ENZO HARUO HIRAOKA MORIYAMA

TRÊS TEOREMAS DA ÁLGEBRA LINEAR QUE NÃO SÃO VÁLIDOS EM DIMENSÃO INFINITA

São Paulo, 2018

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO - IFSP

ENZO HARUO HIRAOKA MORIYAMA

TRÊS TEOREMAS DA ÁLGEBRA LINEAR QUE NÃO SÃO VÁLIDOS EM DIMENSÃO INFINITA

Orientador: Prof. Me. SAMUEL FRANCISCO

Dissertação de mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ENZO HARUO HIRAOKA MORIYAMA,
E ORIENTADA PELO PROF. ME. SAMUEL FRANCISCO.

SÃO PAULO, 2018

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M854t Moriyama, Enzo Haruo Hiraoka
Três teoremas da álgebra linear que não são válidos em dimensão infinita / Enzo Haruo Hiraoka Moriyama. São Paulo: [s.n.], 2018.
121 f. il.

Orientador: Samuel Francisco

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

1. Álgebra Linear. 2. Teorema da Representação do Funcional Linear. 3. Teorema do Operador Adjunto. 4. Teorema Espectral. 5. Dimensão Infinita. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

ENZO HARUO HIRAOKA MORIYAMA

TRÊS TEOREMAS DA ÁLGEBRA LINEAR QUE NÃO SÃO VÁLIDOS EM DIMENSÃO INFINITA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo.

Aprovada em setembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Samuel Francisco - Orientador
IFSP - Câmpus Itaquaquecetuba

Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
IFSP - Câmpus São Paulo

Profa. Dra. Maria de Lourdes Merlini Giuliani
UFABC

São Paulo - SP
2018

Dedico este trabalho a meu pai (in memorian) e minha mãe, que sempre me incentivaram a estudar e à Irina, que sempre é uma inspiração para minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu pai (in memorian), por sempre ter me incentivado a estudar e ter me apoiado nos momentos difíceis.

A minha mãe, por sempre apoiar minhas escolhas e me dar a força que preciso para cada dia.

À Irina, que sempre me mostra o lado bom da vida e mostra como cada esforço vale a pena.

A minha família, que me fazem acreditar no meu futuro.

À Thais, que é o meu exemplo de perseverança e gosto pela vida acadêmica.

A meu eterno professor, Fernando, que sempre ilumina novos caminhos.

A meus amigos, parceiros da vida, do esporte, da AAAGW, dos estudos e das intermináveis conversas que começam numa simples história e vão “ao infinito e além”, repletas de conhecimento e novas formas de encarar o mundo, que me fizeram chegar até aqui.

Ao Instituto Federal de São Paulo, pela oportunidade de realização desse curso de mestrado.

Ao Professor Samuel Francisco, pela parceria e orientação que deu, não só durante este trabalho, mas também ao longo de todo período do curso.

À Professora Maria de Lourdes Merlini Giuliani e ao Professor Marco Aurélio Granero Santos, por aceitarem compor a banca examinadora e contribuírem com o trabalho.

Ao Professor Henrique Marins de Carvalho, pelas contribuições ao trabalho.

Aos professores e colegas do PROFMAT, do IFSP, que agregaram infinitamente em minha formação e conhecimento.

"Ao infinito... e além!"

(Buzz Lightyear, *Toy Story*)

RESUMO

Este trabalho apresenta contraexemplos em espaços vetoriais de dimensão infinita para três importantes teoremas da Álgebra Linear. Estes teoremas são válidos em dimensão finita e eles são o Teorema da Representação do Funcional Linear, o Teorema do Operador Adjunto e o Teorema Espectral. Os contraexemplos estão no $\mathbb{R}^\infty$ e caracterizam-se pela simplicidade através da similaridade que esse espaço vetorial possui com $\mathbb{R}^n$ para definir uma base ortormal e um produto interno. Este método diverge do encontrado em livros-textos convencionais, nos quais o espaço de polinômios e o produto interno por integrais são usados. Além disso, o presente texto faz uso de uma linguagem acessível a estudantes de matemática de nível de graduação e inclui muitas demonstrações detalhadas. Nossa esperança é que esse formato torne o trabalho mais útil tanto para os estudantes quanto para os pesquisadores.

Palavras-chave: Álgebra Linear, dimensão infinita, Teorema Espectral, Teorema da Representação do Funcional Linear

ABSTRACT

This work presents counterexamples in an infinite-dimension vector spaces for three important theorems from linear algebra. Theses theorems are valid in finite dimension and they are the Representation Theorem of Linear Functional, Adjoint Operator Theorem and the Spectral Theorem. The counterexamples are in the $\mathbb{R}^\infty$ and are characterized simplicity through the similarity that such vector space has with $\mathbb{R}^n$ to define an orthonormal basis and an inner product. This method diverges from that found in conventional textbook where polynomial space and integral form inner product are used. Furthermore, the present text makes use of a language accessible to undergraduate-level math students and includes plenty of detailed proofs. Our hope is that this format will turn the work more useful for students as well as for researchers.

Keywords: Linear Algebra, infinite-dimensional, Spectral Theorem, Representation Theorem of Linear Functionals

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os cursos de Álgebra Linear no nível de graduação costumam abordar espaços vetoriais de dimensão finita e, usualmente, são dados exemplos em $\mathbb{R}^n$, em particular, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, por ter uma representação geométrica usada em Geometria Analítica.

Este trabalho busca estudar três importantes teoremas da Álgebra Linear (o Teorema da Representação do Funcional Linear; o Teorema do Operador Adjunto; e o Teorema Espectral) que são válidos para espaços vetoriais de dimensão finita, mas não são válidos em dimensão infinita, apresentando contraexemplos em $\mathbb{R}^\infty$ para esses teoremas e discutindo brevemente o uso da hipótese de ter uma dimensão finita em cada uma das demonstrações.

O propósito de trazer contraexemplos em $\mathbb{R}^\infty$ é a similaridade que esse espaço possui com relação a $\mathbb{R}^n$, que não são vistos em livros-textos como Coelho (2005), Kreyszig (1989) e Lima (2004), por exemplo.

Além disso, este texto busca trazer uma linguagem acessível a um aluno de graduação que nunca tenha estudado ou esteja estudando pela primeira vez Álgebra Linear. Então, algumas demonstrações ou seu detalhamento estão descritos de forma detalhada.

A exemplo disso, alguns trechos, como o desenvolvimento na demonstração do *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*, na página 69, estão apresentados passo a passo. Diferentemente do que Coelho (2005) e Lima (2004) apresentam em seus livros, por exemplo, em que ocultam algumas passagens através das palavras “não é difícil ver que [...] é ortogonal” e “um cálculo simples mostra que [...] é ortogonal”, por serem voltados a leitores com uma intimidade um pouco maior com o assunto.

No entanto, para alguns momentos pontuais do texto, espera-se que o aluno tenha alguma afinidade com resolução de sistemas de equações lineares, para entender a demonstração da Proposição 1.1.1, e conheça o *Teorema Fundamental da Álgebra*, usado na demonstração da Proposição 4.3.1.

Então, esse trabalho se divide basicamente em duas partes: a primeira, composta pelos capítulos 1, 2, 3 e 4, traz os conceitos, definições necessárias para estudar os três teoremas principais desse trabalho em dimensão finita, além de já introduzir alguns exemplos e comentários sobre espaços de dimensão infinita; e a segunda, composta pelo capítulo 5, apresenta contraexemplos em $\mathbb{R}^\infty$ de cada um dos três teoremas.

O capítulo 1 apresenta as definições de corpo, espaço vetorial, base e dimensão, além de outras relacionadas a essas. Apresenta também algumas propriedades e proposições referentes a esses objetos matemáticos que serão utilizadas tanto para o entendimento dos teoremas apresentados ao longo do texto como para a construção dos contraexemplos. Além disso, o capítulo finaliza abordando os espaços de dimensão infinita e demonstrando que todo espaço vetorial tem base, independentemente de sua dimensão ser finita ou infinita. Para isso, apresenta brevemente os conceitos necessários para entender o *Lema de Zorn*, que é utilizado como um axioma para provar que todo espaço vetorial tem base.

Já no capítulo 2, apresentam-se definições e propriedades referentes a transformações lineares. Há também alguns exemplos tanto em espaços de dimensão finita quanto em espaços de dimensão infinita, já construindo parcialmente os contraexemplos a serem utilizados no capítulo 5.

No caso do capítulo 3, há três partes, a primeira com definições e proposições referentes a autovalores e autovetores e a segunda com definições e proposições referentes a produto interno e ortogonalidade, incluindo o *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*. Nessas duas partes, também há exemplos em espaços vetoriais de dimensão finita e infinita. A última seção apresenta o *Teorema da Representação do Funcional Linear* para espaços vetoriais de dimensão finita.

Para finalizar os capítulos que falam dos espaços de dimensão finita, o capítulo 4, a fim de apresentar os outros dois teoremas para dimensão finita, traz definições e proposições referentes a operadores lineares adjuntos e autoadjuntos. Novamente, trazendo exemplos em dimensão finita e em dimensão infinita. Em particular, apresenta uma prévia dos contraexemplos trabalhados no último capítulo.

Por fim, o capítulo 5 compila alguns exemplos em $\mathbb{R}^\infty$ já apresentados nos capítulos anteriores, mas organizando e complementando para mostrar contraexemplos em $\mathbb{R}^\infty$ para os três teoremas que foram demonstrados para dimensão finita. Além disso, comenta brevemente a importância da dimensão finita para a demonstração de cada um dos teoremas.

Assim, esse trabalho tenta mostrar de forma acessível a um leitor que não tenha tanta afinidade com o assunto, contraexemplos, em $\mathbb{R}^\infty$, de três teoremas da Álgebra

Linear que são válidos em dimensão finita, mas não em dimensão infinita, justificando a importância da hipótese de ter dimensão finita em cada um dos enunciados.

1

ESPAÇOS VETORIAIS

Neste capítulo, serão apresentados a definição de espaço vetorial, alguns conceitos relacionados, como conjunto gerador, base, dimensão, e proposições relacionadas.

Ao longo desta parte, haverá alguns exemplos, entre os quais o espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$, que será bastante utilizado nos capítulos seguintes.

O presenta capítulo se baseia nos livros de Coelho (2005), Kreyszig (1989) e Lima (2004).

1.1 ESPAÇOS VETORIAIS, BASES E DIMENSÃO

Nesta seção estão enunciadas algumas definições e proposições que serão utilizadas ao longo do texto.

Definição 1.1.1 (Corpo)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio, munido de duas operações (adição e multiplicação). $\mathbb{K}$ é dito um **corpo**, se para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$ valem as seguintes propriedades:*

A1. (comutativa) $a + b = b + a$.

A2. (associativa) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

*A3. (elemento neutro) Existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$, tal que $a + 0 = a$. Esse elemento é chamado de **elemento neutro**.*

*A4. (elemento oposto) Dado $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento, denotado por $(-a)$, tal que $a + (-a) = 0$. Tal elemento é chamado de **elemento oposto** ou **inverso aditivo**.*

M1. (comutativa) $a \cdot b = b \cdot a$.

M2. *(associativa)* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

M3. *(elemento neutro) Existe um elemento* $1 \in \mathbb{K}$, *tal que* $a \cdot 1 = a$. *Esse elemento é chamado de* ***elemento neutro multiplicativo*** *ou* ***unidade***.

M4. *(elemento inverso) Dado* $a \in \mathbb{K}$, a *não nulo, existe um elemento, denotado por* a^{-1}, *tal que* $a \cdot a^{-1} = 1$. *Tal elemento é chamado de* ***elemento oposto*** *ou* ***inverso multiplicativo***.

D. *(distributiva)* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Alguns exemplos de corpos:

Exemplo 1.1.1. *O conjunto dos números reais e o dos complexos, munidos de suas operações usuais, são dois exemplos de corpos.*

Exemplo 1.1.2. *O conjunto* $\mathbb{Z}_2$, *definido por*

$$\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$$

e munido das operações de adição e multiplicação definidas pelas tabelas abaixo:

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

Tabela 1: Adição em $\mathbb{Z}_2$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Tabela 2: Multiplicação em $\mathbb{Z}_2$

Das tabelas, podem-se verificar as propriedades das operações de um corpo.

Definição 1.1.2 (Espaço Vetorial)**.** *Seja* V *um conjunto não vazio e* $\mathbb{K}$ *um corpo, cujos elementos serão chamados de* ***escalares***. *Diz-se que* V *é um* ***espaço vetorial*** *sobre* $\mathbb{K}$, *se em seus elementos, denominados por* ***vetores***, *estiverem definidas duas operações:*

1. ***Adição***: *Cada par* (u, v), *com* $u, v \in V$, *corresponde a um vetor* $(u + v) \in V$;

2. ***Multiplicação por escalar***: *Cada par* (α, v), *com* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $v \in V$, *corresponde a um vetor* $(\alpha \cdot v) \in V$. *Para simplificar a notação, omite-se o ponto quando se trata de multiplicação por escalar* ($\alpha \cdot v = \alpha v$).

Além disso, tais operações devem obedecer às propriedades a seguir.

Dados vetores $v, u, w \in V$ *e escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *valem:*

A1. *(comutativa)* $v + u = u + v$.

A2. *(associativa)* $v + (u + w) = (v + u) + w$.

A3. *(vetor nulo) Existe um vetor* $0 \in V$, *tal que* $v + 0 = v$. *Esse vetor é chamado de* ***vetor nulo*** *ou* ***vetor zero***.

A4. *(inverso aditivo) Dado* $v \in V$, *existe um vetor, denotado por* $(-v)$, *tal que* $v + (-v) = 0$. *Tal vetor é chamado de* ***simétrico*** *ou* ***inverso aditivo***.

M1. $\alpha(\beta v) = (\alpha \cdot \beta)v$.

M2. $1v = v$, *onde* 1 *é a unidade do corpo* $\mathbb{K}$.

D1. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

D2. $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$.

Observação: neste trabalho, o vetor nulo será quase sempre representado por 0, que é o mesmo símbolo utilizado para o elemento neutro da adição de um corpo. Porém, o contexto deixará claro sobre qual "zero" está se tratando. Eventualmente, será denotado $\vec{0}$ para se referir ao vetor nulo de um espaço vetorial e diferenciá-lo do elemento neutro 0. Outras notações eventualmente serão utilizadas, mas estará explícita no texto a notação alternativa.

Neste trabalho, os espaços vetoriais serão sobre um corpo $\mathbb{K}$, sendo $\mathbb{K}$ sempre o corpo dos reais ou dos complexos, a menos que se especifique o contrário.

Seguem abaixo alguns exemplos de espaço vetorial:

Exemplo 1.1.3. *Um exemplo comum de espaço vetorial é* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}$, *definido por*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

As operações são dadas por:

- *Adição:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

com $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

- *Multiplicação por escalar:*

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Pode-se verificar, para o $\mathbb{R}^n$, que as oito propriedades das operações de espaço vetorial são satisfeitas.

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A1.

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

A2.

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) \\ &= x + (y + z). \end{aligned}$$

A3. Tome o vetor $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} x + \vec{0} &= (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) \\ &= (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \\ &= (x_1, \ldots, x_n) \\ &= x. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{0}$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$.

A4. Considere $-x = (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} x + (-x) &= (x_1, \dots, x_n) + (-x_1, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 + (-x_1), \dots, x_n + (-x_n)) \\ &= (0, \dots, 0) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Logo, para cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, existe um $-x \in \mathbb{R}^n$ tal que a adição dos dois resulta no vetor nulo.

M1.

$$\begin{aligned} \alpha(\beta x) &= \alpha\left(\beta\left(x_1, \dots, x_n\right)\right) \\ &= \alpha\left(\beta \cdot x_1, \dots, \beta \cdot x_n\right) \\ &= (\alpha \cdot (\beta \cdot x_1), \dots, \alpha \cdot (\beta \cdot x_n)) \\ &= ((\alpha \cdot \beta) \cdot x_1, \dots, (\alpha \cdot \beta) \cdot x_n) \\ &= (\alpha \cdot \beta)\left(x_1, \dots, x_n\right) \\ &= (\alpha \cdot \beta)x. \end{aligned}$$

M2. Seja 1 a unidade do corpo $\mathbb{R}$, então tem-se que

$$\begin{aligned} 1x &= 1\left(x_1, \dots, x_n\right) \\ &= (1 \cdot x_1, \dots, 1 \cdot x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= x. \end{aligned}$$

D1.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)x &= (\alpha + \beta)\left(x_1, \dots, x_n\right) \\ &= ((\alpha + \beta) \cdot x_1, \dots, (\alpha + \beta) \cdot x_n) \\ &= (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n + \beta \cdot x_n) \\ &= (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n) + (\beta \cdot x_1, \dots, \beta \cdot x_n) \\ &= \alpha\left(x_1, \dots, x_n\right) + \beta\left(x_1, \dots, x_n\right) \\ &= \alpha x + \beta x. \end{aligned}$$

D2.

$$\begin{aligned}
\alpha(x+y) &= \alpha\left((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\right)\\
&= \alpha\left(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n\right)\\
&= \left(\alpha\cdot(x_1+y_1),\dots,\alpha\cdot(x_n+y_n)\right)\\
&= \left(\alpha\cdot x_1+\alpha\cdot y_1,\dots,\alpha\cdot x_n+\alpha\cdot y_n\right)\\
&= \left(\alpha\cdot x_1,\dots,\alpha\cdot x_n\right)+\left(\alpha\cdot y_1,\dots,\alpha\cdot y_n\right)\\
&= \alpha\left(x_1,\dots,x_n\right)+\alpha\left(y_1,\dots,y_n\right)\\
&= \alpha x+\alpha y.
\end{aligned}$$

É interessante observar que essas propriedades do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ decorrem do fato de $\mathbb{R}$ ser um corpo.

Neste último exemplo, para $n = 2$ ou $n = 3$, tem-se, respectivamente, o plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ e o espaço euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ que podem ser representados com eixos coordenados em 2 ou 3 dimensões. Para $n = 1$, tem-se a reta numérica, que é o próprio conjunto $\mathbb{R}$ como um espaço vetorial sobre ele mesmo.

Usando a mesma ideia do $\mathbb{R}^n$, pode-se pensar no seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.4. *O conjunto $\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, podendo $\mathbb{K}$ ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. As operações são definidas como no exemplo anterior.*

A demonstração de que $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial é análoga ao do exemplo anterior.

Exemplo 1.1.5. *Um exemplo semelhante aos anteriores é o $\mathbb{R}^\infty$, definido por:*

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n.$$

Pode-se pensar nesse espaço como o conjunto das sequências de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, tais que $x_i = 0$ para todo $i > n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$.

Para que esse espaço faça sentido, define-se uma notação para os vetores de $\mathbb{R}^n$ sendo $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, ou seja, $x_i = 0$ para todo $i \geq n+1$. As operações são análogas às de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1.6. *Um último exemplo de espaço vetorial é o conjunto de todos polinômios com coeficientes reais sobre o corpo dos reais.*

$$\mathbb{R}[x] = \left\{P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } a_i \in \mathbb{R}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n\right\}.$$

As operações são as usuais de adição de polinômios e multiplicação por um número real.

Agora, serão apresentados alguns conceitos que envolvem a estrutura de um espaço vetorial.

Definição 1.1.3 (Combinação Linear)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um vetor $v \in V$ é dito uma* ***combinação linear*** *de $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

ou seja,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.1.7. *Considere o espaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Sejam $v = (1,1)$, $u = (0,1)$ e $w = (2,1)$. Então, o vetor $t = (0,2)$ é combinação linear de v, u e w, porque, tomando os escalares 2, 1 e (-1), tem-se:*

$$t = 2 \cdot v + 1 \cdot u + (-1) \cdot w,$$

isto é,

$$(0,2) = 2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (0,1) + (-1) \cdot (2,1).$$

Definição 1.1.4 (Conjunto Gerador)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} \subset V$. Diz-se que $\mathcal{B}$ é um* ***conjunto gerador*** *de V (ou que $\mathcal{B}$* ***gera*** *V), se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de $\mathcal{B}$.*

Exemplo 1.1.8. *Considere o espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{B} = \{(1,-1,-1); (0,3,3); (0,2,1); (0,0,5)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, porque qualquer vetor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$:*

$$(x,y,z) = x \cdot (1,-1,-1) + \frac{x}{3} \cdot (0,3,3) + \frac{y}{2} \cdot (0,2,1) + \left(\frac{z}{5} - \frac{y}{10}\right) \cdot (0,0,5).$$

Exemplo 1.1.9. *Para o Exemplo 1.1.5, tem-se o seguinte conjunto gerador:*

$$\mathcal{B} = \{e_n = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots) \in \mathbb{R}^\infty : a_i = 0, \text{ se } i \neq n, \text{ e } a_i = 1, \text{ se } i = n\}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (\underbrace{1}_{a_1}, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\
e_2 &= (0, \underbrace{1}_{a_2}, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\
e_3 &= (0, 0, \underbrace{1}_{a_3}, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\
&\vdots \\
e_{n-1} &= (0, 0, 0, \dots, \underbrace{1}_{a_{n-1}}, 0, 0, \dots) \\
e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{a_n}, 0, \dots) \\
e_{n+1} &= (0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underbrace{1}_{a_{n+1}}, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

De fato, isso é um conjunto gerador para $\mathbb{R}^\infty$. Seja $x = (x_1, \dots, x_i, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. Pela definição desse espaço vetorial, mostrada no Exemplo 1.1.5, existe algum número natural n_0 tal que $x_i = 0$ para todo $i > n_0$. Então, é possível escrever:

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, \dots, x_{n_0}, 0, 0, \dots) \\
&= (x_1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) + (0, x_2, 0, \dots, 0, \dots) + \cdots + (0, 0, 0, \dots, 0, x_{n_0}, 0, 0, \dots) \\
&= x_1(1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, \dots) + \cdots + x_{n_0}(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \\
&= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{n_0} e_{n_0} \\
&= \sum_{i=1}^{n_0} x_i e_i
\end{aligned}
$$

onde $x_i \in \mathbb{R}$ com $i = 1, 2, \dots, n_0$.

Logo, vê-se que qualquer vetor de $\mathbb{R}^\infty$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$ apresentado no exemplo.

Exemplo 1.1.10. *De maneira semelhante ao exemplo anterior, pode-se construir um conjunto gerador para* $\mathbb{R}[x]$ *(Exemplo 1.1.6). Seja* $\mathcal{B}$ *o conjunto de todos monômios de grau* $n \in \mathbb{N}$ *e coeficiente* 1*, incluindo o* $x^0 = 1$*, ou seja,*

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots \right\}.$$

Desta forma, $\mathcal{B}$ *gera* $\mathbb{R}[x]$.

Para mostrar que tal conjunto gera $\mathbb{R}[x]$, tome $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Da própria forma como definimos o polinômio, já se tem que $p(x)$ é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

A seguir, algumas observações sobre conjuntos geradores:

1. Todo espaço vetorial possui um conjunto gerador.

   De fato, para um espaço vetorial V, ele próprio é um conjunto gerador de si mesmo.

2. Se $\mathcal{B}$ for um conjunto gerador de V, então todo $\mathcal{B}' \subset V$, tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, é um conjunto gerador de V.

   Sucintamente, se um vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$, então também pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}'$, pois os elementos de $\mathcal{B}$ também pertencem a $\mathcal{B}'$.

Geralmente, os espaços vetoriais têm muitos conjuntos geradores, mas há um tipo de conjunto gerador, chamado de **base**, que é bastante útil dentro da Álgebra Linear.

Para definir o que é uma base, serão apresentadas algumas outras definições a seguir.

Definição 1.1.5 (Conjunto Linearmente Independente)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} \subset V$. Diz-se que $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente (ou L.I.), se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, para $v_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $i = 1, \ldots, n$, implica em $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

*Se $\mathcal{B}$ não for L.I., então o conjunto é denominado **linearmente dependente** (ou L.D.)*

Definição 1.1.6 (Base)**.** *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então, $\mathcal{B} \subset V$ é uma **base** de V se:*

1. *$\mathcal{B}$ gera V.*

2. *$\mathcal{B}$ é L.I.*

Os Exemplos 1.1.9 e 1.1.10 são, além de conjuntos geradores, bases de seus respectivos espaços vetoriais.

De fato, considere o conjunto gerador de $\mathbb{R}^\infty$ descrito no Exemplo 1.1.9 e tome $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$. Observe que x, escrito como combinação linear de $\mathcal{B}$, fica:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Então, para ver se o conjunto é L.I., analisa-se quando $x = 0$.

$$\begin{array}{rcl} & x = 0 & \iff \\ \iff & (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = (0, \dots, 0, 0, 0, \dots) & \iff \\ \iff & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} 0 e_i & \iff \\ \iff & x_i = 0 & \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{array}$$

Então, $\mathcal{B}$ é L.I. e, portanto, é uma base de $\mathbb{R}^\infty$.

Agora, serão apresentadas algumas definições e proposições referente a espaços que tenham um conjunto gerador finito.

Definição 1.1.7 (Espaço Finitamente Gerado)**.** *Um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é dito finitamente gerado, se possuir algum conjunto gerador finito.*

Proposição 1.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado não nulo e assuma que $V_G = \{v_1, \dots, v_m\}$ gere V. Então, todo conjunto linearmente independente de vetores em V tem no máximo m elementos.*

Demonstração: Será provado que todo conjunto de elementos de V que possua mais do que m vetores é L.D., desta forma, qualquer conjunto L.I. terá no máximo m vetores. De fato, seja $A = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ com $n > m$. Então cada elemento de A pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de V_G, pois este gera V. Ou seja, para cada $j = 1, \dots, n$, tem-se:

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \tag{1.2}$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $i = 1, 2, \dots, m$.

Para verificar se A é L.I. ou L.D., analisa-se a seguinte igualdade:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = 0, \tag{1.3}$$

para $\lambda_j \in \mathbb{K}$.

Desta forma, substituindo (1.2) em (1.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \right) = 0 \iff \\ \iff & \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \alpha_{ij} v_i = 0 \iff \\ \iff & \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Uma das situações em que isso acontece é quando $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Nesse caso, considere:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1n}\lambda_n & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m1}\lambda_1 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}\lambda_n & = & 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Perceba que (1.5) é um sistema homogêneo de m equações com n incógnitas, se α_{ij} forem vistos como coeficientes e λ_j como incógnitas.

Como $n > m$, então, há pelo menos uma solução não trivial.

Portanto, existem valores não todos nulos para λ_j tais que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} = 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Assim, voltando para (1.4), tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i = 0$$

com λ_j não todos nulos para $j = 1, 2, \ldots, n$. Então,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = 0,$$

ou seja, $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é L.D.

Portanto, vale que todo conjunto linearmente independente de vetores em V tem no máximo m elementos.

■

Observação: Pela Proposição 1.1.1, sabe-se que se V for um espaço vetorial finitamente gerado por um conjunto que tenha m elementos, então, todo conjunto linearmente independente em V tem no máximo m elementos. Em particular, toda base de V é um conjunto linearmente independente. Portanto, toda base de um espaço V finitamente gerado tem um número finito de elementos. (Ainda não foi provado que todo espaço vetorial tem base, mas caso tenha vale esta observação.)

Proposição 1.1.2. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ finitamente gerado e não nulo. Então, quaisquer duas bases de V têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração:

Suponha $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, duas bases de V. Pela própria definição de base, ambos conjuntos são L.I.

Como V é finitamente gerado, pela Proposição 1.1.1, sabe-se que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ têm um número finito de elementos. Então, pode-se dizer que $\mathcal{B}_1$ possui m_1 elementos e $\mathcal{B}_2$ possui m_2 elementos.

Novamente pela Proposição 1.1.1, como $\mathcal{B}_1$ é um conjunto gerador de V e $\mathcal{B}_2$ é linearmente independente, então, tem-se, também pela proposição anterior, que $m_2 \leq m_1$. Por outro lado, analogamente, tem-se que $m_1 \leq m_2$. Ou seja, vale que $m_1 = m_2$.

Logo, toda base de V tem o mesmo número de elementos.

■

Com esses resultados, torna-se plausível a definição de *dimensão*.

Definição 1.1.8. *Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, chama-se* ***dimensão*** *o número de elementos da base de V, caso seja finita. No caso de V não admitir uma base finita, dizemos que a dimensão é infinita.*

Nesse trabalho, será denotado por $\dim V$ a dimensão de V, supondo implícito o corpo sobre o qual está sendo definido o espaço vetorial.

Apresenta-se abaixo algumas observações acerca do conceito de *dimensão*.

1. Da Definição 1.1.7 e da Proposição 1.1.1, conclui-se que uma base de um espaço finitamente gerado tem um número finito de elementos, portanto sua dimensão é finita.

2. Por convenção, o conjunto vazio é base do espaço vetorial $V = \{0\}$. Então, nesse caso, $\dim V = 0$.
3. A dimensão do espaço vetorial depende do corpo $\mathbb{K}$ sobre o qual está definido.

Segue um exemplo para essa última observação.

Exemplo 1.1.11. *Quando se define o espaço vetorial dos números complexos sobre o corpo dos números reais, tem-se que* $\dim \mathbb{C} = 2$*. Por outro lado, se o espaço estiver definido sobre o próprio corpo dos números complexos, tem-se que* $\dim \mathbb{C} = 1$.

De fato, dado um vetor arbitrário $v = x + yi$ no espaço vetorial $\mathbb{C}$ (observe que aqui $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial, por isso seus elementos são tratados como "vetores") definido sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma base é dada por $\mathcal{B} = \{1, i\}$, pois tomando escalares $x, y \in \mathbb{R}$ é possível fazer a combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$ para formar o vetor $v = x + yi = x \cdot 1 + y \cdot i$. Então $\dim \mathbb{C} = 2$.

No entanto, se o espaço $\mathbb{C}$ estiver definido sobre o corpo $\mathbb{C}$, então, uma base para esse espaço seria $\mathcal{B}' = \{1\}$. Nesse caso, toma-se um escalar $\alpha = x + yi \in \mathbb{C}$ (veja que, apesar de estar em um mesmo contexto, $\mathbb{C}$ aparece aqui como um corpo também e, por isso, seus elementos nesse caso são tratados por "escalares") para formar o vetor $v = x + yi = \alpha \cdot 1$ a partir de uma combinação linear do único elemento da base $\mathcal{B}'$.

Exemplo 1.1.12. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *(Exemplo 1.1.3), pode-se definir uma base:*

$$\mathcal{B} = \left\{e_i \in \mathbb{R}^n : e_i = (a_1, \dots, a_n),\ \text{com } a_j = 1,\ \text{se } i = j,\ \text{e } a_j = 0,\ \text{se } i \neq j \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, n\right\}. \tag{1.6}$$

Os vetores da base exibidos no exemplo são, em outra notação:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0),\\
e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0),\\
e_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0, 0),\\
&\vdots\\
e_{n-1} &= (0, 0, 0, \dots, 1, 0),\\
e_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1).
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ *é, de fato, uma base para* $\mathbb{R}^n$*, pois é linearmente independente e, dado um vetor* $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, é possível escrever como:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1.7}$$

Então, $\mathcal{B}$ é uma base.

Com isso, tem-se que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Analogamente, podemos pensar no $\mathbb{R}^\infty$ (Exemplo 1.1.5).

Exemplo 1.1.13. *No caso do $\mathbb{R}^\infty$, uma base foi definida no Exemplo 1.1.9. E nota-se que a dimensão de $\mathbb{R}^\infty$ é infinita.*

A seguir, apresenta-se alguns resultados que relacionam as definições vistas até agora.

Proposição 1.1.3. *Dado um espaço vetorial V, com* $\dim V = n \geq 1$*, e considere $\mathcal{B} \subset V$ com n elementos. São equivalentes:*

1. *$\mathcal{B}$ é uma base.*
2. *$\mathcal{B}$ é linearmente independente.*
3. *$\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.*

Demonstração:

Da definição de base, já se tem que (1) implica em (2) e em (3). Então, basta provar que (2) e (3) são equivalentes, pois necessariamente se valem (2) e (3), vale (1).

(2)⇒(3):

Suponha que $\mathcal{B}$ seja L.I. e não seja um conjunto gerador de V. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ os elementos de $\mathcal{B}$.

Como $\mathcal{B}$ não gera V, então existe um vetor $v \in V$ que não é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

O conjunto $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{v\}$ é L.I.

De fato, considere:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha v = 0. \tag{1.8}$$

Se $\alpha \neq 0$, tem-se:

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n.$$

Nesse caso, v é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, o que é uma contradição, pois definimos v como um elemento de V que não é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. Então, necessariamente, $\alpha = 0$. Assim,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + 0 \cdot v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Como $\mathcal{B}$ é L.I., isso só é possível se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Então:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha v = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha = 0, \tag{1.9}$$

ou seja, $\mathcal{B} \cup \{v\}$ é L.I.

Por outro lado, $\dim V = n$, o que significa que existe uma base $\mathcal{B}'$ com exatamente n elementos. Mas $\mathcal{B} \cup \{v\}$ é L.I. e possui $n+1$ elementos. Contradizendo a Proposição 1.1.1.

Portanto, se $\mathcal{B}$ é L.I. então $\mathcal{B}$ gera V.

(3)⇒(2):

Agora, suponha que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gere V.

Suponha também que $\mathcal{B}$ seja L.D., isto é, existe um vetor $v_i \in \mathcal{B}$ que pode ser escrito como combinação linear dos outros elementos de $\mathcal{B}$. Sem perda de generalidade, considere que seja v_n tal vetor e escreve-se:

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \tag{1.10}$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$.

Como $\mathcal{B}$ gera V, qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito como:

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n \tag{1.11}$$

com $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n \in \mathbb{K}$.

Substituindo (1.10) em (1.11), obtém-se:

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n \left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}\right) \\ &= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Então, (1.12) mostra que qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_{n-1} = \mathcal{B}\backslash\{v_n\}$, ou seja, $\mathcal{B}_{n-1}$ tem $n-1$ elementos e é um conjunto gerador de V. Assim, pela Proposição 1.1.1, todo conjunto linearmente independente de V tem no máximo $n-1$ elementos.

Por outro lado, como $\dim V = n$, existe uma base com n elementos, o que é uma contradição, pois seria um conjunto L.I. com mais do que $n-1$ elementos.

Logo, $\mathcal{B}$ tem que ser L.I.

Com isso, foi demonstrado que (2) $\iff$ (3), ou seja, sempre que vale uma das duas afirmações, valem as duas. E, valendo as duas, diretamente da definição de base, segue que vale (1).

Logo as três afirmações são equivalentes.

∎

O ganho que essa proposição nos traz é que, para mostrar que um conjunto com $n \geq 1$ elementos é base de um espaço vetorial de dimensão n, basta verificar que ele é L.I. ou que é um conjunto gerador de V. A segunda condição será consequência dessa Proposição.

Proposição 1.1.4. *Todo espaço vetorial finitamente gerado, não nulo, possui uma base.*

Demonstração:

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado, não nulo, com $V_G \subset V$, um conjunto com n elementos, sendo gerador de V. Agora, seja $v_1 \in V$ e considere o conjunto $V_1 = \{v_1\}$. V_1 é linearmente independente. Caso V_1 gere V, então V_1 é uma base de V.

No caso de V_1 não gerar V, existe $v_2 \in V$ que não pode ser escrito como combinação linear de elementos de V_1. Em particular, v_2 não é múltiplo de v_1. Com isso, o conjunto $V_2 = V_1 \cup \{v_2\}$ é L.I. e pode gerar ou não V.

Pode-se fazer isso sucessivamente. A partir de um conjunto V_k, com k elementos, que não seja gerador de V e que seja linearmente independente, constrói-se um conjunto V_{k+1} com $k+1$ elementos, sendo $V_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $v_{k+1} \in V$, tal que v_{k+1} não seja uma combinação linear de elementos de V_k. $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ é L.I. (A demonstração desse fato é análoga à feita na demonstração da Proposição 1.1.3, na parte de (2)$\Rightarrow$(3).)

Assim, se V_{k+1} é gerador de V, então V_{k+1} é uma base, caso contrário, repete-se o processo. Esse processo não pode ser repetido infinitamente, pois V_G é um conjunto gerador com n elementos, o que limita os conjuntos linearmente independentes a terem no máximo n elementos, conforme a proposição 1.1.1. Ou seja, algum V_k, com $k \leq n$ gera V, caso contrário V_{k+1} seria um conjunto L.I. com mais que n elementos, o que é impossível.

Portanto, todo espaço vetorial finitamente gerado, não nulo, tem uma base.

■

Proposição 1.1.5. *Considere V um espaço vetorial finitamente gerado e $\mathcal{B} \subset V$ um conjunto L.I. Então, existe uma base de V que contém $\mathcal{B}$.*

Demonstração:

Seguindo a ideia da demonstração da proposição anterior, mas partindo de $\mathcal{B}$, tem-se que, se $\mathcal{B}$ gera V, então $\mathcal{B}$ é uma base. Caso contrário, considere $v_1 \in V$ que não seja combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. Então, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cup \{v_1\}$ é L.I.

A cada vez que se acrescenta um elemento de V a um conjunto L.I., de forma que tal elemento não seja uma combinação linear dos elementos de tal conjunto, constrói-se um novo conjunto L.I., com um elemento a mais. Esse novo conjunto pode gerar ou não V.

Por outro lado, V é finitamente gerado, então existe um conjunto $V_G \subset V$ finito, com n elementos, gerador de V. Desta forma, os conjuntos L.I. de V estão limitados a n elementos. Assim, o processo descrito não pode ser repetido infinitamente, ou seja, em algum momento constrói-se um conjunto linearmente independente que gera V.

Da forma como esses conjuntos são construídos, eles necessariamente contêm $\mathcal{B}$. Portanto, segue que existe uma base de V que contém $\mathcal{B}$.

■

Outro resultado importante relacionado a bases será apresentado a seguir.

Proposição 1.1.6. *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ de dimensão $n \geq 1$ e $\mathcal{B} \in V$. Então são equivalentes:*

(a) $\mathcal{B}$ é uma base de V.

(b) Seja $v \in V$. Então v pode ser escrito de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.

Demonstração:

(a)⇒(b)

Se $\mathcal{B}$ é uma base de V e $\dim V = n$, então $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Suponha que existe $v \in V$ que possa ser escrito de duas maneiras distintas como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, isto é,

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n, && (1.13)\\ v &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n, && (1.14) \end{aligned}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ e existe algum $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \neq \beta_i$.

Então, comparando (1.13) e (1.14), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n && \iff \\ \iff\quad & \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n - \beta_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \cdots - \beta_n e_n = 0 && \iff \\ \iff\quad & (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0. && (1.15) \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathcal{B}$ é uma base, então é um conjunto linearmente independente. Com isso, de (1.15), conclui-se que

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 = 0 &\iff \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 &\iff \alpha_2 = \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} = 0 &\iff \alpha_{n-1} = \beta_{n-1} \\ \alpha_n - \beta_n = 0 &\iff \alpha_n = \beta_n. \end{aligned}$$

Contradição!

Portanto, os coeficientes da combinação linear para formar um vetor $v \in V$ são únicos.

(b)⇒(a)

Agora, nossa premissa é que cada vetor $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$. Daí, logo se tem que $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V, pois todo elemento de V pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.

Então, basta mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Para isso, considere o vetor nulo $0 \in V$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$ (repare que ainda não sabemos se é uma base, então $\mathcal{B}$ não necessariamente tem n elementos). Sabe-se que ele pode ser escrito como

$$0 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_m \tag{1.16}$$

e essa maneira de escrever é única, por hipótese. Então,

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0. \tag{1.17}$$

Isso quer dizer que $\mathcal{B}$ é L.I.

Logo, $\mathcal{B}$ é uma base de V.

■

A partir dessa última proposição, faz sentido a definição de *coordenadas*.

Definição 1.1.9 (Coordenadas)**.** *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\dim V = n$, e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ uma base. Considere fixada uma ordem para os elementos da base.*

Neste caso, os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ são as ***coordenadas*** *de $v \in V$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, se satisfizerem $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Denota-se $[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ ou, caso haja uma base pré-estabelecida, simplesmente, $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Vale frisar que dado um vetor e uma base, suas coordenadas são únicas, por conta da Proposição 1.1.6. Isso traz uma forma precisa de descrever um vetor dado a partir de uma base do espaço vetorial.

1.2 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Nesta seção, apresentam-se a definição de subespaço vetorial e uma proposição, que serão utilizadas ao longo do texto.

Definição 1.2.1 (Subespaço Vetorial)**.** *Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $W \subset V$ é dito **subespaço vetorial de** V se for um espaço vetorial, quando munido das operações de V restritas a W, ou seja, quando W for um subconjunto de V fechado pela soma e pela multiplicação por escalar.*

Observação: é frequente dizer apenas *subespaço de V* quando for se referir ao subespaço vetorial de um espaço vetorial V.

Proposição 1.2.1. *Seja V um espaço vetorial, com $\dim V = n$, e $W \subsetneq V$ um subespaço de V. Então,* $\dim W < \dim V$.

Demonstração:

Suponha que $\dim W = m \geq n = \dim V$. Então, sendo $\mathcal{B}_W$ uma base de W, sabe-se que $\mathcal{B}_W$ tem m elementos. Se $\mathcal{B}_W$ é uma base, então, ela é L.I. e, portanto, pela Proposição 1.1.1, vale que $m \leq n$. Logo, $m = n$. Assim, pela Proposição 1.1.3, vale que $\mathcal{B}_W$ é base de V. Nesse caso, $V = W$. Contradição!

Portanto, segue que $\dim W < \dim V$.

■

Definição 1.2.2 (Soma Direta)**.** *Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Diz-se que a soma $(W_1 + W_2) = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$ é uma **soma direta** se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Denota-se por $W_1 \oplus W_2$ e o espaço vetorial V é dito **soma direta de** W_1 **e** W_2, se $V = W_1 \oplus W_2$.*

Proposição 1.2.2. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V, tais que $V = W_1 \oplus W_2$. Então, vale que:*

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2. \tag{1.18}$$

Demonstração:

Sejam $\mathcal{B}_1 = \{\underbrace{e_1, e_2, \ldots, e_m}_{m \text{ elementos}}\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\underbrace{e_1', e_2', \ldots, e_n'}_{n \text{ elementos}}\}$ bases de W_1 e W_2, respectivamente. Será provado que $\dim V = m + n$.

Primeiramente, observe que cada vetor v em V pode ser escrito de uma única forma como adição de elementos de cada um dos subespaços, ou seja, se $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, então w_1 e w_2 são únicos. De fato, suponha que $v = w_1 + w_2$ e $v = u_1 + u_2$, com $w_1, u_1 \in W_1$ e $w_2, u_2 \in W_2$. Então,

$$w_1 + w_2 = u_1 + u_2 \iff \underbrace{w_1 - u_1}_{\in W_1} = \underbrace{u_2 - w_2}_{\in W_2}.$$

Chamando $v' = w_1 - u_1 = u_2 - w_2$, tem-se que $v' \in W_1 \cap W_2$. Mas $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então só pode $w_1 - u_1 = u_2 - w_2 = 0$. Logo, segue que $w_1 = u_1$ e $w_2 = u_2$, ou seja, $v = w_1 + w_2$ é a única forma de escrever v como soma de elementos de W_1 e W_2.

Com isso, é possível ver que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de V.

Com efeito, se w_1 é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_1$ e w_2 é uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_2$, então $v = w_1 + w_2$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, ou seja, $\mathcal{B}$ gera V.

Falta mostrar que $\mathcal{B}$ é linearmente independente. Para isso, considere a seguinte equação:

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m}_{\in W_1} + \underbrace{\beta_1 e_1' + \cdots + \beta_n e_n'}_{\in W_2} = 0,$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$.

Tomando $v_1 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m \in W_1$ e $v_2 = \beta_1 e_1' + \cdots + \beta_n e_n' \in W_2$, tem-se que $v_1 + v_2 = 0$. Então, $v_1 = -v_2 \in W_2$. Assim, conclui-se que $v_1 \in W_1 \cap W_2$, ou seja, $v_1 = 0$. Analogamente, $v_2 = 0$.

Mas como $\mathcal{B}_1$ é base de W_1, então é linearmente independente. Daí, tem-se que

$$v_1 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

Analogamente,

$$v_2 = \beta_1 e_1' + \cdots + \beta_n e_n' \iff \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0.$$

Portanto,

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m + \beta_1 e_1' + \cdots + \beta_n e_n' = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0.$$

Isto é, $\mathcal{B}$ é L.I.

Logo, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_n\}$ é uma base de V, o que implica em $\dim V = m + n$, pois $\mathcal{B}$ tem $m + n$ elementos.

■

1.3 BASES DE ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO INFINITA

Até agora provou-se que um espaço finitamente gerado tem base.

Nos Exemplos 1.1.9 e 1.1.10, foram apresentadas bases de $\mathbb{R}^\infty$ e de $\mathbb{R}[x]$. Ambos espaços vetoriais têm dimensão infinita e têm uma base. Então, é natural perguntar se todo espaço vetorial possui base, mesmo tendo dimensão infinita.

Antes de responder tal pergunta, serão apresentadas algumas definições e proposições.

Definição 1.3.1 (Ordem Parcial)**.** *Uma **ordem parcial** num conjunto P é uma relação binária em P, denotada por $\preceq$, que satisfaz as propriedades seguintes:*

1. *(Reflexiva) $x \preceq x$, para todo $x \in P$.*
2. *(Antissimétrica) Dados $x, y \in P$, se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x = y$.*
3. *(Transitiva) Dados $x, y, z \in P$, se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.*

*Diz-se que $(P, \preceq)$ é um conjunto **parcialmente ordenado**, se $\preceq$ é uma ordem parcial.*

Definição 1.3.2 (Ordem Total)**.** *Uma **ordem total** num conjunto P é uma ordem parcial $\preceq$ tal que se $x, y \in P$, então ou $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, ou seja, todos elementos de P se relacionam. Diz-se que $(P, \preceq)$ é um conjunto **totalmente ordenado**, se $\preceq$ é uma ordem total.*

Exemplo 1.3.1. *A relação $\leq$ no conjunto dos números reais é uma ordem total.*

De fato,

1. $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.
3. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

Além disso, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vale que ou $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exemplo 1.3.2. *Dado um conjunto qualquer X e o conjunto de todos subconjuntos possíveis de X, denominado por "conjunto das partes" e denotado por $\mathcal{P}(X)$, a relação $\subseteq$ no conjunto das partes é uma ordem parcial.*

As propriedades de relação de ordem parcial são obedecidas. Lembrando que, dados dois conjuntos quaisquer P e Q, a relação de $P \subseteq Q$ significa que $a \in P \Rightarrow a \in Q$.

1. Dado $A \subseteq X$, isto é, $A \in \mathcal{P}(X)$, vale que $a \in A \Rightarrow a \in A$. Então vale que $A \subseteq A$.
2. Dados $A, B \subseteq X$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então, pela própria definição de igualdade de conjuntos, $A = B$.
3. Dados $A, B, C \subseteq X$, $A \subseteq B$ significa que $a \in A \Rightarrow a \in B$ e $B \subseteq C$ significa que $a \in B \Rightarrow a \in C$. Desta forma, segue que $a \in A \Rightarrow a \in C$ e, portanto, $A \subseteq C$.

Porém, não necessariamente dois subconjuntos de X estão relacionados por uma continência. Por exemplo, tomando $X = \{1, 2\}$, tem-se que $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\}$. Então, nesse caso, $\{1\}$ e $\{2\}$ não se relacionam, isto é, não valem nenhuma das duas afirmações: $\{1\} \subseteq \{2\}$ ou $\{2\} \subseteq \{1\}$. Portanto, a relação $\subseteq$ é uma relação de ordem parcial, mas não é uma relação de ordem total.

Exemplo 1.3.3. *Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos números naturais. Define-se a relação de divisibilidade $|$ da seguinte forma: dados $m, n \in \mathbb{N}$, diz-se que $m|n$ (lê-se "m divide n") se n for divisível por m, ou seja, se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. Essa é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}$.*

Observe que as propriedades de ordem parcial são verificadas.

1. $m|m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pois $m = 1 \cdot m$.
2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se $m|n$ e $n|m$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n = k_1 m$ e $m = k_2 n$. Daí, tem-se que $n = k_1 k_2 n \iff k_1 k_2 = 1 \iff k_1 = k_2 = 1$, ou seja, $m = n$.
3. Dados $m, n, l \in \mathbb{N}$, se $m|n$ e $n|l$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n = k_1 m$ e $l = k_2 n$. Assim, $l = k_2 k_1 m$, ou seja, $m|l$.

Porém, observe que $2 \nmid 3$ e $3 \nmid 2$, ou seja, 2 não é múltiplo de 3 e 3 não é múltiplo de 2. Portanto, não é uma ordem total.

Contudo, pensando em uma relação de ordem parcial parecida, porém restrita ao conjunto das potências de 2, tem-se uma relação de ordem total.

Exemplo 1.3.4. *Sejam* $A = \{1, 2, 4, 8, \dots 2^i, \dots\} \subset \mathbb{N}$ *o conjunto das potências de* 2 *e* $|$ *a relação de ordem parcial definida como no Exemplo 1.3.3. Então,* $(A, |)$ *é uma ordem total.*

De fato, dados $2^\alpha, 2^\beta \in A$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, suponha sem perda de generalidade que $\alpha \leq \beta$. Então, $2^\beta = 2^{(\beta-\alpha)} \cdot 2^\alpha$ e, portanto, $2^\alpha | 2^\beta$. Logo, sempre vale que ou $2^\alpha | 2^\beta$ ou $2^\beta | 2^\alpha$, o que implica que $(A, |)$ é uma ordem total.

Conforme esses exemplos, há conjuntos parcialmente ordenados que não são totalmente ordenados, porém é possível restringir tal conjunto a um subconjunto no qual a relação passa a ser uma ordem total. Em alguns momentos é interessante que se trabalhe dentro de um conjunto totalmente ordenado. Neste caso, conforme a Definição 1.3.2 e observando o Exemplo 1.3.4 , é possível pensar em um conjunto parcialmente ordenado X, restrito a um subconjunto totalmente ordenado, ou seja, restrito a elementos de X que se relacionam dois a dois.

Definição 1.3.3. *Uma* ***cadeia*** *é um conjunto totalmente ordenado.*

Cadeia e *conjunto totalmente ordenado* são dois nomes para um mesmo objeto matemático, ambos termos referem-se a um conjunto que tem uma ordem total. Porém, o termo *cadeia*, neste trabalho, será mais utilizado quando se referir a um subconjunto próprio dentro de um conjunto parcialmente ordenado.

Segue abaixo, um exemplo de cadeia, com um diagrama que ajuda a visualizar o que seria uma cadeia dentro de um conjunto parcialmente ordenado. O exemplo faz uso da ordem definida pela divisibilidade, apresentada no Exemplo 1.3.3, mas dentro de um subconjunto dos números naturais.

Exemplo 1.3.5. *Considere o conjunto* $X = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ *e a seguinte relação de divisibilidade, dada no Exemplo 1.3.3, que é uma ordem parcial. Então,* $Y = \{1, 2, 10\} \subset X$ *é um exemplo de cadeia.*

Esse exemplo pode ser representado pelo diagrama da Figura 1, no qual as setas indicam a ordem estabelecida entre dois elementos do conjunto. (Um caminho composto por mais de uma seta, também indica a relação de ordem entre dois elementos.) Em destaque está a cadeia exemplificada.

A partir desse diagrama, vemos que a cadeia $Y = \{1, 2, 10\} \subset X$ tem todos seus elementos relacionados, seguindo uma ordem. Outras cadeias dentro desse mesmo exemplo seriam: $\{1, 5, 10\}$,$\{1, 2, 4, 8\}$,$\{1, 3, 9\}$, entre outras.

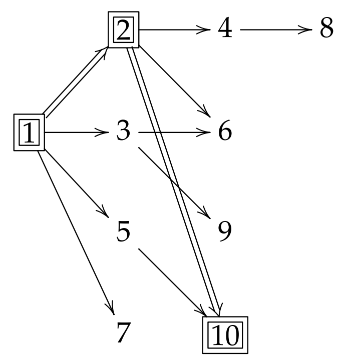

Figura 1: Diagrama com os elementos do conjunto X do Exemplo 1.3.5 e sua ordem parcial.

Quando uma ordem parcial está definida em um conjunto, há algumas definições que estão relacionadas a ela.

Definição 1.3.4 (Limitante Superior)**.** *Seja* $(M, \preceq)$ *uma ordem parcial, então um* ***limitante superior*** *de* $W \subset M$ *é um elemento* $m \in M$ *tal que, para todo* $x \in W$*, vale* $x \preceq m$*.*

Definição 1.3.5 (Elemento Maximal)**.** *Seja* $(M, \preceq)$ *uma ordem parcial, então um* ***elemento maximal*** *de* M *é um elemento* $m \in M$ *tal que se* $m \preceq x$*, com* $x \in M$*, então* $x = m$*.*

Essas duas definições são bastante parecidas, porém há diferenças sutis. Considerando M e W das Definições 1.3.4 e 1.3.5, o limitante superior não precisa pertencer ao conjunto W ao qual se refere, enquanto o elemento maximal deve necessariamente pertencer ao conjunto M. Além disso, o elemento maximal não é necessariamente comparável a todos elementos de M, ao contrário do limitante superior, que deve ser comparável a todos elementos de W. Atente-se que, chamando o limitante superior de W por $\mathcal{L}$ e dado $x \in W$, sempre vale $x \preceq \mathcal{L}$, ou seja, $\mathcal{L}$ se relaciona com todos elementos de W, porém isso não implica que W seja totalmente ordenado, pois nada foi dito em relação a outros elementos.

Tomando a mesma ordem parcial dos números naturais considerando a divisibilidade, conforme o Exemplo 1.3.3, e utilizando o subconjunto do Exemplo 1.3.5, é possível observar alguns limitantes superiores e alguns elementos maximais.

Exemplo 1.3.6. *Considere o conjunto* $X = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\} \subset \mathbb{N}$ *e a seguinte relação de ordem, denotada por* $|$*: dados* $m, n \in X$*,* $m|n$ *se* n *for um múltiplo de* m*. Então,* $6, 7, 8, 9, 10$ *são elementos maximais de* X *e* $2520 \in \mathbb{N}$ *é um limitante superior. (Figura 2)*

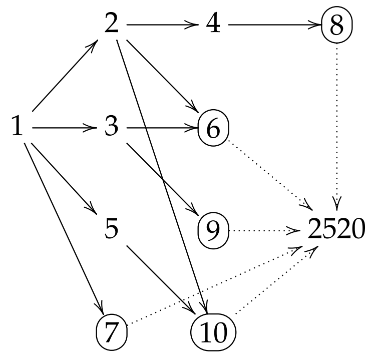

Figura 2: Diagrama com os elementos do conjunto X do Exemplo 1.3.6, seus elementos maximais circulados e um limitante superior.

Veja que 10 não é um limitante superior de X, pois $8 \in X$, mas $8 \nmid 10$. Por outro lado, 10 é um elemento maximal, porque o único $x \in X$ tal que $10|x$ é o próprio elemento 10, ou seja, $10|x \Rightarrow x = 10$.

Quando o conjunto é totalmente ordenado, há no máximo um elemento maximal. De fato, dada $(M, \preceq)$ uma ordem total, se $m_1, m_2 \in M$ são elementos maximais de M, então vale que $m_1 \preceq m_2$ ou $m_2 \preceq m_1$, pois é uma ordem total, porém, como são elementos maximais, necessariamente tem-se que $m_1 = m_2$.

Exemplo 1.3.7. *Sejam $I_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $I_2 = [a, b) \subset \mathbb{R}$. Considere a relação de ordem usual $(\mathbb{R}, \leq)$. Então, b é um limitante superior para ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$, mas elemento maximal apenas de I_1. Além disso, I_2 não possui elemento maximal.*

Perceba que, nesse exemplo, b é um limitante superior para I_2 em $\mathbb{R}$, mas não pertence a esse conjunto.

Agora, observe que é possível pensar numa cadeia que possua exatamente um elemento maximal e um limitante superior que pertença à própria cadeia.

Exemplo 1.3.8. *Considerando o conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ e a relação de ordem do Exemplo 1.3.3 de divisibilidade. Apesar de X ter 4 elementos maximais, como apresentado no Exemplo 1.3.6, e não ter um limitante superior que pertença ao próprio conjunto X, a cadeia $Y = \{1, 2, 10\} \subset X$ tem exatamente um elemento maximal, que é também um limitante superior, o 10, que pertence ao próprio Y.*

A partir dessas definições, pode-se verificar que todo espaço vetorial possui uma base, independentemente de sua dimensão ser finita ou infinita. Para isso, será utilizado o seguinte axioma:

Axioma 1 (Lema de Zorn). *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação $\preceq$. Se toda cadeia $\mathcal{C} \subset X$ tem um limitante superior, então X possui pelo menos um elemento maximal.*

Neste trabalho, o *Lema de Zorn* será considerado um axioma. Isso faz sentido devido ao fato de, fundamentalmente, ele ser equivalente ao *Axioma da Escolha*.

O *Axioma da Escolha* diz que, dado uma coleção de conjuntos não vazios, existe uma *função escolha* que associa a cada conjunto da coleção um elemento do próprio conjunto.

Exemplo 1.3.9. *No Exemplo 1.3.7, há dois intervalos em $\mathbb{R}$, um com elemento maximal e outro sem. Em $I_1 = [a,b]$, qualquer cadeia que seja escolhida, tem $b \in I_1$ como limitante superior, então, o Lema de Zorn garante um elemento maximal (no caso, é o elemento b). Em $I_2 = [a,b)$, a cadeia $\mathcal{C} = (a,b) \subset I_2$ não tem um limitante superior em I_2 (perceba que estamos pensando em limitantes superiores em I_2 e não em $\mathbb{R}$) e, portanto, não há garantia de existir um elemento maximal e, de fato, não há.*

Finalmente, segue a proposição:

Proposição 1.3.1. *Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ possui uma base.*

Demonstração:

Seja $M = \{X \subseteq V : X \text{ é L.I.}\}$ o conjunto de todos subconjuntos linearmente independentes de V.

Primeiramente, serão mostrados que M é não vazio e que existem cadeias em M.

Como $V \neq \{0\}$, tem-se que existe $v \neq 0$ tal que $\{v\} \in M$ e, portanto, $M \neq \emptyset$.

Tome a ordem parcial $(M, \subseteq)$ sendo a relação usual de continência de conjuntos.

Se $\dim V = 1$, então $\{v\} \in M$ é L.I. e gera V, isto é, $\{v\}$ é uma base para o espaço vetorial V.

Então, assume-se que $\dim V > 1$. Assim, existe $v' \in V$ tal que v' não é múltiplo de v, ou seja, $\{v, v'\} \subseteq V$ é L.I, o que implica que $\{v, v'\} \in M$. Com isso, obtém-se pelo menos uma cadeia em M, formada por $\{v\} \subseteq \{v, v'\}$. Portanto, há cadeias em M.

Agora, seja $\mathcal{C} \subseteq M$ uma cadeia.

$\mathcal{C}$ possui um limitante superior, dado por

$$L = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A. \tag{1.19}$$

Então, pelo *Lema de Zorn*, o conjunto M possui um elemento maximal. Seja $\mathcal{B}$ tal elemento e W o espaço vetorial gerado por ele.

Note que $W \subseteq V$, pois é um conjunto gerado por $\mathcal{B}$, que é um subconjunto de V, então todos elementos de W estão em V. A fim de mostrar que $W = V$, suponha que $W \neq V$. Neste caso, existe $v \in V$ tal que $v \notin W$. Com isso, $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{v\}$ é um conjunto L.I. Contudo, como $\mathcal{B}$ é um elemento maximal, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B} \cup \{v\} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{v\}$, o que é uma contradição. Logo, $W = V$.

Portanto, todo espaço vetorial possui uma base.

■

Por fim, observe que essa Proposição nos garante a existência de uma base, mas não diz como defini-la. Então, nem sempre será fácil definir uma base para um espaço vetorial.

2

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo, será apresentado um importante conceito da Álgebra Linear, que é a *Transformação Linear*, e algumas de suas propriedades e proposições que envolvam tal conceito.

2.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Definição 2.1.1 (Transformação Linear)**.** *Considere V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Chama-se* ***transformação linear*** *$T : V \to W$ a correspondência que associa todo vetor $v \in V$ a um único vetor, denominado por* ***imagem*** *de v e denotado por $T(v) \in W$, de forma que, dados $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, sejam válidas as seguintes propriedades:*

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$.
2. $T(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot T(v_1)$.

Em outras palavras, numa transformação linear, a imagem da soma é a soma das imagens e a imagem do produto por escalar é o produto do escalar pela imagem.

Exemplo 2.1.1. *Considere os vetores em $\mathbb{R}^2$ e a transformação de rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário:*

$$\begin{array}{rccc} R_\theta : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & R_\theta(x,y), \end{array}$$

em que

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - ysen\theta, xsen\theta + y\cos\theta). \tag{2.1}$$

Essa transformação, rotaciona um vetor $v = (x, y)$, representado no plano cartesiano pelo segmento orientado, que vai da origem para o afixo (x, y), por um ângulo θ.

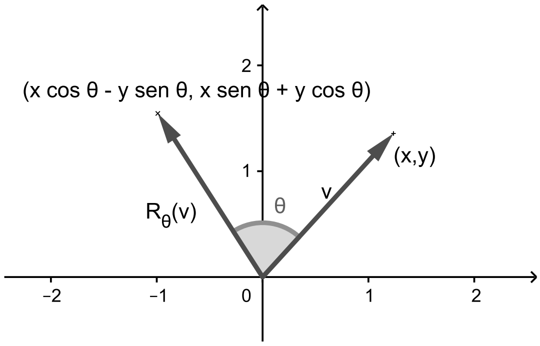

Figura 3: Rotação de um vetor no plano cartesiano

A Figura 3 ilustra a rotação dada pela transformação de rotação.

É possível mostrar que essa transformação é linear.

Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, com $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere a rotação R_θ, para um ângulo θ pré-determinado, do Exemplo 2.1.1.

1.

$$\begin{aligned}
R_\theta(v_1 + v_2) &= R_\theta((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= R_\theta(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2)\cos\theta - (y_1 + y_2)\text{sen}\theta, (x_1 + x_2)\text{sen}\theta + (y_1 + y_2)\cos\theta) \\
&= (x_1 \cos\theta + x_2 \cos\theta - y_1\text{sen}\theta - y_2\text{sen}\theta, \\
&\quad , x_1\text{sen}\theta + x_2\text{sen}\theta + y_1 \cos\theta + y_2 \cos\theta) \\
&= (x_1 \cos\theta - y_1\text{sen}\theta, x_1\text{sen}\theta + y_1 \cos\theta) + \\
&\quad +(x_2 \cos\theta - y_2\text{sen}\theta, x_2\text{sen}\theta + y_2 \cos\theta) \\
&= R_\theta(x_1, y_1) + R_\theta(x_2, y_2) \\
&= R_\theta(v_1) + R_\theta(v_2).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} R_\theta(\alpha v_1) &= R_\theta(\alpha(x_1, y_1)) \\ &= R_\theta(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= (\alpha x_1 \cos\theta - \alpha y_1 \mathrm{sen}\theta, \alpha x_1 \mathrm{sen}\theta + \alpha y_1 \cos\theta) \\ &= \alpha(x_1 \cos\theta - y_1 \mathrm{sen}\theta, x_1 \mathrm{sen}\theta + y_1 \cos\theta) \\ &= \alpha R_\theta(x_1, y_1) \\ &= \alpha R_\theta(v_1). \end{aligned}$$

Portanto, a rotação é uma transformação linear.

Exemplo 2.1.2. *No espaço dos polinômios, $\mathbb{R}[x]$, a derivada é uma transformação linear.*

$$\begin{aligned} D: \mathbb{R}[x] &\rightarrow \mathbb{R}[x] \\ p(x) &\mapsto p'(x), \end{aligned}$$

De fato, das próprias propriedades da derivada, vale que, dados dois polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $(p_1 + p_2)'(x) = p_1'(x) + p_2'(x)$ e $(\alpha p)'(x) = \alpha p'(x)$. Logo, a derivada de polinômios é uma transformação linear.

Exemplo 2.1.3. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ e a transformação definida da seguinte forma:*

$$T : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \mapsto (t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, 0, 0, \dots),$$

com $T(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = (\underbrace{x_2}_{t_1}, \underbrace{x_1 + x_3}_{t_2}, \underbrace{x_2 + x_4}_{t_3}, \dots, \underbrace{x_{n-2} + x_n}_{t_{n-1}}, \underbrace{x_{n-1}}_{t_n}, \underbrace{x_n}_{t_{n+1}}, 0, 0, \dots).$

T é uma transformação linear.

É possível verificar que essa é, de fato, uma transformação linear. Dados $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^\infty$, com $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ e $v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_m, 0, 0, \dots)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

1. Tomando $k = \max\{n, m\}$ e lembrando que $x_i = 0$ para todo $i > n$ e $y_j = 0$ para todo $j > m$,

$$\begin{aligned}
T(v_1 + v_2) &= T((x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots)) \\
&= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_k + y_k, 0, 0, \dots) \\
&= (x_2 + y_2, (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), (x_2 + y_2) + (x_4 + y_4), \dots, \\
\dots, &\quad (x_{k-2} + y_{k-2}) + (x_k + y_k), x_{k-1} + y_{k-1}, x_k + y_k, 0, 0, 0, \dots) \\
&= (x_2 + y_2, (x_1 + x_3) + (y_1 + y_3), (x_2 + x_4) + (y_2 + y_4), \dots, \\
\dots, &\quad (x_{k-2} + x_k) + (y_{k-2} + y_k), x_{k-1} + y_{k-1}, x_k + y_k, 0, 0, 0, \dots) \\
&= (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_{k-2} + x_k, x_{k-1}, x_k, 0, 0, 0, \dots) + \\
+ &\quad (y_2, y_1 + y_3, y_2 + y_4, \dots, y_{k-2} + y_k, y_{k-1}, y_k, 0, 0, 0, \dots) \\
&= T(v_1) + T(v_2).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T(\alpha v_1) &= T(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)) \\
&= T(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, 0, 0, \dots) \\
&= (\alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_3, \alpha x_2 + \alpha x_4, \dots, \\
\dots, &\quad \alpha x_{n-2} + \alpha x_n, \alpha x_{n-1}, \alpha x_n, 0, 0, 0, \dots) \\
&= (\alpha x_2, \alpha(x_1 + x_3), \alpha(x_2 + x_4), \dots, \\
\dots, &\quad \alpha(x_{n-2} + x_n), \alpha x_{n-1}, \alpha x_n, 0, 0, 0, \dots) \\
&= \alpha T(v_1).
\end{aligned}$$

Seguem algumas observações sobre as transformações lineares.

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $u, v \in V$, então:

1. A imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W.

$$T(0_V) = 0_W, \tag{2.2}$$

onde 0_V é o vetor nulo de V e 0_W é o vetor nulo de W.

De fato, utilizando as propriedades de espaço vetorial e transformação linear, vale que

$$
\begin{array}{rcl}
 & T(0_V) = T(0_V + 0_V) & \iff \\
\iff & T(0_V) = T(0_V) + T(0_V) & \iff \\
\iff & T(0_V) - T(0_V) = T(0_V) + T(0_V) - T(0_V) & \iff \\
\iff & 0_W = T(0_V) & \iff \\
\iff & T(0_V) = 0_W. &
\end{array}
$$

2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, vale:

$$T(\alpha v + \beta u) = \alpha T(v) + \beta T(u). \tag{2.3}$$

Essa igualdade decorre diretamente das propriedades de transformação linear.

$$
\begin{array}{rcl}
T(\alpha v + \beta u) & = & T(\alpha v) + T(\beta u) \\
 & = & \alpha T(v) + \beta T(u).
\end{array}
$$

3. Generalizando, dados vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, vale que

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n). \tag{2.4}$$

Da mesma forma que o item anterior, tem-se que:

$$
\begin{array}{rcl}
T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) & = & T(\alpha_1 v_1) + \cdots + T(\alpha_n v_n) \\
 & = & \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n).
\end{array}
$$

4.

$$T(-v) = -T(v), \text{ para todo } v \in V. \tag{2.5}$$

De fato, pelas propriedades de transformações lineares. Tem-se que:

$$
\begin{array}{rcl}
T(-v) & = & T(-1 \cdot v) \\
 & = & -1 \cdot T(v) \\
 & = & -T(v).
\end{array}
$$

Para determinar se uma transformação é linear ou não, pode-se utilizar a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Então $T : V \to W$ é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2), \tag{2.6}$$

para todo $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)

Decorre diretamente de (2.3).

($\Leftarrow$)

Agora, suponha $T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2), \forall v_1, v_2 \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Em particular, tomando $\alpha = 1$, tem-se que $T(\alpha v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.

Além disso, tomando $v_2 = 0$, tem-se que $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1), \forall v_1 \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Portanto, T é uma transformação linear.

■

Pode-se pensar também em operações com as tranformações lineares.

Definição 2.1.2. *A **soma de duas transformações lineares** $T_1, T_2 : V \to W$ é a transformação linear dada por:*

$$\Big(T_1 + T_2\Big)(v) = T_1(v) + T_2(v) \tag{2.7}$$

com $v \in V$.

Essa operação define, de fato, uma transformação linear. Dados $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e as transformações lineares acima:

$$\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(\alpha u + v) &= T_1(\alpha u + v) + T_2(\alpha u + v) \\
&= \alpha T_1(u) + T_1(v) + \alpha T_2(u) + T_2(v) \\
&= \alpha\left[T_1(u) + T_2(u)\right] + \left[T_1(v) + T_2(v)\right] \\
&= \alpha\left(T_1 + T_2\right)(u) + \left(T_1 + T_2\right)(v).
\end{aligned}$$

E pela Proposição 2.1.1, conclui-se que a soma é uma transformação linear.

Definição 2.1.3. *O* ***produto de uma transformação linear*** $T : V \to W$ ***por um escalar*** $\alpha \in \mathbb{K}$ *é a transformação linear dada por:*

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) \tag{2.8}$$

com $v \in V$.

O produto também define uma transformação linear. Dados $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e uma transformação linear T:

$$\begin{aligned}
(\alpha T)(\beta u + v) &= \alpha T(\beta u + v) \\
&= \alpha \left[\beta T(u) + T(v)\right] \\
&= \alpha\beta T(u) + \alpha T(v) \\
&= \beta(\alpha T)(u) + (\alpha T)(v).
\end{aligned}$$

Definição 2.1.4. *Dados espaços vetoriais U, V e W, sejam* $T_1 : U \to V$ *e* $T_2 : V \to W$ *duas transformações lineares. A* ***transformação composta*** *ou apenas* ***composta*** *de* T_1 *com* T_2 *é a transformação linear* $T_2 \circ T_1$*, tal que para todo* $u \in U$ *define-se* $T_2 \circ T_1(u) = T_2(T_1(u))$.

A composta também define uma transformação linear, pela Proposição 2.1.1,

$$\begin{aligned}
T_2 \circ T_1(\alpha u + v) &= T_2(T_1(\alpha u + v)) \\
&= T_2(\alpha T_1(u) + T_1(v)) \\
&= \alpha T_2(T_1(u)) + T_2(T_1(v)) \\
&= \alpha T_2 \circ T_1(u) + T_2 \circ T_1(v).
\end{aligned}$$

Logo, é uma transformação linear.

Há algumas transformações lineares importantes, que recebem nomes “especiais”.

Pensando na Definição 2.1.1, se $T : V \to W$ é tal que $W = V$, então a transformação recebe o nome de *operador linear*.

Definição 2.1.5 (Operador Linear)**.** *Diz-se que T é um* ***operador linear,*** *se for uma transformação linear* $T : V \to V$.

As transformações dos Exemplos 2.1.1, 2.1.2 e 2.1.3 são operadores lineares.

Novamente, pensando na Definição 2.1.1, se $T : V \to W$ é tal que $W = \mathbb{K}$, lembrando que um corpo $\mathbb{K}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre ele mesmo, então esta transformação recebe o nome de *funcional linear*.

Definição 2.1.6 (Funcional Linear). *Diz-se que T é um* ***funcional linear****, se $T : V \to \mathbb{K}$, ou seja, sempre que a transformação linear levar um vetor $v \in V$ a um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Definição 2.1.7 (Identidade). *Seja $Id : V \to V$ um operador linear. Chama-se Id o operador* ***identidade****, se $Id(v) = v$ para todo $v \in V$.*

Definição 2.1.8 (Transformação Nula). *Uma transformação linear $O : V \to W$ é dita* ***transformação linear nula****, se $O(v) = 0$ para todo $v \in V$, onde 0 é o vetor nulo de W.*

Proposição 2.1.2. *Sejam V e W espaços vetoriais e $\mathcal{B}$ uma base de V. Se para cada vetor u da base $\mathcal{B}$ há um vetor correspondente $u' \in W$, então, existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que, para cada $u \in \mathcal{B}$ vale $T(u) = u'$.*

Demonstração:

Suponha que existam duas transformações lineares $T_1, T_2 : V \to W$ tais que para cada vetor $u \in \mathcal{B}$, tem-se que $T_1(u) = T_2(u) = u'$.

Seja $v \in V$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de V, então é possível escrever v como uma combinação linear de um número finito de elementos de $\mathcal{B}$.

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m, \tag{2.9}$$

com $u_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$ e $m \in \mathbb{N}$.

Desta forma, pelas propriedades de transformações lineares, tem-se que

$$\begin{aligned} T_1(v) &= T_1(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) \\ &= \alpha_1 T_1(u_1) + \cdots + \alpha_m T_1(u_m) \\ &= \alpha_1 u_1' + \cdots + \alpha_m u_m' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(v) &= T_2(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) \\ &= \alpha_1 T_2(u_1) + \cdots + \alpha_m T_2(u_m) \\ &= \alpha_1 u_1' + \cdots + \alpha_m u_m'. \end{aligned}$$

Então, percebe-se que, dado um vetor $v \in V$, existe uma única transformação linear T que leve os vetores $u \in \mathcal{B}$ em $u' \in W$.

■

Essa proposição nos diz que, para descrever uma transformação linear $T : V \to W$, é suficiente saber apenas as imagens dos vetores de uma das bases de V.

Exemplo 2.1.4. *Pensando no Exemplo 2.1.1, para definir a rotação, basta definir as imagens de* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$.

$$\begin{cases} R_\theta(e_1) &= (\cos\theta, sen\theta) \\ R_\theta(e_2) &= (-sen\theta, \cos\theta) \end{cases}$$

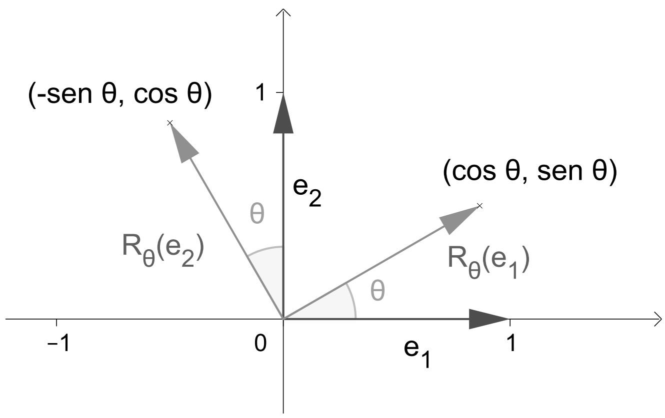

Figura 4: Rotação de e_1 e e_2 no plano cartesiano

A Figura 4 ilustra a rotação dos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Exemplo 2.1.5. *No espaço dos polinômios,* $\mathbb{R}[x]$*, a derivada pode ser definida apenas para os elementos da base, ou seja, os monômios da forma* x^n*, com* $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

$$D(x^n) = nx^{n-1},$$

se $n \neq 0$, ou

$$D(1) = 0$$

no caso de $n = 0$.

Exemplo 2.1.6. *A transformação linear do Exemplo 2.1.3 pode ser dada apenas pelos elementos da base. Considerando $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, onde o 1 está no i-ésimo termo da sequência e e_i é um elemento da base, conforme mostrado no Exemplo 1.1.9, define-se:*

$$\begin{cases} T(e_1) &= \quad e_2, \\ T(e_n) &= \quad e_{n-1} + e_{n+1}, \quad se\ n \geq 2. \end{cases}$$

2.2 NÚCLEO E IMAGEM

Definição 2.2.1 (Núcleo)**.** *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto $Ker\,T = \{v \in V : T(v) = 0\}$ é chamado de **núcleo** de T.*

Definição 2.2.2 (Imagem)**.** *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto $Im\,T = \{w \in W : \exists v \in V \text{ com } T(v) = w\}$ é chamado de **imagem** de T.*

Proposição 2.2.1. *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então, valem:*

1. *$Ker\,T$ é um subespaço vetorial de V e $Im\,T$ é um subespaço vetorial de W.*
2. *T é injetora $\iff$ $Ker\,T = \{0\}$.*

Demonstração:

(1)

Sejam $v_1, v_2 \in Ker\,T$. Então, $T(v_1) = T(v_2) = 0$.

Daí, tem-se que $T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha \cdot T(v_1) + T(v_2) = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$, ou seja, $\alpha v_1 + v_2 \in Ker\,V$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo par de vetores $v_1, v_2 \in Ker\,T$.

Da mesma forma, tomando $w_1, w_2 \in Im\,T$, vale que existem $u_1, u_2 \in V$ tais que $w_1 = T(u_1)$ e $w_2 = T(u_2)$. Assim, se $w = \alpha w_1 + w_2$, então,

$$\begin{aligned} w &= \alpha w_1 + w_2 \\ &= \alpha T(u_1) + T(u_2) \\ &= T(\alpha u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Como $u_1, u_2 \in V$, então $(\alpha u_1 + u_2) \in V$ e, portanto, $w \in Im\, T$.

Logo, $Ker\, T$ é um subespaço vetorial de V e $Im\, T$ é um subespaço vetorial de W.

(2), ($\Rightarrow$)

Suponha T injetora.

Sabe-se que $T(0) = 0$, necessariamente. Então, $0 \in Ker\, T$. Mas como T é injetora, o único elemento $v \in V$ que satisfaz $T(v) = 0$ é o 0. Portanto, segue que $Ker\, T = \{0\}$.

(2), ($\Leftarrow$)

Suponha $Ker\, T = \{0\}$. Agora, suponha por absurdo que T não seja injetiva. Isso quer dizer que existem $v_1, v_2 \in V$ distintos, tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} & T(v_1) = T(v_2) & \iff \\ \iff\quad & T(v_1) - T(v_2) = 0 & \iff \\ \iff\quad & T(v_1 - v_2) = 0. & \end{aligned}$$

Então, $(v_1 - v_2) \in Ker\, T$, ou seja, $v_1 - v_2 = 0$, pois é o único elemento do núcleo de T. O que é uma contradição, porque tomamos v_1 e v_2 distintos.

Logo, T é injetora.

■

2.3 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, onde V e W são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Será demonstrado que é possível associar a cada transformação linear T uma matriz $m \times n$ com entradas sendo elementos do corpo $\mathbb{K}$.

Fixando uma base para cada espaço vetorial, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$, pode-se dizer que cada vetor $v \in V$ pode ser descrito como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_V$ e os escalares que multiplicam os vetores da base são as coordenadas de v para a base $\mathcal{B}_V$. Analogamente, pode-se descrever cada vetor $w \in W$ como combinação linear de vetores de $\mathcal{B}_W$ e os escalares que acompanham esses vetores na combinação linear são as coordenadas de w para a base $\mathcal{B}_W$.

Dado um vetor $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \in V$, pode-se escrever sua imagem como

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T\left(v_j\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

com $\alpha_j \in \mathbb{K}$ para $j = 1, \dots, n$.

Além disso, é possível escrever cada $T(v_j)$ como combinação de elementos de $\mathcal{B}_W$.

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} w_i. \tag{2.11}$$

Assim, substituindo (2.11) em (2.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} T(v) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \alpha_j w_i. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, pode-se pensar em $T(v)$ como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}_W$:

$$T(v) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k w_k, \tag{2.13}$$

com $\beta_k \in \mathbb{K}$, para $k = 1, \dots, m$.

Comparando (2.12) e (2.13), tem-se:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \alpha_j. \tag{2.14}$$

A partir daí, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \lambda_{11}\alpha_1 & + & \lambda_{12}\alpha_2 & + & \cdots & + & \lambda_{1n}\alpha_n & = & \beta_1, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \lambda_{m1}\alpha_1 & + & \lambda_{m2}\alpha_2 & + & \cdots & + & \lambda_{mn}\alpha_n & = & \beta_m, \end{cases} \tag{2.15}$$

Assim, pode-se reescrever tal sistema na forma matricial:

$$A \cdot [v]_{\mathcal{B}_V} = [T(v)]_{\mathcal{B}_W},$$

isto é,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}_V}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}}_{[T(v)]_{\mathcal{B}_W}}. \tag{2.16}$$

Definição 2.3.1 (Matriz de uma transformação linear)**.** *Uma matriz A como a descrita acima é chamada de* ***matriz da transformação*** *T com relação às bases $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.*

Uma notação utilizada para representar essa matriz será $A = [T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ ou simplesmente $A = [T]_{\mathcal{B}}$, no caso de $\mathcal{B} = \mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$.

Observação: Lembre-se que uma das hipóteses para se definir a *matriz de uma transformação linear* é que as dimensões sejam **finitas**.

Exemplo 2.3.1. *Para o Exemplo 2.1, a matriz de rotação de um ângulo θ para vetores em $\mathbb{R}^2$ seria:*

$$[R_\theta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

em que $\mathcal{B} = \{(1,0);(0,1)\}$.

Observe que, tomando as coordenadas de um vetor $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ na forma de matriz coluna, tem-se que:

$$\begin{aligned} R_\theta(v) &= [R_\theta]_{\mathcal{B}} \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\text{sen}\theta \\ x\text{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= (x\cos\theta - y\text{sen}\theta, x\text{sen}\theta + y\cos\theta), \end{aligned}$$

ou seja, essa é, de fato, a matriz da rotação.

Exemplo 2.3.2. *O Exemplo 2.1.2 tratava de um operador no espaço dos polinômios, a derivada. Porém, esse espaço tem dimensão infinita, ou seja,* ***não possui uma matriz de transformação****.*

Exemplo 2.3.3. *Considere os espaços vetoriais $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ e $M_{m\times 1}(\mathbb{C})$ e uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Então, a transformação*

$$\begin{aligned} T: \quad M_{n\times 1}(\mathbb{C}) &\to M_{m\times 1}(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

é linear e $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$, onde $\mathcal{B} = \underbrace{\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right\}}_{n \text{ vetores}}$ *e* $\mathcal{B}' = \underbrace{\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e'_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e'_m} \right\}}_{m \text{ vetores}}$

são bases de $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ e $M_{m\times 1}(\mathbb{C})$, respectivamente.

De fato, sejam $M, N \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, pelas propriedades de matriz segue que

$$\begin{aligned} T(\lambda M + N) &= A \cdot (\lambda M + N) \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda T(M) + T(N). \end{aligned}$$

Então, T é linear.

Além disso, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$, pois as matrizes colunas que indicam as coordenadas em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são os próprios vetores dos espaços vetoriais em questão.

Proposição 2.3.1. *Considere dois espaços vetoriais, V e W, cujas dimensões são n e m, respectivamente, e sejam $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ suas bases. Dada uma matriz $M \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = M$.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{B}_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Considere $w_i = Me_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ e sendo w_i a representação com matriz coluna com as coordenadas do vetor w_i considerando a base $\mathcal{B}_W$. Então, cada elemento da base $\mathcal{B}_V$ está associado a um vetor $w_i \in W$. Assim, pela Proposição 2.1.2, tem-se que existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T(e_i) = Me_i$.

E, ainda, seja $v \in V$, tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$. Então,

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M e_i \\ &= M \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\ &= Mv. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma única transformação linear tal que $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = M$.

■

Proposição 2.3.2. *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares. Considere também que $\dim U = n$, $\dim V = m$ e $\dim W = r$. Fixando as bases $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ para U, V e W, respectivamente, tem-se que:*

$$[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W} = [T_2]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} \cdot [T_1]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V} . \tag{2.17}$$

Demonstração:

Sejam as bases $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ e as matrizes

$$[T_1]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

$$[T_2]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rm} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$$[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Assim, tomando $T_2 \circ T_1$ aplicado a $u_k \in \mathcal{B}_U$, com $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$, obtém-se, por um lado:

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(u_k) &= T_2(T_1(u_k)) \\ &= T_2\left([T_1]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_V} \cdot u_k\right) \\ &= T_2\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot u_k\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(T_2 \circ T_1)(u_k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk} w_i. \tag{2.21}$$

Por outro lado, tem-se:

$$(T_2 \circ T_1)(u_k) = [T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}_U,\mathcal{B}_W} \cdot u_k$$

$$
\begin{aligned}
(T_2 \circ T_1)(u_k) &= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{rk} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$(T_2 \circ T_1)(u_k) = \sum_{i=1}^{r} c_{ik} w_i. \tag{2.22}$$

Conforme a Proposição 1.1.6, pela unicidade das coordenadas, e comparando (2.21) e (2.22), tem-se que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}, \tag{2.23}$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Isso equivale a

$$[T_2 \circ T_1]_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W} = [T_2]_{\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W} \cdot [T_1]_{\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V}.$$

■

3

AUTOVALORES, AUTOVETORES E PRODUTO INTERNO

3.1 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Definição 3.1.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é dito um **autovalor** de T, se existe um vetor não nulo $v \in V$, tal que $T(v) = \lambda v$.*

Definição 3.1.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$ é dito um **autovetor** de T associado a um autovalor λ, se $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v$.*

Exemplo 3.1.1. *O operador linear descrito no Exemplo 2.1.3 não tem autovetores.*

De fato, seja $v = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, com $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ e tome e_i, com $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, os elementos da base de $\mathbb{R}^\infty$ como descrito no Exemplo 1.1.9. Então,

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n,$$

com $x_n \neq 0$.

Então, tome $T(v)$.

$$\begin{aligned} T(v) &= (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_{n-2} + x_n, x_{n-1}, x_n, 0, 0, 0, \dots) \\ &= x_2e_1 + (x_1 + x_3)e_2 + (x_2 + x_4)e_3 + \cdots + (x_{n-2} + x_n)e_{n-1} + x_{n-1}e_n + x_ne_{n+1}. \end{aligned}$$

Como $x_n \neq 0$, $T(v)$ não pode ser múltiplo de v, já que tem uma coordenada não nula para o vetor e_{n+1} da base.

Com isso, conclui-se que o operador linear do Exemplo 2.1.3 não tem autovetores.

Exemplo 3.1.2. *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (-y, x)$. Então, T não tem autovetores.*

Suponha $v = (x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2$ um autovetor de T em relação a λ.

Então,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_v, y_v) \\ &= (-y_v, x_v). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x_v, y_v) \\ &= \lambda(x_v, y_v) \\ &= (\lambda x_v, \lambda y_v). \end{aligned}$$

Então, segue que

$$(-y_v, x_v) = (\lambda x_v, \lambda y_v).$$

Nesse caso,

$$\begin{cases} -y_v &= \lambda x_v, \\ x_v &= \lambda y_v. \end{cases}$$

Substituindo:

$$-y_v = \lambda^2 y_v.$$

Assim, $y_v = 0$ ou $\lambda^2 = -1$. Como a segunda condição é impossível, então, tem-se que $y_v = 0$ e, portanto, $x_v = 0$.

Nesse caso, $v = 0$. Mas v é um autovetor, que por definição é não nulo. Logo, essa transformação não tem autovetores.

Proposição 3.1.1. *Dado um operador linear $T : V \to V$, segue que*

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff Ker\,(\lambda Id - T) \neq \{0\},$$

em que $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* Id *é o operador identidade de* V *em* V.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$

Se λ é um autovalor de T, então existe um vetor, não nulo, $v \in V$, tal que $T(v) = \lambda v$.

Então, $v \in \text{Ker}\,(\lambda Id - T)$, pois

$$T(v) = \lambda v = \lambda(Id \cdot v) = (\lambda Id) \cdot v \iff (\lambda Id) \cdot v - Tv = 0 \iff (\lambda Id - T) \cdot v = 0,$$

ou seja, $\text{Ker}\,(\lambda Id - T) \neq \{0\}$.

$(\Leftarrow)$

Se $\text{Ker}\,(\lambda Id - T) \neq \{0\}$, então, existe $v \in V$, não nulo, tal que

$$(\lambda Id - T)\, v = 0.$$

Então,

$$\lambda Id(v) - T(v) = 0 \iff T(v) = \lambda v.$$

Isto é, λ é um autovalor de T.

■

Semelhantemente à Proposição anterior, tem-se:

Proposição 3.1.2. *Sejam* V *um espaço vetorial,* $T : V \to V$ *um operador linear e* $\mathcal{B}$ *uma base de* V. *Então,* $\lambda \in \mathbb{K}$ *é um autovalor de* T *se, e somente se,* λ *é uma raiz de* $det\,([x\,Id - T]_{\mathcal{B}}) = 0$.

Demonstração:

Pela Proposição 3.1.1,

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff \text{Ker}\,(\lambda Id - T) \neq \{0\}.$$

Então, pela Proposição 2.2.1, item 2, sabe-se que $(\lambda Id - T)$ não é injetora, ou seja, $[\lambda\, Id - T]_{\mathcal{B}}$ não é invertível. Assim, conclui-se que

$$det\left([\lambda\, Id - T]_{\mathcal{B}}\right) = 0.$$

Por outro lado,

Se λ é raiz de $det\left([x\, Id - T]_{\mathcal{B}}\right) = 0$, então, tem-se que

$$det\left([\lambda\, Id - T]_{\mathcal{B}}\right) = 0,$$

o que implica que $[\lambda\, Id - T]_{\mathcal{B}}$ não é invertível e, portanto, $(\lambda\, Id - T)$ não é injetora. Assim, pela Proposição 2.2.1, item 2, Ker $(\lambda Id - T) \neq \{0\}$ e, portanto, pela Proposição 3.1.1, λ é autovalor de T.

■

Assim, para encontrar os autovalores de T, basta encontrar as raízes de

$$det\left([x\, Id - T]_{\mathcal{B}}\right) = 0.$$

Definição 3.1.3. *Dado um espaço vetorial V e um operador linear $T : V \to V$, $P(x) = det\left([x\, Id - T]_{\mathcal{B}}\right)$ é chamado polinômio característico de T.*

Neste trabalho, será utilizada a notação $P_T(x)$, para se referir ao polinômio característico de T.

Proposição 3.1.3. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ autovetores associados aos autovalores de T, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, respectivamente, sendo esses autovalores dois a dois distintos. Então, o conjunto $V_n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é linearmente independente.*

Demonstração:

Chamando de $V_i = \{v_1, v_2, \dots, v_i\} \subset V_n$, com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, por indução, será demonstrado que V_n é linearmente independente.

No caso de $n = 1$, $V_1 = \{v_1\}$ é L.I., pois é um conjunto unitário com elemento não nulo.

Agora, supondo que $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ seja L.I., para algum $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ será mostrado que $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ também é L.I.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{K}$ e considere a igualdade

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0. \tag{3.1}$$

Para que os autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ sejam L.I. é necessário e suficiente que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ sejam todos nulos.

Aplicando T a ambos membros de (3.1) e lembrando que $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ são autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & T\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}\right) = T(0) && \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) = 0 && \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por outro lado, multiplicando ambos membros de (3.1) por λ_{k+1}, obtém-se:

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0. \tag{3.3}$$

Subtraindo (3.3) de (3.2), fica:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}) - \\ & -(\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} v_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}) = 0 - 0 && \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \cdots + \\ & + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k + \alpha_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}) v_{k+1} = 0 && \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) v_2 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

De (3.4), sabendo que, por hipótese de indução, V_k é linearmente independente, segue que, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ vale

$$\alpha_j(\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0.$$

E, como os autovalores são dois a dois distintos, então $\lambda_j - \lambda_{k+1} \neq 0$, portanto, necessariamente $\alpha_j = 0$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Agora, voltando para (3.1), tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} & \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 & \iff \\ \iff & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 & \iff \\ \iff & \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 & \iff \\ \iff & \alpha_{k+1} = 0. & \end{array}$$

Então, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$. Portanto, V_{k+1} é L.I.

Logo, por indução, segue que V_n é linearmente independente.

■

3.2 PRODUTO INTERNO

Definição 3.2.1 (Produto Interno)**.** *Um **produto interno** num espaço vetorial V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, que satisfaz às seguintes propriedades:*

P1. Dados $u, u', v \in V$, vale:

$$\langle u + u', v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle.$$

P2. Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, vale:

$$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle.$$

P3. Dados $u, v \in V$, vale:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}.$$

(Lembrando que se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $\bar{z} = a - bi$ é o conjugado de z. Se $z \in \mathbb{R}$, então, $\bar{z} = z$.)

P4. Dado $v \in V$, se $v \neq 0$, então:

$$\langle v, v\rangle > 0.$$

Outras propriedades consequentes:

P5. Dado um espaço vetorial V, seja $v \in V$. Então,

$$\langle v, 0\rangle = \langle 0, v\rangle = 0.$$

De fato,

$$\langle 0, v \rangle = \langle 0 \cdot v, v \rangle = 0 \cdot \langle v, v \rangle = 0,$$

e, então,

$$\langle v, 0 \rangle = \overline{\langle 0, v \rangle} = \overline{0} = 0.$$

P6. $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$.

De fato, suponha que $v \neq 0$, então, pela Propriedade 4 da definição de produto interno, valeria que $\langle v, v \rangle > 0$. Contradição!

P7. Dados $u, v, v' \in V$, vale:

$$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle.$$

Com efeito, das Propriedades 1 e 3 da definição de produto interno, segue

$$\begin{array}{rcl} \langle u, v + v' \rangle & = & \overline{\langle v + v', u \rangle} \\ & = & \overline{\langle v, u \rangle + \langle v', u \rangle} \\ & = & \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle v', u \rangle} \\ & = & \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle. \end{array}$$

P8. Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, vale:

$$\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle.$$

Isso decorre das Propriedades 2 e 3.

$$\begin{array}{rcl} \langle u, \alpha v \rangle & = & \overline{\langle \alpha v, u \rangle} \\ & = & \overline{\alpha \langle v, u \rangle} \\ & = & \overline{\alpha}\, \overline{\langle v, u \rangle} \\ & = & \overline{\alpha} \langle u, v \rangle. \end{array}$$

P9. Dados $u_i, v_j \in V$ e $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, segue que:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle u_i, v_j \rangle.$$

Segue das Propriedades 1 e 2, aplicadas n vezes e das Propriedades 8 e 9, aplicadas m vezes.

A seguir, alguns exemplos.

Exemplo 3.2.1. *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}$ *e sejam* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \dots, y_n)$ *elementos de* $\mathbb{R}^n$*. Então, a função definida por*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

ou seja,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

é um produto interno.

De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, dados por $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, as propriedades de produto interno são verificadas:

1.

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= (x_1+y_1)z_1 + \cdots + (x_n+y_n)z_n \\
&= (x_1z_1 + y_1z_1) + \cdots + (x_nz_n + y_nz_n) \\
&= \underbrace{(x_1z_1 + \cdots + x_nz_n)}_{\langle x,z\rangle} + \underbrace{(y_1z_1 + \cdots + y_nz_n)}_{\langle y,z\rangle} \\
&= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x, y\rangle &= (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n \\
&= \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 + \cdots + \alpha x_ny_n \\
&= \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \\
&= \alpha\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \\
&= y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n \\
&= \langle y, x\rangle.
\end{aligned}$$

Como está definido sobre o corpo dos números reais, $\langle y, x\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, então, segue que

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

4.

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \cdots + x_n \cdot x_n \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \end{aligned}$$

Se $x \neq 0$, então, $x_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e, portanto, $x_i^2 > 0$.

Assim,

$$\langle x, x \rangle = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{x_i^2}_{>0} + \cdots + \underbrace{x_n^2}_{\geq 0}.$$

Logo,

$$\langle x, x \rangle > 0.$$

O produto interno definido no Exemplo 3.2.1 é o usual, quando se trabalha em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.2.2. *Sejam $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $M_{n\times 1}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$ o conjunto das matrizes-coluna com suas n entradas sendo números complexos. Então, $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ munido das operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar é um espaço vetorial. $\overline{B}^t A$, com $A, B \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, usando a multiplicação usual entre matrizes, define um produto interno, onde $\overline{B}^t$ é a matriz-linha transposta e conjugada de B.*

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \overline{B}^t A \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{b_1} & \overline{b_2} & \cdots & \overline{b_n} \end{pmatrix}}_{\overline{B}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{A} \\ &= (\overline{b_1} a_1 + \overline{b_2} a_2 + \cdots + \overline{b_n} a_n). \end{aligned} \tag{3.5}$$

(Observe que, aqui, a matriz unitária resultante do produto $\overline{B}^t A$ será considerada como um número complexo igual ao valor de sua única entrada.)

Esse conjunto define um espaço vetorial, pois das próprias formas como as operações com matrizes são definidas, tem-se que, se $A, B \in M_{n\times1}(\mathbb{C})$, então $(A+B) \in M_{n\times1}(\mathbb{C})$ e, se $\lambda \in \mathbb{C}$, então $(\lambda A) \in M_{n\times1}(\mathbb{C})$.

Agora, de fato, tal operação define um produto interno. Sejam $A, B, C \in M_{n\times1}(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então, das propriedades de matrizes, seguem:

1.
$$\begin{aligned} \langle A+C, B\rangle &= \overline{B}^t(A+C) \\ &= \overline{B}^t A + \overline{B}^t C \\ &= \langle A, B\rangle + \langle C, B\rangle. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \langle \lambda A, B\rangle &= \overline{B}^t(\lambda A) \\ &= \lambda \overline{B}^t A \\ &= \lambda\langle A, B\rangle. \end{aligned}$$

3. Por um lado,

$$\begin{aligned} \langle A, B\rangle &= \overline{B}^t A \\ &= (\overline{b_1} \quad \overline{b_2} \quad \cdots \quad \overline{b_n}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= (\overline{b_1}a_1 + \overline{b_2}a_2 + \cdots + \overline{b_n}a_n). \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}
\overline{\langle B, A\rangle} &= \overline{\overline{A}^t B} \\
&= \overline{\left(\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)} \\
&= \overline{(\overline{a_1}b_1 + \overline{a_2}b_2 + \cdots + \overline{a_n}b_n)} \\
&= (\overline{\overline{a_1}b_1} + \overline{\overline{a_2}b_2} + \cdots + \overline{\overline{a_n}b_n}) \\
&= (a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + \cdots + a_n\overline{b_n}) \\
&= (\overline{b_1}a_1 + \overline{b_2}a_2 + \cdots + \overline{b_n}a_n).
\end{aligned}$$

Portanto, $\langle A, B\rangle = \overline{\langle B, A\rangle}$.

4. Tomando $A \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\langle A, A\rangle &= \overline{A}^t A \\
&= \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= (\overline{a_1}a_1 + \overline{a_2}a_2 + \cdots + \overline{a_n}a_n)
\end{aligned}$$

Como $a_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, então, $\overline{a_i}a_i = (Re(a_i))^2 + (Im(a_i))^2$. Assim, se $A \neq 0$, então existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_j \neq 0$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\langle A, A\rangle &= (\overline{a_1}a_1 + \overline{a_2}a_2 + \cdots + \overline{a_n}a_n) \\
&= (\underbrace{(Re(a_1)^2 + Im(a_1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(Re(a_2)^2 + Im(a_2)^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(Re(a_j)^2 + Im(a_j)^2}_{>0} + \cdots + \\
+ & \cdots + \underbrace{(Re(a_n)^2 + Im(a_n)^2}_{\geq 0}) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Então, esse é um produto interno para $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

Exemplo 3.2.3. *Considere espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$, apresentado no Exemplo 1.1.5, e a base descrita no Exemplo 1.1.9. Sendo e_i, com $i = 1, 2, 3, \ldots$, os elementos dessa base, dados dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^\infty$, pode-se escrever*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

e

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j.$$

Então, define-se o seguinte produto interno:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k, \tag{3.6}$$

onde $k = \max\{m, n\}$.

Observe que esse produto interno para $\mathbb{R}^\infty$ é bastante semelhante ao produto interno definido para $\mathbb{R}^n$, com a diferença que a quantidade de coordenadas que aparecem no cálculo do produto interno depende dos vetores sobre os quais estão sendo calculados esse produto. Em $\mathbb{R}^n$, a quantidade de coordenadas é sempre n, embora em alguns casos tais coordenadas sejam nulas.

Então, a demonstração que é de fato um produto interno é análoga à demonstração do Exemplo 3.2.1.

3.3 ORTOGONALIDADE

Definição 3.3.1 (Ortogonalidade)**.** *Dado um espaço vetorial V com produto interno, diz-se que dois vetores, $u, v \in V$, são* ***ortogonais*** *(ou* ***perpendiculares****) se $\langle u, v \rangle = 0$. Denota-se $u \perp v$.*

Um subconjunto $X \subset V$ é chamado de ortogonal, se seus elementos são dois a dois ortogonais.

Observação: Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dados $u, v \in V$, se $\langle u, v \rangle = 0$, então $\langle v, u \rangle = 0$, isto é, se $u \perp v$, então $v \perp u$.

De fato, pelas propriedades do produto interno,

$$
\begin{aligned}
& \langle v, u\rangle = 0 \iff \\
\iff & \overline{\langle u, v\rangle} = 0 \iff \\
\iff & \overline{\overline{\langle u, v\rangle}} = \overline{0} \iff \\
\iff & \langle u, v\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Definição 3.3.2 (Norma)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno, então chama-se* ***norma*** *do vetor $v \in V$, o número não negativo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Observações:

Dado um espaço vetorial V com produto interno.

1. $\|0\| = 0$. De fato, $\|0\| = \sqrt{\langle 0, 0\rangle} = 0$.
2. Se um vetor $v \in V$ é tal que $\|v\| = 1$, então v é dito *vetor unitário*.

Definição 3.3.3 (Conjunto Ortonormal)**.** *Dado um espaço vetorial V com produto interno, o conjunto $X \subset V$ é denominado* ***ortonormal*** *se, para $u, v \in X$, $\langle u, v\rangle = 0$, quando $u \neq v$, e $\langle u, v\rangle = 1$, quando $u = v$, ou seja, se seus elementos forem dois a dois ortogonais e todos unitários.*

Uma base de um espaço vetorial V é chamada de *base ortonormal*, se for um conjunto ortonormal.

Definição 3.3.4 (Complemento Ortogonal)**.** *Dados um espaço vetorial V com produto interno e um subconjunto $W \subset V$. Diz-se que $W^{\perp}$ é o* ***complemento ortogonal de W****, se*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in W\}.$$

Proposição 3.3.1. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $W \subset V$, então valem as seguintes afirmações:*

1. *$W^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V. (Mesmo que W não o seja.)*
2. *$W = \{0\} \Rightarrow W^{\perp} = V$.*
3. *Se $\mathcal{B}$ for uma base de V e $\mathcal{B} \subset W$, então $W^{\perp} = \{0\}$.*

Demonstração:

1. Observe os seguintes fatos:

   - $0 \in W^{\perp}$, pois $\langle 0, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$.
   - Dados $v_1, v_2 \in W^{\perp}$, para todo $w \in W$, tem-se que $\langle v_1, w \rangle = 0$ e $\langle v_2, w \rangle = 0$. Então,

   $$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

     Logo, $(v_1 + v_2) \in W^{\perp}$.
   - Para todo $w \in W$, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in W^{\perp}$, vale que:

   $$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \lambda \cdot 0 = 0.$$

     Então, $\lambda v \in W^{\perp}$.

   Portanto, $W^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.

2. Se $W = \{0\}$, então para qualquer $v \in V$, vale $\langle 0, v \rangle = 0$. Como 0 é o único elemento de W, segue que $W^{\perp} = V$.

3. $0 \in W^{\perp}$, como visto no primeiro item.

   Agora, suponha $v \in V$, com $v \neq 0$, tal que $\langle v, w \rangle = 0$, para todo $w \in W$.

   Sendo $\mathcal{B} \subset V$, uma base de V tal que $\mathcal{B} \subset W$, é possível escrever v como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$.

   $$v = \sum_{e_i \in \mathcal{B}} \alpha_i e_i.$$

   Sabendo que $\mathcal{B} \subset W$, vale que $e_i \in \mathcal{B} \Rightarrow e_i \in W$ e, portanto, por hipótese,

   $$\langle v, e_i \rangle = 0. \tag{3.7}$$

   Então, a partir de (3.7), calculando $\langle v, v \rangle$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\langle v, v \rangle &= \langle v, \sum_{e_i \in \mathcal{B}} \alpha_i e_i \rangle \\
&= \sum_{e_i \in \mathcal{B}} \overline{\alpha_i} \langle v, e_i \rangle \\
&= \sum_{e_i \in \mathcal{B}} \overline{\alpha_i} \cdot 0 \\
&= 0. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

O que é um absurdo, pois $\langle v, v \rangle > 0$, para todo $v \in V$.

Logo, não existe $v \neq 0$ tal que $\langle v, u \rangle = 0$, para todo $w \in W$.

Portanto, segue que $W^{\perp} = \{0\}$.

■

Proposição 3.3.2. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita e W um subespaço vetorial de V. Então, $W \oplus W^{\perp} = V$.*

Demonstração:

Para mostrar que $W \oplus W^{\perp} = V$, basta provar que todo elemento de V pode ser escrito como soma de um elemento de W com um elemento de $W^{\perp}$ e que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

1. Para todo $v \in V$, existem $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$, tais que $v = w_1 + w_2$.

   De fato, pela Proposição 1.1.4, W tem uma base, a partir da qual, aplicando o *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*, apresentado na Subseção 3.3.1, na página 69, é possível construir uma base ortonormal (em particular, ortogonal) $\mathcal{B}_W = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ para o subespaço W.

   Pela Proposição 1.1.5, existe uma base de V que contenha $\mathcal{B}_W$, que a partir do mesmo *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*, é possível construir uma base de V ortogonal, mantendo os elementos de $\mathcal{B}_W$. Chamando essa base por $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_{m+n}\}$, tem-se que, dado $v \in V$, é possível escrever v como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$:

$$v = \underbrace{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m}_{\in W} + \alpha_{m+1} e_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+n} e_{m+n},$$

   onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $i = 1, 2, \dots, (m+n)$.

Observe que, definindo $w_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m$ e $w_2 = \alpha_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+n}e_{m+n}$, obtém-se a decomposição $v = w_1 + w_2$, na qual $w_1 \in W$. Então, basta provar que $w_2 \in W^{\perp}$.

Para isso, seja $w \in W$ qualquer e escreva $w = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m$, com $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$. Então, lembrando que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ sempre que $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\langle w, w_2 \rangle &= \langle (\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_m e_m), (\alpha_{m+1}e_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+n}e_{m+n}) \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i, \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m+n} \beta_i \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observe que nesta última igualdade i e j nunca assumem valores iguais, por isso todos produtos internos se anularam.

Logo, $\langle w, w_2 \rangle = 0$, para todo $w \in W$, ou seja, $w_2 \in W^{\perp}$.

Com isso, demonstrou-se que, para todo $v \in V$, existem $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$, tais que $v = w_1 + w_2$.

2. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

   Com efeito, suponha $w \in (W \cap W^{\perp})$. Então, $\langle w, w \rangle = 0$, mas isso só acontece se $w = 0$.

   Portanto, segue que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Logo, segue que $W \oplus W^{\perp} = V$.

■

Proposição 3.3.3. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então, todo subconjunto $X \subset V$ ortogonal é linearmente independente.*

Demonstração:

Considere o seguinte subconjunto ortogonal: $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0. \tag{3.9}$$

Então, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle = 0. \tag{3.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left\langle v_j, v_i \right\rangle, \end{aligned}$$

e, como X é ortogonal, vale que $\langle v_j, v_i \rangle = 0$, se $j \neq i$, e $\langle v_j, v_i \rangle > 0$, se $j = i$, logo,

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle. \tag{3.11}$$

Agora, comparando (3.10) e (3.11), segue que:

$$\alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0,$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Logo, o conjunto é L.I.

■

Proposição 3.3.4. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $U \subset V$ ortogonal, formado por vetores não nulos. Se u é uma combinação linear de elementos de U, então*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i,$$

onde $U = \{u_1, \dots, u_n\}$.

Demonstração:

Considere $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, dado $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\langle u, u_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, u_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle u_i, u_j \rangle.$$

Mas, como U é um conjunto ortogonal, segue que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$, então,

$$\begin{aligned} \langle u, u_j \rangle = \alpha_j \langle u_j, u_j \rangle \quad &\iff \\ \iff \quad \alpha_j = \tfrac{\langle u, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i.$$

■

Proposição 3.3.5. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V. Então, se $v \in V$, tem-se*

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n,$$

ou seja,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i. \tag{3.12}$$

Demonstração:

Diretamente da Proposição 3.3.4, como $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal, todo $v \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$, mais especificamente:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i.$$

Por outro lado, $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, segue que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i.$$

■

3.3.1 *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*

Dada uma base de um espaço vetorial V de dimensão finita, sempre é possível achar uma base ortonormal desse mesmo espaço.

Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base para o espaço vetorial V.

Será definida, através do *Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt*, uma base ortonormal $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ para esse mesmo espaço.

Primeiramente, toma-se uma base ortogonal $\mathcal{B}_w = \{w_1, \dots, w_n\}$, a partir da qual será definida $\mathcal{B}'$, fazendo $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Tome $w_1 = v_1$.
2. $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$.
3. Tendo definidos $w_1, \dots, w_k$, com $k \in \{1, \dots, n-1\}$, define-se

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle w_j, v_{k+1}\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} w_j.$$

Para provar que é uma base ortonormal, primeiro será demonstrado que os vetores de $\mathcal{B}_w$ são dois a dois ortogonais. (Caso $n = 1$, não há o que ser feito.)

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_2\rangle &= \left\langle v_1, v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 \right\rangle \\
&= \langle v_1, v_2\rangle - \left\langle v_1, \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 \right\rangle \\
&= \langle v_1, v_2\rangle - \overline{\left(\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\right)} \cdot \langle v_1, w_1\rangle \\
&= \langle v_1, v_2\rangle - \overline{\left(\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\right)} \cdot \langle v_1, v_1\rangle \\
&= \langle v_1, v_2\rangle - \frac{\left(\overline{\langle v_2, v_1\rangle}\right)}{\left(\overline{\langle v_1, v_1\rangle}\right)} \cdot \langle v_1, v_1\rangle \\
&= \langle v_1, v_2\rangle - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot \langle v_1, v_1\rangle \\
&= \langle v_1, v_2\rangle - \langle v_1, v_2\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Caso $n = 2$, está provado que o conjunto é ortogonal.

Agora, se $n \geq 3$, suponha que o subconjunto $B_k = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset \mathcal{B}_W$ com k elementos seja ortogonal.

Então, o subconjunto $B_{k+1} = \{w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}\} \subset \mathcal{B}_W$ também é ortogonal.

De fato, se B_k é ortogonal, então, vale que

$$\langle w_i, w_j \rangle = 0, \tag{3.13}$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, k$ e $i \neq j$.

Agora, observe que:

$$\begin{aligned}
\langle w_i, w_{k+1} \rangle &= \left\langle w_i, v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j \right\rangle \\
&= \langle w_i, v_{k+1} \rangle - \overline{\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \right)} \left\langle w_i, w_j \right\rangle \\
&= \langle w_i, v_{k+1} \rangle - \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\overline{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}\right)}{\left(\overline{\langle w_j, w_j \rangle}\right)} \left\langle w_i, w_j \right\rangle \\
&= \langle w_i, v_{k+1} \rangle - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle w_j, v_{k+1} \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \left\langle w_i, w_j \right\rangle .
\end{aligned}$$

Mas, por (3.13), tem-se que $\langle w_i, w_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, então:

$$\begin{aligned}
\langle w_i, w_{k+1} \rangle &= \langle w_i, v_{k+1} \rangle - \frac{\langle w_i, v_{k+1} \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_i \rangle \\
&= \langle w_i, v_{k+1} \rangle - \langle w_i, v_{k+1} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, por recorrência, tem-se um passo indutivo, que mostra que $B_n = \mathcal{B}_W$ é ortogonal.

Agora, tomando $e_i = \frac{w_i}{|w_i|}$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se que:

1. Se $i = j$,

$$\begin{aligned}
\langle e_i, e_i \rangle &= \left\langle \frac{w_i}{\|w_i\|}, \frac{w_i}{\|w_i\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|w_i\|} \cdot \frac{1}{\overline{\left(\|w_i\|\right)}} \cdot \langle w_i, w_i \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle e_i, e_i\rangle &= \frac{\langle w_i, w_i\rangle}{\|w_i\|^2}\\ &= \frac{\langle w_i, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}\\ &= 1.\end{aligned}$$

2. Se $i \neq j$,

$$\begin{aligned}\langle e_i, e_j\rangle &= \left\langle \frac{w_i}{\|w_i\|}, \frac{w_j}{\|w_j\|}\right\rangle\\ &= \frac{1}{\|w_i\|}\cdot\frac{1}{\left(\overline{\|w_j\|}\right)}\cdot\langle w_i, w_j\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{B}$ é ortonormal. ■

3.4 TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DO FUNCIONAL LINEAR

Nesta seção, será demonstrado o Teorema da Representação do Funcional Linear, para espaços vetoriais de dimensão finita.

Teorema 1 (Teorema da Representação do Funcional Linear)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se $f : V \to \mathbb{K}$ é um funcional linear, então existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u\rangle$, para todo $v \in V$.*

Demonstração:

Se V é espaço vetorial com produto interno e dimensão n, então existe uma base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$.

Sejam $u = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} v_i$ e $f_u(v) = \langle v, u\rangle$. Então, verifica-se $f = f_u$.

De fato, dado $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} f_u(v_k) &= \langle v_k, u\rangle \\ &= \langle v_k, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{f(v_i)}} \langle v_k, v_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \langle v_k, v_i\rangle. \end{aligned}$$

Como a base é ortonormal, vale que $\langle v_k, v_i\rangle = 1$, se $i = k$, e $\langle v_k, v_i\rangle = 0$, se $i \neq k$, então, segue que:

$$f_u(v_k) = f(v_k).$$

E, pela Proposição 2.1.2, conclui-se que

$$f_u = f.$$

Para provar a unicidade, suponha que existam u_1 e u_2 tais que $f(v) = \langle v, u_1\rangle$ e $f(v) = \langle v, u_2\rangle$, para todo $v \in V$.

Então,

$$\begin{array}{ccc} & \langle v, u_1\rangle = \langle v, u_2\rangle & \iff \\ \iff & \langle v, u_1\rangle - \langle v, u_2\rangle = 0 & \iff \\ \iff & \langle v, u_1 - u_2\rangle = 0 & \iff \\ \iff & u_1 - u_2 = 0 & \iff \\ \iff & u_1 = u_2. & \end{array}$$

Logo, o vetor u deve ser único.

■

4

ADJUNTO E AUTOADJUNTO

4.1 ADJUNTO: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Definição 4.1.1 (Adjunto)**.** *Seja $T : V \to V$ um operador linear, com V sendo um espaço vetorial com produto interno. Um operador linear $T^* : V \to V$ é dito* ***adjunto*** *de T se for tal que $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ para todo $u, v \in V$.*

Exemplo 4.1.1. *O adjunto do operador linear de rotação, apresentado no Exemplo 2.1.1, em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual é dado por*

$$\begin{array}{rccc} R_\theta^* : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & R_\theta^*(x, y), \end{array}$$

em que

$$R_\theta^*(x, y) = (x\cos\theta + ysen\theta, -xsen\theta + y\cos\theta). \tag{4.1}$$

De fato, considere o operador linear de rotação:

$$\begin{array}{rccc} R_\theta : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & R_\theta(x, y), \end{array}$$

em que

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\mathrm{sen}\theta, x\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta).$$

Então, sejam $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Assim, por um lado,

$$\begin{aligned}\langle R_\theta(v_1), v_2\rangle &= (x_1\cos\theta - y_1\text{sen}\theta)x_2 + (x_1\text{sen}\theta + y_1\cos\theta)y_2\\ &= x_1x_2\cos\theta - y_1x_2\text{sen}\theta + x_1y_2\text{sen}\theta + y_1y_2\cos\theta\\ &= (x_1x_2 + y_1y_2)\cos\theta + (x_1y_2 - y_1x_2)\text{sen}\theta. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}\langle v_1, R^*_\theta(v_2)\rangle &= x_1(x_2\cos\theta + y_2\text{sen}\theta) + y_1(-x_2\text{sen}\theta + y_2\cos\theta)\\ &= x_1x_2\cos\theta + x_1y_2\text{sen}\theta - y_1x_2\text{sen}\theta + y_1y_2\cos\theta\\ &= (x_1x_2 + y_1y_2)\cos\theta + (x_1y_2 - y_1x_2)\text{sen}\theta. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Comparando (4.2) e (4.3), tem-se que:

$$\langle R_\theta(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, R^*_\theta(v_2)\rangle\,.$$

Portanto, R^*_θ dado por (4.1) é o adjunto de R_θ.

Agora, veja um exemplo para o espaço vetorial descrito no Exemplo 3.2.2.

Exemplo 4.1.2. *Considere o espaço vetorial $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, com produto interno dado por $\langle M, N\rangle = \overline{N}^t M$, para $M, N \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ e $T : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ um operador linear tal que $T(M) = AM$, então T^* dado por $T^*(N) = \overline{A}^t N$ é o adjunto de T.*

De fato, procurando T^* o adjunto de T, então, pelas propriedades das operações com matrizes,

$$\begin{aligned}\langle T(M), N\rangle &= \langle AM, N\rangle\\ &= \overline{N}^t(AM)\\ &= (\overline{N}^t A)M\\ &= (A^t\overline{N})^t M\\ &= (\overline{\overline{A}^t N})M\\ &= \langle M, \overline{A}^t N\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, T^* dado por $T^*(M) = \overline{A}^t M$ é o adjunto de T.

No caso de V ser um espaço vetorial de dimensão finita, é válido que todo operador linear possui um único adjunto.

4.1.1 *Teorema do Operador Adjunto*

Teorema 2 (Teorema do Operador Adjunto)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Então, dado um operador $T : V \to V$, ele possui um único adjunto T^*.*

Demonstração:

Sejam $v \in V$ e f um funcional linear definido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccl} f: & V & \to & \mathbb{K} \\ & u & \mapsto & \langle T(u), v \rangle. \end{array}$$

f é linear, pois dados $u_1, u_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u_1 + u_2) &= \langle T(\lambda u_1 + u_2), v \rangle \\ &= \langle \lambda T(u_1) + T(u_2), v \rangle \\ &= \lambda \langle T(u_1), v \rangle + \langle T(u_2), v \rangle \\ &= \lambda f(u_1) + f(u_2). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1, existe um único vetor $w \in V$ tal que $f(u) = \langle u, w \rangle$, para todo $u \in V$. Então, existe um único vetor w tal que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, w \rangle$, ou seja, w é determinado de forma única por v. Assim, pode-se determinar $T^*(v) = w$.

Portanto, fica definido $T^* : V \to V$, tal que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$, para todo $u, v \in V$.

Agora, falta provar que T^* é linear. Para isso, considere $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \langle u, T^*(\lambda v_1 + v_2) \rangle &= \langle T(u), \lambda v_1 + v_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle T(u), v_1 \rangle + \langle T(u), v_2 \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle u, T^*(v_1) \rangle + \langle u, T^*(v_2) \rangle \\ &= \langle u, \lambda T^*(v_1) + T^*(v_2) \rangle. \end{aligned}$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \langle u, T^*(\lambda v_1 + v_2)\rangle = \langle u, \lambda T^*(v_1) + T^*(v_2)\rangle && \iff \\ \iff \quad & \langle u, T^*(\lambda v_1 + v_2)\rangle - \langle u, \lambda T^*(v_1) + T^*(v_2)\rangle = 0 && \iff \\ \iff \quad & \langle u, T^*(\lambda v_1 + v_2) - (\lambda T^*(v_1) + T^*(v_2))\rangle = 0. \end{aligned}$$

Mas isso deve valer para todo $u \in V$, então, necessariamente:

$$\begin{aligned} & T^*(\lambda v_1 + v_2) - (\lambda T^*(v_1) + T^*(v_2)) = 0 && \iff \\ \iff \quad & T^*(v_1 + \lambda v_2) = \lambda T^*(v_1) + T^*(v_2). \end{aligned}$$

Logo, T^* é linear.

A unicidade foi garantida pelo Teorema 1, na construção de T^*.

■

Assim, dado um operador linear $T : V \to V$ é possível definir uma fórmula explícita para seu adjunto T^*.

$$T^*(v) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle T(v_i), v\rangle} v_i, \tag{4.4}$$

para todo $v \in V$, com $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V.

Observação: O adjunto de uma transformação T depende do produto interno considerado.

Proposição 4.1.1. *Dados um espaço vetorial V com produto interno, dois operadores lineares, $T_1, T_2 : V \to V$, que possuem adjuntos, T_1^* e T_2^*, respectivamente, e um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:*

1. *$T_1 + T_2$ possui um adjunto, dado por $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.*
2. *λT_1 possui um adjunto, dado por $(\lambda T_1)^* = \overline{\lambda} T_1^*$.*
3. *$T_1 \circ T_2$ possui um adjunto, dado por $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.*
4. *T_1^* possui um adjunto, dado por $(T_1^*)^* = T_1$.*

Demonstração: Considere $u, v \in V$.

1.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Big(T_1 + T_2\Big)(u), v \right\rangle &= \langle T_1(u) + T_2(u), v\rangle \\
&= \langle T_1(u), v\rangle + \langle T_2(u), v\rangle \\
&= \langle u, T_1^*(v)\rangle + \langle u, T_2^*(v)\rangle \\
&= \langle u, T_1^*(v) + T_2^*(v)\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

2.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Big(\lambda T_1\Big)(u), v \right\rangle &= \langle \lambda T_1(u), v\rangle \\
&= \lambda\langle T_1(u), v\rangle \\
&= \lambda\langle u, T_1^*(v)\rangle \\
&= \langle u, \overline{\lambda} T_1(u)\rangle.
\end{aligned}
$$

Então, $(\lambda T_1)^* = \overline{\lambda} T_1^*$.

3.

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Big(T_1 \circ T_2\Big)(u), v \right\rangle &= \left\langle T_1\Big(T_2(u)\Big), v \right\rangle \\
&= \langle T_2(u), T_1^*(v)\rangle \\
&= \left\langle u, T_2^*\Big(T_1^*(v)\Big) \right\rangle \\
&= \left\langle u, \Big(T_2^* \circ T_1^*\Big)(v) \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Então, $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

4.

$$
\begin{aligned}
\langle T_1^*(u), v\rangle &= \overline{\langle v, T_1^*(u)\rangle} \\
&= \overline{\langle T_1(v), u\rangle} \\
&= \langle u, T_1(v)\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo, $(T_1^*)^* = T_1$.

■

Proposição 4.1.2. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Considere $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V e $T : V \to V$ um operador linear. Então,*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle T(e_1), e_1\rangle & \langle T(e_2), e_1\rangle & \cdots & \langle T(e_n), e_1\rangle \\ \langle T(e_1), e_2\rangle & \langle T(e_2), e_2\rangle & \cdots & \langle T(e_n), e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T(e_1), e_n\rangle & \langle T(e_2), e_n\rangle & \cdots & \langle T(e_n), e_n\rangle \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

isto é,

se $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$, então $a_{ij} = \langle T(e_j), e_i\rangle$, para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração:

Por um lado, da definição de $[T]_{\mathcal{B}}$,

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \tag{4.6}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Por outro, lembrando que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal, pela Proposição 3.3.5, como $T(e_j) \in V$, tem-se

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_j), e_i\rangle e_i, \tag{4.7}$$

para $j = 1, 2, \dots, n$.

Comparando (4.6) e (4.7), tem-se que $a_{ij} = \langle T(e_j), e_i\rangle$, para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, pois ambas equações mostram coordenadas de $T(e_j)$ na base $\mathcal{B}$.

■

Proposição 4.1.3. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Se $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V, então a matriz da adjunta é a transposta da conjugada da matriz de T, isto é, $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$.*

Demonstração:

Considere $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal. Sendo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

tem-se, pela Proposição 4.1.2 e pelas propriedades de produto interno, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left\langle T(e_j), e_i \right\rangle \\ &= \left\langle e_j, T^*(e_i) \right\rangle \\ &= \overline{\left\langle T^*(e_i), e_j \right\rangle} \\ &= \overline{b_{ji}}, \end{aligned}$$

ou seja, segue que

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}. \tag{4.8}$$

■

4.2 AUTOADJUNTO: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Um operador *autoadjunto* nada mais é que um operador que é adjunto dele mesmo, como o próprio nome sugere.

Definição 4.2.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear, no qual V é um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que T é* ***autoadjunto*** *se T possui um adjunto e $T^* = T$.*

Exemplo 4.2.1. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ com seu produto interno usual e o operador linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dado por*

$$T(z,w) = \Big(2z + (1+i)w, (1-i)z + w\Big)$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Então, T é autoadjunto.

Com efeito, sejam $v_1 = (z_1, w_1), v_2 = (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$, então, por um lado

$$\begin{aligned}
\langle T(v_1), v_2 \rangle &= \Big\langle \Big(2z_1 + (1+i)w_1, (1-i)z_1 + w_1\Big), (z_2, w_2) \Big\rangle \\
&= (2z_1 + (1+i)w_1)\overline{z_2} + ((1-i)z_1 + w_1)\overline{w_2} \\
&= 2z_1\overline{z_2} + (1+i)w_1\overline{z_2} + (1-i)z_1\overline{w_2} + w_1\overline{w_2}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}
\langle v_1, T(v_2) \rangle &= z_1\overline{(2z_2 + (1+i)w_2)} + w_1\overline{((1-i)z_2 + w_2)} \\
&= z_1(2\overline{z_2} + \overline{(1+i)}\overline{w_2}) + w_1(\overline{(1-i)}\overline{z_2} + \overline{w_2}) \\
&= 2z_1\overline{z_2} + (1-i)z_1\overline{w_2} + (1+i)w_1\overline{z_2} + w_1\overline{w_2}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Logo, comparando (4.9) e (4.10), conclui-se que $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ e, portanto, T é autoadjunto.

Exemplo 4.2.2. *O operador linear apresentado no Exemplo 2.1.3, pode ser resumido a*

$$\begin{cases} T(e_1) = e_2 \\ T(e_i) = e_{i-1} + e_{i+1}, \quad \text{se } i > 1. \end{cases}$$

E tal operador possui autoadjunto.

De fato, considerando o produto interno do Exemplo 3.2.3, para verificar que T é autoadjunto, basta verificar que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^\infty$.

Então, sejam $u = (x_1, \dots x_n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ e $v = (y_1, \dots y_n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. (Não necessariamente os dois vetores têm as coordenadas nulas apenas a partir da $(n+1)$-ésima entrada, mas caso algum dos dois vetores seja da forma $(a_1, \dots, a_m, 0, 0, \dots)$ com $m < n$, então, basta tomar $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$ ou $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$, dependendo de qual for o caso.)

Então, é possível escrever

$$u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$$

e

$$v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n = \sum_{j=1}^{n} y_je_j.$$

Desta forma, lembrando que a base é ortonormal, por um lado,

$$\begin{aligned}
\langle T(u), v\rangle &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_iT(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \left\langle T(e_i), e_j\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_1y_j \left\langle T(e_1), e_j\right\rangle + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \left\langle T(e_i), e_j\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_1y_j \left\langle e_2, e_j\right\rangle + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \left\langle e_{i-1} + e_{i+1}, e_j\right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_1y_j \left\langle e_2, e_j\right\rangle + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \left\langle e_{i-1}, e_j\right\rangle + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \left\langle e_{i+1}, e_j\right\rangle \\
&= x_1y_2 + \sum_{i=2}^{n} x_iy_{i-1} + \sum_{i=2}^{n} x_iy_{i+1} \\
&= \sum_{i=2}^{n} x_iy_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} x_iy_{i+1}. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle u, T(v)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_ie_i, T\left(\sum_{j=1}^{n} y_je_j\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_jT(e_j)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j \left\langle e_i, T(e_j)\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u, T(v)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 \langle e_i, T(e_1)\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, T\left(e_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 \langle e_i, e_2\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, e_{j-1} + e_{j+1}\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_1 \langle e_i, e_2\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, e_{j-1}\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_i y_j \left\langle e_i, e_{j+1}\right\rangle \\
&= x_2 y_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} + \sum_{i=3}^{n} x_i y_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_{i+1} + \sum_{i=2}^{n} x_i y_{i-1}. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Comparando (4.11) e (4.12), conclui-se que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle,$$

ou seja, T é autoadjunto.

Proposição 4.2.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno e $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto. São equivalentes:*

1. *T é autoadjunto.*
2. *Se $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V, então $[T]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$.*
3. *Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$.*

Demonstração:

(1) ⇒ (2):

Diretamente da Proposição 4.1.3, dada uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, tem-se

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}.$$

(2) ⇒ (3):

Tomando qualquer base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, segue, por (2), que $[T]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$ e, portanto, vale (3).

(3) ⇒ (1):

Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V, tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$. Pela Proposição 4.1.3, tem-se que $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$. Portanto, $[T]_{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}}$, ou seja, T é autoadjunto.

■

Proposição 4.2.2. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalores de T dois a dois distintos. Então, os autovetores correspondentes $v_1, \dots, v_n$ são dois a dois ortogonais.*

Demonstração:

Para $i, j \in \{1, \dots, n\}$, com $i \neq j$, tem-se

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle &= \lambda_i\langle v_i, v_j\rangle - \lambda_j\langle v_i, v_j\rangle \\ &= \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \overline{\lambda_j} v_j\rangle.\end{aligned}$$

Como $\lambda_j \in \mathbb{R}$ e T é autoadjunto, então,

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \overline{\lambda_j} v_j\rangle \\ &= \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j\rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j\rangle - \langle v_i, T(v_j)\rangle \\ &= \langle T(v_i), v_j\rangle - \langle T(v_i), v_j\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Então, lembrando que $\lambda_i \neq \lambda_j$, segue que

$$(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle = 0 \Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0.$$

Portanto, os autovetores são dois a dois ortogonais.

■

Proposição 4.2.3. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto e λ um autovalor de T. Então, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Seja v um autovetor associado a λ.

Por um lado,

$$\begin{aligned}\langle T(v), v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle \\ &= \lambda\langle v, v\rangle. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por outro, como T é autoadjunto,

$$\begin{aligned}\langle T(v), v\rangle &= \langle v, T(v)\rangle \\ &= \langle v, \lambda v\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle v, v\rangle. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Então, comparando (4.13) e (4.14), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lambda\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \quad &\Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \quad (\lambda - \overline{\lambda})\langle v, v\rangle = 0. \end{aligned}$$

Como $\langle v, v\rangle > 0$, então, necessariamente $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$.

■

4.3 TEOREMA ESPECTRAL

Esta seção apresenta outro importante teorema da Álgebra Linear, que é o Teorema Espectral. Para o demonstrar, serão apresentados inicialmente alguns resultados e definições.

Proposição 4.3.1. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto. Então, T possui um autovetor.*

Demonstração:

Se o espaço vetorial V for sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio característico de T possui uma raiz, ou seja, T tem um autovalor e, portanto, um autovetor.

Então, considere que V esteja definido sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e sejam n a dimensão de V e $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V. Assim, pela Proposição 4.2.1, vale que $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$.

Agora, considere um outro espaço vetorial $U = M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ com o produto interno definido no Exemplo 3.2.2 e dimensão finita n sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e um operador linear $S : U \to U$, tal que, dado $X \in U$, $S(X) = [T]_{\mathcal{B}}X$, ou seja, como visto no Exemplo 2.3.3, $[S]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}}$. O motivo de se pensar em tal operador S num espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos é poder garantir uma raiz no polinômio característico, que não é garantia de se ter quando se trabalha no corpo dos números reais.

O operador S também é autoadjunto, pois, pela Proposição 4.2.1, vale que $[S^*]_{\mathcal{B}'} = \overline{[S]}^t_{\mathcal{B}'}$.

Por outro lado, como $[S]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}}$ e $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$, então, segue que $\overline{[S]}^t_{\mathcal{B}'} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$.

Então, $[S^*]_{\mathcal{B}'} = \overline{[S]}^t_{\mathcal{B}'} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}}$ e, como T é autoadjunto, segue que $[S^*]_{\mathcal{B}'} = \overline{[T]}^t_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}'}$. Logo, S também é autoadjunto.

Como as matrizes de transformação de T e S são iguais, segue diretamente da definição de polinômio característico que $P_T(x) = P_S(x)$. Quando se usa essa notação de igualdade, há apenas a indicação de que as expressões agébricas são iguais, mas $P_T(x)$ tem seu domínio definido em $\mathbb{R}$, enquanto que $P_S(x)$ tem seu domínio definido em $\mathbb{C}$, ou seja, $P_T(x)$ nada mais é que $P_S(x)$ restrito a $\mathbb{R}$.

Com isso, se $\lambda \in \mathbb{R}$ for uma raiz de P_S, então, λ também será raiz de P_T. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, sabe-se que P_S tem uma raiz complexa. Chamando de λ essa raiz, basta provar que ela é real, para que também seja raiz de P_T.

Pela Proposição 4.2.3, como λ é autovalor de S, que é autoadjunto, tem-se que $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, λ também é raiz de P_T e, portanto, é um autovalor de T.

Logo, está provado que T possui um autovetor, independentemente de V ser um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

■

Agora, segue uma definição que será útil para a demonstração do próximo teorema a ser apresentado.

Definição 4.3.1. *Seja V um espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Então, diz-se que o subespaço $W \subset V$ é um* ***subespaço T-invariante*** *de V ou um* ***subespaço invariante sob*** *T, se, para todo $w \in W$, vale que $T(w) \in W$. Ou seja, $T(W) \subset W$.*

Proposição 4.3.2. *Sejam V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear com adjunto. Se W é um subespaço T-invariante de V, então seu complemento ortogonal $W^{\perp}$ é um subespaço T^*-invariante.*

Demonstração:

Considere $v \in W$ e $u \in W^{\perp}$. Como W é T-invariante, então $T(v) \in W$ e, portanto, $\langle T(v), u\rangle = 0$.

Por outro lado, como T^* é adjunto de T, vale que $\langle T(v), u\rangle = \langle v, T^*(u)\rangle$. E, portanto,

$$\langle v, T^*(u)\rangle = 0.$$

Assim, segue que, para todo $u \in W^{\perp}$, vale que $T^*(u) \in W^{\perp}$, ou seja, $W^{\perp}$ é T^*-invariante.

■

Teorema 3 (Teorema Espectral)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Então, V possui uma base ortonormal formada por autovetores de T, para todo operador linear autoadjunto $T : V \to V$.*

Demonstração:

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto e $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ a dimensão de V.

Se $n = 1$, então, pela Proposição 4.3.1, existe um autovetor v_1 de T, associado ao autovalor λ_1.

Então, $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ também é um autovetor associado a λ_1. Com efeito, sabendo que $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e multiplicando ambos membros dessa equação por $\frac{1}{\|v_1\|}$, segue:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\|v_1\|} T(v_1) &= \tfrac{1}{\|v_1\|}\lambda_1 v_1 \quad \iff \\ \iff \quad T\left(\tfrac{v_1}{\|v_1\|}\right) &= \lambda_1 \cdot \tfrac{v_1}{\|v_1\|}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\|v_1\| \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| &= \left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\rangle \\
&= \frac{1}{\|v_1\|} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\|v_1\|} \right)} \cdot \langle v_1, v_1 \rangle \\
&= \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\| \cdot \underbrace{\overline{\|v_1\|}}_{\in \mathbb{R}}} \\
&= \frac{\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\frac{v_1}{\|v_1\|}$ é um autovetor de T, com norma 1. E, como a dimensão de V é 1, então, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\}$ é uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Agora, usando o processo de indução, suponha que todo espaço vetorial de dimensão k possua uma base ortonormal formada por autovetores de T. Assim, o passo de indução é mostrar que todo espaço de dimensão $k+1$ possui uma base ortonormal formada por autovetores de T.

Sejam V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão $k+1$ e $W \subset V$ um subespaço de V, tal que W é o espaço gerado por um autovetor v_1 associado ao autovalor λ_1. A existência de v_1 é garantida pela Proposição 4.3.1.

W é T-invariante. Com efeito, se $u \in W$, então $u = \alpha v_1$. Então,

$$
\begin{aligned}
T(u) &= T(\alpha v_1) \\
&= \alpha T(v_1) \\
&= \alpha(\lambda_1 v_1) \\
&= (\alpha \lambda_1) v_1,
\end{aligned}
$$

ou seja, $T(u) \in W$.

A dimensão de W é 1, por construção.

Agora, considere $W^\perp$ o complemento ortogonal de W. Pelas Proposições 3.3.2 e 1.2.2, tem-se que $W \oplus W^\perp = V$ e, portanto,

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp \Rightarrow k+1 = 1 + \dim W^\perp \Rightarrow \dim W^\perp = k.$$

Como W é T-invariante, então, pela Proposição 4.3.2, $W^\perp$ é T^*-invariante. Mas T é autoadjunto, então $T = T^*$ e, portanto, $W^\perp$ é T-invariante.

Assim, por hipótese de indução, $W^\perp$ tem uma base ortonormal $\mathcal{B}_{W^\perp} = \{v_2, \dots, v_{k+1}\}$ formada por autovetores de T.

Então, o conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{W^\perp} \cup \mathcal{B}_1$ é ortonormal e tem $k+1$ elementos, sendo todos autovetores de T. Logo, pela Proposição 1.1.3, $\mathcal{B}$ é uma base de V. ■

5

CONTRAEXEMPLOS EM $\mathbb{R}^\infty$

Neste capítulo, serão apresentados três contraexemplos em $\mathbb{R}^\infty$ (Exemplo 1.1.5) para alguns teoremas apresentados ao longo do texto e demonstrados para dimensão finita.

A ideia de se trabalhar com o $\mathbb{R}^\infty$ para apresentar tais contraexemplos é que esse espaço vetorial tem uma relação com $\mathbb{R}^n$, ao contrário de outros espaços de dimensão infinita, como por exemplo o espaço dos polinômios. Com isso, espera-se que sejam exemplos mais simples para entendimento do leitor.

Esse capítulo foi baseado em Andrade (2013), que apresenta, dentre outros, os seguintes enunciados que serão discutidos aqui:

1. (Teorema da Representação do Funcional Linear) Se $f : V \to \mathbb{K}$ é um funcional linear, então existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u \rangle$, para todo $v \in V$.
2. Toda transformação linear $T : V_1 \to V_2$ possui um adjunto $T^* : V_2 \to V_1$.
3. (Teorema Espectral) Todo operador linear auto-adjunto $T : V \to V$ possui uma base ortonormal formada por autovetores de T.

5.1 TEOREMA 1: TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DO FUNCIONAL LINEAR

5.1.1 *Em espaços vetoriais de dimensão finita*

Esse teorema foi apresentado na página 71, da Seção 3.4, sob o seguinte enunciado:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$. Se $f : V \to \mathbb{K}$ é um funcional linear, então existe um único vetor $u \in V$ tal que $f(v) = \langle v, u\rangle$, para todo $v \in V$.

Foi demonstrado para dimensão finita. Porém, a seguir, será apresentado um contraexemplo em $\mathbb{R}^\infty$, para esse teorema, caso não houvesse a restrição da dimensão ser finita.

5.1.2 *Contraexemplo em $\mathbb{R}^\infty$*

Considere o seguinte funcional linear:

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) & \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Primeiramente, será demonstrado que f é, de fato, um funcional linear. Para tanto, basta mostrar que, dados $x, y \in \mathbb{R}^\infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, vale que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Considere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots)$, sendo que $x_i = 0$, para todo $i > k$, com $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e $y_j = 0$, para todo $j > l$, com $l \in \{1, 2, 3, \dots\}$, e $n = \max\{k, l\}$.

Então,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) + (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots)) \\ &= f(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \dots, \lambda x_n + y_n, 0, 0, \dots) \\ &= (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) + \cdots + (\lambda x_n + y_n) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \\ &= \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) + f(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, 0, \dots) \\ &= \lambda f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Logo, f assim definida é um funcional linear.

Suponha que o Teorema 1, fosse válido para esse espaço vetorial, com o produto interno definido no Exemplo 3.2.3. Então, existe um único $u = (u_1, \dots, u_k, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ tal que, para todo $v \in \mathbb{R}^\infty$, vale

$$f(v) = \langle v, u\rangle.$$

Em particular, sejam e_i elementos da base de $\mathbb{R}^\infty$ apresentada no Exemplo 1.1.9, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Então, calculando os valores dos funcionais nos elementos da base, por um lado:

$$f(e_i) = f(0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{x_i}, 0, 0, \dots) = 0 + 0 + \cdots + 1 = 1.$$

Por outro lado,

$$f(e_i) = \langle e_i, u \rangle = 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 \cdot u_i + 0 + \cdots = u_i.$$

Comparando ambas equações, conclui-se que, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ vale:

$$u_i = 1$$

Isso é um absurdo, porque se $u \in \mathbb{R}^\infty$, então, deveria existir $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $u_j = 0$, para todo $j > n_0$. Mas isso não acontece.

Então, não existe $u \in \mathbb{R}^\infty$ tal que $f(v) = \langle v, u \rangle$.

5.1.3 *Por que a dimensão finita é importante nesse teorema?*

Na demonstração apresentada na página 71, define-se o vetor u da seguinte forma:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} v_i.$$

Observe que aqui, cada coordenada tem uma dependência com o valor de n, que é a dimensão (finita) do espaço vetorial. No caso de dimensão infinita, o razoável seria tomar o limite dessa soma para n tendendo ao infinito, que seria uma série. Porém, nem toda série converge, isto é, nem sempre é possível definir esse valor. Por isso, quando a dimensão é infinita, nem sempre o teorema é válido.

No caso desse contraexemplo, quando se define

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{f(e_i)} e_i,$$

tem-se que $\overline{f(e_i)} = 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, ou seja,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} e_i.$$

Entretanto, u assim definido não pertence a $\mathbb{R}^\infty$, quebrando um dos principais argumentos utilizados na demonstração, o fato de que $u \in \mathbb{R}^\infty$.

5.2 TEOREMA 2: TEOREMA DO OPERADOR ADJUNTO

5.2.1 *Em espaços vetoriais de dimensão finita*

Um caso particular desse teorema, específico para operadores lineares, foi apresentado na página 75, da Seção 4.1, sob o seguinte enunciado:

Seja V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Então, dado um operador $T : V \to V$, ele possui um único adjunto T^*.

Aqui, será discutido esse teorema e não o caso geral de transformações lineares, porque o foco deste trabalho é mostrar contraexemplos no $\mathbb{R}^\infty$, então é suficiente falar do caso de operadores lineares. Contudo, dado um contraexemplo para operadores lineares, o mesmo serve como contraexemplo de transformações lineares.

Esse teorema foi demonstrado para dimensão finita.

A seguir, será apresentado um contraexemplo em $\mathbb{R}^\infty$, para esse teorema, caso não houvesse a restrição da dimensão ser finita.

5.2.2 *Contraexemplo em $\mathbb{R}^\infty$*

Seja $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$um operador linear definido por

$$T(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)e_1, \tag{5.1}$$

ou seja,

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^\infty & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) & \mapsto & (x_1 + x_2 + \cdots + x_n, 0, 0, \ldots). \end{array}$$

Esse operador é claramente linear. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $v_1 = (x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$ e $v_2 = (y_1, \dots, y_k, 0, 0, \dots)$, onde $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ é a maior posição de um termo não nulo das sequências $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^\infty$, tem-se:

$$\begin{aligned}
T(\lambda v_1 + v_2) &= T(\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_k + y_k, 0, 0, \dots) \\
&= T\Big((\lambda x_1 + y_1)e_1 + \cdots + (\lambda x_k + y_k)e_k\Big) \\
&= [(\lambda x_1 + y_1) + \cdots + (\lambda x_k + y_k)]e_1 \\
&= \lambda(x_1 + \cdots + x_k)e_1 + (y_1 + \cdots + y_k)e_1 \\
&= \lambda T(x_1 e_1 + \cdots + x_k e_k) + T(y_1 e_1 + \cdots + y_k e_k) \\
&= \lambda T(v_1) + T(v_2).
\end{aligned}$$

Pela definição de T, tem-se:

$$T(e_i) = e_1, \tag{5.2}$$

para todo $i \in \{1, 2, 3 \dots\}$.

Então, supondo $T^* : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ seu adjunto, vale que

$$\langle e_i, T^*(e_1) \rangle = \langle T(e_i), e_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1. \tag{5.3}$$

Por outro lado, como $T^*(e_1) \in \mathbb{R}^\infty$, então, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^*(e_1) = (a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, 0, \dots) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_m e_m. \tag{5.4}$$

Assim, tomando $i = m + 1$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle e_{m+1}, T^*(e_1) \rangle &= \langle e_{m+1}, a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_m e_m \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Contradição, pois, por (5.3), $\langle e_i, T^*(e_1) \rangle = 1$.

Logo, o operador linear T assim definido não possui adjunto.

5.2.3 *Por que a dimensão finita é importante nesse teorema?*

A demonstração desse teorema para espaços de dimensão finita foi apresentada na página 75 e usa o *Teorema da Representação do Funcional Linear* para definir o adjunto, a partir do funcional linear dado por

$$f(v) = \langle T(v), u \rangle .$$

Como visto na Seção 5.1, a demonstração apresentada desse teorema depende da dimensão finita, para mostrar que existe um único w que satisfaz

$$f(v) = \langle v, w \rangle .$$

Esse w seria definido, nesse contraexemplo, por

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{\infty} \overline{f(e_i)} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle T(e_i), u \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_1, u \rangle e_i \\ &= \langle e_1, u \rangle \sum_{i=1}^{\infty} e_i . \end{aligned}$$

E, novamente, tem-se $w \notin \mathbb{R}^\infty$.

5.3 TEOREMA 3: TEOREMA ESPECTRAL

5.3.1 *Em espaços vetoriais de dimensão finita*

Esse teorema foi apresentado na página 86, da Seção 4.3, sob o seguinte enunciado:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Então, V possui uma base ortonormal formada por autovetores de T, para todo operador linear autoadjunto $T : V \to V$.

E foi demonstrado para dimensão finita.

Neste caso, será apresentado um contraexemplo para a Proposição 4.3.1, página 84, que diz:

Sejam V um espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto. Então, T possui um autovetor.

Essa Proposição é essencial para a demonstração do teorema e, claramente, se houver um contraexemplo para tal proposição, então haverá um contraexemplo para o Teorema Espectral, pois se um operador não possuir autovetores, não tem como o espaço vetorial ter uma base ortonormal formada por autovetores.

5.3.2 *Contraexemplo em $\mathbb{R}^\infty$*

Lembrando dos Exemplos 2.1.3 e 4.2.2, o operador linear $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ tal que

$$
\begin{aligned}
T(e_1) &= e_2 \\
T(e_i) &= e_{i-1} + e_{i+1}, \quad \text{se } i > 1.
\end{aligned}
$$

é autoadjunto, mas não tem autovetores.

Para mostrar que T não tem autovetores, suponha por absurdo que $v = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$, com $x_n \neq 0$, seja um autovetor de T associado a um autovalor λ.

Nesse caso,

$$
\begin{aligned}
T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i T\left(e_i\right) \\
&= x_1 T(e_1) + \sum_{i=2}^{n} x_i T\left(e_i\right) \\
&= x_1 e_2 + \sum_{i=2}^{n} x_i (e_{i-1} + e_{i+1}) \\
&= x_1 e_2 + x_2(e_1 + e_3) + x_3(e_2 + e_4) + \cdots + x_{n-1}(e_{n-2} + e_n) + x_n(e_{n-1} + e_{n+1}) \\
&= x_2 e_1 + (x_1 + x_3) e_2 + (x_2 + x_4) e_3 + \cdots + (x_{n-2} + x_n) e_{n-1} + x_{n-1} e_n + x_n e_{n+1} \\
&= \Big(x_2, (x_1 + x_3), (x_2 + x_4), \dots, \underbrace{(x_{n-2} + x_n)}_{t_{n-1}}, \underbrace{x_{n-1}}_{t_n}, \underbrace{x_n}_{t_{n+1}}, 0, 0, \dots\Big) \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
T(v) &= \lambda v \\
&= \lambda(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, 0, 0, \dots) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots, \underbrace{x_{n-1}}_{t_{n-1}}, \underbrace{x_n}_{t_n}, \underbrace{0}_{t_{n+1}}, 0, 0, \dots) \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Comparando os valores de t_{n+1} em (5.5) e (5.6), tem-se que $x_n = 0$, o que é um absurdo, pois foi definido que $x_n \neq 0$.

Portanto, T não tem autovetores e, consequentemente, esse é um operador linear autoadjunto em $\mathbb{R}^\infty$, mas $\mathbb{R}^\infty$ não tem uma base ortonormal formada por autovetores de T.

5.3.3 *Por que a dimensão finita é importante nesse teorema?*

O contraexemplo dado para este teorema foi baseado num contraexemplo à Proposição 4.3.1. Então, pensando na demonstração dessa proposição, apresentada na página 84, a necessidade da dimensão finita foi no uso das matrizes de transformação e do espaço $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, que não fazem sentido no caso da dimensão infinita. Sem esses objetos, não é possível determinar o polinômio característico da matriz de transformação, o que implica em não garantir a existência de um autovalor pelo Teorema Fundamental da Álgebra.

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema da Representação do Funcional Linear e o Teorema Espectral são dois importantes teoremas da Álgebra Linear, porém, como foi demonstrado, não são válidos para qualquer espaço vetorial.

Foram apresentados contraexemplos “simples”, em $\mathbb{R}^\infty$, para esses enunciados caso não houvesse a hipótese de ter dimensão finita. O intuito de se trabalhar com $\mathbb{R}^\infty$ foi a semelhança que esse espaço tem com o $\mathbb{R}^n$, principalmente para se definir um produto interno, sem que fosse necessário recorrer a integrais, por exemplo, no caso de alguns espaços de funções apresentados por Coelho (2005), Kreyszig (1989) e Lima (2004).

Aliada a essa simplicidade dos exemplos, foi utilizada uma linguagem que se espera ser acessível a leitores que estão tendo um primeiro contato com o assunto. Assim, espera-se que esse texto seja útil ao aprendizado de estudantes de nível de graduação.

Por fim, para uma eventual continuidade futura a esse trabalho, pode-se pensar em investigar e buscar condições em que um espaço vetorial de dimensão infinita deve satisfazer para que se possa estender a validade dos teoremas. Verificando se a condição da dimensão finita é necessária e suficiente ou apenas suficiente e pensar em possíveis espaços de dimensão infinita nos quais os teoremas sejam válidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRADE, José Fernandes Silva. *Contra-exemplos (simples) em um espaço vetorial de dimensão infinita.* In:____.*Tópicos Especiais em Álgebra.* Coleção Iniciação Científica, 1a. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013. cap. 12.

[2] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. *Um curso de Álgebra Linear.* 2a. ed., São Paulo: EdUSP, 2005.

[3] FLUCH, M. *On the Fundamental Theorem of Linear Algebra.* Bielefeld: 2011. Disponível em: <https://www.math.uni-bielefeld.de/ mfluch/docs/2008-11.pdf> Acesso em: 23 jul. 2018.

[4] HOFFMAN, K.E.; KUNZE, R. *Álgebra Linear.* Ed. Polígono, 1971.

[5] KREYSZIG, Erwin. *Introductory functional analysis with applications.* Nova York: Wiley, 1989.

[6] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária, 7a. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2004.