Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3ª série do Ensino Médio da cidade de União-PI: uma investigação acerca da Análise Combinatória

Antunino da Silva

Teresina

2018

Antunino da Silva

Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3ª série do Ensino Médio da cidade de União-PI: uma investigação acerca da Análise Combinatória

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior

Teresina

2018

S586r Silva, Antunino da.
Resolução de situações-problemas da OBMEP por alunos da 3ª série do Ensino Médio da cidade de União-PI : uma investigação acerca da análise combinatória/ Antunino da Silva. - 2018.
88 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2018.
Area de concentração: Matemática do Ensino Básico.
"Orientador: Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior."

1. Análise combinatória. 2. Ensino de matemática. 3. OBMEP. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí – UESPI
Ana Angélica P. Teixeira (Bibliotecária) CRB 3ª /1217

ANTUNINO DA SILVA

RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES- PROBLEMA DA OBMEP POR ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO DA CIDADE DE UNIÃO – PI: UMA INVESTIGAÇÃO ACERCA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA

Aprovado por:

Pedro Antônio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Roberto Arruda Lima Soares

Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares - Examinador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva- Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Outubro/2018

Antunino da Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI). No curso de Mestrado PROFMAT/UESPI foi bolsista pela CAPES. Atualmente é professor efetivo da Prefeitura Municipal de União, e da Prefeitura Municipal de Teresina.

Dedico este trabalho a Deus, à minha família e aos amigos.

Agradecimentos

A Deus, por ter-me dado força para chegar até aqui, e me abençoado com esta conquista.

À minha mãe que, apesar do pouco estudo, ensinou-me a dar os primeiros passos em busca do conhecimento.

À minha esposa e filhas pelo companheirismo, carinho e compreensão.

À minha avó (Iraci Gonçalves da silva), que sempre me apoiou nos meus estudos.

Às minhas irmãs, Naira, Sandra, Denise e Danielle, pela torcida.

Ao meu sogro e sogra, que sempre oraram e torceram por mim.

À minha família, para que um dia eles possa ler este trabalho e sentir-se motivada para o estudo da matemática.

Ao meu professor e orientador Dr. Pedro Antônio Soares Júnior, pela dedicação e pelos puxões de orelha.

Aos meus amigos de curso, pela união, amizade e momentos com os quais passamos juntos.

Aos professores do PROFMAT-UESPI, a minha gratidão.

À CAPES, pelo suporte financeiro, a ajuda foi de fundamental importância para que eu pudesse prosseguir nos meus estudos com mais tranquilidade.

À UESPI, pela oportunidade concedida.

Resumo

Este trabalho tem como objeto de estudo o ensino de matemática através da resoluções de situações-problema, com destaque na Análise Combinatória. Assim, buscamos responder à seguinte pergunta: Como a estratégia metodológica para resolver problemas matemáticos, criada por George Polya, possibilita o processo ensino e aprendizagem de Análise Combinatória na Educação Básica? Nessa perspectiva, o trabalho desenvolveu-se com o objetivo geral de analisar a importância das resoluções de situações-problema de Análise Combinatória, através da referida estratégia proposta por George Polya (1995). Desta forma, ao se considerar tal objetivo e questão problema, este estudo se caracteriza como pesquisa de campo e de abordagem qualitativa. Para tanto, teve como sujeitos investigados alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual, localizada na zona rural da cidade de União-PI. Para a produção dos dados e com o intuito de fazermos um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos investigados, acerca da Análise Combinatória, aplicamos dois pré-testes contemplando questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), nos níveis 1, 2 e 3 da primeira fase. Em seguida, apresentamos as estratégias de George Polya para resolver problemas matemáticos. Após intervenção do pesquisador, em que fizemos uso da observação participante (com intervenção), retomamos às mesmas situações-problema do segundo pré-teste, em que abordamos apenas as questões do nível 3 da primeira fase da OBMEP. Assim, a análise dos dados obtidos mostrou que há um grande déficit no aprendizado da Análise Combinatória. Na verdade, compreendemos que isso decorre da prática pedagógica abordada pelo professor que apresenta poucas vezes a resolução de situações-problema com os alunos. Neste estudo, vemos que uma possibilidade para melhorar este déficit é a de trabalharmos a resolução de situações-problema, conforme as aplicações das estratégias metodológicas defendidas por George Polya.

Palavras-chave : Análise Combinatória. Ensino de Matemática. Situações-problema. OBMEP.

Abstract

This work has as object of study the teaching of mathematics through the resolutions of problem situations, with emphasis in the Combinatorial Analysis. Thus, we seek to answer the following question: How does the methodological strategy to solve mathematical problems, created by George Polya, enable the teaching and learning process of Combinatorial Analysis in Basic Education? In this perspective, the work was developed with the general objective of analyzing the importance of problem-solving resolutions of Combinatorial Analysis, through the strategy proposed by George Polya (1995). Thus, considering this objective and problem question, this study is characterized as field research and qualitative approach. To do so, the subjects investigated were students from the 3º year of high school in a state public school, located in the rural area of the city of União-PI. For the production of the data and with the intention of making a diagnosis of the previous knowledge of the students investigated, about the Combinatorial Analysis, we applied two pre-tests contemplating questions of Brazilian Olympiad of Public School Mathematics (OBMEP), in levels 1, 2 and 3 of the first phase. Next, we present George Polya strategies for solving mathematical problems. After the intervention of the researcher, in which we made use of the participant observation (with intervention), we return to the same problem situations of the second pre-test, in which we only address the questions of level 3 of the first phase of OBMEP. Thus, the analysis of the data obtained showed that there is a great deficit in the learning of the Combinatorial Analysis. In fact, we understand that this stems from the pedagogical practice addressed by the teacher, who rarely presents problem-solving with students. In this study, we see that one possibility to improve this deficit is to work to solve problem situations, according to the applications of the methodological strategies defended by George Polya.

Keywords: Combinatorial Analysis. Mathematics Teaching. Situations-problem. OBMEP.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL[3], 1997), as estratégias metodológicas e raciocínios probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra a importância de uma abordagem cuidadosa dos conteúdos de contagem e probabilidade no Ensino Médio.

Ainda de acordo com os PCN, a prática mais frequente no ensino de Matemática era aquela em que o professor apresentava o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupunha que o aluno aprendia pela reprodução. Tal prática de ensino mostrou-se inadequada, pois a reprodução correta poderia ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir mas não aprendeu o conteúdo (BRASIL, 1997[3]).

Seguindo as orientações dos PCN, desenvolvemos este trabalho que tem como objeto de estudo o ensino de matemática através das resoluções de situações-problema, com destaque na Análise Combinatória. Diante da preocupação com os conceitos básicos de Análise Combinatória na Educação Básica, abordada de forma expositiva e teórica, muitas vezes sem contextualização, em que o professor fica refém do livro didático, e alienado a métodos antigos de ensinar matemática, apresentamos este trabalho que tem como objetivo geral analisar a importância das resoluções de situações-problema de Análise Combinatória, através das estratégias metodológicas propostas por George Polya (1995). Para tanto, elencamos os objetivos específicos: 1) apresentar algumas estratégias para resolver problemas matemáticos; 2) analisar as resoluções utilizadas por alguns alunos da 3ª série da escola pública estadual Dr. Ezequias Costa, do Ensino Médio da cidade de União-PI, no tópico de Análise Combinatória; 3) possibilitar a aprendizagem desse conceito matemático aos alunos envolvidos neste trabalho.

Por entendermos que o ensino deve possuir um caráter problematizador, em que o aluno possa levantar hipóteses, despertar curiosidades, questionamentos e opiniões, buscamos responder à seguinte pergunta (ou questão problema): Como a estratégia metodológica para resolver problemas matemáticos, criada por George Polya, possibilita o processo ensino e aprendizagem de Análise Combinatória na Educação Básica?

Para Polya *apud* Onuchic (1999[17], p.210), ""resolver problemas" era o mais importante para se fazer matemática, e "ensinar o aluno a pensar " era sua importância primeira". Apesar de ser importante e compor os currículos das civilizações antigas, a importância dada pelos educadores matemáticos a resolução de problemas é recente, como afirma Onuchic (1999[17], p.2003): "A importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção".

Para melhor entendimento do tema abordado, seguiremos esta sequência: inicialmente, na seção 2, apresentamos a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): seu surgimento e funcionamento. Na seção 3, abordamos alguns tópicos de Análise Combinatória. Já na seção 4, discutimos a importância do ensino de matemática através da resolução de situações-problema, bem como estratégias para resolver problemas de Análise Combinatória. Na seção 5 apresentamos o percurso metodológico abordado na oficina. Na seção 6, apresentamos os dados produzidos na oficina realizada com alguns alunos da 3ª série da escola pública estadual Dr Ezequias Costa, do Ensino Médio da Cidade de União-PI. Na seção 7, as considerações finais.

2 OBMEP: Um pouco da origem e funcionamento

Segundo Maciel e Basso (2009[11]), "Já no século XVI, eram famosos os desafios nos quais importantes matemáticos empenhavam sua reputação, razoáveis quantias em dinheiro e, até mesmo, suas cátedras em importantes universidades italianas". Nessa época foram feitas grandes descobertas matemáticas, pois boa parte dos matemáticos se empenhavam em encontrar soluções para problemas que pudessem ser usados como armas em competições futuras. Os melhores matemáticos (os que conseguiam resolver todos os desafios) possuíam uma cátedra em uma universidade, além de uma excelente condição financeira, prestígio e reconhecimento.

Conforme esses mesmos estudiosos, isso despertava o interesse dos mais jovens que almejavam ser iguais aos matemáticos reconhecidos, respeitados e com boa condição financeira. Esses jovens procuravam vencer duelos públicos motivados na maioria das vezes pela ambição. Nessas disputas, era proposto por ambos, um conjunto de trinta questões. O vencedor era o oponente que resolvesse corretamente a maior quantidade de questões propostas pelo adversário.

A esse respeito, Eves (2011[6]) complementa que, os matemáticos respeitados da época desenvolviam teoremas e não divulgavam, pois não queriam que fossem usados pelos seus oponentes. Alguns morreram e não divulgaram seu(s) teorema(s). Um desses casos foi o de Scipione Del ferro (1465- 1526). Em 1515, ele conseguiu desenvolver um método para resolução de equações cúbicas da forma $x^3 + mx = n$, e não divulgou o resultado, mas revelou o segredo ao seu discípulo chamado Antonio Maria Fior, mantendo o segredo escondido. Vinte anos mais tarde, Niccolò Fortuna de Brescia, mais conhecido como Tartaglia, anunciou ter descoberto um método algébrico que resolvia equações cúbicas do mesmo tipo que Scipione havia descoberto e estava em segredo. Fior, achando que se tratava de mentira, resolveu desafiar Tartaglia em um duelo de equações cúbicas. Com muito empenho, faltando poucos dias para a disputa, Tartaglia conseguiu descobrir mais um método para resolver equações cúbicas desprovidas do termo quadrático. No dia do duelo, Tartaglia foi o vencedor, pois sabia resolver dois tipos de cúbicas, enquanto Fior sabia apenas de uma.

Encontramos também em Maciel e Basso (2009[11]), que após vários anos, os matemáticos Húngaros, passaram a organizar a partir de 1894 as competições matemáticas chamadas "Eotvos". Essas competições são as precursoras do que hoje conhecemos como "Olimpíadas de Matemática". A primeira Olimpíada de Matemática Moderna foi realizada em 1934 na cidade de Leningrado, atualmente São Petersburgo na Rússia. Já a primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) foi realizada no ano de 1959 na cidade de Bucareste (Romênia). A partir daí se originalizaram várias olimpíadas.

Para Camacho (2017[4]), a OBMEP teve seu início em 2005, por uma iniciativa do diretor-geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), César Camacho e da presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Suely Druck, com o apoio da Presidência da República e do Governo Federal através do Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) e do Ministério da Educação (MEC). Sua primeira edição contou com a participação de doze milhões de estudantes, sendo recordista no mesmo ano em número de participantes em competições de matemática, superando o "Concurs Kangourou" que havia naquele ano contado com a participação de quatro milhões de competidores de vários países do mundo. Já sua 13ª edição, contou a participação de cerca de 99,4 % dos municípios participantes. O Projeto da OBMEP se beneficiou das experiências e sucessos da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e do projeto NUMERATIZAR.

Para Barbosa (2007[1]), o Projeto Linguagem dos Números - NUMERATIZAR é considerado uma das experiências mais bem sucedidas em relação a participação de alunos em Olimpíadas de Matemática. Esse projeto, desenvolvido a partir de 2003 no estado do Ceará, com supervisão da Universidade Federal do Ceará (UFC), foi motivado pelos resultados obtidos pela utilização da estratégia das Olimpíadas de Matemática nas Escolas Privadas de Fortaleza-CE, onde tais alunos se destacaram em Olimpíadas de Matemática e nos vestibulares do país durante alguns anos.

No ano 2017, as escolas privadas foram agregadas à OBMEP, sem perder sua essência e originalidade. Nela, participam alunos do 6º ano do Ensino Fundamental à 3ª série do Ensino Médio.

Segundo o Regulamento da OBMEP 2017, disponível em www.obmep.org.br, alguns dos seus objetivos são:

- Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.

De acordo com Camacho (2017[4]), a OBMEP se divide em duas fases e três níveis: a primeira fase é composta por 20 questões de múltipla escolha, em que todos os alunos das escolas inscritas participam. Já a segunda fase, é composta por 6 questões discursivas. A OBMEP possui uma prova diferente para cada nível. O 1º nível corresponde aos alunos do 6º e 7º ano; o 2º corresponde aos alunos do 8º e 9º ano; já o Ensino Médio compreende o nível 3. Em todas as edições da OBMEP, a quantidade de alunos inscritos nunca foi inferior a 10 milhões. Por isso, ela conta com um enorme trabalho de logística. Para facilitar a realização da OBMEP e para aproximá-la ainda mais das secretarias, escolas, professores e alunos, ela conta com o apoio de 70 coordenações regionais espalhadas por todo o país, situadas na maioria das vezes em Universidades Públicas e lideradas por Professores Universitários.

Ainda de acordo com o regulamento da OBMEP 2017, a quantidade de alunos aprovados para a segunda fase é feita da seguinte forma:

Tabela 1: Quantidade de aprovados no nivel 1

Nº DE INSCRITOS	Nº DE APROVADOS
1	1
2–40	2
41–80	4
81–140	7
141–240	12
acima de 240	5 %

Fonte: [22]

Tabela 2: Quantidade de aprovados no nivel 2

Nº DE INSCRITOS	Nº DE APROVADOS
1	1
2–40	2
41–80	4
81–140	7
141–240	12
acima de 240	5 %

Fonte: [22]

Tabela 3: Quantidade de aprovados no nivel 3

Nº DE INSCRITOS	Nº DE APROVADOS
1–6	todos
7–120	7
121–240	12
241–380	19
381–620	31
acima de 620	5 %

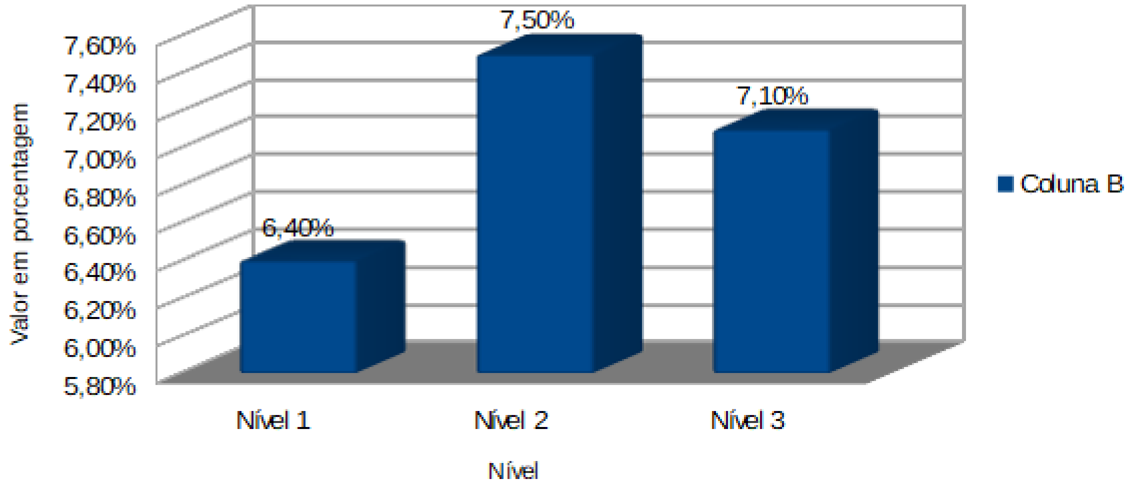
Fonte: [22]

Os alunos aprovados na segunda fase serão premiados com medalhas (ouro, prata ou bronze) ou menções honrosas de acordo com o desempenho de cada um. Além disso, os alunos premiados com medalhas poderão participar dos programas ofertados pela OBMEP. São eles: Programa de Iniciação Científica Jr (PIC) e Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME). Com as premiações dos alunos, as secretarias, escolas e professores também poderão ser premiados.

Para melhorar o desempenho dos competidores, a OBMEP disponibiliza um banco de questões, provas anteriores com as devidas soluções, apostilas do PIC, simulados, vídeos, e ainda alguns programas e portais, tais como: clube da matemática, portal da matemática, Polo Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI) e OBMEP na escola.

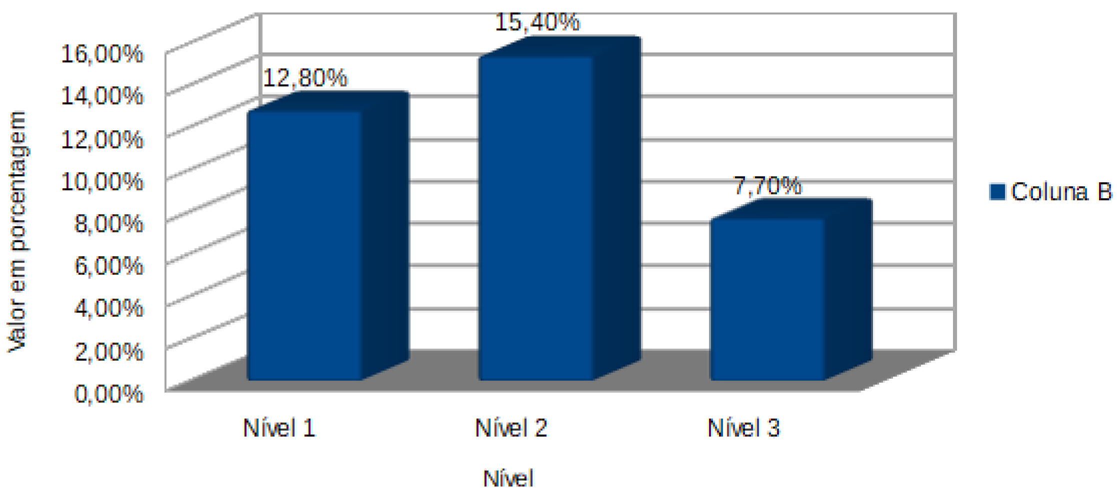
Quanto a Análise Combinatória na OBMEP, os gráficos abaixo mostram os percentuais de questões de seus conteúdos, deste a primeira edição até a edição de 2018, nos níveis 1, 2 e 3, das fases 1 e 2.

Figura 1: Total de Questões de Análise Combinatória na 1ª fase da OBMEP, anos 2005 a 2018.



Fonte: [22]

Figura 2: Total de Questões de Análise Combinatória na 2ª fase da OBMEP, anos 2005 a 2017.



Fonte: [22]

Como mencionamos anteriormente, as provas da primeira fase são composta por 20 questões, enquanto a segunda fase é composta apenas por 6. Observando os gráficos, podemos concluir que ao longo da história da OBMEP, houve na primeira fase aproximadamente 18, 21 e 20 questões dos níveis 1, 2 e 3 respectivamente. Já na segunda fase, houve nos níveis 1, 2 e 3 aproximadamente 10, 12 e 6 respectivamente.

3 Alguns Tópicos de Análise Combinatória

Para os autores de [15], o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China, (em torno de 1300) e antes disso, já era conhecido pelos hindus e árabes. O matemático hindu Báskhara (1114-1185) sabia calcular o número de permutações, combinações e de arranjos de n objetos. Michael Stifel (1486-1567) mostrou, em torno de 1550, como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. Sabemos também que o matemático árabe Al-Karaji (fins do século X) conhecia a lei de formação dos elementos do triângulo de Pascal.

Segundo os autores de [15], o primeiro registro do triângulo de Pascal no Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552). Niccolò Fontana de Brescia (1499-1559) relacionou os elementos do triângulo de Pascal com as potências de $(x+y)$. Pascal (1623-1662) publicou um tratado em 1654 mostrando como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$.

Os autores de [15] afirmam ainda que Abraham De Moivre (1667-1754) utilizou pela primeira vez a técnica das funções geradoras, que é muito útil para estudar sucessões recorrentes. Essa técnica foi bastante desenvolvida por Euler. Seu interesse surgiu devido a uma pergunta, prontamente respondida por Euler. Foi esse questionamento que deu origem a "teoria das partições". Devemos ainda a Euler, um teorema da teoria dos grafos, que é muito importante atualmente na Análise Combinatória.

Nesta seção, abordamos apenas os Princípios Multiplicativo e Aditivo, bem como as Permutações Simples e com Repetição que são os conteúdos necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Os exemplos e definições deste capítulo encontram- se em : [9], [10], [14], [15], [16] e [19]

3.1 Princípio Multiplicativo

De acordo com Morgado e Carvalho (2015[14]), o Princípio Multiplicativo diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 1. *([9], p.11) No País das Maravilhas existem três cidades A, B e C. Existem 6 estradas ligando A a B e 4 estradas ligando B a C. De quantas maneiras é possível dirigir de A a C passando por B ?*

***Solução**: Sejam D_1 o conjunto formado pelas estradas que ligam A até B e D_2 o conjunto formado pelas estradas que ligam B até C, como há 6 modos de tomar a decisão D_1 e 4 modos de tomar a decisão D_2, então é possível chegar de A a C passando por B de $D_1 \cdot D_2 = 6 \cdot 4 = 24$ maneiras.*

Os autores de [19] escrevem **a extensão do princípio multiplicativo** dizendo que, se D_i pode ocorrer de d_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, então esses eventos podem ocorrer, em sucessão, de $d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$ maneiras diferentes.

Demonstração: *Faremos a demonstração por Indução.*

Devemos provar que $D_1 \cdot D_2 \cdots D_n = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e os conjuntos $D_{n's}$ disjuntos 2 a 2.

I) Para $n = 2$, é verdadeiro, pois de acordo com os autores de [14], se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy. Desta forma, $D_1 \cdot D_2 = d_1 \cdot d_2$.

II) Suponhamos que $D_1 \cdot D_2 \cdots D_n = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$, para um certo $n \in \mathbb{N}$.

III) Devemos provar que a validade de n implica na validade de $n + 1$.

Assim, pela Hipótese de Indução e por I), temos: $D_1 \cdot D_2 \cdots D_n \cdot D_{n+1} = (D_1 \cdot D_2 \cdots D_n) \cdot D_{n+1} = (d_1 \cdot d_2 \cdots d_n) \cdot d_{n+1} = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \cdot d_{n+1}$.

Portanto , Se $D_1, D_2, \cdots, D_n$ são conjuntos finitos, disjuntos e não vazios, então $D_1 \cdot$

$D_2 \cdots D_n = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$. ■

Exemplo 2. *([9], p.11) Na loja "A festa do Chá" existem 5 tipos diferentes de xícaras de chá, 3 tipos diferentes de pires e 4 tipos diferentes de colheres de chá. Quantos conjuntos diferentes podem ser comprados consistindo em uma xícara, um pires e uma colher de chá?*

***Solução**: Chamaremos de D_1 o conjunto formado pelas xícaras, D_2 o conjunto formado pelos pires e D_3 o conjunto formado pelas colheres de chá. Como existem 5 xícaras, 3 pires e 4 tipos diferentes de colheres de chá, então a quantidade de conjuntos composto por uma xícara, um pires e uma colher de chá que podemos comprar, é $D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 =$* $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

3.2 Princípio Aditivo

Para os autores de [15], o Princípio Aditivo diz que se A e B são conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Exemplo 3. *(Inspirado em: [15], p.20) Numa sala há 2 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível formar um casal (homem e mulher)?*

***Solução**: Sejam H_1 e H_2 os homens e M_1, M_2 e M_3 as mulheres. Chamamos de A o conjunto formado pelos casais: H_1M_1, H_1M_2, H_1M_3 e B o conjunto formado por: H_2M_1, H_2M_2, H_2M_3. Como não há casais em comum entre A e B, os conjuntos A e B são disjuntos. Portanto, pelo Princípio Aditivo, a quantidade de casais distintos que podemos formar é o número de elementos de $A \cup B = 3 + 3 = 6$ casais.*

De acordo com os autores de [19], **a extensão do princípio aditivo** nos afirma que, se D_1, D_2, $\cdots$,D_n são conjuntos disjuntos 2 a 2, e se D_i possui d_i elementos, então a união $\cup_{i=1}^{n} D_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} d_i$ elementos.

Demonstração: *Faremos a demonstração por Indução.*

Devemos provar que o número de elementos de $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e os conjuntos $D_{n's}$ disjuntos 2 a 2.

I) Para $n = 2$, é verdadeira, pois de acordo com os autores de [15], se A e B são conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos, logo o número de elementos de $D_1 \cup D_2 = d_1 + d_2$.

II) Suponhamos que o número de elementos de $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ para um certo $n \in \mathbb{N}$.

III) Devemos provar que a validade de n implica na validade de $n + 1$.
Assim, pela Hipótese de Indução e por I), temos que o número de elementos de $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n \cup D_{n+1} = (D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n) \cup D_{n+1} = (d_1 + d_2 + \cdots + d_n) + d_{n+1} = d_1 + d_2 + \cdots + d_n + d_{n+1}$.
Portanto , Se $D_1, D_2, \cdots, D_n$ são conjuntos finitos, disjuntos e não vazios, então o número de elementos de $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$. ■

Exemplo 4. *(Inspirado em: [19], p.41) Um amigo mostrou-me 3 livros diferentes de matemática, 5 livros diferentes de física e 8 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?*
***Solução**: Para solucionar o problema devemos prosseguir da seguinte forma: chamaremos de D_1 as maneiras de escolhermos dois livros de matérias diferentes, sendo elas matemática e física. Como temos 3 maneiras de escolhermos o livro de matemática e 5 maneiras para escolhermos o de física, então pelo princípio multiplicativo, temos $3 \cdot 5 = 15$ maneiras de escolhermos dois livros, sendo eles de matemática e física, ou seja, há 15 modos de tomarmos a decisão D_1.*

D_2 é o total de maneiras de escolhermos dois livros de matérias diferentes, sendo elas matemática e química. Como temos 3 maneiras de escolhermos o livro de matemática e 8 maneiras para escolhermos o de química, então pelo princípio multiplicativo, temos $3 \cdot 8 = 24$ maneiras de escolhermos dois livros, sendo eles de matemática e química. Desta forma, há 24 modos de tomarmos a decisão D_2.

Agora, chamaremos de D_3 o total de maneiras de escolhermos dois livros de matérias diferentes, sendo elas física e química. Como temos 5 maneiras de escolhermos o livro de física e 8 maneiras para escolhermos o de química, então pelo princípio multi-

plicativo, temos $5 \cdot 8 = 40$ *maneiras de escolhermos dois livros, sendo eles de física e química. Assim, há 40 modos de tomarmos a decisão* D_3.

Note que os conjuntos D_1, D_2, D_3 *são disjuntos. Portanto usaremos a extensão do princípio aditivo para descobrirmos o total de maneiras de escolhermos os dois livros. Logo o número de elementos da* $\cup_{i=1}^{3} D_i$ *é igual ao* $\sum_{i=1}^{3} d_i = 15+24+40 = 79$ *maneiras.*

3.3 Permutações

Nesta sub-seção, estudaremos apenas a permutação simples e a permutação com repetição.

3.3.1 Permutação Simples

Seja um conjunto $A = \{a, b\}$, podemos permutar seus elementos das seguintes maneiras: $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$. Ou seja, há duas permutações simples para um conjunto formado por 2 elementos.

Um conjunto com os elementos $\{1, 2, 3\}$, podemos permutá-los das seguintes maneiras: $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 3, 2\}$; $\{2, 1, 3\}$; $\{2, 3, 1\}$; $\{3, 1, 2\}$ e $\{3, 2, 1\}$. Há $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutações simples para um conjunto formado por 3 elementos.

Para um conjunto $D = \{a, b, c, d\}$ com 4 elementos, há as seguintes permutações simples: $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, d, c\}$, $\{a, c, b, d\}$, $\{a, c, d, b\}$, $\{a, d, c, b\}$, $\{a, d, b, c\}$, $\{b, d, c, a\}$, $\{b, a, d, c\}$, $\{b, c, a, d\}$, $\{b, c, a, b\}$, $\{b, d, c, a\}$, $\{b, d, a, c\}$, $\{c, b, a, d\}$, $\{c, b, d, a\}$, $\{c, a, b, d\}$, $\{c, a, d, b\}$, $\{c, d, a, b\}$, $\{c, d, b, a\}$, $\{d, b, c, a\}$, $\{d, b, a, c\}$, $\{d, c, b, a\}$, $\{d, c, a, b\}$, $\{d, a, c, b\}$, $\{d, a, b, c\}$. Logo, há $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ permutações simples para um conjunto de 4 elementos.

Desta maneira, podemos confirmar com os autores de [15] que dados n objetos distintos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, o número de maneiras de ordená- los é

$$n(n-1) \cdots 1 = n!$$

Para Morgado e Carvalho (2015[14]), cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações simples das letras a, b, c são $(abc), (acb), (cba)$, $(bca), (bac)$ e (cab). Portanto o número de permutações simples de n objetos distintos é $P_n = n!$

Exemplo 5. *([14], p.114) e ([10], p.94) Quantos são os anagramas da palavra "calor"?*
***Solução**: Como as letras da palavra "calor "são todas distintas, então para encontrarmos todos os anagramas, basta fazermos a permutação de suas letras*

$$P_n = 5! = 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Logo, a palavra calor possui 120 anagramas.

3.3.2 Permutação com Repetição

Ao permutarmos as letras da palavra "osso ", notamos que o anagrama $(ssoo)$, por exemplo, será contado como 4 anagramas diferentes, pelo fato de podermos permutar os s e os o entre si. Logo devemos dividir P_4 por 2!2!. Desta maneira, a palavra "osso" possui $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ anagramas.

Para Morgado e Carvalho (2015[14]), o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\cdots} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots}$. Ao leitor interessado na demonstração, ver ([19],p.101-102).

Exemplo 6. *([16], p.33) Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A , ele quer dar 9 pulos e parar exatamente em B. De quantas maneiras ele poderá fazer isso?*
***Solução**: Primeiramente, vamos analisar o seguinte: Para o gafanhoto sair do ponto A e parar no ponto B ao final do nono pulo, ele deverá dar x pulos para frente e y pulos para trás, visto que a distância entre os pontos A e B é igual a 5 metros. Vamos procurar os valores de x e y. Escrevendo um sistema de equações nas características*

mencionadas, temos: $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 7$ *e* $y = 2$. *Assim o gafanhoto dará 7 pulos para frente e 2 pulos para trás. O gafanhoto chegará ao ponto* B, *partindo do ponto* A *de* $P_n^{\alpha,\beta} = P_9^{7,2} = \dfrac{9!}{7!2!} = \dfrac{9 \cdot 8}{2} = 36$ *maneiras, sendo* n *o total de pulos,* α *o total de pulos para frente e* β *a quantidade de pulos para trás.*

4 Resolução de Problemas como Estratégia para o Ensino de Matemática

Apresentamos nesta seção, a definição de problema matemático, tipos de problemas matemáticos, a importância do ensino de matemática através da resolução de problemas, heurística da resolução de problemas, estratégias para resolver problemas matemáticos e alguns exemplos práticos.

4.1 O que é um Problema Matemático?

Segundo Dante (2002[5]), um problema matemático é toda situação que requer a descoberta de informações matemáticas , e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado.

Já para Frank Lester *apud* Milani,

> [...] um problema é uma tarefa e, portanto: - o indivíduo ou o grupo que o enfrenta quer ou precisa encontrar uma solução; - não há um procedimento imediatamente acessível que garanta ou determine de maneira completa as soluções; - o indivíduo ou o grupo devem fazer um esforço para encontrar uma solução. (Milani, 2011[12], p. 39).

Para os PCN, "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início. No entanto é possível construí-la". (BRASIL, 1997[3], p. 44).

Dante (2002[5]) afirma que os objetivos da resolução de problemas matemáticos são: fazer o aluno pensar, desenvolver o raciocínio, dar ao estudante a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática, equipar o estudante com estratégias para resolver problemas e dar uma boa base matemática às pessoas.

Com base nos objetivos e no conceito de problemas, podemos entender o que são problemas matemáticos. Vejamos os seguintes exemplos:

(1) Uma mãe tem duas maçãs, três peras e quatro laranjas. Durante nove dias ela dá uma fruta para seu filho no café da manhã. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Observe que para resolvermos esse exemplo, a resposta não é de imediato. Devemos primeiramente entender o problema. O que queremos encontrar? Quais são os dados do problema? O passo seguinte é elaborar um plano de ação e, em seguida executá-lo.

(2) Calcule P_5.

Para resolvermos esse exemplo, basta sabermos fazer uma permutação simples dos 5 elementos. Ele já propõe de maneira direta a execução do plano de ação.

Assim percebemos que apenas o exemplo (1) se trata de um problema, pois tivemos que entender o exemplo, extraí os dados, elaborar um plano de ação e executá-lo, enquanto no exemplo (2), executamos de imediato o plano de ação.

4.2 Tipos de Problemas Matemáticos

Polya (1995[18]) caracterizou os problemas matemáticos em 4 tipos: problemas rotineiros, problemas de determinação, problemas de demonstração e problemas práticos:

> Problemas rotineiros: De modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido. [...] Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e de paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter a oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas. Problemas de determinação: tem por objetivo encontrar um certo objeto, a incógnita. Os problemas de determinação podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas. Podemos procurar determinar incógnitas de todos os tipos; podemos tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar, construir todos os tipos imagináveis de objetos. Problemas de demonstrações: têm por objetivo mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa. Temos de responder à pergunta: esta afirmativa é verdadeira ou falsa? E temos de respondê-la conclusivamente, quer provando-a verdadeira, quer provando-a falsa. Problemas práticos: são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmo e ambos os casos. Os problemas práticos da Engenharia geralmente envolvem problemas matemáticos. Um exemplo muito ilustrativo de problema prático é a construção de uma barragem sobre o rio. (POLYA, 1995[18], p. 124).

Dante (2002[5]) também deu sua contribuição para a classificação dos problemas, classificando-os em: problemas-padrão, problemas-processo, problemas de aplicação e problemas de quebra-cabeça:

- Problemas-padrão: a solução já está contida no enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, com o objetivo de recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações;
- Problemas-processo ou heurísticos: sua solução envolve as operações que não estão contidas no enunciado, exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação;
- Problemas de aplicação: também chamados de situações-problema, são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos;
- Problemas de quebra-cabeça: constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque. (Dante, 2002[5], p. 16)

4.3 A importância do ensino de matemática através da resolução de problemas

De acordo com Onuchic (1999[17]), no início do século XX o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e reproduzia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media o conhecimento do aluno com a aplicação de teste em que, se repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que o aluno sabia. É bem verdade que alguns desses alunos chegavam a compreender o que faziam. Conseguiam pensar sobre o que trabalhavam e isso os fazia especiais. Em pouco tempo, a maioria esquecia do que havia memorizado.

Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender matemática com compreensão. Essa reforma descartava a anterior. As tabuadas e seus treinos eram condenados. O aluno devia entender o que fazia. Porém o professor falava, o aluno escutava e repetia, não participando da construção de seu conhecimento. O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas padrão ou para aprender algum conteúdo novo.

Nessa época começou se a falar em resolver problemas como um meio de se aprender matemática. Conforme (Andrade *apud* Onuchic,1999[17] p.201):

> A primeira vez em que a resolução de problemas é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro *how to salve it*, de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904.

Para Gazire *apud* Onuchic (1999[17]), os estudos realizados até o final da década de 1950 sobre resolução de problemas matemáticos nos Estados Unidos, em sua maioria indicavam que a criança, para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, deveria exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas.

Na mesma década, Bloom e Broder questionavam as pesquisas, até então desenvolvidas sobre solução de problemas, pela ênfase que vinha sendo dada aos produtos das soluções em vez de valorizar os processos implícitos da resolução criativa de problemas. Esses pesquisadores, para melhor captarem as estratégias de resolução, estudaram os processos de resolução utilizados pelos melhores estudantes. Para que isso fosse possível, os alunos tinham que pensar em voz alta durante o processo. Com base em suas pesquisas, defenderiam que o ensino de resolução de problemas deveria centrar-se no ensino de estratégias para resolver problemas, pois acreditavam que os hábitos de resolução de problemas poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática.

Onuchic (1999[17], p.203) relata no trecho a seguir, o início do ensino de resolução de problemas enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática:

> O ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sobre a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 60.

Já Andrade *apud* Onuchic (1995[17]), relata que em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares teve início na década de 1970. Embora grande parte da literatura hoje conhecida em resolução de problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70, os trabalhos de Polya já existiam e datam de 1944. Após o final da década de 1960, a metodologia de investigação, utilizando sessões de resolução de problemas em grupo e com os alunos se manifestando em voz alta, tornou-se prática comum. O período de 1962 a 1972 marcou a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma qualitativa.

Ainda de acordo com Onuchic (1999[17]), no fim dos anos 70, a resolução de problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Iniciou-se o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Em 1980 é editado nos Estados Unidos, uma publicação do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) que chamava a todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos buscar uma melhor educação matemática para todos. A primeira dessas recomendações dizia que "resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80 " e destacava que "o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por essa década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da competência matemática". Ainda estava escrito no documento, que resolução de problemas abrange uma grande quantidade de rotinas e lugares comuns, assim como funções não rotineiras consideradas essenciais na vida diária dos cidadãos. Dizia ainda que é preciso preparar os indivíduos para tratar de problemas especiais com que irão se deparar em suas próprias carreiras.

4.4 Heurística da Resolução de Problemas

Ao lermos a palavra *heurística*, vem-nos a seguinte pergunta: o que é heurística? Para Ferreira(2009[7], p.1035):

> [Do latim: cient. heurística (< gr.heuristiké [téchne], “arte de encontrar ”, “descobrir ”).] S. f. 1. Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas. [Cf. heureca.] 2. Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar. 3. Ciência auxiliar da História, que trata da pesquisa das fontes. 4. Inform. Metodologia, ou algoritmo, us. para resolver problemas por métodos que, embora não rigorosos, ger. refletem o conhecimento humano e permitem obter uma solução satisfatória.

Para Polya (1995[18], p.86), “o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras de descoberta e da invenção”.

Ainda de acordo com Polya (1995[18], p.89), “A Heurística visa à generalidade, ao estudo de procedimentos que independem do assunto em questão e são aplicáveis a problemas de toda sorte”.

Pappus, grande matemático grego, também fez estudos sobre heurística. Segundo (Polya, 1995[18], p.104):

> Pappus, grande matemático grego, viveu provavelmente em torno do ano 300 de nossa era. No Livro VII, das suas *collectiones*, Pappus descreve um ramo de estudo que ele chamou de *analyomenos*. Podemos traduzir este nome por "Tesouro da Análise", ou"Arte de Resolver Problemas" ou, mesmo, "Heurística".

Em seguida, segue um trecho de uma versão do texto original:

> "A chamada Heurística é, em suma, um corpo especial de doutrina para uso daqueles que, depois de terem estudado os Elementos comuns, desejam adquirir a capacidade de rosolver problemas matemáticos e somente serve para este fim".(Pappus *apud* Polya, 1995[18], p.104)

4.4.1 Estratégias para Resolver Problemas Matemáticos

Para Tao (2013[20]), "... a solução de um problema começa (e continua, e termina) com passos simples e lógicos. Mas desde que avancemos numa direção clara e firme...".

Ainda de acordo com Tao (2013[20]), devemos sempre tentar resolver um problema matemático da maneira mais simples possível, sem querer complicá-lo, mas usando passos corretos. "Se por acaso, venhamos errar na resolução, poderemos sempre recomeçar tudo novamente, e tentar outras técnicas". Para facilitar a resolução de um problema matemático, Polya (1995[18]) descreve as etapas que devem ser seguidas: compreender o problema; estabelecer um plano de ação; executar o plano e revisar a solução.

(1) Compreender o problema.

Para Polya (1995[18], p.4), "é uma tolice tentar responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida".

De acordo com Polya (1995[18]), para compreender o problema, o enunciado verbal precisa ficar bem entendido. Ele deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, incógnita, os dados, a condicionante.

Afirma ainda que:

> O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçar um figura e nela indicar a incógnitas e os dados.[...] (Polya, 1995[18], p.4)

No exemplo a seguir, mostramos as partes principais para a compreensão de um problema, segundo Polya.

Exemplo 7. *(Exemplo extraído da primeira fase da OBMEP, nível 2, ano 2010) De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e menor sejam ímpares e o outro seja par?*

– Qual é a incógnita?

A quantidade de maneiras possíveis de escolher três números inteiros de 1 a 19.

– Quais são os dados?

Os números inteiros de 1 a 19.

– Qual é a condicionante?

O maior e o menor número deve ser ímpar e o outro par.

(2) Estabelecer um plano de ação.

Polya (1995[18]) descreve que temos um plano de ação, quando conhecemos as contas, os cálculos ou desenhos que precisamos executar para obter a incógnita.

Sabemos que é difícil ter uma boa ideia para estabelecermos o plano de ação se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se nada soubermos.

Polya (1995[18]) descreve dois passos que poderão nos auxiliar a estabelecermos um plano de ação. São eles: conhecer algum problema que tenha a mesma incógnita e conhecer um problema correlato.

(3) Executar o plano.

Segundo Polya (1995[18]):

> O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro. (Polya, 1995[18], p.9)

Polya (1995[18]) afirma que se o estudante não criou o plano, recebeu apenas por influência do professor, ele pode esquecê-lo facilmente. Porém se ele mesmo houver preparado o plano, mesmo com ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente cada passo.

(4) Revisar a solução.

Ainda de acordo com Polya (1995[18]), os estudantes poderão consolidar seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas, desde que façam um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até esse.

Ele ainda escreve que após executar o plano, é sempre possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí, a conveniência de verificações, em particular, se houver algum processo rápido e intuitivo para verificar, quer o resultado, quer o argumento, ele não deverá ser desprezado.

4.4.2 Estratégias de Polya: Passo a passo da resolução de alguns problemas da OBMEP

Exemplo 8. *(Problema extraído da OBMEP-2005, 1ª fase, nível 3) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais* *o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?*

Solução:

1º Passo: Compreender o problema

- Qual a incógnita?

A quantidade de bilhetes que Marcelo comprou.

- Quais os dados?

Bilhetes numerados de 1000 a 9999.

- Qual a condicionante?

Os bilhetes que Marcelo comprou devem aparecer o algarismo sete exatamente três vezes e o zero não aparecer.

2º Passo: Estabelecer um plano de ação

Primeiramente procuramos pensar em um problema conhecido que tenha a mesma incógnita. Como não conhecemos nenhum, buscamos um problema correlato.
Um problema correlato: Quantos anagramas possui a palavra SASS? Para resolvermos o problema correlato, basta calcularmos P_4^3.

Nosso plano de ação é usar a mesma ideia do problema correlato para resolver nosso problema.

3º Passo: Executar o plano

Um possível bilhete comprado por Marcelo é o bilhete 7771. Podemos encontrar $P_4^3 = \dfrac{4!}{3!} = 4$ *bilhetes em que o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o outro algarismo é o numeral 1.*

De acordo com o 1º passo, o algarismo sete deve aparecer exatamente três vezes e o *zero não deve aparecer. Desta forma, três algarismos é o 7, o outro poderá ser um dos algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9. Assim, efetuamos a multiplicação* $4 \cdot 8 = 32$ *bilhetes.*

4º Passo: Revisar o problema

Analisamos o percurso que fizemos no 3º passo, e observamos cada afirmação e operação matemática. Elas estão corretas. Caso contrário, teríamos que corrigir o(s) erro(s), podendo até mesmo, se necessário executar um novo plano de ação. Esta etapa é importante para consolidar nosso conhecimento.

Exemplo 9. *(Problema extraído da OBMEP-2006, 1ª fase, nível 3) Quantos são os números menores que 10000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque* $4 \times 5 \times 5 = 100$.

Solução:

1º Passo: Compreender o problema

- Qual a incógnita?

A quantidade de números menores que 10000, tais que o produto de seus algarismos seja igual a 100.

- Quais os dados?

Números menores que 10000.

- Qual a condicionante?

O produto de seus algarismos deve ser igual a 100.

2º Passo: Estabelecer um plano de ação

Procuramos pensar em um problema conhecido que tenha a mesma incógnita. Por não conhecermos, buscamos um problema correlato, chegando a conclusão de que tam-

bém não conhecemos. Neste caso, criamos um plano de ação novo para resolver esse problema e, que poderá nos auxiliar na resolução de problemas futuros.

Criação do plano de ação: No problema fala que o produto dos algarismos deve ser igual a 100, então devemos descobrir os divisores de 100. Feito isso, encontraremos a quantidade de números menores que 10000 tais que seus algarismos sejam os divisores de 100 e o produto entre eles resulte em 100. Podemos notar que os números menores que 10000 com as características mencionadas são números de 3 e 4 algarismos.

3º Passo: Executar o plano

Os divisores de 100 são: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100. Só podemos usar os divisores que possui um único algarismo. Assim usaremos somente os algarismos 1, 2, 4 e 5, na condição de que o produto entre eles seja igual a 100 e o numeral formado por eles seja menor que 10000.

Os produtos entre os algarismos 1, 2, 4 e 5 que resultam em 100, não podendo usar 5 algarismos pois será um número maior que 10000, são: $4 \cdot 5 \cdot 5; 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5$ *e* $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. *Como a multiplicação é comutativa, podemos permutar cada multiplicação que o produto continua sendo igual a 100.*

I) $4 \cdot 5 \cdot 5$ *gera* $P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$ *permutações.*

II) $1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5$ *gera* $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ *permutações*

III) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ *gera* $P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ *permutações.*

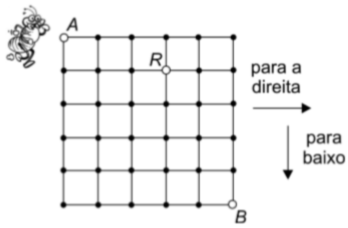
Somando as permutações de I), II) e III), obtemos 21 permutações. Portanto, 21 é a quantidade de números menores que 10000, tais que o produto de seus algarismos seja 100.

4º Passo: Revisar o problema

Analisamos o percurso que fizemos no 3º passo, e observamos cada afirmação e *operação matemática. Elas estão corretas. Esta etapa é importante para consolidar nosso conhecimento.*

Exemplo 10. *(Problema extraído da OBMEP-2008, 1ª fase, nível 3) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?*

Figura 3: Quadriculado



Fonte: [22]

Solução:

1º Passo: Compreender o problema

- Qual a incógnita?

A quantidade de maneiras de uma formiguinha fazer um trajeto em um quadriculado partindo de um ponto A, passando pelo ponto R e chegando no ponto B.

- Quais os dados?

A figura abaixo.

- Qual a condicionante?

Andar apenas para a direita ou para baixo.

2º Passo: Estabelecer um plano de ação

Este tipo de problema é bastante conhecido, por isso conhecemos vários com a mesma incógnita.

Um plano de ação para resolvê-lo é contar o total de segmentos que a formiguinha deve andar no quadriculado nos sentidos e direções descritos no problema, partindo do ponto A e chegando ao ponto R. Em seguida fazer uma permutação com repetição. Na sequência, usar a mesma ideia para descobrir a quantidade de maneiras da formiguinha chegar ao ponto B partindo do ponto R. Por fim, faremos a multiplicação das duas permutações. Este é o plano de ação.

Note que conhecer uma incógnita semelhante facilitou nosso plano de ação.

3º Passo: Executar o plano

Para chegar ao ponto R partindo do ponto A, a formiguinha deverá andar em três segmentos com sentido para direita e um segmento com sentido para baixo, que resulta em 4 segmentos. Desta maneira faremos a permutação dos 4 elementos com 3 repetidos. $P_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$ *maneira de chegar em R partindo de A.*

Para chegar em B partindo de R, a formiguinha deverá andar dois segmentos com sentido para a direita e quatro segmentos com sentido para baixo, totalizando 6 segmentos. Assim, faremos a permutação dos 6 elementos com a repetição de 2 segmentos com sentido para direita e 4 com sentido para baixo. $P_6^{2,4} = \frac{6!}{2!4!} = 15$

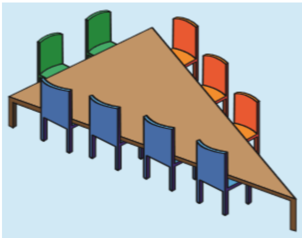
Fazendo a multiplicação das permutações, temos $4 \cdot 15 = 60$ *como resultado. Portanto, a formiguinha poderá fazer um trajeto em um quadriculado partindo de um ponto A, passando pelo ponto R e chegando no ponto B de 60 maneiras.*

4º Passo: Revisar o problema

Observamos o percurso que fizemos no 3º passo, e constatamos que as afirmações e operações matemáticas estão corretas. Caso contrário, teríamos que corrigir o(s) erro(s), podendo até mesmo, se necessário executar um novo plano de ação. Esta *etapa é importante para alicerçar nosso conhecimento.*

Exemplo 11. *(Problema extraído da OBMEP-2012, 1ª fase, nível 3) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?*

Figura 4: Mesa triangular



Fonte: [22]

Solução:

1º Passo: Compreender o problema

- Qual a incógnita?

A quantidade de maneiras que 6 amigos podem sentar-se em uma mesa triangular de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e do mesmo lado.

- Quais os dados?

A figura abaixo.

- Qual a condicionante?

Alice e Bernardo devem ficar juntos e do mesmo lado.

2º Passo: Estabelecer um plano de ação

Procuramos pensar em um problema conhecido que tenha a mesma incógnita, não conhecemos nenhum, logo buscamos um problema correlato.

Um problema correlato: Quantos anagramas possui a palavra BRASIL de modo que as letras B e R apareçam sempre juntas? Para resolvermos o problema correlato, basta calcularmos a permutação do total de letras subtraído de uma unidade e no final multiplicar por 2.

Usaremos a mesma ideia do problema correlato para solucionar nosso problema. Como Alice e Bernardo devem permanecer sempre juntos e do mesmo lado, faremos as permutações em cada lado do triângulo e, na sequência efetuaremos a soma entre elas. O resultado são as possíveis posições de Alice e Bernardo ficarem juntos e do mesmo lado. Em seguida usaremos o princípio multiplicativo para encontrarmos o total de maneiras dos quatro amigos restantes se sentarem. Por último, multiplicaremos o total de maneiras de Alice e Bernardo ficarem juntos, com o total de maneiras dos quatro amigos restantes se sentarem à mesa.

3º Passo: Executar o plano

Para aplicarmos nosso problema na situação do problema correlato, faremos o seguinte: no lado que possui duas cadeiras chamaremos elas de A e B. Nos lados que possuem 3 e 4 cadeiras chamaremos as cadeiras de A, B, C e A, B, C, D respectivamente, sendo que em cada lado as cadeiras A e B deverão permanecerem sempre juntas. Note que após usarmos a ideia do problema correlato para encontrarmos a permutações das cadeiras de modo que as cadeiras A e B permaneçam sempre juntas, devemos dividir o resultado pela permutação das outras cadeiras da fila, pois ao especificarmos cada cadeira por um nome, as permutações ABCD e ABDC por exemplo, representarão permutações diferentes, mas como no enunciado da questão as cadeiras não recebem nome, logo ABCD e ABDC representarão a mesma permutação. Assim:

I) No primeiro lado, há 2 cadeiras, nenhuma ficará vazia, logo há $\dfrac{2 \cdot P_{(2-1)}}{0!} = 2$ *permutações.*

II) No segundo lado, há 3 cadeiras, apenas uma ficará vazia, assim há $\dfrac{2 \cdot P_{(3-1)}}{1!} = 4$ *permutações.*

III) No terceiro lado, há 4 cadeiras, duas ficarão vazias, logo o total de maneiras é $\dfrac{2 \cdot p_{(4-1)}}{2!} = 6$.

Para encontrarmos o total de maneiras dos outros 4 amigos se sentarem, usamos o princípio multiplicativo, citado na criação do plano de ação. São 7 cadeiras para 4 amigos, para o primeiro amigo há 7 possibilidades de escolha, 6 para o segundo, 5 para o terceiro e 4 para o quarto amigo, $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ *maneiras.*

Somando I), II) e III), obtemos $2+4+6 = 12$ *e multiplicando por 840, encontramos a quantidade de maneiras que 6 amigos podem sentar-se em uma mesa triangular de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e do mesmo lado.*

Portanto $12 \cdot 840 = 10080$ *é a quantidade de maneiras que 6 amigos podem sentar-se em uma mesa triangular de modo que Alice e Bernado fiquem juntos e do mesmo lado.*

4º Passo: Revisar o problema

Analisamos o percurso que fizemos no 3º passo, e examinamos com cuidado cada afirmação e operação matemática. Elas estão corretas. Caso contrário, teríamos que corrigir o(s) erro(s), podendo até mesmo, se necessário executar um novo plano de ação. Esta etapa é importante para consolidar nosso conhecimento.

Exemplo 12. *(Problema extraído da OBMEP-2014, 1ª fase, nível 3) Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1000?*

Solução:

1º Passo: Compreender o problema

- Qual a incógnita?

A quantidade de números inteiros de cinco algarismos cujo os produtos entre seus algarismos é igual a 1000.

- Quais os dados?

Números de 10000 a 99999.

- Qual a condicionante?

O produto de seus algarismos deve ser igual a 1000.

2º Passo: Estabelecer um plano de ação

De imediato lembramos que o exemplo 9 é um problema correlato, logo usaremos as mesmas ideias para resolvermos nosso problema proposto.

O plano de ação é determinar os divisores de 1000 que possuem um único algarismo, na sequência usar as permutações para encontrar os números entre 10000 a 99999 cujo produto entre eles seja igual a 1000. Os números que devemos usar na permutação são os divisores de 1 000 que possuem um único algarismo. Essa é a condição para o produto resultar em 1000.

3º Passo: Executar o plano

Os divisores de 1000 que possuem apenas um algarismo são: 1, 2, 4, 5 e 8.

Os produtos entre os algarismos 1, 2, 4, 5 e 8 que resultam em 1000 usando cinco algarismos, são: $1 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ *e* $4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. *Como a multiplicação é comutativa, podemos permutar cada multiplicação que o produto continua sendo igual a 1000.*

I) $1 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ *gera* $P_5^3 = \dfrac{5!}{3!} = 20$ *permutações.*

II) $4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ *gera* $P_5^3 = \dfrac{5!}{3!} = 20$ *permutações*

Somando as permutações de I) e II), obtemos 40 permutações. Portanto, 40 é a quantidade de números inteiros de cinco algarismos cujo os produtos entre seus algarismos é igual a 1000.

4º Passo: Revisar o problema

Analisamos o percurso que fizemos no 3º passo, e constatamos que as afirmações e operações matemáticas estão corretas. Caso contrário, teríamos que corrigir o(s) erro(s), podendo até mesmo, se necessário executar um novo plano de ação. Esta etapa é importante para consolidar nosso conhecimento.

5 Metodologia aplicada na oficina

Nesta seção tratamos do percurso metodológico deste estudo. Para isso, fizemos primeiramente a caracterização da oficina. Logo após, apresentamos os sujeitos investigados. Na sequência, a descrição dos instrumentos de produção de dados e, por último os procedimentos de análise de dados.

5.1 Caracterização da oficina

A presente oficina se caracteriza como pesquisa de campo qualitativa, pois os dados são coletados diretamente no ambiente onde a mesma é realizada e conforme Minayo(1994, p. 53), a pesquisa de campo é "o recorte que o pesquisador faz em termos de espaço, representando uma realidade empírica a ser estudada a partir das concepções teóricas que fundamentam o objeto da investigação ", toda pesquisa que tem estas característica recebe esta qualificação.

A oficina foi desenvolvida na Unidade Escolar Dr. Ezequias Costa com aplicação de dois pré-testes, com duração de 2 horas cada um, uma capacitação com duração de 20 horas e um pós teste com duração de 2 horas, cujos resultados encontram-se descritos na seção 6. Vale lembrar que o primeiro pré-teste envolveu a resolução de problemas de Análise Combinatória retirados dos níveis 1 e 2 da primeira fase da OBMEP. Já o segundo pré-teste envolveu a resolução de problemas de Análise Combinatória retirados do nível 3 da primeira fase da OBMEP.

Considerando a referida oficina também como qualitativa, devido a relação estabelecida entre os sujeitos envolvidos afim de que os resultados sejam significativos como aponta Teixeira (2006, p. 137):

> Na pesquisa qualitativa o pesquisador procura reduzir a distância entre a teoria e os dados, entre o contexto e a ação, usando a lógica da análise fenomenológica, isto é, da compreensão dos fenômenos pela sua descrição e interpretação. As experiências pessoais do pesquisador são elementos importantes na análise e compreensão dos fenômenos estudados.

Contudo, a oficina contou ainda com uma base de fundamentação teórica que sustentou toda argumentação nela apresentada.

5.2 Sujeitos/participantes da oficina

Este trabalho teve como sujeito alunos de uma turma da 3ª série do Ensino Médio da modalidade regular da Unidade Escolar Dr. Ezequias Costa. A turma é composta por 25 alunos, mas somente 14 participaram da oficina. Os demais alunos não participaram pelo fato do transporte escolar não ter buscado os mesmos no dia da aplicação do primeiro pré-teste. Dentre os 14 alunos participantes, 6 (seis) alunos são do sexo masculino e 8 (oito) do sexo feminino, na faixa etária de 16 a 19 anos.

5.3 Campo/ambiente da oficina

Os dados da oficina foram produzidos e coletados em uma escola pública estadual localizada no Povoado Novo Nilo, Zona Rural de União-PI.

Figura 5: Escola Estadual Dr. Ezequias Costa

Fonte: Próprio autor (2018).

O estabelecimento de ensino conta com 7 salas de aula, as mesmas não apresentam boa condição física e as salas não são climatizadas. A escola não possui biblioteca, nem laboratório de informática, mas tem acesso a internet, inclusive ela foi a primeira do Piauí e a segunda do Brasil a receber o programa Internet Para Todos, do Governo Federal. Ela conta ainda com alguns *notebooks*, computadores, impressora, televisão, caixa de som e microfone.

5.4 Instrumento de produção de dados

Para a produção dos dados e com o propósito de fazermos um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos acerca das estratégias utilizadas por eles para resolver situações-problema no tópico da Análise Combinatória, aplicamos dois pré-testes (em anexo) através de um questionário composto por 10 questões subjetivas, tendo como base as provas da OBMEP, primeira fase, nos níveis 1 , 2 e 3. Para a aplicação de cada pré-teste, foram disponibilizadas 2 horas para que os alunos respondessem o questionário.

A fim de que os alunos investigados melhorassem seus conhecimentos acerca da utilização de estratégias para resolver situações-problema da Análise Combinatória, fizemos uma capacitação mostrando algumas estratégias segundo a teoria de Polya, citado no capítulo anterior a serem utilizadas mediante cada situação-problema. A capacitação teve duração de 20 horas.

Para verificar o resultado da capacitação, aplicamos um pós-teste, que consta do mesmo questionário do segundo pré-teste.

5.5 Procedimento de análise dos dados

Durante a aplicação da oficina, os dados foram analisados e organizados levando-se em conta ao percurso metodológico que adotamos e dividida em etapas como veremos, a seguir:

1ª etapa: Aplicação de uma atividade diagnóstica (primeiro pré-teste);

2ª etapa: Aplicação de outra atividade diagnóstica (segundo pré-teste);

3ª etapa: Apresentação de algumas estratégias para resolver situações-problema de Análise Combinatória;

4ª etapa: Aplicação de outra atividade diagnóstica (pós-teste).

É importante ressaltarmos que, no questionário da 1ª etapa abordamos situações-problema da OBMEP, nos níveis 1 e 2, da primeira fase. Já no questionário da 2ª etapa, trabalhamos com as situações-problema da referida olimpíada, no nível 3, da primeira fase. No questionário da 4ª etapa, aplicamos às mesmas situações-problema do segundo pré-teste.

Com os dados coletados para este estudo, trabalhamos com o uso de categorias, no propósito de que o processo de análise de dados fosse desenvolvido de forma mais clara. Para isso, seguimos as orientações de Fiorentini e Lorenzato (2012[8], p.134):

> A *categorização* significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns. Nesse processo, existem alguns princípios que devem ser observados pelos pesquisador. O primeiro deles é que o conjunto das categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias.[...]

Em concordância com essas orientações, elencamos duas categorias, as quais serão discutidas no próximo capítulo, são elas:

1) Os conhecimentos prévios dos alunos investigados acerca dos conhecimentos matemáticos da Análise Combinatória;

2) Os conhecimentos posteriores dos alunos investigados acerca dos conhecimentos matemáticos da Análise Combinatória.

6 Análise e discussão dos dados

Nesta seção, discutimos as duas categorias apresentadas na seção anterior.

6.1 Os conhecimentos prévios dos alunos investigados acerca dos conhecimentos matemáticos de Análise Combinatória

Nessa categoria, a pesquisa contou com a aplicação de 2 pré-testes (Questionários) compostos por 10 questões subjetivas sobre análise combinatória com ênfase nas situações-problemas da 1ª fase da OBMEP.

Estes pré-testes tiveram a finalidade de avaliarmos os conhecimentos prévios dos 14 (quatorze) alunos investigados, sobre Análise Combinatória.

Primeiramente exibimos a **tabela 4** com os resultados do primeiro pré-teste, e apresentamos um gráfico em cada situação-problema, em que podemos fazer as observações de maneira mais clara. Fizemos as análises dos resultados e, na sequência expomos a **tabela 5** com os resultados do segundo pré-teste, e também apresentamos um gráfico com os resultados de cada situação-problema. Logo após fizemos as análises dos resultados.

As impressões e análises do resultados, por aluno, conforme as tabelas, registramos: C como correta, E como errada e B como questão em branco.

Tabela 4: Resultados do primeiro pré-teste

ALUNOS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
1	C	E	E	E	E	E	B	E	C	C
2	C	E	B	E	B	B	B	E	C	C
3	C	E	E	E	E	E	B	E	C	C
4	C	E	E	E	E	E	B	E	C	C
5	C	E	E	B	B	B	B	E	C	C
6	C	E	E	E	E	E	B	E	C	C
7	B	E	E	B	B	B	B	E	C	E
8	C	B	B	B	B	B	B	B	C	E
9	C	E	B	E	E	B	B	E	C	C
10	C	E	E	E	E	B	B	E	C	C
11	C	E	E	E	E	B	E	B	C	E
12	C	E	B	E	E	E	B	E	C	C
13	C	E	B	B	B	B	B	B	B	B
14	C	E	B	B	B	B	B	E	C	C

Fonte: Próprio autor

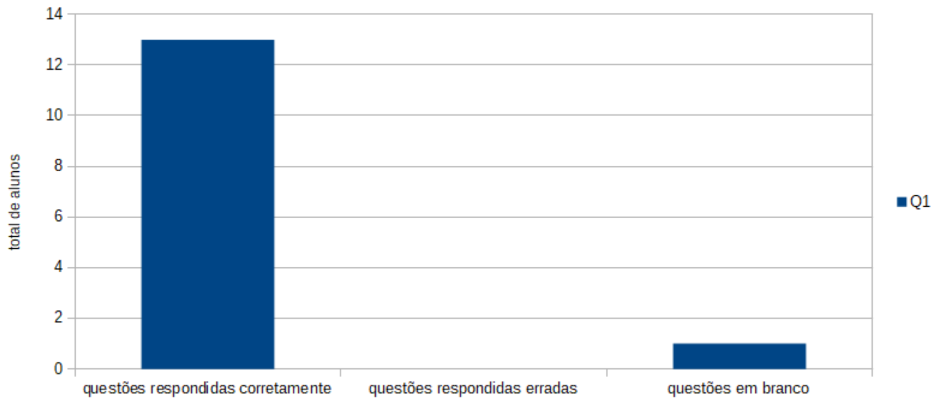
É importante enfatizarmos que antes da realização do pré-teste (questionário) com as 10 situações-problema, os alunos que estavam presentes no dia da aplicação, afirmaram que todos haviam estudado Análise Combinatória no ano anterior, porém alguns deles falaram que não lembravam mais e, não sabiam por quê estudar tal conteúdo, visto que não usamos no dia-a-dia.

Partindo destas afirmações, percebemos que as experiências destes alunos em relação a Análise Combinatória, são baseadas no ensino tradicional, ou seja, ensino repetitivo. Tal prática é inadequada, como vimos na página 34 e 35.

Voltando as análises do pré-teste (tabela 4) acerca do desempenho dos alunos por questão, separadamente.

1 (Problema extraído da OBMEP-2013, 1ª fase, nível 1) Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

Figura 6: Resultados da 1ª questão do primeiro pré-teste

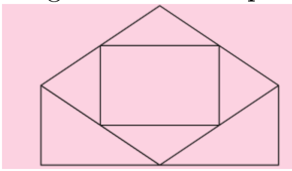


Fonte: Próprio autor (2018)

Destacamos que na primeira questão, de um universo de 14 alunos, 13 (93%) alunos responderam corretamente a questão e apenas 1 (7%) aluno deixou-a em branco. Tal questão é considerada fácil, pois os alunos podem escrever todas as maneiras, visto que são apenas 3.

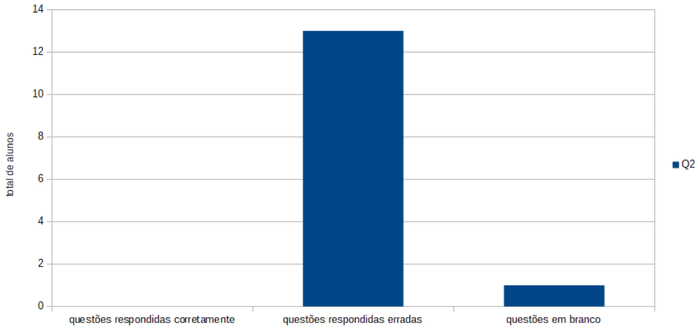
2 - (Problema extraído da OBMEP-2013, 1ª fase, nível 2) De quantas maneiras é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?

Figura 7: Envelope



Fonte:[22]

Figura 8: Resultados da 2ª questão do primeiro pré-teste

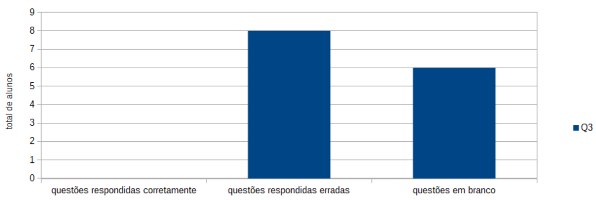


Fonte: Próprio autor (2018)

Na segunda questão, o aluno deveria usar o princípio multiplicativo e aditivo para respondê-la. Todos os alunos que responderam a questão, fizeram de forma errada, pois usaram apenas o princípio multiplicativo. Dos 14 alunos observados, 13 (93%) responderam errado a questão e 1 (7%) deixou a questão em branco.

3 - (Problema extraído da OBMEP-2014, 1ª fase, nível 2) O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

Figura 9: Resultados da 3ª questão do primeiro pré-teste

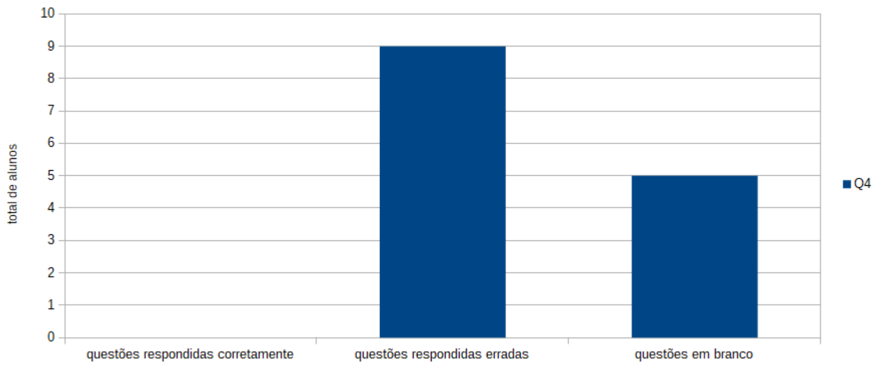


Fonte: Próprio autor (2018)

Uma maneira de responder a questão 3, é descobrir a quantidade de números de 4 algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Existem 5 possibilidades de escolhas para um algarismo ímpar e $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ possibilidades para escolha de dois algarismos pares, excluindo o 0. Na sequência, basta fazer a permutação simples dos 4 elementos e multiplicar por $5 \cdot 6 = 30$. No final, deve-se subtrair as possibilidades dos números começar por 0. Para começar com 0, existem $1 \cdot P_3 \cdot 30 = 180$. Assim o resultado será $P_4 \cdot 30 - 180 = 24 \cdot 30 - 180 = 720 - 180 = 540$ números. Observamos que 8 (57%) alunos responderam a questão de forma errada e, 6 (43%) alunos deixaram em branco.

4 (Problema extraído da OBMEP-2015, 1ª fase, nível 2) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Figura 10: Resultados da 4ª questão do primeiro pré-teste

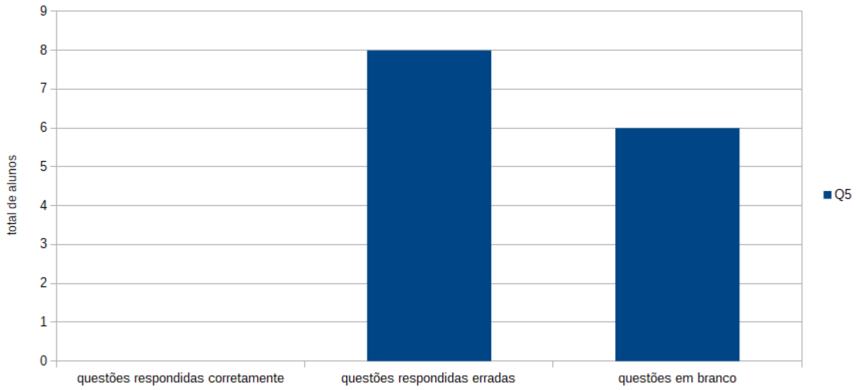


Fonte: Próprio autor (2018)

Para resolver a questão 4, o aluno deve observar que as possíveis premiações são: dois ouros, duas pratas, dois bronzes, um ouro e uma prata, um ouro e um bronze ou uma prata e um bronze. Note que há 3 possibilidades para premiação com medalhas distintas e 3 com medalhas idênticas. Como são 5 pessoas, para as medalhas distintas, há $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$. Já para as medalhas idênticas, existem $3 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 30$. Desta forma há $60 + 30 = 90$ maneiras diferentes de ocorrer a premiação. Dentre os 14 alunos investigados, 9 (64%) alunos responderam a questão de maneira errada e 5 (36%) deixaram em branco.

5 - (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 2) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB,..., AAZ, ABA, ABB,..., ABZ,..., AZA, AZB,..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

Figura 11: Resultados da 5ª questão do primeiro pré-teste

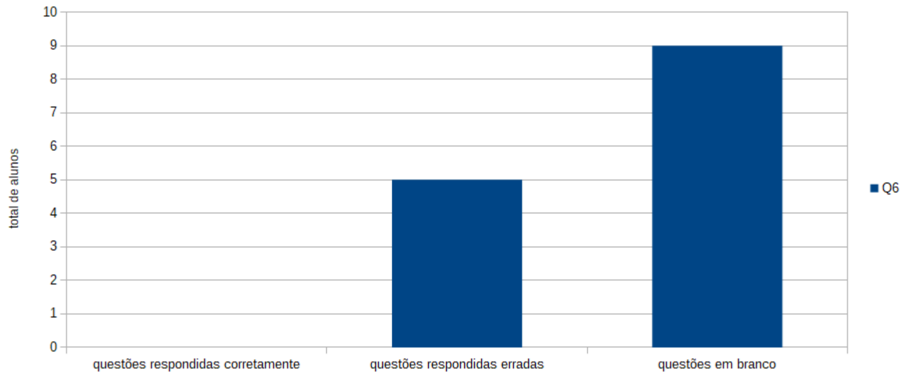


Fonte: Próprio autor (2018)

Sobre a questão 5, uma maneira de responder corretamente, é dividir as possibilidades em conjuntos: os que começam com a letra A, os que começam com a letra B, os que a letra C e os que começam com a letra D. Para determinar a quantidade de livro que começa com a letra A, basta calcular $26 \cdot 26 = 676$ livros que começam com a letra A. Assim há 676 livros que começam com a letra B, 676 que começam com C e 2 livros que começam com a letra D. Na sequência, basta usar o princípio aditivo para determinar a quantidade de livro que há na biblioteca. Dessa forma, na biblioteca existem $676 + 676 + 676 + 2 = 2030$ livros. Analisando as resoluções dos alunos acerca desta situação problema, constatamos que 8 (57%) alunos responderam de maneira errada e, 6 (43%) alunos deixaram em branco.

6 - (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 2) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Figura 12: Resultados da 6ª questão do primeiro pré-teste



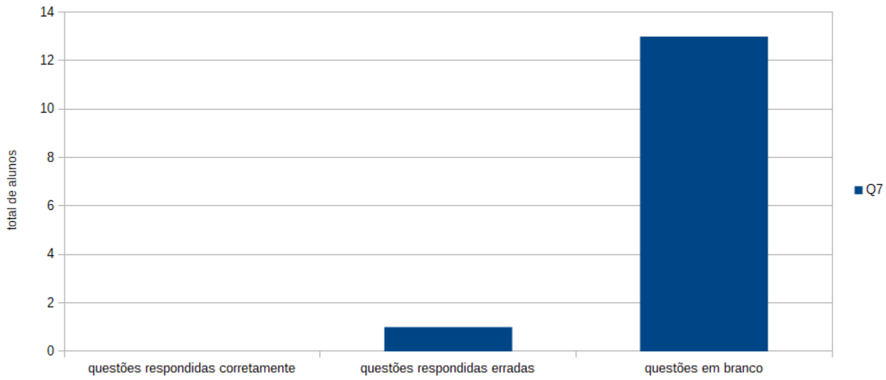
Fonte: Próprio autor (2018)

Por sua vez, para responder a questão 6, usa-se a mesma ideia para encontrar a quantidade de divisores inteiros e positivos de um número natural: por exemplo, quantos divisores inteiros e positivos possui o número P? Seja P um número natural qualquer da forma $P = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdots p_n^{a_n}$, com $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ primos e $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ naturais, assim a quantidade de divisores inteiros e positivos de P é $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot(a_3+1)\cdots(a_n+1)$. Voltando a questão 6, considere que as bandeiras da Alemanha, Brasil e Colômbia sejam números primos A, B e C respectivamente. Como há 5 figurinhas com a bandeira da Alemanha, 6 com a do Brasil e 4 da Colômbia, logo pode-se fazer esse pacote de $(5+1)\cdot(6+1)\cdot(4+1) = 6\cdot 7\cdot 5 = 210$ maneiras, mas atente para uma informação: os pacotes deverão ter no mínimo 3 figurinhas. Logo deve ser tirado as seguintes possibilidades: as de ter zero figurinha, uma figurinha e duas figurinhas.

Existem uma possibilidade para o pacote ter zero figurinha, 3 possibilidades para ter uma figurinha e 6 possibilidades para o pacote ter duas figurinhas. Logo $1+3+6=10$ é o total de maneiras para o pacote ter menos que 3 figurinhas. Portanto, Bruno poderá fazer o pacote de $210-10=200$ maneiras. Observando o desempenho dos alunos, notamos que 5 (36%) alunos responderam a questão de maneira errada e 9 (64%) deixaram em branco.

7 - (Problema extraído da OBMEP-2017, 1ª fase, nível 1) Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

Figura 13: Resultados da 7ª questão do primeiro pré-teste



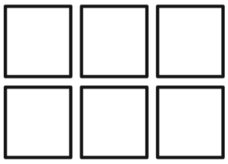
Fonte: Próprio autor (2018)

Uma maneira de resolver a questão 7, é identificar a quantidade de permutações do número 992017. Em seguida, dividir o resultado por P_4, visto que os algarismos 2, 0, 1, 7 deverão aparecer na mesma ordem do visor. O resultado será $\dfrac{P_6^2}{P_4}=3\cdot 5=15$ possibilidades. Apesar desta resolução ser considerada simples, constatamos que 1 (7%) aluno respondeu a questão de maneira errada e 13 (93%) alunos deixaram a questão em branco.

8 - (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 1) Os seis números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 devem ser colocados nos quadrados de tal forma que eles fiquem em

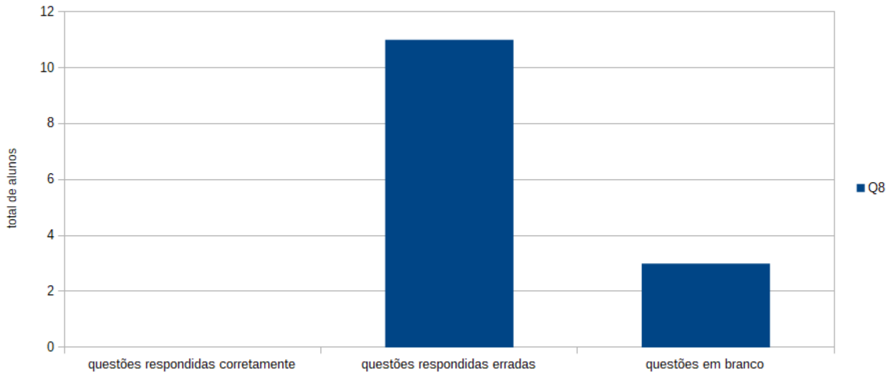
ordem crescente em cada linha (da esquerda para a direita) e em cada coluna (de cima para baixo). De quantas maneiras isso pode ser feito?

Figura 14: Quadradinhos



Fonte: [22]

Figura 15: Resultados da 8ª questão do primeiro pré-teste

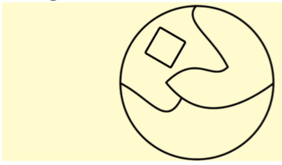


Fonte: Próprio autor (2018)

A respeito da questão 8, encontrar o valor correto não é tarefa difícil, pois o aluno poderia escrever todas as possibilidades, visto que são apenas 5. Porém constatamos que 11 (79%) alunos encontraram o valor errado e, 3 (21%) alunos deixaram a questão em branco.

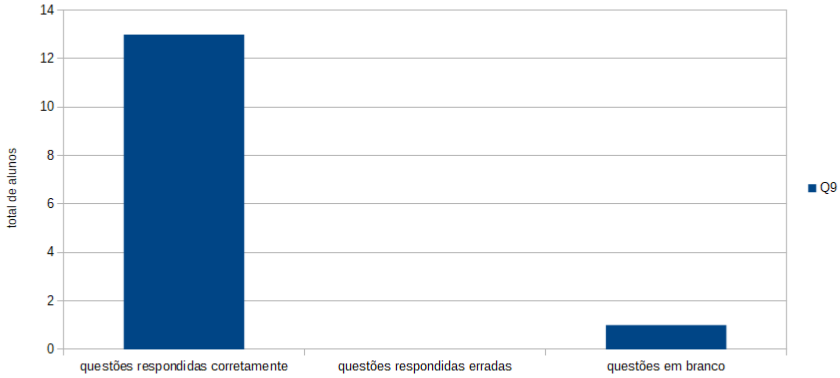
9 - (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 1) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. Ele quer pintar cada região da figura de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?

Figura 16: Círculo



Fonte: [22]

Figura 17: Resultados da 9ª questão do primeiro pré-teste

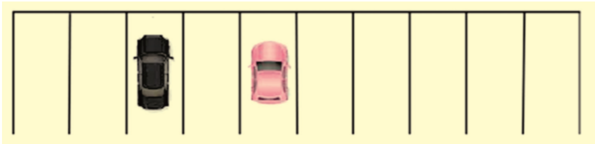


Fonte: Próprio autor (2018)

A questão 9 é considerada fácil. Para respondê-la basta usar o princípio multiplicativo que encontrará 72 maneiras diferentes de pintar a figura. Como a questão envolve apenas o princípio multiplicativo, observamos que 13 (93%) alunos responderam corretamente a questão e apenas 1 (7%) deixou em branco.

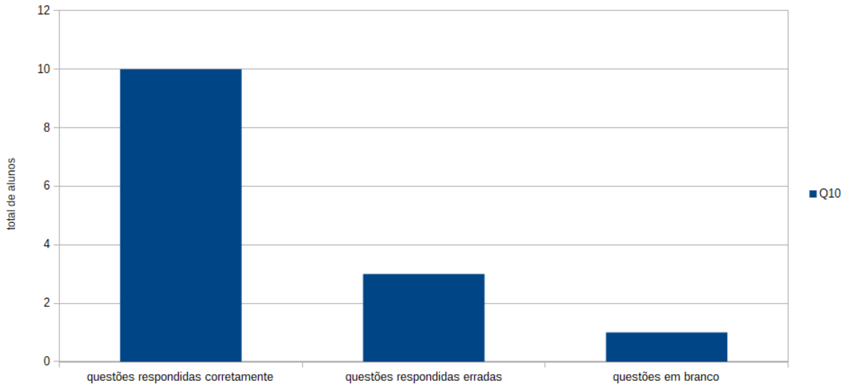
10 - (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 1) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Figura 18: Estacionamento



Fonte: [22]

Figura 19: Resultados da 10ª questão do primeiro pré-teste



Fonte: Próprio autor (2018)

Uma resolução para a questão 10: Se a 1ª ou a última vaga for ocupada pelo carro preto, haverá 8 maneiras em cada caso para o carro rosa estacionar, porém se o carro preto escolher qualquer uma das 8 vagas restantes, haverá 7 maneiras em cada um das 8 vagas. Agora basta usar o princípio aditivo $8 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 8 = 72$, constatamos que 10 (72%) alunos responderam corretamente a questão, 3 (21%) não responderam corretamente e 1 (7%) deixou em branco.

Tabela 5: Resultados do segundo pré-teste

ALUNOS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
1	B	E	C	B	B	B	B	E	E	C
2	C	C	C	B	B	B	E	E	E	C
3	C	E	E	E	B	B	E	E	E	C
4	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
5	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
6	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
7	B	E	E	E	E	B	B	E	B	C
8	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
9	E	C	C	B	B	B	E	E	E	C
10	B	B	B	E	B	B	B	B	B	C
11	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
12	B	C	C	B	B	C	B	E	B	C
13	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C
14	B	B	B	B	B	B	B	B	B	C

Fonte: Próprio autor

1 - (Problema extraído da OBMEP-2005, 1ª fase, nível 3) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

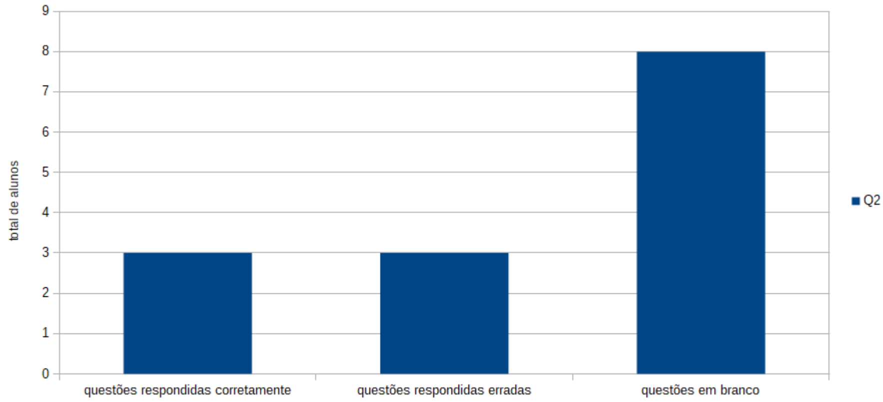
Figura 20: Resultados da 1ª questão do segundo pré-teste

Fonte: Próprio autor (2018)

Na subseção **4.4.2** podemos encontrar uma resolução para a questão 1. Observando a resolução dos 14 alunos, constatamos que na primeira questão, 2 (14%) alunos responderam corretamente, 1 (7%) respondeu errado e 11 (79%) alunos deixaram a questão em branco.

2 - (Problema extraído da OBMEP-2006, 1ª fase, nível 3) Quantos são os números menores que 10000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque $4 \times 5 \times 5 = 100$.

Figura 21: Resultados da 2ª questão do segundo pré-teste

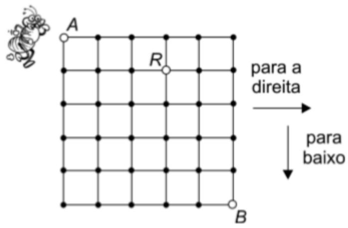


Fonte: Próprio autor (2018)

Uma resolução para a questão 2 é encontrada na subseção **4.4.2**. Nesta situação-problema, verificamos que 3 (21%) alunos responderam corretamente, 3 (21%) responderam errado e 8 (57%) deixaram a questão em branco.

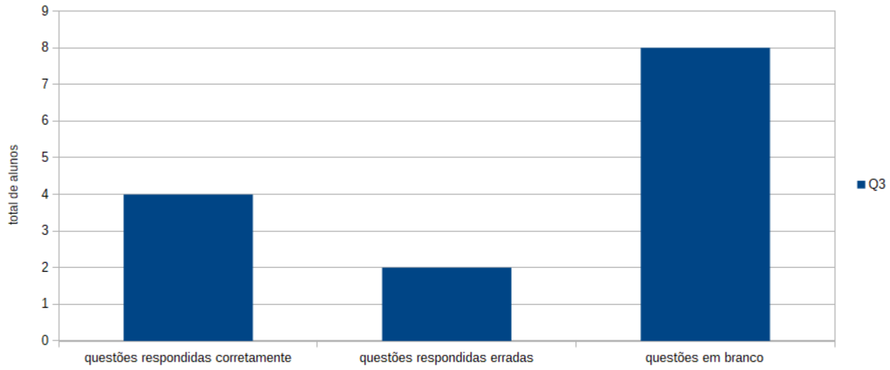
3 - (Problema extraído da OBMEP-2008, 1ª fase, nível 3) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?

Figura 22: Quadriculados 1



Fonte: [22]

Figura 23: Resultados da 3ª questão do segundo pré-teste

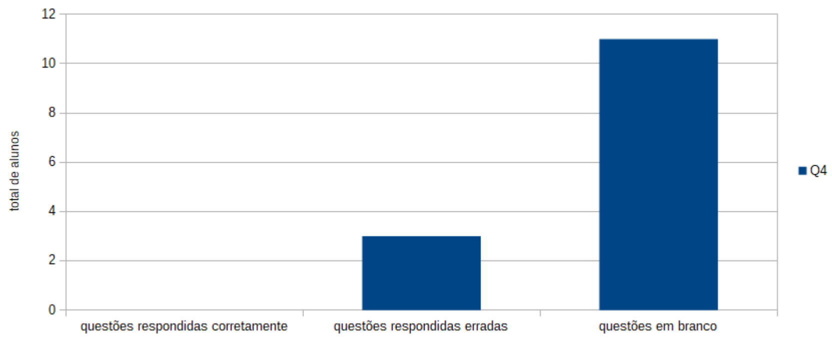


Fonte: Próprio autor (2018)

Uma resolução para a questão 3 encontra-se na subseção **4.4.2**. Neste problema matemático percebemos que 4 (29%) alunos responderam corretamente a questão, 2 (14%) responderam errado e 8 (57%) deixaram a questão em branco.

4 - (Problema extraído da OBMEP-2010, 1ª fase, nível 3) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

Figura 24: Resultados da 4ª questão do segundo pré-teste

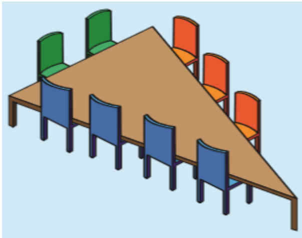


Fonte: Próprio autor (2018)

Uma maneira de responder a questão 4, é analisar dois casos: I) Ana receber 2 presentes e II) Ana receber 1 presente. Analisando o caso I), O primeiro presente de Ana será a boneca, o segundo poderá ser feito de 4 maneiras, restam 3 presentes para as outras 3 crianças, onde cada uma deverá receber exatamente 1 presente. Logo, tio Paulo poderá fazer a distribuição dos presentes de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modos. Analisando o caso II), há uma única maneira para o presente de Ana, visto que ela ganhará um único presente e, será obrigatoriamente a boneca, restam 4 presentes para as outras 3 crianças. Se Bruna receber 2 presentes, Cecília e Daniela receberem 1 presente, a distribuição será feito da seguinte maneira: $(\frac{4 \cdot 3}{2}) \cdot 2 \cdot 1 = 12$ modos. Haverá também 12 modos do tio Paulo distribuir os presentes na condição de Ana ganhar 1 presente, Bruna 1, Cecília 2 e Daniela 1 presente. Será a mesma quantidade de distribuição possível para o tio Paulo, na condição de Ana ganhar 1 presente, Bruna 1, Cecília 1 e Daniela 2 presentes. Assim, o total possível de distribuição para o caso II) é igual $3 \cdot 12 = 36$ modos. Fazendo $I) + II) = 24 + 36 = 60$, tem-se a quantidade de modos possíveis para o tio Paulo fazer a distribuição dos presentes entre suas 4 sobrinhas, de tal modo que Ana ganhe a boneca, e todas ganhem pelos menos um presente. Observando o desempenho dos alunos, foi constatado que 3 (21%) alunos responderam errado a questão e 11 (79%) alunos deixaram a questão em branco.

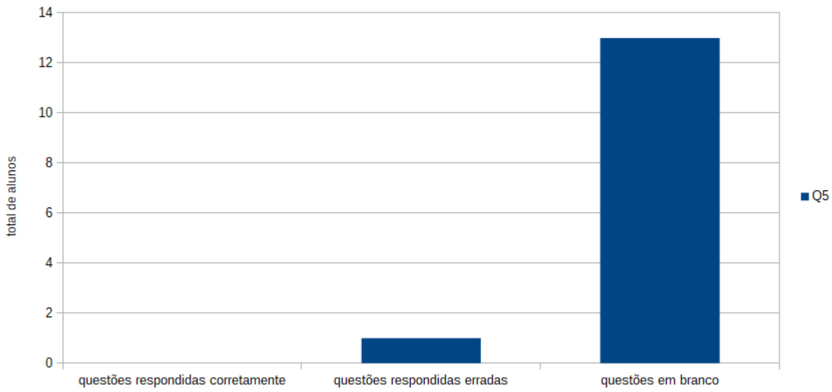
5 - (Problema extraído da OBMEP-2012, 1ª fase, nível 3) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?

Figura 25: Mesa triângular 1



Fonte: [22]

Figura 26: Resultados da 5ª questão do segundo pré-teste

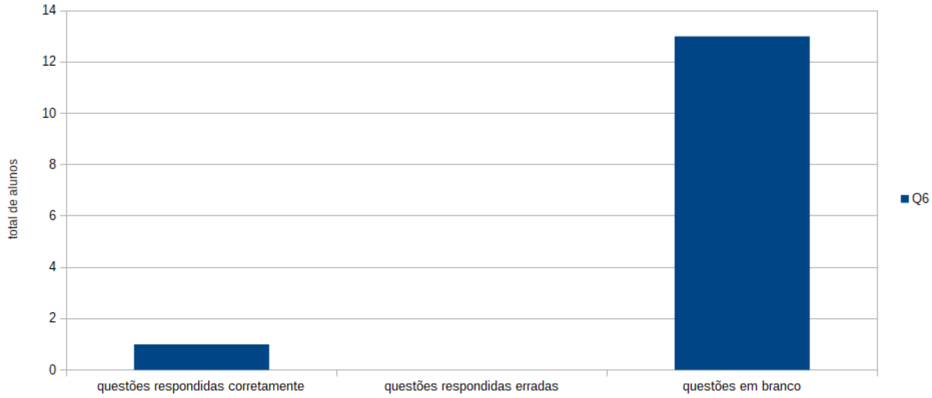


Fonte: Próprio autor (2018)

A respeito das questões 5, uma resolução encontra-se na subseção **4.4.2**. Sobre as análises das resoluções dos alunos acerca desta questão, constatamos que 1 (7%) aluno respondeu errado a questão 5 e 13 (93%) alunos deixaram tal questão em branco.

6 - (Problema extraído da OBMEP-2014, 1ª fase, nível 3) Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1000?

Figura 27: Resultados da 6ª questão do segundo pré-teste

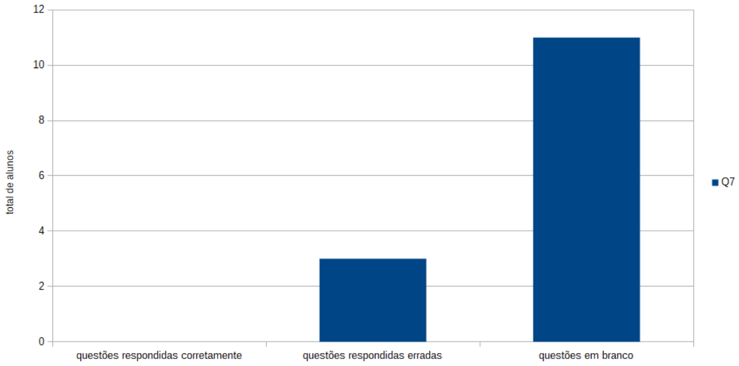


Fonte: Próprio autor (2018)

Em relação a questão 6, podemos encontrar uma resolução na subseção **4.4.2**. Nesta situação-problema observamos que apenas 1 (7%) aluno respondeu corretamente e 13 (93%) alunos deixaram a questão em branco.

7 - (Problema extraído da OBMEP-2015, 1ª fase, nível 3) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Figura 28: Resultados da 7ª questão do segundo pré-teste

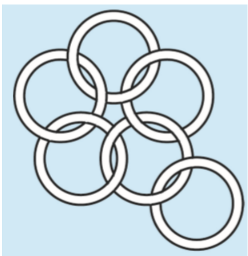


Fonte: Próprio autor (2018)

Na subseção **6.1** encontramos uma resolução para a questão 7. Analisando as respostas dos 14 alunos, constatamos que 3 (21%) alunos responderam errado a questão e 11 (79%) alunos deixaram em branco.

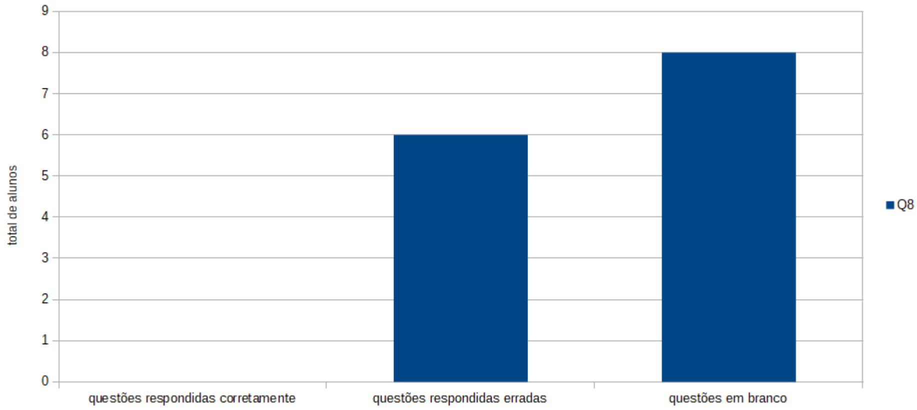
8 - (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 3) O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?

Figura 29: Anéis entrelaçados



Fonte:[22]

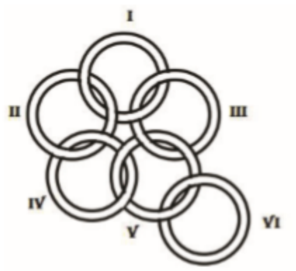
Figura 30: Resultados da 8ª questão do segundo pré-teste



Fonte: Próprio autor (2018)

Para resolução da questão 8, observe a figura abaixo:

Figura 31: Anéis entrelaçados 1

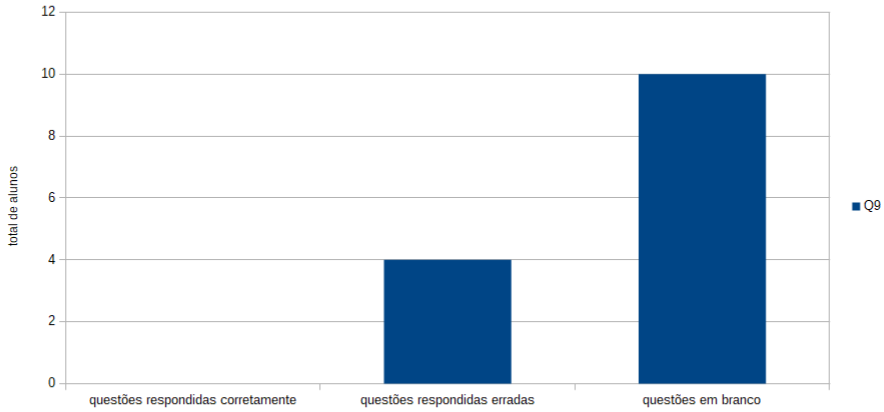


Fonte: [22]

uma maneira para resolvê-la, é analisar 3 casos (A, B e C). Caso A), o anel III deve ser pintado com a mesma cor do anel II. Isso obrigará que o anel III tenha cor diferente do anel IV. Logo, nessas condições, haverá três possibilidades de escolhas distintas para o anel I, uma para o anel II, duas para o III, uma possibilidade de escolha para o anel IV, uma para o anel V e duas para o último anel. Usando o princípio multiplicativo, a figura poderá ser pintada de $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 24$ maneiras. Caso B), o anel III ser pintado com uma cor diferente do anel II e do anel IV. Nessas circunstâncias, seguindo a mesma ideia de resolução do caso A), a figura poderá ser pintada de $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ maneiras. Por último, o caso C), o anel III deverá ter uma cor diferente do anel II, porém, a mesma cor do anel IV. Com essas condições, e seguindo a mesma ideia de resolução dos casos anteriores, a figura poderá ser pintada de $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ maneiras. Desta forma, a figura poderá ser pintada de $24 + 12 + 24 = 60$ maneiras. Analisando as resoluções dos 14 alunos, foi constatado que 6 (43%) alunos responderam errado e 8 (57%) deixaram a questão em branco.

9 - (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 3) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Figura 32: Resultados da 9ª questão do segundo pré-teste

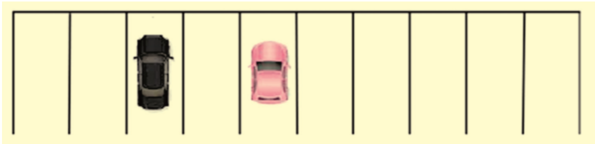


Fonte: Próprio autor (2018)

No que tange a questão 9, uma resolução encontra-se na subseção **6.1**. Nesta situação-problema verificamos que 4 (29%) alunos responderam errado, enquanto 10 (71%) deixaram em branco.

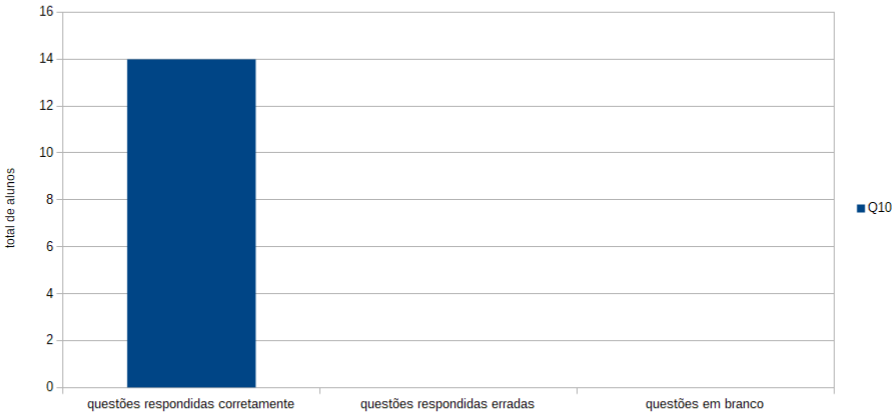
10 - (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 3) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Figura 33: Estacionamento 1



Fonte:[22]

Figura 34: Resultados da 10ª questão do segundo pré-teste



Fonte: Próprio autor (2018)

Sobre a questão 10, encontramos uma resolução correta na subseção **6.1**. Por ser uma questão fácil, todos os alunos responderam corretamente.

É importante ressaltarmos que durante as aplicações dos pré-testes, a maioria dos alunos observados não conseguiam entender as situações-problema. Observamos também que 2 alunos não sabiam executar corretamente algumas multiplicações e divisões, ficando impossibilitados de responderem os questionários.

6.2 Os conhecimentos posteriores dos alunos investigados acerca dos conhecimentos matemáticos de Análise Combinatória

É importante lembrarmos, que antes da aplicação do pós-teste, foi realizado uma oficina com os sujeitos (alunos) investigados. Nesta oficina apresentamos as estratégias de George Polya para resolver problemas matemáticos, e utilizamos as mesmas na resolução das questões trabalhadas no decorrer do treinamento.

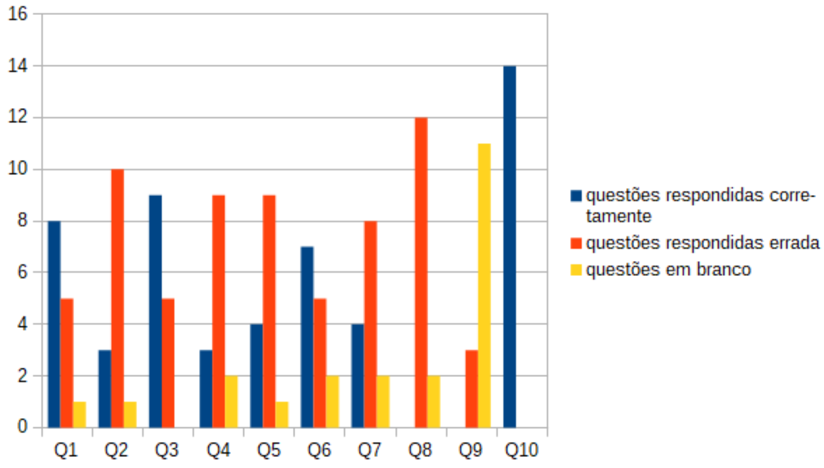
O resultado do pós-teste encontra-se na tabela e no gráfico abaixo:

Tabela 6: Resultados do pós-teste

ALUNOS	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
1	E	C	C	B	C	C	C	E	B	C
2	C	C	C	E	C	C	C	E	B	C
3	E	E	E	E	E	E	E	E	B	C
4	E	E	E	C	B	B	E	E	B	C
5	E	E	C	E	E	C	B	B	B	C
6	C	E	C	E	E	C	E	B	B	C
7	C	E	E	C	C	C	E	E	B	C
8	C	C	E	E	E	E	E	E	B	C
9	B	B	C	B	E	B	B	E	B	C
10	C	E	C	E	E	E	E	E	E	C
11	E	E	C	E	E	E	E	E	B	C
12	C	E	E	E	E	E	E	E	E	C
13	C	E	C	E	E	C	C	E	B	C
14	C	E	C	C	C	C	C	E	E	C

Fonte: Próprio autor

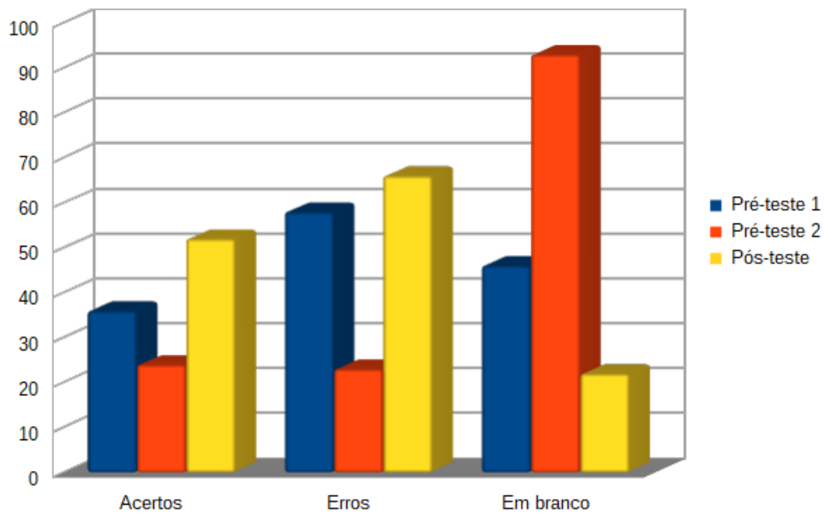
Figura 35: Resultados do pós-teste



Fonte: Próprio autor (2018)

Visto que todas as questões do pós-teste já foram comentadas neste trabalho, apresentamos o gráfico a seguir com os resultados dos pré-testes e do pós-teste.

Figura 36: Resultados obtidos na oficina.



Fonte: Próprio autor

Observe que no pós-teste, a quantidade de acertos aumentou aproximadamente 44% em relação ao Pré-teste 1, e 116% em relação ao pré-teste 2. Sabemos que o aumento de apenas 44% do pós-teste em relação ao pré-teste 1, dar-se pelo fato do primeiro pré-teste ter abordado apenas questões dos níveis 1 e 2 da OBMEP, enquanto no pré-teste 2 e no pós-teste, abordamos questões do nível 3 da OBMEP.

Embora, a quantidade de questões erradas tenham aumentadas no pós-teste em relação ao pré-teste 2, isso se dar pelo fato de no segundo pré-teste haver muitas questões em branco, enquanto no pós-teste esse índice diminuiu, ou seja, os alunos tentaram responder a maioria das questões no pós-teste.

Desta forma, percebemos que foi possível melhorar a aprendizagem dos alunos investigados, sobre o tópico de Análise Combinatória. Isso mostra que as estratégias metodológicas de George Polya se apresentaram apenas como uma das possibilidades, um dos vários caminhos, para se fazer a mediação desse conhecimento.

7 Considerações finais

Nossa atuação como professor de matemática no Ensino Médio, levou-nos a desenvolver este trabalho, pois sentimos a necessidade de revermos nossa prática pedagógica mediante um conteúdo muito importante, que é a Análise Combinatória. Nesse contexto, procuramos mostrar a importância de se ensinar matemática através da resolução de problemas, mostrar as estratégias metodológicas de George Polya para resolver problemas matemáticos e mostrar na prática, que tais estratégias são aplicáveis em sala de aula para melhorar o aprendizado dos alunos.

Com este trabalho, os leitores interessados na temática terão acesso a várias questões de Análise Combinatória, todas comentadas. Terão acesso também às estratégias de Polya para resolver problemas matemáticos, virão ainda segundo alguns estudiosos, que a matemática deve ser ensinada através da resolução de situações-problema e, não por meio da aplicação de exercícios, pois estes não fazem o(os) aluno(os) raciocinar(em), é algo mecanizado.

A análise dos dados obtidos mostrou que há um grande déficit no aprendizado da Análise Combinatória. Na verdade, compreendemos que isso decorre da prática pedagógica abordada pelo professor que apresenta poucas vezes a resolução de situações-problema com os alunos. Com a oficina, percebemos que foi possível melhorar o aprendizado dos alunos envolvidos com este trabalho, desta forma, destacamos que uma possibilidade para melhorar este déficit, é trabalhar com resolução de situações-problema e aplicar as estratégias metodológicas de George Polya.

O ensino da matemática através da resolução de problemas e, a utilização das estratégias de Polya para resolver problemas matemáticos, é importante e não se aplica apenas no conteúdo da Análise Combinatória.

Referências

[1] Barbosa, João Lucas Marques.,***Olimpíadas de matemática:*** *uma experiência de sucesso em educação no ceará.* <http://www.sbpcnet.org.br/livro/57ra/programas/COMF_SIMP/textos/joao lucasbarbosa-simp.htm> acesso em: 21/01/2018.

[2] Biondi,R.L.;Vasconcelos, L.;Filho, N.A. de M., ***Avaliando o impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP) no desempenho de matemática nas avaliações educacionais***. Disponível em:< http://www.eesp.fgv.br/_upload/seminario/4aeb3227d49f6.pdf> acesso em:21/01/2018.

[3] Brasil. ***Parâmetros curriculares Nacionais***: matemática/Secretaria de Educação Fundamental- Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em: 21/01/2018.

[4] Camacho, César., ***Revista OBMEP 12 anos***,1ª ed. Rio de Janeiro: Editora-SBM, 2017. Disponível em:<http//:www.obmep.org.br> acesso em: 15/01/2018.

[5] Dante, Luiz Roberto. ***Didática da Resolução de Problemas de Matemática.*** Ática, 2002.

[6] Eves, Howard., ***Introdução à história da matemática*** , tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. -Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

[7] Ferreira, A.B de Holanda., ***Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa***, 4ª ed. -Curitiba-PR: Positivo, 2009.

[8] Fiorentini, Dário; Lorenzato, Sergio., ***Investigação em educação matemática:*** *percursos teóricos e metodológicos*, 3ª ed. -Campinas-SP: Autores Associados, 2012.

[9] Fomin, D; Genkin, S; Itenberg,I., ***Círculos Matemáticos:*** *A Experiência Russa*, tradução de Valéria de Magalhães Isório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[10] Lima, E.L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner ,E.; Morgado. A.C., ***A Matemática do Ensino Médio- volume 2***, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[11] Maciel, M.V.M.;Basso,M.V. de A., ***Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP):*** *as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica*, In: Anais do Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Ijuí, RS:[s.n], 2009

[12] Milani, Wilton Natal., ***A Resolução de Problemas como Ferramenta para a Aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio***, Dissertação (mestrado)- Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto-MG, 2011.

[13] Minayo, M.C. de S., ***Pesquisa social:*** *teoria método e criatividade*, 17ª ed. Petrópolis-RJ: Vozes, 1994.

[14] Morgado, A. C; Carvalho,P.C.P,***Matemática Discreta***, Rio de Janeiro-SBM, coleção PROFMAT, 2015.

[15] Morgado, A. C; Carvalho, J.B.P.; Carvalho,P.C.P; Fernandez, P., ***Análise Combinatória e Probabilidade***, editora SBM, Rio de Janeiro (1991).

[16] Oliveira, Marcelo de Rufino., ***Técnicas em Olimpíadas de Matemática- Combinatória***, 1ª ed. Fortaleza- CE: Editora- Vestseller, 2014.

[17] Onuchic, Lourdes De La Rosa. ***Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.*** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

[18] POLYA, GEORGE. ***A arte de resolver problemas:*** *um novo aspecto de método matemático*; tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

[19] SANTOS, J.P.O;MELLO, M. P;MURARI,I.T.C., ***Introdução à Análise Combinatória***, 4ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[20] TAO,TEORENCE., ***Como Resolver Problemas Matemáticos***, Tradução de Paulo Ventura. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[21] TEIXEIRA, E., ***As três metodologias:*** *acadêmica, da ciência e da pesquisa.*, 2ª ed. Petrópolis-RJ: Vozes,2006.

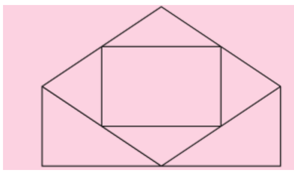
[22] <**http://www.obmep.org.br/provas.htm**> acesso em: 19/01/2018.

A Apêndices

PRÉ-TESTE 1

1. (Problema extraído da OBMEP-2013, 1ª fase, nível 1) Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

2. (Problema extraído da OBMEP-2013, 1ª fase, nível 2) De quantas maneiras é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?



3. (Problema extraído da OBMEP-2014, 1ª fase, nível 2) O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

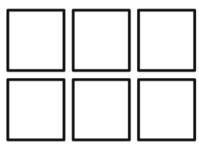
4. (Problema extraído da OBMEP-2015, 1ª fase, nível 2) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

5. (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 2) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB,..., AAZ, ABA, ABB,..., ABZ,..., AZA, AZB,..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

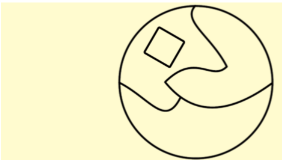
6. (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 2) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

7. (Problema extraído da OBMEP-2017, 1ª fase, nível 1) Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

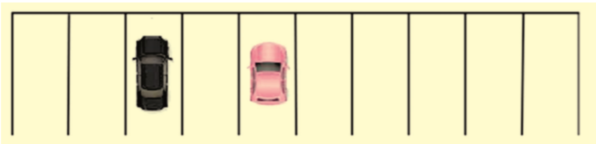
8. (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 1) Os seis números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 devem ser colocados nos quadrados de tal forma que eles fiquem em ordem crescente em cada linha (da esquerda para a direita) e em cada coluna (de cima para baixo). De quantas maneiras isso pode ser feito?



9. (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 1) Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. Ele quer pintar cada região da figura de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?



10. (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 1) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

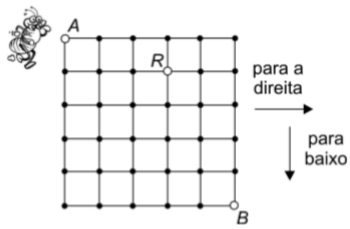


PRÉ-TESTE 2 E PÓS-TESTE

1. (Problema extraído da OBMEP-2005, 1ª fase, nível 3) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

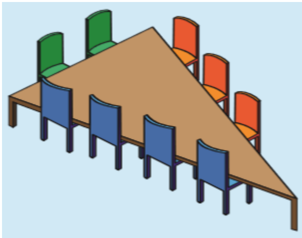
2. (Problema extraído da OBMEP-2006, 1ª fase, nível 3) Quantos são os números menores que 10000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque $4 \times 5 \times 5 = 100$.

3. (Problema extraído da OBMEP-2008, 1ª fase, nível 3) Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?



4. (Problema extraído da OBMEP-2010, 1ª fase, nível 3) Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

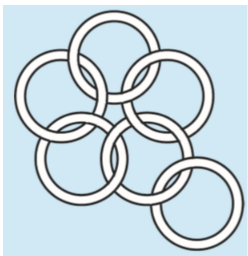
5. (Problema extraído da OBMEP-2012, 1ª fase, nível 3) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



6. (Problema extraído da OBMEP-2014, 1ª fase, nível 3) Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1000?

7. (Problema extraído da OBMEP-2015, 1ª fase, nível 3) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

8. (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 3) O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?



9. (Problema extraído da OBMEP-2016, 1ª fase, nível 3) Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

10. (Problema extraído da OBMEP-2018, 1ª fase, nível 3) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?