Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e
Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

O teodolito como recurso mediador no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica

Wladmilson Torres Lages

Teresina

2018

Wladmilson Torres Lages

O teodolito como recurso mediador no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí - PROFMAT, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador:Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo

Coorientador: Prof. Me. Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha

Teresina

2018

L174t Lages, Wladmilson Torres
O teodolito como recurso mediador no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na educação básica / Wladmilson Torres Lages. – 2018.
111 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2018.
"Orientador Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo."

1. Ensino e Aprendizagem da Matemática. 2. Teodolito. 3. Conceitos Trigonométricos. 4. Ensino Médio. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB-3ª/1188

WLADMILSON TORRES LAGES

O TEODOLITO COMO RECURSO MEDIADOR NO PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo - Presidente e Examinador
Universidade Federal do Piauí -UFPI

Prof ª. Drª. Valmária Rocha da Silva Ferraz - Examinadora
Universidade Federal do Piauí -UFPI

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Outubro/2018

Wladmilson Torres Lages graduou-se em Matemática pela UESPI, concluiu o Curso de Especialização em Matemática, promovido pela CAPES/ SEMTEC/ SICCT/ SEED/ FAPEPI/ UFPI e depois o curso de Mestrado PROFMAT/UESPI, bolsista pela CAPES. É professor efetivo da rede pública nos estados do Piauí e Maranhão.

Dedico este trabalho à minha família pelo estímulo e compreensão durante a minha pós-graduação; em especial, aos meus pais Edmilson e Chagas, minha esposa Mara Fernanda, minha filha Edite, aos meus irmãos Clemilson, Elenilson e Ana Cláudia, ao meu tio Edvaldo e à minha tia Creuza (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, a Deus, centro de minha concentração espiritual e de busca pela harmonia e tranquilidade; pela oportunidade de concretizar este trabalho com saúde e paz.

Agradeço aos meus familiares por sempre terem me apoiado e incentivado nesta caminhada, transmitindo amor, segurança, otimismo e outros valores que contribuíram nesta busca incessante pela realização pessoal.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Neuton Alves de Araújo pela atenção e ajuda em me orientar neste trabalho, acompanhando em todas as suas etapas de forma segura e objetiva..

Agradeço ao meu coorientador Prof. Me. Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha pela escolha do objeto de estudo e dedicação em sua orientação na realização desse trabalho.

Agradeço Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior que coordenou o curso até o final do ano de 2017, pela sua amizade, companheirismo e seu apoio durante essa pós-graduação. Agradeço ainda ao atual coordenador do curso, Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito, pela amizade e apoio frente à conclusão desta dissertação.

Agradeço à equipe de professores da UESPI/ PROFMAT por ter contribuído para minha formação acadêmica durante à pós-graduação.

Agradeço aos professores da Banca Examinadora pelas valiosas contribuições para aprofundamento e melhoria deste estudo.

Agradeço aos colegas de turma, em especial ao Antunino, Edson e Francisco de Paula (PJ), pelas importantes colaborações e discussões ao longo desse período.

Enfim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

O material concreto exerce papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico. É fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos.

(TURRIONI; PEREZ, 2016, p. 60).

Resumo

Este trabalho tem como objeto de estudo "o teodolito como recurso mediador do processo ensino e aprendizagem da Matemática". Nesse contexto, buscamos responder a seguinte questão problema de pesquisa: Como o teodolito pode possibilitar o processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica? Assim, a hipótese que defendemos neste estudo é a de que o ensino mediado por estratégias e instrumentos didáticos promove a ampliação do aprendizado e interesse dos alunos durante as aulas de Matemática por meio da utilização de materiais concretos, a exemplo do teodolito caseiro e o uso do aplicativo *Theodolite*. Nessa perspectiva, o trabalho desenvolveu-se com o objetivo geral de analisar a importância do uso do teodolito como recurso mediador no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica. Partimos de aulas teórico-práticas com os alunos, envolvendo o uso do teodolito. Em seguida, orientamos os alunos na construção e aplicação dessa ferramenta em situações-problema postas, tendo em vista a melhoria da aprendizagem e interesse dos alunos nas aulas de Matemática. Desse modo, ao se considerar o objetivo geral e a questão problema, esta pesquisa é compreendida como pesquisa de campo e de abordagem qualitativa. E teve como sujeitos investigados alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual localizada na cidade de Caxias-MA. Para a produção de dados e com o propósito de se fazer um diagnóstico dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos acerca dos conceitos matemáticos trigonométricos, a priori, aplicamos um questionário (Pré-teste) contemplando atividades da avaliação externa Prova Brasil. Após confecção e uso do teodolito e intervenção do pesquisador, em que fizemos uso da observação, foram propostas novas situações-problemas (Pós-teste), também da Prova Brasil, a fim de se observar a importância do teodolito como mediador no processo ensino e aprendizagem da Matemática. Nesse momento, os participantes relataram a partir de produção textual escrita e orientada pelo pesquisador, suas opiniões acerca das aulas teórico-práticas envolvendo o uso do teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos. No geral, os resultados da pesquisa revelam que, de certa forma, as dificuldades na compreensão e apropriação dos conceitos trigonométricos foram amenizadas.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem da Matemática. Conceitos Trigonométricos. Teodolito. Ensino Médio.

Abstract

This work has as object of study “the theodolite as mediating resource in the teaching and learning process of Mathematics”. In this context, we seek to answer the following research problem question: How can theodolite enable the teaching and learning process of trigonometric concepts in Basic Education? Therefore, the hypothesis that we defend in this study is that the teaching mediated by strategies and didactic instruments promotes the expansion of students' learning and interest during Mathematics classes through the use of concrete materials, such as home theodolite and the use of *Theodolite* application, which can be installed on any cell phones and operating systems. In this perspective, the work was developed with the general objective of analyzing the importance of the use of theodolite as mediator resource in the teaching and learning process of trigonometric concepts in Basic Education. We start from theoretical-practical classes with students, involving the use of theodolite. Then, we guide the students in the construction and application of this tool in problem situations presented, with a view to improving the learning and interest of students in mathematics classes. Thus, when considering the general objective and the problem question, this research is understood as field research and qualitative approach. And it was investigated students of the second year of high school in a state public school located in the city of Caxias-MA. For the production of data and for the purpose of making a diagnosis of the knowledge already acquired by students about trigonometric mathematical concepts, a priori, we applied a questionnaire (Pre-test) contemplating activities of external evaluation of Prova Brasil. After confection and use of theodolite and intervention of the researcher, in which we made use of observation, were proposed new situations-problems (Post-test), also from of Prova Brasil, in order to observe the importance of theodolite as mediator in the process of teaching and learning of Mathematics. At that moment, the participants reported from written text production and guided by the researcher, their opinions about the theoretical-practical classes involving the use of theodolite in the teaching and learning process of trigonometric concepts. In general, the results of the research reveal that, in a way, the difficulties in understanding and appropriating the trigonometric concepts were assuaged.

Keywords: Teaching and Learning of Mathematics. Trigonometric Concepts. *Theodolite*. High school.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Gráficos

Lista de Siglas

CEGD-Centro de Ensino Gonçalves Dias
MA-Maranhão
PROFMAT-Programa de Mestrado Profissional em Matemática
PCNEM-Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática
PNLD-Programa Nacional do Livro Didático UESPI-Universidade Estadual do Piauí
UniFacema-Centro Universitário de Ciências e Tecnologia do Maranhão

Sumário

1 Introdução

> Sabemos que as experiências positivas nos dão segurança e estímulo para o desenvolvimento [...] nos propicia a experiência do êxito, pois é significativo, possibilitando a autodescoberta, a assimilação e a integração com o mundo por meio de relações e de vivências (IDE, 2011, p. 107).

Este trabalho tem como área de concentração “Ensino de Matemática” e Linha de Pesquisa “Ensino Básico de Matemática: métodos e processos de ensino/aprendizagem de Matemática para crianças e adolescentes no contexto do ensino fundamental e médio”, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT da Universidade Estadual do Piauí-UESPI. O objeto de estudo diz respeito ao uso do teodolito como recurso mediador do processo ensino e aprendizagem da Matemática, pois como afirma Ide (2011) na epígrafe acima, esse recurso possibilitou aos alunos, sujeitos deste estudo, “a autodescoberta, a assimilação e a integração com o mundo por meio de relações e de vivências”, questão que será discutida em seções posteriores.

Diante do exposto, é pertinente explicitarmos que, durante todo o período do exercício docente, ministrando a disciplina Matemática em escolas da rede pública, ao longo dos últimos 18 anos, observamos a importância das aulas práticas como a mediação de materiais concretos/ recursos didáticos, no processo ensino e aprendizagem nesta disciplina. Na verdade, por meio da realização de experimentos que associa teoria à prática e proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático, despertando a curiosidade e interesse do aluno.

Assim, alinhada à teoria, a prática a partir do uso de materiais concretos de baixo custo, de modo particular, neste estudo, o teodolito se mostrou como recurso facilitador do processo ensino e aprendizagem da Matemática, ao estimular os alunos e, assim, promover a contextualização e problematização, também, com outras áreas do conhecimento, como a Física, a Engenharia e a Topografia.

A esse respeito, recorrendo aos estudos de Luckesi (2005, p. 15), na verdade, “não tem sentido o aluno ter assimilado uma quantidade considerável de conceitos se esses não tem uma relação com a sua vida, com o dia a dia. Relacionar os conteúdos com o cotidiano dá verdadeiro sentido ao ensino-aprendizagem”.

Partindo desse entendimento, diante da preocupação com os conceitos básicos de trigonometria na Educação Básica, abordado de forma expositiva e teórica, muitas vezes sem contextualização, em que o professor fica refém do livro didático, este trabalho tem como objetivo geral analisar a importância do uso do teodolito como recurso mediador no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica. Para tanto, elencamos os objetivos específicos: 1) proporcionar aos alunos, sujeitos deste estudo, aulas teórico-práticas envolvendo o uso do teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos; 2) orientar os alunos na construção do teodolito a fim de que desenvolvam situações-problema mediadas por esse material concreto; 3) verificar as potencialidades do teodolito através da proposição de novas situações-problema, objetivando a melhoria no processo ensino e aprendizagem da Matemática.

Diante das ponderações feitas, reafirmamos a necessidade de se atrelar aos materiais concretos uma perspectiva metodológica com aparato na contextualização e na interdisciplinaridade, como tão bem explicitam os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio-PCNEM (BRASIL, 2002, p. 111):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Ante o exposto, é preciso exemplificarmos que, existe a necessidade do desenvolvimento de competências e habilidades em Matemática para investigar o processo envolvido na resolução de qualquer situação-problema. Nesta etapa da escolaridade, além da leitura e de conhecimentos de Matemática, as situações propostas envolvem, bem como o domínio de códigos e nomenclaturas da linguagem Matemática, a compreensão e interpretação de diagramas e gráficos e a relação destes elementos com a linguagem discursiva.

Vale lembramos o pensamento de Freire (1996, p. 25) que, "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção". Assim, o ensino deve possuir um caráter problematizador, em que se crie um espaço para estimular questionamentos, levantar hipóteses, provocar curiosidades e opiniões. Dessa forma, levando o aluno a expandir relações de reflexão mediante experiências concretas, ou seja, vivenciadas no seu cotidiano e não distantes de sua realidade, como configuram os livros didáticos, no geral.

Nessa perspectiva, por entendermos que a contextualização nos conceitos trigonométricos ou nos conceitos matemáticos em geral, é necessária para a promoção do processo ensino e aprendizagem, buscamos responder à seguinte pergunta (questão problema): Como o teodolito pode possibilitar o processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica?

Nesse contexto, a hipótese que defendemos neste estudo é a de que o ensino mediado por estratégias e instrumentos didáticos promove a ampliação do aprendizado e interesse dos alunos durante as aulas de Matemática por meio da utilização de materiais concretos, a exemplo do teodolito caseiro e o uso do aplicativo *Theodolite*. Entendemos que as aulas teórico-práticas têm adquirido cada vez mais importância no enfrentamento das dificuldades no processo ensino e aprendizagem da Matemática.

Este trabalho tem o uso de aplicação para aproximar o aluno da matemática, fazendo com que este perceba sua importância na prática, baseando-se no uso de material concreto para o ensino de trigonometria.

Desde a construção do próprio teodolito, que devemos ter em aula de forma participativa, mudando a prática comum de sala de aula e posturas docentes e discentes, desta forma tentando fazer a atividade docente mais atrativa esperando assim a melhoria no interesse dos alunos.

Assim, para melhor situarmos o leitor, este trabalho está estruturado em 7 (sete) seções. Na presente seção, abordamos a Introdução, dando destaque aos elementos: objeto de estudo, interesse do pesquisador pela temática, objetivo geral e específicos, a questão problema, a relevância social do estudo e seu formato estrutural em seções.

Na segunda seção, apresentamos uma discussão com exemplos de situações-problemas sobre tópicos da Geometria Euclidiana Plana a fim de possibilitarmos uma melhor compreensão dos conceitos trigonométricos. Para tanto, faremos a demonstração do teorema de Pitágoras e suas aplicações na Geometria Euclidiana Plana.

Na terceira seção, expomos um breve histórico da trigonometria, com destaque na origem de alguns termos dessa área da Matemática, bem como a abordamos a circunferência trigonométrica, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, as Leis do Cosseno e do Seno.

A quarta seção trata de um breve histórico do teodolito, assim também da trena por se apresentar como uma ferramenta auxiliar. Exibimos, ainda, os procedimentos de construção e utilização do teodolito, por intermédio de materiais concretos de baixo custo e, como também o uso do aplicativo *Theodolite*, instalado nos celulares dos alunos para cálculos de distâncias inacessíveis. Por último, tratamos de alguns problemas que envolvem medidas de distâncias inacessíveis no âmbito dos pontos que ligam a escola (campo empírico desta investigação), a Igreja Catedral de Caxias-MA e o Centro Universitário de Ciências e Tecnologia do Maranhão - UniFACEMA, os quais foram solucionados através da aprendizagem trigonométrica.

Por sua vez, na quinta seção, descrevemos os aspectos metodológicos da pesquisa, desde sua caracterização à análise dos dados produzidos.

Na sexta seção, fizemos a análise e discussão dos dados empíricos. E, finalmente, na sétima e última seção, apresentamos as Considerações Finais.

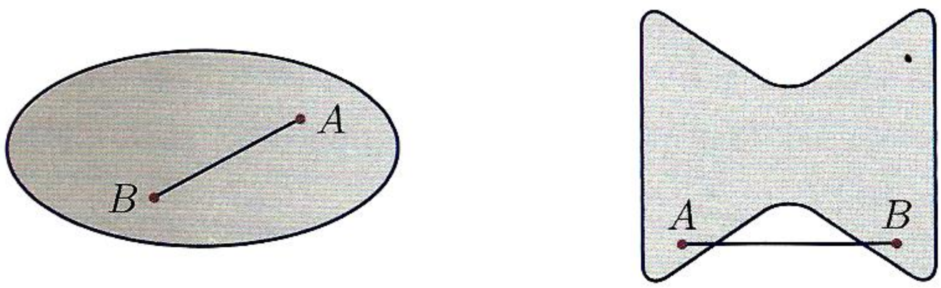
2 Discussão sobre alguns tópicos da Geometria Euclidiana Plana: necessidade para uma melhor compreensão dos conceitos trigonométricos

Nesta seção, tratamos de conceitos da Geometria Euclidiana Plana por entendermos necessários para melhor situarmos o objeto de estudo desta pesquisa - "o teodolito como recurso mediador do processo ensino e aprendizagem da Matemática". Para isso, inicialmente abordamos o conceito de ângulos, posteriormente, triângulos e ângulos na circunferência e, por último, o Teorema de Pitágoras.

2.1 Ângulos

Definição 1. *Uma região R do plano é convexa (cf. Figura 1) quando, para todos os pontos $A, B \in R$, tivermos $AB \subset R$. Caso contrário, diremos que R é uma região não convexa. (NETO, 2013, p. 10)*

Figura 1: Região convexa (esq.) e não convexa (dir.)

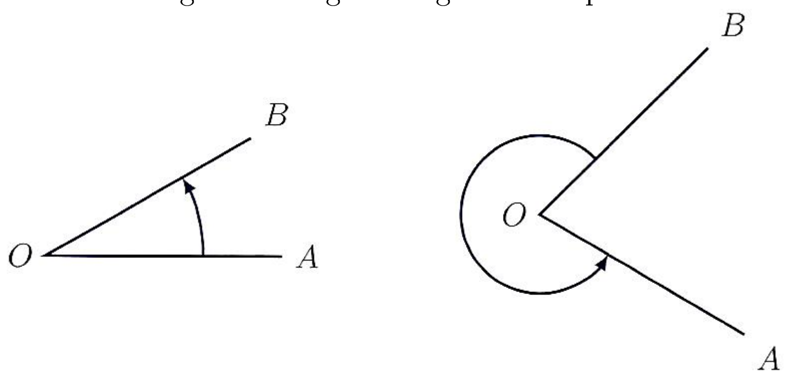


Fonte: Neto (2013, p. 10)

Pela definição acima, para uma região R ser não convexa basta que existam pontos $A, B \in R$ tais que pelos menos um ponto do segmento AB não pertença a R.

Definição 2. *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O (cf. Figura 2, na página seguinte) e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. (NETO, 2013, p. 11)*

Figura 2: Regiões angulares no plano

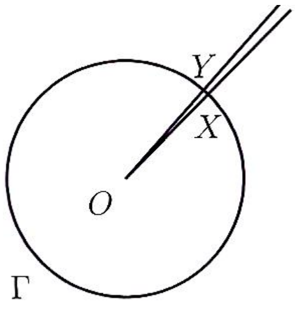


Fonte: Neto (2013, p. 11)

Na figura 2, o ângulo da esquerda é convexo, enquanto o ângulo da direita é não convexo. Indicamos um ângulo de vértice em O e de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ por $A\hat{O}B$. Nesse contexto, deixamos claro se estamos nos referindo ao ângulo convexo ou não convexo.

Passamos, a associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa. Para tanto (cf. Figura 3), dividimos um círculo Γ , de centro O, em 360 partes congruentes e consideramos os pontos X e Y, extremos de X e Y de um desses 360 arcos congruentes. Dizemos que a medida do ângulo $X\hat{O}Y$ é 1 grau, e denotamos por $1°$, e escrevemos $X\hat{O}Y = 1°$.

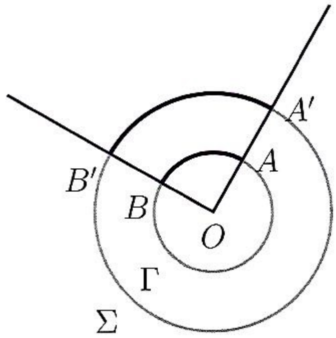
Figura 3: Grau como unidade de medida de ângulos



Fonte: Neto (2013, p. 12)

A definição de grau dada anteriormente apresenta uma falta de consistência. Como podemos afirmar que ela não depende do círculo escolhido? Por outro lado, como podemos afirmar se, dividindo outro círculo $\sum$, de centro O, em 360 partes congruentes, obtemos um ângulo $X'\hat{O}Y'$ o qual podemos dizer também medir $1°$? Para respondermos à mesma, como mostra a Figura 4, na página seguinte, consideremos dois círculos Γ e $\sum$, de mesmo centro O, e dois pontos $A, B \in \Gamma$. Sejam A' e B' os pontos de intersecção das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com $\sum$. Em seguida, assumimos como axioma que a fração de Γ que o menor arco $\widehat{AB}$ representa é igual à fração de que arco menor $\widehat{A'B'}$ representa. Por isso, se na definição de grau, tivéssemos tomado um círculo $\sum$ de raio diferente do raio Γ, porém com mesmo centro O, tínhamos um mesmo ângulo representando a medida de $1°$.

Figura 4: Boa definição da noção de grau

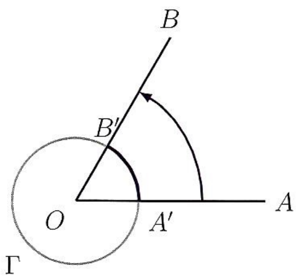


Fonte: Neto (2013, p. 12)

De acordo com a definição de grau, é fácil observarmos que um círculo corresponde a $360°$. De outro modo, como podemos medir o ângulo $A\hat{O}B$? Para respondermos essa pergunta, fazemos a seguinte construção: traçamos um círculo qualquer Γ, de centro O, e marcamos os pontos A' e B' em que intersecta os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de $A\hat{O}B$ (cf. Figura 5); logo depois, vemos qual do comprimento total de Γ o arco $\widehat{AB}$ representa. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ será essa fração de $360°$. Por exemplo, se o comprimento do arco $\widehat{A'B'}$ for $\frac{1}{9}$ do comprimento total de Γ, então a medida $A\hat{O}B$ será:

$$A\hat{O}B = \frac{1}{9} \cdot 360° = 40°$$

Figura 5: Medindo o ângulo $A\hat{O}B$.



Fonte: Neto (2013, p. 13)

Observações:

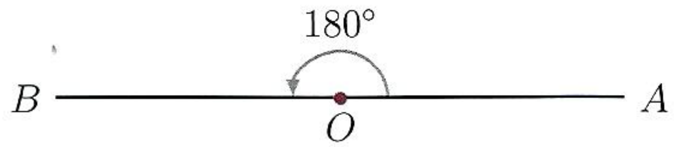
i. Dizemos que dois ângulos são congruentes quando suas medidas são iguais.

ii. Várias vezes usamos, por economia de notação, as letras gregas minúsculas para denotar medidas de ângulos. Por exemplo, escrevemos $A\hat{O}B = \theta$ para expressar que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é θ graus.

iii. A partir desse momento, a notação $A\hat{O}B$ indica tanto o ângulo $A\hat{O}B$, como sua medida.

Observamos que todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes de mesma medida. Deste modo, se tivermos um ângulo $A\hat{O}B$ tal que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas (ângulo raso), então a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 180° (ver Figura 6).

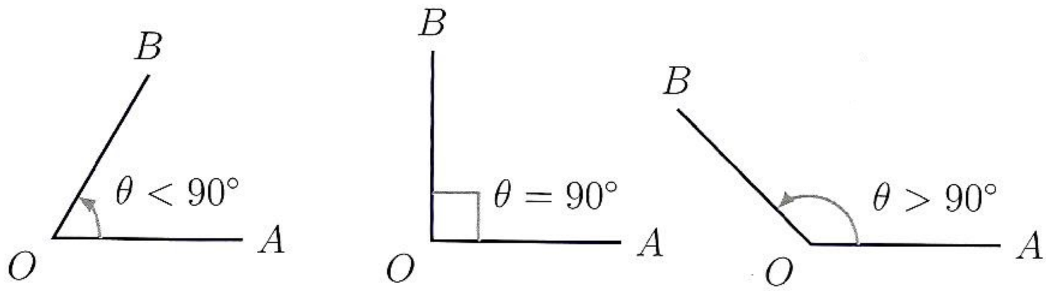
Figura 6: Ângulo de 180° (raso)



Fonte: Neto (2013, p. 14)

Raramente utilizamos ângulos maiores que 180°. Dessa forma, quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são coincidentes são denominados ângulos nulos. A medida de tais ângulos é 0°. Diante disso, quando escrevemos $A\hat{O}B$ estamos nos referindo ao ângulo $A\hat{O}B$ tal que $0° \leq A\hat{O}B \leq 180°$. Dizemos (cf. Figura 7) que um ângulo $A\hat{O}B$ é agudo quando $0° < A\hat{O}B < 90°$, reto quando $A\hat{O}B = 90°$ e obtuso quando $90° < A\hat{O}B < 180°$.

Figura 7: Ângulos agudo (esq.), reto (centro) e obtuso (dir.)



Fonte: Neto (2013, p. 15)

Diremos que dois ângulos são complementares quando a soma das medidas é 90°. Nesse contexto, dizemos um ângulo é o complemento do outro. Além disso, dizemos que dois ângulos são suplementares quando a soma das medidas é 180°. Nesse sentido, um ângulo é o suplemento do outro.

Exemplo 1. *Calcule a medida do ângulo que, somado ao triplo de seu complemento, dá 210° como resultado. (NETO, 2013, p. 17)*

Solução.
Sendo α a medida, em graus, do ângulo e a medida do complemento $90° - \alpha$, temos:

$$\alpha + 3.(90° - \alpha) = 210°$$

$$\alpha + 270° - 3\alpha = 210°$$

$$-2.\alpha = -60°$$

$$\alpha = 30°$$

Portanto, a medida do ângulo é 30°.

Exemplo 2. *Calcule a medida do ângulo agudo, sabendo que a mesma excede a medida de seu complemento em* 76°. *(NETO, 2013, p. 18)*

Solução.
Sendo α a medida, em graus, do ângulo e a medida do complemento $90° - \alpha$, obtemos:

$$\alpha - (90° - \alpha) = 76°$$

$$\alpha - 90° + \alpha = 76°$$

$$2.\alpha = 166°$$

$$\alpha = 83°$$

Então, a medida do ângulo agudo é 83°.

2.2 Triângulos e ângulos na circunferência

Sabemos que três pontos não colineares formam um triângulo. Sendo A, B e C tais pontos, dizemos que A,B e C são os vértices do triângulo ABC.

Num triângulo ABC, os lados do triângulo são os segmentos AB, AC e BC, e representamos por $AB = a$, $AC = b$ e $BC = c$.

Num triângulo ABC, os ângulos $B\hat{A}C = \hat{A}$, $A\hat{B}C = \hat{B}$ e $A\hat{C}B = \hat{C}$ são denominados ângulos internos do triângulo ABC.

Podemos classificar triângulos de dois modos básicos: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos. Quanto aos comprimentos de seus lados, temos:

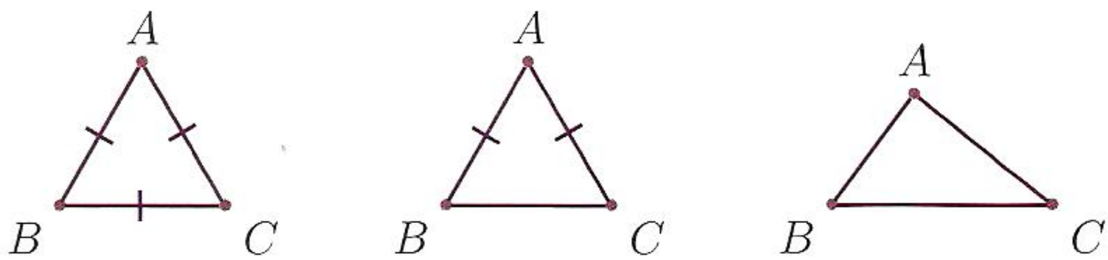
Definição 3. *Um triângulo ABC, como explicitado na Figura 8, é denominado: (NETO, 2013, p. 20)*

a) Equilátero, se $AB = AC = BC$, ou seja, se os três lados são congruentes.

b) Isósceles, se ao menos dois dentre AB, AC e BC forem iguais.

c) Escaleno, se $AB \neq AC \neq BC \neq AB$, ou seja, se os três lados tem medidas desiguais.

Figura 8: Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.)



Fonte: Neto (2013, p. 20)

De acordo com a definição acima, todo triângulo equilátero é isósceles; entretanto, a sua reciproca não é verdadeira. Num triângulo isósceles ABC, tal que $AB = AC$, dizemos que o lado BC é a base do triângulo.

2.2.1 Congruência de triângulos

Levando em conta os estudos de Rocha (2016, p. 17) sobre congruência de triângulos, dois triângulos ABC e DEF são ditos congruentes quando estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os vértices de ABC e os de DEF, de modo que os lados e ângulos correspondentes sejam iguais. Se a correspondência $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$ define tal congruência, temos as seguintes relações $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$. (ROCHA, 2016, p. 17)

Ainda segundo esse autor, na verdade, existem condições mínimas para a congruência entre os triângulos ABC e DEF, as quais são chamadas de casos de congruência, como passamos a caracterizar:

a) Se $AB = DE$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $AC = DF$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes (Caso de congruência LAL).

b) Se $\hat{B} = \hat{E}$, $BC = EF$ e $\hat{C} = \hat{F}$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes (Caso de congruência ALA).

c) Se $AB = DE$, $AC = DF$ e $BC = EF$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes (Caso de congruência LLL).

d) Se $BC = EF$,$\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes. (Caso de congruência LAA_o).

e) Se ABC e DEF são triângulos retângulos tais que $\hat{A} = \hat{D}$=90°, $AB = DE$ e $BC = EF$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes (Caso especial de congruência de triângulos retângulos)

Dessa forma, temos as proposições e o corolário , a saber:

Proposição 1. *Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, então $\hat{B} = \hat{C}$. (NETO, 2013, p. 39)*

Proposição 2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a* 180° *(NETO, 2013, p. 48).*

Corolário 1. *Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a* 60°. *(NETO, 2013, p. 48)*

Feito isso, é chegado o momento de apresentarmos a classificação dos triângulos em relação às medidas de seus ângulos. Para tanto, temos as definições:

Definição 4. *Um triângulo ABC é denominado: (GERÔNIMO, 2010)*

a) Acutângulo, quando todos os seus ângulos internos são agudos.

b) Retângulo, quando possui um ângulo reto.

c) Obtusângulo, quando possui um ângulo obtuso.

Definição 5. *Seja ABC um triângulo e D um ponto da reta $\overleftrightarrow{BC}$. (GERÔNIMO, 2010)*

a) Se D for o ponto médio do segmento BC, então AD é a mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC (ou ao vértice A).

b) Se D é um ponto tal que AD divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois ângulos congruentes, então dizemos que AD é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

c) Se D é um ponto, tal que $\overleftrightarrow{AD}$ é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{BC}$, dizemos que AD é a altura do triângulo relativa ao lado BC (ou vértice A).

Proposição 3. *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura. (BARBOSA, 2012, p. 60)*

2.2.2 Semelhança de triângulos

Diz-se que dois triângulos ABC e DEF são ditos semelhantes (notação:$ABC \sim DEF$) quando estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os vértices de ABC e os de DEF, de modo que os ângulos correspondem sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais. Se a correspondência $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$ define tal semelhança, apresentamos as seguintes relações: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = K$, onde k é a razão de semelhança de ABC para DEF. (ROCHA, 2016, p. 19)

Para esse autor, existem condições mínimas para a semelhança entre os triângulos ABC e DEF (são chamadas os casos de semelhança), a saber:

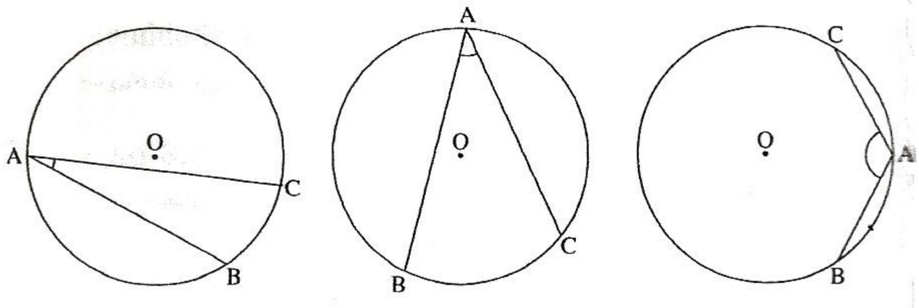
a) Se $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes (Caso de semelhança AA).

b) Se $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes (Caso de semelhança LAL).

c) Se $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes (Caso de semelhança LLL).

Definição 6. *Um ângulo é denominado inscrito em um círculo se seu vértice A é um ponto do círculo e seus lados interceptam o círculo em dois pontos B e C distintos do vértice A como mostra a Figura 9. Os pontos B e C definem dois arcos. O arco determinado pelos dois pontos B e C que não contém o vértice A é dito arco correspondente ao ângulo inscrito dado ou ângulo que subtende o arco. (BARBOSA, 2012, p. 152)*

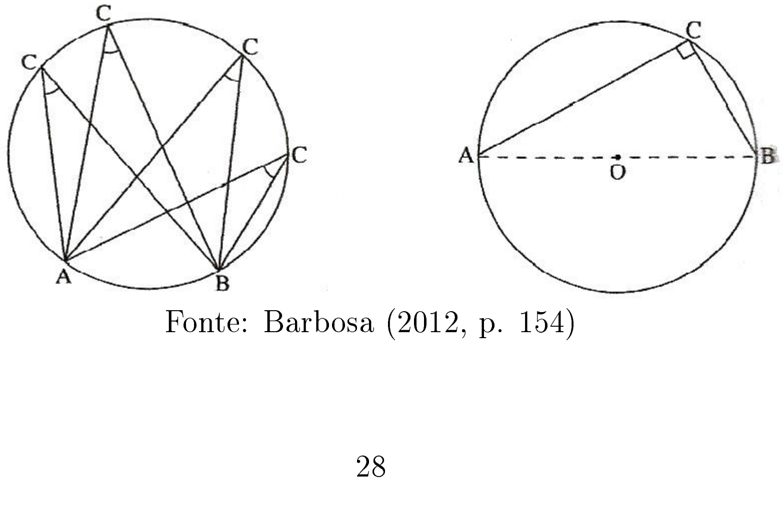
Figura 9: Ângulos inscritos $B\hat{A}C$ em um círculo



Fonte: Barbosa (2012, p. 152)

Corolário 2. *Todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco são congruentes (ver Figura 10). Particularmente, todos os ângulos que subtendem um semicírculo são retos, como podemos observar na Figura 10. (BARBOSA, 2012, p. 154)*

Figura 10: Ângulos inscritos $A\hat{C}B$ em um mesmo arco $\widehat{AB}$ (esq.) e ângulo inscrito em um semicírculo (dir.)



Fonte: Barbosa (2012, p. 154)

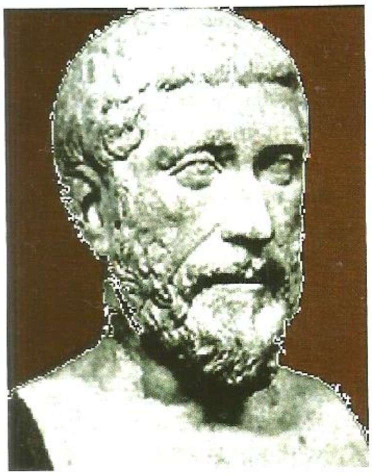
2.3 O Teorema de Pitágoras

Inicialmente apresentaremos uma breve contextualização histórica sobre esse teorema. Em seguida, um enunciado e duas demonstrações envolvendo semelhança e cálculo de área. Por último, aplicações do Teorema de Pitágoras.

2.3.1 Breve histórico

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes e mais famosos teoremas da Geometria Euclidiana Plana. Pitágoras (Figura 11) foi um grande geômetra da Grécia antiga.

Figura 11: Pitágoras



Fonte: Lima et al (2013, p. 70)

Conforme Lima et al (2012, p. 70), diz-se que Pitágoras (c.569 a.C-c.480 a.C) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto. Nessa mesma ilha, 50 anos atrás havia nascido Tales. Foi a partir dos pensamentos desses dois grandes filósofos que a Matemática surge como uma ciência, vindo se desenvolver grandiosamente nos séculos vindouros.

Pitágoras viajou pelo Egito e pela Babilônia (talvez tenha ido até a Índia), onde adquiriu os conhecimentos matemáticos e as concepções religiosas de cada região. Retornando ao mundo grego, no Sudeste da Itália na época atual (em Crotona), fundou uma escola que oferecia o estudo da Matemática e da Filosofia, em especial. No entanto, naquela época todos os documentos sobre essa escola e outros perdidos. Somente através de referências de outros estudiosos que viveram séculos posteriores foi possível se fazer um resgate dessa história. Por esse motivo, Pitágoras é visto por muitos como uma figura incerta na história da Matemática. Outra dificuldade sobre essa reconstituição histórica, a não possuía todo o conhecimento e todas as descobertas, as quais eram comuns, ou seja, pertenciam a todos. Em decorrência disso, ficou a dúvida se o próprio Pitágoras foi ou não o idealizador desse teorema, haja vista que nessa época era costumeiro dar todo crédito de uma descoberta ao mestre (LIMA et al, 2013).

Diante dessas considerações, o que sabemos é que o Teorema de Pitágoras é um dos mais fascinantes e importantes teoremas da Matemática de toda a humanidade. Isso fez com que esse teorema passasse a ocupar ainda hoje uma colocação especial na história do nosso conhecimento matemático. É aqui que onde se dá o pontapé inicial de toda a construção do conhecimento matemático.

A esse respeito, pesquisas desenvolvida no âmbito da História da Matemática revelam que mais de 2000 anos antes dos pitagóricos, na Babilônia, no tempo de Hamurabi (c. 1700 a.C.), provavelmente, o conhecimento de que em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos, já era um conhecimento apropriado pelos filósofos e matemáticos desse período.

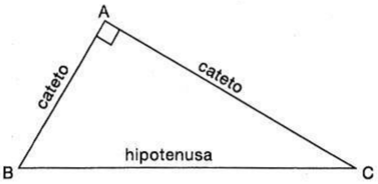
A título de ilustração, temos o mais famoso tablete de argila, o qual foi encontrado na Babilônia. Possuía sequências de números correspondentes às "ternas pitagóricas". Foi batizado como Plimpton 322, sendo empregado entre 1900 a 1600 a. C. Para nós, professores, essa história da Matemática desconstrói o entendimento de muitos professores da Educação Básica que, por desconhecerem estes fatos e por terem o livro didático como única fonte bibliográfica, ensinam aos alunos que Pitágoras foi quem postulou a famosa relação: $a^2 = b^2 + c^2$, ao tomar como parâmetro um triângulo retângulo de hipotenusa "a" e catetos "b" e "c" (COSTA; ZUIN, s/d, mímeo).

Assim, vale lembrarmos, ainda, que a partir do século 5 a.C até o século 20 d. C, inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras foram sendo estabelecidas. A exemplo disso, temos o americano Elisha Scott Loomis que chegou a publicar 370 demonstrações, valor esse que poderá ter sido ainda maior (LIMA et al, 2013).

2.3.2 Teorema de Pitágoras: definição e demonstrações

Definição 7. *Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo como mostra a Figura 12, na página seguinte. O lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa, e os outros dois lados são denominados catetos. (BARBOSA, 2012, p. 83)*

Figura 12: O triângulo retângulo



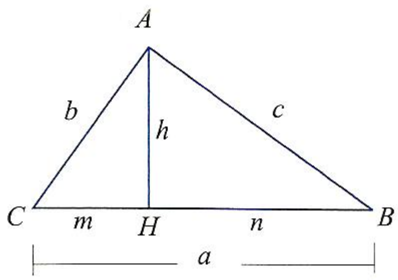
Fonte: Barbosa (2012, p. 84)

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras). *Em qualquer triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. (BARBOSA, 2012, p. 133)*

A demonstração desse teorema usando semelhança de triângulos

Considere o triângulo ABC como mostra a Figura 13, retângulo em $\hat{A}$, sendo H o pé da perpendicular a partir de A sobre o lado BC e $h = AH$ a sua altura.

Figura 13: Relações métricas num triângulo retângulo



Fonte: Lima et al (2013, p. 75)

Como $A\hat{H}B = B\hat{A}C$ e $A\hat{C}H = A\hat{C}B$, os triângulos ACH e ACB são semelhantes pelo caso AA. Assim,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$$

Ou, ainda,

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = m \cdot a$$

Como $A\hat{H}B = B\hat{A}C$ e $A\hat{B}H = A\hat{B}C$, os triângulos AHB e ABC também são semelhantes pelo caso AA. Obtemos,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$$

Ou, ainda,

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = n \cdot a$$

Agora, somando membro a membro as duas relações encontradas, temos a seguinte igualdade

$$b^2 + c^2 = m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a = a \cdot a = a^2$$

Então, esta demonstração é a mais usada nos livros didáticos da Educação Básica porque permite não só demonstrar o Teorema de Pitágoras de maneira simples permite também encontrar mais duas relações importantes no triângulo retângulo.

Assim, da semelhança dos triângulos AHC e ABC, temos que $b \cdot c = a \cdot h$ (interpretada como conceito de área),isto é, $h = \dfrac{b \cdot c}{a}$.

Multiplicando membro a membro as relações $b^2 = m \cdot a$ e $c^2 = n \cdot a$, obtemos:

$$b^2 \cdot c^2 = m \cdot n \cdot a^2, ouseja,$$

$$\left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

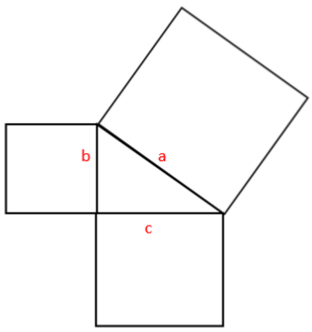
Esta última relação revela que a altura é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

A demonstração do teorema usando o cálculo de área

O enunciado do teorema de Pitágoras pode ser interpretado do seguinte modo:

Em qualquer triângulo retângulo (ver Figura 14), a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. (LIMA et al, 2013, p. 73)

Figura 14: Teorema de Pitágoras



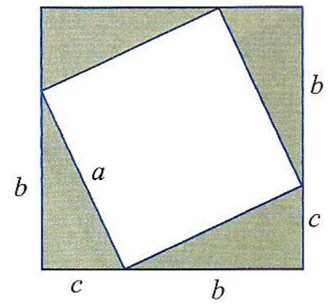
Fonte: Lima et al (2013, p. 74)

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras equivale afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Agora, vamos apresentar outra demonstração do Teorema de Pitágoras usando o conhecimento das áreas de figuras planas. Considere o quadrado da Figura 15.

Figura 15: Demonstração do teorema de Pitágoras usando cálculo de áreas



Fonte: Lima et al (2013, p. 75)

Observe na Figura 15 que temos dois quadrados justapostos, sendo que o quadrado de lado menor tem medida a e o quadrado de lado maior tem medida $b + c$. Assim, a área do quadrado de lado maior pode ser obtida de dois modos:

- somando a área do quadrado de menor lado e as áreas dos quatro triângulos retângulos de catetos medindo b e c, isto é,

$$a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$$

- elevando ao quadrado a medida de seu lado, isto é,

$$(b + c)^2$$

Dessa forma, temos que:

$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$$

Agora, desenvolvendo em ambos os membros a igualdade encontrada, temos:

$$b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 = a^2 + 2 \cdot b \cdot c$$

Finalmente, cancelando os termos semelhantes em ambos os membros, obtemos que:

$$b^2 + c^2 = a^2, \text{ou seja}, a^2 = b^2 + c^2$$

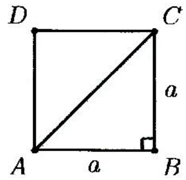
2.3.3 Aplicações do teorema de Pitágoras

Nesta subseção, apresentamos as consequências vistas como importantes do Teorema de Pitágoras com base nos conhecimentos da geometria Euclidiana plana, a saber: diagonal de um quadrado em função de seu lado, altura de um triângulo equilátero, raio do círculo circunscrito a um triângulo e distância entre dois pontos do plano.

Exemplo 3. *As diagonais de um quadrado de lado a medem $a\sqrt{2}$. (NETO, 2013, p. 153)*

Solução.
Seja $ABCD$ um quadrado de lado a e diagonais AC e BD (ver Figura 16), então o triângulo ABC é retângulo e isósceles.

Figura 16: Diagonal de um quadrado em função de seu lado



Fonte: Neto (2013, p. 153)

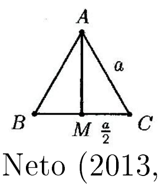
Logo, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Exemplo 4. *As alturas de um triângulo equilátero de lado a medem $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (NETO, 2013, p. 153)*

Solução.
Se ABC é um triângulo equilátero de lado a e M o ponto médio do lado BC(veja a Figura 17). Como $AM \perp BC$, pois a mediana e a altura relativa ao lado BC coincidem.

Figura 17: Alturas de um triângulo equilátero



Fonte: Neto (2013, p. 153)

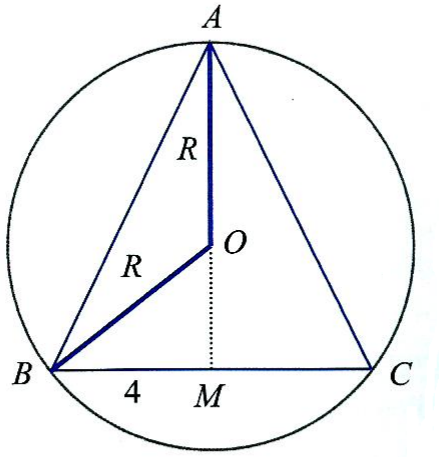
Então, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMC, encontramos:

$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo 5. *Determine o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isóscele de base* 8 *e altura* 10. *(LIMA et al, 2013, p. 81)*

Solução.
Observe a Figura 18, sendo $BC = 8$ e $AM = 10$.

Figura 18: Círculo circunscrito a um triângulo



Fonte: Lima et al (2013, p. 81)

Sendo O centro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC (ver Figura 18). Sendo AM a altura do triângulo ABC e $OA = OB = R$, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OMB, obtemos a seguinte igualdade:

$$R^2 = 4^2 + (10 - R^2)$$

Agora, desenvolvendo o 2º membro da igualdade acima, fornece:

$$R^2 = 16 + 100 - 20 \cdot R + R^2$$

Finalmente, cancelando os termos semelhantes em ambos os membros, obtemos que:

$$20 \cdot R = 116 \Rightarrow R = 5,8$$

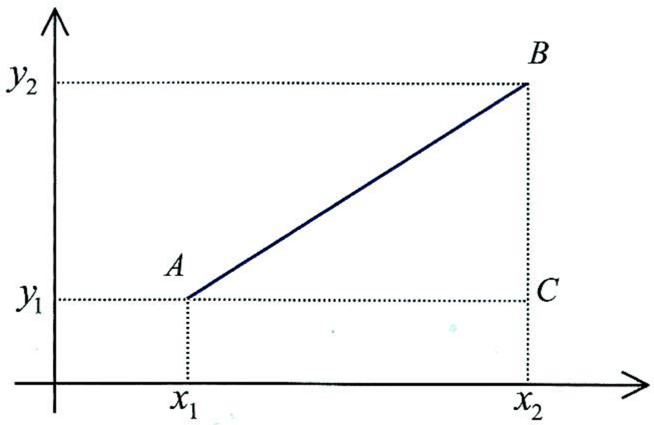
Portanto, o raio da circunferência é $5,8$.

Exemplo 6. *Em um sistema de coordenadas cartesianas com eixos perpendiculares, qual é a distância entre os pontos* $A = (x_1, y_1)$ *e* $B = (x_2, y_2)$*? (LIMA et al, 2013, p. 82)*

Solução.

Considere o triângulo ABC (cf. Figura 19), com catetos paralelos aos eixos coordenados, , temos que $AC = |x_2 - x_1|$ e $CB = |y_2 - y_1|$

Figura 19: Distância entre dois pontos do plano



Fonte: Lima et al (2013, p. 83)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, retângulo em $\hat{C}$,então a distância entre os pontos A e B é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{[d(A, C)]^2 + [d(B, C)]^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Feitas essas demonstrações e aplicações do Teorema de Pitágoras, na seção seguinte trabalharemos os conceitos trigonométricos, os quais também foram necessários para o desenvolvimento dos problemas propostos mediados pelo teodolito.

3 Trigonometria: dos aspectos históricos às aplicações das leis dos cossenos e dos senos

Nesta seção abordamos aspectos relacionados à Trigonometria. A priori, apresentamos uma contextualização histórica desse conceito, em busca de argumentos para a existência desse campo tão importante da Matemática, a qual também é aplicada em outras áreas do conhecimento humano. Em seguida, discorremos sobre a circunferência trigonométrica, as razões trigonométricas no triângulo retângulo e as relações trigonométricas em um triângulo quaisquer.

3.1 Um breve histórico da Trigonometria

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: tri = três, gonos = ângulos e metron = medida. Daí o seu significado: medidas dos triângulos, considerada importante ramo da Matemática. Inicialmente o seu objeto inicial o tradicional problema da resolução de triângulos, que consistia em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando eram conhecidos três desses elementos, em que pelo menos um deles era um lado (LIMA, 2013).

Segundo Oliveira (2016), a origem da palavra trigonometria é considerada incerta na história da matemática. No entanto, podemos afirmar que o surgimento do desenvolvimento desse campo da Matemática se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Navegação Marítima, Agrimensura e Astronomia. Foi no Egito e na Babilônia que os povos dessas regiões deram relevantes contribuições para a descoberta e progresso dessa área da Matemática tão importante à época, bem como nos dias atuais. Sobre essas afirmações, Garbi (2009, p. 11), assim complementa:

> Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje, talvez os mais famosos sejam os chamados Papiro de Ahmes (ou de Rhind) e Papiro de Moscou. O de Ahmes (ou Amose) é um longo papiro egípcio, de cerca de 1650 a. C.

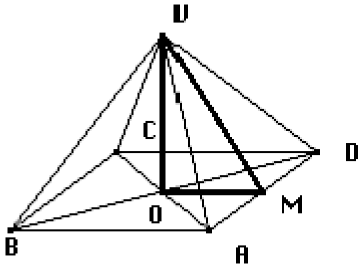
Assim, no Papiro Rhind (cf. Figura 20, na próxima página), importante documento egípcio da Matemática que contém 84 problemas, dos quais quatro menciona o seqt de um ângulo. O seqt do ângulo $O\hat{M}V$ (cf. Figura 21) é o quociente entre OM e OV. Portanto, temos que seqt de um ângulo corresponde a ideia atual de cotangente (DOMINGUES, 2004). Na tábula cuneiforme (ver Figura 20), conhecida como Plimpton 322, tábula babilônica escrita no período babilônico antigo entre 1900 a 1600 a.C, foram encontrados problemas envolvendo o conhecimento atual de secantes (BRASIL/CLUBES DA MATEMÁTICA DA OBMEP, 2018).

Figura 20: Papiro Rhind (esq.) e Plimpton (dir.)

Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP (2018, p. 2)

Exemplo 7. *Seja* $OV = 40$ *e* $OM = 80$*, então o seqt* $= \dfrac{80}{40} = 2.$

Figura 21: O seqt de um ângulo no Egito



Fonte: Iezzi (2004, p. 36)

Ainda sobre os aspectos históricos da Trigonometria, a principal aplicação da Trigonometria se deu na Astronomia. Isso pode ser comprovado nas palavras de Eves (2004, p. 202):

> Os astrônomos babilônicos do século IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica.

E, sobre essa afirmação, Ávila (2010, p. 118), complementa:

> Um dos maiores astrônomos da Antiguidade foi Hiparco (190-120 a.C.), que era natural do Rodes. Até sua época os astrônomos só usavam em seus trabalhos recursos numéricos e métodos geométricos. Com Hiparco tem início a Trigonometria, que seria um novo e poderoso recurso da Astronomia, sobretudo, a chamada Trigonometria esférica.

Dessa forma, trazendo as contribuições desses autores, fica evidenciado que, Hiparco de Nicéia, astrônomo do século II a.C e um dos mais importante da antiguidade, por volta de 190 a 120 a.C, foi considerado o fundador da Trigonometria, onde ganhou o direito de ser chamado de "o pai da Trigonometria", pois pela metade do século II a.C, surge com um tratado em doze livros no qual se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, inserindo uma tábua de cordas. As principais contribuições de Hiparco à Astronomia foram a elaboração de um catálogo estrelar, a medida da duração do ano com grande exatidão e o cálculo do ângulo de inclinação eclíptica.

Na época atual, a trigonometria não se limita a estudar apenas os triângulos, encontramos suas aplicações em áreas de atividades como Engenharia Civil, Astronomia, Eletricidade, Topografia, Acústica e em bastante outras áreas de atividades, aplicações estas envolvidas em conceitos que raramente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

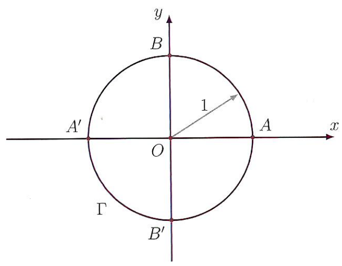
3.2 Circunferência trigonométrica

Nesta subseção, tratamos do conceito de ciclo trigonométrico, com destaque as medidas de arcos em graus ou radianos; seno e cosseno de um arco; a relação fundamental da trigonometria; as funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente; seno, cosseno e tangente de ângulos complementares e seno e cosseno de ângulos suplementaes.

3.2.1 Arcos trigonométricos

No plano Cartesiano, o ciclo trigonométrico é o círculo Γ (cf. Figura 22), centrado na origem $O(0,0)$, com raio 1 e comprimento 2π. (NETO, 2013, p. 242)

Figura 22: O ciclo trigonométrico



Fonte: Neto (2013, p. 242)

Dado um número real c, medimos sobre Γ, a partir de A, um arco de comprimento $|c|$. Sendo P a extremidade final desse arco, diremos que o arco AP (de comprimento supostamente maior que 2π) mede c radianos, temos:

a) se $c = 0$, então P coincide com o ponto $A(1,0)$ que é a origem de todo os arcos a serem medidos na circunferência

b) se $c > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento c, no sentido anti - horário.

c) se $c < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento c, no sentido horário.

Nesse contexto, convencionamos sobre Γ que o sentido trigonométrico (de percurso) é o sentido anti-horário (positivo). Desta maneira, o arco de 2π radianos sobre Γ é o arco que da uma volta completa em Γ no sentido trigonométrico, retornando ao ponto A. No entanto, o arco de -2π radianos sobre Γ é o arco que da uma volta completa em Γ no sentido horário, retornando ao ponto A. Desta forma, temos as seguintes correspondências fundamentais:

a) 2π radianos correspondem a $360°$ medidos no sentido anti-horário a partir de A.

b) -2π radianos correspondem a $360°$ medidos no sentido horário a partir de A.

Em geral, sendo θ a medida em graus e c a medida em radianos de um mesmo arco, com c > 0. Daí segue que:

$$\frac{\theta}{360°} = \frac{c}{2\pi}, \text{ou seja}, \frac{\theta}{180°} = \frac{c}{\pi}$$

Exemplo 8. *Calcule em radianos os seguintes arcos, dados em graus: 30°, 60°, 90°, 150°, 270° e 300°. (NETO, 2013, p. 245)*

Solução.

Aplicando a fórmula acima aos ângulos dados em graus, obtemos os valores correspondentes em radianos. Temos:

a) $\dfrac{30°}{180°} = \dfrac{c}{\pi} \Rightarrow c = \dfrac{30°\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

b) $\dfrac{60°}{180°} = \dfrac{c}{\pi} \Rightarrow c = \dfrac{60°\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

c) $\dfrac{90°}{180°} = \dfrac{c}{\pi} \Rightarrow c = \dfrac{90°\pi}{180°} = \dfrac{\pi}{2}$ rad.

d) $\dfrac{150°}{180°} = \dfrac{c}{\pi} \Rightarrow c = \dfrac{150°\pi}{180°} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad.

e) $\dfrac{270°}{180°} = \dfrac{c}{\pi} \Rightarrow c = \dfrac{270°\pi}{180°} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad.

f) $\dfrac{300°}{180°} = \dfrac{c}{\pi} \Rightarrow c = \dfrac{300°\pi}{180°} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad.

Exemplo 9. *Calcule em graus os seguintes arcos, dados em radianos* $\pi/9$, $7\pi/2$, 18π *e* $11\pi/5$. *(NETO, 2013, p. 245)*

Solução.

Aplicando a fórmula acima aos arcos dados em radianos, obtemos os valores correspondentes em graus. Temos:

a) $\dfrac{\theta}{180°} = \dfrac{\pi/9}{\pi} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi/9.180°}{\pi} = 20°$

b) $\dfrac{\theta}{180°} = \dfrac{7\pi/2}{\pi} \Rightarrow \theta = \dfrac{7\pi/2.180°}{\pi} = 630°$

c) $\dfrac{\theta}{180°} = \dfrac{18\pi}{\pi} \Rightarrow \theta = \dfrac{18\pi.180°}{\pi} = 3240°$

d) $\dfrac{\theta}{180°} = \dfrac{11\pi/5}{\pi} \Rightarrow \theta = \dfrac{11\pi/5.180°}{\pi} = 396°$

Exemplo 10. *Marque sobre o ciclo trigonométrico as extremidades finais dos arcos de $2\pi/3$, $-2\pi/3$, π e $\pi/4$ radianos. (NETO, 2013, p. 245)*

Solução.

a) Se θ é a medida em graus do arco AP de $2\pi/3$ radianos, temos que:

$$\frac{c}{180°} = \frac{2\pi/3}{\pi}$$

e, daí, obtemos $\theta = 120°$. Em seguida, marcamos o ponto P (cf. Figura 23).

b) O arco de $-2\pi/3$ radianos é o arco de $2\pi/3$ radianos, medido a partir de A no sentindo horário(negativo). Então, marcamos o ponto P' simétrico de P em relação ao eixo das abcissas na Figura 23 mencionada anteriormente.

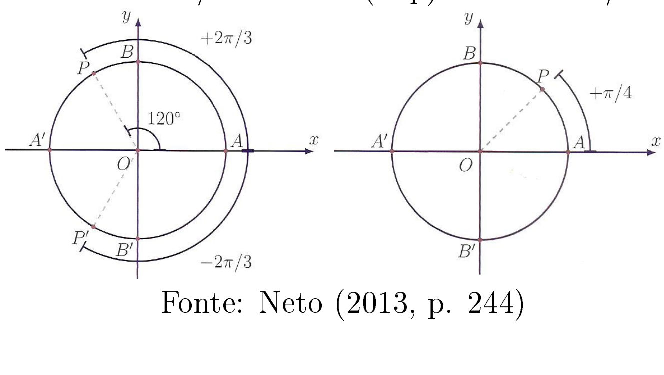
c) Note que π é a metade de 2π, então o arco de π (veja a Figura 23) é arco $\widehat{AA'}$, medido no sentido anti-horário .

d) Sendo θ a medida em graus correspondente ao arco de $\pi/4$ radianos, tem-se que:

$$\frac{c}{180°} = \frac{\pi/4}{\pi}$$

segue-se que $\theta = 45°$. Daí, marcamos o ponto P na Figura 23.

Figura 23: Arcos de $\pm 2\pi/3$ radianos (esq.) e arco de $\pi/4$ radianos(dir.)

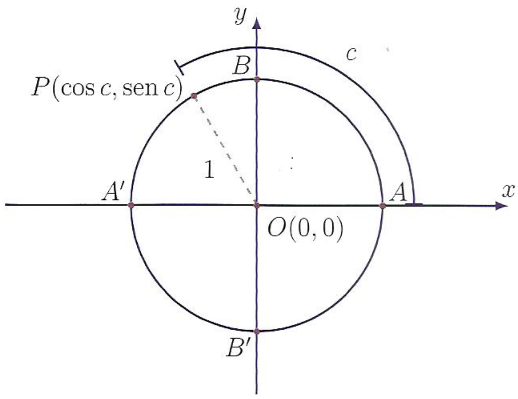


Fonte: Neto (2013, p. 244)

Definição 8. *Para $c \in \mathbb{R}$, definimos o seno e o cosseno de c (radianos), abreviados respectivamente* $\operatorname{sen} c$ *e* $\cos c$*, por: (NETO, 2013, p. 245)*

$$\cos c = \text{abscissa de } P; \ \operatorname{sen} c = \text{ordenada de } P.$$

Figura 24: Seno e cosseno de um arco



Fonte: Neto (2013, p. 246)

Observe que a maior abscissa de um ponto na Figura 24 é a do ponto $A(1,0)$, igual a 1; a menor abcissa é a do ponto $A'(-1,0)$. Por analogia, a maior ordenada de um ponto na figura anterior é a do ponto $B(0,1)$, igual a 1; a menor ordenada é a do ponto $B'(0,-1)$. Assim sendo,

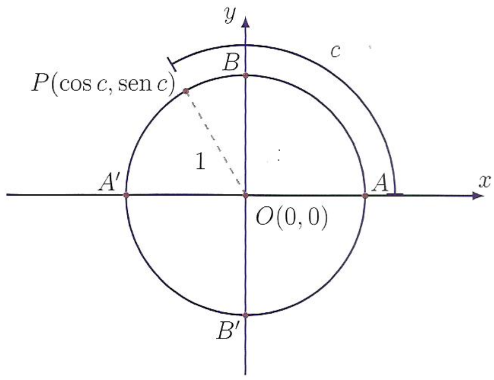
$$\begin{cases} -1 \leq senc \leq 1 \\ -1 \leq \cos c \leq 1 \end{cases}.$$

Reciprocamente, escolhido um número real $\alpha \in [-1,1]$, a reta paralela ao eixo das abcissas tracejada pelo ponto $(0,\alpha)$ cruza o ciclo trigonométrico da Figura 24 em pelos um ponto P; sendo $P(\cos c, \operatorname{sen} c)$, é direto que $\operatorname{sen} c = \alpha$. Então, todo número real no intervalo $[-1,1]$ é o seno (e, analogamente, o cosseno) de algum arco.

Em seguida, mostraremos a demonstração da relação fundamental da trigonometria utilizando a fórmula da distância entre dois pontos no plano de maneira diferente que os livros didáticos abordam na Educação Básica.

Proposição 4 (Relação fundamental da Trigonometria). *Qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, tem-se: (NETO, 2013, p. 247)*

Figura 25: A relação fundamental da trigonometria



Fonte: Neto (2013, p. 247)

$$\operatorname{sen}^2 c + \cos^2 c = 1$$

Demonstração.

Sendo o arco $\widehat{AP} = c$ (ver Figura 25). Como $O(0,0)$ e $P(cosc, senc)$. Em seguida, aplicamos à fórmula da distância entre dois pontos no plano (demonstrada no exemplo 6 da subseção 2.3.3) e que $OP = 1$. Daí, temos que:

$$d(O,P) = 1$$

$$\sqrt{(\cos c - 0)^2 + (senc - 0)^2} = 1$$

Em seguida, elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$sen^2 c + \cos^2 c = 1$$

Exemplo 11. *Se* $\operatorname{sen} x + \cos x = 1,2$*, qual é o valor do produto* $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$*? (LIMA, 2013, p. 207)*

Solução.

Elevando ambos os membros ao quadrado da igualdade $\operatorname{sen} x + \cos x = 1,2$, temos:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x = 1,2)^2 = (1,2)^2$$

$$\operatorname{sen} x^2 + 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos x^2 = 1,44$$

Daí, pela relação fundamental da trigonometria, segue que

$$1 + 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1,44$$

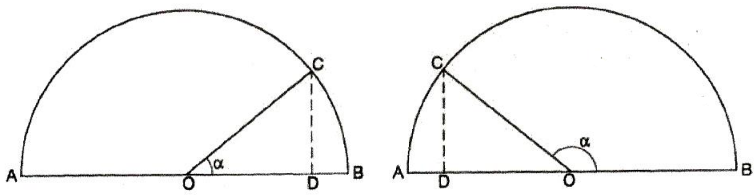
$$2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0,44$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0,22$$

3.2.2 Funções trigonométricas

Nesta subseção abordamos as definições das funções seno, cosseno e tangente de um ângulo α qualquer. Por esse motivo, devemos considerar um círculo de centro O e diâmetro AB, e para aprimorar o entendimento dessas definições, observamos apenas um dos círculos (cf. Figura 26), e denominando o ângulo $B\hat{O}C$ por α e D o pé da perpendicular baixada a partir de C sobre o diâmetro AB.

Figura 26: Definições das funções seno, cosseno e tangente



Fonte: Barbosa (2012, p. 181)

Definição 9. *Define-se o seno do ângulo α,e representado por senα, como o quociente $\frac{CD}{OC}$. Por isso, de acordo com a definição têm-se: (note que OC é o raio círculo, conforme a Figura 26) (BARBOSA, 2012, p. 182)*

$$\operatorname{sen} 0° = 0,\ \operatorname{sen} 90° = 1 \text{ e } \operatorname{sen} 180° = 0.$$

Definição 10. *Se o ângulo α é agudo, define-se o cosseno do ângulo α ao quociente $\frac{OD}{OC}$. Se o ângulo α é obtuso,o cosseno é definido pelo valor negativo desse quociente, ou seja, $\frac{-OD}{OC}$. O cosseno do ângulo α é representado por $\cos\alpha$. Portanto, de acordo com essa definição tem-se que: (BARBOSA, 2012, p. 182)*

$$\cos 0° = 1,\ \cos 90° = 0 \text{ e } \cos 180° = -1.$$

Definição 11. *Define-se de tangente do ângulo α, representa por $\operatorname{tg}\alpha$, ao quociente (BARBOSA, 2012, p. 182)*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Observe que a $\operatorname{tg} 90°$ não é definida, pois $\cos 90° = 0$.

Teorema 2 (Seno, cosseno e tangente de ângulos complementares). *Se o ângulo α é agudo, então: (BARBOSA, 2012, p. 183)*

a) $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos \alpha$

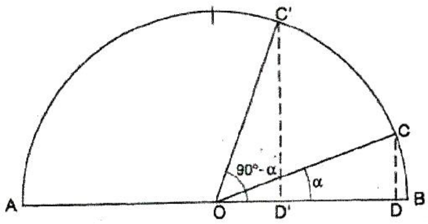
b) $\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

c) $tg(90° - \alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Demonstração.

Consideremos os pontos C e C' em um semicírculo de extremidades A e B, centro O e diâmetro AB (veja Figura 27), tal que $C\hat{O}B = \alpha$ e $C'\hat{O}B = 90° - \alpha$.

Figura 27: Seno e cosseno de arcos complementares



Fonte: Barbosa (2012, p. 184)

Sendo D e D' os pés das perpendiculares baixadas a partir de C e C' do semicírculo sobre o diâmetro AB, respectivamente. Note que o ângulo $C'\hat{O}B = 90° - \alpha$, então $O\hat{C'}D' = \alpha$. Portanto, os triângulos COD e $OC'D'$ são congruentes pelo caso LAA_o. Nesse contexto, será importante observar que triângulos congruentes são obrigatoriamente triângulos semelhantes, porém a sua reciproca nem sempre é verdadeira. Daí, segue-se que:

$$\frac{C'D'}{OD} = \frac{OD'}{CD} = \frac{OC'}{OC}$$

Portanto,

$$sen(90° - \alpha) = \frac{C'D'}{OC'} = \frac{OD}{OC} = \cos \alpha$$

$$cos(90° - \alpha) = \frac{OD'}{OC'} = \frac{CD}{OC} = \operatorname{sen} \alpha$$

Portanto, pela definição dada acima de tangente de um ângulo qualquer, temos que:

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Teorema 3 (Seno e cosseno de ângulos suplementares). *Para todo ângulo α, tem-se: (BARBOSA, 2012, p. 184)*

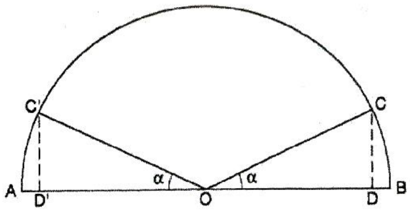
a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

b) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Demonstração.

Sendo α igual a 0°, 90° ou 180°, a prova do teorema é imediata pela substituição direta dos valores adequados do seno e cosseno. Para os outros casos, consideremos os pontos C e C' do semicírculo de diâmetro AB e centro O (ver figura 28), tal que $C\hat{O}B = \alpha$ e $C'\hat{O}B = 180° - \alpha$. Sejam D e D' os respectivos pés das perpendiculares baixadas à reta AB a partir de C e C'.

Figura 28: Seno e cosseno de arcos suplementares



Fonte: Barbosa (2012, p. 185)

Pelo caso de congruência LAA_o, os triângulos OCD e $OC'D'$ são congruentes , consequentemente os ângulos $O\hat{C}D$ e $O\hat{C}'D'$ são congruentes e

$$CD = C'D' \text{ e } OD = OD'$$

Pela definição das funções seno e cosseno de ângulos agudos e obtusos vistas na subseção 3.2.2, temos que:

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \frac{C'D'}{OC'} = \frac{CD}{OC} = \operatorname{sen}\alpha$$

e

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{OD'}{C'D} = \frac{-OD}{OC} = -\cos\alpha$$

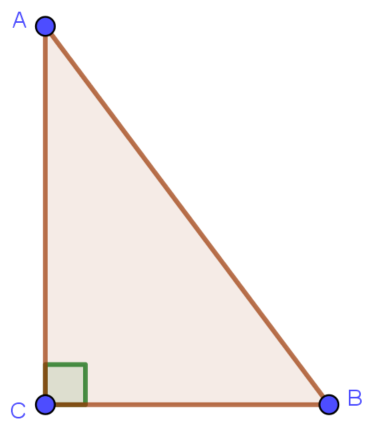
3.3 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

É importante observarmos que as definições seno, cosseno e tangente de um ângulo dadas no início da subseção 3.2.2 permitem deduzir de imediato as seguintes relações entre os lados de um triângulo retângulo e os seus ângulos agudos.

Definição 12. *Em um triângulo retângulo ABC (veja Figura 29),de hipotenusa AB, de ângulo reto $\hat{C}$ e ângulos agudos $\hat{A}$, $\hat{B}$, opostos respectivamente aos catetos BC e AC, têm-se as definições:(LIMA, 2013, p. 186)*

- $\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{AC}{AB} =$ (cateto oposto) $\div$ (hipotenusa)
- $\cos \hat{B} = \dfrac{BC}{AB} =$ (cateto adjacente) $\div$ (hipotenusa)
- $\operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{AC}{BC} =$ (cateto oposto) $\div$ (adjacente)

Figura 29: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Próprio autor (2018).

Observe que as relações de seno e cosseno encontradas nesta subseção são aplicações da definição dessas funções vistas na subseção 3.2.2, basta considerar o raio do semicírculo como sendo a hipotenusa AB do triângulo.

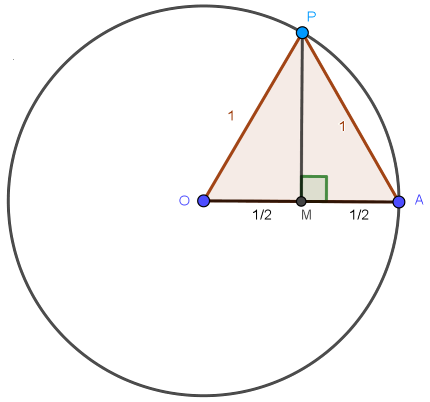
De acordo com as razões trigonométricas acima, determinaremos o seno, cosseno e tangente dos ângulos de medidas 30°, 45°e 60°, pela facilidade das demonstrações.

Exemplo 12. *Calcular o seno, o cosseno e a tangente de $\dfrac{\pi}{3}$ radianos (equivalente a 60°). (NETO, 2013, p. 245)*

Solução.

Consideremos o ciclo trigonométrico ilustrado na Figura 30, de cento O e raio igual a 1.

Figura 30: Seno, cosseno e tangente de $\pi/3$



Fonte: Próprio autor (2018).

Para isso, marcamos no ciclo trigonométrico o ponto P cujo arco $\widehat{AP} = 60°$ (conforme Figura 30). Note que o triângulo OAP é isósceles de base AP e ângulo $A\hat{O}P = 60°$, portanto equilátero. Sendo M o ponto médio de AO e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP, de ângulo reto em $\hat{M}$, obtemos:

$$PM = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo retângulo OMP de ângulo reto $\hat{M}$,temos que:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{MP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{OM}{OP} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{MP}{OM} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Exemplo 13. *Calcular o seno, o cosseno e a tangente de* $\frac{\pi}{6}$ *radianos (equivalente a 30°). (NETO, 2013, p. 245)*

Solução.

Consideremos o ciclo trigonométrico do exemplo anterior. Como o triângulo OAP é equilátero, temos que a mediana coincide com a altura e a bissetriz desse triângulo.

Por outro lado, o ângulo $O\hat{P}M = 30°$ e os ângulos $A\hat{O}P$ e $O\hat{P}M$ são complementares e, pelo teorema 2(seno e cosseno de ângulos complementares), obtemos:

$$\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

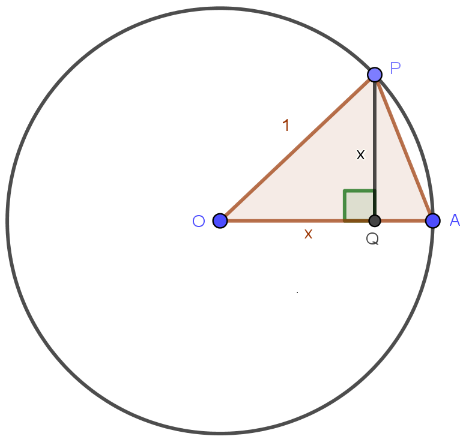
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 14. *Calcular o seno, o cosseno e a tangente de $\frac{\pi}{4}$ radianos (equivalente a 45°). (NETO, 2013, p. 245)*

Solução.

Consideremos o ciclo trigonométrico de centro O e raio igual a 1, conforme a Figura 31.

Figura 31: Seno, cosseno e tangente de $\pi/4$



Fonte: Próprio autor (2018)

Para tanto, marcamos sobre o ciclo trigonométrico o ponto P tal que o arco $\widehat{AP} = 45°$. Como o ângulo $P\hat{O}Q = 45°$, temos que o triângulo POQ é isósceles de base OP. Por outro lado, Q é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o raio OA. Pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo POQ, temos:

$$x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow 2 \cdot x^2 = 1 \Rightarrow x = 1/\sqrt{2}$$

Novamente, pela definições de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo OQP, obtemos que:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{PQ}{OP} = \frac{1/\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OQ}{OP} = \frac{1/\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg 45^\circ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = 1$$

Com base nas definições de seno, cosseno e tangente dadas no início dessa subseção, permite a obtenção do Quadro 1 dos valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis de 30°, 45° e 60°.

Quadro 1: Valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Ângulo	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

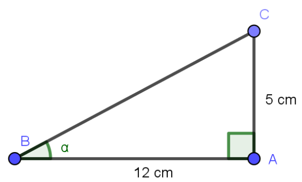
Fonte: Iezzi (2004, p. 18).

Exemplo 15. *Os catetos de um triângulo retângulo medem* 5*cm e* 12*cm. Qual o valor do seno, cosseno e tangente de seu menor ângulo agudo? (Barbosa, 2010, p. 193)*

Solução.

Para resolver lembramos que o menor ângulo do triângulo é oposto ao menor lado. Então, o seno e cosseno do ângulo α que desejamos calcular é oposto ao lado que mede 5 cm. Em seguida, consideremos o triângulo da Figura 32.

Figura 32: O triângulo retângulo ABC



Fonte: Próprio autor (2018)

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:

$$BC = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Por outro lado, temos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{5}{12}$$

3.4 Relações trigonométricas em um triângulo quaisquer

Nesta subseção, apresentamos a Trigonometria como possibilidade de determinar elementos (lados e ângulos) não dados em um triângulo. Desse modo, no cálculo de resoluções em um triângulo qualquer, nos basearemos em relações existentes entre os elementos do triângulo que são conhecidas como Lei dos Cossenos e Lei dos Senos, como veremos a seguir.

3.4.1 A lei dos Cossenos

A Lei dos cossenos é uma relação que envolve os três lados de um triângulo qualquer e o cosseno de um dos ângulos. Em seguida, faremos a sua demonstração.

Proposição 5. ***(Lei dos cossenos).*** *Se ABC é um triângulo qualquer de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, então (NETO, 2013, p. 267)*

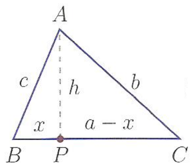
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}.$$

Demonstração.

Seja P o pé da perpendicular baixada do vértice A sobre o lado BC e $h = AP$ sua altura. Consideremos separadamente os casos $\hat{A} < 90°$, $\hat{A} = 90°$ e $\hat{A} > 90°$, como mostram as Figuras 33 e 34, na página seguinte), de acordo com o ponto P que pertence ao segmento BC ou esteja sobre o seu prolongamento, temos:

1º **caso**: $\hat{B} < 90°$

Figura 33: A lei dos cossenos: o caso $\hat{B} < 90°$



Fonte: Lima (2013, p. 203)

Como $\hat{B} < 90°$ (conforme Figura 33) então P está sobre o lado BC. Sendo $BP = x$, temos que $PC = |a - x|$. Em seguida, aplicando as definições de seno e cosseno no triângulo APB, retângulo em P, têm as seguintes as relações:

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos \hat{B}$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo APC, obtemos que:

$$b^2 = h^2 + |a - x|^2$$

$$b^2 = h^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + x^2$$

$$b^2 = (c \cdot \operatorname{sen} \hat{B})^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} + (c \cdot \cos \hat{B})^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 \cdot (\operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B}) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

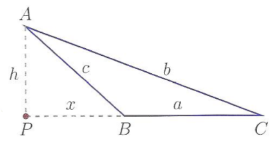
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B},$$

onde, na última igualdade, usamos a relação fundamental da trigonometria.
2º **caso**: $\hat{B} = 90°$
Neste caso, $\cos \hat{B} = 0$ e segue do teorema de Pitágoras que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} = a^2 + c^2$$

3º **caso**: $\hat{B} > 90°$

Figura 34: A lei dos cossenos: o caso $\cos \hat{B} > 90°$



Fonte: Lima (2013, p. 203)

Neste caso (cf. Figura 34, na página anterior), pelo prolongamento do lado BC até P (pé da altura relativa a BC). Observe que $A\hat{B}P = 180° - \hat{B}$. No entanto, temos que $\cos(180° - \hat{B}) = -\cos\hat{B}$ e $\operatorname{sen}(180° - \hat{B}) = \operatorname{sen}\hat{B}$. No triângulo APB, retângulo em P, têm-se que:

$$\operatorname{sen}(180° - \hat{B}) = h/c \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen}(180° - \hat{B}) = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \qquad (1)$$

$$\cos(180° - \hat{B}) = x/c \Rightarrow x = c \cdot \cos(180° - \hat{B}) = -c \cdot \cos\hat{B} \qquad (2)$$

Por outro lado, o teorema de Pitágoras aplicado no triângulo APC, retângulo em P, obtemos:

$$b^2 = h^2 + (a+x)^2$$
$$b^2 = h^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2 \qquad (3)$$

Em seguida, substituímos as equações (1) e (2) em (3). Daí, segue-se que:

$$b^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$$

$$b^2 = (c \cdot \operatorname{sen}\hat{B})^2 + a^2 + 2a.(-c \cdot \cos\hat{B}) + (-c \cdot \cos\hat{B})^2$$
$$b^2 = c^2 \operatorname{sen}^2\hat{B} + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B} + c^2\cos^2\hat{B}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 \cdot (\operatorname{sen}^2\hat{B} + \cos^2\hat{B}) - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$$

Portanto, a igualdade vale para todo caso. Ela é a lei dos cossenos, obviamente, têm-se também

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c\cos\hat{A}$$

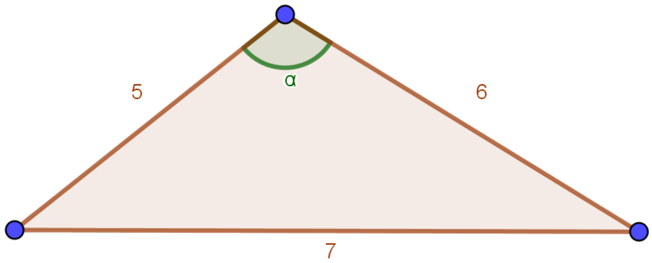
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b\cos\hat{C}$$

Exemplo 16. *Determine o maior ângulo do triângulo cujos lados medem* 5, 6 *e* 7. *(WAGNER, PROFMAT-MA13)*

Solução.

Para resolver lembramos que o maior ângulo do triângulo é oposto ao maior lado. Então, o ângulo α que desejamos calcular é oposto ao lado que mede 7.

Figura 35: Triângulo qualquer ABC



Fonte: Próprio autor (2018)

Aplicando a lei dos cossenos para o ângulo α no triângulo ABC ilustrado na Figura 35, temos:

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$$

$$49 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos\alpha$$

$$60 \cdot \cos\alpha = 61 - 49$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{60}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{5}$$

Portanto, $\alpha = \arccos\dfrac{1}{5}$ e com uma calculadora científica $\alpha \cong 78,5°$.

3.4.2 A lei dos Senos

Conforme Wagner (2017), a Lei dos senos resolverá, em especial, o caso de obter outros elementos de um triângulo no qual os ângulos são conhecidos e somente um lado é conhecido. A Lei dos Senos possui na verdade forte relação com a circunferência circunscrita ao triângulo, como mostraremos a seguir.

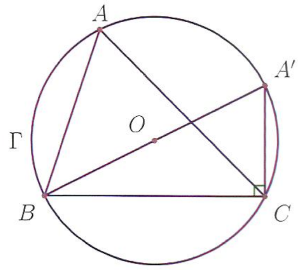
Proposição 6. ***(Lei dos senos)*** *Se R é o raio do círculo circunscrito a um triângulo qualquer de lados a, b e c, então (NETO, 2013, p. 271)*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2 \cdot R.$$

Demonstração.

A Figura 36 ilustrada, mostra o triângulo ABC, com os lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, inscrito em uma circunferência de raio R.

Figura 36: A lei dos senos



Fonte: Neto (2013, p. 271)

O ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo será indicado por $\hat{A}$. Traçaremos o diâmetro BA' do círculo. Assim, o ângulo $B\hat{C}A' = 90°$ e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}'C$ são congruentes, pois subtendem o mesmo arco$\widehat{BC}$. Assim, no triângulo $A'BC$, retângulo em $\hat{C}$ e tal que $B\hat{A}'C = \hat{A}'$ e $B\hat{A}C = \hat{A}$, têm-se que:

$$\operatorname{sen}\hat{A}' = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R}. \text{ Então, } \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R}, \text{ isto é, } \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2 \cdot R$$

Essa relação mostra que o quociente entre um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro do círculo circunscrito e, consequentemente, a relação vale para todo que seja o lado escolhido.

Portanto, a Lei dos Senos no triângulo ABC é dada por:

$$\operatorname{sen}\hat{A}' = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R}. \text{ Então, } \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R}, \text{ isto é, } \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2 \cdot R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

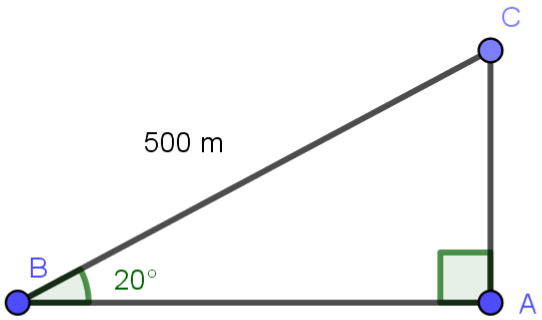
Enfim, a Lei dos Senos permite um caminho prático para determinar o raio do círculo circunscrito a um triângulo.

Exemplo 17. *Um carro percorreu 500 metros de uma estrada inclinada 20° em aclive. Quantos metros o ponto de chegada está acima do ponto de partida? (BARBOSA, 2012, p. 195)*

Solução.

Seja ABC um triângulo retângulo em $\hat{A}$ (conforme a Figura 37. na página seguinte), de lados AB e AC, respectivamente, opostos aos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Figura 37: A lei dos senos no triângulo retângulo



Fonte: Próprio autor (2018).

Pela lei dos Senos aplicada ao triângulo ABC, temos:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{500}{\operatorname{sen} 90^\circ}$$

Então, da igualdade acima, segue que:

$$BC = 500.\operatorname{sen} 20^\circ \cong 171,01\, metros$$

Na seção seguinte, apresentaremos o teodolito, fazendo uma contextualização de sua gênese à possibilidade desse recurso medeiar a apropriação de conceitos trigonométricos na Educação Básica.

4 O teodolito: de sua gênese à sua possibilidade de medeiar a apropriação de conceitos trigonométricos na Educação Básica

Nesta seção, primeiramente contextualizamos um pouco da história do teodolito e da trena. Em seguida, explicamos como se dá a construção dessa ferramenta usando materiais concretos (pote, transferidor, cola, canudo, etc.) e o aplicativo *Theodolite* (celular, cabo de vassoura, chapa fina de madeira, caneta esferográfica). Por último, aplicamos conceitos de Trigonometria tendo o teodolito como recurso mediador.

4.1 Um breve histórico do teodolito e da trena

Ao longo dos últimos séculos foram construídos e empregados pelos homens artefatos para levantamento e controle de medidas. Como exemplo, podemos destacar que, por volta do ano 3.000 a. C., os babilônios e os egípcios utilizavam a corda como aparelho para auferir distâncias. Contudo, em 1835 surge o primeiro teodolito, construído por Jonathan Sisson, em que empregou quatro parafusos niveladores (DOPP, 2013).

No entanto, o aperfeiçoamento dessa invenção do teodolito se deu a partir da criação do taquímetro autorredutor por Ignacio Porro, utensílio esse que apresentava os mesmos componentes do teodolito, mas com um aparelho ótico. Dessa forma, Ignacio Porro contribuiu para o aperfeiçoamento do teodolito, cujo princípio de funcionamento já era reconhecido há muito tempo (DOPP, 2013).

Assim, no decorrer dos anos, o teodolito foi sendo modificado cada vez mais e a ele adicionado sistemas e mecanismos que possibilitaram o aumento da precisão em suas medições. Na verdade, o teodolito é um instrumento óptico empregado na Topografia e na Agrimensura para engendrar medidas de ângulos verticais e horizontais, empregado em redes de triangulação. Essencialmente, é um telescópio com movimentos nivelados na vertical e na horizontal, montado sobre um tripé, sendo possível possuir ou não uma bússola incorporada, como podemos observar na Figura 38, na página seguinte.

Figura 38: Desenvolvimento do teodolito

Fonte: Wagner (2017, p. 32).

Desde a antiguidade até a época atual, a humanidade sempre teve a dificuldade de calcular distâncias inacessíveis. Nesse contexto, na prática existem poucas distâncias que podem ser medidas em linha reta com a utilização de uma trena (ver Figura 39). De fato, no universo em que habitamos quase tudo que precisamos saber sobre distâncias é calculado com a contribuição da trigonometria.

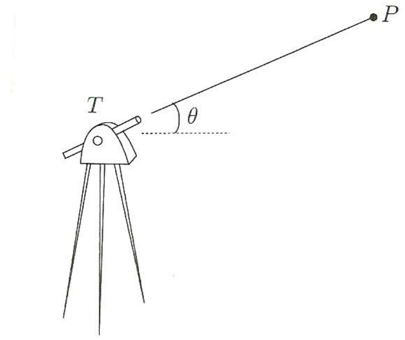
Figura 39: Desenvolvimento da trena

Fonte: Arquivo pessoal do autor (2018).

É oportuno lembrarmos que, para se calcular uma distância inacessível precisaremos de uma trena, isto é, uma fita métrica extensa que possa medir distâncias relativamente pequenas no plano horizontal e de um teodolito, ou seja, instrumento que mede ângulos, tanto no plano horizontal como no plano vertical. Dessa forma, nos referimos a uma luneta, montada em um tripé que produz os seguintes dados:

a) Se o observador T observa um objeto P, ele pode determinar o ângulo que o plano horizontal faz com a reta TP (veja Figura 40);

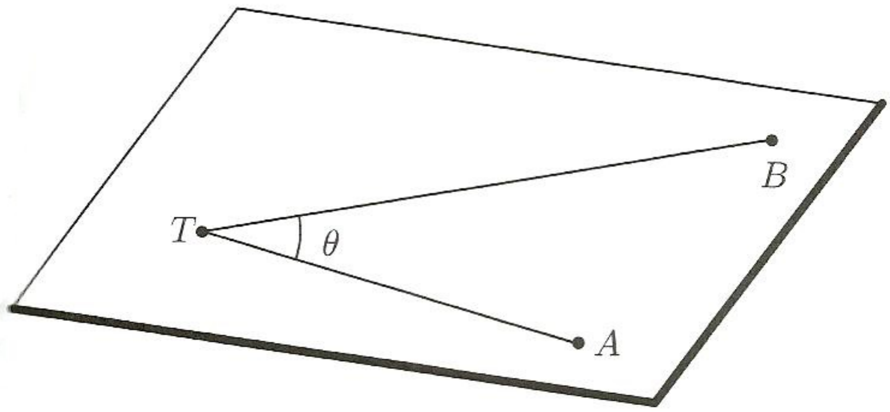
Figura 40: Medição do ângulo θ entre o plano horizontal e a reta TP



Fonte: Lima et al (2012, p. 69)

b) Se o observador T observa um objeto A e girando a luneta no sentido anti-horário observa um objeto B, ambos no plano horizontal, ele pode indicar o ângulo ATB (como mostrado na Figura 41).

Figura 41: Medição do ângulo θ entre os objetos A e B no plano horizontal



Fonte: Lima et al (2012, p. 69)

Portanto, a trena e o teodolito são instrumentos correspondentes à régua graduada e ao transferidor sempre que trabalhamos no papel. Dessa maneira, a trena atual e da antiguidade diferem somente do material em que foram fabricadas, porém, basicamente, são os mesmos instrumentos. No entanto, o teodolito atual é bastante mais sofisticado que o modelo antigo. Nesse contexto está a diferença, pois na época atual podemos medir ângulos com uma precisão extremamente maior que na antiguidade.

4.2 Construção de um teodolito usando materiais concretos

Nesta subseção, descrevemos as etapas para construção de um teodolito de material reciclado para calcular distâncias inacessíveis. Para isso, após a construção desse instrumento haverá a necessidade de medirmos ângulos nos planos horizontal e vertical e, com o auxilio dos conhecimentos de Trigonometria será possível determinarmos distâncias inacessíveis.

Isto posto, para a construção de um teodolito usando materiais concretos de baixo custo serão necessários os recursos: pote ou copo de plástico com tampa, uma cópia xerográfica do transferidor de 360°, um pedaço de papelão grosso ou outro material resistente, 15 cm de arame, um canudo resistente, cola, uma fita adesiva e uma tesoura.

Para tanto, as seguintes etapas deverão ser seguidas:

1ª etapa: Com o arame, perfure e trespasse o pote, junto à sua borda e de forma que o arame passe pelo centro da abertura do pote;

2ª etapa: Tampe o pote e usando a fita adesiva, prenda o canudo paralelamente ao arame, na outra extremidade da tampa, pois o canudo será a mira do teodolito;

3ª etapa: Recorte e cole a cópia xerográfica do transferidor no papelão;

4ª etapa: Com o pote fechado, firme a tampa no centro do transferidor, permitindo a rotação do instrumento.

Por tanto, o instrumento a ser construído deverá ser semelhante ao da Figura 42.

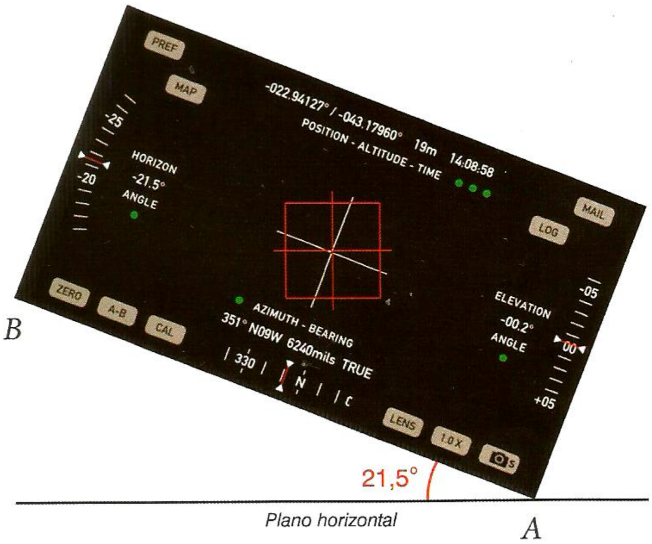
Figura 42: Teodolito caseiro construído pelos alunos orientados pelo professor.

Fonte: Produção dos alunos, sujeitos deste estudo (2018)

4.3 Construção do teodolito auxiliado pelo aplicativo *Theodolite*

Nesta subseção, apresentamos um teodolito que foi construído durante a pesquisa empírica para a resolução das situações-problema envolvendo conceitos trigonométricos. Esse teodolito teve o auxílio do aplicativo *Theodolite*, como podemos observar na Figura 43.

Figura 43: O aplicativo *Theodolite*.



Fonte: Wagner (2017, p. 32)

Nessa figura, o celular aparece em um plano vertical e a linha AB do celular está inclinada em relação ao plano horizontal. Dessa forma, na posição que o celular aparece, a linha AB faz $21,5°$ com o plano horizontal, como mostra a tela "Horizon Angle". Assim, observamos também no alto da tela desse aplicativo que apresentam as informações de latitude, longitude e altitude em relação ao nível do mar.

Dessa forma, além do aplicativo acima, para a construção de um teodolito com esse formato, serão necessários os recursos: um celular, uma caneta esferográfica, dois pedaços de elásticos, um cabo de vassoura, um parafuso, uma furadeira e uma chapa fina de madeira ou de papelão grosso.

Vale lembrarmos, ainda, que para a construção desse instrumento digital, as etapas seguintes deverão ser cumpridas:

1ª etapa: A mira pode ser obtida com o corpo de uma caneta esferográfica arrancando o tubo interno e a tampa traseira;

2ª etapa: Prenda com elásticos nas extremidades do corpo vazio da caneta na lateral do celular;

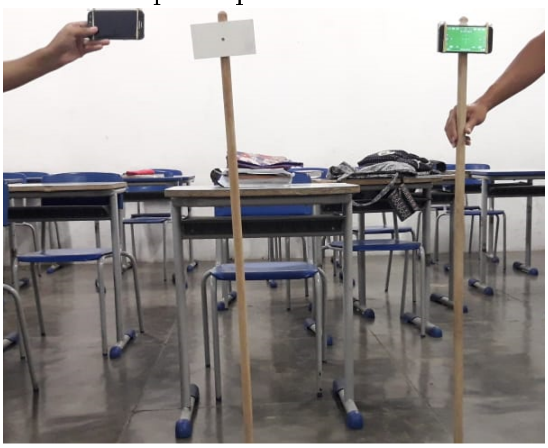
3ª etapa: Recorte um retângulo na chapa de madeira igual ao tamanho do celular;

4ª etapa: Com a furadeira, fure o centro do retângulo e quase em uma extremidade do cabo de vassoura;

5ª etapa: Apertar o retângulo ao cabo de vassoura por meio de um parafuso com pressão suficiente para manter firme, porém não impedindo o movimento entre o retângulo e o cabo.

Assim, o instrumento - o teodolito auxiliado pelo aplicativo *Theodolite*- que foi construído pelos alunos sob a orientação do pesquisador para o desenvolvimento das atividades propostas ficou com o formato da Figura 44.

Figura 44: Teodolito auxiliado pelo aplicativo *Theodolite* construído pelos alunos



Fonte: Produção dos alunos, sujeitos deste estudo (2018)

4.4 Aplicações de trigonometria sob a mediação do teodolito

Segundo Lima et al (2010), os livros didáticos para o Ensino Médio Regular aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD destinam várias páginas ao ensino de trigonometria. No entanto, não deixa claro nem para o aluno e nem para o professor, porque fornece esse imenso material. A partir desse contexto é o momento de mostrarmos algumas aplicações de situações reais sobre conceitos trigonométricos. No entanto, como afirmam os autores acima, para solucionarmos esses problemas, precisaremos somente das razões trigonométricas no triângulo retângulo, das leis dos Cossenos e dos Senos.

Portanto, alguns desses problemas que serão apresentados e desenvolvidos nesta subseção, fazem referência à cidade de Caxias-MA, cidade em que está situada a escola campo empírico deste estudo. Assim, a título de exemplos, temos a Igreja da Catedral, o Centro de Ensino Gonçalves Dias e o Centro Universitário de Ciências e Tecnologia do Maranhão - UniFacema, pontos esses que nos proporcionaram situações importantes de medidas inacessíveis para tais aplicações.

1º Problema: Medir a altura do Centro de Ensino Gonçalves Dias.

Enunciado: Um observador está em um ponto A da Rua Aarão Reis e vê o Centro de Ensino Gonçalves Dias segundo um ângulo α com o plano horizontal (usando o teodolito caseiro construído pelos alunos). Ele anda em direção até um ponto B com uma distância d (em metros) do ponto A e agora vê o Centro de Centro de Ensino Gonçalves Dias segundo um ângulo β. Qual é a expressão que permite calcular a altura do Centro de Ensino Gonçalves Dias?

Figura 45: Faixada de acesso à escola

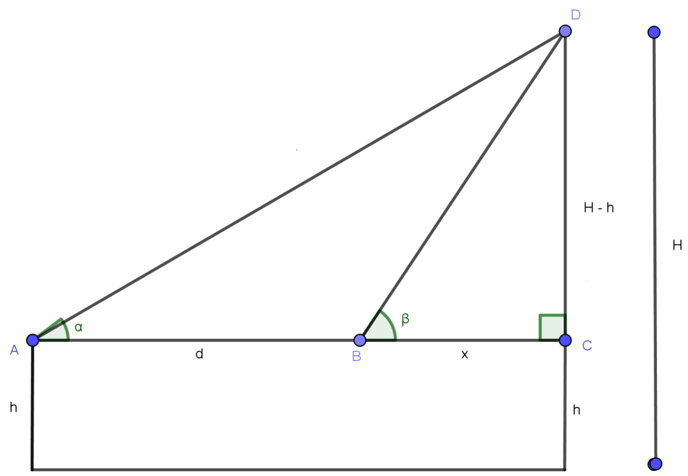
Fonte: Produção dos alunos, sujeitos deste estudo (2018).

Solução.

Dado um triângulo CBD, retângulo em $\hat{C}$, em que o ângulo de visada $C\hat{B}D$ é igual a β, como mostra a Figura 46, na página seguinte, onde D é ponto da cumeeira do teto do Centro de Ensino Gonçalves Dias, B é ponto de mira e x a medida da distância de B ao pé da altura.

Sendo ACD, um triângulo retângulo em $\hat{C}$, em que o ângulo de visada $C\hat{A}D$ é igual a α e o ponto A é ponto de mira (onde está o observador).

Figura 46: Medida da altura do CEGD



Fonte: Próprio autor (2018)

No triângulo retângulo ACD (ver Figura 46), temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H-h}{d+x}$$

$$d+x = \frac{H-h}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Assim,

$$x = \frac{H-h}{\operatorname{tg}\alpha} - d \qquad (1).$$

Pelo triângulo retângulo CBD (cf. Figura 46), temos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H-h}{x}$$

Portanto,

$$x = \frac{H-h}{\operatorname{tg}\beta} \qquad (2).$$

Logo, substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\frac{H-h}{\operatorname{tg}\alpha} - d = \frac{H-h}{\operatorname{tg}\beta}$$

Em seguida, multiplicando em ambos membros por $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$, temos:

$$(H-h)\cdot\operatorname{tg}\beta - d\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = (H-h)\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

$$H \cdot \operatorname{tg}\beta - h \cdot \operatorname{tg}\beta - d \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = H \cdot \operatorname{tg}\alpha - h \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$H \cdot \operatorname{tg}\beta - H \cdot \operatorname{tg}\alpha = h \cdot \operatorname{tg}\beta - h \cdot \operatorname{tg}\alpha + d \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$H \cdot (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) = h \cdot (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) + d \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

Agora, dividindo em ambos os membros por $(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$, encontramos:

$$H = h + \frac{d \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha},$$

em que os ângulos de visada α e β são medidos nos pontos A e B de mira , que distam d, e são colineares e h representa a medida da altura do chão a base do instrumento.

2º Problema: Medir a distância de um ponto da Praça Magalhães de Almeida ao topo da cruz na entrada da Igreja da Catedral.

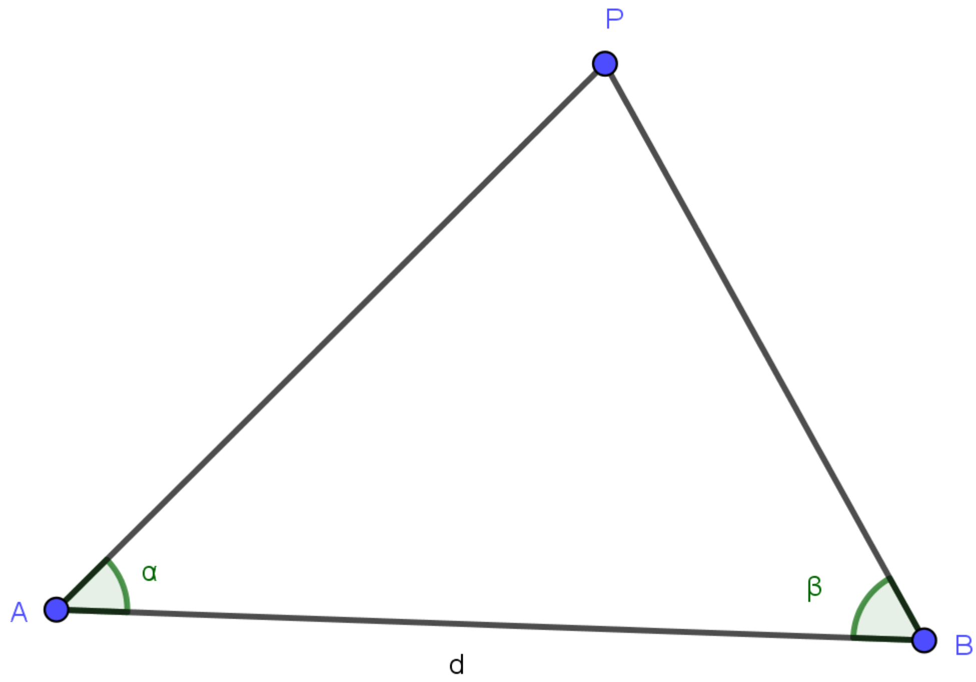
Enunciado: De um ponto A na Praça Magalhães de Almeida da cidade de Caxias-MA, avista-se um ponto P no topo da cruz da faixada de acesso à Igreja da Catedral (veja Figura 47). De outro ponto B na Praça Magalhães de Almeida, a uma distância d de A também se avista o ponto P. Um observador em Caxias-MA mediu os ângulos com o teodolito auxiliado pelo aplicativo Theodolite confeccionado pelos alunos, obtendo os ângulos: $B\hat{A}P = \alpha$ e $A\hat{B}P = \beta$. Qual é a expressão que representa a distância entre A e P?

Figura 47: Prédio da Igreja Catedral

Fonte: Produção dos alunos, sujeitos deste estudo (2018).

Solução.

Figura 48: Distância de um ponto da praça ao topo da cruz da Igreja Catedral



Fonte: Produção dos alunos, sujeitos deste estudo (2018).

Do triângulo ABC como mostra a Figura 48, temos $A\hat{P}B = 180° - (\alpha + \beta)$. Em seguida, aplicando a lei dos Senos ao triângulo ABP, segue que

$$\frac{AP}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{d}{sen[180° - (\alpha + \beta)]}$$

Então,

$$AP = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\beta}{sen[180° - (\alpha + \beta)]},$$

sendo d a distância entre os pontos A e B e os ângulos de visada α e β medidos nos pontos de mira A e B.

3º Problema: Medir a distância entre dois pontos, ambos inacessíveis.

Enunciado: Da Rua Aarão Reis é possível ver o ponto X no topo do prédio da UniFACEMA e o ponto Y no crucifixo da torre da Igreja Catedral (cf. a Figura 49, na página seguinte). Um observador assinala nesta rua dois pontos A e B, sendo d a distância entre eles, e obtendo as medidas dos seguintes ângulos: $X\hat{A}Y = \alpha$, $Y\hat{A}B = \beta$,

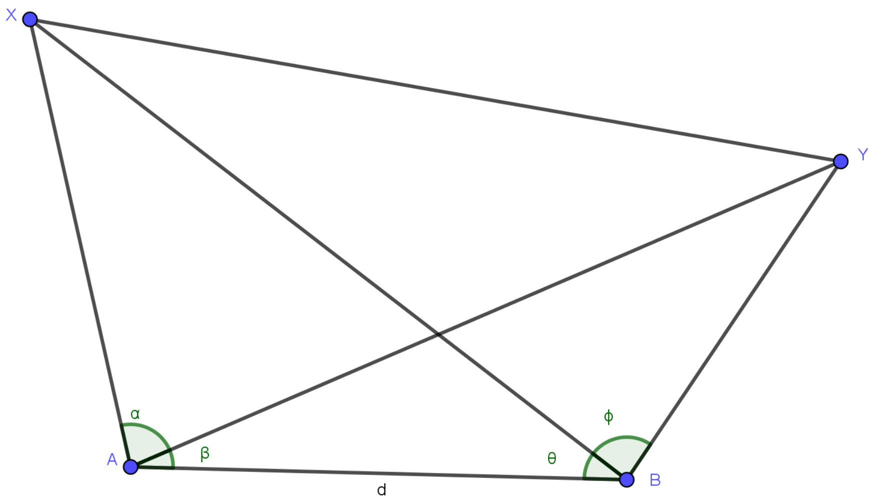
$A\hat{B}X = \theta$ e $X\hat{B}Y = \phi$. Qual é a expressão que representa a distância entre os pontos X e Y?

Figura 49: Topo do prédio da UniFACEMA ao crucifixo da Igreja Catedral

Fonte: Próprio autor (2018).

Solução.

Figura 50: Distância do topo do prédio da UniFACEMA ao crucifixo da Igreja



Fonte: Próprio autor (2018).

É fácil calcular os seguintes ângulos (veja Figura 50, na página anterior):

$$A\hat{X}B = 180^\circ - (\alpha + \beta + \theta)$$

$$A\hat{Y}B = 180^\circ - (\beta + \theta + \phi).$$

Pela lei dos Senos aplicada ao triângulo ABX, encontramos:

$$\frac{XA}{\text{sen}(A\hat{B}X)} = \frac{d}{\text{sen}(A\hat{X}B)}$$

$$\frac{XA}{\text{sen}\,\theta} = \frac{d}{\text{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta + \theta)]}$$

$$XA = \frac{d \cdot \text{sen}\,\theta}{\text{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta + \theta)]},$$

onde $\delta = \alpha + \beta + \theta$.

$$XA = \frac{d \cdot \text{sen}\,\theta}{\text{sen}[180^\circ - \delta]} \qquad (1).$$

Novamente pela lei dos Senos, agora aplicada ao triângulo ABY, temos:

$$\frac{YA}{\text{sen}(A\hat{B}Y)} = \frac{d}{\text{sen}(A\hat{Y}B)}$$

$$\frac{YA}{\text{sen}(\theta + \phi)} = \frac{d}{\text{sen}[180^\circ - (\beta + \theta + \phi)]}$$

$$YA = \frac{d \cdot \text{sen}(\theta + \phi)}{\text{sen}[180^\circ - (\beta + \theta + \phi)]},$$

onde $\lambda = \beta + \theta + \phi$.

$$YA = \frac{d \cdot \text{sen}(\theta + \phi)}{\text{sen}[180^\circ - \lambda]} \qquad (2).$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo AXY, obtemos:

$$(XY)^2 = (XA)^2 + (YA)^2 - 2 \cdot XA \cdot YA \cdot cos(X\hat{A}Y)$$

Em seguida, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, temos:

$$XY = \sqrt{(XA)^2 + (YA)^2 - 2 \cdot XA \cdot YA \cdot cos(X\hat{A}Y)} \qquad (3).$$

Então, substituindo (1), (2) e a medida do ângulo $X\hat{A}Y$ em (3), encontramos:

$$XY = \sqrt{(\frac{d \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}[180^\circ - \delta]})^2 + (\frac{d \cdot \operatorname{sen}(\theta + \phi)}{\operatorname{sen}[180^\circ - \lambda]})^2 - 2 \cdot \frac{d \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}[180^\circ - \delta]} \cdot \frac{d \cdot \operatorname{sen}(\theta + \phi)}{\operatorname{sen}[180^\circ - \lambda]} \cdot \cos\alpha},$$

em que d representa a distância entre os pontos A e B e os ângulos de visada α, β, θ e ϕ são medidos nos pontos de mira A e B.

Em linhas gerais, a respeito dessas aplicações de Trigonometria sob a mediação do teodolito, é oportuno enfatizarmos que o planejamento para a utilização do teodolito nos problemas propostos e desenvolvidos pelos alunos, só foi possível mediante toda uma exposição e discussão teórica da Trigonometria, o que possibilitou aos alunos uma maior aproximação dessa teoria com a prática aí vivenciada. Como afirma Lorenzato (2006), apenas a aplicação de materiais manipuláveis, sejam digitáveis ou não, não garante a apropriação dos conceitos matemáticos.

5 Metodologia

Nesta seção, tratamos do percurso metodológico deste estudo. Para tanto, inicialmente será feita a caracterização da pesquisa. Depois disso, apresentaremos os sujeitos investigados. Em seguida, a descrição dos instrumentos de produção de dados e, por último, os procedimentos de análise dos dados.

5.1 Caracterização da pesquisa

De acordo com o objetivo geral e o problema que nortearam este trabalho de pesquisa, já explicitados anteriormente, entendemos que essa se caracteriza como pesquisa de campo de abordagem qualitativa. Se trata de uma pesquisa de campo porque em conformidade com Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 106) pois, se trata daquela "[...] modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode dar-se por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação [...]".

Por sua vez, também a classificamos como sendo qualitativa, pois através dessa abordagem, cria-se uma relação entre o pesquisador e o pesquisado, trabalhando com um universo de significados de uma realidade que não pode ser quantificada, como defendido por Minayo (2010, p. 24),

> [...]. O pesquisador que trabalha com estratégias qualitativas atua com a matéria-prima das vivências, das experiências, da cotidianeidade e também analisa como ação humana objetivada.. Ou seja, para esses pensadores e pesquisadores, a linguagem, os símbolos, as práticas, as relações e as coisas são inseparáveis. Se partirmos de um desses elementos, temos que chegar aos outros, mas todos passam pela subjetividade humana.

Nesse sentido, entendemos que a pesquisa qualitativa não se preocupa com a quantificação dos dados - não se exclui desta última, dependendo dos dados que possam interessar - mas como eles colaboram para a compreensão do fenômeno. Portanto, neste estudo os dados produzidos consistiram em análise e explicação dos conhecimentos prévios e dos conhecimentos após o estudo e as atividades propostas com a mediação do teodolito acerca dos conceitos trigonométricos, bem como dos significados atribuídos por esses alunos investigados.

5.2 Sujeitos/participantes da pesquisa

Este trabalho teve como sujeitos alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio Regular do Centro de Ensino Gonçalves Dias (CEGD). Dos 40 alunos matriculados e que frequentam às aulas, apenas 12 (que foi a amostra) participaram da pesquisa, no contra turno, sendo 08 alunos do sexo feminino, e 04 do sexo masculino, com faixa etária entre 16 e 20 anos. Esse número se justifica devido as condições objetivas, pois boa parte trabalha no contra turno e há ainda aqueles que residem na zona rural e que não dispunham de transportes para o deslocamento nos dias das atividades da pesquisa.

5.3 Campo/ambiente de pesquisa

Os dados empíricos da pesquisa foram produzidos e coletados em uma escola pública estadual da cidade de Caxias-Ma, no primeiro trimestre de 2018 (veja Figura 51).

Figura 51: Centro de Ensino Gonçalves Dias

Fonte: Próprio autor (2018).

A escola possui oito salas de aula, porém, não apresenta uma boa estrutura física. As salas não são climatizadas. Há apenas um laboratório de informática sem acesso à internet e uma biblioteca sem bibliotecário à disposição dos alunos. Possui alguns recursos, como notebook, impressora, data show, retroprojetor, televisão e caixa de som. Nessa escola, têm sido sendo promovidas algumas atividades, como por exemplo, feira de conhecimentos, show de calouros, projeto da consciência negra, palestra contra as drogas e outras.

5.4 Instrumentos de produção de dados

Para a produção dos dados e com o propósito de se fazer um diagnóstico dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos acerca dos conceitos matemáticos trigonométricos, a priori, aplicamos um questionário, ou seja, um pré-teste (APÊNDICE A), contemplando atividades de avaliações externas, a exemplo da Prova Brasil.

Vale esclarecermos que, as questões que compõem o referido questionário foram fundamentadas na Matriz de Referência de Matemática, de acordo com as habilidades da Prova Brasil do Tema I - Espaço e Forma, e do Descritor 5 - Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente (BRASIL, 2008). Esse descritor trata de um dos conceitos de maior aplicação no dia a dia dos alunos, pois há uma imensidade de problemas que podem ser abordados e contextualizados em sala de aula.

Essa atividade diagnóstica é composta de dez questões objetivas, que abordam algumas aplicações básicas da trigonometria, envolvendo cálculo de distâncias ou alturas sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, as leis dos senos e dos cossenos.

Após isso, a fim de que os alunos desenvolvessem as situações-problema mediadas pelo teodolito, orientamos esses alunos na construção do mesmo, tanto o caseiro quanto o aplicativo theodolite. Em seguida, proporcionamos a esses alunos aulas teórico-práticas em que propomos novas situações-problema, envolvendo o uso do teodolito. Para tanto, em ambas ações, a observação, enquanto instrumento para produção de dados, se fez necessária, a partir da intervenção do pesquisador.

Para Marconi e Lakatos (2017, p. 2018),

> A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações que utiliza os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, mas também em examinar fatos ou fenômenos que se deseja estudar. É um elemento básico da investigação científica, utilizada na pesquisa de campo [...].

Finalmente, com o objetivo de verificarmos as potencialidades do teodolito através da proposição de novas situações-problema, também fundamentadas na Matriz de Referência de Matemática e das habilidades da Prova Brasil do Tema I - Espaço e Forma, e do Descritor 5 (BRASIL, 2008), aplicamos outro questionário: o pós-teste (APÊNDICE B).

5.5 Procedimentos de análise dos dados

Durante a aplicação da pesquisa, os dados foram analisados e organizados levando-se em conta ao percurso metodológico que adotamos e dividida em etapas como veremos, a seguir:

1ª etapa: Aplicação da atividade diagnóstica (pré-teste);

2ª etapa: Estudo dos instrumentos de medidas de ângulos (Teodolito) e a trena como ferramenta auxiliar;

3ª etapa: Observação dos sujeitos durante a exposição dialogada;

4ª etapa: Análise na resolução dos problemas propostos durante as aplicações de trigonometria sob a mediação do teodolito;

5ª etapa: Aplicação de uma nova atividade diagnóstica (pós-teste);

6ª etapa: Por último, os participantes relataram a partir de produção textual escrita e orientada pelo pesquisador, suas opiniões acerca das aulas teórico-práticas envolvendo o uso do teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos.

Feito isso, de posse dos dados coletados para este estudo, a fim de que o processo de análise fosse desenvolvido de forma mais efetiva, trabalhamos com o uso de categorias (ou eixos de análise), seguindo as orientações de Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 134):

> A categorização significa um processo de classificação ou de organização de informações em categorias, isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns. Nesse processo, existem alguns princípios que devem ser observados pelo pesquisador. O primeiro deles é que o conjunto das categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias [...].

Em conformidade com essas orientações, elaboramos três categorias, a saber, as quais serão discutidas na próxima seção - **análise e discussão dos dados empíricos:**

1) Os conhecimentos prévios dos alunos investigados acerca dos conceitos matemáticos trigonométricos;

2) Situações-problema mediadas pelo teodolito como possibilidade de melhoria no processo ensino e aprendizagem da Matemática;

3) Compreensões dos alunos acerca da mediação do teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos.

6 Análise e discussão dos dados empíricos

Nesta seção, evidenciamos os dados produzidos para esta pesquisa através dos instrumentos: dois questionários, sendo um pré-teste e um pós-teste, ambos com questões da avaliação externa Prova Brasil; a observação e uma produção textual escrita e orientada pelo pesquisador.

Para tanto, a descrição e explicação desses dados tiveram como fundamento as contribuições de vários autores do campo da educação/educação matemática, já apresentados no referencial teórico. Além disso, no processo de análise, os dados foram distribuídos em três categorias (ou eixos de análise): os conhecimentos prévios dos alunos investigados acerca dos conceitos matemáticos trigonométricos; situações-problema mediadas pelo teodolito como possibilidade de melhoria no processo ensino e aprendizagem da Matemática; e, compreensões dos alunos acerca da mediação do teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos.

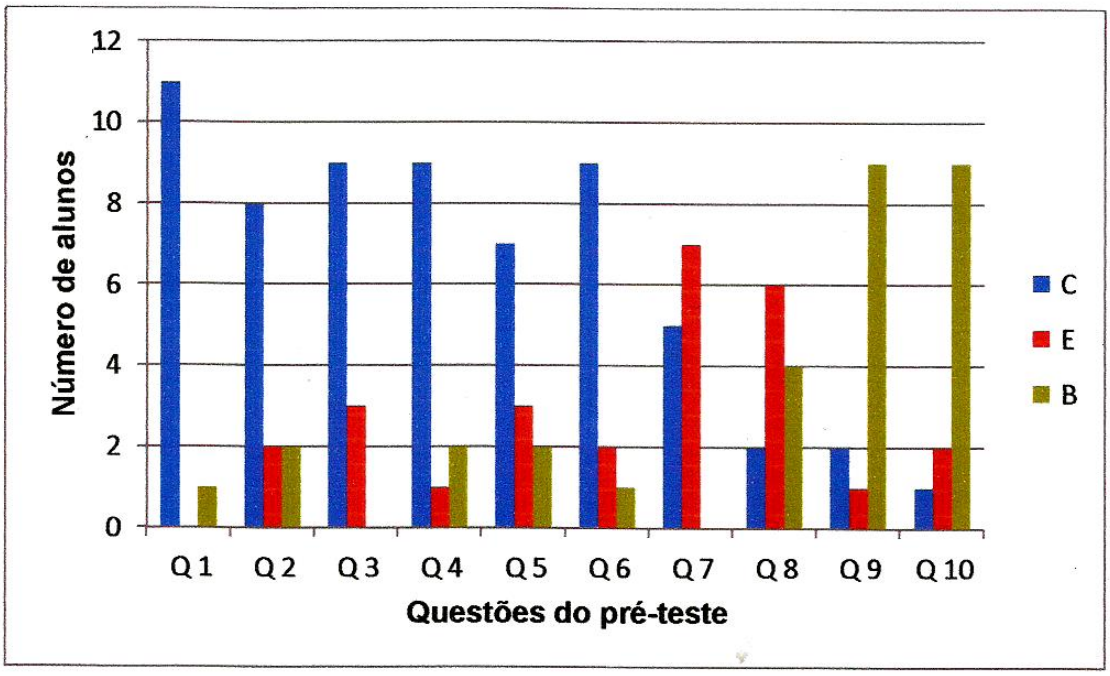
6.1 Os conhecimentos prévios dos alunos investigados acerca dos conceitos matemáticos trigonométricos

Nesta categoria, a pesquisa contou com a aplicação de um questionário/pré-teste com 10 questões sobre os conceitos trigonométricos que os alunos já haviam estudado, ou seja, trabalhamos com conceitos iniciais e fundamentais desse conteúdo. Para isso, foram propostas situações-problema da Prova Brasil que abordam a classificação dos ângulos, Teorema de Pitágoras, as razões trigonométricas no triângulo retângulo e as leis do Seno e do Cosseno (APÊNDICE A).

A aplicação desse questionário ocorreu no dia 21/03/2018, com a participação dos 12 sujeitos/alunos presentes. Vale destacarmos que foram empregados os recursos: grafite, papel e xérox de uma tabela trigonométrica com os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos de $0°$ a $180°$. Na verdade, o referido pré-teste teve a finalidade de avaliarmos os conhecimentos prévios dos sujeitos investigados a respeito dos conceitos aqui considerados.

Assim, passamos a apresentar as impressões e análises dos resultados, conforme Gráfico 1, na próxima página, por aluno, em que registramos: C como solução correta, E como questão errada, e B como questão em branco.

Gráfico 1: Resultado das situações-problema do pré-teste



Fonte: Próprio autor (2018).

É pertinente enfatizarmos que, antes da entrega do pré-teste (xérox) com as 10 situações-problema, perguntamos aos alunos que estavam presentes nesse dia se eles já haviam estudado Trigonometria e o que eles sabiam sobre esse tema. Dos 12 alunos, apenas 6 deles disseram que sim (50%), porém, não lembravam mais das definições das razões trigonométricas do triângulo retângulo. Além disso, afirmaram que não sabiam para quê estudar trigonometria se não vão usar na vida cotidiana deles.

Partindo dessas afirmações, acreditamos que as experiências desses alunos em relação à Matemática, aos conceitos trigonométricos, no geral, são baseadas nos pressupostos do ensino tradicional, ou seja, ensino repetitivo e mecânico, centrado no professor que apresenta as definições, fazem demonstrações e propõe listas de exercícios para treinar o que foi exposto, sem considerar as situações problematizadoras.

Ao discutir sobre situações problematizadoras, Mendonça (1993, p. 24), afirma que, essas são àquelas que “[...] evocam um ideal, um propósito, uma atitude e um método”. No caso desta pesquisa, a problematização enquanto ideal configura-se em atividades com material concreto (o teodolito) a fim de levar o aluno a se apropriar dos conceitos trigonométricos e entender a sua importância e aplicação em outros contextos, como por exemplo, na engenharia, na topografia e na acústica.

Retomando às nossas impressões e análise do pré-teste (Gráfico 1) acerca do desempenho dos alunos por questão, separadamente, destacamos que, na primeira situação-problema, de um universo de 12 alunos, 11 deles chegaram à solução correta (alternativa A), ou seja, 91,7% e apenas um deles (8,3%) deixou a situação-problema em branco.

Assim, no geral, os alunos demonstram domínio da definição de ângulos complementares e da soma dos ângulos internos de um triângulo. Além disso, observamos que, para os cálculos, aplicaram casos elementares de equação do 1º grau.

Na segunda questão, que trata das razões trigonométricas sugeridas pelos dados do problema (seno, cosseno e tangente), a situação-problema exigia do aluno a habilidade em saber identificar e aplicar corretamente uma dessas três razões trigonométricas. Pelo enunciado do problema, a correta seria a tangente de 15°, como demonstrado:

$$\text{tg}15^\circ = \frac{x}{24} = 0,26$$

Portanto, para $x = 6,24$, aproximado, como mencionado no enunciado, dando resultado do valor $x = 6$, como indica a alternativa "A". Dos alunos investigados neste estudo, apenas 8 deles (66,6%) atingiram a habilidade esperada, 2 não atingiram a habilidade (16,7%) e os outros 2 (16,7%) deixaram em branco a questão considerada.

A questão 3, por nós considerada de baixa complexidade, pois se exigia dos alunos apenas a habilidade na identificação das medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo θ do triângulo. Cabia, assim, dos alunos compreender que a tangente do ângulo θ é dada pelo quociente entre as medida dos catetos oposto e adjacente ao ângulo θ. Na nossa análise, apenas 9 alunos (75%) chegaram à resposta correta e apenas 3 (25%) cometeram erro no desenvolvimento e, consequentemente, marcaram a alternativa incorreta. Nesse contexto, em linhas gerais, trata-se de uma situação-problema vista pelos alunos como elementar.

Por sua vez, a questão 4, trata diretamente da aplicação do Teorema de Pitágoras na figura apresentada, onde traz um retângulo formado pelas medidas de comprimento e largura da tela de uma televisão. A partir desse conhecimento, para calcular a diagonal de um canto a outro da tela da televisão, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, foi necessário conhecer as medidas dos catetos: 12 e 16 polegadas.

Então, aplicando o Teorema de Pitágoras os alunos encontraram a diagonal da televisão: $D = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ que representa o número de polegadas desse aparelho eletrônico. Isto posto, 9 (75%) alunos atingiram a habilidade esperada nessa situação-problema, apenas 1 aluno (8,3%) errou e 2 alunos (16,7%) não responderam a questão, deixando-a em branco e sem desenvolvimento da mesma. Para uma análise ponderada, ficou evidenciado que a situação-problema apresentada foi de fácil compreensão para os alunos.

Com relação à questão 5, que aborda a definição da razão trigonométrica (seno) num triângulo retângulo, apenas 7 alunos chegaram à alternativa correta, o que representa um percentual de 58,3%. Além do mais dos 12 alunos, apenas 2 deles (16,7%) não responderam, ou melhor, nem sequer assinalaram uma das cinco alternativas, e 3 deles (25%), embora tenham utilizado de estratégia para resolver essa situação-problema, não chegaram à alternativa correta. Esses últimos demonstraram não dominar a operação multiplicação com números decimais, além de percebemos a falta de atenção no desenvolvimento dos cálculos, algoritmos, o que os levou à indução do erro, sobretudo por não ter no processo de resolução de equações do 1º grau, a apropriação e domínio do princípio da equivalência dos números inteiros.

A respeito da questão 6, constatamos poucas dificuldades por parte dos alunos na resolução do problema envolvendo a razão trigonométrica (tangente) num triângulo retângulo. Na verdade, a partir de seus conhecimentos já adquiridos, conseguiram identificar que a altura do prédio é a medida do cateto oposto, e que a sombra projetada do prédio no solo trata-se da medida do cateto adjacente. Com base nessas informações, 9 desses alunos, ou seja, 75%, chegaram à resposta correta indicada pela alternativa "B"; 2 alunos (16,7%) não souberam desenvolver corretamente estratégias nesse processo de resolução da situação-problema; e somente 1 aluno (8,3%) não respondeu a questão.

No que tange à questão 7, no processo de resolução, a priori, alunos deveriam observar que, o comprimento da escada e a altura da parede representam, respectivamente, as medidas da hipotenusa e do cateto adjacente ao ângulo de 60° no triângulo retângulo. Com isso, caberia ainda aos alunos empregar o cosseno de 60°. Assim, o comprimento da escada seria igual a 8 metros. Portanto, a alternativa correta é a letra "C", a qual foi marcada apenas 41,7% dos alunos, ou seja, 5. Isso nos revelou a necessidade de buscarmos novas estratégias didáticas, a fim de que os alunos se apropriassem desses conceitos envolvendo as razões trigonométricas num triângulo retângulo, posto que 58,3%, o que corresponde a 7 alunos do universo considerado neste estudo, erraram o problema, embora tenham apresentado caminhos para a resolução dessa situação-problema.

Na questão 8, um dos caminhos possíveis para se calcular a medida PQ é o de visualizar que o triângulo PQR é isósceles, pois possui dois ângulos internos congruentes de 30° cada. Então, os lados opostos a esses ângulos são congruentes ($PR = RS = 100$).

Assim, no triângulo PQR, conforme o pré-teste (APÊNDICE A), os alunos têm o ângulo agudo (60°), a hipotenusa (100) e o cateto oposto (PQ). Ao relacionar esses valores através do seno de 60°, concluímos que $PQ = 50\sqrt{3}$. Desse modo, o valor encontrado é o que está marcado na alternativa "B", que foi assinalada somente por 2 alunos, ou seja, 16,7%, o que indica que tal problema se caracterizou no entendimento dos alunos como sendo de difícil compreensão, ou melhor, de alta complexidade. É pertinente destacarmos que 6 alunos erraram (50%) a questão e 4 alunos (33,3%) deixaram a questão em branco.

A respeito da questão 9, essa nos possibilitou a observamos situações do cotidiano do aluno que envolvem o cálculo de distâncias inacessíveis. A análise dessa situação-problema indicou que a maioria dos alunos, sujeitos desta pesquisa, não atingiu as habilidades mínimas esperadas para solucionar problemas dessa natureza, pois 83,3%, ou seja, 9 alunos, deixaram em branco tal questão.

Do universo investigado, somente 1 aluno (8,3%) tentou responder o problema, porém, não conseguiu chegar à alternativa correta (letra "E"). Na verdade, apenas 2 alunos (16,7%) acertaram a alternativa correta. Isto posto, em linhas gerais, observamos que se trata de uma situação-problema que necessita ser revista pelo professor, a partir de novas possibilidades, novas estratégias didáticas, a fim de que os alunos relacionem cálculos de distâncias inacessíveis com o seu cotidiano.

Finalmente, a questão 10, a qual também trata de cálculo de distância inacessível, envolvendo a lei dos senos e relacionando-a uma situação comum do cotidiano dos alunos. Mais uma vez constatamos que os alunos não apresentaram as habilidades mínimas esperadas para a solução do problema considerado, pois apenas 1 aluno (8,3%) apresentou cálculos e conseguiu responder corretamente essa questão, marcando a alternativa "A", 2 alunos erraram (16,7%) e 9 alunos (75%) se quer tentaram responder a questão, deixando-a em branco. Isso demonstrou, portanto, a necessidade de se retomar ao ensino do conteúdo da lei dos senos, ao invés de dar continuidade aos conteúdos propostos no plano de disciplina.

Para uma análise ponderada das resoluções das situações-problema apresentadas pelos alunos no Pré-teste (APÊNDICE A), em linhas gerais, constatamos que a matemática mesmo no ensino médio ainda se apresenta distante da realidade dos nossos alunos, o que dificulta a compreensão dos mesmos, embora tenham estudados os conteúdos no ensino fundamental que, no caso deste estudo, são conceitos também trabalhados no 9º ano.

É nesse contexto que reforçamos a necessidade de se trabalhar com materiais concretos, a exemplo do teodolito empregado neste estudo. Para tanto, cabe ao professor, como tão bem alerta Pais (2006), propor situações-problema contextualizadas e que provoquem os alunos a desenvolverem a sua imaginação e o seu raciocínio lógico, fazendo uso de materiais concretos/ manipuláveis, a fim de que os alunos se apropriem dos conceitos matemáticos a partir dos conhecimentos prévios.

6.2 Situações-problema mediadas pelo teodolito como possibilidade de melhoria no processo ensino e aprendizagem da Matemática

Nesta categoria, a pesquisa abordou a resolução de três situações-problema em locais da cidade de Caxias-MA, cidade em que está situada a escola campo empírico deste estudo, que pudessem atender o nosso experimento, sendo eles: a Igreja da Catedral, o Centro de Ensino Gonçalves Dias (CEGD) e o Centro Universitário de Ciências e Tecnologia do Maranhão (UniFacema). Tais pontos nos proporcionaram situações importantes de medidas de distâncias inacessíveis. No entanto, para que essas situações-problema fossem solucionadas houve a necessidade de empregarmos materiais concretos, sobretudo o teodolito, construído pelos sujeitos investigados.

Inicialmente, no encontro do dia 23/03/2018 com duração de 3 horas, foi solicitado aos alunos que fizessem uma pesquisa na internet sobre a construção de um teodolito usando materiais concretos de baixo custo. Em sala de aula, no contra turno, observamos a explicação dos sujeitos investigados a respeito da pesquisa proposta. Em seguida, exibimos um vídeo[1] sobre a construção de um teodolito usando materiais concretos.

Assim, os materiais necessários à construção do teodolito foram praticamente idênticos aos do vídeo que exibimos. Justificamos a importância de expormos o vídeo para realizarmos a comparação dos materiais, pois desse modo a seleção dos materiais seria mais simples, bem como o entendimento de alguns alunos que não participaram efetivamente da pesquisa na internet acerca desse processo de construção.

Desse modo, acordamos que, para o encontro do dia 28/03/18, os alunos deveriam trazer os seguintes recursos para a construção do teodolito: pote ou copo de plástico com tampa, uma cópia xerográfica do transferidor de 360°, um pedaço de papelão grosso ou outro material resistente, 15 cm de arame, um canudo resistente, cola, uma fita adesiva e uma tesoura.

É chegado o dia da construção do teodolito, conforme as orientações do último

[1]Disponível em:<https://youtu.be/jkv_9EoVKJU>. Acesso em: 20 mar. 2018.

encontro presencial. Vale destacarmos que, essa tarefa apontou algumas dificuldades, dentre outras, o esquecimento de materiais por parte de alguns alunos e as dificuldades no desenvolvimento das ações por parte daqueles alunos que estiverem ausentes no encontro do dia 23/03/2018.

Devido essas dificuldades, solicitamos aos sujeitos investigados que formassem grupos com 4 integrantes cada, em partes distintas da sala de aula, para que iniciassem a construção do teodolito e, quando tivessem dúvidas, buscassem auxílio junto ao professor/pesquisador ou ao colega que tivesse melhor se apropriado do processo de construção do teodolito. Nessas condições, de forma ética, conversamos com os alunos do compromisso e da importância de se trazer os materiais solicitados e, assim, de forma breve, explicamos mais uma vez o processo de construção do teodolito.

Dentro dessas condições, a referida tarefa foi totalmente concluída no encontro do dia 28/03/2018, também com duração máxima de 3 horas, sempre no contra turno. Na página em tela, apresentamos a Figura 52 que nos mostra momentos vivenciados pelos alunos construindo o teodolito caseiro e o aplicativo *Theodolite*, com o emprego dos materiais concretos já mencionados anteriormente.

Figura 52: Momentos vivenciados dos alunos na construção do teodolito caseiro e do aplicativo *Theodolite*

Fonte: Próprio autor (2018).

Feito isso, no encontro do dia 03/04/2018, explicamos aos grupos como utilizar o teodolito, bem como demos orientações sobre o registro das medidas essenciais para a resolução das situações-problemas, como por exemplo, a altura do CEGD, a distância de um ponto da praça Magalhães de Almeida ao topo da cruz na entrada dessa mesma igreja e a distância do topo do prédio da UniFACEMA ao crucifico da Igreja da Catedral.

Nesse mesmo encontro, solicitamos também aos grupos que praticassem medidas com o teodolito construído pelos alunos, utilizando as dependências da escola. Mesmo com as explicações, observamos que cometeram os seguintes erros: não posicionar o ponteiro no ângulo de zero grau no início da medida; remover o teodolito da posição após medir o ângulo, sem determinar a distância até o objeto medido para relacionar com o ângulo e não medir a altura do teodolito. Dessa forma, a nossa preocupação foi a de trabalhar, primeiramente, esses erros.

Assim, mais uma vez reorientamos os procedimentos acerca da utilização do teodolito e dos registros corretos das medidas essenciais para a resolução das situações-problema postas. No final das ações desenvolvidas pelos alunos nesse encontro, como tarefa para o encontro seguinte, solicitamos que todos os grupos trouxessem os teodolitos (caseiro e o aplicativo *Theodolite*) e as ferramentas auxiliares: trena com no mínimo 5 metros, caneta, prancheta, calculadora científica e um aparelho celular para, assim, determinarem as medidas que foram usadas na resolução das situações-problema.

Diante das considerações, no Quadro 2, apresentamos os resultados da prática de campo, ou seja, das atividades propostas envolvendo situações-problema[2] solucionadas com a mediação do teodolito, pelos 12 alunos investigados, distribuídos em 3 grupos com quatro participantes, ocorrida no dia 14/04/2018, com duração de 4 horas. Portanto, é pertinente enfatizarmos que todas as medidas estão em metros.

Quadro 2: Resultados das medições em campo

Situação-problema	P 1	P 2	P 3
Grupo 1	7,19	41,37	27,44
Grupo 2	7,06	40,89	22,83
Grupo 3	7,21	42,85	24,77

Fonte: Dados empíricos da pesquisa (2018).

[2]As situações-problema aqui consideradas são as mesmas já apresentadas na subseção 4.4- Aplicações de trigonometria sob a mediação do teodolito, na seção 4 - O teodolito: desde sua gênese à sua possibilidade de mediar a apropriação de conceitos trigonométricos na educação básica.

A primeira situação-problema consiste em medir a altura de um ponto D, situado no teto da cumeeira da cobertura do CEGD, distante em relação a um plano horizontal e não sendo possível calcular a distância entre o ponto de mira e a projeção perpendicular do ponto D no solo. Foram necessárias, dessa forma, duas visadas com distância d entre os pontos A e B de mira, como já descrito na Figura 46, da página 65.

No processo de desenvolvimento e solução dessa situação-problema, exigiu-se dos grupos a habilidade em saber identificar e aplicar corretamente a definição da tangente, bem como resolver sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas e duas equações. Nos dois triângulos retângulos formados no plano vertical, temos que:

$$\text{tg}\beta = \frac{H-h}{x}$$
$$\text{tg}\alpha = \frac{H-h}{d+x}$$

Resolvido o sistema, obtemos $H = h + \dfrac{d.tg\beta.tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}$, em que os ângulos de visada α e β são medidos nos pontos A e B de mira com auxilio do teodolito, que distam d (em metros), e são colineares e h representa a medida, em metros, da altura do chão a base do teodolito obtida com o auxilio da trena. Em seguida, cada grupo substituiu os valores encontrados das medidas h, d, α e β na expressão H já encontrada anteriormente, tal como encontraram a medida da altura do CEGD informada no Quadro 2 mencionado anteriormente.

A segunda situação-problema tem como objetivo mostrar aos participantes de cada grupo uma forma de medir a distância de um ponto A de mira (onde está o observador) a um ponto P inacessível. Nesse caso, é preciso que este observador possa se deslocar para um ponto B no plano horizontal de onde possa também ver o ponto P. Aplicando a soma dos ângulos internos e a lei dos senos ao triângulo ABP (Figura 48, na página 67), temos:

$$\frac{AP}{sen\beta} = \frac{d}{sen[180^\circ - (\alpha+\beta)]}$$

Resolvendo esta equação, encontramos:

$$AP = \frac{d.sen\beta}{sen[180^\circ - (\alpha+\beta)]},$$

sendo d a distância (em metros) entre os pontos A e B, utilizando a trena. Assim, os ângulos de visada α e β medidos nos pontos de mira A e B pelos grupos, foram obtidos manuseando o aplicativo *Theodolite*. Dessa forma, esses grupos adquiriram a distância entre os pontos A e B fazendo a substituição das medidas d, α e β na expressão:

$$AP = \frac{d.sen\beta}{sen[180° - (\alpha + \beta)]},$$

em que as medidas obtidas pelos grupos se encontram no Quadro 2.

Finalmente, a terceira situação-problema. Essa trata de medição da distância entre dois pontos X e Y, ambos inacessíveis. Vale lembrarmos que, na situação-problema anterior, contemplamos a ação de medir uma distância entre um ponto (nesse caso, acessível) a outro ponto: o inacessível. Assim explicado, passamos a tratar de medir uma distância no plano horizontal entre dois pontos inacessíveis ao observador (o aluno), o que já foi evidenciado na Figura 50, da página 68.

Na referida Figura, da Rua Aarão Reis é possível vermos o ponto X no topo do prédio da UniFACEMA e o ponto Y no crucifixo da torre da Igreja Catedral. Desse modo, um observador assinala nesta rua dois pontos A e B a uma distância d entre eles, e com o teodolito eletrônico que nos foi emprestado pelo Departamento de Topografia da UniFACEMA, sob a mediação de um dos professores desse Departamento que, prontamente, colaborou conosco nesse momento da pesquisa, os alunos mediram os seguintes ângulos: $X\hat{A}Y = \alpha$, $Y\hat{A}B = \beta$, $A\hat{B}X = \theta$ e $X\hat{B}Y = \phi$.

Justificamos que, a necessidade dessa colaboração por parte do professor do Departamento de Topografia da UniFACEMA, decorreu do fato de que as ferramentas teodolito caseiro e o aplicativo *Theodolite*, produzidas pelos alunos, não possibilitaram a visibilidade da medição dos ângulos de visada, pelo observador, nos pontos A e B de mira da situação-problema em tela.

Diante dessa justificativa, retomamos aos comentários dos procedimentos empregados pelos alunos na resolução dessa última situação-problema, mediada pelo teodolito. Para isso, aplicamos a soma dos ângulos internos aos triângulos ABX e ABY da Figura 50 e, em seguida, calculamos os ângulos $A\hat{B}X = 180° - (\alpha + \beta + \theta)$ e $A\hat{Y}B = 180° - (\beta + \theta + \phi)$.

Assim, considerando o triângulo ABX, em que o ponto X representa o topo do prédio da UniFACEMA e os ângulos de visada $\alpha + \beta$ e θ medidos nos pontos de mira A e B, localizados na rua Aarão Reis, pela lei dos senos aplicada ao triângulo ABX, temos:

$$\frac{XA}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{d}{\operatorname{sen}[180° - (\alpha + \beta + \theta)]}$$

Desse modo, ao resolvermos esta equação, obtemos:

$$XA = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}[180^\circ - (\alpha+\beta+\theta)]},$$

onde $\delta = \alpha + \beta + \theta$.

$$XA = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}[180^\circ - \delta]} \qquad (1).$$

Por outro lado, em que temos o triângulo ABY, cujo ponto Y representa o topo do crucifixo da torre da Igreja Catedral, e os ângulos de visada β e $\theta + \phi$ medidos nos pontos de mira A e B, também, localizados na rua Aarão Reis, novamente empregando a lei dos senos ao triângulo ABY, temos:

$$\frac{YA}{sen(\theta+\phi)} = \frac{d}{sen[180^\circ - (\beta+\theta+\phi)]}$$

Isto posto, chegamos à relação:

$$YA = \frac{d \cdot \operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\operatorname{sen}[180^\circ - (\beta+\theta+\phi)]},$$

onde $\lambda = \beta + \theta + \phi$.

$$YA = \frac{d \cdot \operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\operatorname{sen}[180^\circ - \lambda]} \qquad (2).$$

E, finalmente, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo AXY da (Figura 50, na página 68), temos que:

$$(XY)^2 = (XA)^2 + (YA)^2 - 2 \cdot XA \cdot YA \cdot cos(X\hat{A}Y)$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados ficamos com

$$XY = \sqrt{(XA)^2 + (YA)^2 - 2 \cdot XA \cdot YA \cdot cos(X\hat{A}Y)} \qquad (3)$$

E, substituindo as expressões (1), (2) e a medida do ângulo $X\hat{A}Y$ em (3), temos que:

$$XY = \sqrt{(\frac{d \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}[180^\circ - \delta]})^2 + (\frac{d \cdot \operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\operatorname{sen}[180^\circ - \lambda]})^2 - 2 \cdot \frac{d \cdot \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}[180^\circ - \delta]} \cdot \frac{d \cdot \operatorname{sen}(\theta+\phi)}{\operatorname{sen}[180^\circ - \lambda]} \cdot \cos\alpha},$$

Nesse caso, a distância d (em metros) entre os pontos A e B de mira, na Rua Aarão Reis, foi medida com a trena e os ângulos de visada α, β, θ e ϕ. E, na verdade, os ângulos considerados foram medidos com o teodolito emprestado pelo Departamento de

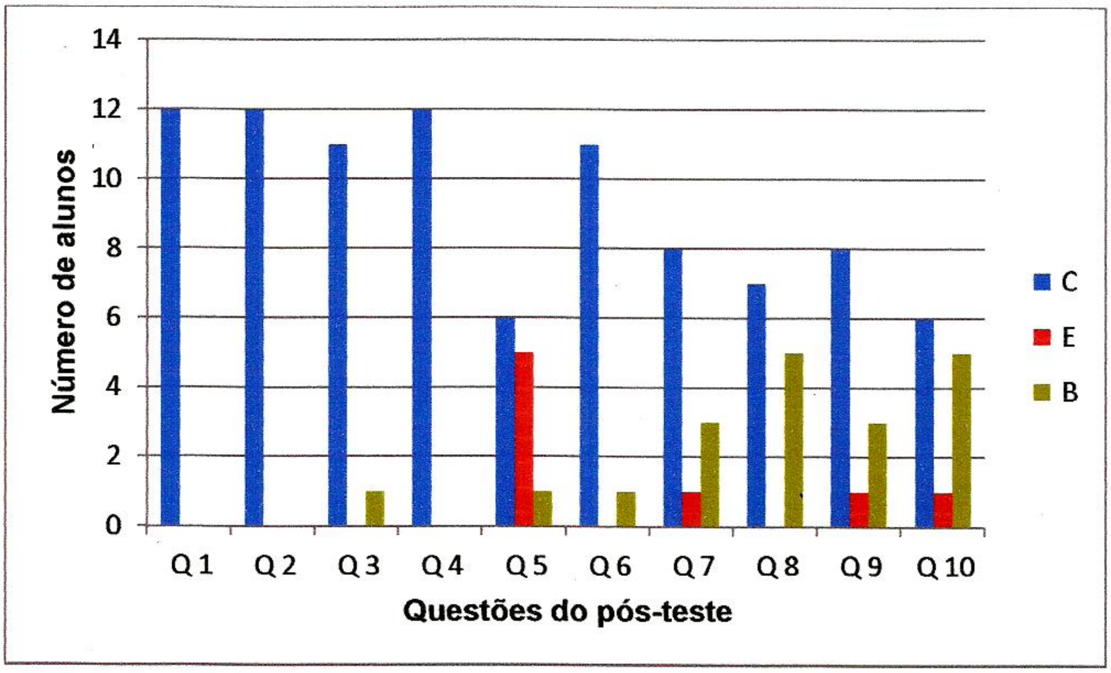
Topografia da UniFACEMA . Em seguida, cada grupo substituiu os valores encontrados das medidas d, α, β, θ e ϕ na expressão XY já encontrada anteriormente, tal como os grupos encontraram a medida da distância XY informada no Quadro 2 mencionado anteriormente.

Dessa forma, concluídas as atividades práticas relacionadas às três situações-problema com a mediação do teodolito, no encontro seguinte, ocorrido em 19/04/2018, com duração de 3 horas, aplicamos o pós-teste (APÊNDICE B), individualmente, na sala de aula, também no contra turno. Esclarecemos que as 10 questões do referido pós-teste também foram fundamentadas na Matriz de Referência da Prova Brasil do Tema I e Descritor 5.

O objetivo desse pós-teste foi o de avaliar os conhecimentos adquiridos durante a exposição dialogada e a prática de campo no que tange ao desenvolvimento das atividades propostas envolvendo situações-problema, mediadas pelo teodolito.

Feitos os comentários, apresentamos no Gráfico 2 o resultado quantitativo dessa atividade, embora que, por conta da natureza desta pesquisa, priorizamos os aspectos qualitativos. Para isso, novamente dividimos as soluções em: C - solução correta; E - solução errada; e B - questão em branco.

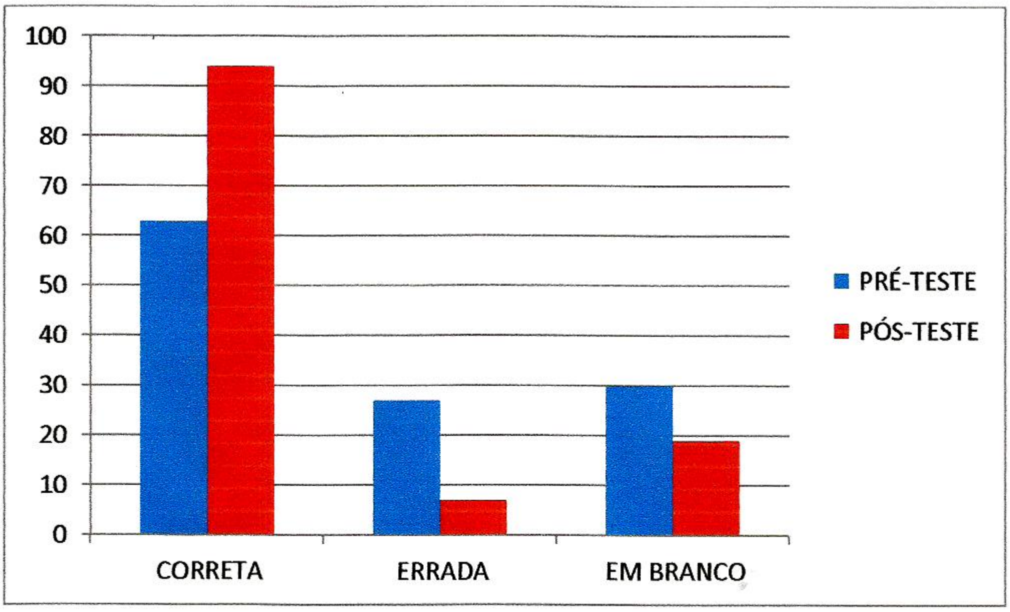
Gráfico 2: Resultado das situações-problema do pós-teste



Fonte: Próprio autor (2018).

No procedimento analítico desses resultados, apresentamos o Gráfico 3, que, na verdade, é um comparativo entre os resultados dos pré-teste (APÊNDICE A) e do pós-teste (APÊNDICE B), aplicados durante a pesquisa. Enfatizamos que, na correção das questões do pós-teste fomos mais criteriosos, posto que não houve intervenção do pesquisador durante o desenvolvimento das questões no sentido problematizar e/ou tirar dúvidas.

Gráfico 3: Comparativo do resultado entre pré-teste e pós-teste



Fonte: Próprio autor (2018).

Na análise do Gráfico 3, de natureza comparativa, verificamos que a mediação possibilitada pelo teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos durante o desenvolvimento das situações-problema propostas aos alunos para medir ângulos e calcular distâncias inacessíveis sem o uso da trena, amenizou significativamente a técnica da memorização de regras e de fórmulas. Além disso, os alunos relacionaram os conceitos matemáticos trabalhados com o seu cotidiano e, assim, atribuíram sentido e significado a esses conceitos.

No tocante à ação pedagógica de ensinar os conceitos trigonométricos nessa perspectiva da mediação do teodolito e instrumentos auxiliares, corroboramos com as ideias de Moura e Lorenzato (2001) ao afirmarem que, a atividade de medir, ou seja, de situações-problema envolvendo medições, deve emergir como uma necessidade de experiências e vivências cotidianas dos alunos, e não unicamente como lista de exercícios (ou tarefas mecânicas) a ser resolvida. Na verdade, tais situações-problema devem ser elaboradas com base em conhecimentos culturais. É isso que se apresenta como possibilidade de desenvolvimento pela escola dos conceitos científicos matemáticos.

Diante o exposto, vale ressaltarmos que foi possível trabalhar com o teodolito, pois constatamos a participação dos alunos no desenvolvimento de resolução dos problemas propostos envolvendo os conceitos básicos trigonométricos, com resultados satisfatórios.

No decorrer de todo o processo, visualizamos que os resultados dessa investigação mostram que o ensino dos conceitos Trigonométricos é gerador de motivação, união e entusiasmo dos alunos envolvidos na pesquisa, incluindo atividades diversificadas com situações reais da cidade de Caxias-MA. Assim, evidenciamos a participação dos alunos de uma aula prática que associou a teoria à prática, ou seja, práxis, favorecendo o processo ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

6.3 Compreensões dos alunos acerca da mediação do teodolito no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos

Nesta última categoria agregamos dados em que os alunos, sujeitos deste estudo, explicitaram suas compreensões acerca do movimento de aprendizagem de conceitos trigonométricos tendo o teodolito como instrumento mediador.

Em linhas gerais, constatamos que o emprego deste instrumento possibilitou aos alunos outro olhar sobre a Matemática. Podemos dizer que o seu emprego nas resoluções das situações-problema possibilitou a produção e a sustentação de novos sentidos, novas compreensões para a Matemática.

Desse modo, foi satisfatório como revelam os relatos a serem descritos posteriormente. Em outras palavras, houve uma grande motivação e entusiasmo dos alunos investigados, principalmente ao ouvi-los tecendo comentários da importância de se utilizar essa ferramenta e auxiliares na resolução de situações-problema envolvendo os conceitos trigonométricos.

Com o propósito de exemplificarmos, apresentamos alguns desses comentários/relatos escritos[3], os quais foram anotados pelo próprio pesquisador no último encontro, momento em que pontuamos questões descritivas e reflexivas relevantes, no coletivo, das atividades desenvolvidas com a mediação do teodolito:

> Com todas as experiências realizadas prefiro a aula prática, assim como essa com o teodolito, porque através dela adquiri uma melhor aprendizagem no ensino de trigonometria, além de sair da rotina da sala de aula, fazendo algo diferente e atraente (FELIPE, relato escrito, 2018).
>
> Posso revelar que na aula prática é mais fácil a aprendizagem, porque através dela consegui calcular medidas de distâncias inacessíveis a partir da construção de um teodolito, instrumento usado há muito tempo pelos topógrafos (JOANA, relato escrito, 2018)
>
> De acordo com os experimentos realizados percebi que na aula prática tive um melhor desenvolvimento e compreensão dos conhecimentos matemáticos. Além de resolver situações-problema com maior facilidade (PEDRO, relato escrito, 2018)
>
> Gostei de participar da aula prática em relação ao ensino de trigonometria porque a aprendizagem foi mais satisfatória do que a teórica, pois temos consciência do que estamos praticando. E assim, há uma motivação maior em aprender (MARIA, relato escrito, 2018)

[3]Para preservarmos a identidade dos alunos que deram seu posicionamento sobre a perspectiva de se trabalhar a Matemática empregando o teodolito, usamos nomes fictícios: Felipe, Joana, Pedro, Maria e João.

> Durante a construção do teodolito para calcular medidas inacessíveis em situações reais fora da sala de aula, foi bem diferente do que estamos acostumados a vivenciar, de modo que assim, tornou-se mais prazeroso e atraente. (JOÃO, relato escrito, 2018).

Para uma análise ponderada desses relatos escritos, no geral, os alunos se sentiram muito mais motivados devido às aulas práticas com a mediação do teodolito, o que aparece de forma bem evidenciada, sobretudo quando afirmam: "através dela adquiri uma melhor aprendizagem no ensino de trigonometria, além de sair da rotina da sala de aula, fazendo algo diferente e atraente" (Felipe); "[...] na aula prática é mais fácil a aprendizagem [...]"(Joana); "[...] tive um melhor desenvolvimento e compreensão dos conhecimentos matemáticos. Além de resolver situações-problema com maior facilidade" (Pedro); "[...] a aprendizagem foi mais satisfatória do que a teórica, pois temos consciência do que estamos praticando [...]" (Maria); "[...] foi bem diferente do que estamos acostumados a vivenciar, de modo que assim, tornou-se mais prazeroso e atraente" (João).

Sobre esses relatos, é pertinente pontuarmos a importância de se rever a nossa prática pedagógica enquanto professor, as nossas ações metodológicas para evitarmos a prática baseada numa concepção tradicional, repetitiva, como é tão bem criticada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais/Matemática (BRASIL, 2001, p. 30):

> [...] a prática mais frequente no ensino de Matemática era aquela em que o professor apresentava o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupunha que o aluno aprendia pela reprodução. Considerava-se que uma reprodução correta era evidência de que ocorrera a aprendizagem [...].

Assim, por corroboramos dessas ideias postas pelos PCN/Matemática, as experiências e vivências possibilitadas pela pesquisa nos levaram a refletir sobre a necessidade da mudança de paradigma no que tange à nossa prática pedagógica. Passamos, assim, a entender que o professor precisa ser um mediador, um organizador do ensino, das atividades, dos limites, e até mesmo das incertezas do cotidiano dos alunos em processo de aprendizagem de conceitos matemáticos. Na verdade, cabe ao professor criar e recriar suas estratégias metodológicas, como assim fizemos neste estudo, ao empregarmos o teodolito como um recurso mediador no processo ensino e aprendizagem em uma escola da Educação Básica.

7 Considerações Finais

A nossa atuação como professor de Matemática do Ensino Médio de escolas públicas nos últimos dezoito anos nos levou a desenvolver esta pesquisa com alunos desse nível de ensino por sentirmos a necessidade de revermos nossa prática pedagógica em decorrência da desmotivação e do insucesso por parte dos alunos nesse campo de saber. Foi nesse contexto que delineamos o problema de pesquisa: como o teodolito pode possibilitar o processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica? E, portanto, como objetivo geral analisar a importância do uso do teodolito como recurso mediador no processo ensino e aprendizagem de conceitos trigonométricos na Educação Básica.

Assim, na busca por respostas, enfatizamos que, as leituras e diálogos com autores do campo da Educação Matemática e as análises dos dados produzidos através dos instrumentos: questionários (pré-teste e pós-teste), observação com intervenção do pesquisador e os relatos escritos pelos alunos, nos aproximaram do movimento de aprendizagem de conceitos trigonométricos, mediados pelo teodolito.

É oportuno ressaltarmos que, a nossa experiência e vivência com esta pesquisa nos fez reforçar o entendimento de que não há um caminho pronto e garantido para se aprender e ensinar Matemática. Na verdade, o teodolito se apresentou apenas como uma das possibilidades, um dos vários caminhos, para se fazer a mediação desse conhecimento.

Nesse entendimento, ficou evidenciada a importância e necessidade do professor superar a prática pedagógica respaldada apenas na transmissão direta dos conceitos. Temos consciência de que, a priori, o professor necessita ser inovador, criativo e reflexivo para que, assim, possa possibilitar aos alunos as competências e habilidades necessárias ao desenvolvimento do aluno, não se limitando à leitura, interpretação e memorização de fórmulas e cálculos.

Desse modo, foi observado o interesse e entusiasmo dos alunos durante a resolução das situações-problema proposta a eles com a mediação do teodolito. Não podemos esquecer que este estudo é resultado de uma atividade de investigação que verificou o auxílio de materiais concretos no processo de apropriação de conceitos matemáticos trigonométricos, de modo particular, o teodolito.

Isto posto, afirmamos que a pesquisa realizada possibilitou e corroborou com a defesa de que as mediações de materiais concretos no ensino da Matemática, a exemplo do teodolito, com a intervenção do professor em um contexto de problematizações são importantes para mobilizar motivos e produzir nos alunos novos significados capazes de estimulá-los para o desenvolvimento de atividades.

Ao investigarmos indícios da apropriação da trigonometria em cálculos de alturas e medidas de distâncias inacessíveis a partir do uso de materiais concretos aqui discutido, observamos que esta investigação obteve êxito. Assim, por acreditarmos ter atingido os objetivos propostos. Sobre esses materiais, esclarecemos que o seu uso não foi compreendido como conteúdo, mas, sim, mediadores das aulas expositivas e práticas ministradas durante esta investigação. Entre outras palavras, como recurso metodológico que possibilite romper com o abismo que muitas vezes se apresenta entre os alunos e a Matemática, ou melhor, a escola. Por que não olharmos para o teodolito, por exemplo, com o esse papel de mediar o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos?

Assim, partimos dos conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos matemáticos, o que foi possibilitado através da aplicação de um questionário (pré-teste). Os alunos se familiarizaram com o teodolito. Para tanto, a construção desse material concreto se deu no próprio ambiente escolar sob a nossa orientação. Feito isso, desenvolvemos aulas teórico-práticas com a mediação do referido instrumento. E, finalmente, procuramos verificar através de relatos escritos e do questionário (pós-teste) as potencialidades do teodolito através da proposição de situações-problema. Enfim, neste trabalho acreditamos que os resultados da pesquisa revelam que, de certa forma, as dificuldades na compreensão e apropriação dos conceitos trigonométricos foram amenizadas.

Assim, entendemos que deve partir do professor a iniciativa de estimular novas descobertas no decorrer do aprendizado dos alunos. Temos consciência que é papel do professor organizar o ensino, a fim de facilitar o processo ensino e aprendizagem da Matemática.

Enfim, é oportuno nessas considerações finais, ressaltarmos que o desenvolvimento deste estudo nos possibilitou a produção de novos significados, novos sentidos acerca da atividade docente para além da reprodução e exposição de conteúdos sem considerar um contexto específico: o das problematizações mediado pelo teodolito.

Além disso, o aprofundamento teórico e metodológico desta pesquisa se apresentou em condição necessária para desenvolver nosso pensamento e consciência acerca da produção de significados de conceitos trigonométricos. Como diz Freitas (2002, p. 26), para o pesquisador, durante as ações e desenvolvimento de uma pesquisa, esse se torna "[...] alguém que está em processo de aprendizagem, de transformações. Ele se ressignifica no campo. O mesmo acontece com o pesquisado [...] tem oportunidade de refletir, aprender e ressignificar-se [...]". E isso foi evidenciado, sobretudo, ao analisarmos os dados produzidos através dos relatos escritos dos alunos investigados.

Referências

[1] ÁVILA, G. S. de S. **Várias faces da matemática**: *tópicos para licenciatura e leitura geral.* 2. ed. São Paulo: Bluncher, 2010.

[2] BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] BRASIL. *Ministério da Educação . Secretaria de Educação Fundamental.* **Parâmetros Curriculares Nacionais**: *matemática.* Brasília: MEC/SEF, 2001.

[4] BRASIL. *Ministério da Educação* . **Parâmetros Curriculares Nacionais**: *Ensino Médio.* Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

[5] BRASIL. *Ministério da Educação* . **PDE-Plano de Desenvolvimento da Educação-SAEB**: *ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores.* Brasília: MEC/SEB; INEP, 2008.

[6] BRASIL. **Clubes da Matemática da OBMEP**. Disponível em:<http://clubes.obmep.org.br/blog/trigonometria-trigonometria-do-triangulo-retangulo/>. Acesso em: 25 fev. 2018.

[7] COSTA, R. A.; ZUIN, E. de S. L. **O Teorema de Pitágoras sob uma perspectiva histórica**: *uma análise de livros didáticos de matemática do ensino fundamental no brasil.* Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos /CC03188585683T.doc.>. Acesso em: 18 fev. 2018.

[8] DOMINGUES, H. H. In: IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[9] DOPP, C. H. R. **Teodolito**: *uma forma de trabalhar as razões trigonométricas na prática.* Disponível em: <http://www.cadernosdapedagogia.ufscar.br/index.php/cp/article/viewFile/577 /229 >. Acesso em: 10 jul. 2017.

[10] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas/SP: Editora Unicamp, 2004.

[11] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática***: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas/SP: Autores Associados, 2012.

[12] FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia***: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, 1996.

[13] FREITAS, M. T. de A. *A abordagem sócio-histórica como orientadora da pesquisa qualitativa.* **Cadernos de Pesquisa**. São Paulo. n. 116, 2002. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/cp/n116/14397.pdf>. Acesso em: 10 set. 2018.

[14] GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[15] GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S. **Geometria Plana e Espacial***: um estudo axiomático.* Maringá/PR: EDUEM, 2010.

[16] IDE, S. M. de. *O jogo e o fracasso escolar.* In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e educação**. São Paulo: Cortez, 2011, p. 99-120.

[17] LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas** . Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[18] LIMA, E.L. et al.**Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[19] LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).

[20] LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas/SP: Autores Associados, 2006.

[21] LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar***: estudos e proposições.* 17. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

[22] MARCONI, M. de A. ; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia cientifica**. São Paulo: Atlas, 2017.

[23] MENDONÇA, M. do C. D. **Problematização***: um caminho a ser percorrido em educação matemática. 1993. 307 f.* Tese (Doutorado em Educação)-Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1993.

[24] MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento**. São Paulo: Hucitec, 2010.

[25] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[26] OLIVEIRA, M. da S. **Trigonometria e ensino**: *a história da matemática como recurso metodológico.* Disponível em: <http://www.sec.pb.gov.br/revista/index.php/compartilhandosaberes/article/download/62/65.> Acesso em: 20 fev. 2018.

[27] PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2016.

[28] ROCHA, H. B. V. L. da. **Problemas selecionados de geometria plana**. Parnaíba/PI: Sieart, 2016.

[29] SOUZA, M. C. de (Org.). **Pesquisa social**: *teoria, método e criatividade.* Petrópolis/ RJ: Vozes, 2010.

[30] TURRIONI, A. M. S.; PEREZ, G. *Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores.* In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas/SP: Autores Associados, 2006.

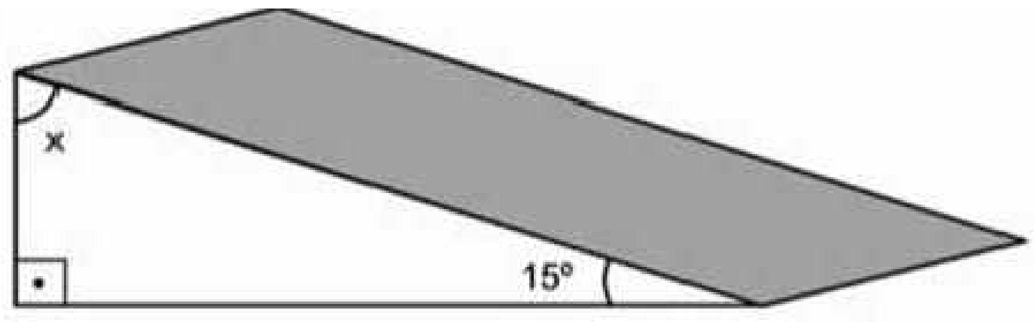
[31] WAGNER, E. **Trigonometria e Geometria**: *As leis dos senos e dos cossenos.* Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/ma13/> Acesso em: 08 fev. 2018.

[32] WAGNER, E. *O teodolito nas aulas de Geometria.* **Revista do Professor de Matemática**, n. 92, a. 34, 2º quadrimestre, 2016, p. 30-37.

Apêndices

Apêndice A - Questionário/pré-teste, contemplando atividades da avaliação externa Prova Brasil.

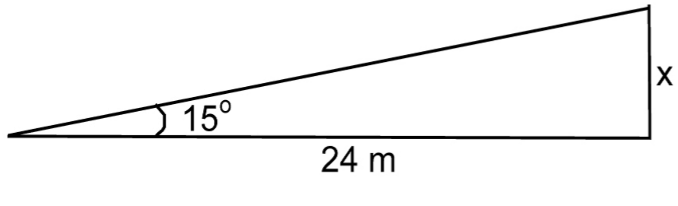
1. Para facilitar o aceso à escola, a diretora mandou construir uma rampa que forma um ângulo de 15° com a horizontal.



A medida do ângulo x que a rampa faz com a vertical é

a) 75°.
b) 85°.
c) 95°.
d) 105°.
e) 110°.

2. Um caminhão sobe uma rampa inclinada 15° em relação ao plano horizontal. Sabendo-se que a distância HORIZONTAL que separa o início da rampa até o ponto vertical mede $24m$, a que altura, em metros, aproximadamente, estará o caminhão depois de percorrer toda a rampa?



Dados
Sen 15° = 0,25
Cos 15° = 0,96
Tg 15° = 0,26

a) 6.

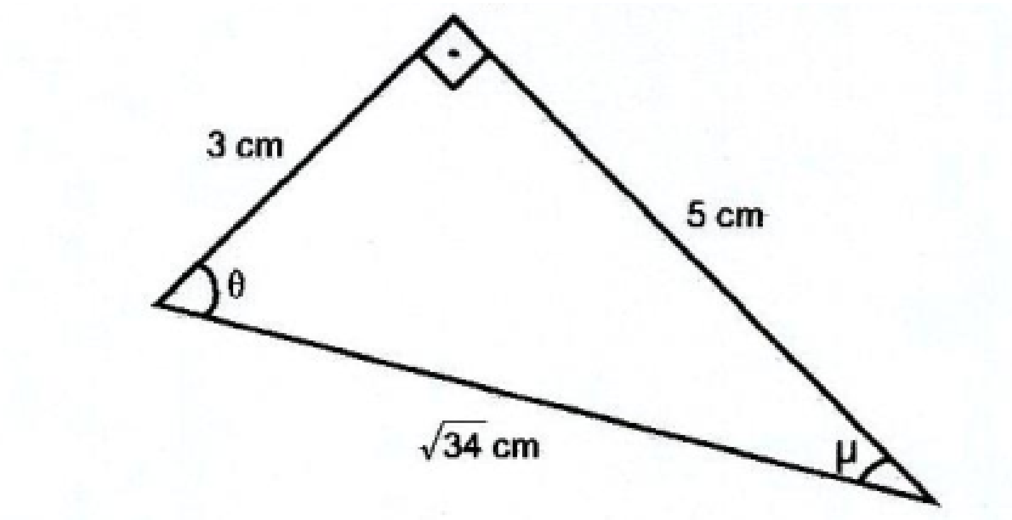
b) 23.

c) 25.

d) 92.

e) 100.

3. Observe o triângulo retângulo desenhado abaixo.



Qual é o valor da tangente do ângulo θ desse triângulo?

a) $\frac{3}{5}$.

b) $\frac{5}{3}$.

c) $\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

d) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

e) $\frac{5}{34}$.

4. Aparelhos de TV e monitores de computador são vendidos com medidas em polegadas. Para se saber quantas polegadas possui a tela de uma televisão, basta medir na diagonal, de um canto a outro da tela. Carla mediu o comprimento e a largura da tela de sua televisão e encontrou as medidas indicadas na figura abaixo.

A televisão de Carla é de quantas polegadas?

a) 12.

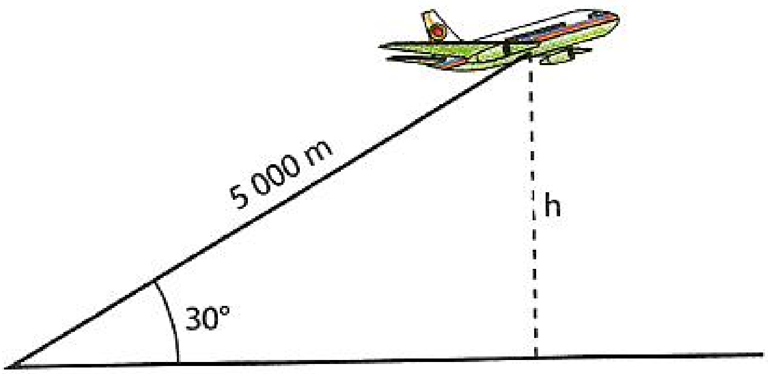
b) 16.

c) 20.

d) 28.

e) 30.

5. Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação ao solo.



Após percorrer 5000 m em linha reta, sua altura h em relação ao solo será de

a) 1530 m.

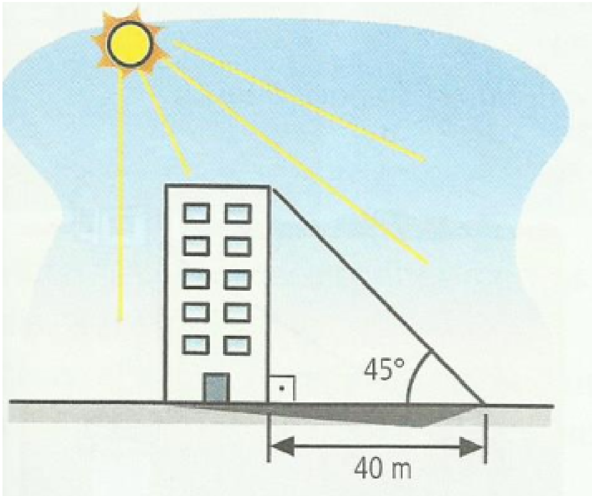
b) 2500 m.

c) 3200 m.

d) 4700 m.

e) 5120 m.

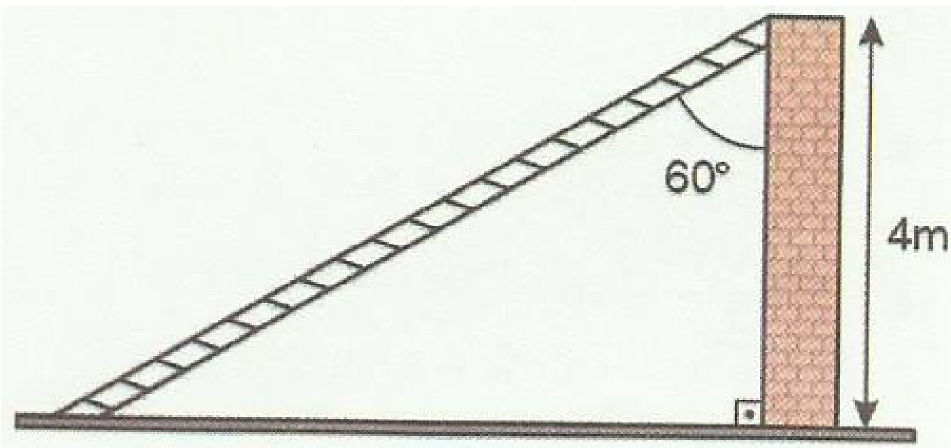
6. Um prédio projeta uma sombra de $40m$ quando os raios solares formam um ângulo de $45°$ com o solo.



A altura desse prédio é

a) 28 m.
b) 40 m.
c) 56 m.
d) 80 m.
e) 94 m.

7. Uma escada apoiada em uma parede, num ponto que dista $4m$ do solo, forma, com essa parede, um ângulo de $60°$.



O comprimento da escada, em metros, é

a) 2.

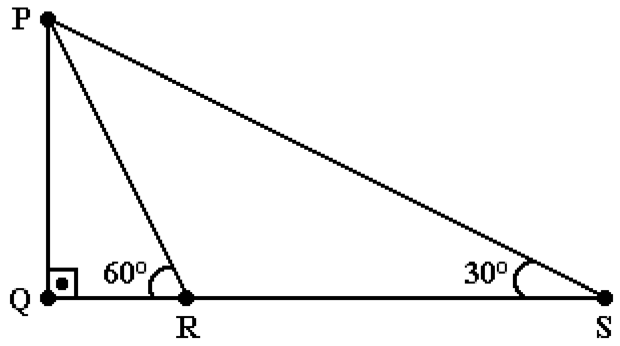
b) 4.

c) 8.

d) 16.

e) 18.

8. Em uma avenida plana, uma torre QP é vista por dois observadores R e S sob os ângulos de 60°e 30° com a horizontal, como mostra a figura a seguir.



Se a distância entre os observadores é de 100 m, qual é a altura da torre?

a) $100\sqrt{3}$.

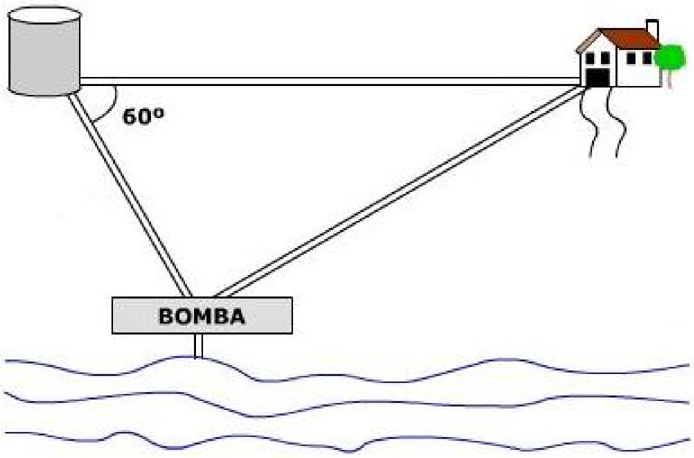
b) 4.

c) 8.

d) 16.

e) 18.

9. A água consumida na residência de uma fazenda é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50 m de distância. A residência está a 80 m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água-bomba e caixa-d'água-residência é 60°.



Planejando bombear a água do mesmo ponto de captação até a residência, quantos metros de encanamento são necessários?

a) 56 m.

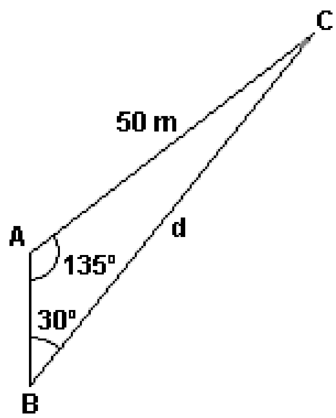
b) 58 m.

c) 62 m.

d) 68 m.

e) 70 m.

10. Na instalação das lâmpadas na Praça Magalhães de Almeida da cidade de Caxias-MA, a equipe da Companhia Energética do Maranhão-CEMAR precisou medir a distância entre duas delas, colocadas nos pontos B e C da praça formando um triângulo, conforme mostra a figura abaixo.



Qual é a distância, em metros, entre os pontos B e C dessa praça?

a) $50\sqrt{2}$.

b) $\dfrac{50\sqrt{6}}{3}$.

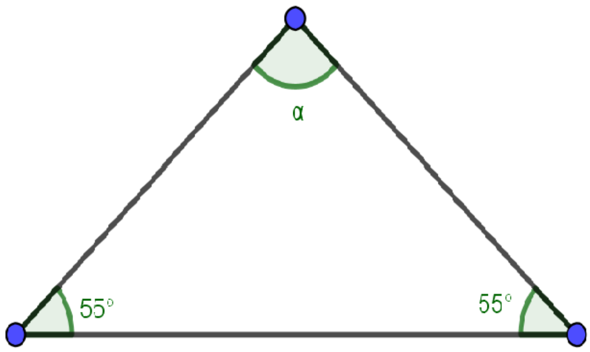
c) $50\sqrt{3}$.

d) $25\sqrt{6}$.

e) $50\sqrt{6}$.

Apêndice B - Questionário/pós-teste, contemplando atividades da avaliação externa Prova Brasil.

1. Ao colocar a mesa para o almoço, Fernanda dobrou o guardanapo em forma de um triângulo isósceles.



Com base nas informações da figura, qual é valor da medida do ângulo α?

a) 35°.

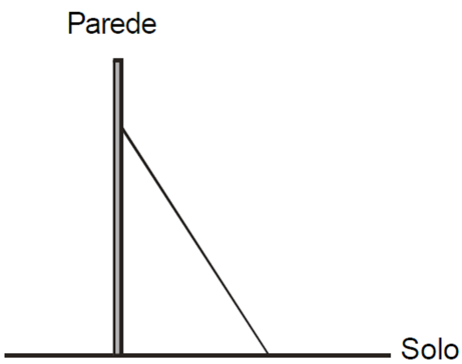
b) 55°.

c) 70° .

d) 100°.

e) 110°.

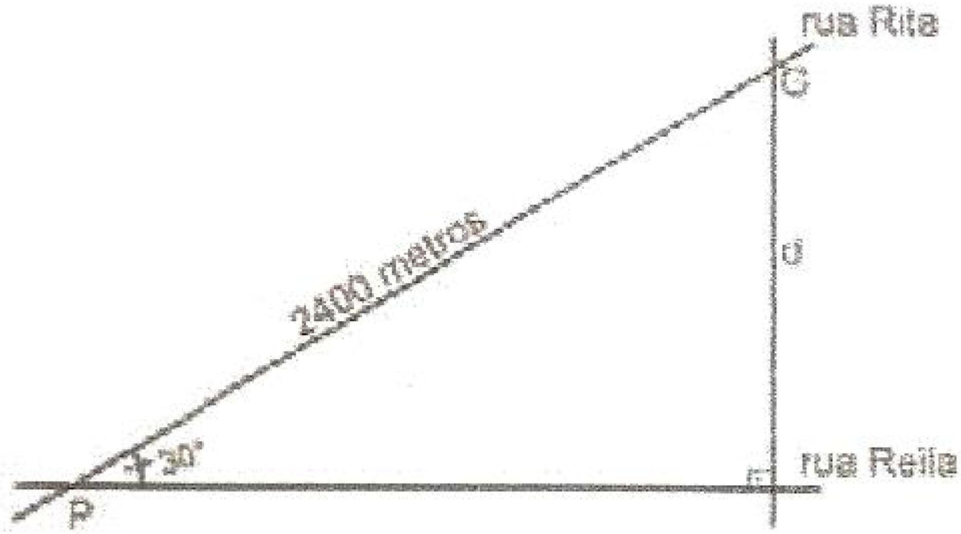
2. Observe a figura abaixo que representa uma escada apoiada em uma parede que forma um ângulo reto com o solo. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.



A escada mede, aproximadamente,

a) 5 m.
b) $6,7$ m.
c) $7,3$ m.
d) 9 m.
e) 12 m.

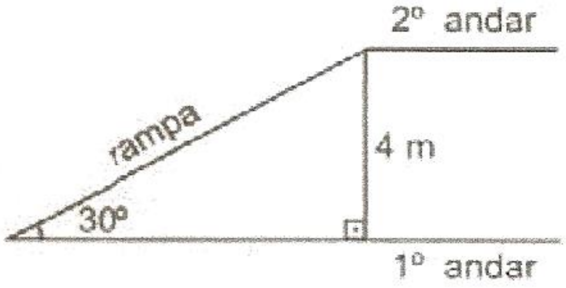
3. Duas ruas de uma cidade mineira encontram-se em P formando um ângulo de $30°$. Na Rua Rita, existe um posto de gasolina G que dista 2400 m de P, conforme mostra a ilustração abaixo.



Sabendo que $cos30° \cong 0,86$,$sen30° \cong 0,50$ e $tg30° \cong 0,68$, a distância d, em metros, do ponto G à Rua Reila é aproximadamente igual a

a) 1200.
b) 1392.
c) 2064 .
d) 2790.
e) 4800.

4. Um pedreiro construiu uma rampa de acesso do 1º ao 2º andar de uma escola conforme mostra a figura abaixo.



O comprimento dessa rampa, em metros é

a) 2.

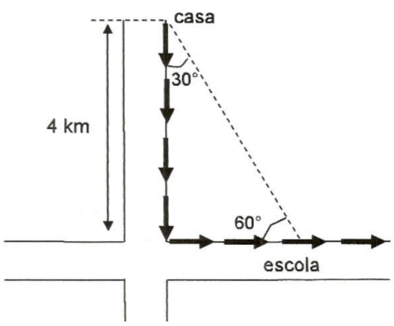
b) 4.

c) $4\sqrt{2}$.

d) $4\sqrt{3}$.

e) 8.

5. Para se deslocar de sua casa até a sua escola, um aluno percorre o trajeto representado na figura seguinte.



A distância total, em km, que o aluno percorre no seu trajeto de casa para a escola é de

a) $4 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

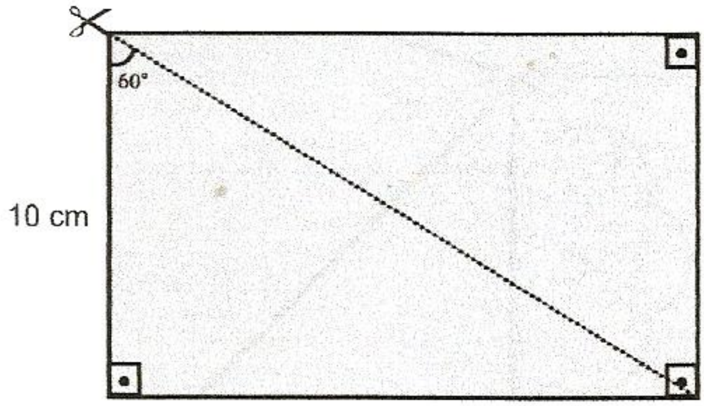
b) $4 + \sqrt{3}$.

c) $4 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

d) $4\sqrt{3}$.

e) $4 + 4\sqrt{3}$.

6. Antônio cortou um retângulo por uma de suas diagonais, obtendo dois triângulos, conforme ilustrado na figura abaixo.



Essa diagonal forma com o lado que mede 10 cm um ângulo de 60°. Qual é a medida da diagonal desse retângulo?

a) $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

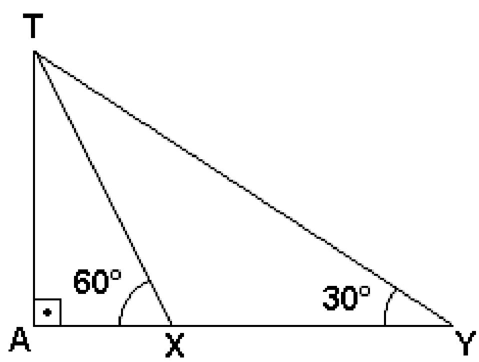
b) $10\sqrt{2}$ cm.

c) 5 cm.

d) 15 cm.

e) 20 cm.

7. Em uma rua plana, uma torre de celular AT é vista por dois observadores X e Y sob os ângulos de 30° e 60° com o plano horizontal, conforme a figura ilustrada abaixo.



Se a distância entre os observadores é de 40 m, qual é aproximadamente a altura da torre?(Se necessário, utilize $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$).

a) 30 m.

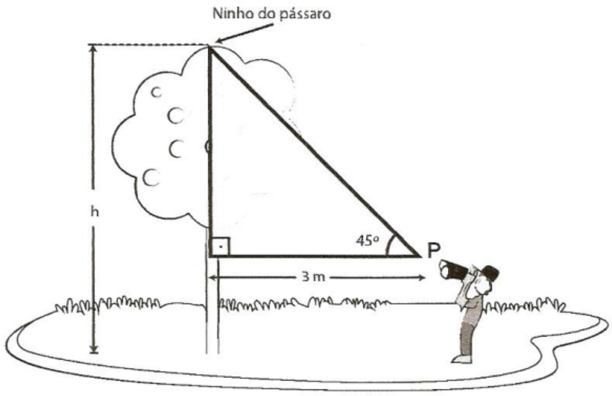
b) 32 m.

c) 34 m.

d) 36 m.

e) 38 m.

8. João posicionou um binóculo na posição P, a $1,5$ m do solo, para observar o ninho de um pássaro na copa de uma árvore. Veja essa representação na figura abaixo.



Em relação ao solo, esse ninho encontra-se a uma altura h de medida igual a

a) $3,0$ m.

b) $4,5$ m.

c) $6,0$ m.

d) $7,5$ m.

e) $9,0$ m.

9. Dois pontos A e B, estão situados na margem de um rio e distantes 4 km um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que a distância entre os pontos A e C mede 3 km e a distância entre B e C mede 4 km.

De acordo com as informações, qual o valor do cosseno do maior ângulo interno do triângulo formado pelos pontos A, B e C?

a) $\frac{11}{24}$.

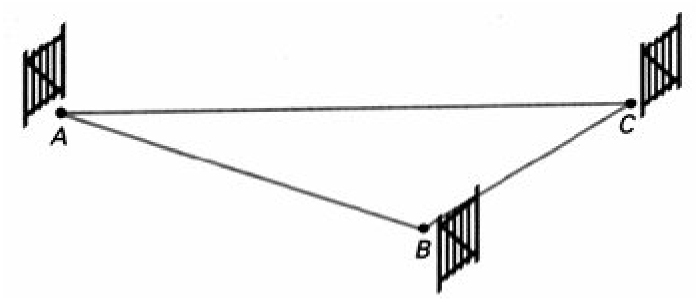
b) $\frac{-11}{24}$.

c) $\frac{3}{8}$.

d) $\frac{-3}{8}$.

e) $\frac{-3}{10}$.

10. Os pontos A, B e C na figura abaixo representam três portões em uma fazenda. O proprietário percorre, em linha reta, 100 km para ir de A até B, tal que os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}C$ medem, respectivamente, 120° e 30°.



Com base nas medidas feitas pelo proprietário, qual a distância entre portões A e B?

a) $100\sqrt{3}$ km.

b) $200\sqrt{3}$ km.

c) $90\sqrt{3}$ km.

d) 25 km.

e) 100 km.