UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Oneide Oliveira

DOMINÓS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Santa Maria, RS
2018

Oneide Oliveira

DOMINÓS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional.**

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Casagrande Stabel

Santa Maria, RS
2018

Oliveira, Oneide
Dominós como Recurso Didático para o Ensino de Matemática / Oneide Oliveira.- 2018.
133 p.; 30 cm

Orientador: Eduardo Casagrande Stabel
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Metodologia 2. Dominós 3. Aritmética 4. Álgebra 5. Fibonacci I. Casagrande Stabel, Eduardo II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Oneide Oliveira

DOMINÓS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional.**

Aprovado em 10 de agosto de 2018:

____
Eduardo Casagrande Stabel, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

____
Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

____
Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra. (UFSM)

____
Janice Nery, Dra. (UFPEL)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

À minha esposa Laura e a meus filhos Fernanda e Guilherme. Dedico também a meus pais Neri e Rosalina pelas lutas vividas e vencidas em prol de meus estudos e pelo exemplo de vida, de honestidade que tanto os prezam.

AGRADECIMENTOS

Ao término deste trabalho, agradeço:

- primeiramente a Deus, pois sem Ele nada disso teria acontecido;

- a meu orientador Prof. Dr. Eduardo Casagrande Stabel, pela confiança em mim depositada e pela pessoa excepcional que és, pois além de ser um incentivador e dedicado profissional, és um ser iluminado e que me servirá sempre como inspiração;

- à minha esposa Laura Machado, pelo carinho, compreensão e força diária que necessitei em todos os momentos nessa caminhada e principalmente por entender minha ausência durante esses anos do curso;

- aos meus pais Neri Oliveira e Rosalina Oliveira por todo amor e apoio incondicional em todos os momentos de minha vida e aos meus irmãos Nelci, Valnês, Joarez e Roseni por acreditarem em minha capacidade;

- a meus filhos Fernanda e Guilherme que são minha razão de estudar, minha razão de viver, o meu orgulho, o meu amor infinito;

- aos meus amigos e colegas do PROFMAT da UFSM, em especial o Arlindo e o Mariel pelas aventuras vividas nos 600 km percorridos toda semana e pelos vários momentos de companheirismo e de ajuda mútua; tenham a certeza que nossa amizade será para a vida toda;

- aos professores do PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria por contribuírem pela conquista desse título;

- às professoras Carmen Vieira Mathias da UFSM, Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum da UFSM e Janice Nery da UFPEL pela disponibilidade em participarem da banca examinadora;

- aos meus alunos do 6° ano da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro pela disponibilidade de participação neste trabalho.

Enfim, a todos que fazem parte de minha vida diariamente, mas que porventura não tenham sido citados aqui, o meu carinho especial.

EPÍGRAFE

"Uma grande descoberta resolve um grande problema. Mas há sempre alguma descoberta na resolução de qualquer problema. Este pode até ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e se puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará o prazer e o triunfo da descoberta."

G. Pólya

RESUMO

DOMINÓS COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

AUTOR: Oneide Oliveira
ORIENTADOR: Eduardo Casagrande Stabel

Esta dissertação apresenta uma possibilidade do uso de materiais didáticos no ensino da Matemática. Para desenvolver esse trabalho foram utilizados dominós como recurso pedagógico, buscando contribuições quanto à sua aplicabilidade de forma que ocorra uma aprendizagem significativa das propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, de certas propriedades algébricas, destaque para produtos notáveis, relação de Girard e somas de progressões aritméticas, bem como no uso em sequências de Fibonacci. A eficiência do uso desses materiais foi comprovada com a aplicação de uma proposta de ensino referente às propriedades da adição e multiplicação dos números naturais aos alunos do 6° ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro. Após a aplicação da proposta de ensino, foi possível verificar que os dominós, por ser um material manipulativo, permitiu a variabilidade de diferentes exemplos e, por conseguinte, melhor compreensão daquilo que estava sendo proposto, gerando um aumento significativo dos conhecimentos adquiridos em relação às propriedades estudadas.

Palavras-chave: Metodologia. Dominós. Aritmética. Álgebra. Fibonacci.

ABSTRACT

DOMINOES AS A RESOURCE FOR TEACHING MATHEMATICS

AUTHOR: Oneide Oliveira
ADVISOR: Eduardo Casagrande Stabel

This dissertation presents a possibility of the use of didactic materials in the teaching of Mathematics. In order to develop this work, dominoes were used as a pedagogical resource, seeking contributions as to their applicability so that a significant learning of the properties of addition and multiplication of natural numbers, certain algebraic properties, prominence for notable products, Girard relation and sums of arithmetic progressions, as well as in the use in Fibonacci sequences. The efficiency of the use of these materials was evidenced with the application of a teaching proposal regarding the properties of addition and multiplication of the natural numbers to the students of the 6th grade of Elementary School of the Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro. After applying the teaching proposal, it was possible to verify that the dominoes, as a manipulative material, allowed for the variability of different examples and, therefore, a better understanding of what was being proposed, generating a significant increase of knowledge acquired in relation to properties studied.

Keywords: Methodology. Dominoes. Arithmetic. Algebra. Fibonacci.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Representação de 5 + 3........ 35
Figura 2.2 - Representação de 3 + 5, após a troca de ordem........ 35
Figura 2.3 - Reticulado retangular 3 x 4........ 36
Figura 2.4 - Reticulado retangular 3 x 4, com as *linhas* destacadas........ 37
Figura 2.5 - Reticulado retangular 3 x 4, com as *colunas* destacadas........ 37
Figura 2.6 - Três cores distintas de quadrados dispostos em sequência........ 38
Figura 2.7 - Primeiras duas cores aglutinadas e separadas da terceira cor........ 39
Figura 2.8 - Últimas duas cores aglutinadas e separadas da primeira cor........ 39
Figura 2.9 - Reticulado 3 x 4........ 40
Figura 2.10 - Paralelepípedo 2 × 4 × 3........ 41
Figura 2.11 - Paralelepípedo 2 × 4 × 3 em fatias horizontais........ 41
Figura 2.12 - Paralelepípedo 2 × 4 × 3 em fatias verticais........ 42
Figura 2.13 - Duas faixas 1 x 5........ 43
Figura 2.14 - Duas faixas 1 x 5 separadas por linhas........ 43
Figura 2.15 - Duas faixas 1 x 5, separadas por cor e por linhas........ 44
Figura 3.1 - Representação geométrica da identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$........ 47
Figura 3.2 - Representação geométrica da identidade lei distributiva $a(b + c + d)$........ 48
Figura 3.3 - Representação geométrica da diferença entre dois quadrados........ 48
Figura 3.4 - Representação geométrica de $(2 + 3)^2$........ 50
Figura 3.5 - Representação geométrica de $(2+3)^2$ usando dominós brancos e cinzas........ 51
Figura 3.6 - Representação geométrica de $(5-3)^2$........ 52
Figura 3.7 - Representação geométrica para se chegar ao retângulo de lados (5 – 3) e 5 usando dominós........ 53
Figura 3.8 - Representação geométrica do acréscimo do quadrado de lado 3, usando dominós........ 53
Figura 3.9 - Representação geométrica de $(5-3)^2$ usando dominós........ 53
Figura 3.10 - Representação geométrica de $(5 + 3).(5 - 3)$........ 55
Figura 3.11 - Representações geométricas para se chegar à $(5 + 3).(5 - 3)$ usando dominós........ 55
Figura 3.12 - Representação geométrica de $(5 - 3).(5 - 2)$........ 59
Figura 3.13 - Obtenção de um retângulo de lados (5 – 3) e 5 a partir de um quadrado de lado 5........ 59
Figura 3.14 - Representações geométrica depois de acrescentado o retângulo 3 x 2........ 60
Figura 3.15 - Representações geométricas da remoção do retângulo 2 x 5........ 60
Figura 3.16 - Representação geométrica da PA {1, 2, 3, 4, 5} usando dominós.. 63
Figura 3.17 - Reorganização da representação geométrica da soma da PA {1, 2, 3, 4, 5}........ 63
Figura 3.18 - Representação geométrica da soma da PA {1, 3} usando dominós........ 65
Figura 3.19 - Representação geométrica da soma da PA {1, 3, 5} usando dominós........ 65

Figura 3.20 - Representação geométrica da PA {1, 3, 5, 7} usando dominós...... 66
Figura 4.1 - Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2x1;\ 2x2, 2x3\ e\ 2x4$ usando dominós $2x1$.. 72
Figura 4.2 - Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2x5$ usando dominós $2x1$. 73
Figura 4.3 - Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2 \text{ x } n$ com 1º dominó em pé... 73
Figura 4.4- Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2 \text{ x } n$ com 1º par de dominós deitados... 74
Figura 4.5 - Triângulo Aritmético conforme obra *Traité du Triangle Arithmétique*... 78
Figura 4.6 - Triângulo Aritmético de Pascal com números binomiais na forma simétrica.. 79
Figura 4.7 - Triângulo Aritmético de Pascal com números binomiais na forma assimétrica... 79
Figura 4.8 - Triângulo de Pascal com números naturais na forma simétrica...... 80
Figura 4.9 - Soma das diagonais do triângulo de Pascal................................. 81
Figura 4.10 - Localização do último dominó deitado em um tabuleiro $2 \text{ x } (n+2)$ 84
Figura 4.11 - Possibilidades da soma $P_0 + P_1 + P_2$ usando dominós................. 85
Figura 4.12 - Localização do último dominó em pé em um tabuleiro $2 \text{ x } (2n+1)$.. 88
Figura 4.13 - Possibilidades da soma $P_0 + P_2 + P_4$ usando dominós.................. 88
Figura 4.14 - Localização do último dominó em pé em um tabuleiro $2 \text{ x } 2n$......... 90
Figura 4.15 - Possibilidades da soma $P_1 + P_3 + P_5$ usando dominós.................. 91
Figura 5.1 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 1, referente a propriedade comutativa da adição... 102
Figura 5.2 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 2, referente a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma.. 103
Figura 5.3 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 3, referente a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma.. 104
Figura 5.4 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 4, referente a propriedade da comutatividade da multiplicação........................... 105
Figura 5.5 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 5, referente a propriedade associativa da adição.. 106
Figura 5.6 - Peças do dominó usado no estudo das propriedades dos números naturais.. 108
Figura 5.7 - Algumas produções livres com o material..................................... 108
Figura 5.8 - Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade comutativa da adição.. 110
Figura 5.9 - Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade associativa da adição.. 111
Figura 5.10 - Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade comutativa da multiplicação.................................... 112
Figura 5.11 - Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade distributiva da multiplicação.................................... 114
Figura 5.12 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 7, referente à propriedade distributiva da multiplicação...................................... 116
Figura 5.13 - Três respostas dadas pelos alunos para a questão 8, referente a

	propriedade comutativa da adição..	117
Figura 5.14 -	Três respostas dadas pelos alunos para a questão 9, referente à propriedade comutativa da multiplicação..	118
Figura 5.15 -	Três respostas dadas pelos alunos para a questão 10, referente a propriedade associativa da adição...	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Número de possibilidades usando a relação $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ 73
Tabela 4.2 – Solução do problema de Fibonacci 75
Tabela 4.3 – Total de possibilidades envolvendo pares de peças deitadas....... 76
Tabela 4.4 – Quantidade numérica de pares de peças deitadas........................ 77
Tabela 5.2 – Dados do pré-teste realizado com os alunos do 6º ano................. 101

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
d.C	depois de Cristo
PA	Progressão Aritmética
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PPP	Plano Político Pedagógico
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
AEE	Atendimento Educacional Especializado

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**..	26
2	**O USO DE DOMINÓS NO ESTUDO DE PROPRIEDADES ARITMÉTICAS**..	30
2.1	UM POUCO DE HISTÓRIA..	31
2.2	ALGUNS RESULTADOS SOBRE NÚMEROS NATURAIS................	34
2.2.1	**Propriedade comutativa da adição**..	34
2.2.2	**Propriedade comutativa da multiplicação**.......................................	36
2.2.3	**Propriedade associativa da adição**..	38
2.2.4	**Propriedade associativa da multiplicação**.......................................	40
2.2.5	**Propriedade distributividade da multiplicação em relação a soma**...	43
3	**CERTAS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS**..	46
3.1	PRODUTOS NOTÁVEIS..	46
3.1.1	**Quadrado da soma de dois termos**..	50
3.1.2	**Quadrado da diferença de dois termos**..	52
3.1.3	**Produto da soma pela diferença de dois termos**.............................	54
3.2	RELAÇÕES DE GIRARD...	56
3.3	PROGRESSÕES ARITMÉTICAS...	61
3.4	ATIVIDADES DIDÁTICAS QUE VISAM O ENSINO/APRENDIZAGEM.	67
3.5	SOLUÇÕES ESPERADAS..	68
4	**O USO DE DOMINÓS EM SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI**.................	72
4.1	NÚMERO BINOMIAL E TRIÂNGULO DE PASCAL.............................	77
4.2	ALGUMAS IDENTIDADES ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE FIBONACCI...	82
4.3	UMA FÓRMULA FECHADA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: A FÓRMULA DE BINET...	93
5	**PROPOSTA DE ABORDAGEM E RELATO DE APLICAÇÃO**............	98
5.1	DIREITOS DE APRENDIZAGEM DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL..	98
5.2	METODOLOGIA..	99
5.3	PROPOSTA DE ABORDAGEM..	100
5.4	RELATO DE APLICAÇÃO..	108
5.5	RESULTADOS ATINGIDOS...	115
6	**ÚLTIMAS CONSIDERAÇÕES**..	122
	REFERÊNCIAS...	124
	APÊNDICE A – PRÉ-TESTE..	126
	APÊNDICE B – QUESTÕES COMPLEMENTARES ENVOLVENDO AS PROPRIEDADES DOS NÚMEROS NATURAIS	128
	ANEXO A – DIREITOS DE APRENDIZAGEM DO 1º TRIMESTRE DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA PARA O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DA ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO SÃO IZIDRO	130

1 INTRODUÇÃO

Uma das maiores necessidades do homem atual é desenvolver atividades cujo fim seja o prazer que a mesma pode lhe oferecer. Tal necessidade perpassa em todas as fases do desenvolvimento humano, onde as maiores e mais significativas aprendizagens acontecem facilmente quando há incentivo, quando há prazer pela conquista. E essas necessidades não são minimizadas ou alteradas em função da idade do indivíduo. Por esse motivo, cabe ao professor desenvolver constantemente, com seus alunos, atividades que potencializem esse prazer. Tais momentos podem ao mesmo tempo capacitá-los a refletir sobre suas possibilidades de compreensão lógica, com autonomia, favorecendo assim a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

É necessário, portanto, que se proporcione ao aluno, um ambiente de ensino que favoreça a imaginação, a invenção, a fantasia, enfim, a construção e que lhe possibilite o prazer em aprender. Uma estratégia que potencializa tudo isso é desenvolver, na prática diária, atividades que venham a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

A Matemática, neste contexto, pode propor atividades que desenvolvam nos alunos a capacidade de fazer perguntas, de buscar diferentes soluções, de abstrair situações, de encontrar e reestruturar novas relações, ou seja, de resolver situações-problemas.

Assim, torna-se necessário nos processos pedagógicos o desenvolvimento de atividades práticas que agucem a imaginação e a capacidade inventiva dos alunos. Na Matemática, em especial, tais atividades devem priorizar o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de abstração e generalização.

Aliado a tudo isso, é necessário que se sejam utilizadas metodologias de ensino/aprendizagem que consigam envolver os alunos no processo de construção do seu conhecimento e que facilitem e tornem significativo o aprendizado para os mesmos.

Nesse contexto, existem diversas tendências relacionadas a diferentes abordagens metodológicas para o ensino de Matemática, dentre elas podemos citar, por exemplo, etnomatemática, resolução de problemas, história da matemática, modelagem matemática, tecnologias de informação e comunicação e o uso de materiais concretos. O presente trabalho focará no uso de materiais didáticos, a saber, dominós, como possibilidade para contribuir com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Na prática, quando se fala em dominós, se pensa unicamente nas peças de formato 1 x 2 usadas no clássico jogo, peças estas que vem marcadas com pontos que denotam um número de 0 a 6. No entanto, o dominó, em estudo no presente trabalho, é apenas um exemplo do tipo de objeto com o qual se trabalhará. O interesse aqui será em peças, de vários formatos, como 1 x 1 (quadrados unitários), 1 x 2 (os típicos dominós), 1 x 3, 1 x 1 x 1 e assim por diante. A peça genérica 1 x *n* é chamada de um *n*-ominó. As peças consideradas não terão números marcados, mas poder-se-á considerá-las com cores distintas. A estrutura básica em consideração é este conjunto de peças, as quais tipologicamente, no presente trabalho e na literatura matemática são denominadas de dominós, e um tabuleiro preliminar, o qual será preenchido com estas peças. Nos dois próximos capítulos, o tabuleiro não será explicitado, mas passará a ser explicitado no quarto capítulo. A pergunta combinatória fundamental que surge é: *De quantos modos pode-se preencher certo tabuleiro, do tipo 2* x *n ou m* x *n, com certas peças e certas propriedades?* Esta pergunta simples tem implicações que podem surpreender em muito o leitor novo no assunto.

Em pesquisas recentes na área de Matemática, diversos pesquisadores têm utilizado tabuleiros infinitos e o conceito de *q*-contagem para estender o tipo de resultado que será apresentado nesse trabalho, até o ponto, segundo Andrews (1984), de demonstrarem intrincadas identidades que envolvem séries infinitas, tais como as identidades do tipo de Rogers-Ramanujan. Sendo |q| <1 vale:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}$$

Contudo, no presente trabalho, o interesse está em explorar ao máximo o lado lúdico e matemático das técnicas de dominós e contagem para a realidade do Ensino Fundamental e Médio, que cobre o objetivo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Não estará limitado, entretanto, só a este contexto, mas este será seu maior foco.

A presente dissertação tem como objetivo geral ressaltar técnicas combinatórias, demonstrando concretamente a partir do uso de dominós, algumas propriedades dos números naturais e certas propriedades algébricas.

Tem como objetivos específicos:

- Explorar de forma lúdica, usando dominós, algumas propriedades aritméticas das operações de soma e multiplicação dos números naturais;
- Explorar propriedades algébricas envolvendo produtos notáveis, relações de Girard, soma de PA e sequências de Fibonacci, usando dominós como recurso didático;
- Desenvolver uma proposta de abordagem das propriedades de adição e multiplicação dos números naturais a alunos do ensino fundamental, usando dominós como suporte didático;
- Verificar se o uso de dominós na proposta de abordagem foi eficiente para a promoção da aprendizagem das propriedades de adição e multiplicação de números naturais.

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos.

O primeiro capítulo servirá como introdução do tema proposto pelo presente trabalho.

No segundo capítulo, explorar-se-á, de forma lúdica as propriedades aritméticas comumente trabalhadas nos anos finais do ensino fundamental, envolvendo a comutatividade, a associatividade e a distributividade das operações de adição e multiplicação dos números naturais, usando para tanto, dominós, peças quadradas 1 x 1 de diferentes cores e peças cúbicas 1 x 1 x 1.

No terceiro capítulo, o uso de dominós será explorado em certas propriedades algébricas trabalhadas no ensino médio, destaque para os produtos notáveis, a soma de progressões aritméticas e as relações de Girard.

No quarto capítulo, procurar-se-á trabalhar, usando dominós, peças retangulares 1 x 2, uma das mais fascinantes sequências de números que se conhece, a sequência de Fibonacci.

No quinto capítulo, será relatada a proposta de aplicação de um plano de aula relacionado às propriedades demonstradas no segundo capítulo, o qual foi aplicado aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Médio

São Izidro, da cidade de São Nicolau, estado do Rio Grande do Sul, no primeiro trimestre do ano de 2018.

Finalizar-se-á a presente dissertação, no sexto capítulo, delineando uma visão geral do uso de dominós como recurso didático no ensino da Matemática, onde serão apresentadas as considerações frente ao tema proposto, bem como, a importância do uso de atividades alternativas nas aulas de Matemática.

2 O USO DE DOMINÓS NO ESTUDO DE PROPRIEDADES ARTIMÉTICAS

Neste capítulo introduzir-se-á o objeto de estudo desta dissertação, onde se procurará explorar a temática dos *dominós* como alternativa didática no ensino/aprendizagem da Matemática.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, se enfatizará alguns pontos, de forma a contextualizar a relação do lúdico com a Matemática.

O uso de dominós se incorpora como um excelente meio para despertar o interesse dos alunos, por ser parte de um jogo, o que, de certa forma, desmistifica a ideia de que a aprendizagem da Matemática é somente sistematização de fórmulas e cálculos.

Ao longo deste capítulo, estarão elencadas algumas propriedades aritméticas bastante conhecidas, tais como a comutatividade, a associatividade e a distributividade. Tais propriedades serão descritas, buscando exemplificar concretamente, com peças reais, a fim do entendimento de cada sequência, de cada passo a ser adotado, fazendo deste processo matemático, literalmente um jogo de quebra-cabeças.

Destaca-se aqui, não somente a aprendizagem de contas aritméticas e conceitos puramente computacionais, mas sim o foco deste trabalho que estará centrado em demonstrar resultados matemáticos. Com isso, pretende-se levar uma proposta de ideias de demonstrações, onde os alunos possam reproduzi-las de forma descontraída e lúdica.

No decorrer do texto, estarão expostos esboços de demonstrações com casos bem específicos, não se detendo a demonstrações gerais com variáveis, onde aluno e professor poderão verificar facilmente que vale, por exemplo, a comutação:

$$3 + 5 = 5 + 3.$$

E, à medida que surgirem exemplos semelhantes, facilmente se concluirá que se encontrou uma maneira de verificar de forma combinatória que a propriedade algébrica $x + y = y + x$ é válida para todos x e y inteiros positivos. Em seguida, se pode também extrapolar a validade da propriedade para outros conjuntos numéricos maiores, como os racionais e os reais.

Cabe ressaltar aqui que muitas das demonstrações deste capítulo se assemelham com as justificativas clássicas, tendo como ponto de partida a geometria: onde se usam conceitos de comprimento e área para a visualização e a compreensão de certas propriedades; porém, na proposta aqui apresentada, existe uma gama de diferenças que serão elencadas nesse capítulo.

O conceito de comprimento é naturalmente construído de forma espontânea e intuitiva; contudo, também estão envolvidos dízimas infinitas e números decimais. Tais conceitos se contrapõe ao que será abordado neste trabalho, que estará focado somente em números naturais {1,2,3...}, onde tudo é muito mais palpável e simples, visto que contar é algo corriqueiro que permeia a vida logo que ela começa, ou seja, desde a primeira infância. O mesmo acontece com o conceito de área, que é um conceito muito mais sofisticado. Assim, reafirma-se que a intenção estará unicamente direcionada ao processo didático e na clareza das situações, como por exemplo, para construção do significado de 3000 cm^2 exige-se um grau de construção bem mais elaborado do que contar um ladrilho retangular de azulejos com 10 deles ao longo da altura e 3 ao longo da base, formando um reticulado retangular de 30 azulejos (cada um com 10 cm de base e 10 cm de altura). Ou seja, contar é mais simples do que calcular áreas.

O termo ladrilhamento, neste contexto, será usado para a forma de disposição das peças no tabuleiro, e o verbo ladrilhar para descrever este processo. Tal situação é uma maneira encontrada para tornar mais agradável e esclarecedora a habilidade de justificar propriedades matemáticas, pois formalidades e provas rigorosas distanciam o foco deste trabalho. Assim, pode parecer que há detalhamentos desnecessários, mas cabe ressaltar que a intenção está no processo didático, em minuciar cada passo para subsidiar o trabalho do professor, com técnicas aplicáveis em sala de aula.

Com a finalidade de ampliar a compreensão e despertar o interesse, será realizado a seguir um pouco da história envolvendo o tema contagem.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Contar é, seguramente, junto com a linguagem, uma das primeiras ferramentas contemplativas de que o homem se apropriou. A história da Matemática nos propicia entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais. Utilizar-se-á como referência para toda a parte histórica deste capítulo, Eves (2004). Conforme o autor, o conceito de número e o processo de contar se desenvolveram muito antes dos primeiros registros históricos, de tal forma que a maneira como ocorreram é ainda envolta em mistérios.

Dentre tais situações, se destaca a dos homens primitivos que num primeiro momento não tinham necessidade de contar, pois o que necessitavam para a sua sobrevivência era retirado da própria natureza. A necessidade de contar começou com o desenvolvimento das atividades humanas, quando o homem foi deixando de ser pescador e coletor de alimentos para fixar-se no solo.

A agricultura passou então a exigir o conhecimento do tempo, das estações do ano e das fases da Lua e assim começaram a surgir as primeiras formas de calendário. No pastoreio, o pastor usava várias formas para controlar o seu rebanho. Pela manhã, ele soltava suas ovelhas e analisava, ao final da tarde, se alguma tinha sido roubada, fugido, se perdido do rebanho ou se havia sido acrescentada uma nova ovelha. Assim ele tinha a correspondência um a um, onde cada ovelha correspondia a uma pedrinha que era armazenada em um saco.

No caso das pedrinhas, cada animal que saía para o pasto de manhã correspondia a uma pedrinha que era guardada em um saco de couro. No final do dia, quando os animais voltavam do pasto, era feita a correspondência inversa, onde, para cada animal que retornava, era retirada uma pedrinha do saco. Se no final do dia sobrasse alguma pedrinha, era um indício de que faltava algum dos animais, e no caso de que as pedrinhas não fossem suficientes, um sinal de que se havia acrescentado ao rebanho um animal.

Lentamente, à medida que se civilizava, a humanidade apoderou-se do modelo abstrato de contagem. Os mais antigos exemplos de nossos atuais símbolos numéricos, conforme Eves (2004, p.40), encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. O conceito de número veio para objetivar a resolução de problemas de contagem (um, dois, três, quatro, ...), os quais foram chamados de números naturais.

No conjunto dos números naturais, a operação mais básica é a adição. Para defini-la, evitando o rigor, tente visualizar a seguinte situação envolvendo o pastor de ovelhas: ao adquirir certo número de ovelhas, sendo o vendedor portador também de um saco de contagem, intuitivamente, o pastor sabe que juntando as pedras dos dois sacos poderá contar todas as ovelhas que passará a possuir após a aquisição. Esse processo de juntar as pedras de contagem é o que chamamos de adição. E assim, simbolicamente, ele pode constatar que 3 + 5 = 8, que 2 + 6 = 8 e assim por diante, sem a necessidade de justificar pelo uso da notação posicional.

De forma análoga, para a subtração, tente agora visualizar essa outra situação: o vendedor que a princípio tinha certo número de ovelhas, digamos 20, após vender 4, terá de retirar 4 pedrinhas das 20 que possui, assim, 20 – 4 = 16. O processo de subtração é o processo de retirar peças de uma quantidade pré-estabelecida. A operação de subtração não pode ser aplicada de forma genérica a todos os números, a menos que se evoquem os números negativos.

No presente trabalho, serão utilizadas estas noções intuitivas simples para lidar com as operações de adição e subtração.

De igual forma, as operações de multiplicação e divisão também terão no presente trabalho, noções intuitivas simples. Voltando ao caso do pastor de ovelhas, se o mesmo comprar pares de ovelhas (macho e fêmea), ele terá que aglutinar a venda de 2 em 2, ou seja, conforme compre pares de ovelhas, digamos 5 pares, ele terá comprado 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 ovelhas. A repetição sucessiva da adição sempre da mesma quantidade dá origem à multiplicação. Assim surge o conceito de 5 x 2 = 5 vezes o número 2 somados. Outro exemplo, é a presença de recintos para guardar os animais. Supondo que em cada recinto caibam 6 ovelhas, assim, se ele possuir 4 desses recintos, com capacidade máxima, poderá abrigar, 6 + 6 + 6 + 6 = 24 ovelhas, ou seja, a multiplicação 4 x 6. Ao mesmo tempo, as operações podem ser combinadas: se ele tiver um quinto recinto com apenas 3 ovelhas, obtém 4 x 6 + 3 = 24 + 3 = 27 ovelhas.

A multiplicação pode ser organizada de uma forma bidimensional, como no caso do reticulado retangular de azulejos descrito anteriormente. No caso dos 4 recintos, pode se dispor 6 pedras uma ao lado da outra em 4 linhas formando um reticulado retangular de dimensões 6 e 4.

Nesse mesmo sentido, a divisão pode, também, ser pensada dessa forma.

Com a concepção de que a adição e a multiplicação são duas operações bem definidas no conjunto dos números naturais, procurar-se-á demonstrar alguns resultados envolvendo tais operações. São fatos básicos, muito utilizados, mas que na maioria das vezes não são provados, apenas utilizados e aceitos como uma verdade. As demonstrações de tais resultados dar-se-ão usando quadrados 1 x 1 brancos, pretos e/ou cinzas e cubos 1 x 1 x 1, como uma alternativa às demonstrações usando axioma da indução, bem mais formais.

2.2 ALGUNS RESULTADOS SOBRE NÚMEROS NATURAIS

As operações básicas definidas nos itens anteriores acabam respeitando a certas propriedades gerais. Nesse primeiro momento, será feita uma verificação das propriedades, utilizando dominós, visando o processo didático, das propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação e da propriedade da distributividade da multiplicação com respeito à adição, isto é, respectivamente:

$$x + y = y + x \; e \; xy = yx;$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z \; e \; x(yz) = (xy)z;$$
$$x(y + z) = xy + xz \; e \; (x + y)z = xz + yz.$$

As propriedades elencadas acima, onde o uso de letras, ou variáveis, indica propriedades gerais, valem para quaisquer valores de x, y e z reais. No entanto, no presente trabalho, os valores assumidos por x, y e z são naturais, isto é, x, y e $z \in \mathbb{N}$ = {1, 2, 3, …}.

Cabe aqui ressaltar que verificações nunca serão suficientes, visto que para cada propriedade algébrica se tem infinitos casos particulares. Contudo, baseados em exemplos adequados, procurar-se-á generalizar o raciocínio, tendo a contagem dupla como uma estratégia combinatória, isto é, a contagem de duas vezes do mesmo conjunto.

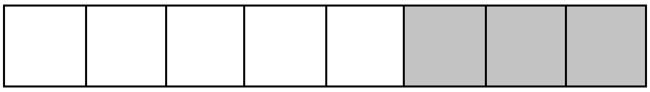
Para exemplificar tal estratégia, tente visualizar a seguinte situação envolvendo o caso do pastor com as pedrinhas que representam suas ovelhas: Se o pastor dispuser as pedras alinhadas uma ao lado da outra, ele poderá contá-las de várias formas. Duas delas seriam: contar da esquerda para direita ou contar da direita para esquerda. Muito embora a forma de contagem seja diferente, o resultado final terá sempre de ser o mesmo. Nas verificações das propriedades investigadas no presente trabalho, este será o mecanismo básico utilizado, as contagens duplas, estrategicamente escolhidas.

2.2.1 Propriedade comutativa da adição

Para o caso da verificação da propriedade da comutatividade da adição, tome como exemplo, 5 + 3. Usando dominós, peças quadradas 1 x 1, tal situação pode ser assim representada: 5 quadrados unitários 1 x 1 coloridos como brancos e 3 quadrados unitários 1 x 1 coloridos como cinzas dispostos lado a lado. Ao dispor essas peças, o mecanismo de verificação da propriedade acima será feito de duas formas diferentes, dentre outras possíveis.

Na primeira disposição, colocam-se dispostos lado a lado, os 5 quadrados brancos à esquerda e os 3 quadrados cinzas à direita, conforme a figura 2.1.

Figura 2.1 – Representação de 5 + 3.



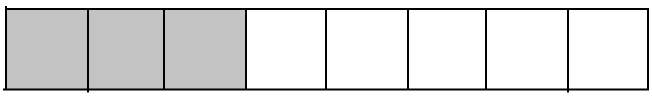
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao realizar a contagem uma a uma, se pode verificar que o número total de peças é 8, logo:

$$8 = 5 + 3.$$

Por outro lado, numa segunda contagem, se embaralham as peças de uma forma estratégica, movendo os 3 quadrados cinzas para a esquerda das peças brancas. Nesse movimento nenhuma peça foi acrescentada ou removida. A figura 2.2 ilustra tal disposição.

Figura 2.2 – Representação de 3 + 5, após a troca de ordem.



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, ao se realizar novamente a contagem e sabendo que nenhuma peça foi removida ou acrescentada, a contagem total não poderá mudar, logo:

$$8 = 3 + 5.$$

Daí, facilmente se conclui que a mudança de lugar das parcelas na adição não altera o resultado. Portanto:

$$5 + 3 = 3 + 5.$$

Após a verificação em diferentes exemplos, se pode chegar a generalização da *propriedade comutativa da adição*, onde para quaisquer *x, y* $\in \mathbb{N}$ vale a seguinte regra:

$$x + y = y + x.$$

2.2.2 Propriedade comutativa da multiplicação

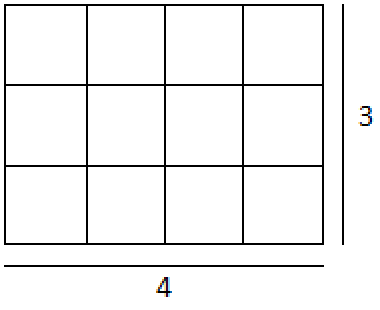
Antes de definir a propriedade da comutatividade da multiplicação, faz-se necessário revisar a ideia da multiplicação. Tome como exemplo, 5 x 2. O termo significa “5 vezes o número 2 somados”, isto é,

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

À medida que se tem claro a definição da multiplicação, se pode trabalhar a propriedade comutativa da multiplicação.

Para o caso da verificação da propriedade comutatividade da multiplicação, tome como exemplo, usando os dominós, peças quadradas brancas 1 x 1, a imagem de um reticulado retangular de azulejos, que representam as peças quadradas, numa parede, com 3 linhas e 4 colunas, conforme a figura 2.3.

Figura 2.3 – Reticulado retangular 3 x 4.

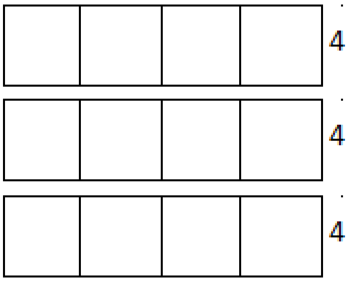


Fonte: Elaborada pelo autor

Ao realizar a contagem do número de quadradinhos em diferentes maneiras, se pode verificar que o número total destes é igual a 12. Dentre estas maneiras, se destacam duas delas, as quais são ilustradas nas figuras 2.4 e 2.5.

Na primeira contagem as linhas do reticulado serão distanciadas uma das outras, o que resulta na figura 2.4.

Figura 2.4 – Reticulado retangular 3 x 4, com as *linhas* destacadas.



Fonte: Elaborada pelo autor

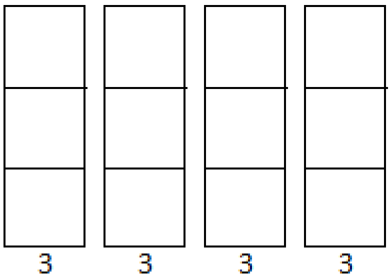
Levando em consideração a ideia da multiplicação e observando o reticulado, se pode contar o número de peças em cada linha e somar as 3 linhas. Como cada linha tem exatamente 4 peças, logo a contagem ficará:

$$4 + 4 + 4.$$

Assim se obtém que: 12 = 4 + 4 + 4 = "3 vezes o 4 somados" = 3 x 4

Numa segunda contagem, as colunas do reticulado retangular serão distanciadas umas das outras, o que resulta na figura 2.5.

Figura 2.5 – Reticulado retangular 3 x 4, com as *colunas* destacadas.



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesse caso, se pode contar o número de peças em cada coluna e somar as 4 colunas. Pelo alinhamento entre as peças, se verifica que cada coluna tem exatamente 3 peças quadradas, logo a contagem ficará:

$$3 + 3 + 3 + 3.$$

Assim, se obtém que 12 = 3 + 3 + 3 + 3 = "4 vezes o 3 somados" = 4 x 3.

Comparando as duas contagens se chega à conclusão de que 4 x 3 = 12 = 3 x 4. Que mencionada mais comumente, traduz a propriedade comutativa da multiplicação no conjunto dos números naturais, que garante que numa multiplicação de dois números naturais a ordem dos fatores não altera o produto.

Após a verificação em diferentes exemplos, se pode chegar a generalização da *propriedade comutativa da multiplicação*, onde para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$ vale a seguinte regra:

$$x.y = y.x$$

2.2.3 Propriedade associativa da adição

Antes de definir a propriedade associativa da adição, se pode refletir sobre o significado de uma expressão envolvendo tal propriedade. Tome como exemplo,

$$(6 + 3) + 1.$$

Nesse caso, a resolução perpassa pelos seguintes passos: primeiramente aglutina-se 6 + 3 e, em seguida, acrescenta-se 1 à soma anterior. Assim, (6 + 3) +1 = 9 + 1 = 10.

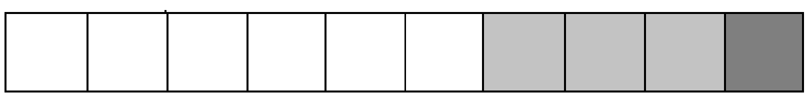
Esta forma de somar pode ser generalizada para vários termos, por exemplo, cinco termos: 1 + 2 + 3 + 4 + 5. Em cada etapa do processo o sublinhado abaixo indica qual o cálculo realizado para aquele passo:

$$\underline{1 + 2} + 3 + \underline{4 + 5} = 3 + \underline{3 + 9} = 3 + 12 = 15.$$

O cálculo poderia ser feito de diversas outras formas, no entanto, acredita-se que o exposto acima já nos é suficiente para se trabalhar a propriedade associativa da adição.

Para o caso da verificação da propriedade associatividade da adição, considere uma faixa 1 x 10, formada por 6 quadrados brancos, 3 quadrados cinza-claros e 1 quadrado cinza-escuro, todos de tamanho 1 x 1, dispostos conforme a figura 2.6.

Figura 2.6 – Três cores distintas de quadrados dispostos em sequência.

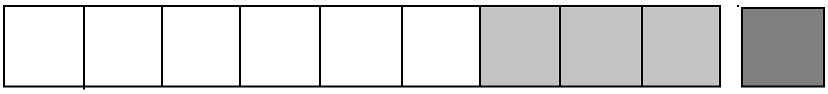


Fonte: Elaborada pelo autor

Ao realizar a contagem do número de quadrados que forma tal faixa, esta pode ser realizada de diferentes maneiras, dentre as quais se destacam duas formas.

Para a primeira contagem, aglutinam-se os dois primeiros tipos de peças (brancas e cinza-claros) afastando-as da peça cinza-escuro, como ilustra a figura 2.7.

Figura 2.7 – Primeiras duas cores aglutinadas e separadas da terceira cor.



Fonte: Elaborada pelo autor

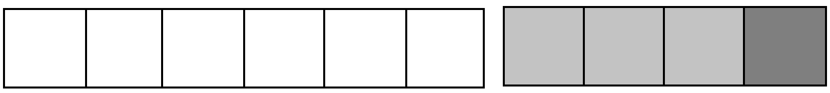
Ao realizar a contagem das peças brancas e cinza-claros, se obtém 6 + 3. A esta soma se acrescenta o número de peças cinza-escuro, obtendo:

$$10 = (6 + 3) + 1.$$

Os parênteses mostram a ordem em que se realizou a contagem.

De forma similar, numa segunda contagem, se podem aglutinar as duas últimas cores (cinza-claro e cinza-escuro) separando-as das peças de cor branca, conforme a figura 2.8.

Figura 2.8 – Últimas duas cores aglutinadas e separadas da primeira cor.



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesse caso, a contagem inicia com as peças brancas, em número de 6 e, em seguida se contam conjuntamente as peças cinza-claro e cinza-escuro obtendo 3 + 1, e assim se tem a soma:

$$10 = 6 + (3 + 1).$$

Não importa de que forma se aglutinem as peças para a contagem, o resultado para a contagem final é sempre o mesmo. Assim se chega a regra da associatividade da adição para este exemplo:

$$(6 + 3) + 1 = 6 + (3 + 1).$$

Após a verificação em diferentes exemplos, se pode chegar a generalização da *propriedade associativa da soma*, onde para quaisquer *x*, *y* e $z \in \mathbb{N}$ vale a seguinte regra:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

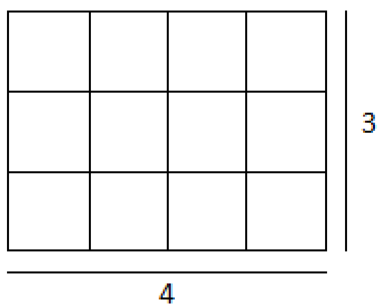
2.2.4 Propriedade associativa da multiplicação

Antes de definir a propriedade associativa da multiplicação, é necessário entender o significado da associatividade da multiplicação. Tome como exemplo, (3 × 4) x 2. Utilizando a definição feita anteriormente para a multiplicação, a expressão acima significa “3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12 vezes o 2 somados”, isto é:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Ao justificar tal expressão mediante os dominós, é necessário pensar em 3 × 4 como um reticulado de 3 linhas e 4 colunas, como ilustrado na figura 2.9.

Figura 2.9 – Reticulado 3 x 4

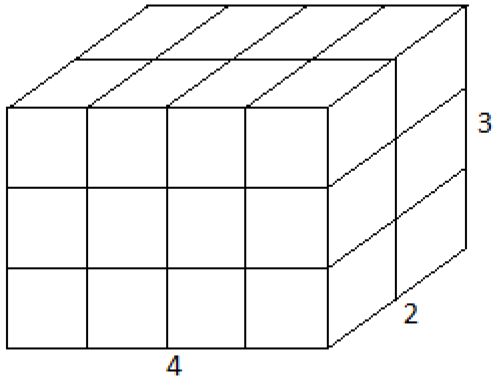


Fonte: Elaborada pelo autor

E, na representação da expressão (3 × 4) x 2, o segredo é empilhar, numa terceira dimensão, 2 peças cúbicas 1 × 1 × 1 em cada uma das posições. Vale ressaltar que as peças físicas construídas como cubos foram pensadas a fim de lidar com estes casos, muito embora até aqui só se tenha trabalhado no plano.

Assim, para o caso da verificação da propriedade da associatividade em relação a multiplicação, o segredo é empilhar, numa terceira dimensão, peças cúbicas 1 x 1 x 1 em cada uma das posições. Toma-se então, como exemplo, um paralelepípedo 2 x 4 x 3, conforme a figura 2.10.

Figura 2.10 – Paralelepípedo 2 × 4 × 3.

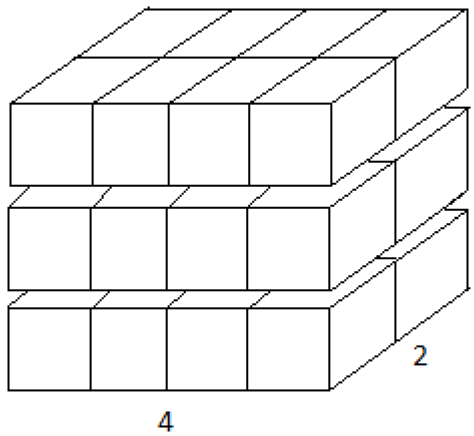


Fonte: Elaborada pelo autor

A contagem do número de cubos 1 x 1 x 1 que formam o paralelepípedo acima, pode ser realizada por meio de duas contagens diferentes, dentre outras.

Na primeira contagem se fatia horizontalmente o paralelepípedo em 3 partes, obtendo a figura 2.11.

Figura 2.11 – Paralelepípedo 2 × 4 × 3 em fatias horizontais.



Fonte: Elaborada pelo autor

A contagem do número de peças se dá da seguinte forma: em cada fatia tem-se 2 x 4 peças. Como cada fatia tem igual quantidade de cubos e temos 3 fatias, logo a contagem resulta em:

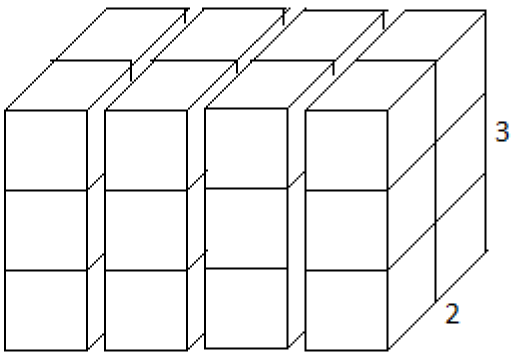
$$3 \times (2 \times 4).$$

Mediante o conceito de multiplicação, o resultado acima pode ser interpretado como 3 repetições do número 2 x 4. Assim: “3 vezes o 2 × 4 = 4 + 4 = 8 somados”, isto é:

$$24 = 8 + 8 + 8.$$

Na segunda contagem, se separa o paralelepípedo em fatias verticais como mostra a figura 2.12.

Figura 2.12 – Paralelepípedo 2 × 4 × 3 em fatias verticais.



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste caso, a contagem do número de peças se dá da seguinte forma: em cada fatia tem-se $3 \text{ x } 2$ peças. Como cada fatia tem igual quantidade de cubos e temos 4 fatias, logo a contagem resulta em:

$$4 \text{ x } (3 \text{ x } 2).$$

Mediante o conceito de multiplicação, o resultado acima pode ser interpretado como 4 repetições do número $(3 \text{ x } 2)$. Assim: “4 vezes o $(3 \text{ x } 2) = 2 + 2 + 2 = 6$ somados”, isto é:

$$24 = 6 + 6 + 6 + 6.$$

As contagens são iguais, portanto:

$$3 \times (2 \times 4) = 4 \times (3 \times 2).$$

Ao analisar tal resultado, pode-se notar que este ainda não representa a regra da associatividade. No entanto, basta que se comute a segunda contagem, isto é, 4 × (3 × 2) = (3 × 2) × 4 e se obtém: 3 × (2 × 4) = (3 × 2) × 4.

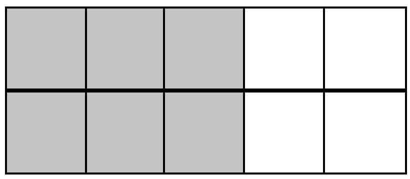
Após a verificação em diferentes exemplos, se pode chegar a generalização da regra geral da *propriedade associativa da multiplicação,* onde para quaisquer x, y e $z \in \mathbb{N}$ vale a seguinte regra:

$$x(yz) = (xy)z.$$

2.2.5 Propriedade da distributividade da multiplicação em relação a soma

Para o caso da verificação da propriedade da distributividade da multiplicação em relação a soma, considere duas faixas 1 x 5, tendo cada uma delas o mesmo número de quadrados cinzas e brancos, conforme figura 2.13.

Figura 2.13 – Duas faixas 1 x 5.

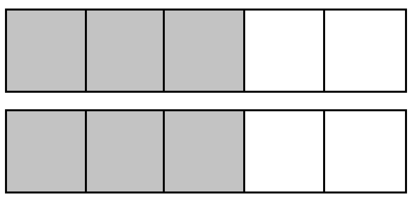


Fonte: Elaborada pelo autor

A contagem total de quadrados também pode ser feita de duas maneiras.

Toma-se como exemplo duas faixas contendo, cada uma delas, 3 quadrados cinzas 1 x 1 e 2 quadrados brancos 1 x 1, conforme a figura 2.14.

Figura 2.14 – Duas faixas 1 x 5 separadas por linhas.



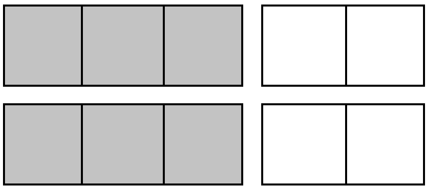
Fonte: Elaborada pelo autor

Observando a figura, se pode contar tudo de uma vez e, nesse caso, a contagem do número de peças se dá da seguinte forma: em cada faixa tem-se 3 + 2 peças (três quadrados cinzas mais dois quadrados brancos), como temos 2 faixas, logo a contagem resulta em:

$$2 \text{ x } (3 + 2) = 10.$$

Numa segunda contagem, se separam as peças brancas das cinzas e, se contam as peças cinzas: 2 x 3 e depois as peças brancas: 2 x 2, conforme a figura 2.15.

Figura 2.15 – Duas faixas 1 x 5, separadas por cor e por linhas.



Fonte: Elaborada pelo autor

A segunda contagem resulta: 2 x 3 + 2 x 2 = 10.

Portanto, nas duas contagens, o resultado é o mesmo, no entanto, a contagem foi realizada de forma diferente. Assim, se pode inferir que em um problema de multiplicação, quando um dos fatores é reescrito como a soma de dois números, o produto não muda.

Após a verificação em diferentes exemplos, se pode chegar a generalização da propriedade da *distributividade da multiplicação em relação a soma,* onde para quaisquer x, y e $z \in \mathbb{N}$ vale a seguinte regra:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Ao mesmo tempo, ao analisar tal resultado, pode-se comutar o primeiro termo para $(x + y)z$ e tem-se a outra regra para a *distributividade da multiplicação em relação a soma,* valendo também para quaisquer x, y e $z \in \mathbb{N}$:

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Como o foco do presente trabalho é uma proposta de verificações de diferentes situações presentes em sala de aula, tendo o uso de dominós como suporte de ensino/aprendizagem destas situações, no capítulo 5, encontra-se o relato da aplicação das propriedades dos números naturais estudadas neste capítulo em uma classe do 6º ano da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro, da cidade de São Nicolau-RS.

3 CERTAS PROPRIEDADES ALGÉBRICAS

Neste capítulo procurar-se-á trabalhar assuntos relacionados à Álgebra usando dominós como suporte didático. É importante ressaltar que o estudo da Álgebra possibilita ao aluno desenvolver uma importante fase de seu processo de aprendizagem: a abstração e a generalização. Ao mesmo tempo, possibilita a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN:

> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (Brasil, 1998, p. 116)

Tendo essa concepção, é necessário, conforme Brasil (1998), que seja proposto no estudo da Álgebra a investigação de padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Acredita-se que esse trabalho possa favorecer, por parte do aluno, a construção da ideia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

Ao mesmo tempo, acredita-se que os materiais manipuláveis podem auxiliar no desenvolvimento desses raciocínios matemáticos, visto que a utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões.

Tendo esse embasamento, no presente trabalho o recurso didático utilizado para verificar alguns tópicos da álgebra desenvolvida no ensino fundamental e médio será o uso de dominós. Conforme já mencionado, os dominós representam uma importante ferramenta didática, visto serem de fácil manuseio e com diversas possibilidades de representações. Este capítulo será subdividido em três seções, a saber: produtos notáveis, relações de Girard e soma das progressões aritméticas.

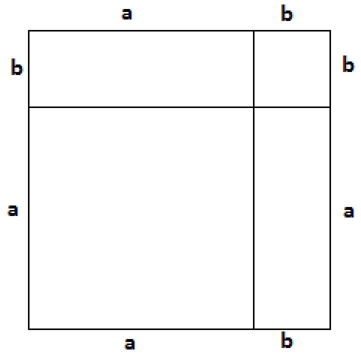
3.1 PRODUTOS NOTÁVEIS

A busca pela solução de situações problemas envolvendo valores desconhecidos data dos séculos anteriores ao nascimento de Cristo. Conforme Eves (2004), Diofanto de Alexandria teve uma importância enorme para o desenvolvimento da álgebra. Conforme o autor, é razoavelmente preciso dizer que a Álgebra anterior a época de Diofanto era retórica e que pode ter sido ele o primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação algébrica. Diofanto tinha abreviações para a incógnita, potências de incógnitas até potência seis, subtração, igualdade e inversos.

Com o desenvolvimento da Álgebra surgem as expressões algébricas, cujos cálculos obedecem alguns padrões de resolução. Na multiplicação destas expressões e usando técnicas da propriedade distributiva, por exemplo, destacam-se os produtos notáveis. Produto é o resultado de uma multiplicação e como são especiais recebem o nome de notáveis.

Os gregos, no período da antiguidade, faziam uso de procedimentos algébricos e geométricos exatamente iguais aos produtos notáveis modernos. É importante destacar que o uso de sua maioria foi atribuído aos pitagóricos e estão registrados na obra de Euclides de Alexandria chamada *Os Elementos* na forma de representações geométricas. Conforme Eves (2004, p.107), o livro II de Euclides contém várias proposições que em realidade são identidades algébricas envolvidas numa termologia geométrica. O livro destaca a Proposição 4, estabelecendo geometricamente a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, decompondo o quadrado de lado $a + b$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2; b^2; ab e ba, como ilustra a figura 3.1.

Figura 3.1 – Representação geométrica da identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

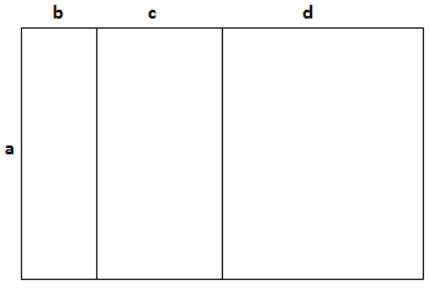


Fonte: Adaptado de Eves (2004).

O enunciado de Euclides para essa proposição, conforme Eves (2004) é assim descrito: *Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes.*

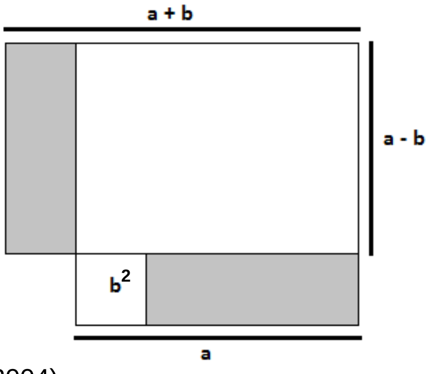
A lei distributiva $a.(b + c + d) = ab + ac + ad$ e a diferença entre dois quadrados $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$ eram representadas de forma semelhantes, conforme figuras 3.2 e 3.3, respectivamente.

Figura 3.2 – Representação geométrica da identidade lei distributiva $a(b + c + d)$.



Fonte: Adaptado de Eves (2004).

Figura 3.3 – Representação geométrica da diferença entre dois quadrados $a^2 - b^2$.



Fonte: Adaptado de Eves (2004).

Atualmente, os conceitos sobre os produtos notáveis merecem muita atenção, pois seu uso facilita cálculos, reduz o tempo de resolução e potencializa o aprendizado.

Os tópicos a serem explorados neste trabalho abrangendo produtos notáveis estão envolvidos num tema mais abrangente denominado *polinômios*. Esses conceitos são apresentados nos livros de álgebra do ensino superior e estão diretamente vinculados ao ensino fundamental e médio.

Domingues e Iezzi definem a construção do anel A de polinômios:

> Uma função *p*: I**R** → I**R** denomina-se função polinomial sobre I**R** se existem elementos a_0, a_1, a_2, ..., a_r em I**R** tais que, para todo x ∈ I**R**: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+a_rx^r$. (Domingues e Iezzi, 2003, p.283)

A função *p* é denominada função polinomial ou polinômio associado à sequência dada, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_r$ são números reais. Se $a_r \neq 0$, diz-se que *r* é o grau do polinômio e $a_0, a_1, a_2, ..., a_r$ são seus coeficientes.

Vale ressaltar aqui que, conforme Domingues e Iezzi (2003, p. 211), um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \to x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \to x.y$ é chamado de anel se valem as propriedades da adição (associativa, comutativa, existência do elemento neutro e existência de oposto) e da multiplicação (associativa e a distributiva em relação à adição).

Desta forma, como no conjunto denominado polinômios reais A, que contém todos os polinômios reais, é possível definir as operações de soma dos polinômios e produto de polinômios com as propriedades mencionadas. Este conjunto com essas operações se torna um sistema de anel.

Para definir a soma de polinômios é necessário, primeiramente, definir a soma de dois monômios (polinômios com um só termo) de mesmo grau e depois estender a definição para polinômios em geral. Por exemplo, para somar os monômios, $p(x) = a_rx^r$e $q(x) = b_rx^r$, somam-se seus coeficientes e, obtém-se o polinômio $t(x) = p(x) + q(x) = (a_r + b_r).x^r$.

Assim, em geral, para somar o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 +\ldots+ a_rx^r$ com o polinômio $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 +\ldots+ b_tx^t$, onde $r \leq t$ (sem perda de generalidade, devido à comutatividade) devem-se somar todos os monômios de mesmo grau, obtendo assim o polinômio:

$$t(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1).x + (a_2 + b_2).x^2 + \cdots + b_tx^t.$$

Analogamente, para a multiplicação de polinômios, primeiramente é necessário definir o produto de dois monômios. Seja $p(x) = a_rx^r$ e $q(x) = b_tx^t$, com *r* e *t* naturais. Define-se*:*

$$t(x) = p(x).q(x) = a_r b_t x^{r+t}.$$

Assim, ao realizar a multiplicação de dois polinômios, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$ e $q(x) = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_t x^t$, (sem perda de generalidade, devido à comutatividade), tem-se como resultado o polinômio:

$$t(x) = p(x).q(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0).x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_r b_t)x^{r+t}$$

O enfoque dado às propriedades de adição e multiplicação de polinômios é relevante aqui, pois no presente trabalho será explorado, dentre outros, o quadrado de um binômio, que nada mais é do que um produto de polinômios iguais.

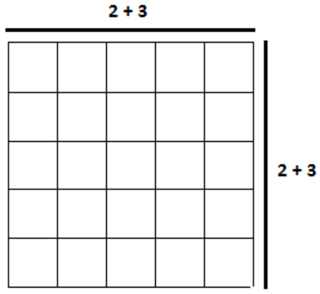
Tendo esse embasamento e, usando peças quadradas 1×1 brancas e cinzas, procurar-se-á verificar os seguintes produtos ditos *notáveis*: o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença.

3.1.1 Quadrado da soma de dois termos

Para a verificação da fórmula do quadrado da soma de dois termos, tome como exemplo $(2+3)^2$. Usando dominós, peças quadradas 1×1, e sabendo que $(2+3)^2 = (2+3).(2+3)$, a figura que representa tal situação, nos remete a uma figura bidimensional (figura 3.4).

A figura 3.4 ilustra um quadrado de lado $2+3$. Assim, uma primeira contagem do número de peças que forma tal quadrado, poderá ser determinada da seguinte forma: como $(2+3) = 5$, teremos $5 \times 5 = 5+5+5+5+5 = 25$.

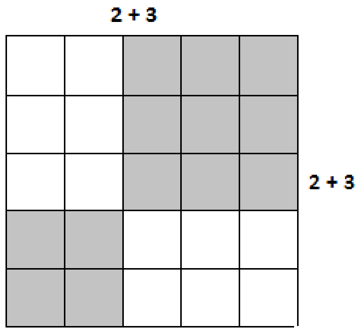
Figura 3.4 – Representação geométrica de $(2 + 3)^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Da mesma forma, pode-se realizar uma segunda contagem da situação acima descrita. No entanto, ao montá-la devemos usar dominós quadrados $1 \text{ x } 1$ coloridos como brancos e dominós quadrados $1 \text{ x } 1$ coloridos como cinzas. A figura 3.5 ilustra uma, dentre diferentes possibilidades.

Figura 3.5 – Representação geométrica de $(2+3)^2$ usando dominós brancos e cinzas.



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar tal representação, pode-se verificar o surgimento de dois quadrados, um com medida $2 \text{ x } 2$ e outro $3 \text{ x } 3$ e, de dois retângulos, um de dimensão $2 \text{ x } 3$ e outro $3 \text{ x } 2$, ambos com o mesmo número de quadradinhos pela propriedade da comutatividade. Assim:

$$(2+3)^2 \ = \ 2^2 \ + \ 2.(2 \text{ x } 3) \ + \ 3^2 \ = \ 4 \ + \ 12 \ + \ 9 \ = \ 25.$$

Nas duas contagens, o resultado é o mesmo, no entanto, a contagem foi realizada de forma diferente.

Assim, usando dominós, podem-se realizar diversos outros exemplos de demonstrações geométricas envolvendo análogas situações. Tais exemplos se fazem necessários para que haja a compreensão da linguagem algébrica necessária para descrever simbolicamente tais situações, a partir das regularidades surgidas.

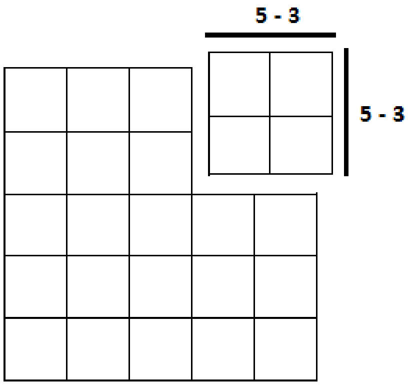
Após esta verificação e consequente generalização via áreas, como a figura 3.1 ilustra, o aluno terá condições de definir simbolicamente o *quadrado da soma de dois termos*, onde para quaisquer números inteiros positivos x, y , tem-se:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

3.1.2 Quadrado da diferença de dois termos

Para a verificação da fórmula do quadrado da diferença de dois termos, tome como exemplo $(5-3)^2$. Usando dominós, peças quadradas $1 \text{ x } 1$, e sabendo que $(5-3)^2 = (5-3).(5-3)$, a figura que representa tal situação, nos remete a uma figura bidimensional, tendo a seguinte representação (figura 3.6).

Figura 3.6 – Representação geométrica de $(5-3)^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor

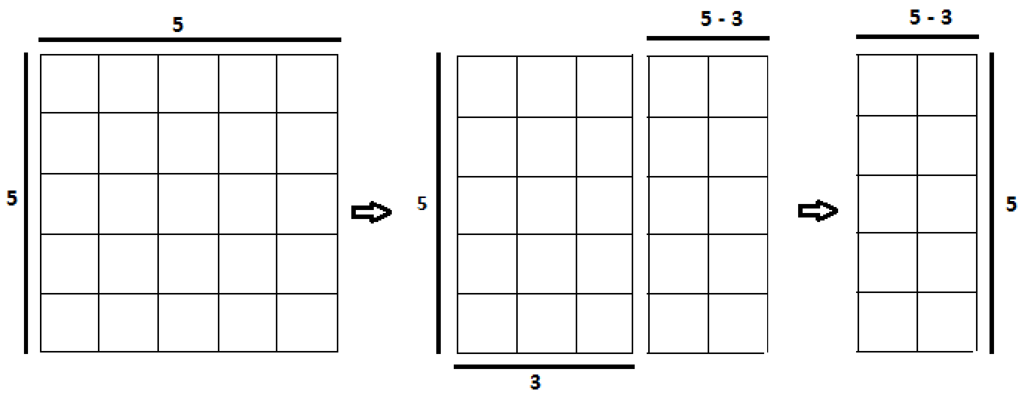
Ao analisar a figura, pode-se notar que se trata de um quadrado de lado $5-3$. Assim, uma primeira contagem do número de peças que forma tal quadrado, poderá ser determinada da seguinte forma: como $(5-3) = 2$, tem-se $2 \text{ x } 2 = 2 + 2 = 4$.

Da mesma forma, pode-se realizar uma segunda contagem da representação acima descrita. No entanto, ao montá-la devemos usar uma técnica muito comum quando se trabalha com dominós, que é a manipulação dos mesmos, realizada de forma fácil e natural. Observe as etapas abaixo, onde tal técnica é utilizada.

Enfrenta-se neste ponto do trabalho, a dificuldade de lidar com a diferença $(5-3)$. A estratégia utilizada é a de pensar numa figura maior (de comprimento 5), da qual se retiram as 3 peças da esquerda, restando o termo $(5-3)$. Isso possibilita partir de uma situação distinta, como abaixo, e chegar ao quadrado da diferença.

1ª etapa: Primeiramente de um quadrado de lado 5 retira-se um retângulo $5 \text{ x } 3$, obtendo assim, um retângulo de lados 5 e $(5-3)$, conforme figura 3.7.

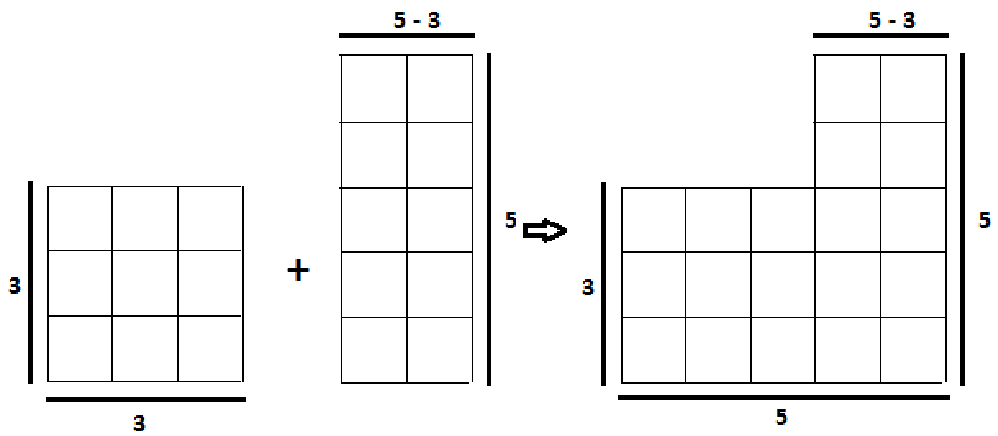
Figura 3.7 – Representação geométrica para se chegar ao retângulo de lados (5 – 3) e 5 usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

2ª etapa: Num segundo momento acrescenta-se um quadrado de lado 3 ao retângulo de lados $(5-3)$ e 5, com o objetivo de surgir um novo retângulo de lados $3 \text{ x } 5$ (figura 3.8).

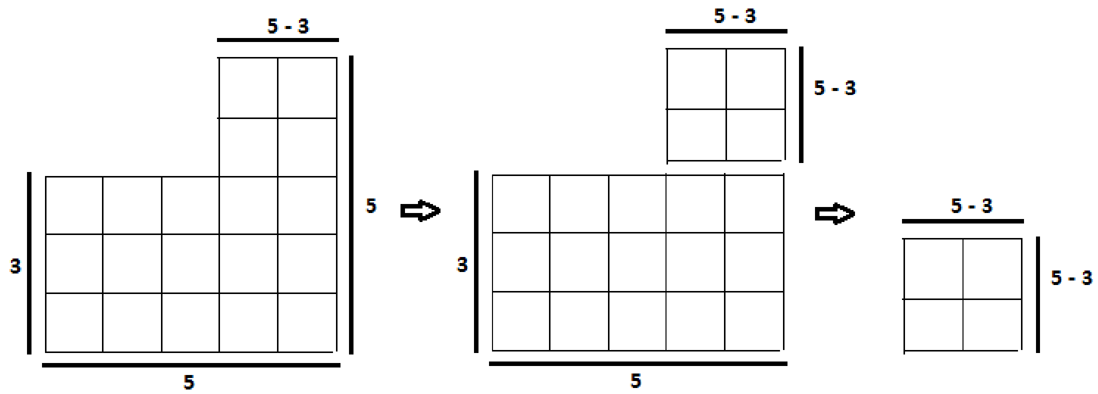
Figura 3.8 – Representação geométrica do acréscimo do quadrado de lado 3, usando dominós



Fonte: Elaborada pelo autor

3ª etapa: Em um último passo retira-se um retângulo $3 \text{ x } 5$, restando assim, o quadrado de lado $(5-3)$ pretendido, como ilustra a figura 3.9.

Figura 3.9 – Representação geométrica de $(5-3)^2$ usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, em linguagem numérica, foram realizadas as seguintes etapas: $5^2 - 5 \times 3 + 3^2 - 3 \times 5$. Como os retângulos 5×3 e 3×5 são iguais, pois possuem a mesma quantidade de quadradinhos pela propriedade da comutatividade, pode-se resumir a situação acima da seguinte forma:

$$(5-3)^2 = 5^2 - 2.(5 \times 3) + 3^2 = 25 - 30 + 9 = 4.$$

Nas duas contagens, o resultado é o mesmo, no entanto, uma delas foi realizada de forma diferente.

Novamente cabe aqui ressaltar a importância da realização de diversos outros exemplos de verificações geométricas envolvendo análogas situações, com o objetivo de que o aluno consiga compreender a generalização.

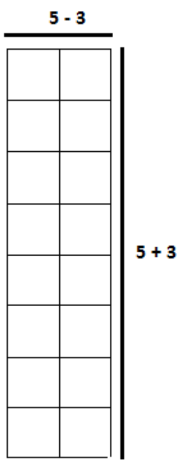
Após esta verificação e consequente generalização via áreas, o aluno terá condições de definir simbolicamente o *quadrado da diferença de dois termos*, onde para quaisquer números $x > y > 0$, temos:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

3.1.3 Produto da soma pela diferença de dois termos

Para a verificação da fórmula do produto da soma pela diferença de dois termos, tome como exemplo $(5+3)(5-3)$. Usando dominós, peças quadradas 1×1, a figura que representa tal situação, nos remete a uma figura bidimensional, tendo a seguinte representação (figura 3.10).

Figura 3.10 – Representação geométrica de $(5\ +\ 3).(5 - 3)$.

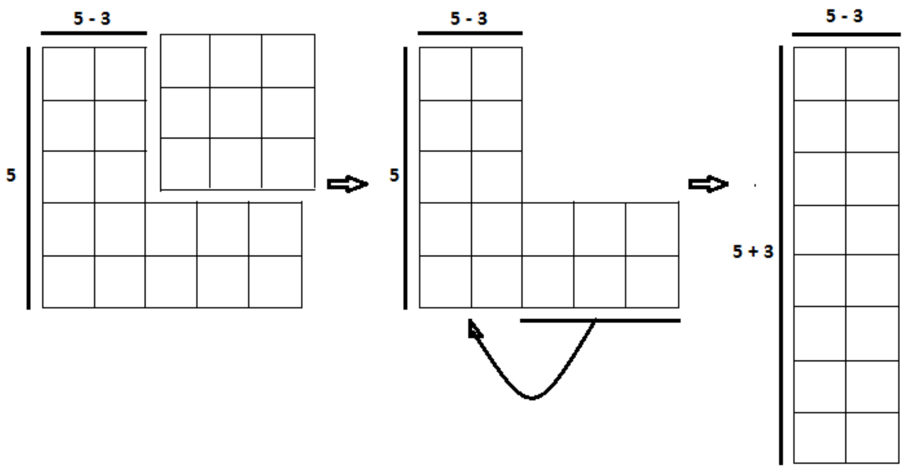


Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar a figura, pode-se notar que se trata de um retângulo de lados $5\ +\ 3$ e $5\ -\ 3$. Assim, uma primeira contagem do número de peças que forma tal retângulo, poderá ser determinada da seguinte forma: como $(5\ +\ 3)\ =\ 8$ e $(5 - 3)\ =\ 2$, teremos $8 \times 2\ =\ 2\ +\ 2\ +\ 2\ +\ 2\ +\ 2\ +\ 2\ +\ 2\ +\ 2\ =\ 16$.

Da mesma forma, pode-se realizar uma segunda contagem da situação acima descrita. No entanto, para montá-la aproprie-se novamente da facilidade de manipulação dos dominós. A figura 3.11 ilustra os passos dessa manipulação.

Figura 3.11 – Representações geométricas para se chegar à $(5\ +\ 3).(5 - 3)$ usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

Neste caso, pode-se verificar que do quadrado $5 \text{ x } 5$ foi retirado um quadrado de lado 3 e o retângulo $2 \text{ x } 3$ foi girado e encaixado para a formação do lado $(5 + 3)$.

Assim, em linguagem numérica, foram realizadas as seguintes etapas:

$$(5 + 3).(5 - 3) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16.$$

Nas duas contagens, o resultado é o mesmo, no entanto, uma delas foi realizada de forma diferente.

O trabalho com exemplos análogos é igualmente necessário e importante, em vista a generalização por parte dos alunos.

Após esta verificação e consequente generalização via áreas, conforme ilustra a figura 3.3, o aluno terá condições de definir simbolicamente o *produto da soma pela diferença de dois termos*, onde para quaisquer números $x > y > 0$, temos:

$$(x + y).(x - y) = x^2 - y^2.$$

3.2 RELAÇÕES DE GIRARD

Outro tópico muito importante da álgebra está ligado às demonstrações das soluções de equações do segundo, terceiro, quarto, ..., grau. Dentre os matemáticos hindus que se destacaram significativamente em contribuições a esse fim, temos Bháskara (1114 – 1185), por ter sido considerado o pai da fórmula geral da solução das equações polinomiais do segundo grau.

Conforme Eves (2004), no entanto, a fórmula que levou o nome de Bháskara, na verdade não foi descoberta por ele. Um século antes, o matemático hindu Sridhara (870 d.C. – Índia – 930 d.C.) teria encontrado a mencionada fórmula e publicada numa obra que se perdeu.

Segundo o autor, em textos babilônicos, escritos há cerca de 4000 anos, encontram-se descrições de procedimentos para resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau. O autor também menciona que na Grécia, utilizava-se geometria para resolver tais equações. A partir do início do século IX, matemáticos árabes já haviam se empenhado na resolução de equações do segundo grau, cujos procedimentos utilizaram os conhecimentos de álgebra e geometria desenvolvidos pelos gregos, e, em decorrência, fórmulas específicas para tipos diferentes de equações surgiram.

Para Elon (2013, p.122), problemas que recaem numa equação de segundo grau estão entre os mais antigos da matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônicos, encontra-se, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma *s* e seu produto *p*.

Os números procurados são as raízes da equação de segundo grau:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Assim, se α é uma raiz da equação, isto é, $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$, então, $\beta = s - \alpha$ também é raiz, pois

$$\beta^2 - s\beta + p = (s-\alpha)^2 - s(s-\alpha) + p$$
$$= s^2 - 2\,s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p$$
$$= \alpha^2 - s\alpha + p = 0.$$

Conforme Elon (2013, p.123), achar as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é, também, um conhecimento milenar, pois, até o final do século XVI, não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Essa representação começou a ser feita a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos, com coeficientes numéricos.

Segundo o autor, a regra para achar dois números cuja soma e produto é dada, era assim enunciada pelos babilônicos:

> Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número. (Elon, 2013, p.123)

Na notação atual, esta regra fornece as seguintes raízes, para a equação $x^2 - sx + p = 0$:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}\,.$$

Elon (2013) coloca que os autores dos textos cuneiformes não deixaram registrado o argumento que os levou a esta conclusão.

Como os dados *s* e *p* do problema eram sempre números positivos, os babilônicos nunca tiveram preocupações com eventuais soluções negativas fornecidas por sua regra. Mas certamente deveriam ocorrer casos em que $(\frac{s}{2})^2 < p$, como no problema de achar dois números cuja soma e cujo produto são ambos iguais a 2. Conforme o autor, nestes casos, eles simplesmente diziam que os números procurados não existiam. O que é absolutamente correto no âmbito dos números reais.

No início do século XVII, em 1629, o francês Albert Girard (1595 – 1632), escreveu o livro "*Invention nouvelle en algèbre*". Nesse livro, ele demonstrava as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação, admitindo raízes negativas. Assim, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e as raízes α e β, as relações de Girard entre essas raízes e os coeficientes a, b e c da equação são dadas por:

1ª relação: soma das raízes da equação:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ ou } s = -\frac{b}{a}, \text{ em consequência, } -s = \frac{b}{a}.$$

2ª relação: produto das raízes da equação:

$$\alpha . \beta = \frac{c}{a} \rightarrow p = \frac{c}{a} .$$

Assim, se dividirmos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a, temos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0, \text{ o que implica, } x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Substituindo os coeficientes $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ respectivamente por $-s$ e *p*, obtém-se:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

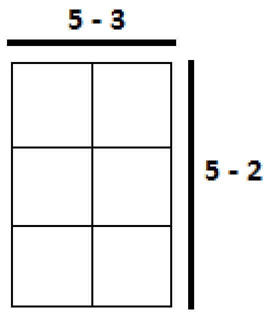
Como α e β são as raízes da equação, tem-se: $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha.\beta = (x - \alpha).(x - \beta)$. De onde se evidencia o resultado mais geral de que, se α é raiz de um polinômio $p(x)$, então $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$.

Tendo esse embasamento, nesta seção procurar-se-á verificar essas relações de Girard usando dominós como método didático.

Para a verificação da relação $(x - \alpha).(x - \beta) = x^2 - sx + p$, onde *s* e *p* são a soma e o produto de α e β, tome como exemplo $(5 - 3)(5 - 2)$.

Usando dominós, peças quadradas $1 \text{ x } 1$, a figura que representa tal situação, nos remete a uma figura bidimensional, tendo a seguinte representação (figura 3.12).

Figura 3.12 – Representação geométrica de $(5 - 3).(5 - 2)$.



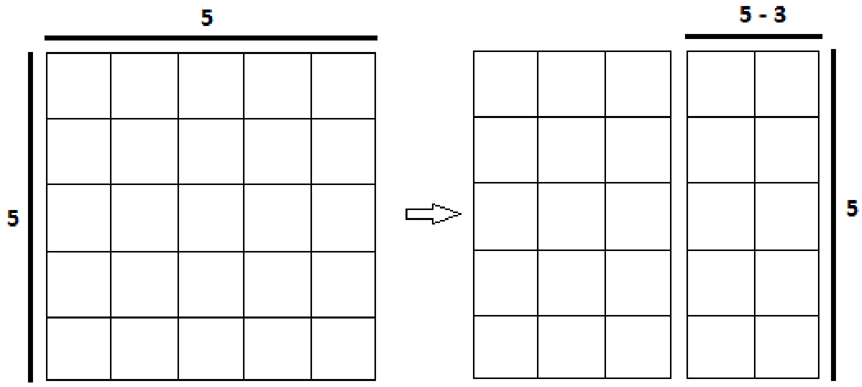
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar a figura, pode-se notar que se trata de um retângulo de lados $(5 - 3)$ e $(5 - 2)$. Assim, uma primeira contagem do número de peças que forma tal retângulo, poderá ser determinada da seguinte forma: como $(5 - 3) = 2$ e $(5 - 2) = 3$, teremos $2 \text{ x } 3 = 3 + 3 = 6$.

Da mesma forma, pode-se realizar uma segunda contagem da situação acima descrita. No entanto, para montá-la aproprie-se novamente da facilidade de manipulação dos dominós. Observe os passos abaixo:

1º passo: Remover de um quadrado de lado 5, um retângulo $5 \text{ x } 3$, obtendo assim, um retângulo de lados 5 e $(5 - 3)$, conforme a figura 3.13.

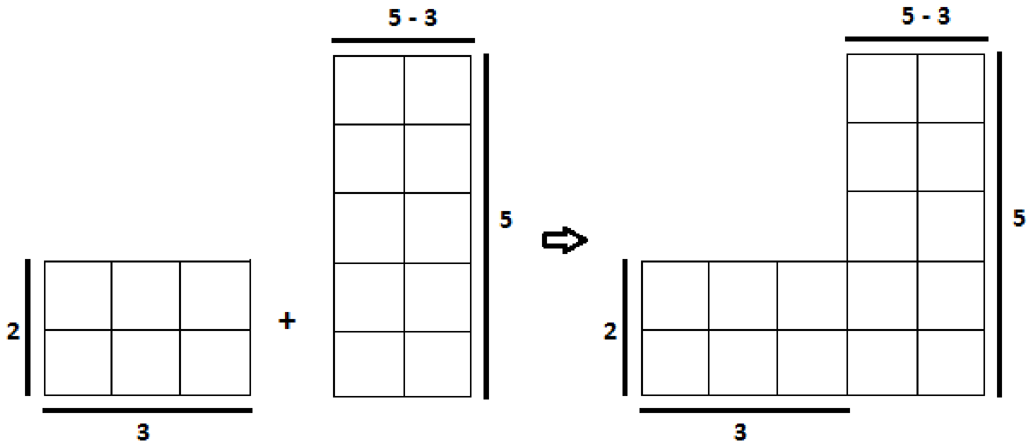
Figura 3.13 – Obtenção de um retângulo de lados (5 – 3) e 5 a partir de um quadrado de lado 5.



Fonte: Elaborada pelo autor

2º passo: Acrescente um retângulo 3×2 ao retângulo anterior (figura 3.14).

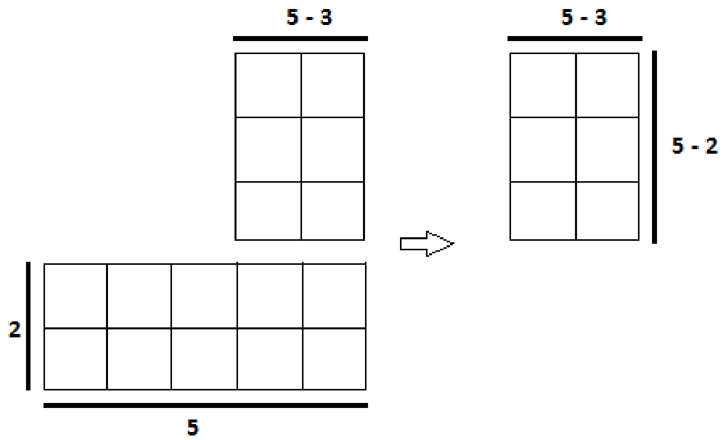
Figura 3.14 – Representações geométrica depois de acrescentado o retângulo 3 x 2.



Fonte: Elaborada pelo autor

3º passo: Remova um retângulo 2×5 da figura acima. A figura 3.15 ilustra a situação proposta inicialmente.

Figura 3.15 – Representações geométricas da remoção do retângulo 2 x 5.



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, em linguagem numérica, foram realizadas as seguintes etapas:

$$5^2 - 3 \text{ x } 5 + 3 \text{ x } 2 - 2 \text{ x } 5.$$

Logo: $(5-3).(5-2) = 5^2 - (3+2).5 + 3 \text{ x } 2 = 25 - 25 + 6 = 6.$

Após analisar as diversas situações que possam ser apresentadas, o aluno deverá generalizar que, sendo α e β $\in \mathbb{N}$, as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$, tem-se:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x - \alpha).(x - \beta).$$

3.3 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Outro assunto da álgebra que é bastante explorado e trabalhado no ensino médio está relacionado a sequências e progressões. Progressões são trabalhadas como uma sequência de números que obedecem a um certo padrão.

Para Elon (2013), uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O autor considera apenas sequências de números reais, isto é, funções de $\mathbb{N}$ em **IR**.

A notação mais usual para uma sequência é $(x_1, x_2, x_{3,} \ldots, x_n, \ldots)$. Isto significa que a sequência dada é a função $1 \to x_1, 2 \to x_2, \ldots, n \to x_n, \ldots$, a qual faz corresponder a cada número natural *n,* o número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* da sequência.

Exemplos particularmente interessantes de sequências são as progressões.

Neste trabalho, trabalhar-se-á com somas de progressões ditas aritméticas.

Uma progressão aritmética (P.A.) é uma sequência $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots, x_n, \dots$, onde cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante *r*, chamada a *razão* da progressão.

Na progressão aritmética (x_n) tem-se: $x_2 = x_1 + r;\ x_3 = x_2 + r = x_1 + 2r;\ x_4 = x_1 + 3r;$ ... e, em geral, $x_n = x_1 + (n-1).r$ para todo *n* ϵ ℕ.

Como suporte para o cálculo da soma dos termos de uma progressão aritmética, Eves (2004) relata uma das histórias da infância de Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), conhecido como o príncipe da matemática:

> Carl foi uma das mais notáveis crianças-prodígio, dessas que aparecem de raro em raro.[...].Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100 observando que 100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101 e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma, portanto 50 x 101 = 5050. (EVES, 2004,.p.519).

Baseados na ideia de Gauss, Morgado e Carvalho (2013, p.39) demonstram uma forma de generalização da soma de uma progressão aritmética da seguinte forma:

Sendo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e escrevendo a soma de trás para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$, tem-se:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Pode-se notar que todas as parcelas entre parênteses são iguais à primeira $(a_1 + a_n)$ visto que ao passar de um parêntese ao seguinte, a primeira parcela aumenta de *r* e a segunda parcela diminui de *r*, o que não altera a soma. Como são *n* parênteses, tem-se:

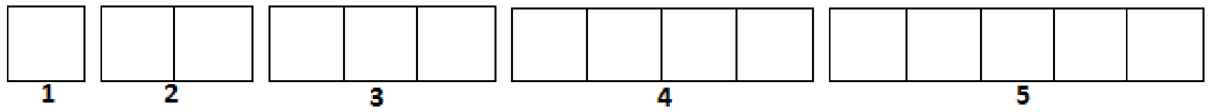
$$2S_n = (a_1 + a_n).n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

Tendo esse embasamento, no presente trabalho procurar-se-á verificar tal generalização usando dominós como recurso didático.

Para a verificação da fórmula da soma dos primeiros termos de uma Progressão Aritmética (PA), tome como exemplo a PA finita $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Usando dominós, peças quadradas $1 \text{ x } 1$, a figura que representa tal situação, nos remete à seguinte representação (figura 3.16), dentre outras possíveis:

Figura 3.16 – Representação geométrica da PA {1, 2, 3, 4, 5} usando dominós.

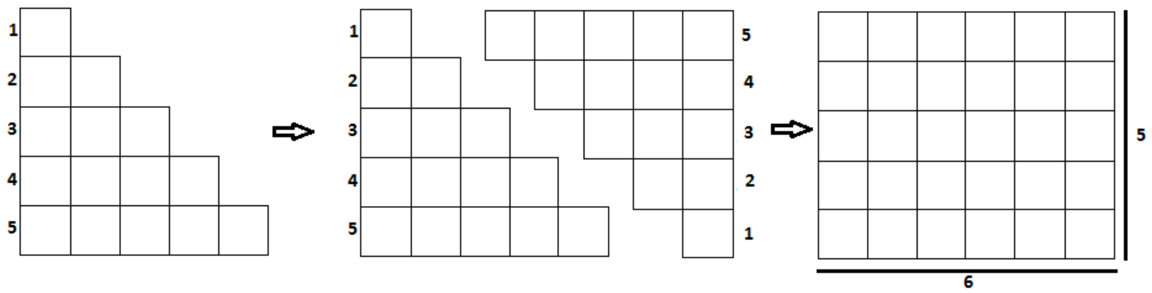


Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar a representação da referida PA, pode-se notar que o número de peças que a forma pode ser determinada da seguinte maneira: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Reorganizando as peças dos dominós e usando a ideia da soma de Gauss, temos a seguinte representação (figura 3.17).

Figura 3.17 – Reorganização da representação geométrica da soma da PA {1, 2, 3, 4, 5}.



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar a representação acima, pode-se notar que a figura que representa a PA $\{1,2,3,4,5\}$ foi organizada e duplicada. Após duplicação, uma delas foi invertida, ficando a escrita da PA do maior termo para o menor, isto é, $\{5,4,3,2,1\}$. Quando encaixadas, surge um padrão na geometria dos dominós, um retângulo $5 \text{ x } 6$.

Numa segunda análise pode-se notar que o número de linhas do retângulo representa o número de termos da PA e que todas as linhas, após encaixe, têm o mesmo número de elementos, 6 no caso, $(1 + 5) = (2 + 4) = (3 + 3) = (4 + 2) = (5 + 1)$.

É importante ressaltar aqui que ao se passar de uma linha para outra, o primeiro termo fica acrescido em uma unidade e o último termo fica reduzido em uma unidade, o que caracteriza uma PA de razão 1.

Assim, a soma total de quadrados recai em contar uma multiplicação: $5 \text{ x } 6$. E, como a contagem inicial $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ foi repetida duas vezes, temos:

$$S_5 = \frac{5 \text{ x } 6}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Neste sentido, para que haja a generalização da fórmula da soma de uma PA é necessário que se trabalhem outros exemplos semelhantes até que o aluno consiga perceber que a soma de uma progressão aritmética é o produto da média aritmética entre o primeiro e o último termo pelo número de termos desta. Em linguagem simbólica, se S_n= soma de *n* termos; a_1= primeiro termo, a_n= termo geral ou último termo e n = número de termos, tem-se:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} . n.$$

Como consequência, a soma dos *n* primeiros números inteiros e positivos é:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

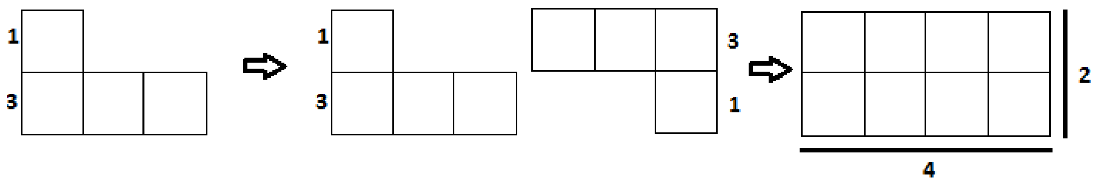
Da mesma forma, observe agora o que acontece com a soma dos primeiros números inteiros positivos ímpares. Tal procedimento está dividido em quatro passos.

Primeiro passo: Tome como exemplo, uma PA finita unitária {1} que representa o primeiro número inteiro positivo ímpar. Como consequência a soma S_1 = 1.

Segundo passo: Tome agora como exemplo a PA finita $\{1, 3\}$, que representa a sequência dos dois primeiros números inteiros positivos ímpares.

Usando dominós, peças quadradas $1 \text{ x } 1$, a figura que representa a soma da referida P.A. usando a ideia de Gauss, nos remete a seguinte representação (figura 3.18).

Figura 3.18 – Representação geométrica da soma da PA {1, 3} usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

Ao analisar a representação acima, conforme passos feitos anteriormente, a figura resultante nos remete a uma retângulo $2 \text{ x } 4$. Aqui também se pode notar que o número de linhas do retângulo representa o número de termos da PA e que todas as linhas, após encaixe, tem o mesmo número de elementos, isto é, $4 = (1 + 3) = (3 + 1)$.

Nesse caso ao se passar de uma linha para outra, o primeiro termo fica acrescido em duas unidades e o último termo fica reduzido em duas unidades, isto é, a razão do acréscimo e decréscimo é igual a 2, o que caracteriza a razão de uma PA dos primeiros números inteiros ímpares positivos.

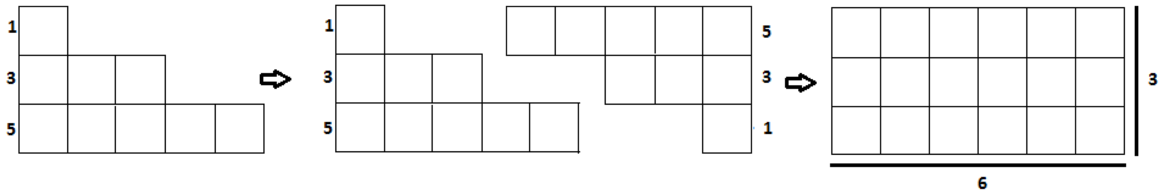
Em consequência, a soma total de quadrados recai em contar uma multiplicação: $2 \text{ x } 4$. E, como a contagem inicial $S_2 = 1 + 3$ foi repetida duas vezes, temos:

$$S_2 = \frac{2 \text{ x } 4}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Terceiro passo: Tome como exemplo a PA finita $\{1, 3, 5\}$, que representa a sequência dos três primeiros números inteiros positivos ímpares.

Usando dominós, peças quadradas $1 \text{ x } 1$, a figura que representa a soma da referida PA usando a ideia de Gauss, nos remete à seguinte representação (figura 3.19)

Figura 3.19 – Representação geométrica da soma da PA {1, 3, 5} usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

Analogamente ao segundo passo, após duplicação, inversão e encaixe, surge um retângulo $3 \text{ x } 6$, onde se pode notar que o número de linhas do retângulo representa o número de termos da PA e que todas as linhas, após encaixe, tem o mesmo número de elementos, isto é, $6 = (1 + 5) = (3 + 3) = (5 + 1)$.

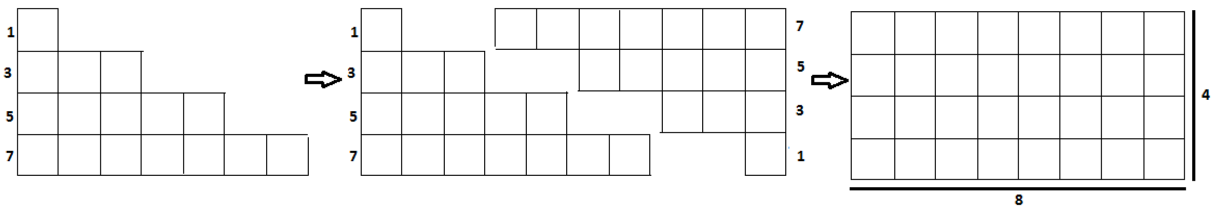
Assim, a soma total de quadrados recai em contar uma multiplicação: $3 \text{ x } 6$. E, como a contagem inicial $S_3 = 1 + 3 + 5$ foi repetida duas vezes, temos:

$$S_3 = \frac{3 \text{ x } 6}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Quarto passo: Tome finalmente como exemplo a PA finita $\{1, 3, 5, 7\}$, que representa a sequência dos quatro primeiros números inteiros positivos ímpares.

Usando dominós, peças quadradas $1 \text{ x } 1$, a figura que representa a soma da referida PA usando a ideia de Gauss, nos remete a seguinte representação (figura 3.20).

Figura 3.20 – Representação geométrica da PA {1, 3, 5, 7} usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme etapas realizadas nos passos anteriores, nesse caso da PA que representa os quatro primeiros números inteiros positivos ímpares, surge um retângulo $4 \text{ x } 8$, onde também se pode notar que o número de linhas do retângulo representa o número de termos da PA e que todas as linhas, após encaixe, tem o mesmo número de elementos, isto é, $8 = (1 + 7) = (3 + 5) = (5 + 3) = (7 + 1)$.

Assim, a soma total de quadrados também recai em contar uma multiplicação, nesse caso, $4 \text{ x } 8$. E, como a contagem inicial $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7$ foi repetida duas vezes, temos:

$$S_4 = \frac{4 \text{ x } 8}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

A partir dos passos acima, onde foram obtidas as seguintes somas: $S_1 = 1$; $S_2 = 4$; $S_3 = 9 \; e \; S_4 = 16$ os alunos poderão conjecturar que a soma dos n primeiros números inteiros ímpares é igual n^2.

Assim:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1).n}{2} = n^2.$$

É importante ressaltar aqui que o objetivo maior do presente trabalho está em explorar ao máximo o lado lúdico e matemático das técnicas de dominós como uma alternativa às demonstrações usando axioma da indução. Tal concepção é válida a partir do momento que se tem um envolvimento ativo do aluno, onde o mesmo consiga progredir do concreto para o abstrato, tendo a observação, a análise e o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico como suportes na construção de seus conhecimentos.

3.4. ATIVIDADES DIDÁTICAS QUE VISAM O ENSINO/APRENDIZAGEM

Conforme exposto acima, o presente trabalho é uma proposta de demonstrações de diferentes situações presentes em sala de aula, tendo a reprodução destas de forma descontraída e lúdica.

Com esse embasamento, procurar-se-á, nesta seção, dar exemplos de atividades didáticas, envolvendo questões que visam o ensino/aprendizagem de produtos notáveis e somas de PA e suas generalizações.

Muitas outras questões poderão ser apresentadas aos alunos, pois conforme já elencado, suas verificações nunca serão suficientes, visto que para cada propriedade algébrica se tem casos particulares com infinitos exemplos.

a. Verifique, usando dominós, peças quadradas 1 x 1, o produto notável de $(x + 2y)^2$, onde $x = 1\ e\ y = 3$. Em seguida, procure dar evidência de que vale a fórmula geral: $(x + 2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$.

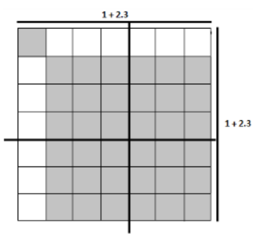
b. Verifique, usando dominós, peças quadradas 1 x 1, o produto notável de $(x + y + z)^2$, onde $x = 1, y = 2\ e\ z = 3$. Se necessário, utilize outros valores para as variáveis *x, y* e *z*. E, a partir da(s) verificação(ões) procure dar evidência de que vale a fórmula geral: $(x + y + z)^2 = x^2 + \ y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

c. Verifique, usando dominós, peças quadradas 1 x 1, o produto notável de $(x - 2y)^2$, onde $x = 4\ e\ y = 1$. Após análise da verificação dê evidências de que vale a fórmula geral para $x\ >\ 2y$: $(x - 2y)^2 =\ x^2 - 4xy + 4y^2$.

d. A sequência {1, 5, 12, 22, 35,...}, forma o que chamamos de números pentagonais. Um fato interessante destes números é que os mesmos formam uma P.A. de 2ª ordem, isto é, são as somas parciais de uma PA, qual seja: {1, 4, 7, 10, ...}. Verifique alguns casos e generalize que o n-ésimo número pentagonal é dada pela fórmula: $p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.

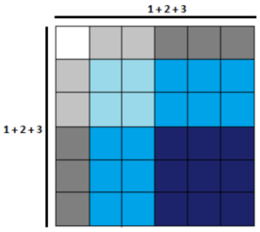
3.5. SOLUÇÕES ESPERADAS.

a.



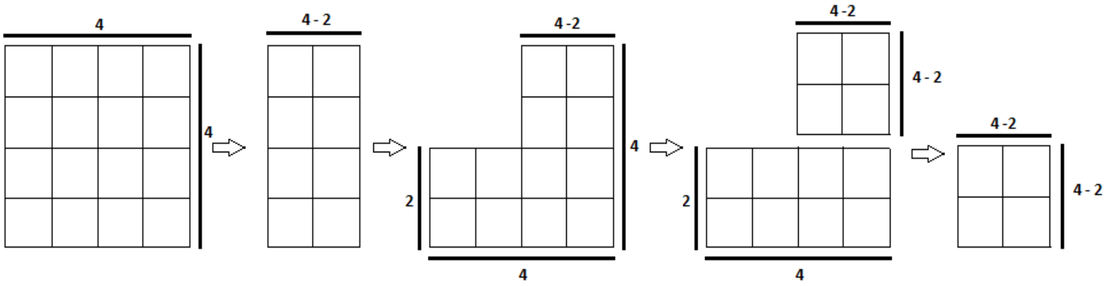
Espera-se que o aluno analise na demonstração a formação de um quadrado de lado 1, de quatro quadrados de lado 3 e de quatro retângulos 1 x 3, e conclua assim a fórmula geral desejada.

b.



Ao analisar a figura formada (cores ilustrativas) espera-se que o aluno note que há a formação de um quadrado de lado 1 (branco), de um quadrado de lado 2 (azul claro), de um quadrado de lado 3 (azul escuro), de dois retângulos 1 x 2, de dois retângulos 1 x 3 e de dois retângulos 2 x 3. A partir desta análise, conclui-se a validade da fórmula geral pedida.

c.

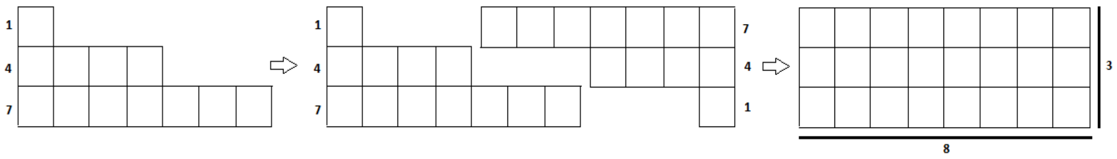


A partir da análise dos passos verificados, o aluno poderá concluir a validade da fórmula geral desejada.

d.

Num primeiro momento, o aluno deverá perceber que os números pentagonais {1, 5, 12, 22, ...} formam uma PA de 2ª ordem, onde cada termo é a soma parcial da PA {1, 4, 7, 10, ...}. Ao realizar a soma da PA formada obtém-se o que o problema pede. Assim, por exemplo:

Soma dos 3 primeiros termos da PA {1, 4, 7}:



De onde se conclui que a soma é igual a 12 (terceiro número pentagonal).

Analogamente com os quatro, cinco, ... termos da PA.

A partir da análise dos passos verificados, espera-se que o aluno possa evidenciar a validade da fórmula.

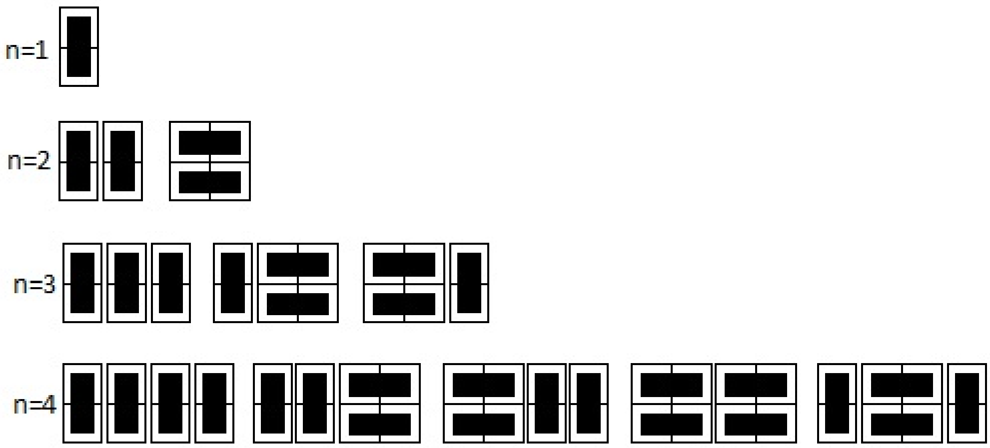
4 O USO DE DOMINÓS EM SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI

No estudo das sequências, uma situação-problema interessante envolve o jogo dominó, jogo este muito conhecido e praticado desde a infância até a fase adulta da grande maioria das pessoas, independente da condição social e de gênero de seus envolvidos.

Tal situação consiste em descobrir de quantas maneiras diferentes se pode ladrilhar um tabuleiro $2 \text{ x } n$, com n um número inteiro positivo, usando as peças do dominó de dimensões $2 \text{ x } 1$.

Assim, considerando esta quantidade definida acima de $P_{n,}$ com $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, o conjunto dos naturais, obtém-se, por inspeção: $P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 3, P_4 = 5$, conforme figura 4.1.

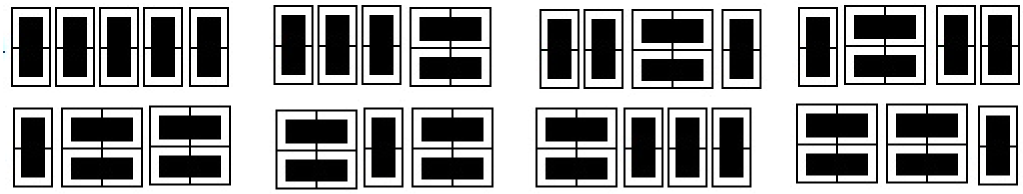
Figura 4.1 – Possibilidade de se cobrir um tabuleiro $2\text{x}1$; $2\text{x}2, 2\text{x}3$ e $2\text{x}4$ usando dominós $2\text{x}1$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando a formação da sequência $P_n = \{1, 2, 3, 5, \dots\}$, pode-se conjecturar que o próximo termo, o P_5, é dado pela lei de formação intuída pelos casos anteriores dada por $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ para $n \geq 3$, sendo os termos iniciais $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$. Desta forma, $P_5 = P_4 + P_3 = 5 + 3 = 8$. Tal fato é comprovado, novamente por inspeção, pois P_5 têm exatamente oito possibilidades, conforme ilustra a figura 4.2.

Figura 4.2 – Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2\text{x}5$ usando dominós $2\text{x}1$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Com base nos dados acima se pode montar uma tabela (tabela 4.1) a partir da relação $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ para $n \geq 3$ tendo $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$.

Tabela 4.1 – Número de possibilidades usando a relação $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$.

n	P_n
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
...	...
n	$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$

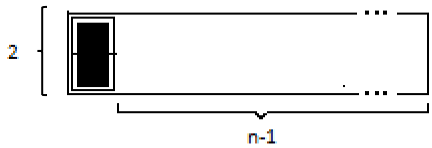
Fonte: Elaborada pelo autor

Prova:

Para n ≥ 3 e considerando o canto esquerdo do tabuleiro, pode-se cobrir sua área de duas formas diferentes, a saber:

1) 1º dominó em pé (figura 4.3).

Figura 4.3 – Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2 \text{ x } n$ com 1º dominó em pé.

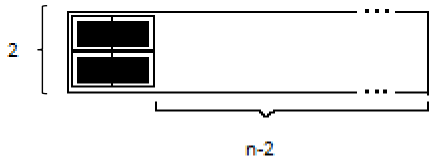


Fonte: Elaborada pelo autor

Há P_{n-1} maneiras de completar a área.

2) 1º par de dominós deitados (figura 4.4)

Figura 4.4 – Possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2 \text{ x } n$ com 1º par de dominós deitados.



Fonte: Elaborada pelo autor

Há P_{n-2} maneiras de completar a área.

Por conseguinte, valem os termos iniciais $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, e tem-se, para n ≥ 3:

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Tal relação é classificada como uma recorrência linear de segunda ordem.

Um dos exemplos mais célebres de sequências definidas por recorrência é, sem dúvida, a chamada sequência de Fibonacci.

Conforme Eves (2004):

> Fibonacci (“Leonardo, filho de Bonaccio”, c. 1175-1250) foi o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de pisa (ou Leonardo Pisano), Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis.[...] As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética que se canalizou , posteriormente, para extensas viagens ao Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, onde pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes. (EVES, 2004, p.292).

Ainda conforme Eves (2004), inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci em 1202, logo depois de retornar à sua terra natal, publicou sua obra famosa intitulada *Liber abaci*.

Em sua obra, encontra-se um dos problemas mais emblemáticos que deu origem à famosa sequência de Fibonacci: "*Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, a partir de um único casal, se cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo depois de dois meses?*" (EVES, 2004, p.315).

A questão é fascinante tanto por sua aparente simplicidade como pela multiplicidade de formas em que pode ser apresentada.

Hefez (2014, p.38), apresenta a seguinte solução para o problema (tabela 4.2).

Tabela 4.2 – Solução do Problema de Fibonacci.

Mês	Número de casais do mês anterior	Número de casais recém-nascidos	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: Adaptado de Hefez (2014)

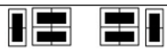
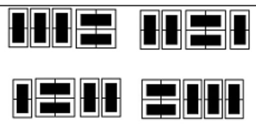
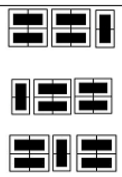
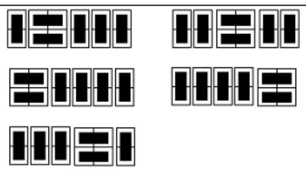
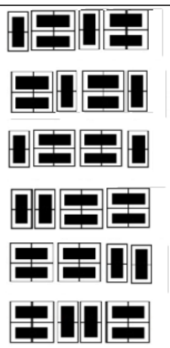
Conforme Hefez (2014), o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais férteis do mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Observa-se que fica bastante clara a relação de recorrência com o total de casaisf_n, a partir do segundo mês, sendo dado pela soma do número de casais dos dois meses anteriores, ou seja, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $f_1 = f_2 = 1$. Assim, o número de casais a cada mês gera a sequência f_n = {1, 1, 2, 3, 5, 8, …}, chamada sequência de Fibonacci.

Na situação apresentada anteriormente: *de quantas maneiras diferentes se pode cobrir um tabuleiro* $2 \text{ x } n$, *com* n *um número inteiro positivo, usando as peças do dominó de dimensões* $2 \text{ x } 1$, pode-se notar um problema de argumentação combinatória que representa a mesma situação descrita por Fibonacci, ressalvo somente pela decorrência de que $f_{n+1} = P_n$.

O uso de dominós, entretanto, possibilita outras interpretações interessantes, e seria menos natural fazê-las usando o problema dos coelhos propostos por Fibonacci. A tabela 4.3 ilustra uma dessas interpretações, onde leva em consideração a organização do total de peças deitadas em cada uma das possibilidades de se cobrir o tabuleiro $2 \text{ x } n$.

Tabela 4.3 – Total de possibilidades envolvendo pares de peças deitadas.

n	0 par de peças deitadas	1 par de peças deitadas	2 pares de peças deitadas	3 pares de peças deitadas	Total (P_n)
1					1
2					2
3					3
4					5
5					8
6					13

Fonte: Elaborada pelo autor

Ao relacionar apenas a quantidade numérica de possibilidades de pares de peças deitadas que aparece em cada coluna pode-se montar uma tabela (tabela 4.4).

Tabela 4.4 – Quantidade numérica de pares de peças deitadas.

n	0 pares de peças deitadas	1 par de peças deitadas	2 pares de peças deitadas	3 pares de peças deitadas	Total (P_n)
1	1				1
2	1	1			2
3	1	2			3
4	1	3	1		5
5	1	4	3		8
6	1	5	6	1	13

Fonte: Elaborada pelo autor

Ao se fazer uma análise das sequências que surgem nas colunas, o total de possibilidades faz-nos remeter a uma sequência de Fibonacci deslocada em um termo, isto é, $f_{n+1} = P_n$, conforme descrito anteriormente. Uma outra análise sugere que as sequências de cada uma das colunas sejam as mesmas sequências das diagonais do Triângulo de Pascal na forma assimétrica, a partir da segunda diagonal; de onde se pode concluir que o problema proposto neste capítulo, usando dominós, o qual representa a sequência de Fibonacci deslocada, pode ser obtido pela soma ordenada de elementos do Triângulo de Pascal.

Assim, procurar-se-á obter a sequência de Fibonacci pela soma ordenada de elementos do Triângulo de Pascal. Para tanto, é necessário primeiramente definir o conceito de números binomiais e o próprio Triângulo de Pascal.

4.1 NÚMERO BINOMIAL E TRIÂNGULO DE PASCAL

Definição 4.1 - Chama-se *número binomial* um número representado por $\binom{n}{k}$ e calculado pela expressão abaixo, com $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n \geq k$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

O número binomial $\binom{n}{k}$ representa a escolha de k objetos dentre n objetos distintos disponíveis.

Definição 4.2 - Chama-se *Triângulo de Pascal* ao conjunto de sequências formadas pelos números binomiais $\binom{n}{k}$, ou por seus valores, e dispostas em linhas e colunas de tal modo que em cada linha os números binomiais apresentam o mesmo valor de n e em cada coluna apresentam o mesmo valor de k. As linhas e colunas do Triângulo de Pascal são numeradas a partir de zero.

Segundo Eves (2004) o nome dado ao *Triângulo* refere-se ao matemático francês do século dezessete Blaise Pascal (1623-1662).

Conforme o autor, em sua obra *Traité du Triangle Arithmétique,* Pascal construiu seu triângulo aritmético, figura 4.5 abaixo, onde qualquer elemento (da segunda linha em diante) é obtido como a soma de todos os elementos da linha precedente situados acima ou à esquerda do elemento desejado.

Figura 4.5 – Triângulo Aritmético conforme obra *Traité du Triangle Arithmétique.*

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	

Fonte: Livro introdução à história da matemática, 2004, p.364

Usando os números binomiais na construção do triângulo de Pascal, definição 4.2, existem duas formas clássicas para apresentar o mesmo. A primeira será apresentada de forma simétrica sem a existência de colunas verticais, conforme Figura 4.6 e a segunda, uma forma assimétrica com a existência de colunas verticais conforme a Figura 4.7.

Figura 4.6 – Triângulo Aritmético de Pascal com números binomiais na forma simétrica.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \binom{n}{5} \quad \binom{n}{6} \cdots \binom{n}{n}
\end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 4.7 – Triângulo Aritmético de Pascal com números binomiais na forma assimétrica.

$$\begin{array}{l}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \; \binom{4}{1} \; \binom{4}{2} \; \binom{4}{3} \; \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \binom{5}{3} \; \binom{5}{4} \; \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \; \binom{6}{1} \; \binom{6}{2} \; \binom{6}{3} \; \binom{6}{4} \; \binom{6}{5} \; \binom{6}{6} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\binom{n}{0} \; \binom{n}{1} \; \binom{n}{2} \; \binom{n}{3} \; \binom{n}{4} \; \binom{n}{5} \cdots \binom{n}{n-1} \; \binom{n}{n}
\end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor

Na construção do triângulo de Pascal, não é necessário calcular os coeficientes um a um pela definição com fatoriais. Temos algumas propriedades que facilitam sua construção.

Propriedade 1: Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é do tipo $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Propriedade 2: Em cada linha do triângulo, o último elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha, o último elemento é do tipo $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Propriedade 3: A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele (relação de *Stifel*).

Propriedade 4: Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$.

Levando em consideração essas quatro propriedades fundamentais do triângulo de Pascal, pode-se construí-lo na forma simétrica e com números naturais, conforme ilustra a figura 4.8.

Figura 4.8 – Triângulo de Pascal com números naturais na forma simétrica.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

Fonte: Elaborada pelo Autor

Conforme Morgado e Carvalho (2013) a propriedade que permite construir rapidamente o triângulo de Pascal é a relação de *Stifel*, que diz que somando dois elementos lado a lado no triângulo obtém-se o elemento situado embaixo entre os dois. Portanto, a próxima linha do triângulo acima será:

1; 1 + 6 = 7; 6 + 15 = 21; 15 + 20 = 35; 20 + 15 = 35; 15 + 6 = 21; 6 + 1 = 7; 1.

Relação de *Stifel*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

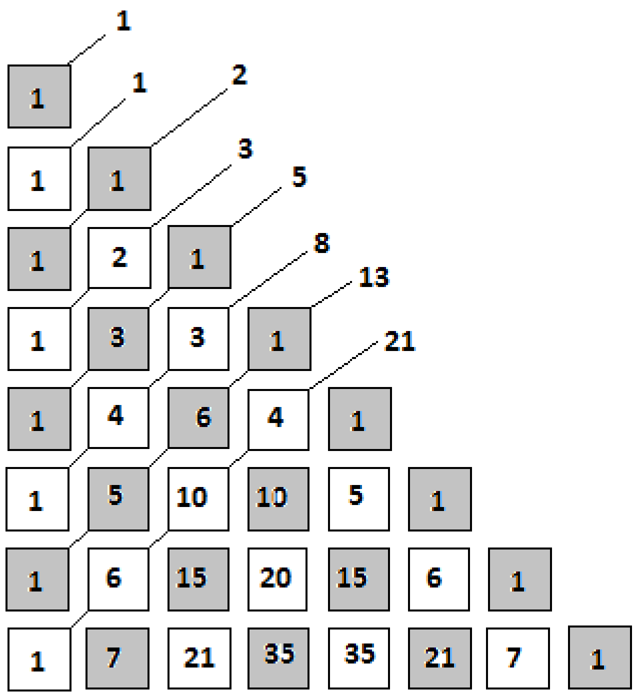
A demonstração da relação acima será feita conforme Morgado e Carvalho (2013):

Considere um conjunto A de $n + 1$ elementos, um dos quais é x. O número de subconjuntos de A com $p + 1$ elementos é $\binom{n+1}{p+1}$. Esse número é igual a soma do número de subconjuntos nos quais x não figura, $\binom{n}{p+1}$, com o número de subconjuntos nos quais x figura, $\binom{n}{p}$.

Conforme já elencado, se podem encontrar os números de Fibonacci no triângulo de Pascal, para isso, basta que se faça uma soma ordenada de elementos do Triângulo de Pascal.

Na tentativa de melhor visualizar as diagonais do triângulo de Pascal usa-se o mesmo na forma assimétrica, como ilustra a figura 4.9.

Figura 4.9 – Soma das diagonais do triângulo de Pascal.



Fonte: Elaborada pelo Autor

Usando os números binomiais das diagonais do triângulo de Pascal, tem-se:

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1$$

$$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5$$

Tais resultados apontam para a seguinte generalização: Para $n > 0$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = P_n.$$

Onde P_n representa o número de possibilidades de se ladrilhar um tabuleiro $2 \text{ x } n$ usando dominós, peças retangulares $2 \text{ x } 1$.

Uma análise da soma das diagonais nos remete à seguinte conclusão: a soma dos números de uma diagonal é igual à soma dos números das duas diagonais anteriores. Para verificar, toma-se como exemplo as diagonais 3 e 4: $D_3 = 1 + 1 = 2$; $D_4 = 1 + 2 = 3$. Assim: $D_5 = 1 + 3 + 1 = 5 = D_3 + D_4$.

Portanto, seja D_n a soma da *n-ésima* diagonal do triângulo de Pascal, tem-se então que: $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$. Como $D_1 = D_2 = 1$ configura-se assim a definição por recorrência da sequência de Fibonacci, pois D_n representa um número de Fibonacci, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

A seguir procurar-se-á demonstrar algumas identidades envolvendo números de Fibonacci, incluindo este resultado recém obtido, utilizando as interpretações combinatórias apresentadas neste capítulo.

4.2 ALGUMAS IDENTIDADES ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE FIBONACCI

As identidades de Fibonacci podem ser provadas por uma infinidade de métodos. No presente trabalho as provas basear-se-ão nas demonstrações feitas por Benjamin e Quinn (2003) e as interpretações combinatórias apresentadas neste capítulo.

Vale ressaltar que para as demonstrações considerar-se-á P_n como o número de possibilidades de se cobrir um tabuleiro $2 \text{ x } n$ usando dominós, peças retangulares $2 \text{ x } 1$ e sua relação com os números de Fibonacci, em que decorre em $P_n = f_{n+1}$. Como, $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ e $P_{n+2} = P_{n+1} + P_n$, logo P_n é igual à sequência de Fibonacci deslocada em um termo. Para isso basta provar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, vale:

$$P_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$$

Assim, formula-se a questão: De quantas formas se pode ladrilhar um tabuleiro $2 \text{ x } n$ usando dominós, peças retangulares $2 \text{ x } 1$?

Primeira contagem: Pela definição há P_n possibilidades.

Segunda contagem: Possibilidades de ladrilhamento do tabuleiro $2 \text{ x } n$ levando em consideração *k* pares de peças deitadas (figura 4.3). Observe:

K=0, só há peças em pé, portanto, há $\binom{n}{0}$ possibilidades.

K=1, há um par de peças deitadas, em consequência sobram $n-2$ peças de pé. Logo existem $n-1$ configurações de peças (sendo 1 par deitado e $n-2$ dominós em pé) dos quais escolhemos 1 resultando em $\binom{n-1}{1}$ combinações.

K=2, há dois pares de peças deitadas, em consequência sobram $n-4$ peças em pé. Logo existem $n-2$ configurações de peças (sendo 2 pares deitados e $n-4$ dominós em pé) dos quais escolhemos 2 resultando em $\binom{n-2}{2}$ combinações.

E assim por diante. Logo $\forall\, n \in N$:

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = P_n = f_{n+1}$$

Identidade 1: Para $n \geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0}^{n} P_k = P_{n+2} - 1.$$

Cuja relação com os números de Fibonacci equivale a

$$\sum_{k\geq 0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1.$$

Para a demonstração da identidade tome como base a definição recursiva $P_n = P_{n+2} - P_{n+1}$, com $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, e definindo $P_0 = P_2 - P_1 = 1$, a soma $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ pode ser assim determinada:

$$P_0 = P_2 - P_1$$
$$P_1 = P_3 - P_2$$
$$P_2 = P_4 - P_3$$
$$P_3 = P_5 - P_4$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$P_{n-1} = P_{n+1} - P_n$$
$$P_n = P_{n+2} - P_{n+1}$$

Somando as n equações, obtém-se:

$$\sum_{k\geq 0}^{n} P_k = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_4 - P_3) + \cdots + (P_{n+1} - P_n) + (P_{n+2} - P_{n+1})$$
$$= -P_1 + (P_2 - P_2) + (P_3 - P_3) + (P_4 - P_4) + \cdots + (P_n - P_n) + (P_{n+1} - P_{n+1}) + P_{n+2}$$
$$= P_{n+2} - P_1$$
$$= P_{n+2} - 1.$$

Os resultados acima apontam para uma generalização: para $n \geq 0$,

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n = P_{n+2} - 1.$$

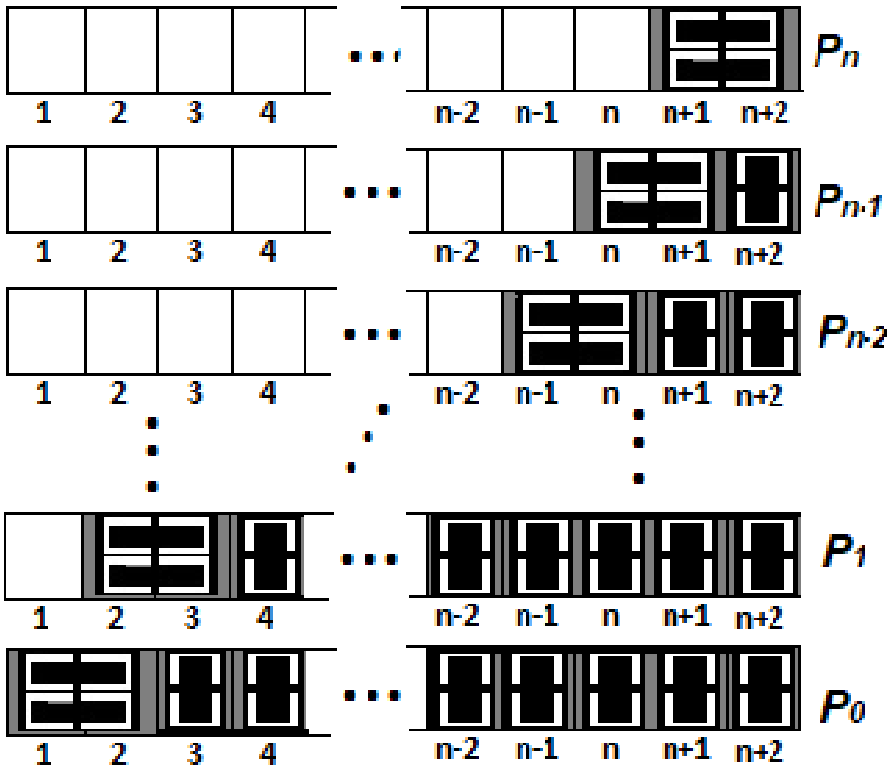
Usando os valores de cada um dos termos, observe a validade dessa generalização:

$$P_0 + P_1 + P_2 = 4 = 5 - 1 = P_4 - 1$$
$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 7 = 8 - 1 = P_5 - 1$$
$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 12 = 13 - 1 = P_6 - 1.$$

Tal resultado pode ser verificado a partir do uso dos dominós, objeto de estudo do presente trabalho. Nesse caso, conforme observação acima basta descobrir o número de ladrilhamento do inteiro positivo $n + 2$ excetuando-se uma possibilidade.

Tal situação pode ser representada conforme a figura 4.10, onde separam-se os ladrilhamentos que serão considerados conforme a posição do último par de dominós deitados.

Figura 4.10 – Localização do último dominó deitado em um tabuleiro $2 \text{ x } (n + 2)$.

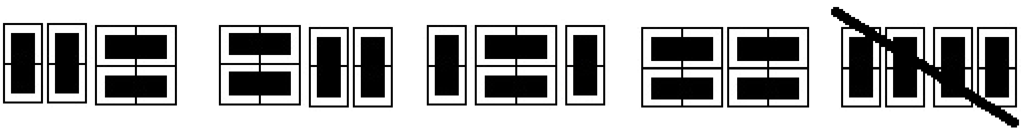


Fonte: Elaborada pelo autor

Usando dominós, a generalização $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ pode ser interpretada como o número de ladrilhamentos de um tabuleiro de dimensão $n + 2$ excetuando-se uma possibilidade, ou seja, $P_{n+2} - 1$. A possibilidade a ser excluída é aquela em que todos os dominós estejam em pé (figura 4.11), com isso, tem-se nessa soma, pelo menos um dominó deitado. Por exemplo:

$$P_0 + P_1 + P_2 = 4 = P_4 - 1.$$

Figura 4.11 – Possibilidades da soma $P_0 + P_1 + P_2$ usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo autor

Para verificar tal resultado, é necessário que se responda à seguinte questão:

De quantas formas se pode ladrilhar um tabuleiro $2 \text{ x } (n + 2)$ casas usando pelo menos 1 dominó deitado?

A solução é direta, pois há um único tabuleiro ladrilhado apenas com dominós em pé, logo existem $P_{n+2} - 1$ soluções.

Considerando que haja pelo menos um dominó deitado no tabuleiro e que a localização do último dominó seja nas casas $k\ +1$ e $k\ +2$ com $0\ \leq\ k\ \leq\ n$, assim, existem P_k possibilidades de ladrilhamento, onde o último dominó ladrilha as casas $k\ +1$ e $k\ +2$.

Tomando $k\ =\ n$ então a última peça de dominó deitado ocuparia a $(n\ +\ 1) - ésima$ e a $(n\ +\ 2) -\ ésima$ casas do tabuleiro, restando n casas no tabuleiro e, por consequência, haveria P_n possibilidades de ladrilhamento usando dominós deitados e dominós em pé (conforme primeira linha da figura 4.10).

Tomando $k\ =\ n-1$ então a última peça de dominó deitado ocuparia a $(n) - ésima$ e a $(n+1) -\ ésima$ casa do tabuleiro, restando $n\ -\ 1$ casas no tabuleiro e, por consequência, haveria P_{n-1} possibilidades de ladrilhamento usando dominós deitados e dominós em pé (conforme segunda linha da figura 4.10).

Tomando $k\ =\ n\ -\ 2$ então a última peça de dominó deitado ocuparia a $(n\ -\ 1) - ésima$ e a $n - ésima$ casa do tabuleiro, restando $n\ -\ 2$ casas no tabuleiro e, por consequência, haveria P_{n-2} possibilidades de ladrilhamento usando dominós deitados e dominós em pé (conforme terceira linha da figura 4.10).

O processo segue até que se tome $k\ =\ 0$. Então a última peça de dominó deitado ocuparia a 1ª e a 2ª casa do tabuleiro, restando nenhuma casa no tabuleiro e por consequência haveria P_0 possibilidades de ladrilhamento, isto é, somente o dominó deitado (última linha da figura 4.10).

Dessa maneira existem $P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ possibilidades de ladrilhamento de um tabuleiro $2 \text{ x } (n+2)$, com ao menos uma par de peças deitadas. E isto demonstra o resultado.

Essa identidade de P_n pode ser traduzida para o que ela significa em f_n. Como P_n satisfaz $P_n = f_{n+1}$, a soma $P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ equivale a soma $f_1 + f_2 + \cdots + f_{n+1}$ da sequência de Fibonacci. Observe:

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + P_n = P_{n+2} - 1$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + f_{n+1} - f_{n+1} = f_{n+3} - 1 - f_{n+1}.$$

Como: $f_{n+3} - f_{n+1} = f_{n+2}$, então:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Como $f_0 = 0$, tem-se:

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

$$\sum_{k\geq 0}^{n} f_k = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

Identidade 2: Para $n \geq 0$,

$$\sum_{k\geq 0}^{n} P_{2k} = P_{2n+1.}$$

Cuja relação com os números de Fibonacci equivale a

$$\sum_{k\geq 0}^{n} f_{2k+1} = f_{2n+2.}$$

Para a demonstração da identidade tome como base a definição recursiva $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$, com $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ e $P_0 = P_2 - P_1 = 1 = P_1$, e a soma $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n}$ da referida sequência:

$$\begin{aligned} P_0 &= P_1 \\ P_2 &= P_3 - P_1 \\ P_4 &= P_5 - P_3 \\ &\vdots \\ P_{2n-2} &= P_{2n-1} - P_{2n-3} \\ P_{2n} &= P_{2n+1} - P_{2n-1.} \end{aligned}$$

Somando as equações, obtém-se:

$$\sum_{k\geq 0}^{n} P_{2k} = (P_1 - P_1) + (P_3 - P_3) + \cdots + (P_{2n-3} - P_{2n-3}) + (P_{2n-1} - P_{2n-1}) + P_{2n+1}$$

$$= P_{2n+1.}$$

Os resultados acima apontam para uma generalização: para $n \geq 0$,

$$P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n} = P_{2n+1.}$$

Usando os valores de cada um dos termos é possível observar a validade dessa generalização:

$$P_0 + P_2 + P_4 = 8 = P_5$$

$$P_0 + P_2 + P_4 + P_6 = 21 = P_7$$

$$P_0 + P_2 + P_4 + P_6 + P_8 = 55 = P_9.$$

Tal resultado também pode ser verificado a partir do uso dos dominós e pode ser representada conforme a figura 4.12.

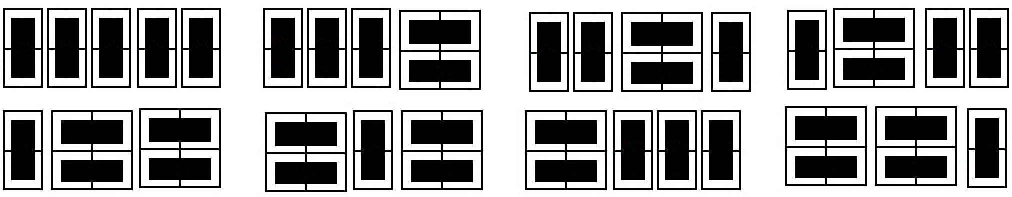
Figura 4.12 – Localização do último dominó em pé em um tabuleiro $2 \text{ x } (2n + 1)$.

Fonte: Elaborada pelo Autor

Usando dominós, a expressão $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n}$, pode ser interpretada como o número de ladrilhamentos do tabuleiro de dimensões $2n + 1$, isto é, P_{2n+1}, reparando que como $2n + 1$ é ímpar, sempre haverá algum dominó em pé (figura 4.13). Por exemplo:

$$P_0 + P_2 + P_4 = 8 = P_5.$$

Figura 4.13 – Possibilidades da soma $P_0 + P_2 + P_4$ usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para verificar tal resultado, é necessário que se responda à seguinte questão:

De quantas formas se pode ladrilhar um tabuleiro $2 \text{ x } (2n + 1)$?

A solução é direta, pois há, nessas condições P_{2n+1} soluções.

Considerando que haja pelo menos um dominó em pé no tabuleiro (pois este é de dimensão ímpar) e que a localização deste seja a casa $2k + 1$ do tabuleiro com $0 < k \leq n$, assim, existem P_{2k} ladrilhamentos onde o último dominó em pé preenche a casa $2k + 1$ do tabuleiro.

Tomando $k = n$ então a última peça do dominó em pé ocuparia a $(2n + 1) - \acute{e}sima$ casa do tabuleiro, restando $2n$ casas no tabuleiro, que por consequência haveria P_{2n} maneiras de ladrilha-la usando dominós (conforme primeira linha da figura 4.12).

Tomando $k = n - 1$ então a última peça do dominó em pé ocuparia a $(2n - 1) - \acute{e}sima$ casa do tabuleiro, restando $2n - 2$ casas no tabuleiro e por consequência haveria P_{2n-2} maneiras de ladrilha-la usando dominós (conforme segunda linha da figura 4.12).

Tomando $k = n - 2$ então a última peça do dominó em pé ocuparia a $(2n - 3) - \acute{e}sima$ casa do tabuleiro, restando $2n - 4$ casas no tabuleiro e por consequência haveria P_{2n-4} maneiras de ladrilha-la usando dominós (conforme terceira linha da figura 4.12).

O processo segue até que se tome $k = 0$. Então a última peça do dominó em pé ocuparia a 1ª casa do tabuleiro, restando nenhuma casa no tabuleiro e por consequência haveria $P_0 = 1$ maneiras de ladrilha-la usando dominós (conforme última linha da figura 4.12).

Dessa maneira existem $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n}$ possibilidades de ladrilhamento de um tabuleiro $2 \text{ x } (2n + 1)$, o que finaliza a demonstração.

Essa identidade de P_n também pode ser traduzida para o que ela significa em f_n. Como P_n satisfaz $P_n = f_{n+1}$, a soma $P_0 + P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n}$ equivale à soma $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots f_{2n+1}$ da sequência de Fibonacci. Observe:

$$P_0 + P_2 + P_4 + P_6 + \cdots + P_{2n} = P_{2n+1}$$

$$f_1 + f_3 + f_5 + P_7 + \cdots + f_{2n+1} = f_{2n+2}$$

$$\sum_{k\geq 0}^{n} f_{2k+1} = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n+1} = f_{2n+2.}$$

Identidade 3: Para $n > 0$,

$$\sum_{k>0}^{n} P_{2k-1} = P_{2n} - 1.$$

Cuja relação com os números de Fibonacci equivale a

$$\sum_{k\geq 0}^{n} f_{2k} = f_{2n+1} - 1.$$

Para a demonstração da identidade tome como base a definição recursiva $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$, com $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, e a soma $P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1}$. Assim:

$$P_1 = 1$$
$$P_3 = P_4 - P_2$$
$$P_5 = P_6 - P_4$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$P_{2n-1} = P_{2n} - P_{2n-2}.$$

Somando as equações, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{2k-1} = 1 - P_2 + (P_4 - P_4) + (P_6 - P_6) + \cdots + (P_{2n-2} - P_{2n-2}) + P_{2n}$$
$$= 1 - P_2 + P_{2n}$$
$$= P_{2n} - 1.$$

Os resultados acima apontam para uma generalização: para $n > 0$,

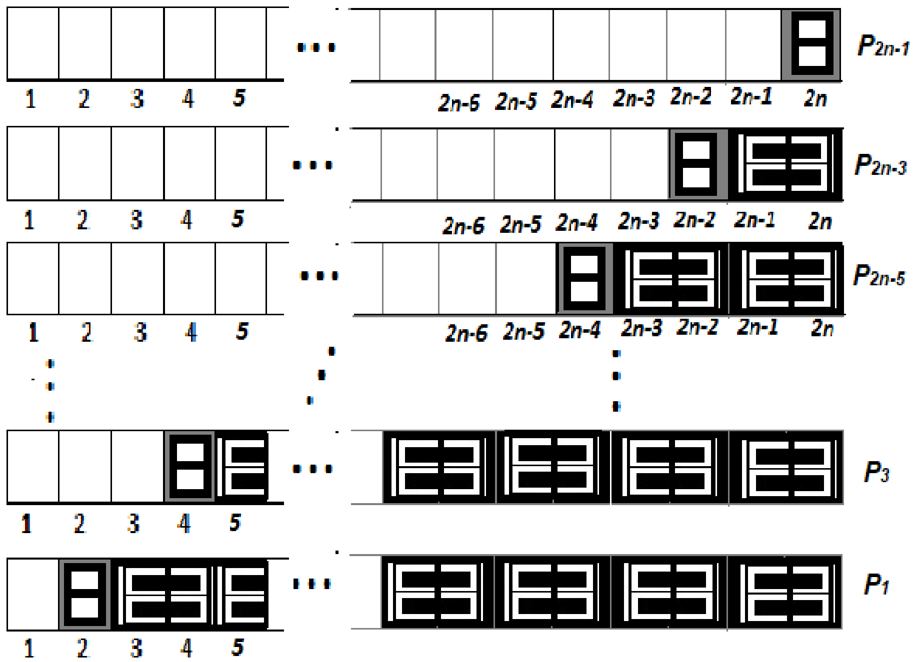
$$P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = P_{2n} - 1.$$

Usando os valores de cada um dos termos, observe a validade dessa generalização:

$$P_1 + P_3 = 4 = 5 - 1 = P_4 - 1$$
$$P_1 + P_3 + P_5 = 12 = 13 - 1 = P_6 - 1$$
$$P_1 + P_3 + P_5 + P_7 = 33 = 34 - 1 = P_8 - 1.$$

Usando dominós, tal situação pode ser representada conforme a figura 4.14.

Figura 4.14 – Localização do último dominó em pé em um tabuleiro $2 \text{ x } 2n$.

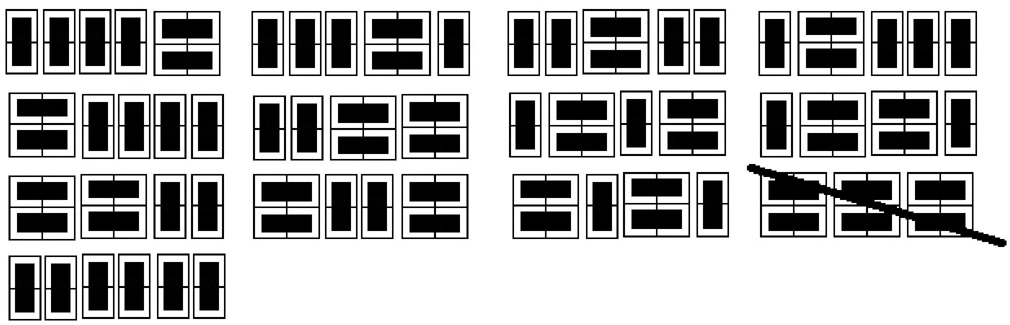


Fonte: Elaborada pelo Autor

Usando dominós, a expressão $P_1 + P_3 + \cdots + P_{2n-1}$, pode ser interpretada como o número de ladrilhamentos do tabuleiro de dimensões $2n$ excetuando-se uma possibilidade (figura 4.15), ou seja $P_{2n} - 1$. A possibilidade a ser excluída é aquela em que todos os dominós estejam deitados. Por exemplo:

$$P_1 + P_3 + P_5 = 12 = P_6 - 1 = 12.$$

Figura 4.15 – Possibilidades da soma $P_1 + P_3 + P_5$ usando dominós.



Fonte: Elaborada pelo Autor

Para demonstrar tal resultado, é necessário que se responda à seguinte questão:

De quantas formas se pode ladrilhar um tabuleiro $2 \text{ x } 2n$ usando pelo menos 1 dominó em pé?

A solução é direta, pois há um único tabuleiro ladrilhado apenas com dominós deitados, logo existem $P_{2n} - 1$ soluções.

Considerando que haja pelo menos um dominó em pé no tabuleiro e que a localização do último destes esteja na casa $2k$ com $0 < k \leq n$, assim, existe um tabuleiro P_{2k-1}, onde o último dominó em pé preenche a casa $2k$, seguida só de dominós deitados.

Tomando $k = n$ então o último dominó em pé ocuparia a $(2n) - ésima$ casa do tabuleiro, restando $2n - 1$ casas no tabuleiro e por consequência haveria P_{2n-1} maneiras de ladrilha-la usando dominós (conforme primeira linha da figura 4.14).

Tomando $k = n - 1$ então o último dominó em pé ocuparia a $(2n - 2) - ésima$ casa do tabuleiro, restando $2n - 3$ casas no tabuleiro e por consequência haveria P_{2n-3} maneiras de ladrilha-las usando dominós (conforme segunda linha da figura 4.14).

Tomando $k = n - 2$ então a última peça dominó em pé ocuparia a $(2n - 4) - ésima$ casa do tabuleiro, restando $2n - 5$ casas no tabuleiro e por consequência haveria P_{2n-5} maneiras de ladrilha-las usando dominós (conforme terceira linha da figura 4.14).

O processo segue até que se tome $k = 1$. Então o dominó em pé ocuparia a 2ª casa do tabuleiro, restando 1 casa no mesmo e por consequência haveria P_1 maneiras de ladrilha-la usando, nesse caso, um dominó em pé.

Dessa maneira existem $P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1}$ possibilidades de ladrilhamento de um tabuleiro $2 \text{ x } 2n$, o que finaliza a demonstração.

Assim como as anteriores, essa identidade de P_n também pode ser traduzida para o que ela significa em f_n. Como P_n satisfaz $P_n = f_{n+1}$, a soma $P_1 + P_3 + \cdots + P_{2n-1}$ equivale à soma $f_2 + f_4 + \cdots f_{2n}$ da sequência de Fibonacci. Observe:

$$P_1 + P_3 + P_5 + \cdots + P_{2n-1} = P_{2n} - 1$$

$$f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Como $f_0 = 0$, tem-se:

$$\sum_{k\geq 0}^{n} f_{2k} = f_0 + f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Outras identidades envolvendo os números de Fibonacci podem ser verificadas usando dominós.

4.3 UMA FÓRMULA FECHADA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: A FÓRMULA DE BINET

Sabendo que a sequência de Fibonacci é definida pela lei de recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, com $f_1 = f_2 = 1$, e que partindo desta lei se pode obter facilmente a seguinte sequência {1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89;...}, onde a obtenção de um elemento qualquer da sequência será conseguida mediante a consignação dos seus dois elementos anteriores e a utilização da lei de recorrência, se pode obter valores elevados da sequência, como por exemplo, o f_{50}.

No entanto, pelo destacado, tem-se que conhecer f_{49} e f_{48}. E que, pela dinâmica estabelecida, se tem que conhecer os anteriores a f_{48}, e assim sucessivamente, caracterizando a recursividade.

Segundo Hefez (2014) quando é dada uma recorrência, um problema importante é determinar uma fórmula para o termo geral da sequência sem recorrer aos termos anteriores. No caso da sequência de Fibonacci, existe uma fórmula chamada fórmula de Binet.

Para obter a referida fórmula, primeiramente é necessário construir uma função geratriz $(F(x))$ para os números de Fibonacci como uma série de potência.

Definição 4.3: Se a_0, a_1, a_2, a_3,... é uma sequência de números, a função geradora dessa sequência é a série de potências

$$A(x) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n \, x^n.$$

Assim, a função geradora dos números de Fibonacci é:

$$F(x) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} f_n \, x^n.$$

Desenvolvendo o somatório, tem-se:

$$F(x) = f_0 x^0 + f_1 x^1 + f_2 x^2 + f_3 x^3 + f_4 x^4 + f_5 x^5 + \cdots$$

Levando em consideração a recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ que gera os números de Fibonacci com $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1$ tem-se:

$$F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$$

Multiplicando por x ambos os lados da igualdade, tem-se:

$$x.F(x) = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \cdots$$

Multiplicando agora por x^2, tem-se:

$$x^2.F(x) = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 5x^7 + \cdots$$

Tomando $F(x) - x.F(x) - x^2F(x)$, tem-se:

$$F(x) - x.F(x) - x^2F(x) = x$$

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Sabendo que as raízes da equação $1 - x - x^2$ são $\theta = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, se pode concluir facilmente que $\theta\varphi = -1$

Por frações parciais, obtém-se:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{(x - \theta)} + \frac{B}{(x - \varphi)} = \frac{A(x - \varphi) + B(x - \theta)}{(x - \theta).(x - \varphi)}$$

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{Ax - A\varphi + Bx - B\theta}{1 - x - x^2}$$

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{(A + B)x - (A\varphi + B\theta)}{1 - x - x^2}$$

$$x = (A + B)x - (A\varphi + B\theta)$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B \\ -(A\varphi + B\theta) = 0 \Rightarrow A\varphi = -B\theta \Rightarrow A = \dfrac{-B\theta}{\varphi} \end{cases}$$

$$\frac{-B\theta}{\varphi} = 1 - B$$

$$-B\theta = \varphi - B\varphi$$

$$-B\theta + B\varphi = \varphi$$

$$B(\varphi - \theta) = \varphi$$

Logo:

$$B = \frac{\varphi}{(\varphi - \theta)}$$

$$A = 1 - \frac{\varphi}{(\varphi - \theta)} = \frac{\varphi - \theta - \varphi}{(\varphi - \theta)} = \frac{-\theta}{(\varphi - \theta)}.$$

Assim:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(\varphi - \theta)}\left(\frac{\varphi}{(x - \varphi)} - \frac{\theta}{(x - \theta)}\right) = F(x)$$

Utilizando a expressão da série geométrica:

$$\frac{\varphi}{(x - \varphi)} = -\frac{\varphi}{(\varphi - x)} = -\frac{\varphi}{\varphi}.\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{\varphi}\right)} = -\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{x^n}{\varphi^n}$$

$$-\frac{\theta}{(x-\theta)}=\frac{\theta}{(\theta-x)}=\frac{\theta}{\theta}.\frac{1}{\left(1-\frac{x}{\theta}\right)}=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{x^n}{\theta^n}$$

Logo:

$$\frac{1}{(\varphi-\theta)}\left(\frac{\varphi}{(x-\varphi)}-\frac{\theta}{(x-\theta)}\right)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{(\varphi-\theta)}\left(\frac{1}{\theta^n}-\frac{1}{\varphi^n}\right)x^n.$$

Como:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=F(x)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}f_n x^n$$

Então:

$$f_n=\frac{1}{(\varphi-\theta)}\left(\frac{1}{\theta^n}-\frac{1}{\varphi^n}\right)$$

Levando em consideração que $\theta.\varphi=-1$:

$$\frac{1}{\theta}=-\varphi \text{ e } \frac{1}{\varphi}=-\theta$$

$$f_n=\frac{1}{(\varphi-\theta)}((-\varphi)^n-(-\theta)^n)$$

Como $(\varphi-\theta)=-\sqrt{5}$, $\theta=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, tem-se:

$$f_n=\frac{1}{-\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{-\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A fórmula acima é conhecida como fórmula de Binet, considerando $n\geq 0$, e possibilita a obtenção dos termos inteiros da sequência de Fibonacci, de maneira explicita, sem a necessidade de se utilizar a ideia da recursividade.

Com isso, a partir da fórmula pode-se calcular facilmente o f_{50}, conforme elencado acima, sem a necessidade da recursividade, basta aplicar:

$$f_{50}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{50}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{50}=12586269025$$

Retomando ao problema embrião do capítulo e sabendo que $P_n=f_{n+1}$, a fórmula que possibilita a obtenção de termos inteiros para a sequência de P_n é dada por:

$$P_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Tal situação pode ser comprovada visto que:

$$P_{49} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{50} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{50} = 12586269025$$

O uso de dominós no estudo da sequência de Fibonacci se caracterizou como um recurso muito interessante, visto que possibilitou algumas interpretações (tabela 4.5) que seriam menos naturais fazê-las usando o problema dos coelhos, por exemplo, propostos por Fibonacci. Acredita-se que muitas outras interpretações podem ser feitas e analisadas a partir do uso destes e que podem servir de base para o estudo de diferentes conteúdos matemáticos.

5 PROPOSTA DE ABORDAGEM E RELATO DE APLICAÇÃO

Conforme capítulo 2 do presente trabalho, as operações básicas de adição e multiplicação dos números naturais acabam respeitando a certas propriedades gerais que foram verificadas por meio do uso de dominós. Neste capítulo será relatada a proposta de aplicação de um plano de aula relacionado a estas propriedades que foram aplicadas aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro, da cidade de São Nicolau, estado do Rio Grande do Sul, no primeiro trimestre do ano de 2018. As atividades foram realizadas no período de aula normal, envolvendo todos os alunos da turma, visto ser um dos tópicos a ser desenvolvido conforme planos de estudo do 6º ano da referida escola.

A referida escola é uma escola do campo, distante 23 quilômetros da sede do município e pertence a 32ª Coordenadoria Regional de Educação.

A turma do 6º ano, onde a proposta foi aplicada, é composta por 15 alunos, sendo 7 meninas e 8 meninos, numa faixa etária entre 10 a 14 anos. Destes, quatorze são alunos novos na turma e somente uma aluna é repetente. Um dos alunos frequenta a sala de recursos multifuncional da escola, onde é realizado o Atendimento Educacional Especializado - AEE.

Em relação ao planejamento a ser desenvolvido em cada ano, as orientações da supervisão, do plano político pedagógico - PPP (2017/2018) e do plano de estudos da escola (2017/2018) preveem que a todo início de trimestre os professores procurem responder às seguintes questões para o planejamento daquele trimestre: O que vou ensinar? Como vou ensinar? Que recursos vou utilizar? Como vou avaliar? E que bibliografia vou utilizar?

Assim, levando em consideração tais orientações, procurar-se-á nas próximas seções responder tais questões envolvendo especificamente o objeto de estudo aqui proposto, bem como será descrito os resultados alcançados a partir do uso de dominós.

5.1. DIREITOS DE APRENDIZAGEM DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Na disciplina de Matemática, conforme Plano de Estudos da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro (2017/2018), os tópicos a serem trabalhados no primeiro trimestre do 6º ano do ensino fundamental envolvem: números; operações com números naturais e divisibilidade, que devem ser trabalhados em quatro períodos semanais de 50 minutos cada, bem como os tópicos relacionados à geometria: estudo das figuras geométricas; pontos, retas, semirretas e planos; ângulos; gráficos e tabelas, em um período, totalizando assim cinco períodos semanais da disciplina de Matemática.

No anexo A, estão especificados os direitos de aprendizagem do 1º trimestre da disciplina de Matemática para o 6º ano do ensino fundamental da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro, conforme planos de estudos da mesma.

Ao verificar o anexo A, nota-se que dentre os tópicos que devem ser trabalhados no 6º ano da escola, está um dos objetos de estudo do presente trabalho: compreender e operar com as propriedades das operações de adição e multiplicação dos números naturais.

5.2. METODOLOGIA

A introdução de novas metodologias de ensino tem se mostrado como um dos fatores essenciais para que o aluno se torne sujeito de sua aprendizagem. No entanto, é necessário que as metodologias utilizadas levem em consideração o respeito do contexto destes e dos aspectos recreativos e lúdicos próprios da idade e da curiosidade dos mesmos.

Neste sentido, faz-se necessário permear o fazer pedagógico com recursos que despertem a curiosidade e motivem para a aprendizagem, pois inúmeros estudos atentam para a importância do uso de metodologias diferenciadas, como sendo a alavanca propulsora para o desenvolvimento cognitivo e aprendizagens mais elevadas.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (Brasil, 1998, p.42)

Assim, é necessário o olhar reflexivo do professor sobre as manifestações dos alunos no decorrer das aulas, a fim de detectar quais métodos utilizados apresentam melhores resultados, o que lhes chama mais atenção e o que gera maior envolvimento no que lhes é proposto. Com isso poderá reinventar, criar novas possibilidades, buscar outros caminhos que poderão ir ao encontro da meta principal que é a aprendizagem do sujeito. Não existem receitas prontas, mas existem *n* possibilidades de desenvolver aprendizagens significativas e eficazes, que se constituirão em alicerces para a vida toda.

Com o objetivo de desenvolver atividades que auxiliem no ensino das propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação e da propriedade da distributividade da multiplicação com respeito à adição, no tópico operações com números naturais, utilizou-se dominós, peças quadradas 1 x 1, de cores diferenciadas.

Conforme já elencado, o uso de dominós se incorpora como um excelente meio para despertar o interesse dos alunos, desmistificando a ideia de que a aprendizagem matemática é somente por sistematização de fórmulas e cálculos. Corroborando com essa afirmação, tem-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM):

> [...] A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas das quatro disciplinas científico-tecnológicas, preferencialmente de forma coordenada, permitindo-se que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado. (BRASIL, 2000, p.9)

5.3. PROPOSTA DE ABORDAGEM

Aprendizagens significativas em Matemática só acontecem quando há um envolvimento de todos no processo ensino-aprendizagem, isto é, quando professor/aluno/conteúdo estão em uma mesma reciprocidade e para isso acontecer, as atividades desenvolvidas e a proposta de abordagem devem ser interessantes e desafiadoras.

Neste sentido, a proposta de abordagem das atividades no presente trabalho consiste em estudar tópicos relacionados às propriedades das operações dos números naturais usando material concreto, a saber, dominós quadrados 1 x 1.

O material concreto nas aulas de Matemática é uma forma de apresentar ao aluno uma maneira mais fácil e palpável de aprender matemática.

A proposta de abordagem dos tópicos relacionados às propriedades dos números naturais deu-se em três etapas:

Na primeira etapa, foi realizado um pré-teste envolvendo os alunos do 6º ano da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro, com situações envolvendo as propriedades da adição e multiplicação de números naturais. Os alunos foram identificados pelos números de 1 a 15.

Num segundo momento, as situações elencadas na primeira etapa relacionadas às propriedades dos números naturais foram trabalhadas usando dominós, peças quadradas 1 x 1.

E, num momento final, foram realizadas atividades didáticas e um pós-teste tendo como foco as propriedades estudadas.

Em relação ao pré-teste, foram apresentados cinco situações-problemas envolvendo as propriedades da adição e multiplicação dos números naturais, onde os alunos deveriam responder assinalando a alternativa que os mesmos acreditassem ser a correta, descrevendo todos os passos usados na resolução dos mesmos. As cinco situações propostas no pré-teste estão dispostas no Apêndice A.

Os resultados do pré-teste encontram-se na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Dados do pré-teste realizado com os alunos do 6º ano.

	Acertaram	Erraram	Não souberam responder
Questão 1	13	01	01
Questão 2	11	03	01
Questão 3	11	03	01
Questão 4	13	01	01
Questão 5	12	02	01

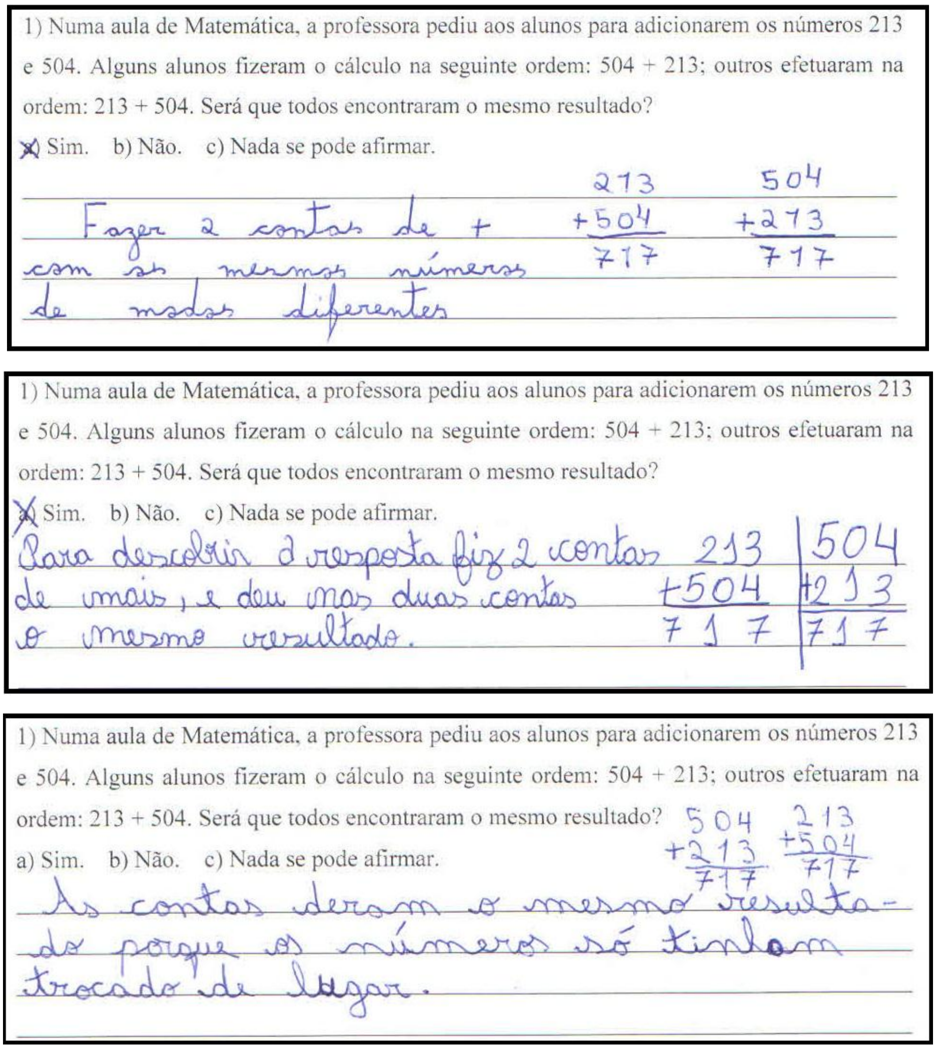
Fonte: Dados coletados a partir do pré-teste

Ao realizar a análise das respostas do pré-teste, as seguintes constatações foram elencadas:

1ª) A questão 1 foi proposta com o objetivo de evidenciar a propriedade comutativa da adição; no entanto, a resolução só foi confirmada com a realização, por parte dos alunos, das duas adições explicitadas no problema. Somente um aluno, o de número 3, após a realização do cálculo, concluiu que o resultado deveria ser o mesmo “porque os números só tinham trocados de lugar”.

A figura 5.1 ilustra as respostas dadas pelos alunos 4, 12 e 3, respectivamente, para a questão 1.

Figura 5.1 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 1, referente a propriedade comutativa da adição.



1) Numa aula de Matemática, a professora pediu aos alunos para adicionarem os números 213 e 504. Alguns alunos fizeram o cálculo na seguinte ordem: 504 + 213; outros efetuaram na ordem: 213 + 504. Será que todos encontraram o mesmo resultado?

X) Sim. b) Não. c) Nada se pode afirmar.

$213 + 504 = 717$ $504 + 213 = 717$

Fazer 2 contas de + com os mesmos números de modos diferentes

1) Numa aula de Matemática, a professora pediu aos alunos para adicionarem os números 213 e 504. Alguns alunos fizeram o cálculo na seguinte ordem: 504 + 213; outros efetuaram na ordem: 213 + 504. Será que todos encontraram o mesmo resultado?

X) Sim. b) Não. c) Nada se pode afirmar.

Para descobrir a resposta fiz 2 contas de mais, e deu nas duas contas o mesmo resultado.

$213 + 504 = 717$ $504 + 213 = 717$

1) Numa aula de Matemática, a professora pediu aos alunos para adicionarem os números 213 e 504. Alguns alunos fizeram o cálculo na seguinte ordem: 504 + 213; outros efetuaram na ordem: 213 + 504. Será que todos encontraram o mesmo resultado?

a) Sim. b) Não. c) Nada se pode afirmar.

$504 + 213 = 717$ $213 + 504 = 717$

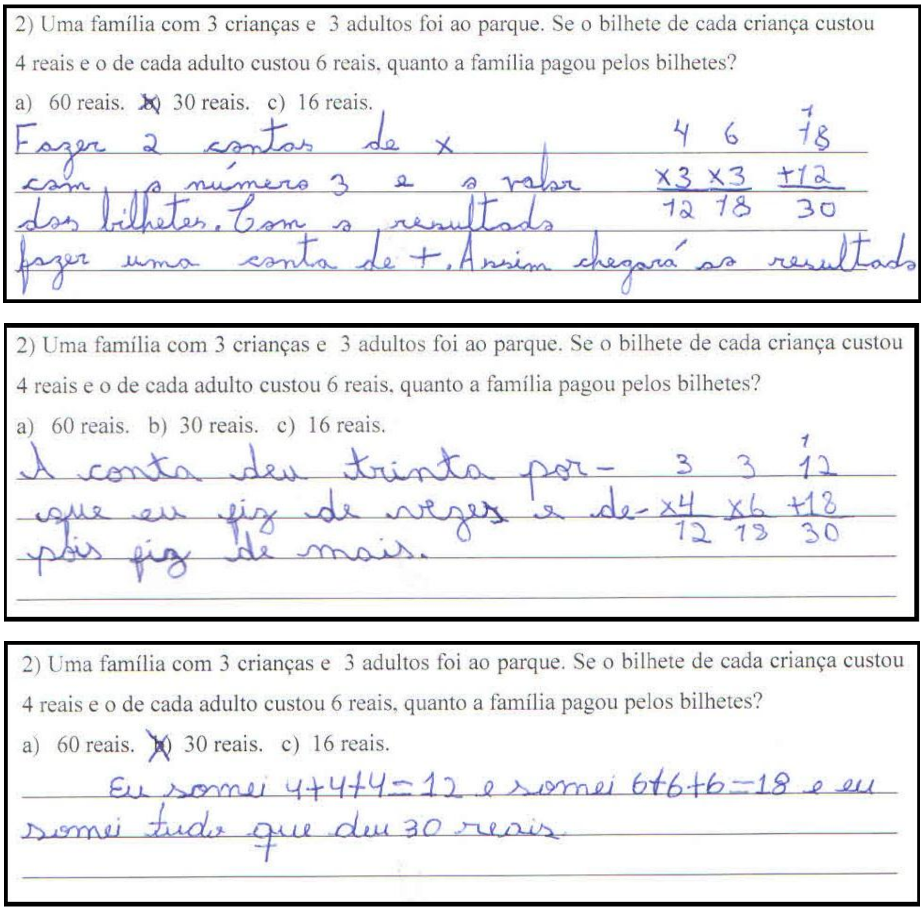
As contas deram o mesmo resultado porque os números só tinham trocado de lugar.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

2ª) A questão 2 do pré-teste, procurava evidenciar a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma. A questão quase que em sua totalidade foi resolvida através de duas “contas” de multiplicação e uma de adição, o que se pode concluir que os alunos têm uma concepção aceitável da propriedade elencada na questão. Três alunos, no entanto, não conseguiram encontrar o resultado correto.

A figura 5.2 ilustra as respostas dadas pelos alunos 4, 2 e 3, respectivamente, para a questão 2.

Figura 5.2 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 2, referente a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma.


2) Uma família com 3 crianças e 3 adultos foi ao parque. Se o bilhete de cada criança custou 4 reais e o de cada adulto custou 6 reais, quanto a família pagou pelos bilhetes?

a) 60 reais. ~~b)~~ 30 reais. c) 16 reais.

Fazer 2 contas de x com o número 3 e o valor dos bilhetes. Com o resultado fazer uma conta de +. Assim chegará ao resultado

$4 \times 3 = 12$ $6 \times 3 = 18$ $18 + 12 = 30$

2) Uma família com 3 crianças e 3 adultos foi ao parque. Se o bilhete de cada criança custou 4 reais e o de cada adulto custou 6 reais, quanto a família pagou pelos bilhetes?

a) 60 reais. b) 30 reais. c) 16 reais.

A conta deu trinta porque eu fiz de vezes e depois fiz de mais.

$3 \times 4 = 12$ $3 \times 6 = 18$ $12 + 18 = 30$

2) Uma família com 3 crianças e 3 adultos foi ao parque. Se o bilhete de cada criança custou 4 reais e o de cada adulto custou 6 reais, quanto a família pagou pelos bilhetes?

a) 60 reais. ~~b)~~ 30 reais. c) 16 reais.

Eu somei 4+4+4=12 e somei 6+6+6=18 e eu somei tudo que deu 30 reais

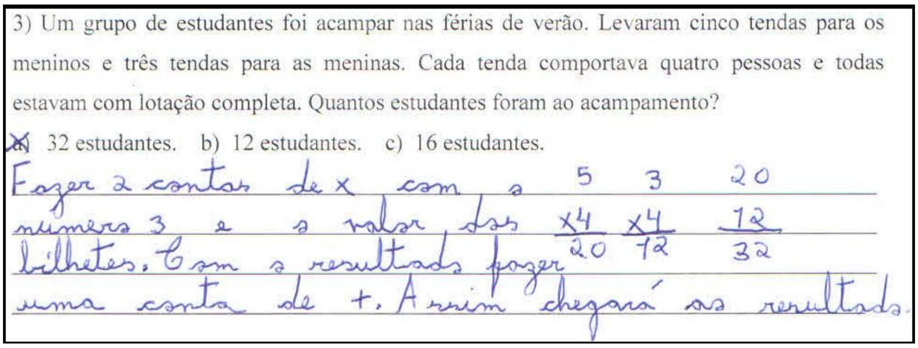
Fonte: Extrato das respostas dos alunos

3ª) Na questão 3 do pré-teste também se procurava evidenciar a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma, no entanto, de forma contrária ao que se foi proposto na questão 2. Os alunos em sua grande maioria também resolveram usando duas “contas” envolvendo multiplicação e uma envolvendo adição.

Três alunos, assim como na questão 2, também não conseguiram chegar ao resultado correto, o que se pode apontar que esses alunos possuem alguma deficiência na interpretação ou no entendimento de questões desse tipo.

A figura 5.3 ilustra as respostas dadas pelos alunos 4, 14 e 12, respectivamente, para a questão 3.

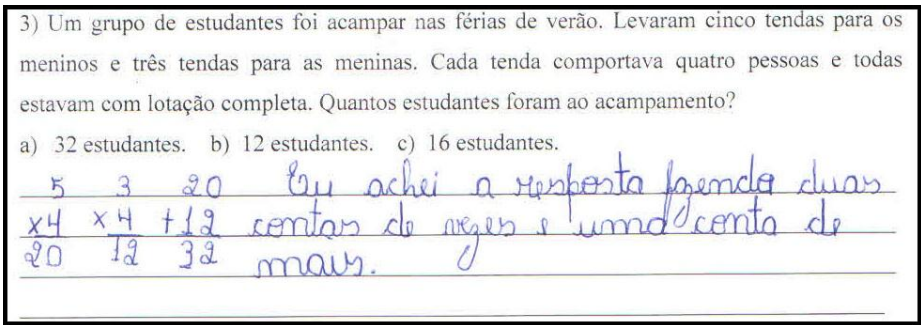
Figura 5.3 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 3, referente a propriedade da distributividade da multiplicação em relação à soma.


3) Um grupo de estudantes foi acampar nas férias de verão. Levaram cinco tendas para os meninos e três tendas para as meninas. Cada tenda comportava quatro pessoas e todas estavam com lotação completa. Quantos estudantes foram ao acampamento?

a) 32 estudantes. b) 12 estudantes. c) 16 estudantes.

Fazer 2 contas de x com o número 3 e o valor dos bilhetes. Com o resultado fazer uma conta de +. Assim chegará ao resultado.

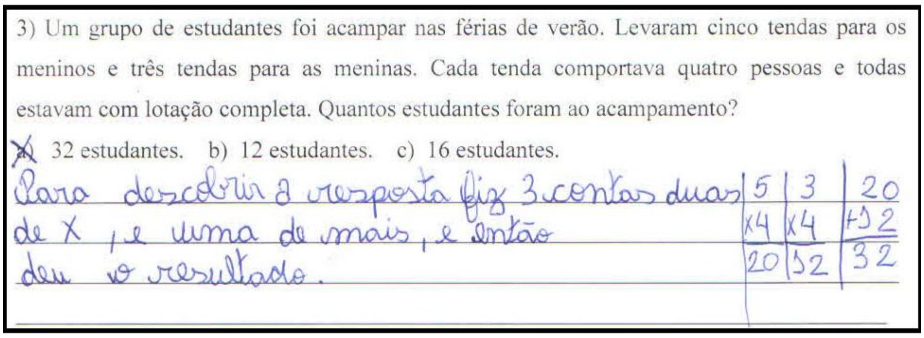
5 × 4 = 20; 3 × 4 = 12; 20 + 12 = 32


3) Um grupo de estudantes foi acampar nas férias de verão. Levaram cinco tendas para os meninos e três tendas para as meninas. Cada tenda comportava quatro pessoas e todas estavam com lotação completa. Quantos estudantes foram ao acampamento?

a) 32 estudantes. b) 12 estudantes. c) 16 estudantes.

5 × 4 = 20; 3 × 4 = 12; 20 + 12 = 32

Eu achei a resposta fazendo duas contas de vezes e uma conta de mais.


3) Um grupo de estudantes foi acampar nas férias de verão. Levaram cinco tendas para os meninos e três tendas para as meninas. Cada tenda comportava quatro pessoas e todas estavam com lotação completa. Quantos estudantes foram ao acampamento?

a) 32 estudantes. b) 12 estudantes. c) 16 estudantes.

Para descobrir a resposta fiz 3 contas duas de X, e uma de mais, e então deu o resultado.

5 × 4 = 20; 3 × 4 = 12; 20 + 12 = 32

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

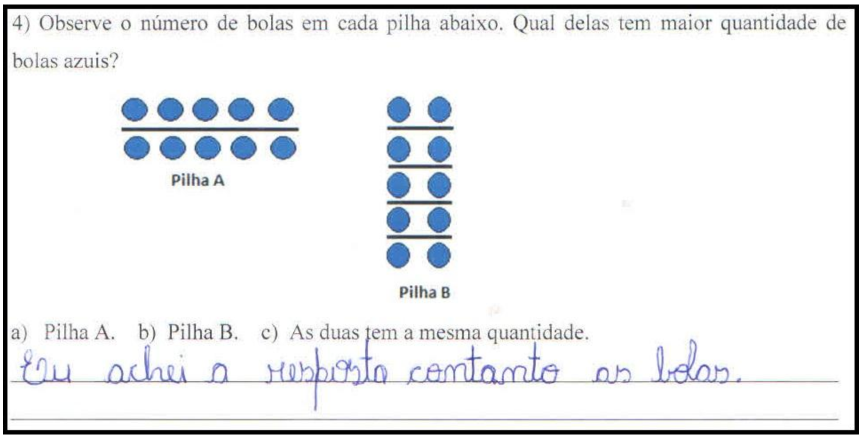
4ª) Na questão 4 do pré-teste procurou-se evidenciar a propriedade comutativa da multiplicação; no entanto, a resposta para a questão foi dada somente a partir da contagem uma a uma das bolas. Nenhum aluno usou a comutação da multiplicação para resolver a questão, isto é, que 2 x 5 = 5 x 2.

Nesta questão, uma das alunas respondeu a pilha B, pois, conforme a mesma, “a pilha B é maior é grande”. Sua resposta, um tanto inadequada para a sua idade, nos remete a teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, período pré-operatório que, conforme Piaget (1971), neste estágio a criança se concentra somente em uma dimensão particular do problema, o que provavelmente a aluna se apropriou para responder à questão.

Tal fato, preocupante e ao mesmo tempo significativo como diagnóstico, vem reforçar a importância do uso de material concreto nas aulas de Matemática, objeto de estudo do presente trabalho.

A figura 5.4 ilustra as respostas dadas pelos alunos 14, 7 e 4, respectivamente, para a questão 4.

Figura 5.4 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 4, referente a propriedade da comutatividade da multiplicação.

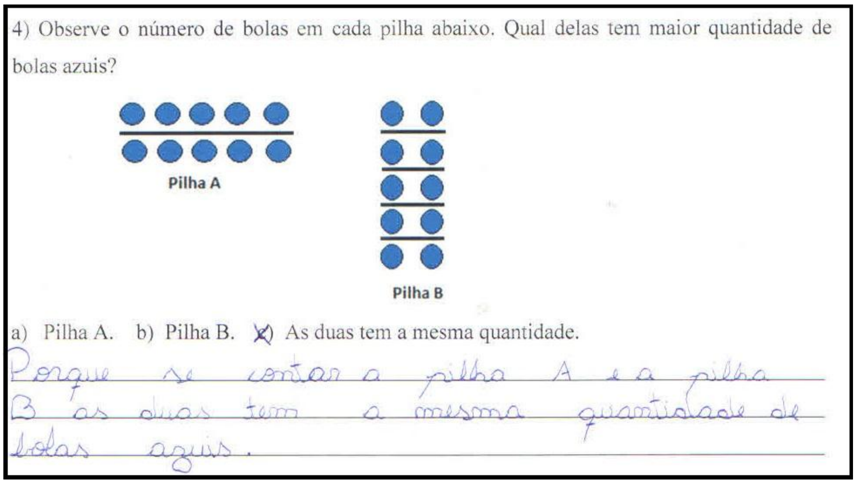

4) Observe o número de bolas em cada pilha abaixo. Qual delas tem maior quantidade de bolas azuis?

Pilha A

Pilha B

a) Pilha A. b) Pilha B. c) As duas tem a mesma quantidade.

Eu achei a resposta contanto as bolas.


4) Observe o número de bolas em cada pilha abaixo. Qual delas tem maior quantidade de bolas azuis?

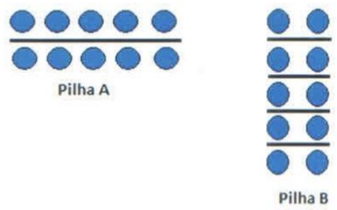
Pilha A

Pilha B

a) Pilha A. b) Pilha B. X c) As duas tem a mesma quantidade.

Porque se contar a pilha A e a pilha B as duas tem a mesma quantidade de bolas azuis.

4) Observe o número de bolas em cada pilha abaixo. Qual delas tem maior quantidade de bolas azuis?



a) Pilha A. b) Pilha B. (X) As duas tem a mesma quantidade.

Fazendo a contagem das bolas em cada pilha.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

5ª) Finalmente na questão 5, procurou-se evidenciar a propriedade associativa da adição. Na questão, os alunos, quase que em sua totalidade, fizeram dois cálculos de adição na sequência que aparecia a quantidade de pontos na tabela. Somente dois alunos (números 6 e 10) levaram em consideração os cálculos realizados por João e Pedro que o problema determinava, isto é, 5 + (3 + 2) e (2 + 3) + 5.

O aluno de número 10 conseguiu concluir que 5 + (3 + 2) = (2 + 3) + 5, no entanto, o cálculo do total de pontos de cada jogador ele fez de forma equivocada.

A figura 5.5 ilustra as respostas dadas pelos alunos 10, 6 e 2, respectivamente, para a questão 5.

Figura 5.5 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 5, referente a propriedade associativa da adição.

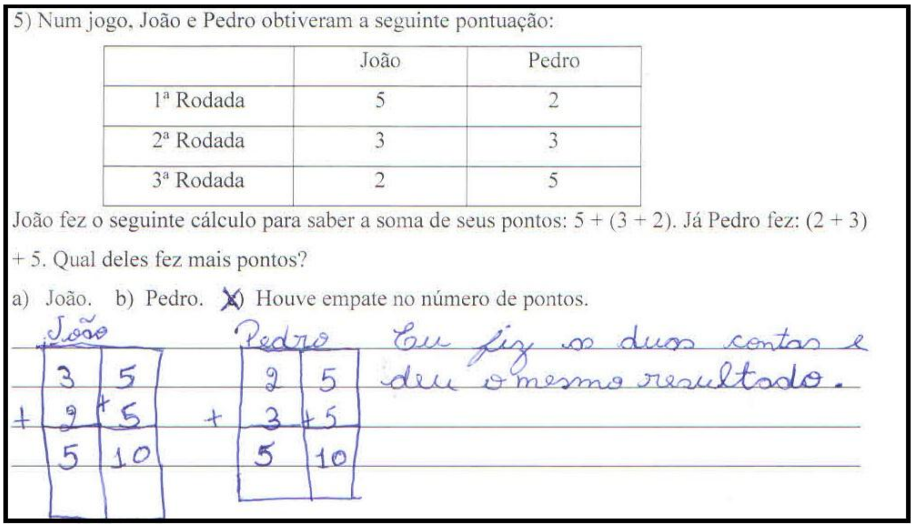
5) Num jogo, João e Pedro obtiveram a seguinte pontuação:

	João	Pedro
1ª Rodada	5	2
2ª Rodada	3	3
3ª Rodada	2	5

João fez o seguinte cálculo para saber a soma de seus pontos: 5 + (3 + 2). Já Pedro fez: (2 + 3) + 5. Qual deles fez mais pontos?

a) João. b) Pedro. (X) Houve empate no número de pontos.

$\underbrace{5+(3+2)}_{55}=\underbrace{(2+3)+5}_{55}$



5) Num jogo, João e Pedro obtiveram a seguinte pontuação:

	João	Pedro
1ª Rodada	5	2
2ª Rodada	3	3
3ª Rodada	2	5

João fez o seguinte cálculo para saber a soma de seus pontos: 5 + (3 + 2). Já Pedro fez: (2 + 3) + 5. Qual deles fez mais pontos?

a) João. b) Pedro. c) Houve empate no número de pontos.

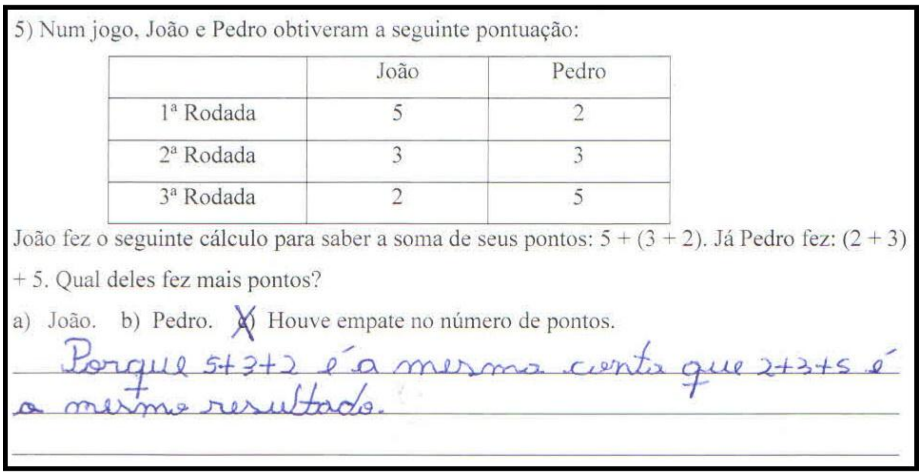
João

3 5
+ 2 + 5
5 10

Pedro

2 5
+ 3 + 5
5 10

Eu fiz as duas contas e deu o mesmo resultado.



5) Num jogo, João e Pedro obtiveram a seguinte pontuação:

	João	Pedro
1ª Rodada	5	2
2ª Rodada	3	3
3ª Rodada	2	5

João fez o seguinte cálculo para saber a soma de seus pontos: 5 + (3 + 2). Já Pedro fez: (2 + 3) + 5. Qual deles fez mais pontos?

a) João. b) Pedro. c) Houve empate no número de pontos.

Porque 5+3+2 é a mesma conta que 2+3+5 é a mesmo resultado.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Vale observar aqui que um aluno da turma não conseguiu resolver nenhuma das questões propostas. O mesmo frequenta a sala de recursos multifuncional da escola com diagnóstico de deficiência intelectual.

Após a análise do pré-teste, foram trabalhadas as propriedades elencadas no capítulo 2 do presente trabalho usando dominós, peças quadradas 1 x 1 de diferentes cores.

Na seção a seguir, será apresentado como os dados coletados, a partir da aplicação da proposta do uso de dominós no estudo das propriedades da soma e multiplicação dos números naturais aos alunos do 6º ano do ensino fundamental, foram analisados e que inferências e hipóteses foram feitas a partir desses dados e da aplicação de um pós-teste.

Ao final da seção também será apresentado uma análise da metodologia aplicada e do material utilizado.

5.4. RELATO DE APLICAÇÃO

Com o objetivo de trabalhar as dificuldades apresentadas no pré-teste desenvolveu-se as atividades propostas no capítulo 2 envolvendo o estudo das propriedades dos números naturais em relação à adição e a multiplicação, usando material concreto, a saber, dominós, peças quadradas 1 x 1, conforme figura 5.6.

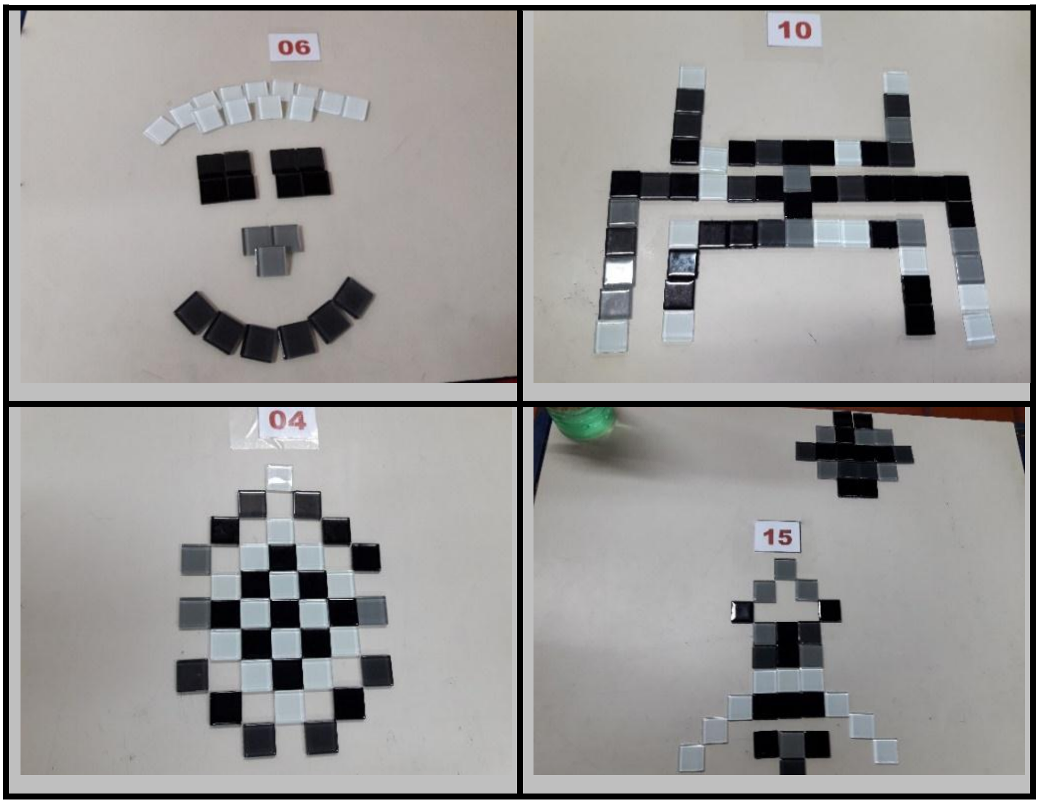
Figura 5.6 – Peças do dominó usadas no estudo das propriedades dos números naturais.

Fonte: Foto do autor

As atividades desenvolvidas com os alunos, conforme descritas no capítulo 2, foram feitas por meio de exemplos, usando dominós e tendo a contagem dupla como uma estratégia combinatória, isto é, a contagem de duas vezes do mesmo conjunto.

Num primeiro momento os alunos fizeram a manipulação do material, com o objetivo de ter conhecimento sobre o mesmo. Muitas produções foram realizadas nesse primeiro momento. A figura 5.7 ilustra algumas dessas produções.

Figura 5.7 – Algumas produções livres com o material.



Fonte: Fotos do Autor

Após a manipulação do material pelos alunos, foram realizadas as seguintes atividades:

Atividade 1 - Propriedade comutativa da adição.

Objetivo: possibilitar ao aluno um entendimento que seja apropriado da propriedade comutativa da adição usando dominós, peças quadradas 1 x 1, brancas e pretas.

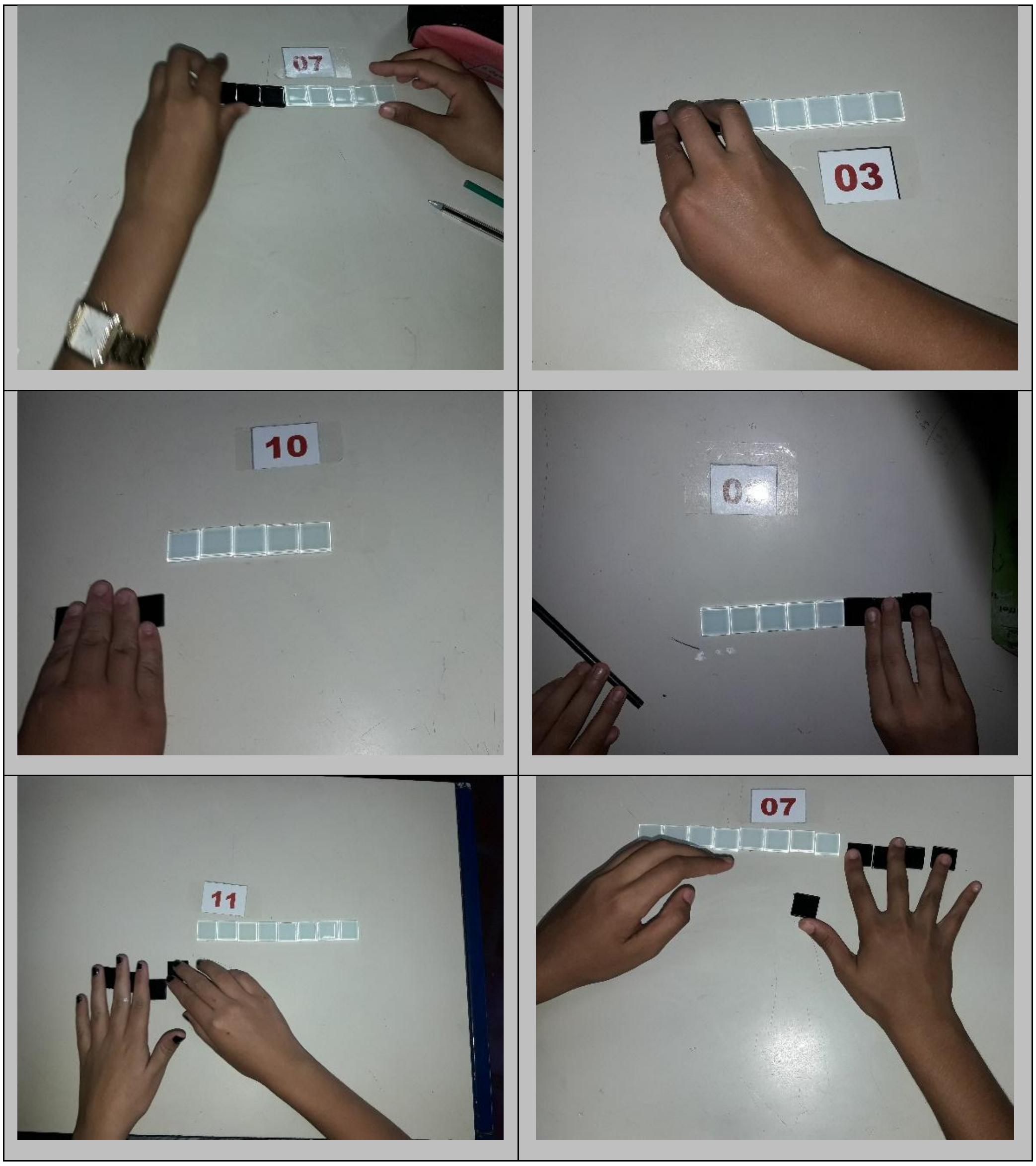
Os alunos realizaram a atividade com facilidade e desenvoltura. Alguns demonstraram ter uma ótima capacidade de generalização, enquanto outros, precisaram da repetição da atividade envolvendo diferentes quantidades para somente assim, generalizar que para todo $x, y \in \mathbb{N}$, vale $x + y = y + x$.

Vale ressaltar aqui a "empolgação" dos alunos na realização da atividade e na "ansiedade" em mostrar ao professor suas produções. Ao final de cada período os alunos eram unânimes em dizer que as aulas "passaram voando".

Durante o desenvolvimento da atividade pode ser notado que os alunos estavam encantados com o material, explicado talvez por não ser uma atividade frequente em sala de aula ou por ser um método diferenciado do que os mesmos estavam acostumados.

A figura 5.8 ilustra fotos feitas quando da aplicação da atividade. Todos, sem exceção, solicitaram que o professor fotografasse suas produções. No entanto, por falta de espaço, algumas foram selecionadas e estão explícitas.

Figura 5.8 – Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade comutativa da adição.



Fonte: Fotos do Autor

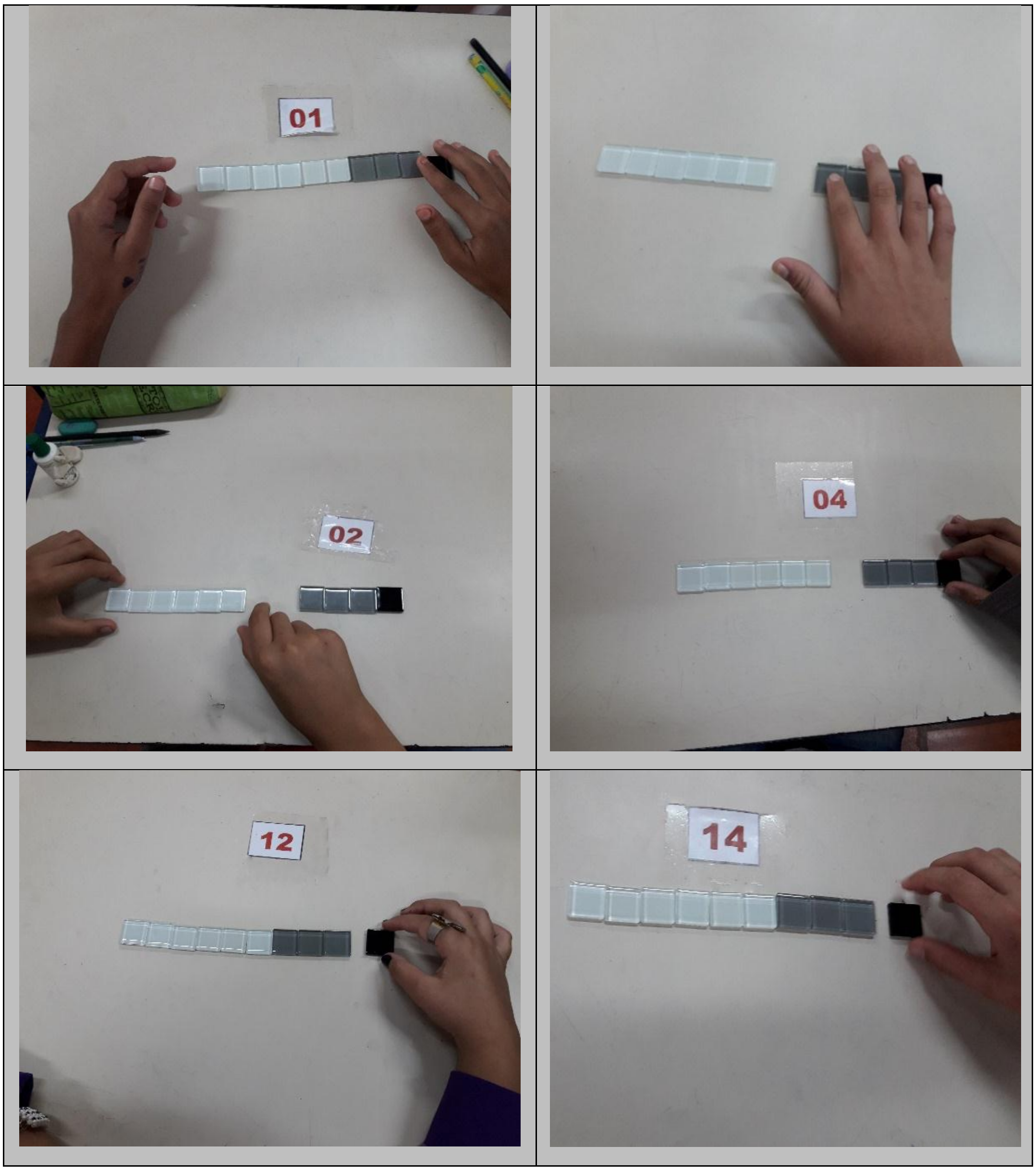
Atividade 2 – Propriedade Associativa da adição.

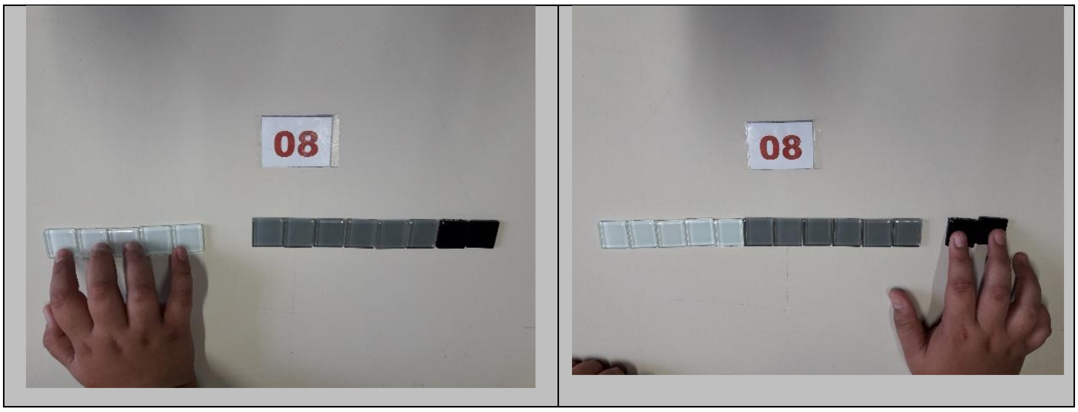
Objetivo: possibilitar ao aluno um entendimento que seja apropriado da propriedade associativa da adição usando dominós, peças quadradas 1 x 1, brancas, cinzas e pretas.

Da mesma forma que na atividade 1, a grande maioria dos alunos conseguiu desenvolver o que lhe foi proposto com facilidade e desenvoltura. Também como na atividade 1, alguns alunos não conseguiram generalizar a propriedade estudada e foram necessários outros exemplos envolvendo outras quantidades de peças, para somente assim, conseguirem generalizar que $\forall\ x, y\ e\ z \in \mathbb{N}$, vale $x + (y + z) = (x + y) + z$.

A figura 5.9 ilustra momentos da aplicação da atividade.

Figura 5.9 – Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade associativa da adição.





Fonte: Fotos do Autor

Atividade 3 – Propriedade Comutativa da multiplicação.

Objetivo: possibilitar ao aluno um entendimento que seja apropriado da propriedade comutativa da multiplicação usando dominós, peças quadradas 1 x 1, brancas.

No desenvolvimento da atividade alguns fatos interessantes foram observados:

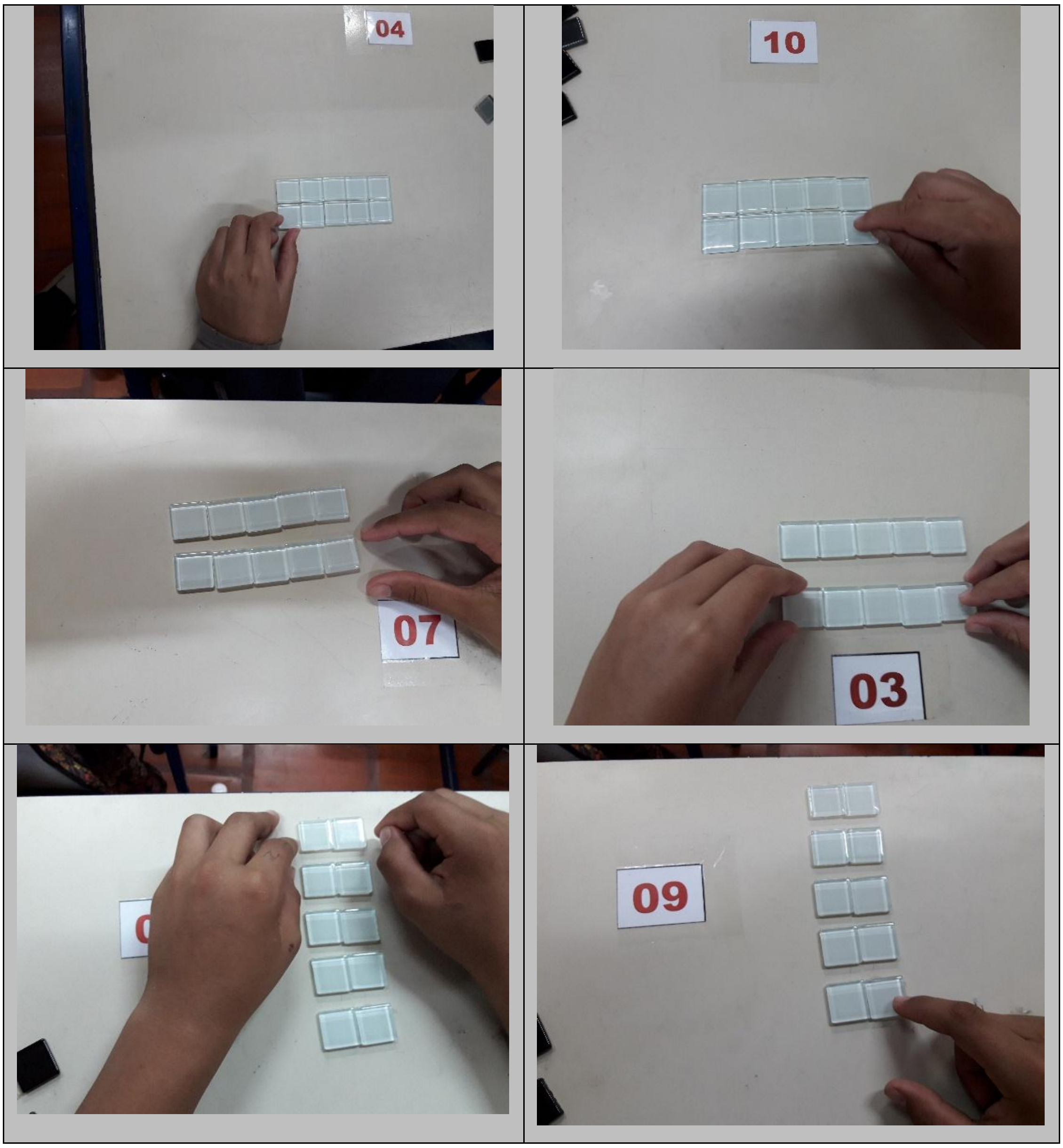
- A grande maioria dos alunos não entende a multiplicação de uma forma bidimensional. No caso do reticulado retangular formado pelas peças dos dominós, a contagem das peças foi feita uma a uma e não na forma de um produto do número de colunas pelo número de linhas, ou vice-versa. A grande maioria dos alunos não dominava a diferença entre linhas e colunas.
- Alguns alunos não dominam o significado de por exemplo 2 x 5, como sendo 2 vezes o número 5 somados, isto é, 5 + 5 ou que 5 x 2 significa 5 vezes o número 2 somados, isto é, 2 + 2 + 2 + 2 + 2.

Aos alunos que não dominavam o significado da multiplicação, foi necessário propor diversas situações envolvendo tal conceito, utilizando, para tanto, o material dourado como suporte.

Somente após os alunos terem entendido os significados da multiplicação é que foi desenvolvida a atividade envolvendo a comutatividade da multiplicação. A atividade teve que ser desenvolvida envolvendo diferentes quantidades, para somente assim, os alunos conseguirem generalizar que $\forall\, x, y \in \mathbb{N}: \; x.y = y.x$.

A figura 5.10 ilustra momentos da aplicação da atividade.

Figura 5.10 – Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade comutativa da multiplicação.



Fonte: Fotos do Autor

Atividade 4 – Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação à adição.

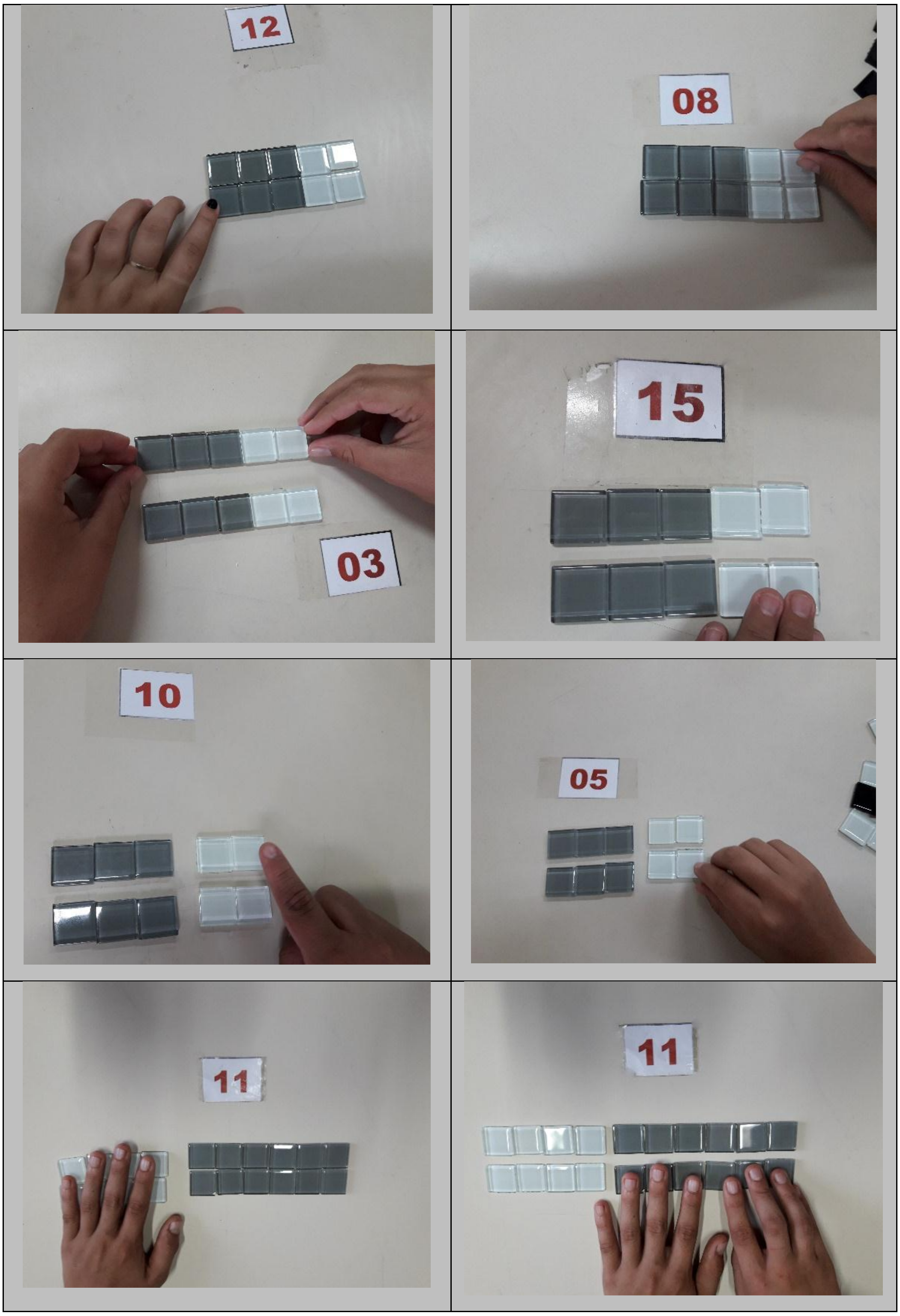
Objetivo: possibilitar ao aluno um entendimento que seja apropriado da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição usando dominós, peças quadradas 1 x 1, brancas e pretas.

Das atividades desenvolvidas a atividade 4 foi a que os alunos tiveram maior dificuldade em entender e conseguir a generalização da propriedade proposta.

Os alunos sentiram dificuldade em concluir que em um problema de multiplicação, quando um dos fatores é reescrito como a soma de dois números, o produto não muda.

A figura 5.11 ilustra momentos da aplicação da atividade.

Figura 5.11 – Desenvolvimento da atividade, por parte dos alunos, envolvendo a propriedade distributiva da multiplicação.



Fonte: Fotos do Autor

5.5. RESULTADOS ATINGIDOS

Ao término da aplicação das atividades se pode observar que o trabalho com material concreto trouxe um maior interesse nas aulas de Matemática. Além disso notou-se que os alunos expuseram mais suas ideias, suas deduções e principalmente houve uma melhora em suas capacidades de generalização.

Um outro fato relevante foi a estratégia empregada de que o registro da atividade no caderno só ocorresse após a utilização do material concreto, e que esse registro fosse também escrito, pois entende-se que a aprendizagem matemática não acontece somente com a efetivação do cálculo, mas e também com o processo de registro dessa linguagem.

Houve alunos que não conseguiram compreender a relação entre a teoria (generalização) e a atividade prática desenvolvida. Para esses alunos foram apresentadas novas situações envolvendo o conteúdo abordado, com atividades em grupos, com o objetivo de atender a essas necessidades e com a realização de um trabalho pedagógico diferenciado. Ao aluno que frequenta a sala de AEE, a professora responsável pela sala trabalhou com o mesmo, usando o mesmo método empregado em sala de aula.

No final desta etapa foram apresentados aos alunos algumas atividades, envolvendo questões, tendo como foco as propriedades estudadas.

Muitas outras questões podem ser apresentadas aos alunos, pois conforme já elencado, suas verificações nunca serão suficientes, visto que para cada propriedade algébrica se tem casos particulares com infinitos exemplos. As questões apresentadas encontram-se no Apêndice B.

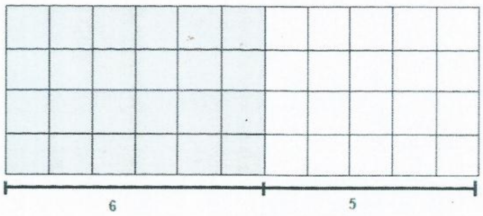
Durante a realização dos exercícios propostos um fato interessante ocorreu. A grande maioria dos alunos pediram os dominós para a verificação das questões.

Para verificar a aprendizagem dos objetivos desenvolvidos foi realizado um pós-teste envolvendo as propriedades estudadas. O pós-teste, composto de quatro questões, foi parte integrante da avaliação trimestral da turma. As questões estão elencadas abaixo, bem como algumas respostas dadas pelos alunos.

A figura 5.12 ilustra as respostas dadas pelos alunos 3, 4 e 2, respectivamente, para a questão envolvendo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma.

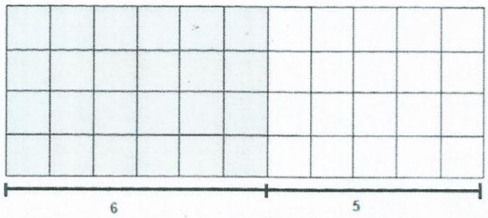
Figura 5.12 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 7, referente à propriedade distributiva da multiplicação.

7- A figura abaixo representa o piso de duas salas. O mesmo foi revestido com lajotas cinza e brancas de tamanho 1m x 1m. Quantas lajotas foram usadas para revestir esses dois pisos? Descreva os passos usados para conseguir chegar à resposta dada.



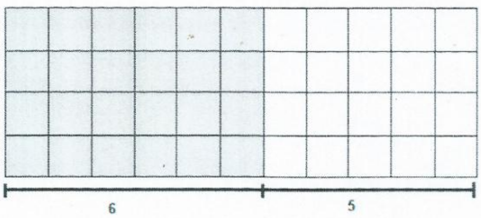
Pela propriedade distributiva fiz 4x6 e 4x5 para contar as lajotas e fiz 24+20=44

7- A figura abaixo representa o piso de duas salas. O mesmo foi revestido com lajotas cinza e brancas de tamanho 1m x 1m. Quantas lajotas foram usadas para revestir esses dois pisos? Descreva os passos usados para conseguir chegar à resposta dada.



Pela propiedade distributiva fazer a conta $4 \times (6+5) = 4 \times 6 + 4 \times 5 = 24 + 20 = 44$. Que vai dar o resultado de 44 lajotas.

7- A figura abaixo representa o piso de duas salas. O mesmo foi revestido com lajotas cinza e brancas de tamanho 1m x 1m. Quantas lajotas foram usadas para revestir esses dois pisos? Descreva os passos usados para conseguir chegar à resposta dada.



4X6=24 4X5=20 20+24=44 lajotas

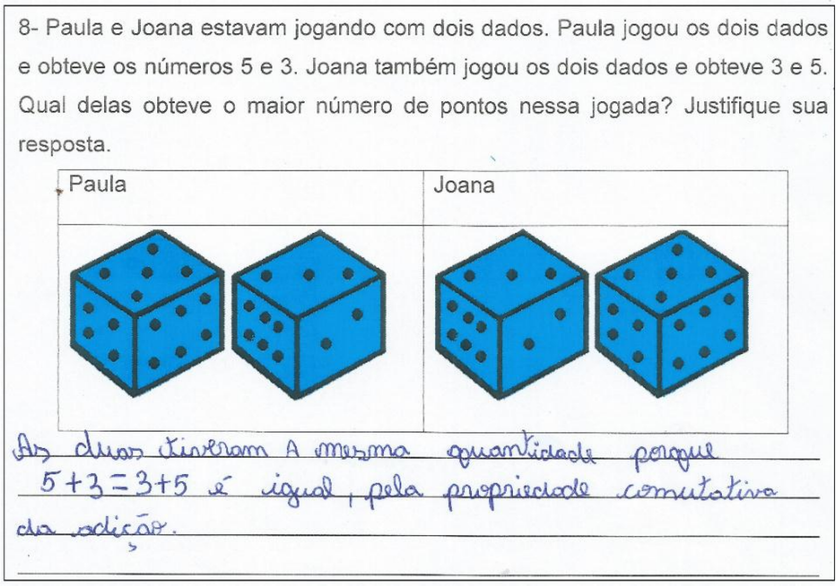
Eu fiz 4X6 para contar as lajotas cinzas e 4X5 para descobrir as lajotas brancas.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Ao realizar uma análise das respostas, podemos notar que os alunos conseguiram entender os conceitos da distributividade da multiplicação em relação à soma. A grande maioria conseguiu inferir que em um problema de multiplicação, quando um dos fatores é reescrito como a soma de dois números, o produto não muda.

A figura 5.13 ilustra as respostas dadas pelos alunos 12, 2 e 4, respectivamente, para a questão envolvendo a propriedade comutativa da soma.

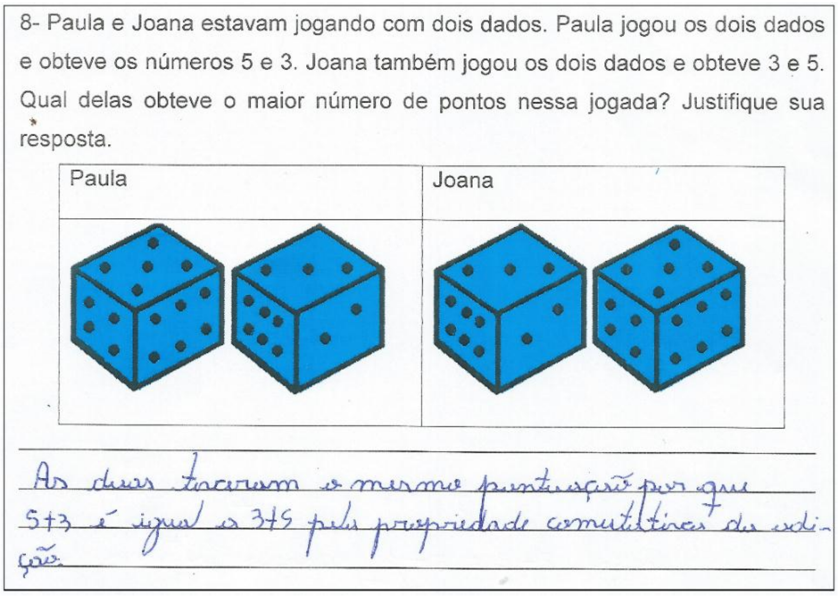
Figura 5.13 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 8, referente à propriedade comutativa da adição.



8- Paula e Joana estavam jogando com dois dados. Paula jogou os dois dados e obteve os números 5 e 3. Joana também jogou os dois dados e obteve 3 e 5. Qual delas obteve o maior número de pontos nessa jogada? Justifique sua resposta.

Paula	Joana

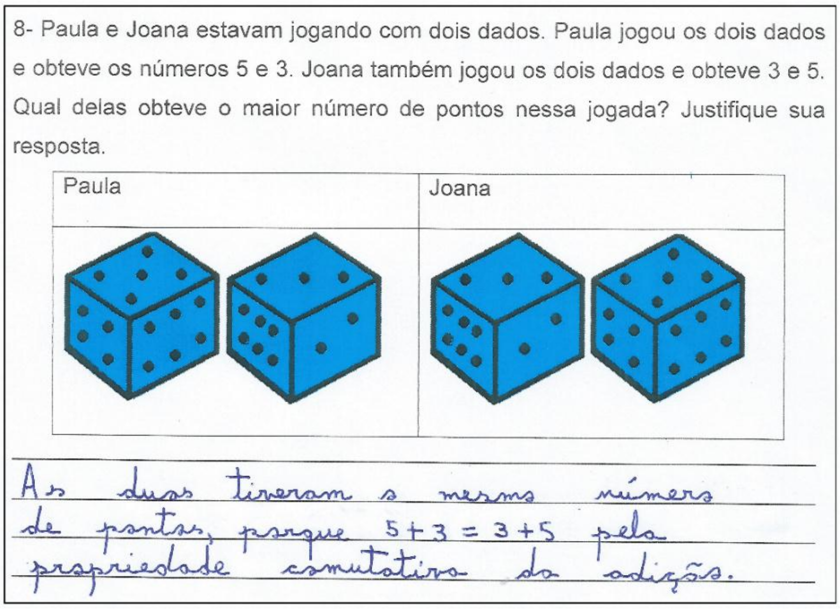
As duas tiveram A mesma quantidade porque 5+3=3+5 é igual, pela propriedade comutativa da adição.



8- Paula e Joana estavam jogando com dois dados. Paula jogou os dois dados e obteve os números 5 e 3. Joana também jogou os dois dados e obteve 3 e 5. Qual delas obteve o maior número de pontos nessa jogada? Justifique sua resposta.

Paula	Joana

As duas tiraram a mesma pontuação por que 5+3 é igual a 3+5 pela propriedade comutativa da adição.



8- Paula e Joana estavam jogando com dois dados. Paula jogou os dois dados e obteve os números 5 e 3. Joana também jogou os dois dados e obteve 3 e 5. Qual delas obteve o maior número de pontos nessa jogada? Justifique sua resposta.

Paula	Joana

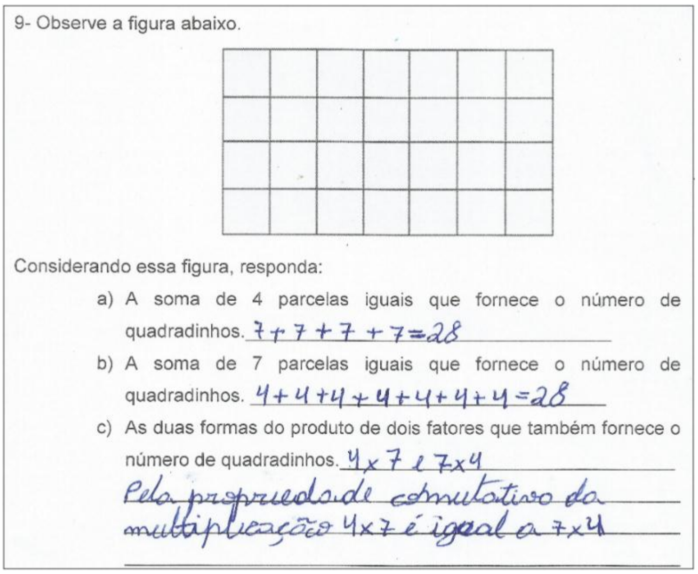
As duas tiveram o mesmo número de pontos, porque 5+3 = 3+5 pela propriedade comutativo da adição.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Pelas respostas dadas, os alunos conseguiram justificar suas respostas sem a necessidade de realizar cálculos, conforme tinham feito no pré-teste. Os mesmos entenderam a propriedade comutativa da adição, concluindo que a mudança de lugar das parcelas na adição não altera o resultado.

A figura 5.14 ilustra as respostas dadas pelos alunos 15, 7 e 10, respectivamente, para a questão envolvendo a propriedade comutativa da multiplicação.

Figura 5.14 – Três respostas dadas pelos alunos para a questão 9, referente à propriedade comutativa da multiplicação.



9- Observe a figura abaixo.

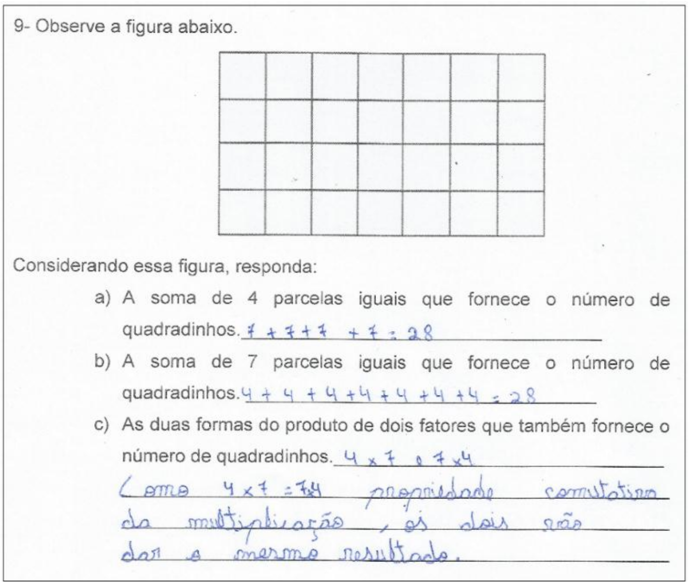
Considerando essa figura, responda:

a) A soma de 4 parcelas iguais que fornece o número de quadradinhos. 7+7+7+7=28

b) A soma de 7 parcelas iguais que fornece o número de quadradinhos. 4+4+4+4+4+4+4=28

c) As duas formas do produto de dois fatores que também fornece o número de quadradinhos. 4x7 e 7x4

Pela propriedade comutativo da multiplicação 4x7 é igual a 7x4

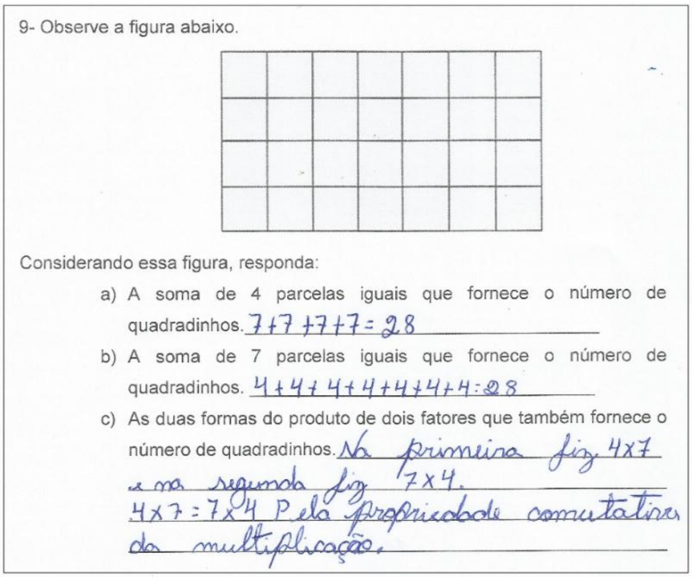

9- Observe a figura abaixo.

Considerando essa figura, responda:

a) A soma de 4 parcelas iguais que fornece o número de quadradinhos. 7 + 7 + 7 + 7 = 28

b) A soma de 7 parcelas iguais que fornece o número de quadradinhos. 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28

c) As duas formas do produto de dois fatores que também fornece o número de quadradinhos. 4 x 7 e 7 x 4
Como 4 x 7 = 7x4 propriedade comutativa da multiplicação, os dois são dar o mesmo resultado.


9- Observe a figura abaixo.

Considerando essa figura, responda:

a) A soma de 4 parcelas iguais que fornece o número de quadradinhos. 7+7+7+7= 28

b) A soma de 7 parcelas iguais que fornece o número de quadradinhos. 4+4+4+4+4+4+4=28

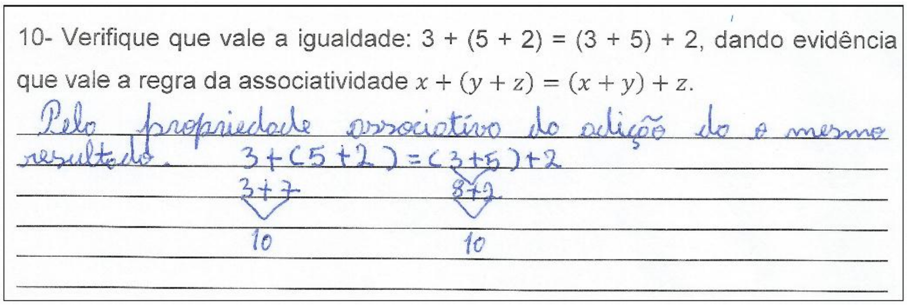
c) As duas formas do produto de dois fatores que também fornece o número de quadradinhos. Na primeira fiz 4x7 e na segunda fiz 7x4.
4x7=7x4 Pela propriedade comutativa da multiplicação.

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

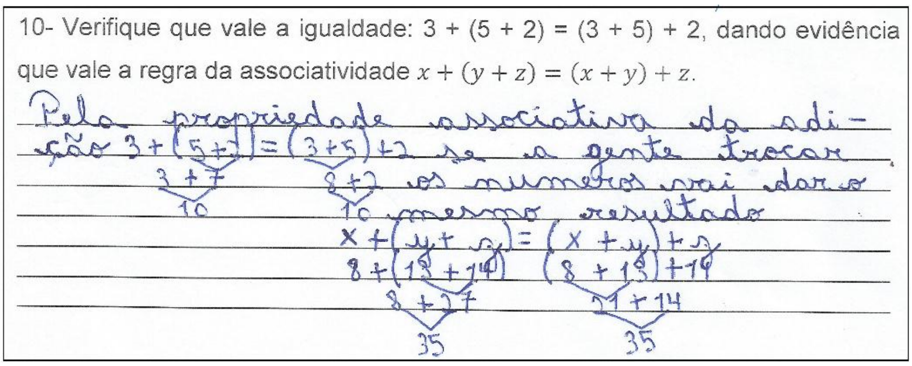
As respostas dadas pelos alunos, além de mostrar um entendimento da ideia de multiplicação, também mostra um entendimento da propriedade comutativa da multiplicação, onde numa multiplicação de dois números naturais a ordem dos fatores não altera o produto.

A figura 5.15 ilustra as respostas dadas pelos alunos 13, 3 e 2, respectivamente, para a questão envolvendo a propriedade associativa da adição.

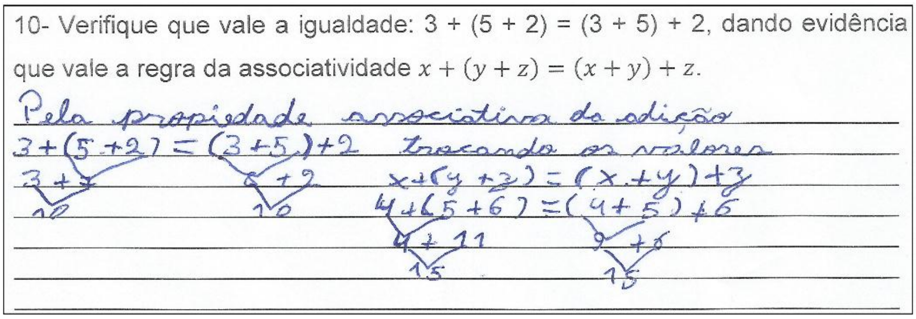
Figura 5.15 – Três respostas dadas pelos alunos para à questão 10, referente à propriedade associativa da adição.


10- Verifique que vale a igualdade: 3 + (5 + 2) = (3 + 5) + 2, dando evidência que vale a regra da associatividade $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Pelo propriedade associativo do adição do o mesmo resultado. 3+(5+2)=(3+5)+2
3+7 8+2
10 10


10- Verifique que vale a igualdade: 3 + (5 + 2) = (3 + 5) + 2, dando evidência que vale a regra da associatividade $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Pela propriedade associativa da adi-ção 3+(5+2)=(3+5)+2 se a gente trocar
3+7 8+2 os numeros vai dar o
10 10 mesmo resultado
x+(y+z)=(x+y)+z
8+(13+14) (8+13)+14
8+27 21+14
35 35


10- Verifique que vale a igualdade: 3 + (5 + 2) = (3 + 5) + 2, dando evidência que vale a regra da associatividade $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Pela propriedade associativa da adição
3+(5+2)=(3+5)+2 trocando os valores
3+7 8+2 x+(y+z)=(x+y)+z
10 10 4+(5+6)=(4+5)+6
4+11 9+6
15 15

Fonte: Extrato das respostas dos alunos

Ao realizar uma análise das respostas dos alunos, vimos que os mesmos conseguiram entender o processo de aglutinação de parcelas na propriedade associativa da adição e que a regra pode confirmada a partir de outros valores.

Após a aplicação proposta neste capítulo, algumas considerações frente às atividades realizadas devem ser levantadas:

i. O uso do material concreto, em nosso caso os dominós, além de ter se mostrado um facilitador de aprendizagem, tornou o conteúdo mais atrativo, dinâmico e interessante;
ii. Os dominós, por serem um material manipulativo, permitiram a variabilidade de diferentes exemplos e por conseguinte, melhor compreensão daquilo que estava sendo proposto;
iii. O uso de dominós desmistifica a ideia de que a aprendizagem em Matemática se dá somente por sistematizações de fórmulas e cálculos;

iv. O uso de dominós na verificação das propriedades permitiu aos alunos uma reprodução de forma descontraída e lúdica em contrapartida às verificações teóricas usualmente utilizadas.

Portanto, as verificações relacionadas às propriedades dos números naturais ao serem trabalhadas usando dominós, peças quadradas 1 x 1, propiciou resultados bastante significativos e validou a importância do uso de material concreto nas aulas de Matemática.

6 ÚLTIMAS CONSIDERAÇÕES

Após as diversas possibilidades apresentadas em relação ao uso de materiais didáticos como suporte no ensino da Matemática, nos diferentes níveis de ensino, as reflexões aqui apontadas não tem a pretensão de apontar conclusões, mas a de conceber muitas outras possibilidades e novos projetos em torno de pesquisas nesta área.

Com essa compreensão e uma análise mais profunda por parte de quem lê o presente trabalho, abrem-se possibilidades do surgimento de novas concepções, onde novos horizontes podem se tornar possíveis.

O uso de dominós como recurso didático no ensino da Matemática, se mostrou, pelos resultados produzidos, uma ferramenta muito eficiente e prazerosa nas situações propostas neste trabalho e, ao mesmo tempo, mostrou a Matemática como uma ciência indutiva, experimental, em contrapartida à matemática euclidiana utilizada em grande parte das escolas, que se revela como uma ciência dedutiva e sistemática.

Dois fatos relevantes, dentre outros já elencados, em relação à aplicação da proposta com os alunos do 6° ano do ensino fundamental da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro devem ser ressaltados:

- Os alunos precisam de estímulo, precisam que agucem sua curiosidade, isto é, precisam ter o prazer pela conquista;
- As aulas de Matemática carecem de recursos que enfatizem a resolução de problemas e a de soluções criativas.

Perante a esses fatos, acredita-se necessário a utilização de outros recursos nas aulas de Matemática. Usar métodos e atividades que não contemplem somente a sistematização, mas e também, a investigação e a dedução, onde o principal alvo é a formação de cidadãos capazes de interagir e solucionar os entraves que lhes são propostos cotidianamente.

O uso de dominós como recurso didático nas aulas de matemática se mostrou uma importante ferramenta neste sentido, pois através da visualização, as propriedades que são teóricas puderam ser investigadas e deduzidas, bem como generalizadas, além dos mesmos serem acessíveis, de fácil manipulação, propiciando movimentos variados como giros e encaixes.

Finaliza-se esta dissertação com uma frase de Benjamin (2013) que com certeza resume toda essa caminhada: “passamos muito tempo aprendendo sobre cálculos, mas não podemos esquecer da aplicação, incluindo, talvez, a aplicação mais importante de todas: aprender a pensar [...] Matemática não é só encontrar o x, também é entender o porquê”.

REFERÊNCIAS

ANDREWS, G. E. **The Theory of Partitions.** Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.

BENJAMIN, Arthur T.; QUINN, Jennifer J. **Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof**, 1st ed., vol. 27, Mathematical Association of America, 2003, 209 p.

BENJAMIN, Arthur T. **The magico of Fibonacci numbers** – TEDGlobal 2013. Disponível em: **<**https://www.ted.com/talks/arthur_benjamin_the_magic_of_fibonacci_numbers>**.** Acesso em: 15 junho de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio -** Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000. 71 p.

____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.

ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO SÃO IZIDRO. **Plano de Estudos**. São Nicolau, 2017/2018.

____. **Plano Político Pedagógico**. São Nicolau, 2017/2018.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues.– Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014, 338 p.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, 204 p.

PIAGET, Jean. **A Epistemologia Genética**. Trad. Nathanael C. Caixeira. Petrópolis: Vozes, 1971. 110 p.

APÊNDICE A – PRÉ-TESTE

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro

Número: ________ 6º Ano – Matemática – Professor Oneide Oliveira

Caro aluno: você está sendo convidado a participar de um teste de algumas situações que envolvem o seu conhecimento sobre números. Resolva cada uma das questões abaixo, descreva todos os passos usados e assinale a resposta que você achar correta.

1) Numa aula de Matemática, a professora pediu aos alunos para adicionarem os números 213 e 504. Alguns alunos fizeram o cálculo na seguinte ordem: 504 + 213; outros efetuaram na ordem: 213 + 504. Será que todos encontraram o mesmo resultado?

a) Sim. b) Não. c) Nada se pode afirmar.

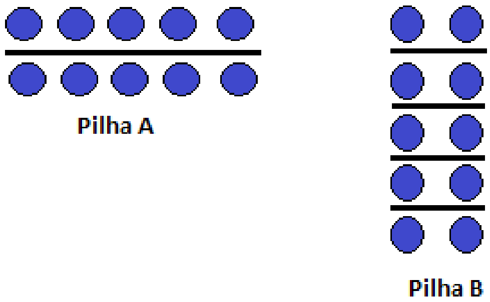
2) Uma família com 3 crianças e 3 adultos foi ao parque. Se o bilhete de cada criança custou 4 reais e o de cada adulto custou 6 reais, quanto a família pagou pelos bilhetes?

a) 60 reais. b) 30 reais. c) 16 reais.

3) Um grupo de estudantes foi acampar nas férias de verão. Levaram cinco tendas para os meninos e três tendas para as meninas. Cada tenda comportava quatro pessoas e todas estavam com lotação completa. Quantos estudantes foram ao acampamento?

a) 32 estudantes. b) 12 estudantes. c) 16 estudantes.

4) Observe o número de bolas em cada pilha abaixo. Qual delas tem maior quantidade de bolas azuis?



a) Pilha A. b) Pilha B. c) As duas tem a mesma quantidade.

5) Num jogo, João e Pedro obtiveram a seguinte pontuação:

	João	Pedro
1ª Rodada	5	2
2ª Rodada	3	3
3ª Rodada	2	5

João fez o seguinte cálculo para saber a soma de seus pontos: 5 + (3 + 2). Já Pedro fez: (2 + 3) + 5. Qual deles fez mais pontos?

a) João. b) Pedro. c) Houve empate no número de pontos.

APÊNDICE B – QUESTÕES COMPLEMENTARES ENVOLVENDO AS PROPRIEDADES DOS NÚMEROS NATURAIS

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro

Número: ________ 6º Ano – Matemática – Professor Oneide Oliveira

Caro aluno: resolva cada uma das questões abaixo descrevendo todos os passos usados.

1) Verifique, pela via combinatória, que vale a igualdade 2 + 9 = 9 + 2, este sendo um exemplo que pode evidenciar a regra da comutatividade da adição: $x + y = y + x$.

____

____

2) Verifique, pela via combinatória, a seguinte igualdade: 5 + 1 + 7 = 7 + 5 + 1, dando evidencia de que vale a comutatividade: $x + y + z = z + x + y$.

____

____

3) Verifique, pela via combinatória, a seguinte igualdade: 2 + 3 + 7 + 1 + 8 = 3 + 8 + 1 + 2 + 7, dando evidencia de que vale a comutatividade: $x + y + z + w + k = y + k + w + x + z$.

____

____

4) Verifique, pela via combinatória, a igualdade 8 x 3 = 3 x 8, dando evidência de que vale a regra da comutatividade da multiplicação: $x.y = y.x$.

____

____

5) Verificar, pela via combinatória, que valem as seguintes igualdades:

a) ((1 + 4) + 2) + 3 = 1 + (4 + (2 + 3))

b) 1 + (2 + 3) + 4 = (4 + (2 + 3)) + 1

6) Verificar, pela via combinatória, que valem as seguintes igualdades:

a) 3 x (5 + 2) = 3 x 5 + 3 x 2

b) (2 + 4) x 5 = 2 x 5 + 4 x 5

ANEXO A – DIREITOS DE APRENDIZAGEM DO 1º TRIMESTRE DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA PARA O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DA ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO MÉDIO SÃO IZIDRO

Plano do 1º trimestre da disciplina de Matemática do 6º ano da Escola Estadual de Ensino Médio São Izidro, conforme Plano de Estudos 2017/2018 da referida escola.

6º ANO
COMPONENTE CURRICULAR: MATEMÁTICA
CARGA HORÁRIA: 05 HORAS SEMANAIS
EMENTA: Números. Números naturais e suas operações. Divisores e Múltiplos de Números Naturais. Divisibilidade. Expressões Numéricas. Ponto, reta e plano. Ângulos. Figuras Planas. Sólidos Geométricos; Tabelas e gráficos (colunas ou barras).
1º TRIMESTRE:
EIXO ESTRUTURANTE: NÚMEROS E OPERAÇÕES Identificar números nos diferentes contextos em que se encontram, em suas diferentes funções: indicador da quantidade de elementos de uma coleção discreta (cardinalidade), medida de grandezas (2 quilos, 3 dias, etc..), indicador de posição (número ordinal) e código (número de telefone, placa de carro, etc..) Utilizar diferentes estratégias para quantificar e comunicar quantidades de elementos de uma coleção e em situações nas quais se reconheça sua necessidade: contagem oral, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos; comunicar quantidades, utilizando a linguagem oral, a notação numérica e/ou registros não convencionais. Utilização de números naturais em suas diversas funções (reconhecer os números naturais – equações de operações: adição, subtração, divisão e multiplicação) Associar denominação do número a sua respectiva representação simbólica. Identificar posição de um objeto ou número numa série, explicitando a noção de sucessor e antecessor. Comparar ou ordenar quantidades por contagem; pela formulação de hipóteses sobre a grandeza numérica, pela identificação da quantidade de

algarismos e posição ocupada na escrita numérica.

Contagem de números em escalas ascendentes e descendentes de uma em um, de dois em dois, de cinco em cinco, de dez em dez, etc.., a partir de qualquer número dado construindo noção de ordem crescente e decrescente.

Utilizar calculadora para produzir e comparar escritas numéricas.

Resolver e elaborar problemas com os significados de juntar, acrescentar quantidades, separar e retirar quantidades, utilizando estratégias próprias como desenhos, decomposições numéricas e palavras.

Resolver e elaborar problemas aditivos envolvendo significados de juntar e acrescentar quantidade, separar e retirar quantidades, comparar e completar quantidades, em situações de contexto familiar e utilizando cálculo mental; ou outras estratégias pessoais.

Resolver e elaborar problemas de multiplicação em linguagem verbal (com suporte de imagens ou materiais de manipulação) envolvendo as ideias de adição de parcelas iguais, elementos apresentados em disposição retangular, proporcionalidade e combinatória.

Resolver e elaborar problemas de divisão em linguagem verbal (com suporte de imagens ou materiais de manipulação) envolvendo as ideias de repartir e de medir.

Realizar a comparação e ordenação de números.

Fazer o reconhecimento de números pares e impares.

Compreender a estrutura do sistema decimal de numeração.

Formalizar o algoritmo das operações elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Compreender e operar com as propriedades das quatro operações fundamentais: adição, subtração, divisão, multiplicação.

Compreender, comunicar e raciocinar com e a partir da simbologia matemática.

Entender e operar com sequências numéricas.

Desenvolver habilidades de cálculo mental.

Estudar os múltiplos e divisores.

Investigar os sistemas monetários que o Brasil já teve e estudar o atual sistema monetário usando moedas e cédulas para fazer cálculos.

EIXO ESTRUTURANTE: PENSAMENTO ALGÉBRICO

Introduzir e aplicar a linguagem algébrica associada naturalmente às situações problema.

Utilizar e vivenciar o raciocínio lógico matemático em situações do cotidiano e formular hipóteses explicativas.

EIXO ESTRUTURANTE: ESPAÇO E FORMA

Explicitar e/ou representar informalmente a posição de pessoas e objetos, dimensionar espaços, utilizando vocabulário pertinente nos jogos, nas brincadeiras e nas diversas situações nas quais as crianças e adolescentes considerarem necessária essa ação, por meio de desenhos, croquis, plantas baixa, mapas e maquetes, desenvolvendo noções de tamanho, de lateralidade, de localização, de direcionamento, de sentido e de vistas.

Estabelecer comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos- esféricos, cilíndricos, cúbicos, piramidais, prismáticos.

Perceber semelhanças e diferenças entre representações bidimensionais e tridimensionais, com destaque para: cubos e quadrados; paralelepípedos e retângulos; pirâmides e triângulos; e esferas e círculos.

Reconhecer e nomear pontos, retas, semirretas, segmento de reta, plano.

Elaborar ideias relacionadas ao conceito de ângulo e explorá-las a partir de medições com o uso de diferentes instrumentos de desenho e de medida, classificando-os em reto, agudo e obtuso.

EIXO ESTRUTURANTE: GRANDEZAS E MEDIDAS

Comparar grandezas de mesma natureza, por meio de estratégias pessoais e uso de instrumentos de medidas conhecidos - fita métrica, balança, recipientes de um litro, etc..

Selecionar e utilizar instrumentos de medidas apropriados à grandeza a ser medida (por ex: tempo, comprimento, massa, capacidade), como compreensão do processo de medição e das características das unidades de medida e dos instrumentos escolhidos.

Identificar elementos necessários para comunicar o resultado de uma medição e produção de escritas que representem essa medição.

Identificar e relacionar os conceitos das operações matemáticas como suporte para resolução de problemas que envolvam medidas e grandezas.

EIXO ESTRUTURANTE: TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO
Ler, interpretar e transpor informações em diversas situações e diferentes configurações (por ex.: anúncios, gráficos, tabelas, propagandas, passagens, bulas, manuais) utilizando-as na compreensão de fenômenos sociais e na comunicação, agindo de forma efetiva na realidade em que vive. Formular questões sobre aspectos familiares que gerem pesquisas e observações para coletar dados quantitativos e qualitativos. Coletar, organizar, classificar, ordenar e construir representações próprias para a comunicação de dados coletados. Resolver e elaborar problema a partir das informações de um gráfico ou tabela.