitude, ângulo de fase, o período e a frequência deste movimento.

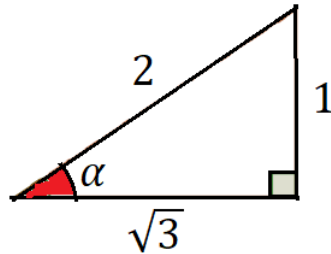
Solução

Para mostrarmos que o movimento dessa partícula é um MHS basta transformarmos $x(t)$ em uma única função trigonométrica. Para tanto, escrevemos o triângulo retângulo auxiliar conforme a figura 55.

No triângulo retângulo (figura 55), temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ conseqüentemente } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Figura 55: Triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor, (2018)

Logo,

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{cos}(\pi t) \right] \\&= 2 \cdot [\text{sen } \alpha \cdot \text{sen}(\pi t) + \text{cos } \alpha \cdot \text{cos}(\pi t)] \\&= 2 \cdot [\text{cos}(\pi t - \alpha)] \\&= 2 \cdot \text{cos} \left(\pi t - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}\tag{31}$$

Portanto, o movimento da partícula é um MHS. A partir da equação (32), comparando com a equação angular horária do MHS, $x(t) = a \cdot \text{cos}(\varphi_0 + \omega t)$, temos que a amplitude é $2m$. Da equação do ângulo de fase ($\varphi = \varphi_0 + \omega t$), temos:

$$\varphi = \frac{-\pi}{6} + \pi t.$$

Assim,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s$$

Logo, a frequência:

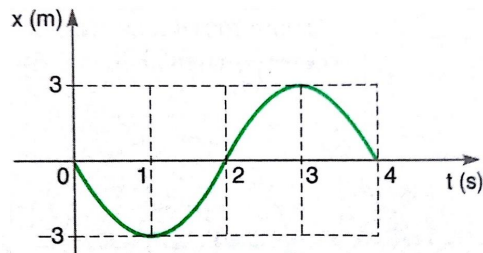
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} Hz$$

- **Aplicação 10 (Análise gráfica de um MHS)**

(Retirado de [7], exercício 35, p. 282)

A figura 56 mostra o gráfico horário da elongação de um móvel que realiza movimento harmônico simples.

Figura 56: Gráfico horário da elongação de um móvel



Fonte: [7] p.282

- Determine a amplitude, o período, a frequência, a pulsação e a fase inicial do movimento;
- Escreva as equações horárias da elongação, da velocidade escalar do movimento.

Solução

a) Observando-se o gráfico que representa a elongação desse móvel, percebemos que se trata de uma curva senoide ou cossenoide. Inicialmente, observamos que os pontos 3 m e -3 m são simétricos em relação a origem, o valor 3 m representa a elongação máxima (denominado de amplitude). Como o período (T) é o intervalo de tempo mínimo em que o movimento se repete. Temos, $T = 4\text{ s}$.

Assim, a frequência,

$$f = \frac{1}{4} = 0,25\text{ Hz}$$

Logo,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\text{ rad/s}$$

Para obter a fase inicial, substituímos $t = 0\text{ s}$ e $x = 0\text{ m}$, na equação da posição

em função do tempo do MHS, expressa por $x(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$, então:

$$0 = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 + \varphi_0\right) \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

b) do item a) obtemos a equação horária da elongação:

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Consequentemente, a equação horária da velocidade escalar é:

$$V = -\frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

4 Considerações finais

A finalidade deste trabalho é fazer com que os professores de Matemática do Ensino médio tenham um tratamento diferente para o ensinamento da Trigonometria, as quais emergem da necessidade de se trabalhar esse tópico subsidiado pela interdisciplinaridade.

A relação entre os conceitos Trigonométricos e Físicos são evidenciados no trabalho, pois essas duas disciplinas trabalham com medições, unidades angulares e fenômenos periódicos. E, o uso de conceitos trigonométricos envolvendo seno, cosseno e tangente são importantes ferramentas que solucionam alguns problemas Clássicos de Física, como o problema da Força mínima, a aceleração no plano inclinado sem atrito, determinação da velocidade num ponto da superfície da Terra em termos da latitude.

O estudo trigonométrico de arco e ângulo, são essenciais para a compreensão da cinemática angular, pois os conceitos de velocidade angular, velocidade linear, transmissão de movimento circular uniforme dependem do conhecimento do espaço angular, e este por sua vez, necessita do conceito Trigonométrico de ângulo em radiano.

As funções trigonométricas seno e cosseno, são essenciais para modelar o Movimento Harmônico Simples (MHS), já que esse tipo de movimento é periódico, e por esse motivo pode-se descrevê-lo por meio dessas funções, para podermos determinar alguns parâmetros como: amplitude, fase, frequência e período.

Assim, a intenção de propor o uso dos conceitos Trigonométricos em problemas de Física, é promover a interdisciplinaridade no sentido de contribuir e enriquecer com o

ensino e aprendizagem dessas duas disciplinas.

Referências

- [1] ALONSO, M.; FINN. *Física um curso universitário: Mecânica*, São Paulo: Edgard Blucher, 1972.
- [2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] BÔAS, N. V.; DOCA, R. H.; BISCOULA, G. J. *Tópicos de física: termologia, ondulatoria e óptica*. São Paulo : Saraiva, 2012.
- [4] BÔAS, N. V.; DOCA, R. H.; BISCOULA, G. J. *Tópicos de física: mecânica*. São Paulo : Saraiva, 2012.
- [5] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1974.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 1997. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 15 de fev. 2018.
- [7] CALÇADA, J. L. S. *Física clássica: óptica e ondas*. São Paulo: Atual, 1998.
- [8] CALÇADA, J. L. S. *Física clássica: mecânica*. São Paulo: Atual, 1998.
- [9] CALÇADA, J. L. S. *Física clássica: Cinemática*. São Paulo: Atual, 1998.
- [10] CARMO, M.; MORGADO, A.; WAGNER, E. *Trigonometria/ Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 1992.
- [11] EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Unicamp, 2011.

- [12] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. E. *Fundamentos da Física: mecânica*. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- [13] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. E. *Fundamentos da Física: Gravitação, ondas e termodinâmica*. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- [14] KÓSEL; STANISLAW . *Problemas de Física dirigido por S. Kósel*. Moscou: Mir, 1977.
- [15] LIMA, E. L. *Medida e forma em Geometria.*, Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [16] LIMA, E. L. *Números e funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
- [17] NETO, A. A. et al. *Trigonometria: Noções de matemática*. Fortaleza: Vestseller, 2009.
- [18] NETO, RENATO BRITO BASTOS. *Fundamentos da mecânica: cinemática / leis de Newton*. Fortaleza: Vestseller, 2010.
- [19] NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).
- [20] NETO, A. C. M. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).
- [21] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: mecânica* . São Paulo : Edgar Blucher, 2002.
- [22] OLIVEIRA, M. R. de *Trigonometria e Geometria Espacial*, 1. ed. Belém, 2017.
- [23] ROQUE, T. ; CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

- [24] TIPPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros: mecânica, oscilações e ondas*. Rio de Janeiro: LTC, (2006).
- [25] Turma ITA-MHS-Professor Herbert Aquino . Disponível:
<<https://telegram.me/joinchat/CTkgET76xsv4AmlWzB3w/>>. Acesso em:
05 fev 2018.
- [26] Rumo ao IME, ITA, AFA, AFA (2018)-Professor Marcio Mocelin . Disponível em:
<<https://telegram.me/joinchat/CTkgET76xsv4AmlWzB3w/>>. Acesso em: 25
jun. 2018.
- [27] VELÁSQUEZ F. A *Problemas de Trigonometría y como resolverlos*, colección
Racso, Perú (2005).
- [28] YOUNG, H. D.;FREEDMAN, R. A. *Física I : mecânica* . São Paulo : Pearson,
(2008)
- [29] YOUNG, H. D.;FREEDMAN, R. A. *Física II : termodinâmica e ondas* . São
Paulo : Pearson, (2008)