



PROFMAT



Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Deyvson de França da Silva

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E GEOMETRIA ESFÉRICA

Natal, 2018

Deyvson de França da Silva

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E GEOMETRIA ESFÉRICA

**Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação
em Matemática em Rede Nacional da Universidade
Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com
as exigências legais para obtenção do título de Mestre.**

Área de Concentração: Geometria .

Orientadora:

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira

Natal, 2018

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Silva, Deyvson de França da.

Áreas de figuras planas e geometria esférica / Deyvson de França da Silva. - 2018.

80f.: il.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Natal, 2018.

Orientador: Prof. Dra. Débora Borges Ferreira.

1. Geometria - Tese. 2. Áreas - Tese. 3. Geometria Esférica - Tese. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 514

Deyvson de França da Silva

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS E GEOMETRIA ESFÉRICA

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovado em: / /

Banca Examinadora

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof. Dra. Viviane Simioli Medeiros Campos
Departamento de Matemática - UFRN

Prof. Dr. Joaquim Elias de Freitas
Membro Externo

Dedico este trabalho à minha família, amigos, alunos e em especial ao meu Pai e minha eterna vó e mãe Maria das Dores.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus o qual pedi apenas oportunidades para minha vida profissional e sei que elas nunca me faltaram, gostaria também de agradecer a todas as pessoas que diretamente ou indiretamente me ajudaram a chegar até aqui, aos amigos que me deram palavras de conforto quando precisei ou alunos que reconhecem meu trabalho. Em especial quero agradecer ao meu amigo de longa data, o professor Gilson Gameleira que tanto me auxiliou na construção e edição das figuras presentes nesse trabalho, e a três grandes professores que tive na minha vida acadêmica, que sempre se esforçaram para dar seu melhor e que muito contribuíram para minha formação, são eles minha orientadora professora Débora Borges, o professor Carlos Gomes e o professor Ronaldo Freire de Lima.

Resumo

O presente trabalho serve de material de apoio para professores do ensino básico que lecionam matemática, em particular geometria. Relembramos cálculo de áreas de figuras planas poligonais seguidas de provas matemáticas. Sobre áreas de figuras, mostramos resultados curiosos como o Teorema de Pick, a existência de uma reta que divide duas figuras planas na mesma área e a prova que as três medianas do triângulo o divide em seis triângulos de mesma área.

Para contemplar as exigências dos PCNs, abordamos o estudo de Geometria Esférica como alternativa à interdisciplinaridade (geografia, matemática, astrofísica, etc).

PALAVRAS-CHAVE: Geometria, Áreas, Geometria Esférica.

Abstract

The present paper serves as a support material for elementary school teachers who teach mathematics, in particular geometry. We recall the calculation of areas of polygonal plane figures followed by mathematical proofs. About areas of figures, we show curious results, as the Theorem Of Pick, the existence of the line that divides two figures in the same area and the proof that the three medians of triangles divides him in six triangles of the same area.

To contemplate the requirements of PCNs, we approach the study of Spherical Geometry as an alternative to interdisciplinarity (geography, mathematics, astrophysics, etc).

KEYWORDS: Geometry, Areas, Spherial Geometry.

Lista de Figuras

1.1	Quadrado de lado 1	15
1.2	Quadrado de lado medindo a	15
1.3	Quadrado de lado medindo a	16
1.4	Quadrado de lado r inscrito em quadrado de lado a	17
1.5	Retângulo de lados medindo a e b	18
1.6	Paralelogramos (a) e (b)	19
1.7	Paralelogramo (a)	19
1.8	Paralelogramo (b)	20
1.9	Triângulo	21
1.10	Polígono retangular	21
1.11	Polígono retângular inscrito em F	22
1.12	Quadrado de 1m de lado	23
1.13	Quadrado de 2m de lado	25
1.14	Retângulo formado pela justaposição de dois quadrado de $1m^2$	25
1.15	Triângulo obtido ao dobrar um quadrado de $1m^2$ ao meio	26
1.16	Justaposição de dois triângulos de $0,5m^2$	26
1.17	Paralelogramo formado pe justaposição de dois triângulos de $0,5m^2$ e um quadrad de $1m^2$	27
1.18	Triângulo	28
1.19	Sala	28
2.1	Rede no plano	30
2.2	Na esquerda temos dois polígonos simples e na direita dois polígonos não simples .	30

2.3 Os dois triângulos da esquerda são triângulos fundamentais, enquanto que os dois da direita não são.	31
2.4 Triângulo fundamental CDE	31
2.5 Triângulo fundamental ACE	32
2.6 Polígono decomposto em triângulos	33
2.7 Polígonos	34
2.8 Segunda possibilidade	35
2.9 Polígono decomposto em triângulos fundamentais	35
2.10 Ângulos no polígono	37
2.11 Quadrilátero	37
2.12 Regiões A e B	38
2.13 Direção da reta de acordo com o ângulo x	39
2.14 Retas paralelas a t	40
2.15 Porção de A à esquerda e à direita da reta t	41
2.16 Reta l_x a depender de x	41
2.17 Reta l_0	42
2.18 Reta l_{180}	43
2.19 Na imagem temos as medianas AM, BN e CP e o baricentro G	43
2.20 Na imagem temos as medianas AM, BN e CP e o baricentro G	44
2.21 Logotipo	44
2.22 Lajota	45
2.23 Logotipo	46
2.24 Lajota	46
3.1 Esfera de centro O e raio R.	48
3.2 Esfera cortada por plano.	48
3.3 A e B são os pontos de interseção das duas circunferências máximas e são pontos antípodas	49
3.4 Ângulo esférico	50
3.5 Fusos esféricos	50
3.6 Fusos completos	51

3.7	Parte de um fuso completo	51
3.8	Triângulo esférico	52
3.9	Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm . .	53
3.10	Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm . .	53
3.11	Hemisfério que contém o triângulo esférico.	54
3.12	Vistas do triângulo esférico no hemisfério H e as regiões R_α, R_β e R_γ	54
3.13	Terra e seu eixo	56
3.14	Terra e seus Pólos	56
3.15	Linha do Equador	57
3.16	Paralelos	57
3.17	Meridianos	58
3.18	Latitudes	58
3.19	Longitudes	59
3.20	Meridianos e Paralelos	60
3.21	Latitude φ e Longitude θ	60
3.22	Esfera	61
3.23	Exemplo	63
3.24	Exemplo	64
3.25	Exemplo	65
3.26	Exemplo	66
3.27	Exemplo	67
3.28	Exemplo	68
3.29	Exemplo	69
3.30	A e B localizados no mesmo Paralelo	70
3.31	Situação de duas localidades no mesmo paralelo	70
3.32	Esfera	73
3.33	Esfera com localidade A e B. Retirado de [8]	75
3.34	Semi esfera	77

Sumário

INTRODUÇÃO	12
1 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	14
1.1 Área do retângulo	15
1.2 Área do paralelogramo	18
1.3 Área do triângulo	20
1.4 Área de Figuras Planas Quaisquer	21
1.5 Abordagem para o Ensino Fundamental I	22
2 TÓPICOS INTERESSANTES	29
2.1 Teorema de Pick	29
2.2 Reta que divide duas figuras planas na mesma área	38
2.3 Medianas dividem o triângulo em 6 triângulos de mesma área	42
3 GEOMETRIA ESFÉRICA	47
3.1 Principais Elementos da Geometria Esférica	47
3.2 Teorema de Girard	53
3.3 Elementos do Globo Terrestre	55
3.4 Calculando distâncias através das coordenadas geográficas	60
APÊNDICE	74

Introdução

De acordo com dados do programa Todos Pela Educação, apenas 7,3% dos alunos saem da escola com aprendizagem adequada em matemática, se parte dessa responsabilidade é ou não do aluno, é algo que se deve analisar. Mas o modo como a matemática é ensinada, apresentando fórmulas e algoritmos sem contextualização ou mesmo a falta de reflexão sobre o motivo e importância de aprendê-la, que por muitas vezes não faz sentido para o aluno estudar, acreditamos que é um dos responsáveis pelo desinteresse com a disciplina e consequente reprovação.

O presente trabalho tem por objetivo servir de apoio aos professores de matemática da rede básica de ensino no que diz respeito ao ensino de cálculo de áreas (geometria), para que com ele o professor possa não só obter conhecimento, mas também tenha mais condições de enriquecer sua aula.

No Capítulo 1, demonstramos as principais fórmulas do cálculo de áreas do retângulo, quadrado e triângulo. É comum encontrar em livros do ensino fundamental a demonstração de tais fórmulas, porém nesse capítulo enriquecemos a discussão mostrando que é importante levar em conta que tais fórmulas valem para todo número real e qual é o real significado do conceito de área. Para finalizar o capítulo, apresentamos uma proposta de atividade para ser aplicada no 6º ano sobre o ensino de áreas com um viés no que é discutido. É importante que nessa série, na qual os alunos têm o primeiro contato com noções mais formais de área, o professor tenha mais zelo por sua explicação, pois a partir daí teremos um aluno com mais abstração matemática ou simplesmente um aluno que decorou fórmulas, que pra ele não faz sentido, para fazer uma avaliação.

No Capítulo 2, apresentamos curiosidades e discussões interessantes que surge no estudo de áreas, como por exemplo a existência de uma reta que divide duas figuras planas na mesma área, o Teorema de Pick, que possibilita o cálculo da área de polígonos com vértices em uma malha de maneira simples, e o fato das três medianas do triângulo dividir o triângulo em outros seis de

mesma área. Esse capítulo tem por objetivo enriquecer o leitor sobre temas pouco discutidos e as vezes nem visto na escola, mas que nos despertam curiosidade e admiração sobre eles.

No Capítulo 3, apresentamos um tópico pouco discutido até mesmo pra quem faz uma graduação em matemática, que é sobre Geometria Esférica. A abordagem desse tema tem o objetivo de mostrar diferenças bem curiosas sobre o que estamos acostumados a ver em geometria plana e o que acontece em geometria esférica. Além disso, tomando esse tema como base e levando em conta que a terra é aproximadamente uma esfera, nesse capítulo são apresentados os principais elementos do globo terrestre e como eles podem nos auxiliar a calcular distâncias entre dois pontos no globo. Como nesse capítulo a maioria dos cálculos são acessíveis ao aluno de ensino médio, especialmente do 3º ano, fica uma grande oportunidade para que o professor possa aplicar um trabalho interdisciplinar entre geografia e matemática, enriquecendo o ensino e mostrando para o aluno que a matemática faz sentido.

Capítulo 1

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Iniciamos esse capítulo mostrando que a área de um retângulo qualquer, de lados com medidas a e b , é $a \cdot b$ para todos a e b números reais positivos. Verificamos facilmente que a fórmula vale para os números naturais, já para os números racionais não é tão óbvia e é menos evidente ainda para os números irracionais, onde tudo fica um pouco mais complicado porém mais interessante.

Em seguida demonstramos a área do paralelogramo e do triângulo a partir do que foi discutido anteriormente, e formalizamos o conceito de área para figuras planas quaisquer. Para concluir o capítulo apresentamos uma proposta de atividade para o ensino de área de figuras planas no ensino fundamental.

Nas demonstrações que seguem usamos os axiomas de áreas de polígonos quaisquer a seguir:

- i) Polígono congruentes (polígonos que possuem mesma forma e tamanho) possuem a mesma área
- ii) Se P é um quadrado de lado unitário, então a área de P é 1
- iii) Se um polígono P é a reunião de n polígonos P_1, \dots, P_n , de tal forma que dois polígonos quaisquer partilham somente um lado ou um vértice, então a área de P é a soma das áreas de P_i , $i = 1, \dots, n$.

1.1 Área do retângulo

Para toda medição, seja ela de qual natureza for, é preciso estabelecer uma unidade de medida, uma grandeza de mesma espécie que será usada para medir o tamanho das demais. Em áreas, a nossa unidade de medida usada é um quadrado de lado 1, o qual pelo Axioma (ii) terá área 1 u.m. (unidade de medida).

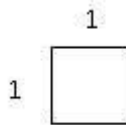


Figura 1.1: Quadrado de lado 1

Teorema 1.1. *Seja a um número real positivo qualquer, a área do quadrado de lado com medida a é a^2 .*

Demonstração. Dividiremos a demonstração nos três casos a seguir:

i) $a \in \mathbb{N}$

Se o quadrado tem lado de medida a , a um número natural, podemos subdividi-lo em a^2 quadrados de lados com medidas 1 u.m.. Vemos que a área do quadrado é:

$$\underbrace{a^2}_{\text{Quantidade de quadradinhos}} \cdot \underbrace{1}_{\text{área de cada quadradinho}} = a^2.$$

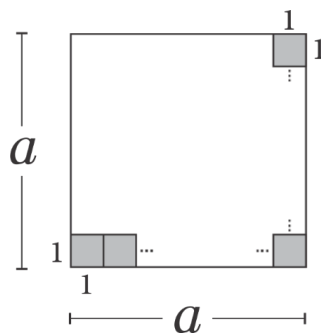


Figura 1.2: Quadrado de lado medindo a

ii) $a \in \mathbb{Q}$

Seja $a = \frac{m}{n}$ com m, n inteiros e $n \neq 0$ a medida do lado do quadrado. Começamos dividindo nossa unidade de medida em pequenos quadrados de lado com medida $\frac{1}{n}$, como na Figura 1.3. Como nossa unidade de medida tem área 1, e nela cabem n^2 quadradinhos iguais de lado com

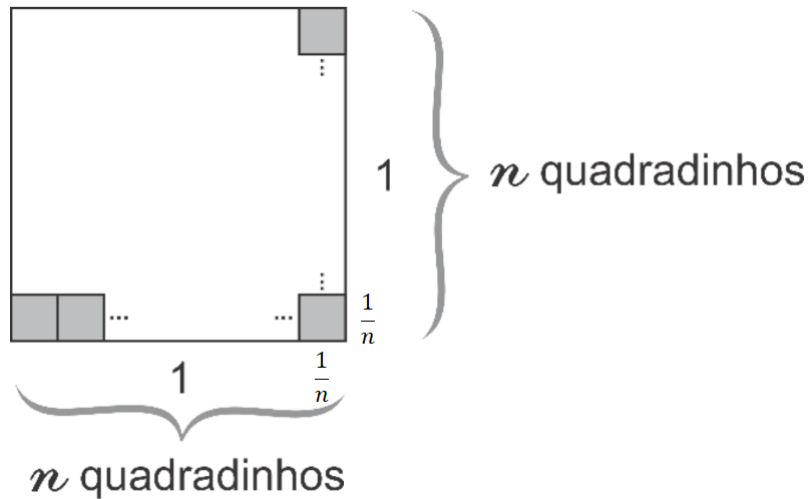


Figura 1.3: Quadrado de lado medindo a

medida $\frac{1}{n}$, assim se chamarmos A_{\square} a área de cada um desses quadradinhos e sabendo que a soma das áreas dos n^2 quadradinhos vale 1, temos que $n^2 \cdot A_{\square} = 1$ o que implica em $A_{\square} = \frac{1}{n^2}$.

Voltando ao nosso quadrado de lado com medida $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$, temos que cada lado pode ser dividido em m segmentos de tamanho $\frac{1}{n}$. Assim, o quadrado ficará coberto por m^2 quadradinhos de lados com medidas $\frac{1}{n}$, o que significa que a sua área será:

$$m^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = a^2.$$

iii) $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Como a é um número irracional, ele não pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$ com m, n inteiros e $n \neq 0$. Isso significa que um segmento de comprimento a irracional não pode ser dividido em uma quantidade finita de segmentos de mesmo tamanho com medida racional. Assim, nessa si-

tuação deve ficar claro que o método de dividir a unidade de medida em uma quantidade finitas de quadradinhos de mesma área não é mais válido, logo teremos que partir para outra estratégia, uma demonstração conhecida como método de exaustão.

Seja A a área do quadrado de lado com medida a , com a irracional e a^2 a medida do seu lado ao quadrado. Vamos mostrar que não é possível termos $a^2 < A$ ou $a^2 > A$, e então concluímos que $A = a^2$. De fato, seja b um número real positivo qualquer onde $b < a^2$, daqui temos que $\sqrt{b} < a$. Como entre dois números reais quaisquer há sempre um racional (veja [3] Capítulo 2), seja r racional tal que

$$\sqrt{b} < r < a. \quad (1)$$

Podemos construir dentro do quadrado de lado medindo a , um quadrado de lado medindo r .

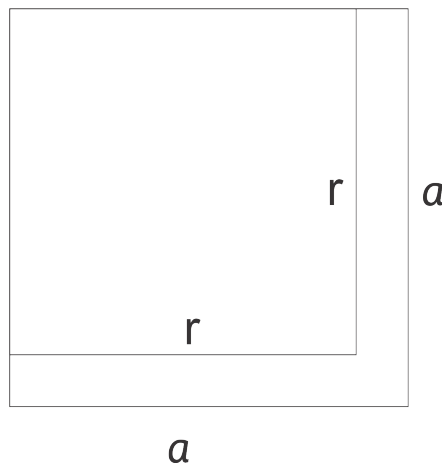


Figura 1.4: Quadrado de lado r inscrito em quadrado de lado a

Da Figura 1.4 temos que $r^2 < A$ e de (1) temos que $b < r^2$, logo $b < A$.

O que acabamos de ver é que todo número real b menor que a^2 , também será menor que A . De maneira análoga, todo número b maior que a^2 , também será maior que A , isso só é possível se $A = a^2$.

□

Teorema 1.2. *Seja um retângulo de lados medindo a e b , ($a, b \in \mathbb{R}_+$), então sua área será $a \cdot b$.*

Demonstração. Para calcular a área do retângulo não precisamos fazer tudo de novo como foi feito na do quadrado, pois já sabemos que a área de um quadrado de lado a é a^2 . Procedemos do modo

seguinte.

Ao desenhar um retângulo cujos lados medem a e b , e definindo R como sua área, podemos prolongar seu lado de medida a por um tamanho b e seu lado de medida b por um tamanho a , assim obtemos um quadrado de lado $(a + b)$, como mostra a figura abaixo.

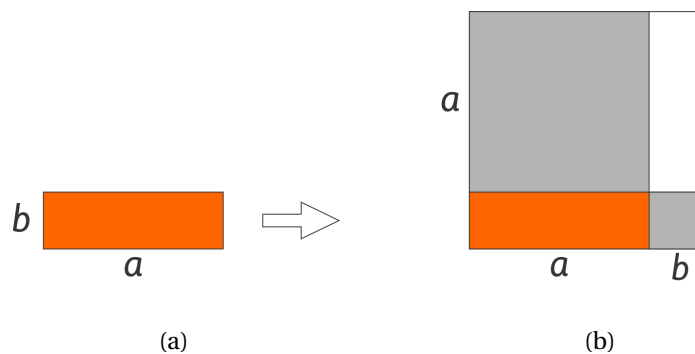


Figura 1.5: Retângulo de lados medindo a e b

Temos que a área do quadrado grande será:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + R + R$ ou seja $2ab = 2R$ o que implica $R = ab$ para todo a e $b \in \mathbb{R}_+$.

□

1.2 Área do paralelogramo

Teorema 1.3. *Seja $ABCD$ um paralelogramo de base com medida b e altura com medida h ($b, h \in \mathbb{R}_+$), então sua área será $b \cdot h$.*

Demonstração. O paralelogramo é um quadrilátero onde os lados opostos são paralelos, escolhendo um lado qualquer para se tomar como base, a altura é o segmento que liga a base ao lado oposto. Observe duas situações onde no paralelogramo $ABCD$ a base é o segmento de medida b e o segmento de medida h é a altura.

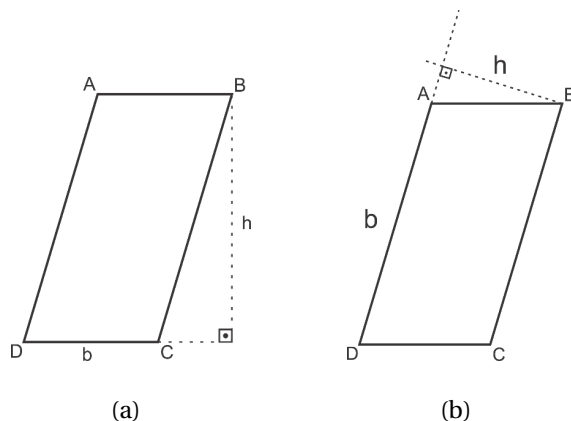


Figura 1.6: Paralelogramos (a) e (b)

Na primeira situação podemos inserir o paralelogramo em um retângulo cuja base mede $b + t$ e altura mede h , como mostra a Figura 1.7 a seguir, assim,

$$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{paralelogramo}} + 2 \cdot A_{\text{triângulo}},$$

como a área dos dois triângulos equivale a área de um retângulo de base t e altura h , temos então

$$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{paralelogramo}} + 2 \cdot A_{\text{triângulo}}, \tag{1.1}$$

$$(b + t)h = A_{\text{paralelogramo}} + th, \tag{1.2}$$

$$A_{\text{paralelogramo}} = bh, \tag{1.3}$$

para todo b e $h \in \mathbb{R}_+$.

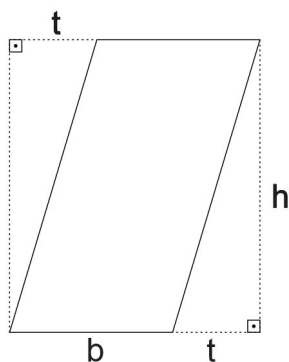


Figura 1.7: Paralelogramo (a)

Na segunda situação podemos dividir o paralelogramo em um retângulo de dimensões com medidas h e t e dois triângulos, como mostra a figura abaixo, e obtemos

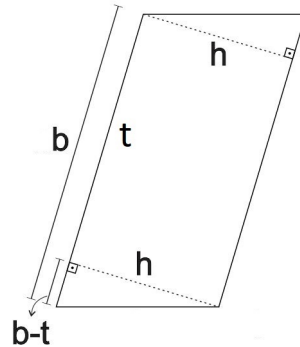


Figura 1.8: Paralelogramo (b)

$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{paralelogramo}} - 2 \cdot A_{\text{triângulo}}$ como a área dos dois triângulos equivale à área de um retângulo de base $(b-t)$ e altura h , temos então

$$A_{\text{retângulo}} = A_{\text{paralelogramo}} - 2 \cdot A_{\text{triângulo}}, \tag{1.4}$$

$$th = A_{\text{paralelogramo}} - (b-t)h, \tag{1.5}$$

$$A_{\text{paralelogramo}} = bh, \tag{1.6}$$

sendo que b e $h \in \mathbb{R}_+$. □

1.3 Área do triângulo

Teorema 1.4. *Seja ABC um triângulo de base b e altura h ($b, h \in \mathbb{R}_+$), então sua área será $\frac{bh}{2}$.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC de base AB , traçamos pelos vértices C e B respectivamente segmentos paralelos aos lados AB e AC que se intersectam no ponto D , conforme figura a seguir.

Observe que a base e a altura do triângulo ABC também são base e altura, respectivamente, do paralelogramo $ABCD$. Sendo \overline{AB} e \overline{CE} as medidas dos comprimentos dos segmentos AB e CE , respectivamente, temos que $\overline{AB} = b$ e $\overline{CE} = h$. Usando o fato de que os triângulos ABC e BCD são congruentes e que a área do paralelogramo é bh , então concluímos que a área do triângulo ABC é $\frac{bh}{2}$ para todo b e $h \in \mathbb{R}_+$. □

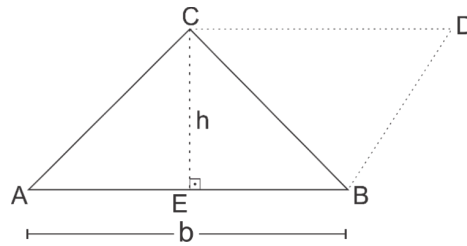


Figura 1.9: Triângulo

1.4 Área de Figuras Planas Quaisquer

Vamos agora discutir uma definição mais geral para o conceito de área de figuras planas quaisquer. A área de uma figura F qualquer será um número real não-negativo, que representaremos por $A(F)$. Para determinar esse valor é preciso conhecer o conceito de polígonos retangulares, que são polígonos formados pela reunião de vários retângulos justapostos com no máximo um lado em comum. Veja a imagem.

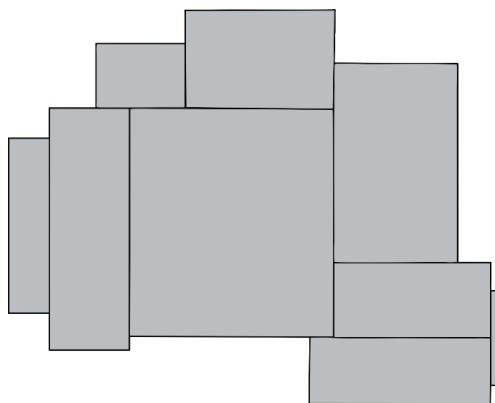


Figura 1.10: Polígono retangular

Assim para determinar $A(F)$ fazemos as aproximações por excesso ou por falta da área de um polígono retangular que contém ou que está contido em F .

Por questões de simplicidade vamos abordar apenas o caso em que os polígonos retangulares estão contidos em F (veja a Figura 1.11), assim temos a seguinte definição.

Definição 1.1. *A área de uma figura plana qualquer é um número real $A(F)$ cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F .*

Note que quanto mais polígonos retangulares tiverem contidos em F , mais próximas as áreas

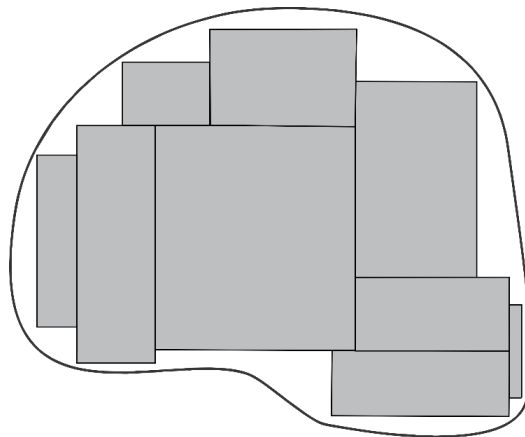


Figura 1.11: Polígono retângular inscrito em F

se tornam, isso nos garante que para todo polígono retângular P contido em F , sendo $A(P)$ a área do polígono retângular P , temos que:

$$A(P) \leq A(F).$$

Além disso, para todo número real x , existe um polígono retângular P tal que $x < A(P) \leq A(F)$, ou seja, podemos deixar a área do polígono retângular tão próxima da área de F quanto se queira, bastando para isso escolher o polígono retângular adequado (veja [3], Capítulo 6, para abranger essa discussão).

1.5 Abordagem para o Ensino Fundamental I

O primeiro contato com o conceito de áreas e suas fórmulas no ensino fundamental se dá no quinto ou sexto ano, onde normalmente os alunos aprendem a calcular áreas através das fórmulas, mas com pouca abordagem algébrica. Uma sugestão de atividade que trate sobre esse tema com influências no que já foi demonstrado é a seguinte.

PROPOSTA DE ATIVIDADE: Ensino de áreas com jornais

Público alvo: 6^o ano

Material necessário: Fita métrica ou trena, durex, jornais e tesoura.

Objetivos: Desenvolver as noções de áreas do quadrado, retângulo, triângulo e paralelogramo.

Objetivos específicos

- Estimular estratégias para o cálculo de áreas.
- Calcular a área através das fórmulas.
- Conhecer outras unidades de medida de áreas.

Desenvolvimento:

Com jornais e durex peça aos alunos para construírem um quadrado de lado 1 metro (isso pode ser feito dividindo eles em grupos de quatro alunos, podendo promover um bom momento de interação e discussão de ideias). Em seguida explique que aquela região é o que se chama de metro quadrado e promova discussões do tipo:



Figura 1.12: Quadrado de 1m de lado

- Quando se diz que uma região tem 1 metro quadrado, significa que ela tem esse tamanho, mas não necessariamente esse formato. O professor precisa ter isso em mente.

- Quantos metros quadrado terá nossa sala? A princípio pode ser que eles desejem colocar todos os quadrados na sala de maneira justaposta e ver quantos cabem, ou alguém, até mesmo o professor, pode alertar sobre a ideia de colocar tantos quadrados no comprimento e outros tantos na largura e em seguida multiplicar as quantidades, isso se tratando de uma sala retangular. O ideal é que se faça essa atividade em uma região retangular.
- Quantas pessoas cabem em um metro quadrado? Aqui pode ser que queiram colocar o máximo de pessoas, mas também é importante alertar sobre a pergunta de quantas pessoas caberiam de maneira confortável em um metro quadrado. Em seguida pode-se fazer outras perguntas similares, do tipo: se em um espaço reservado a um show tem $100m^2$ quantas pessoas caberiam? E se souber o valor do ingresso, quanto seria arrecadado? E se souber quantos policiais necessitam pra determinado número de pessoas, quantos precisaria? A depender da criatividade o professor pode abordar muitas outras situações.
- É possível ainda, com essa situação ainda comentar sobre o tamanho de um hectare e assim mostrar situações que apresentam diferentes tamanhos em hectares para que se possa criar a noção do tamanho de tal medida. Usar parques e espaços da própria localidade que possuem as medidas em hectares, enriquecem essa discussão.
- Também pode-se discutir qual a maneira mais prática de calcular a área de um quadrado com tamanho qualquer sem precisar sair contando quantos quadrados de $1m^2$ se formam. Para isso peça para os alunos formarem quadrados de diferentes tamanhos. Com os quadrados já formados e anotando a medida do lado do quadrado e sua respectiva área, é de se esperar que eles cheguem a conclusão de que para determinar a área do quadrado basta multiplicar a medida dos dois lados, e tendo essa conclusão o professor pode intervir mostrando que multiplicar essas medidas é o mesmo que elevar a medida do lado ao quadrado.

A partir do quadrado é possível conjecturar através de dobraduras e justa posição a área do retângulo, triângulo, paralelogramo e trapézio. Veja possíveis discussões.



Figura 1.13: Quadrado de 2m de lado

i) **RETÂNGULO:** Colocando dois quadrados lado a lado, temos um retângulo de 2m de comprimento e 1m de largura. Como os alunos já aprenderam que o quadrado possui $1m^2$ de área, é de se esperar que eles digam que o retângulo formado possui $2m^2$. A partir daí o professor pode formar retângulos cada vez maiores e discutir a área de cada um deles, mediando os alunos para que eles cheguem à conclusão de que a área do retângulo é a multiplicação da medida da base pela medida da altura.



Figura 1.14: Retângulo formado pela justaposição de dois quadrado de $1m^2$

ii) **TRIÂNGULO:** O professor poder pedir para os alunos formarem um triângulo com o quadrado de $1m^2$. Ao questioná-los sobre qual a área do triângulo, é de se esperar que eles respondam que a área é meio metro quadrado. A partir daí questione os alunos sobre a medida da base e da altura do triângulo e qual a relação entre essas medidas e a área. Talvez a constatação de que a área é a medida da base multiplicada pela medida da altura e dividida por dois não seja tão rápida como foi a do retângulo o que possivelmente obrigue que o professor fale a fórmula para que eles percebam a relação. Independente do resultado, é importante que a discussão seja feita com mais de um tipo de triângulo e tomando como base qualquer lado dele, o que enriquece a discussão, já que obriga o aluno a pensar em como medir a altura relativa a base.



Figura 1.15: Triângulo obtido ao dobrar um quadrado de $1m^2$ ao meio



Figura 1.16: Justaposição de dois triângulos de $0,5m^2$

iii) **PARALELOGRAMO:** Com um paralelogramo formado com a junção de dois triângulos de $0,5m^2$ e um retângulo de $2m^2$ conformea figura 1.17, questione os alunos primeiramente sobre as

medidas dos lados e da altura do paralelogramo, e em seguida sobre o valor da área de tal paralelogramo é de se esperar que eles cheguem na resposta da área apenas somando a área de cada figura que formou o paralelogramo. Conhecendo a área, veja se eles conseguem observar a relação entre as medidas encontradas e a área. Para facilitar, escolha um lado como base e peça a eles para descobrir a medida da altura relativa a base. É importante fazer dois exemplos escolhendo como base os dois lados de medidas distintas do paralelogramo. Fazendo isso com dois paralelogramos distintos é de se esperar que os alunos cheguem à conclusão de que a área é a base multiplicada pela altura.



Figura 1.17: Paralelogramo formado pe justaposição de dois triângulos de $0,5m^2$ e um quadrad de $1m^2$

Como foi dito, a depender da criatividade é possível fazer muitas perguntas enriquecedoras com uma atividade como essa, além de promover um ambiente de aprendizado diferente e motivador para o aluno.

Lista de Exercícios

1. Vamos calcular a área de uma praça retangular, em que o comprimento é igual a 50 m e sua largura mede 35,6 m.
2. Determine a área do triângulo a seguir:
3. Calcule a área de um retângulo, em que a base mede 34 cm e sua altura mede a metade da base.
4. É necessário um certo número de pisos de 25 cm x 25 cm para cobrir o chão de uma cozinha retangular com 5 m de comprimento por 4 m de largura. Cada caixa tem 20 pisos. Supondo

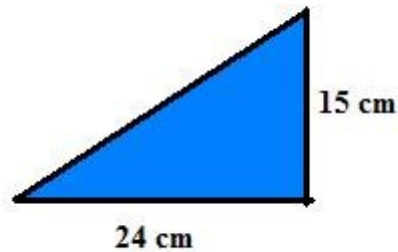


Figura 1.18: Triângulo

- que nenhum piso se quebrará durante o serviço, quantas caixas são necessárias para cobrir o chão da cozinha?
5. Na minha sala de aula, que é retangular, o chão é coberto com pisos sintéticos que medem 30 cm x 30 cm. Contei 21 lajotas ao longo de uma parede e 24 na direção perpendicular. Qual a área dessa sala?
6. A área da sala representada na figura é:

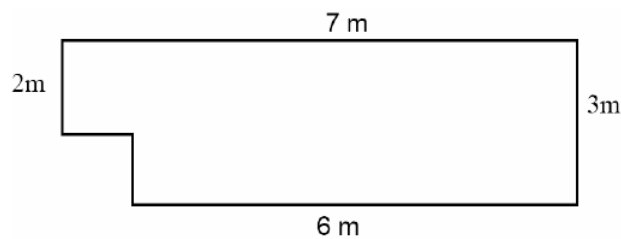


Figura 1.19: Sala

7. Um quadrado tem a mesma área de um retângulo de 16 cm de base e 9 cm de altura. Calcule a medida do lado desse quadrado.

AVALIAÇÃO:

A avaliação se dará de maneira contínua, cumulativa, observando o avanço dos alunos tanto na atividade experimental como na lista de exercícios.

Capítulo 2

TÓPICOS INTERESSANTES

Nesse capítulo abordamos três resultados curiosos sobre área de figuras planas. O primeiro é uma técnica alternativa para o cálculo de áreas de polígonos que podem ser inscritos em uma malha ou rede no plano: o Teorema de Pick. Para saber a área procurada, basta contar o número de pontos da malha que está no interior e no bordo do polígono, o que pode ser uma atividade divertida para crianças de quase todas as idades. Para conhecer mais leia [6], [7] e [13].

O próximo resultado retirado de [5] garante que dadas duas regiões quaisquer do plano com áreas fixadas, existe uma reta que divide cada uma dessas regiões em duas outras regiões com mesma área.

Para concluir o capítulo, mostramos que dado um triângulo qualquer, suas três medianas o dividem em seis triângulos de mesma área, este último tópico foi retirado de [4].

2.1 Teorema de Pick

Uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou vertical é 1 unidade.

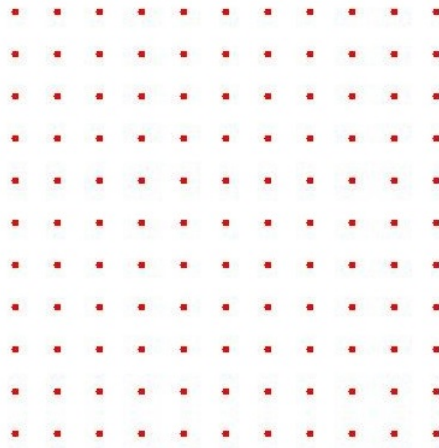


Figura 2.1: Rede no plano

Teorema 2.1 (Fórmula de Pick). *A área de um polígono cujo os vértices são pontos de uma rede é dado por:*

$$\frac{B}{2} + I - 1$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos no interior do polígono.

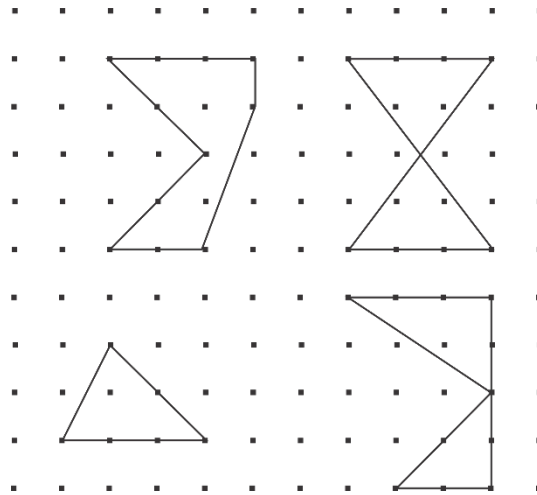


Figura 2.2: Na esquerda temos dois polígonos simples e na direita dois polígonos não simples

A fórmula só tem efeito em polígonos simples, (isto é, cujo o bordo é uma linha poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice). Para entender a demonstração da fórmula precisamos de algumas definições e outros teoremas.

Definição 2.1. Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto da rede no seu bordo ou no seu interior.

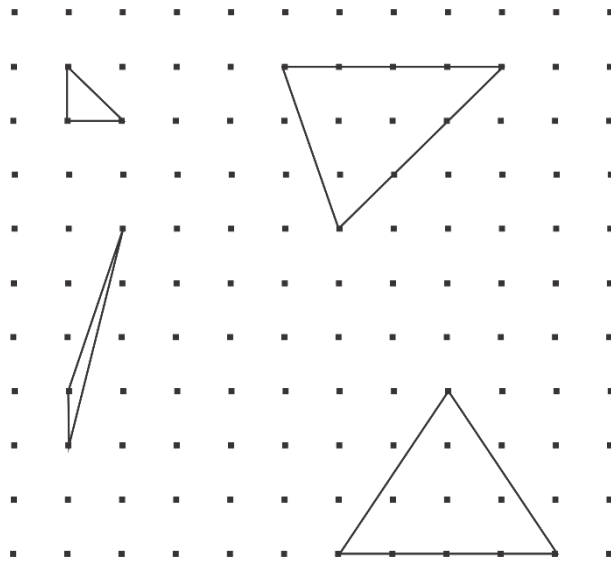


Figura 2.3: Os dois triângulos da esquerda são triângulos fundamentais, enquanto que os dois da direita não são.

Teorema 2.2. A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.

Demonstração. Seja CDE um triângulo fundamental e seja OCHD um retângulo que contém CDE. Podemos supor que CD é uma diagonal do retângulo, como mostra a figura a seguir.

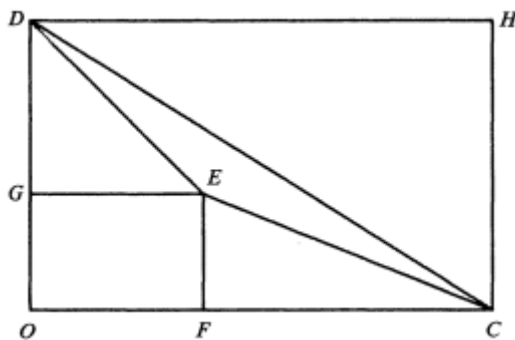


Figura 2.4: Triângulo fundamental CDE

Imaginando a figura em um plano cartesiano, temos os segmentos EF e EG perpendiculares a OC e OD, respectivamente; o ponto O como a origem; OC e OD os eixos cartesianos; $F = (p, 0)$ e $C = (q, 0)$ os pontos contidos no eixo das abscissas e $G = (0, r)$ e $D = (0, s)$ os pontos contidos no eixo das ordenadas. Se I_P indica o número de pontos interiores de um polígono P, então $I_{(OCHD)} = (q-1)(s-1)$. Como CD não contém outros pontos além de C e D, então

- $I_{(OCD)} = \frac{1}{2} \cdot I_{(OCHD)} = \frac{1}{2}(q-1)(s-1)$
- $I_{(CEF)} = \frac{1}{2}(q-p-1)(r-1)$
- $I_{(DEG)} = \frac{1}{2}(p-1)(s-r-1)$

Como por hipótese CDE é um triângulo fundamental, então $I_{(OCD)} - I_{(CEF)} - I_{(DEG)} = pr$, que são os pontos interiores que estão no retângulo OFEG excluindo os segmentos OF e OG.

Assim, dessa equação temos:

$$\frac{1}{2}(q-1)(s-1) - \frac{1}{2}(q-p-1)(r-1) - \frac{1}{2}(p-1)(s-r-1) = pr.$$

Simplificando a expressão temos $qs - ps - qr = 1$.

Sendo A_P a área do polígono P, observe que:

$$A_{CDE} = A_{OCD} - A_{CEF} - A_{DEG} - A_{OFEG} \text{ ou seja,} \tag{2.1}$$

$$A_{CDE} = \frac{1}{2}qs - \frac{1}{2}(q-p)r - \frac{1}{2}(s-r)p - pr \tag{2.2}$$

$$A_{CDE} = \frac{1}{2}(qs - ps - qr) \tag{2.3}$$

$$A_{CDE} = \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Caso o triângulo fundamental possua um dos lados na vertical ou horizontal, podemos inseri-lo em um retângulo como mostra a figura a seguir, onde o triângulo ACE é o triângulo fundamental:

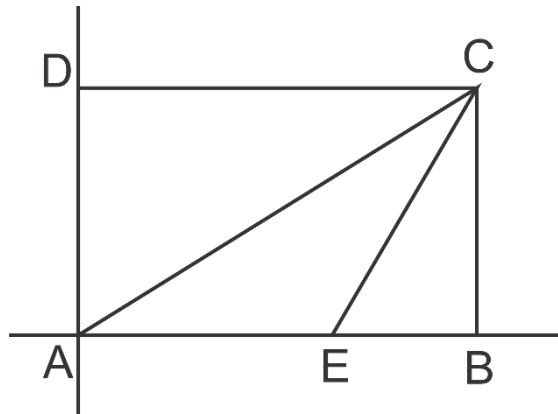


Figura 2.5: Triângulo fundamental ACE

Construindo eixos coordenados onde A é a origem, temos:

$A = (0, 0)$, $B = (p, 0)$, $C = (p, q)$, $D = (0, q)$ e $E = (1, 0)$ obrigatoriamente pois o triângulo é fundamental. Assim temos que:

- $I_{ABCD} = (p - 1)(q - 1)$,
- $I_{ABC} = \frac{1}{2}(p - 1)(q - 1)$
- $I_{BCE} = \frac{1}{2}(p - 1 - 1)(q - 1)$.

Observe que $I_{ABC} - I_{BCE} = 0$, pois o triângulo ABC é fundamental. Dessa igualdade obtemos:

$$\frac{1}{2}(p - 1)(q - 1) - \frac{1}{2}(p - 1 - 1)(q - 1) = 0, \text{ ou ainda,} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}(q - 1)[(p - 1) - (p - 2)] = 0, \text{ que nos leva} \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}(q - 1) = 0, \text{ e finalmente} \tag{2.7}$$

$$q = 1. \tag{2.8}$$

Assim $A_{ACE} - A_{BCE} = \frac{1}{2}pq - \frac{1}{2}(p - 1)q = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$.

□

Teorema 2.3. *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de n - 2 triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração. A título de entendimento observe a imagem a seguir.

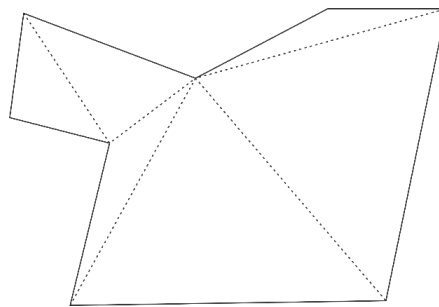


Figura 2.6: Polígono decomposto em triângulos

Suponha, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro. Seja n o menor número natural, de tal forma que exista um polígono P com n lados que não pode ser

decomposto conforme estipula o teorema acima. Colocamos na rede um sistema de coordenadas cartesianas de tal modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abcissa no bordo do polígono, como nenhum lado de P é paralelo ao eixo das ordenadas, o ponto A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A. Há duas possibilidades:

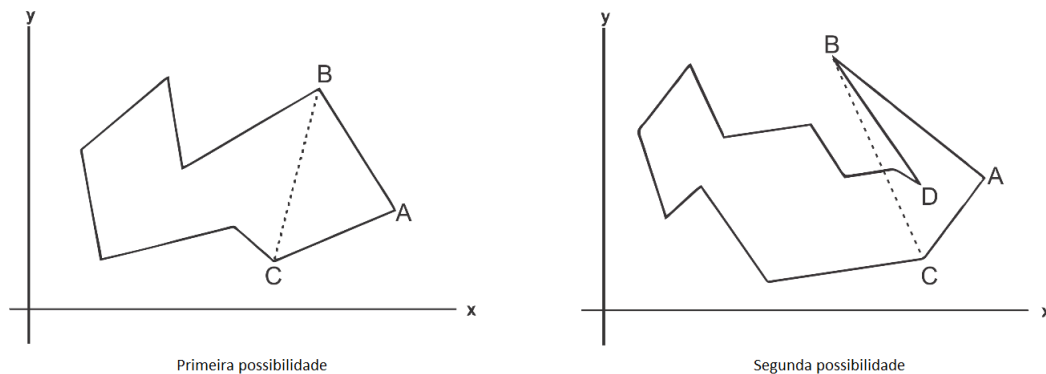


Figura 2.7: Polígonos

Primeira: O triângulo ABC não contém outros vértices de P além de A, B e C. Nesse caso o polígono P', obtido de P quando se substituem os lados de AB e AC por BC, tem $n-1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, então P' pode ser decomposto em triângulos como se enuncia o teorema, para ser mais exato em $n-3$ triângulos. Assim o polígono P está sendo decomposto em $n-3$ triângulos de P' mais o triângulo ABC, ou seja, o polígono P está sendo decomposto em $n-2$ triângulos, o que é uma contradição. Logo, nesse caso não é possível existir um polígono no qual o teorema não é válido.

Segunda: O triângulo ABC contém além de A, B e C, algum outro vértice do polígono P. Dentre esses vértices seja D o mais distante do lado BC. Então o segmento de reta AD decompõe P em dois polígonos P' e P'', o primeiro com n' lados e o segundo com n'' lados, observe que $n' + n'' = n + 2$ (pois o lado AD que não faz parte de P é contado duas vezes). Como $n' \geq 3$ e $n'' \geq 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores que n , o que nos garante que o teorema vale para P' e P'', que podem ser decompostos respectivamente em $n'-2$ e $n''-2$ triângulos, na forma enunciada. Assim temos que P está sendo decomposto em $(n'-2) + (n''-2) = n + 2$ triângulos, o que é uma contradição, logo nesse caso não é possível existir um polígono no qual o teorema não é válido.

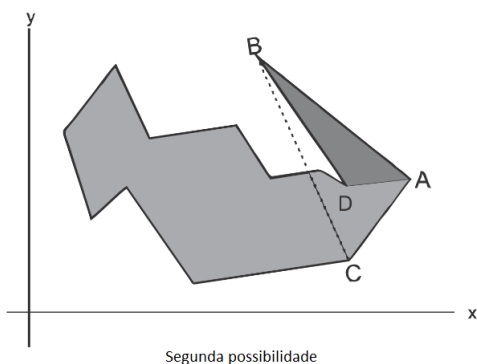


Figura 2.8: Segunda possibilidade

□

Proposição 2.1. *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n-2)\pi$.*

O corolário é facilmente demonstrado usando o teorema anterior.

Teorema 2.4. *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração. A título de entendimento observe a imagem a seguir.

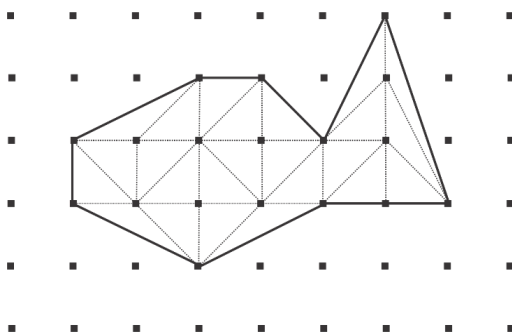


Figura 2.9: Polígono decomposto em triângulos fundamentais

Usando o Teorema 2.3, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC, que contém n pontos da rede (no interior ou no bordo). Se existir realmente algum ponto P da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A, B e C e, desse modo, decomponemos ABC em três triângulos, cada um contendo um número de pontos da rede menor do que n . Se houver pontos da rede sobre os lados de ABC, escolhemos um deles, digamos sobre AB, e o ligamos ao vértice C. Assim, decomponemos ABC em 2 triângulos, cada um

contendo um número de pontos da rede menor do que n . Se para cada triângulo que se formar que não for fundamental, fizermos um dos processos citados, com um número finito de etapas, chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais.

□

Agora temos resultados suficientes para demonstrar o Teorema de Pick, cujo enunciado segue abaixo:

“Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma rede e indiquemos com B e I , respectivamente, o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e no interior de P , então temos a área de P é dada por:

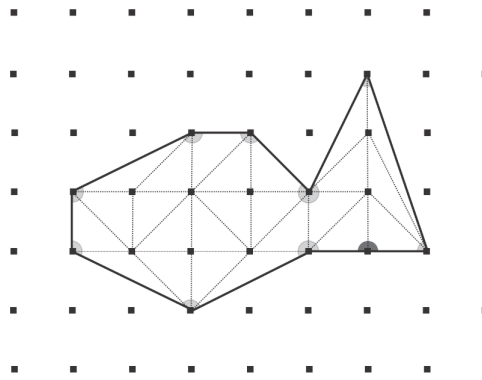
$$\frac{B}{2} + I - 1."$$

Demonstração do Teorema de Pick. Para essa demonstração devemos lembrar que a área de um triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$ e que se soubermos em quantos triângulos fundamentais o polígono P fica dividido, automaticamente conseguimos determinar a área de P . Assim o início de nossa demonstração se preocupará na busca de uma fórmula que conte a quantidade de triângulos fundamentais, para isso procedemos da seguinte forma.

Com base no Teorema 2.4, seja T o número de triângulos fundamentais nos quais o polígono P pode ser dividido. A soma de todos os ângulos desses triângulos é dada por $T\pi$, essa soma pode ser calculada de outra forma, veja.

Para calcular a soma de todos os ângulos dos triângulos fundamentais, calculamos a soma S_b dos ângulos que estão sobre o bordo de P e a soma S_i dos ângulos que estão no interior de P . Sejam B' o número de vértices de P e B'' o número de pontos que estão no bordo de P mas que não são vértices, temos que $B = B' + B''$. O valor de S_b é dado pela soma dos ângulos que estão sobre o vértice de P , que é dada por $(B' - 2)\pi$ de acordo com a proposição 2.1, com os ângulos cujos vértices fazem parte dos B'' pontos, que é dado por $B''\pi$ (a título de entendimento observe a Figura 2.10), assim S_b é dada por

$$S_b = (B' - 2)\pi + B''\pi = (B - 2)\pi.$$



Na figura temos um polígono no qual $B' = 9$ e $B'' = 1$ (Vértice com ângulo destacado)

Figura 2.10: Ângulos no polígono

A soma S_i é dada por $2I\pi$, já que em cada ponto da rede no interior de P os ângulos à sua volta somam quatro retos. Portanto a soma dos ângulos de todos triângulos fundamentais é dada por $S_b + S_i = (B-2)\pi + 2I\pi$.

Assim, logicamente temos que $T\pi = (B-2)\pi + 2I\pi$, ou seja, $T = (B-2) + 2I$. Como a área de P é dada por $T \cdot \frac{1}{2}$, teremos que a área de P será $\frac{B}{2} + I - 1$. □

EXERCÍCIO

(ANPAD) A Figura 2.11 mostra uma placa de madeira na qual foram afixadas 25 pregos, dispostos em 5 linhas, com 5 pregos cada. As distâncias de um prego qualquer até outros pregos adjacentes, que estejam na mesma linha ou na mesma coluna, são iguais. A figura da esquerda, mostra um quadrilátero que foi formado ao se fixar um elástico em pregos dessa placa. A parte do elástico que constituía um dos lados do quadrilátero foi puxada e presa em um prego vizinho, tendo sido formado um pentágono, mostrado à direita.

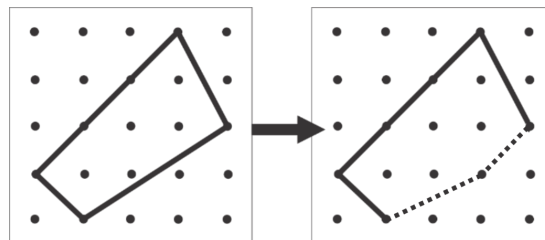


Figura 2.11: Quadrilátero

A área do quadrilátero corresponde a que fração da área do pentágono?

- a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{7}{8}$ d) $\frac{11}{12}$ e) $\frac{14}{15}$

Resolução:

Usando o Teorema de Pick temos que a área do quadrilátero é $\frac{B}{2} + I - 1 = 6/2 + 5 - 1 = 7$. Já a área do pentágono é $\frac{B}{2} + I - 1 = 7/2 + 5 - 1 = 15/2$. Assim a área do quadrilátero corresponde a $7 : \frac{15}{2} = 14/15$ da área do pentágono. Alternativa e).

2.2 Reta que divide duas figuras planas na mesma área

O resultado a seguir trata de uma situação bem interessante na geometria plana, que é o fato de sempre existir uma reta que divide duas figuras planas limitadas ao meio simultaneamente. Isto é uma aplicação imediata do Teorema de Bolzano ou Teorema do Valor Intermediário, enunciada a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [3], Capítulo 7.

Teorema 2.5 (Teorema de Bolzano). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) \neq f(b)$. Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < k < f(b)$, então existe pelo menos um $c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, tal que $f(c) = k$*

Teorema 2.6. *Sejam A e B duas regiões limitadas quaisquer do plano, existe uma reta do plano que divide A e B ao meio simultaneamente:*

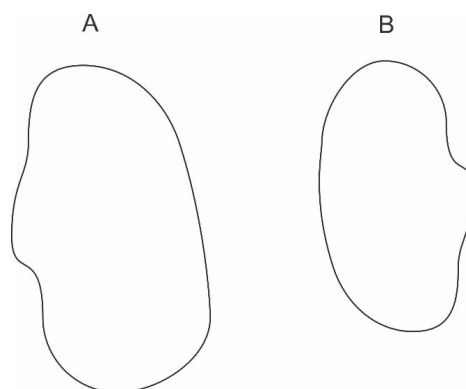


Figura 2.12: Regiões A e B

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que existe uma reta que divide A ao meio, isto é em duas regiões de mesma área. Para isso construímos um segmento orientado \overrightarrow{PR} , fora de A, no qual será possível medir ângulos, Figura 2.13. Para todo segmento \overrightarrow{PS} que tomarmos formando um ângulo qualquer x com \overrightarrow{PR} , sempre existirá uma reta orientada, na mesma direção e paralela a \overrightarrow{PS} que

dividirá a região A ao meio. Antes de demonstrar essa afirmação, observe alguns exemplos na Figura 2.13 que ajudam ao entendimento.

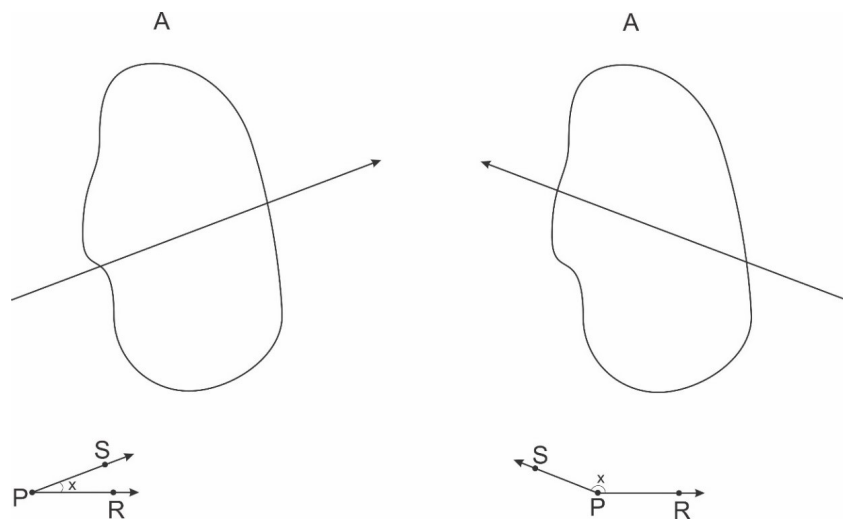


Figura 2.13: Direção da reta de acordo com o ângulo x

A ideia da demonstração é que para qualquer ângulo x que se forme, sempre existirá uma reta orientada na mesma direção de \vec{PS} que dividirá a região A ao meio. Para demonstrar esse fato, consideremos que para qualquer ângulo x que \vec{PS} faça com \vec{PR} é fácil observar que existem infinitas retas que passam por A e são paralelas a \vec{PS} . Tome uma delas, a qual chamaremos de reta t . A título de entendimento observe a figura abaixo para dois possíveis ângulos.

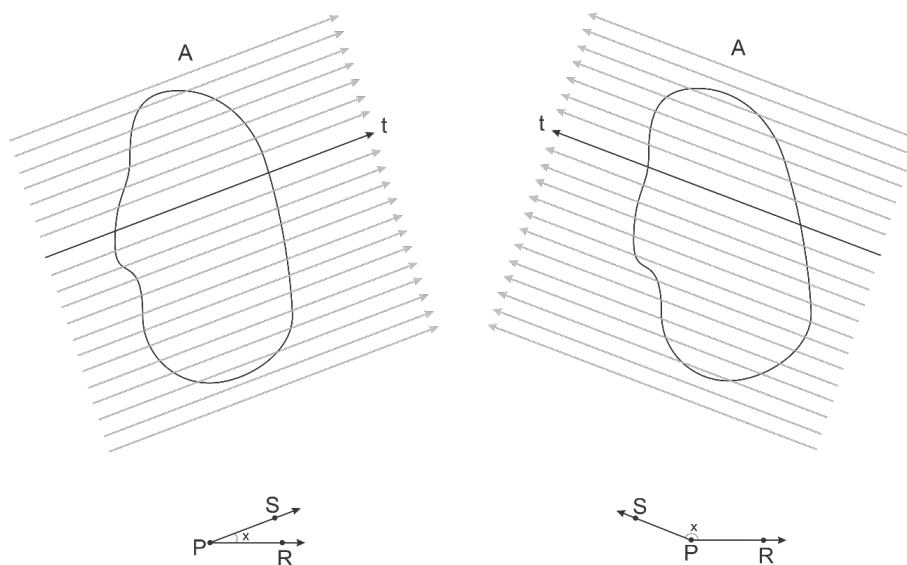


Figura 2.14: Retas paralelas a t

Chamamos agora de $A_1(x)$ a porção de A que está à esquerda de t, e de $A_2(x)$ a porção de A que está à direita de t. Observe a Figura 2.15, para dois possíveis ângulos.

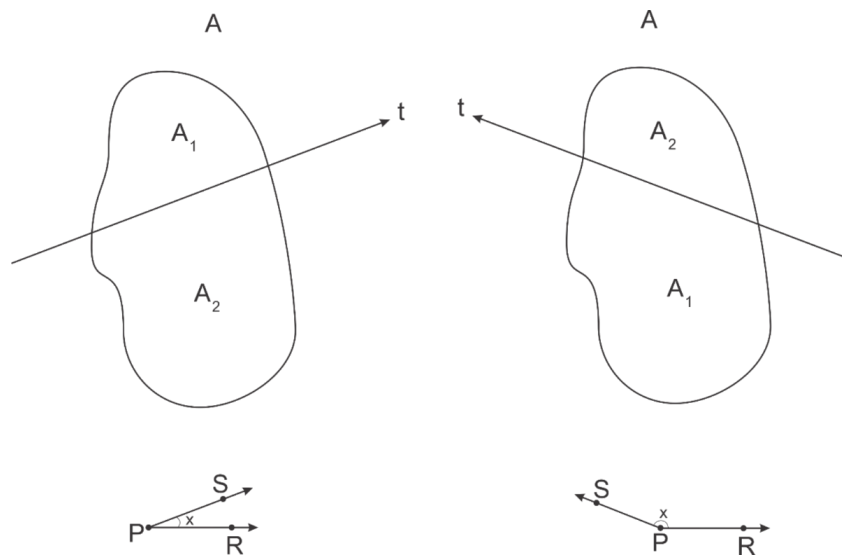


Figura 2.15: Porção de A à esquerda e à direita da reta t

Como existem infinitas retas paralelas a t, pra qualquer uma delas podemos definir $A_1(x)$ a porção de A que está à esquerda da reta desejada, e de $A_2(x)$ a porção de A que está à direita da reta desejada. Assim para o ângulo x formado podemos definir a função $f_A(x) = \text{área}(A_1(x)) - \text{área}(A_2(x))$, é fácil de perceber que hora $\text{área}(A_1(x)) - \text{área}(A_2(x)) > 0$ e hora $\text{área}(A_1(x)) - \text{área}(A_2(x)) < 0$. Como essa função é contínua, temos que pelo Teorema de Bolzano em algum momento ocorrerá $f_A(x) = 0$ ou seja $\text{área}(A_1(x)) = \text{área}(A_2(x))$. Assim acabamos de provar que para cada ângulo $x = 0^\circ$ a $x = 360^\circ$ que \vec{PS} fizer com \vec{PR} , existirá uma reta que dividirá a região A ao meio e esta reta está unicamente definida.

Como já provamos a existência da reta que divide A ao meio, vamos mostrar agora a existência da reta que divide A e B ao meio simultaneamente. O procedimento é parecido com o anterior, como já sabemos que pra cada ângulo $x = 0^\circ$ a $x = 360^\circ$ que \vec{OS} faz com \vec{PR} , existe uma única reta que divide A ao meio, chamarmos essa reta de l_x . O que faremos agora é usar cada reta dessa e definir a função $f_B(x) = \text{área}(B_1(x)) - \text{área}(B_2(x))$, onde $B_1(x)$ é a região de B à esquerda de l_x e $B_2(x)$ é a região de B à direita de l_x . A título de entendimento observe a imagem.

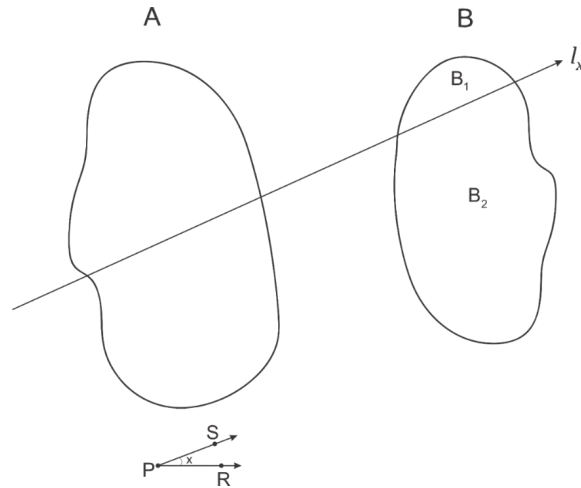


Figura 2.16: Reta l_x a depender de x

Se supormos que para a reta l_0 , que tem mesma direção de \vec{PR} , tivermos $\text{área}(B_1(x)) > \text{área}(B_2(x))$, então para a reta l_{180} , com direção oposta a \vec{RP} , teremos $\text{área}(B_1(x)) < \text{área}(B_2(x))$. Observe que a reta l_{180} é a mesma de l_0 , porém com direções opostas (o mesmo acontece com l_{30} e l_{210} por exemplo), assim a medida que vai se alterando o valor de x , existirá algum ângulo α entre 0° e 180° no qual para a reta l_α se terá $\text{área}(B_1(x)) = \text{área}(B_2(x))$, pelo Teorema de Bolzano ou seja a reta l_α também dividirá a região B ao meio.

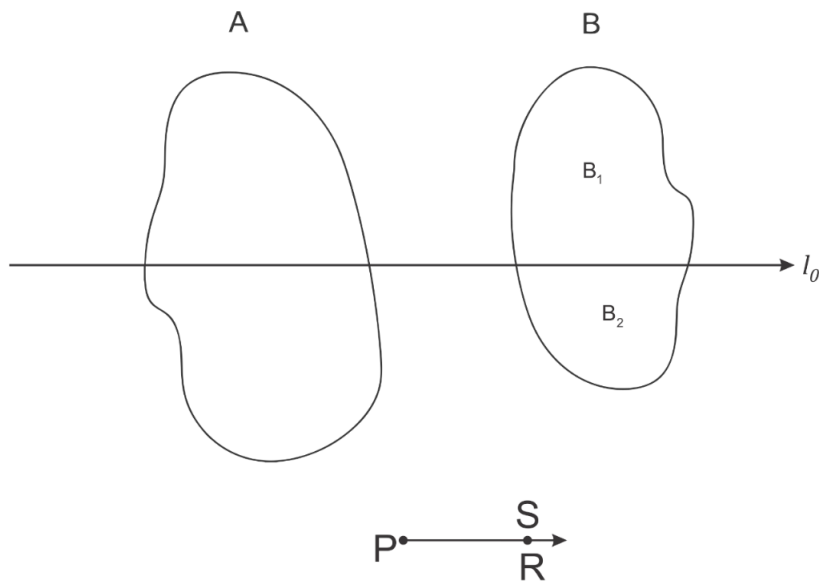


Figura 2.17: Reta l_0

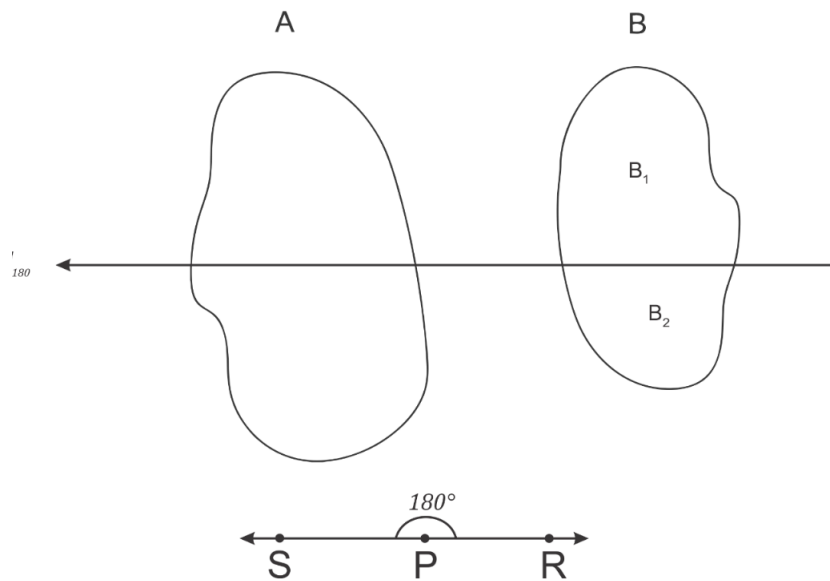


Figura 2.18: Reta l_{180}

2.3 Medianas dividem o triângulo em 6 triângulos de mesma área

Definição 2.2. *A mediana é um segmento de reta que parte do vértice do triângulo e vai até o lado oposto dividindo o lado ao meio.*

Como sabemos, todo triângulo possui três medianas que se encontram em um único ponto chamado de baricentro.

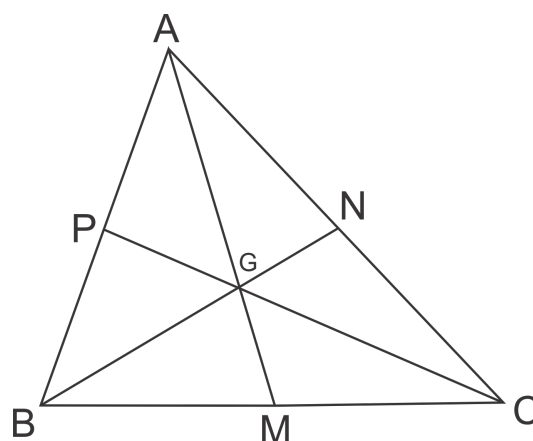


Figura 2.19: Na imagem temos as medianas AM, BN e CP e o baricentro G

Teorema 2.7. *As três medianas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área.*

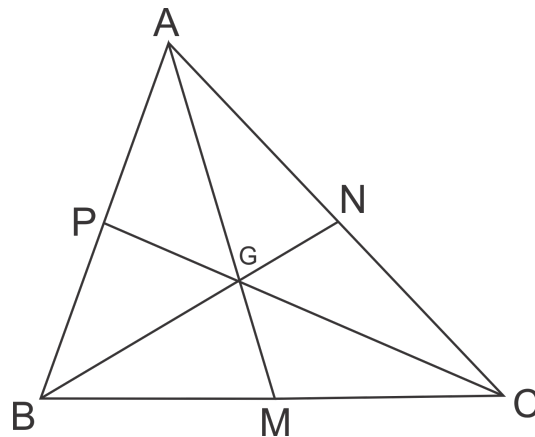


Figura 2.20: Na imagem temos as medianas AM, BN e CP e o baricentro G

Demonstração. Observe que:

- Os triângulos AGP e BGP possuem a mesma área, pois as bases AP e PB possuem mesma medida e mesma altura com relação a essas bases, chame essa área de x .
- Os triângulos BGM e CGM também possuem mesma área, chamamos essa área de y .
- Os triângulos NGC e NGA também possuem mesma área, a qual chamamos de z .
- Os triângulos ABM e AMC possuem mesma área e portanto:

$$2x + y = y + 2z \Rightarrow x = z.$$

- Os triângulos BNC e BNA possuem mesma área e portanto:

$$2y + z = 2x + z \Rightarrow y = x.$$

Como $x = z$ e $y = x$ temos que $y = z$, assim temos $x = y = z$ que significa que os 6 triângulos possuem a mesma área.

□

EXEMPLOS:

1) O logotipo de uma transportadora tem a forma de um triângulo dividido em quatro regiões por três segmentos de reta. Cada um deles une o ponto médio de um dos lados a um dos três

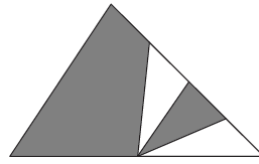


Figura 2.21: Logotipo

pontos que dividem um segundo lado em quatro partes iguais, conforme a figura:

Se a área total do logotipo é $8m^2$, a área da parte pintada de cinza é

- a) $5m^2$.
- b) $5,25m^2$.
- c) $5,75m^2$.
- d) $6m^2$.
- e) $6,25m^2$.

2) Uma lajota tem a forma de um mosaico triangular ABC dividido em seis regiões pelas três medianas do triângulo. Considere o triângulo ABC em um sistema de coordenadas com eixos co-

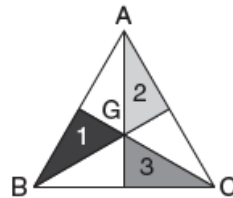


Figura 2.22: Lajota

tados em centímetros, onde as coordenadas dos vértices sejam $A(20, 30)$, $B(0, 0)$ e $C(40, 0)$. Sendo G o baricentro do triângulo ABC, as áreas dos triângulos preto (1), cinza (2) e grafite (3) são, respectivamente, iguais a

- a) $100cm^2$, $100cm^2$ e $100cm^2$.
- b) $100cm^2$, $80cm^2$ e $70cm^2$.
- c) $90cm^2$, $100cm^2$ e $80cm^2$.
- d) $90cm^2$, $80cm^2$ e $80cm^2$.

e) 80cm^2 , 80cm^2 e 80cm^2 .

Resoluções

1)

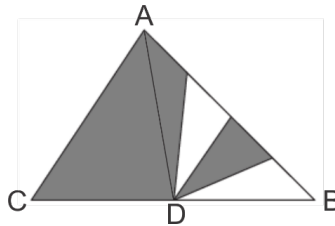


Figura 2.23: Logotipo

Traçando a mediana AD, dividimos o triângulo ABC em dois triângulos de mesma área de medida $4m^2$. O triângulo ABD está dividido em quatro triângulos de mesma área, pois possuem base de mesma medida e mesma altura. Logo cada triângulo cinza do triângulo ABD possui área igual a $1m^2$, o que nos garante que a área pintada de cinza vale $6m^2$. Alternativa correta letra D.

2)

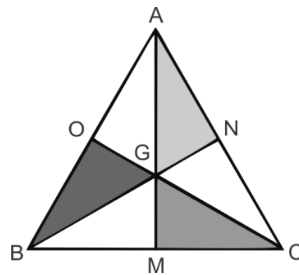


Figura 2.24: Lajota

Como o ponto G é o baricentro do triângulo, temos que os segmentos BN, CO e AM representam as medianas do triângulo ABC. O que temos que descobrir é a área do triângulo ABC e dividi-la por seis para determinar a área dos triângulos 1, 2 e 3 que são iguais pelo teorema 3.7. Para isso observe que as $x_M = \frac{(X_B + X_C)}{2} = 20 = x_A$ e $y_B = \frac{(Y_B + Y_C)}{2} = 0$, isso nos garante que AM representa a altura relativa a base BC. Assim $\text{Área}_{\Delta ABC} = \frac{(BC \cdot AM)}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2} = 600\text{cm}^2$. Logo as áreas dos triângulos 1, 2 e 3 são iguais a 100cm^2 . Alternativa correta letra A.

Capítulo 3

GEOMETRIA ESFÉRICA

Vimos até agora o cálculo de áreas de figuras poligonais planas. E se quiséssemos calcular a área de uma figura não-plana? Por exemplo, uma figura contida na casca da esfera. A geometria euclidiana plana não é suficiente, uma vez que sua axiomática está sobre o plano. Recorremos à já bem fundamentada Geometria Esférica.

Os fundamentos deste capítulo foram retirados de [8], [9], [10], [11], [12] e possuem o intuito de promover o conhecimento acerca de alguns tópicos introdutórios de Geometria Esférica e como tais conhecimentos podem nos auxiliar no cálculo de distâncias entre dois pontos no globo terrestre. Essa discussão promove um bom momento para estabelecer uma conexão entre Matemática e Geografia, criando assim uma interdisciplinaridade entre as duas áreas.

Vale ressaltar que existem várias aplicações que demonstram a importância do estudo da geometria esférica: é amplamente usado na astronomia e equipamentos de localização para aviação e navegação.

3.1 Principais Elementos da Geometria Esférica

Definição 3.1. *Considere no espaço um ponto O e uma medida R , com $R > 0$. Chama-se esfera de centro O e raio R o conjunto de todos os pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R .*

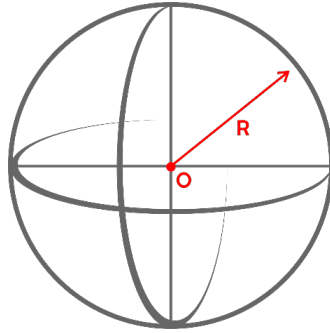


Figura 3.1: Esfera de centro O e raio R .

Definição 3.2. *Superfície esférica de centro O e raio de medida R é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja a distância a O mede R , denotamos ∂S*

Definição 3.3. *O segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica é chamado de corda.*

Definição 3.4. *Chamamos de diâmetro uma corda que contém o centro da esfera.*

Definição 3.5. *Seja S uma esfera qualquer e α um plano que a corta. Se α passa pelo centro de S , então $\partial S \cap \alpha$ é uma circunferência chamada circunferência máxima. Note que se a esfera possui raio R , então a circunferência máxima também possui raio R .*

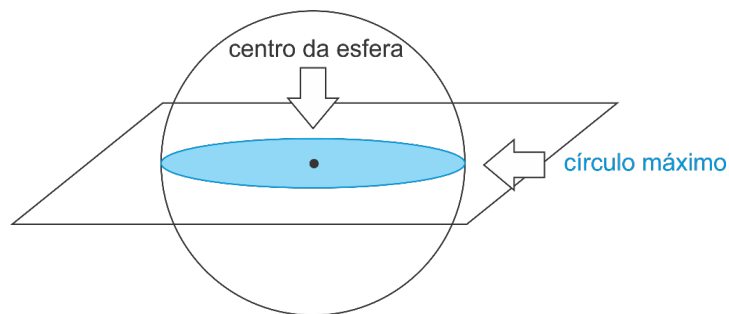


Figura 3.2: Esfera cortada por plano.

Definição 3.6. *Geodésica é a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos, ou seja, é o menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos da esfera.*

Teorema 3.1. *O menor caminho entre dois pontos numa superfície esférica S é um arco de uma circunferência máxima.*

A demonstração desse teorema está no apêndice.

Conhecer a ideia de circunferência máxima é fundamental no estudo de geometria esférica, pois através dela, define-se outras figuras geométricas como veremos adiante. Sua importância dar-se ao fato que, no contexto de geometria esférica, as circunferências máximas são tratadas como "retas", pois representam a menor distância possível entre dois pontos da esfera, uma com a geometria plana, já que no plano a menor distância entre dois pontos é uma reta.

Definição 3.7. *Dois pontos na esfera diametralmente opostos são chamados de pontos antípodas.*

Teorema 3.2. *Na esfera, duas circunferências máximas sempre se intersectam em dois pontos antípodas.*

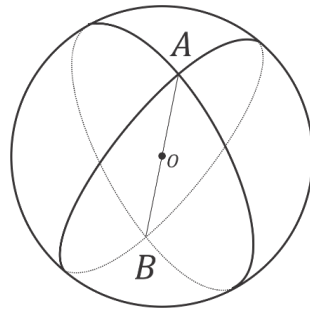


Figura 3.3: A e B são os pontos de interseção das duas circunferências máximas e são pontos antípodas

Demonstração. Dadas duas circunferências máximas, cada uma delas é a interseção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro. Como esses planos têm um ponto comum (o centro da esfera), eles têm uma reta comum, a qual intersecta a superfície esférica em dois pontos antípodas. □

Com esse teorema fica evidente que no contexto de geometria esférica não é possível existir "retas" paralelas e bem diferente da geometria plana, aqui duas "retas" se cruzam sempre em dois pontos.

Definição 3.8. *O ângulo esférico entre duas circunferências máximas é o ângulo formado na interseção dos planos que a contêm.*

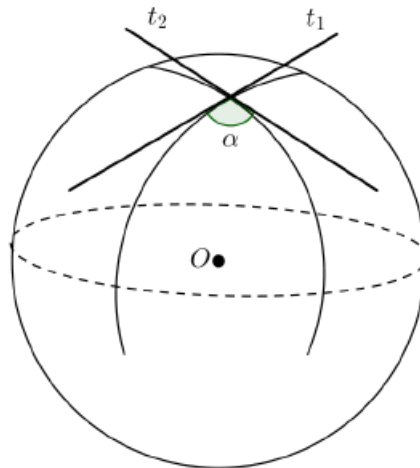


Figura 3.4: Ângulo esférico

Definição 3.9. Um fuso é a região da superfície esférica compreendida entre duas circunferências máximas. Essas circunferências têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados os vértices do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo α entre as duas circunferências máximas que constituem os lados do fuso.

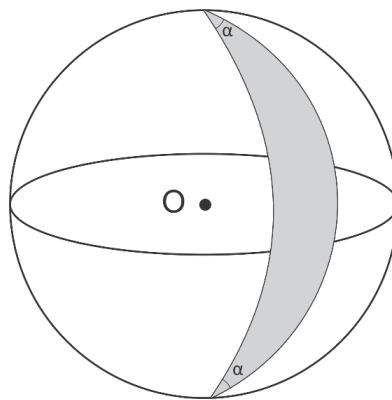


Figura 3.5: Fuso esférico

Teorema 3.3. A área de um fuso é proporcional ao seu ângulo, logo se o ângulo de um fuso mede α radianos em uma esfera de raio R , então sua área será $2\alpha R^2$.

A demonstração desse teorema encontra-se no apêndice e envolve conhecimentos de Cálculo 2. No entanto, a nível de ensino médio, é razoável através de alguns exemplos justificar que tal proporcionalidade existe mostrando que a área de um fuso de 180° , ou seja, $\alpha = \pi$, é metade da

área de uma esfera, logo $2\pi R^2$. A área de um fuso de 90° , $\alpha = \frac{\pi}{2}$ é metade da área de um fuso de 180° , ou seja $2\frac{\pi}{2}R^2 = \pi R^2$. Assim com exemplos como esses, é de se aceitar que a área do fuso é proporcional ao seu ângulo α .

Definição 3.10. Dado um fuso φ na superfície esférica, o conjunto formado por todos os antípodas dos pontos de φ é também um fuso φ' , chamado de fuso antípoda de φ . A reunião $\phi = \varphi \cup \varphi'$ chama-se um fuso completo.

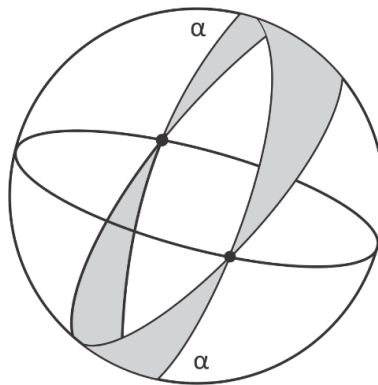


Figura 3.6: Fuso completo

Teorema 3.4. Seja ϕ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R , R' do fuso completo ϕ contidas em cada uma desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha R^2$.

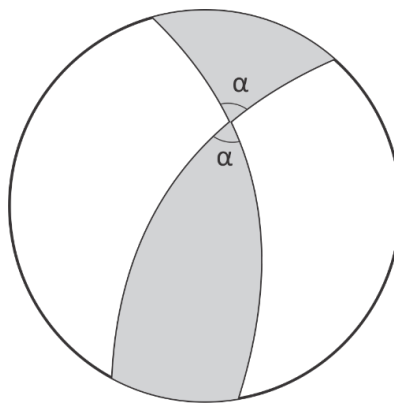


Figura 3.7: Parte de um fuso completo

Demonstração. Seja S uma esfera de raio R consideremos a função $f : S \rightarrow S$, que transforma cada ponto x de S em seu antípoda $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades:

- i) se x é um ponto do hemisfério H , seu antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério oposto H' .
- ii) se x é um ponto do fuso completo ϕ , seu antípoda $x' = f(x)$ ainda pertence a ϕ .
- iii) dada qualquer região A na esfera, a região antípoda $A' = f(A)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de A , tem a mesma área que A .

Portanto, chamando de A a parte do fuso completo ϕ situada no hemisfério H , vemos que sua região antípoda A' é a outra parte ϕ situada no hemisfério H' , assim, por (iii) a área de $\phi = (\text{área de } A) + (\text{área de } A') = 2 \cdot (\text{área de } A)$, logo área de $A = 2\alpha R^2$. □

Definição 3.11. *Sejam A, B e C três pontos distintos sobre o mesmo hemisfério da superfície esférica S , e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima, a figura formada pelos arcos das circunferências máximas (todos menores do que uma semicircunferência) que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico.*

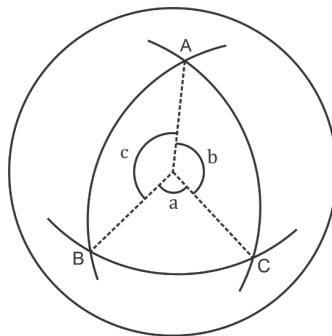


Figura 3.8: Triângulo esférico

Sendo o raio da esfera com medida igual a 1, denotamos as medidas dos lados $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ e \widehat{BC} do triângulo esférico por a, b e c respectivamente. Note que essas medidas correspondem a medida em radianos dos ângulos subtendidos pelos lados do triângulo como na Figura 3.8. Os ângulos do triângulo ABC são os ângulos esféricos \widehat{A}, \widehat{B} e \widehat{C} .

Outras representações

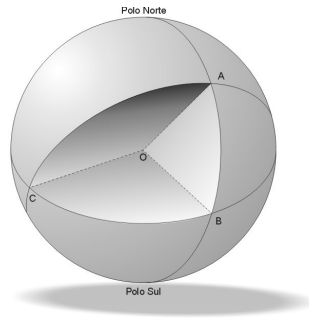


Figura 3.9: Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm>

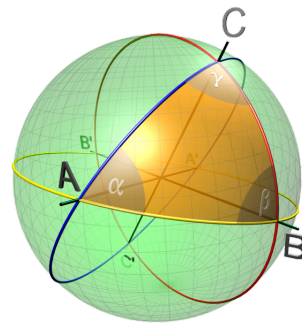


Figura 3.10: Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm>

3.2 Teorema de Girard

O teorema a seguir foi enunciado e demonstrado por Girard em 1625. Ele afirma que a área do triângulo esférico depende de todos os seus ângulos internos, diferentemente da geometria plana.

Teorema 3.5. *Se α , β e γ são ângulos internos de um triângulo esférico medidos em radianos, então*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2},$$

onde A é a área do triângulo e R é o raio da superfície esférica que o contém.

Demonstração. Seja H um hemisfério que contenha o triângulo esférico ABC , gerado pelas intersecções das circunferências máximas C_1 , C_2 e C_3 como mostra a Figura 3.11 abaixo. Prolongando nos dois sentidos os lados que formam o ângulo α até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtém-se uma região R_α (região hachurada da situação 1 na Figura 3.12), cuja a área mede $2\alpha r^2$ de acordo com o Teorema 3.4.

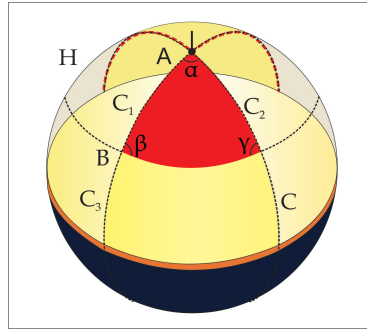


Figura 3.11: Hemisfério que contém o triângulo esférico.

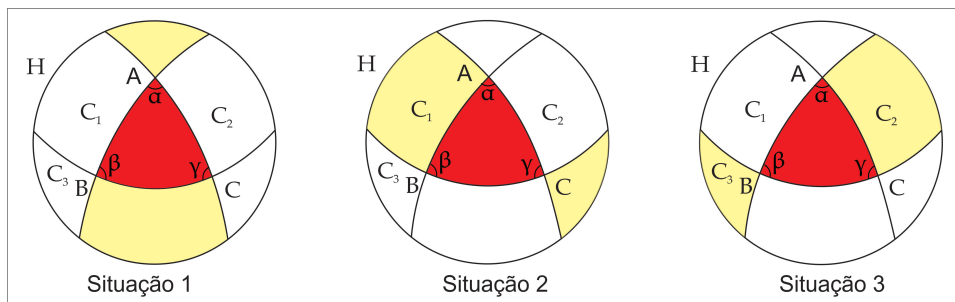


Figura 3.12: Vistas do triângulo esférico no hemisfério H e as regiões R_α, R_β e R_γ .

Procedendo da mesma forma com os arcos que formam os ângulos β e γ , obtemos as regiões R_β e R_γ , situações 2 e 3 respectivamente, com áreas iguais a respectivamente $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$. Observe que a junção das regiões R_α, R_β e R_γ forma o hemisfério H, porém o triângulo esférico ABC é contado três vezes, assim:

$$\text{Área}(R_\alpha) + \text{Área}(R_\beta) + \text{Área}(R_\gamma) - 2A = \text{Área}(H) \Rightarrow 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2A \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$$

□

Corolário 3.1. A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π .

Demonstração. Sendo A a área do triângulo esférico, temos que $A > 0$, como $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$, conclui-se que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. □

Resultados interessantes que ainda podem ser tirados da fórmula de Girard.

i) Se dois triângulos sobre a mesma esfera possuem ângulos de mesma medida, então suas áreas também terão mesma medida. Isso não ocorre em geometria plana!

ii) Em particular se os ângulos de dois triângulos, em uma mesma esfera, possuem mesma medida, então seus lados possuem a mesma medida, e disso tiramos a conclusão de que em geometria esférica não existem triângulos semelhantes com razão diferente de 1.

Teorema 3.6. *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é menor que 3π .*

Demonstração. Dada a definição de triângulo esférico, temos que todos os ângulos internos de um triângulo esférico são menores do que π , assim $\alpha + \beta + \gamma < \pi + \pi + \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. \square

3.3 Elementos do Globo Terrestre

As definições aqui mostradas servem como um bom argumento para introduzir uma interdisciplinaridade entre Geografia e Matemática, interdisciplinaridade essa que é discutida nos PCNs [15], [16], [17], [18]. Pra isso faz necessário que o professor tenha um conhecimento mais amplo de sua área com relação as demais como defende o [14] na página 26:

Para se conduzir o ensino de forma compatível com uma promoção das competências gerais, além da consciência de que, em cada aula de cada ciência, se desenvolvem linguagens, se realizam investigações e se apresentam contextos, é preciso que o professor tenha a percepção de linguagens comuns entre a sua disciplina e as demais de sua área para auxiliar o aluno a estabelecer as sínteses necessárias a partir dos diferentes discursos e práticas de cada uma das disciplinas. Isso propicia a composição de uma ideia mais ampla de Ciência para além das diferentes ciências, de forma que os instrumentos gerais de pensamento reforcem e ampliem os instrumentos particulares.

Agora vamos apresentar os principais elementos do globo terrestre, úteis para auxiliar a navegação e aviação, por exemplo.

I – Eixo da Terra: É a linha na qual a Terra faz seu movimento de rotação, de oeste(W) para leste(E).

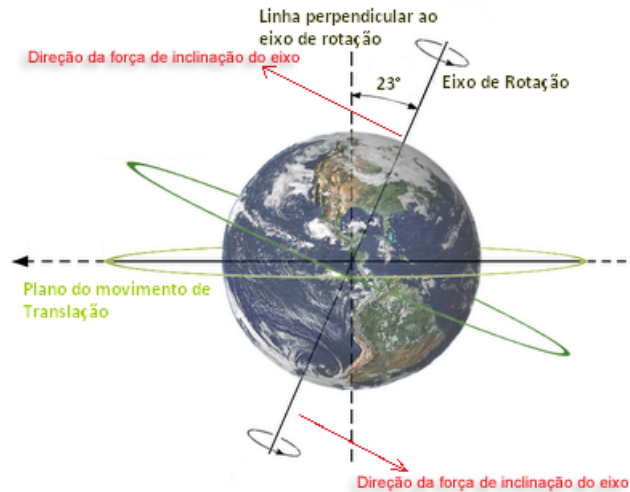


Figura 3.13: Terra e seu eixo

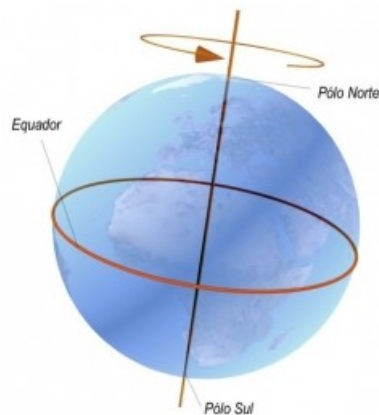


Figura 3.14: Terra e seus Pólos

II – Polos: São os pontos nos quais o Eixo da Terra intercepta a superfície terrestre, o Polo Norte é o que se situa na direção da Estrela Polar (a Ursa Menor), enquanto que o Polo Sul é o oposto.

III – Equador da Terra: É a circunferência máxima resultante da interseção de um plano, perpendicular ao eixo da Terra e que contém seu centro, com a superfície da Terra. A circunferência de tal círculo é o que se chama de Linha do Equador. A Linha do Equador divide a terra em dois hemisférios, o Hemisfério Norte que contém o Polo Norte e o Hemisfério Sul que contém o Polo Sul. Vale acrescentar que o raio da Terra mede aproximadamente 6378km.

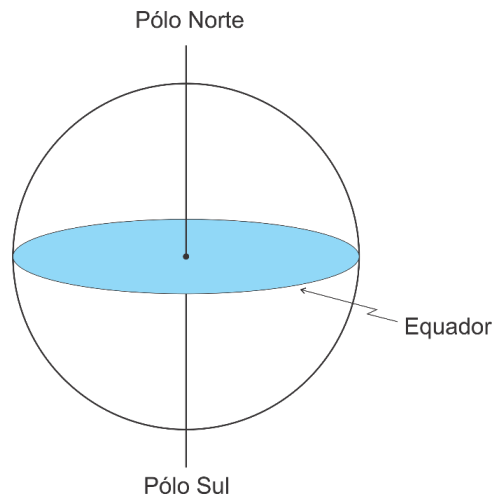


Figura 3.15: Linha do Equador

IV – Paralelos: São círculos paralelos e menores do que o do equador

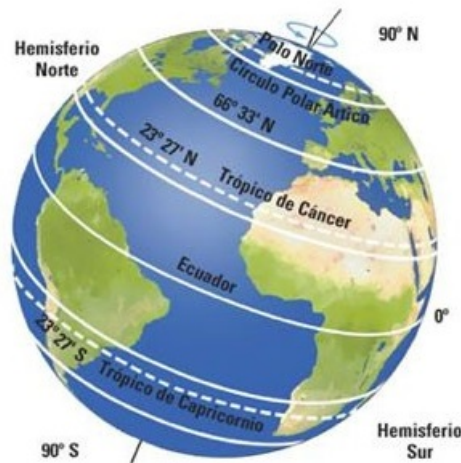


Figura 3.16: Paralelos

V – Meridianos: São semicircunferências que ligam os Polos Norte e Sul. O mais conhecido e tomado como base para medição de longitudes é o Meridiano de Greenwich.

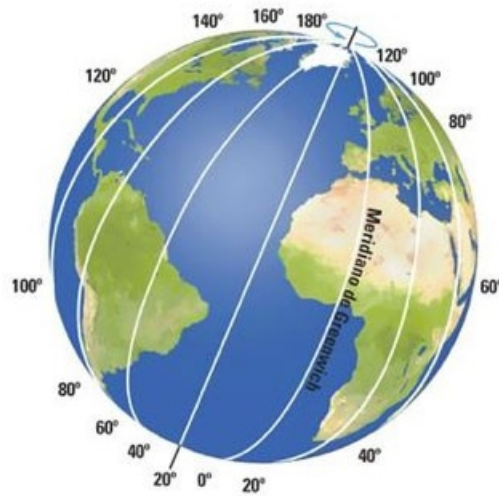


Figura 3.17: Meridianos

VI – Latitude e Longitude: A latitude de um ponto na terra é o ângulo que se obtém entre o segmento que une o ponto ao centro da Terra e o plano do equador (estamos tratando aqui do ângulo entre uma reta e um plano). A latitude varia de 0° a 90° para o sul ou para o norte e os pontos da Linha do Equador possuem latitude zero.

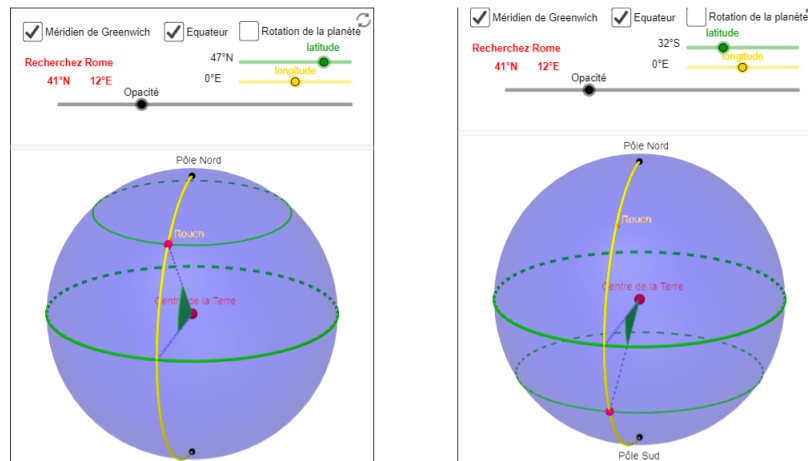


Figura 3.18: Latitudes

Aqui temos o exemplo de duas figuras com latitudes Norte e Sul, respectivamente. Observe que cada latitude determina um paralelo, e para pontos que estiverem nesse paralelo suas latitudes são iguais.

A longitude de um ponto é o ângulo entre o meridiano que passa por esse ponto e o meridiano de Greenwich, sendo que o Meridiano de Greenwich possui longitude zero. A longitude varia de 0° a 180° para leste ou para oeste.

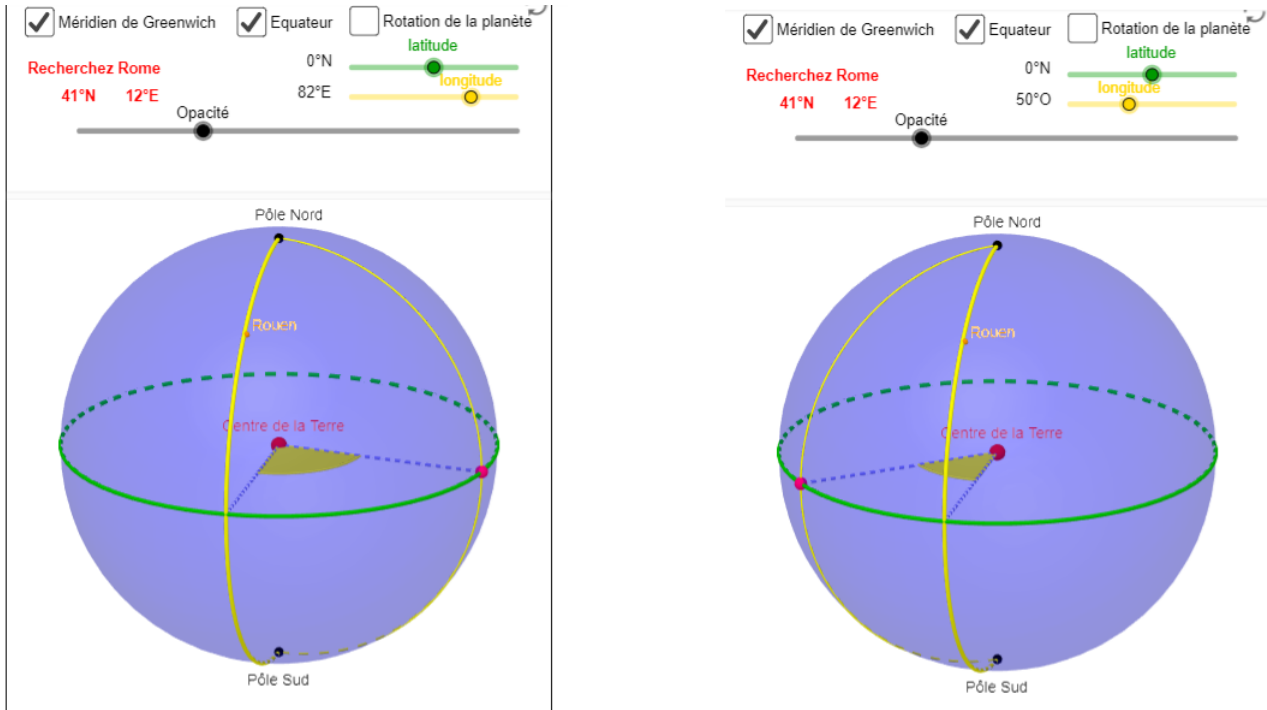


Figura 3.19: Longitudes

Nas imagens acima temos dois pontos com longitudes Leste(East) e Oeste (West) respectivamente.

Observação 3.1: O Meridiano de Greenwich foi estabelecido através de uma convenção, realizada em 1884, na cidade de Washington, como meridiano de referência. A intenção era estabelecer uma padronização de horários em qualquer ponto da superfície da Terra, ou seja, dividir o globo terrestre em ocidente e oriente, permitindo assim, medir a longitude e estabelecer fusos horários. Cada fuso horário corresponde a uma faixa de 15 graus de longitude, sendo a hora de Greenwich chamada de Greenwich Mean Time (GMT). Este meridiano leva esse nome porque passa sobre o Observatório Real de Greenwich, situado na cidade de Londres, na Inglaterra.

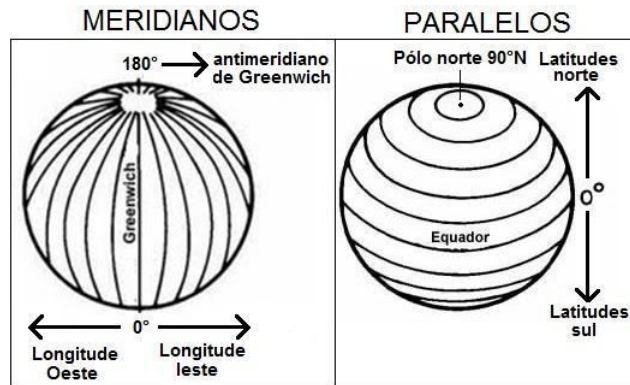


Figura 3.20: Meridianos e Paralelos

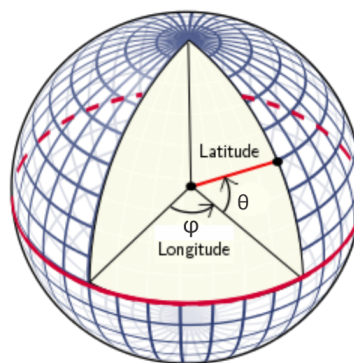


Figura 3.21: Latitude φ e Longitude θ

Observação 3.2: A partir de agora quando nos referimos a latitude de um ponto a representamos por θ , e quando for longitude representamos por φ . Além disso, uma latitude norte será representada por um ângulo positivo e uma latitude sul por um ângulo negativo, já uma longitude leste será representada por um ângulo positivo e uma longitude oeste por um ângulo negativo. Assim, um ponto que tenha latitude 40° norte e longitude 72° oeste será representado como um ponto com $\theta = 40^\circ$ e $\varphi = -72^\circ$.

3.4 Calculando distâncias através das coordenadas geográficas

Um ponto interessante a partir de agora é calcular a distância entre dois pontos ou duas cidades, conhecendo suas coordenadas geográficas. Para isso vamos entender que, dadas as coordenadas geográficas de um ponto, podemos determinar as coordenadas cartesianas e isso facilitará o cálculo da distância entre dois pontos na esfera. É importante ter em mente que os cálculos aqui feitos considerarão a Terra como uma esfera perfeita, o que não é de fato, portanto nossos cálculos

quando comparados com a realidade, terão divergências, o que importa aqui é entender o cálculo de distâncias em uma esfera, tratar esse cálculo no contexto da Terra tem por objetivo despertar a curiosidade sobre o tema e futuros aprofundamentos. Façamos as seguintes considerações sobre o sistema de coordenadas no \mathbb{R}^3 .

- A origem do sistema de coordenadas, ponto O, será o centro do planeta Terra.
- O eixo da Terra será o eixo z do sistema de coordenadas.
- O eixo y intersecta a linha do equador, cortando o meridiano de longitude 90°E no sentido positivo.
- O eixo x no sentido positivo intersecta o Meridiano de Greenwich

Veja agora o ponto P de coordenadas (x, y, z) no globo abaixo:

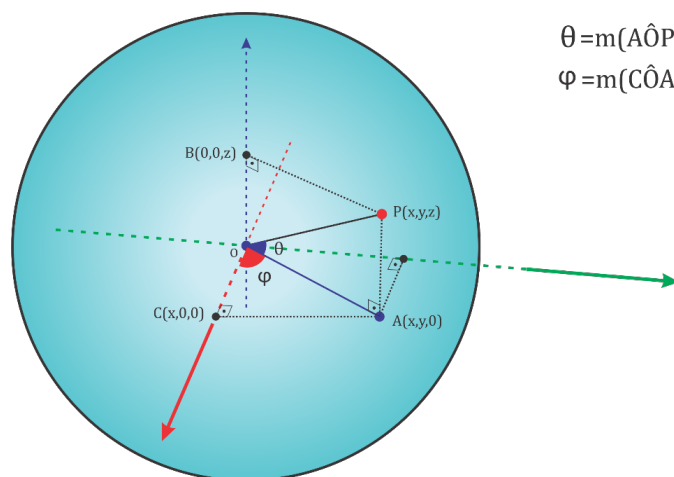


Figura 3.22: Esfera

Observe que os ângulos $A\hat{O}P = \theta$ e $C\hat{O}A = \varphi$ representam respectivamente a latitude e a longitude do ponto P, sendo assim temos que:

- $\overline{OP} = r$ é o raio da esfera que vale $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Do triângulo AOP temos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ como } \overline{OP} = r, \text{ temos que } z = r \text{ sen } \theta. \quad (\text{I})$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ cos } \theta. \quad (\text{II})$$

- Do triângulo AOC temos que:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow y = \operatorname{sen} \varphi \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ de (II) temos que } y = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi.$$

$$\operatorname{cos} \varphi = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow x = \operatorname{cos} \varphi \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ de (II) temos que } x = r \cos \theta \operatorname{cos} \varphi$$

Portanto dada a latitude θ e a longitude φ de um ponto no globo, suas coordenadas cartesianas no \mathbb{R}^3 , são dadas por:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi \quad (3.1)$$

$$y = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \quad (3.2)$$

$$z = r \operatorname{sen} \theta \quad (3.3)$$

Como já sabemos que a menor distância entre dois pontos na esfera é um arco de um grande círculo, se soubermos o ângulo α desse arco, através da fórmula de comprimento de arco

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi r$$

(ou simplesmente $r\alpha$ com α em radianos), podemos determinar essa distância.

Veja agora situações em que α é facilmente determinado, bastando que os pontos A e B estejam na mesma longitude, assim a diferença entre as latitudes determina o valor de α , ou que A e B estejam sobre a linha do equador e assim a diferença entre as longitudes determinam α , observe os exemplos:

Exemplo 3.1. Observe que na Figura 3.23 as localidades 1 e 2 apresentam longitudes $\varphi_1 = \varphi_2 = -70$ e latitudes $\theta_1 = 50^\circ$ e $\theta_2 = -30^\circ$ respectivamente, assim o ângulo α destacado na imagem é igual a 80° e a distância entre as localidades 1 e 2 é dada por $\frac{\pi \cdot 6400 \cdot 80^\circ}{180^\circ} = 8936,09$ metros. A Figura 3.24 é uma repetição da Figura 3.22 mostrando os paralelos e meridianos nos quais os pontos fazem parte e o ângulo central do arco que representa a distância entre os dois pontos.

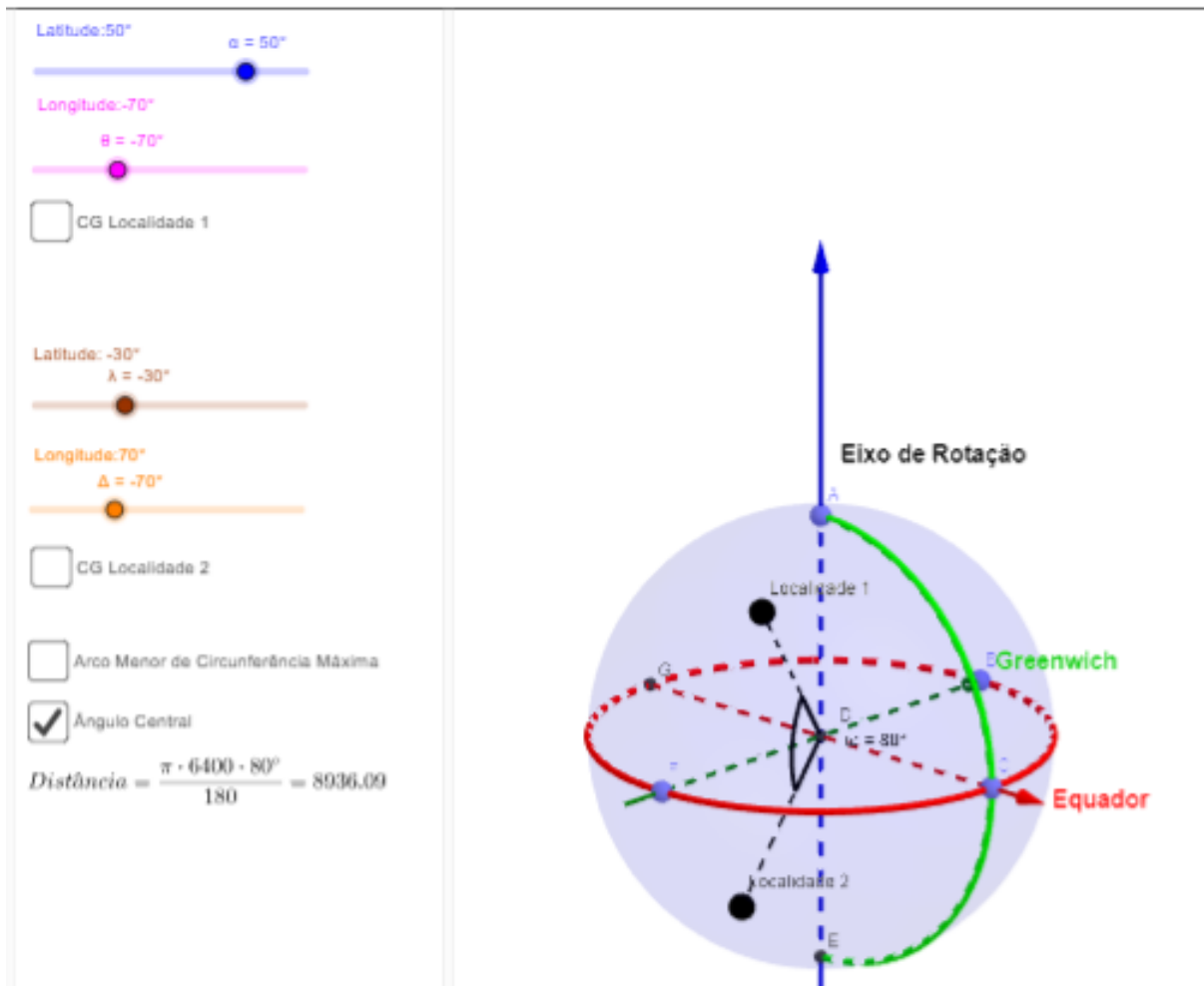


Figura 3.23: Exemplo

Latitude: 50° $\alpha = 50^\circ$

Longitude: -70° $\beta = -70^\circ$

CG Localidade 1

Latitude: -30° $\lambda = -30^\circ$

Longitude: 70° $\Delta = -70^\circ$

CG Localidade 2

Arco Menor de Circunferência Máxima

Ângulo Central

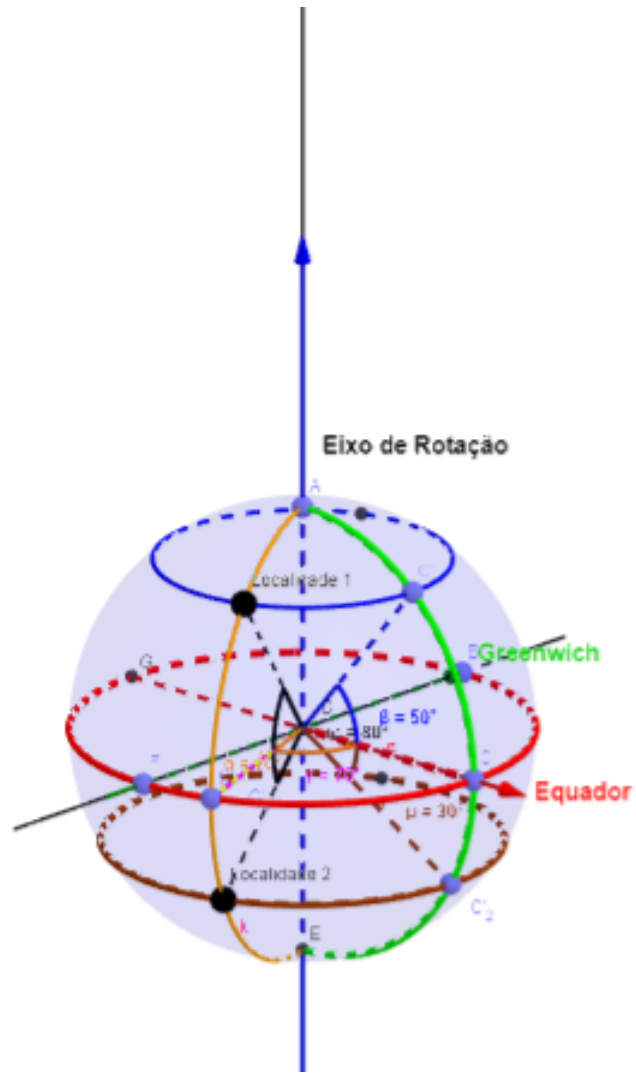
$$Distância = \frac{\pi \cdot 6400 \cdot 80^\circ}{180} = 8936.09$$


Figura 3.24: Exemplo

Exemplo 3.2. Aqui temos outro exemplo de duas localidades 1 e 2 que estão na mesma longitude $\varphi_1 = \varphi_2 = -84^\circ$ e latitudes $\theta_1 = 63^\circ$ e $\theta_2 = 10^\circ$ respectivamente. Logo o ângulo α destacado na imagem é $\alpha = 53^\circ$ e a distância entre as localidades é dada por $\frac{\pi \cdot 6400 \cdot 53^\circ}{180^\circ} = 5920,16$ metros.

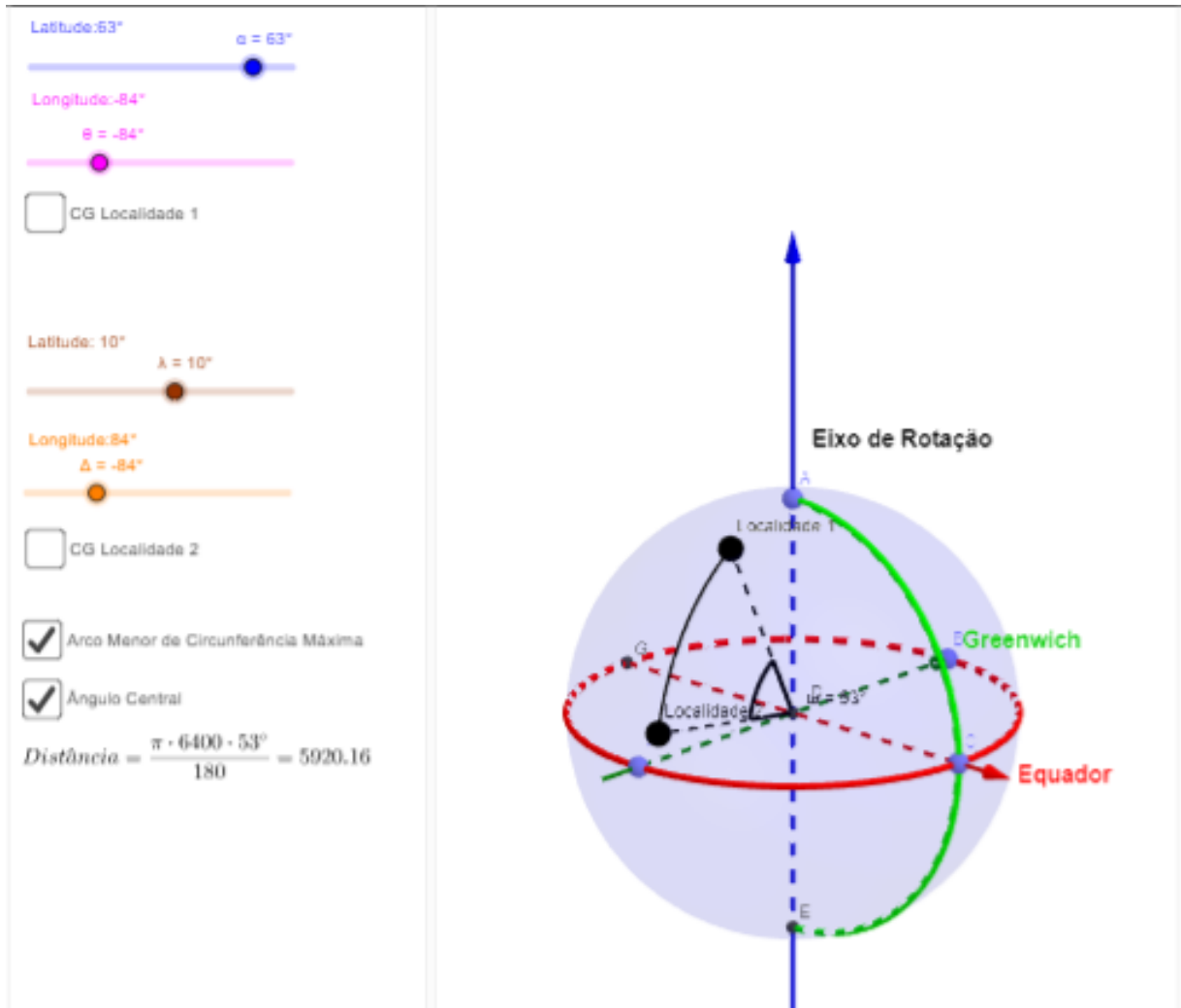


Figura 3.25: Exemplo

A figura abaixo é uma repetição da anterior mostrando os paralelos e meridianos nos quais os pontos fazem parte e o ângulo central do arco que representa a distância entre os dois pontos.

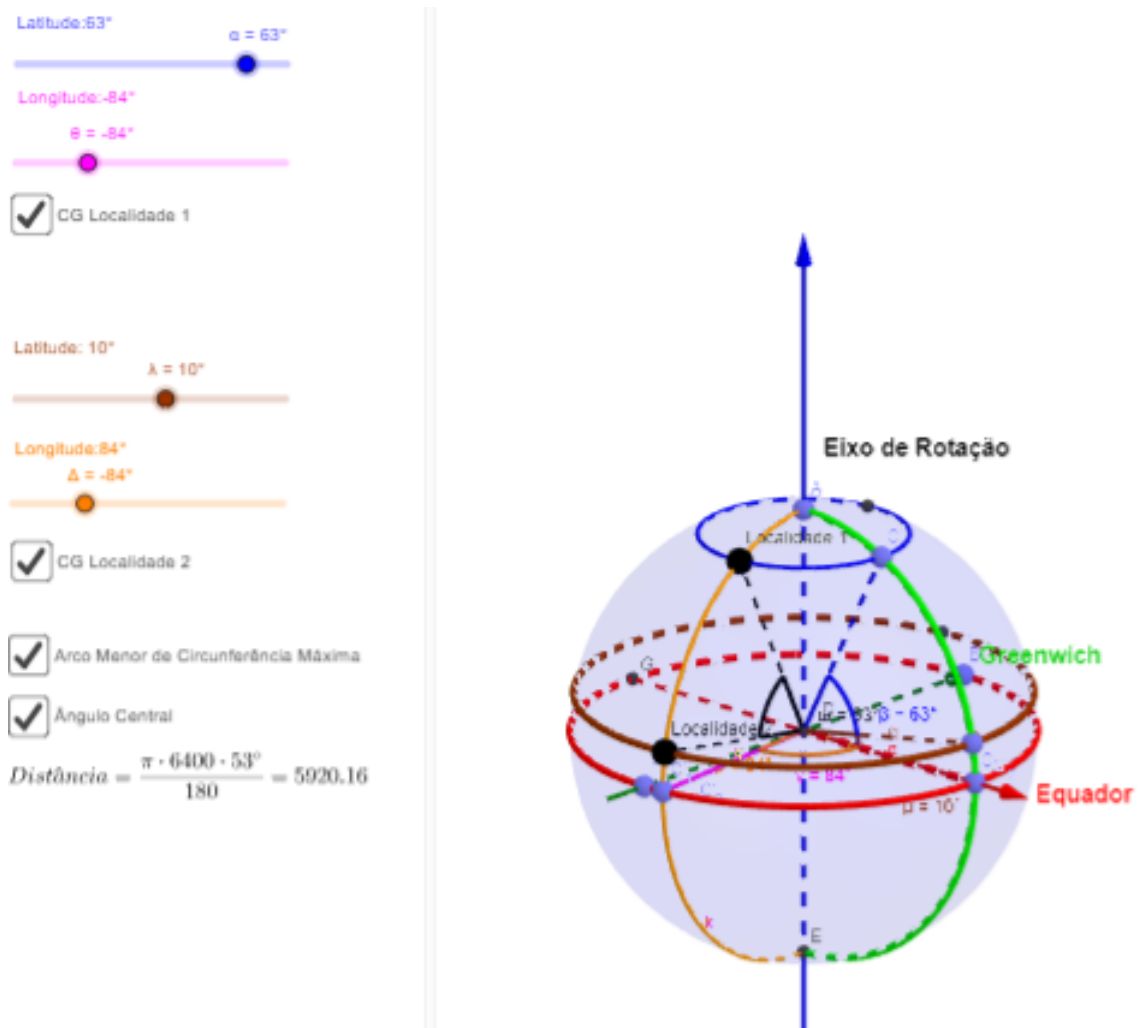


Figura 3.26: Exemplo

Exemplo 3.3. Na Figura 3.27 mostramos uma situação em que as duas localidades estão sobre a linha do Equador. Na imagem temos as localidades 1 e 2 com latitudes $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$ e longitudes longitude $\varphi_1 = -78^\circ$ e $\varphi_2 = 36^\circ$. Observe que o ângulo α destacado na imagem é igual a 114° e a distância entre as localidade 1 e 2 é dada por $\frac{\pi \cdot 6400 \cdot 114^\circ}{180^\circ} = 12733,92$ metros. A próxima figura é uma repetição da anterior mostrando os paralelos e meridianos nos quais os pontos fazem parte e o ângulo central do arco que representa a distância entre os dois pontos.

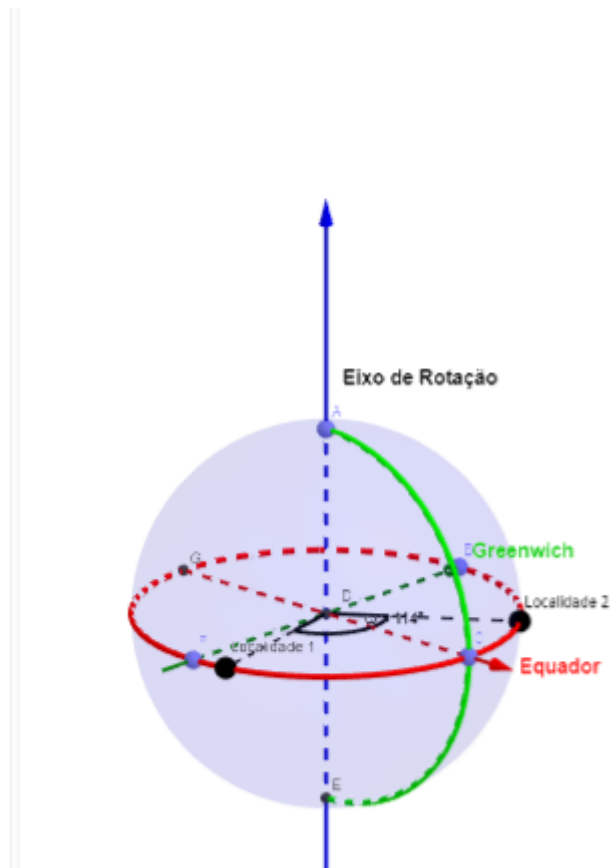
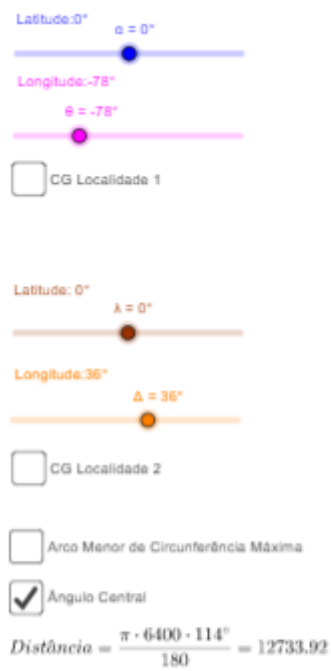


Figura 3.27: Exemplo

Latitude: 0° $\alpha = 0^\circ$
 Longitude: -78° $\theta = -78^\circ$
 CG Localidade 1

Latitude: 0° $\lambda = 0^\circ$
 Longitude: 36° $\Delta = 36^\circ$
 CG Localidade 2

Arco Menor de Circunferência Máxima
 Ângulo Central

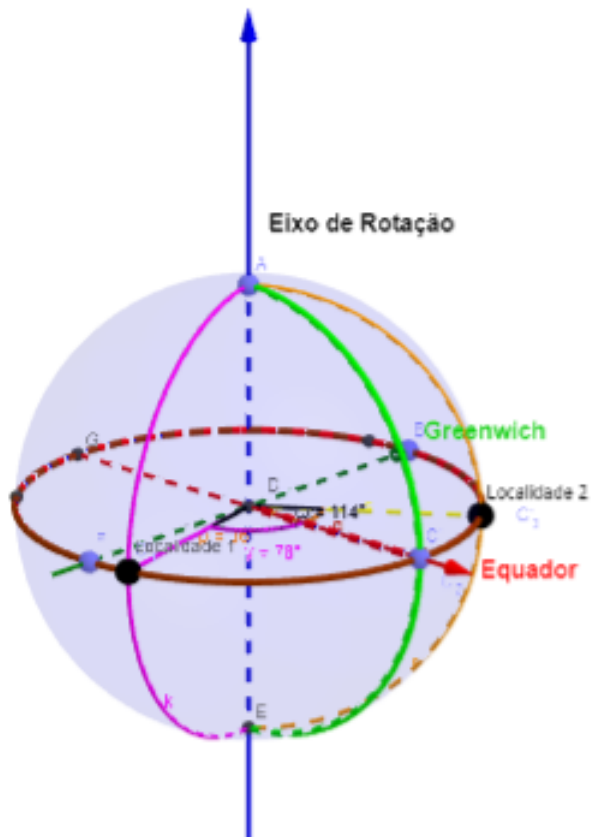
$$Distância = \frac{\pi \cdot 6400 \cdot 114^\circ}{180} = 12733.92$$


Figura 3.28: Exemplo

Nos Exemplos 3.1, 3.2 e 3.3, α foi facilmente determinado, mas isso nem sempre é possível, basta uma situação como na figura abaixo, onde temos dois pontos nos quais suas longitudes e latitudes são diferentes entre si.

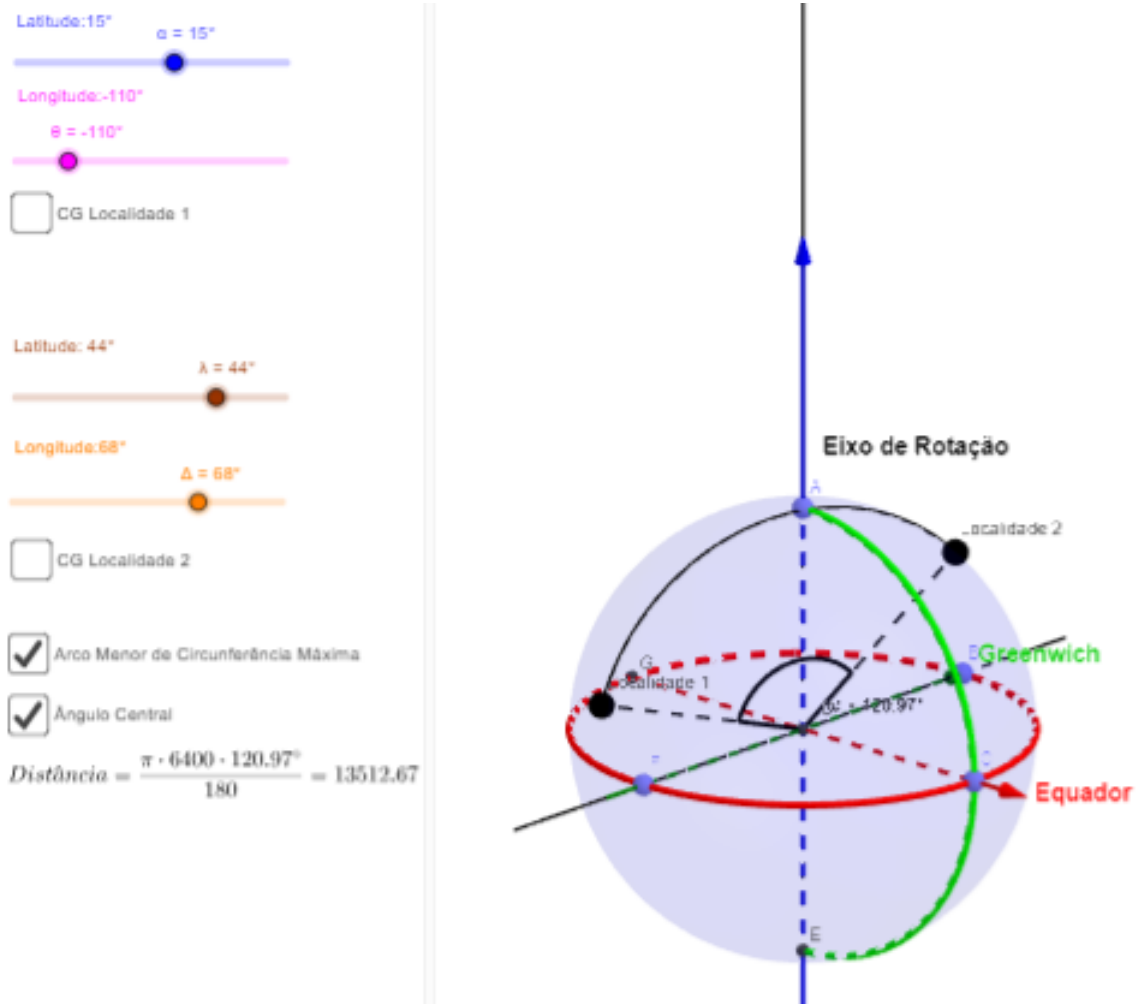


Figura 3.29: Exemplo

Outra situação bastante interessante é o caso de cidades localizadas no mesmo paralelo, sem ser o do equador, é de se imaginar que a menor distância entre elas se dá pelo menor arco do paralelo que as contém, mas já vimos que isso não é verdade pelo Teorema 3.1. As duas próximas imagens ilustram essa situação

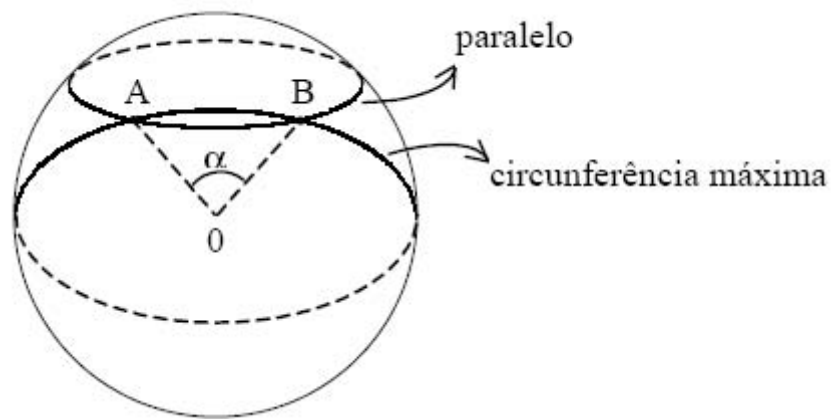


Figura 3.30: A e B localizados no mesmo Paralelo

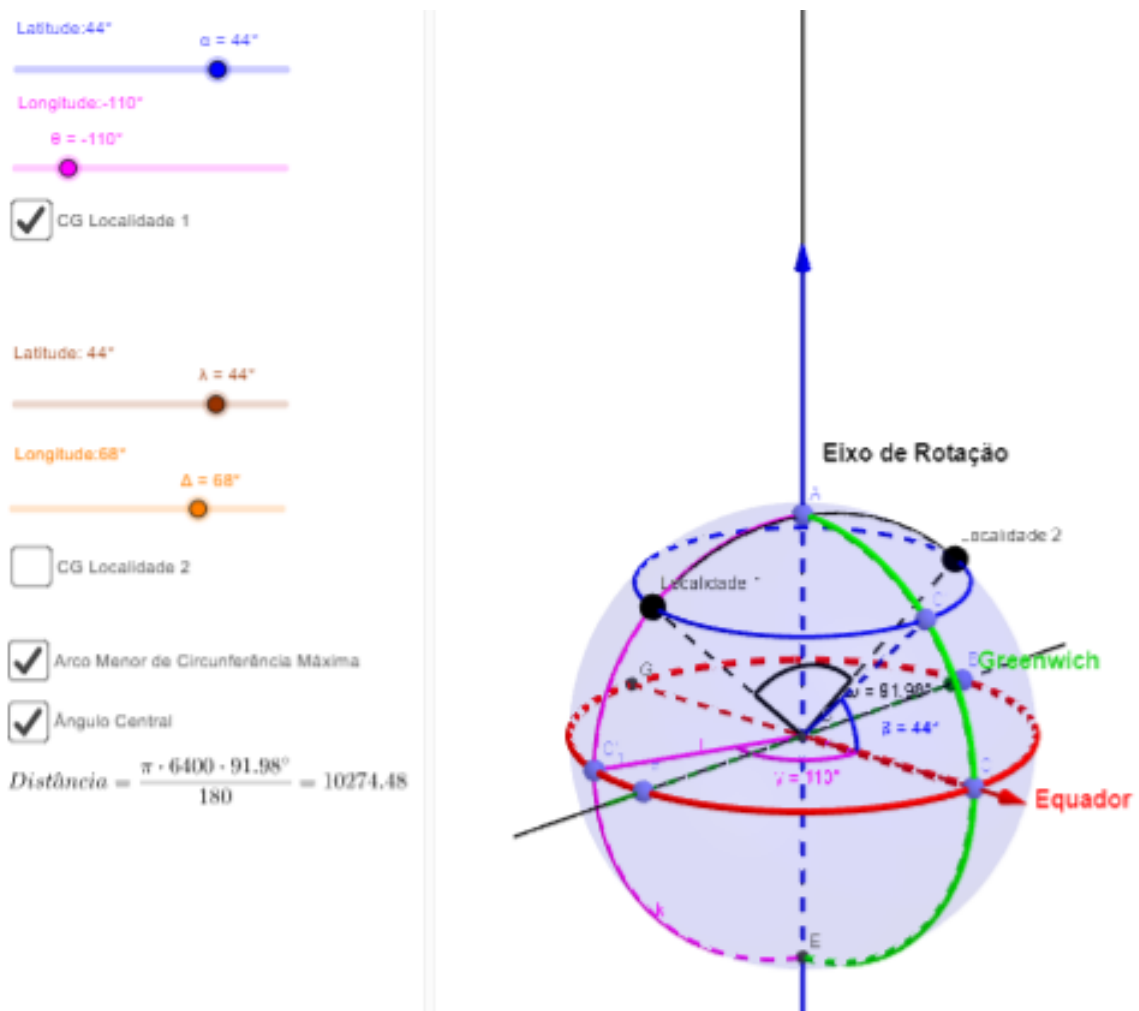


Figura 3.31: Situação de duas localidades no mesmo paralelo

Para situações como a descrita anteriormente usaremos o teorema a seguir.

Teorema 3.7 (Cálculo da distância de dois pontos quaisquer em uma esfera). *Dados dois pontos A e B de latitudes em radianos θ_1 e θ_2 respectivamente e longitudes em radianos φ_1 e φ_2 respectivamente, numa esfera de raio R, a menor distância entre esses dois pontos é dada por:*

$$d(A, B) = R \arccos(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2).$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere uma esfera de raio $R = 1$ e os pontos A e B sobre a esfera. Colocando A e B em coordenadas cartesianas temos $A = (\cos \theta_1 \cos \varphi_1, \cos \theta_1 \sin \varphi_1, \sin \theta_1)$ e $B = (\cos \theta_2 \cos \varphi_2, \cos \theta_2 \sin \varphi_2, \sin \theta_2)$. Sendo O o centro da esfera, o ângulo α entre os vetores unitários \vec{OA} e \vec{OB} indica a região da esfera que se deve percorrer para ir de um ponto ao outro.

Da geometria analítica temos:

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|}$$

Como \vec{OA} e \vec{OB} são vetores unitários temos $\cos \alpha = \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle \Rightarrow \alpha = \arccos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$.

Como

$$\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = (\cos \theta_1 \cos \varphi_1, \cos \theta_1 \sin \varphi_1, \sin \theta_1)(\cos \theta_2 \cos \varphi_2, \cos \theta_2 \sin \varphi_2, \sin \theta_2) \quad (3.4)$$

$$= \cos \theta_1 \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \varphi_2 + \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \varphi_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (3.5)$$

$$= \cos \theta_1 \cos \theta_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (3.6)$$

$$= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (3.7)$$

Assim,

$$\alpha = \arccos(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow d(A, B) = R \arccos(\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \theta_1 \sin \theta_2). \quad (3.9)$$

□

Exemplo 3.4. 1) *Chicago e Roma situam-se na mesma latitude (42° N) mas em longitudes diferentes: a de Chicago é aproximadamente 88° W e a de Roma aproximadamente 12° E.*

a) *Suponha que um piloto tenha ido de Chicago a Roma em vôo no rumo leste, permanecendo o tempo todo na mesma latitude. (Muita gente acha que esse é caminho mais curto possível). Que distância o piloto teve de voar?*

b) Qual a distância de Chicago a Roma por circunferência máxima?

c) Quanto tempo se economizaria voando em uma circunferência máxima num avião a jato capaz de fazer uma velocidade média de 900 km/h?

2) Sejam as coordenadas geográficas das cidades abaixo:

- Londres - Inglaterra: Latitude: $51,5^\circ$ (Norte) e 0° de longitude.
- Calgary - Canadá: Latitude: $51,5^\circ$ (Norte) e longitude 114° (oeste).
- Campinas - Brasil: Latitude: $22,9^\circ$ (ao Sul) e longitude $47,06^\circ$ (ao Oeste).

a) Qual das cidades está mais próxima de Londres: Campinas ou Calgary?

b) De quantos quilômetros a distância entre Londres e Calgary pelo paralelo $51,5^\circ$ (Norte) excede a do círculo máximo?

Resoluções:

1.

a) Para determinar essa distância precisamos calcular, calcular o raio do paralelo de 42° N. Para isso observe a Figura 3.32.

Da Figura 3.31 temos que $\cos 42^\circ = \frac{r}{6400} \Rightarrow r = 6400 \cdot \cos 42^\circ \cong 4756,12 \text{ km}$.

O ângulo α será a diferença entre as longitudes, assim $\alpha = 12^\circ - (-88^\circ) = 100^\circ \cong 1,75 \text{ rad}$ assim a distância desejada é $d = r \cdot \alpha = 4756,12 \text{ km} \cdot 1,75 = 8323,21 \text{ km}$.

b) Das informações de Chicago temos que $\theta_1 = 42^\circ \cong 0,73 \text{ rad}$ e $\varphi_1 = -88^\circ \cong -1,53 \text{ rad}$. De Roma temos $\theta_2 = 42^\circ \cong 0,73$ e $\varphi_2 = 12^\circ \cong 0,21 \text{ rad}$.

Usando o teorema 4.6 a distância entre as duas cidades é dada por $d = 6400 \cdot (\cos 0,73 \cdot \cos 0,73 \cdot \cos(-1,53 - 0,21) + \sin 0,73 \cdot \sin 0,73) \Rightarrow d \cong 7756$.

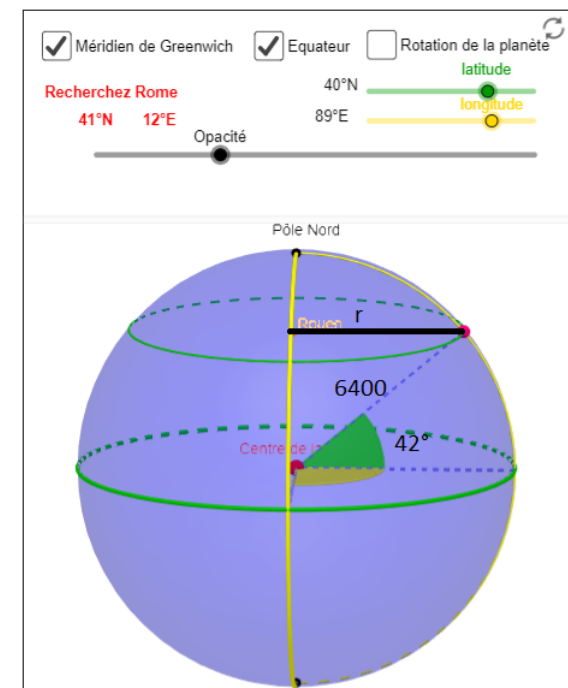


Figura 3.32: Esfera

c) Como a velocidade média é calculada por $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, temos que o tempo gasto na primeira situação é dado por $t_1 = \frac{7756}{900} = 8,62h \cong 8h37min$. Da mesma forma o tempo gasto na segunda situação é $t_2 = \frac{8323,21}{900} \cong 9,25h = 9h15min$. Assim temos que a diferença de tempo entre um percurso e outro é de 38 minutos aproximadamente.

2.

A questão se resolve de modo análogo à Questão 1, seu gabarito segue abaixo.

a) Distância entre Londres e Calgary é 7030km e entre Londres e Campinas 9501km.

b) 7920km.

APÊNDICE

Demonstração do Teorema 3.1.

A demonstração que se segue é baseada em [8].

Demonstração. Consideremos dois pontos A e B arbitrários em uma esfera. Devemos provar que, de todos os caminhos que conectam estes dois pontos, o de menor distância será um arco de circunferência máxima contendo os pontos A e B.

Iremos supor sem perda de generalidade que a superfície esférica que estamos trabalhando possui raio com medida 1 unidade e que seu centro é o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas. Como a superfície esférica é simétrica podemos assumir que o ponto A é o Polo Norte e o ponto B será dado por suas coordenadas geográficas com medidas em radianos. Dizemos que a θ_1 e φ_1 são a latitude e longitude de B respectivamente.

O comprimento de um arco de uma circunferência de raio R e ângulo central α em radianos, se encontra utilizando a fórmula $R\alpha$. A circunferência máxima que passa por B contém o meridiano de B, como consideramos que o raio da esfera mede 1, temos que o comprimento do menor arco \widehat{AB} , é dado por $\frac{\pi}{2} - \theta_1$, observe a Figura 4.1.

Devemos agora mostrar que o comprimento de qualquer caminho arbitrário que liga A e B é menor ou igual do que $\frac{\pi}{2} - \theta_1$.

Se nos imaginarmos viajando de A até B, em cada instante t , estaremos num ponto do globo terrestre com uma latitude $\theta(t)$ e uma longitude $\varphi(t)$. Iniciando nossa viagem no instante $t = 0$ e a finalizando no instante $t = 1$ temos:

- $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$
- $\theta t_1 = \theta_1$

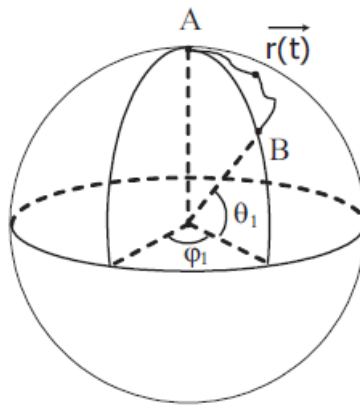


Figura 3.33: Esfera com localidade A e B.

Retirado de [8]

- $\varphi(t_1) = \varphi_1$

Um caminho arbitrário ligando A e B é descrito por um vetor posição \vec{r} dado por:

$$\vec{r}(t) = (\cos\theta(t) \cos\varphi(t), \cos\theta(t) \sin\varphi(t), \sin\theta(t))$$

Derivando-se essa função vetorial em relação ao tempo t obtemos o vetor velocidade $\vec{r}'(t)$ da trajetória e conseqüentemente sua velocidade $\|\vec{r}'(t)\|$ no instante t . Observe os cálculos:

Temos que: $\vec{r}(t) = (\cos\theta(t) \cos\varphi(t), \cos\theta(t) \sin\varphi(t), \sin\theta(t))$, assim:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\theta(t) \cos\varphi(t) \\ x'(t) &= (\cos\theta(t))' \cos\varphi(t) + \cos\theta(t) (\cos\varphi(t))' \\ x'(t) &= -\sin\theta(t)\theta'(t) \cos\varphi(t) - \cos\theta(t) \sin\varphi(t)\varphi'(t) \\ x'(t)^2 &= [-\sin\theta(t)\theta'(t) \cos\varphi(t)]^2 + 2\sin\theta(t)\theta'(t) \cos\varphi(t) \cos\theta(t) \sin\varphi(t)\varphi'(t) + \\ &\quad [\cos\theta(t) \sin\varphi(t)\varphi'(t)]^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \cos\theta(t)\operatorname{sen}\varphi(t) \\
 y'(t) &= (\cos\theta(t))'\operatorname{sen}\varphi(t) + \cos\theta(t)(\operatorname{sen}\varphi(t))' \\
 y'(t) &= -\operatorname{sen}\theta(t)\theta'(t)\operatorname{sen}\varphi(t) + \cos\theta(t)\cos\varphi(t)\varphi'(t) \\
 y'(t)^2 &= [-\operatorname{sen}\theta(t)\theta'(t)\operatorname{sen}\varphi(t)]^2 - 2\operatorname{sen}\theta(t)\theta'(t)\cos\varphi(t)\cos\theta(t)\operatorname{sen}\varphi(t)\varphi'(t) + \\
 &\quad [\cos\theta(t)\cos\varphi(t)\varphi'(t)]^2. \\
 z(t) &= \operatorname{sen}\theta(t) \\
 z'(t) &= \cos\theta(t)\theta'(t) \\
 z'(t)^2 &= \cos^2\theta(t)\theta'(t)^2.
 \end{aligned}$$

Com esses cálculos temos que:

$$\begin{aligned}
 x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 &= \\
 &\quad \underbrace{=\operatorname{sen}^2\theta(t)\theta'(t)^2[\cos^2\varphi(t)+\operatorname{sen}^2\varphi(t)]}_{\operatorname{sen}^2\theta(t)\theta'(t)^2\cos^2\varphi(t) + \operatorname{sen}^2\theta(t)\theta'(t)^2\operatorname{sen}^2\varphi(t)} + \underbrace{=\cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2[\operatorname{sen}^2\varphi(t)+\cos^2\varphi(t)]}_{\cos^2\theta(t)\operatorname{sen}^2\varphi(t)\varphi'(t)^2 + \cos^2\theta(t)\cos^2\varphi(t)\varphi'(t)^2} \\
 &\quad + \cos^2\theta(t)\theta'(t)^2.
 \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned}
 x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 &= \operatorname{sen}^2\theta(t)\theta'(t)^2 + \cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2 + \cos^2\theta(t)\theta'(t)^2 \\
 &= \theta'(t)^2(\operatorname{sen}^2\theta(t) + \cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2) \\
 &= \theta'(t)^2 + \cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2.
 \end{aligned}$$

Com isso temos que a velocidade de $\vec{r}'(t)$ no instante t é dada por:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\theta'(t)^2 + \cos^2\theta(t)\varphi'(t)^2} \geq \sqrt{\theta'(t)^2} = |\theta'(t)| \geq -\theta'(t).$$

Desse modo como o comprimento L de uma curva é calculado por $L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$ temos que:

$$L \geq \int_0^{t_1} [-\theta'(t)] dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1,$$

como queríamos provar. □

Demonstração do Teorema 3.3

Demonstração. Para demonstrar o teorema, faremos uso do teorema que segue abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [19].

TEOREMA: Suponha que f e suas derivadas parciais sejam contínuas na região fechada R , no plano xy . Então, se A for a medida da área de superfície $z = f(x, y)$ que está sobre R , temos que:

$$A = \iint_R \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dx dy.$$

A fim de facilitar os cálculos iremos demonstrar o teorema para a metade de um fuso, em seguida multiplicaremos por 2 para se obter a área do fuso completo, observe a Figura 4.1 a seguir.

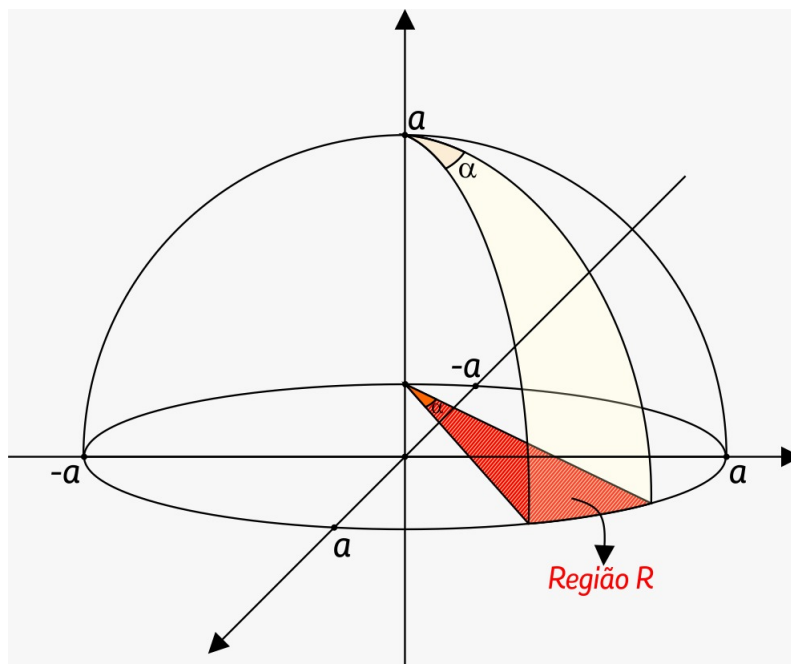


Figura 3.34: Semi esfera

A esfera apresentada na figura possui equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Isolando z na equação e o chamando de $f(x, y)$, temos $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, que é a parte superior da esfera na qual nos atentaremos para fazer os cálculos. Observe que $f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ e $f_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

Atente para o fato de que $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ não estão definidos na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ que é a fronteira da região R no plano xy . Com base no teorema anterior a área do fuso se dá por

$$\iint_R \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

que é uma integral imprópria, pois o integrando possui uma descontinuidade infinita em cada ponto da fronteira de R . Podemos superar essa situação considerando a região R' como sendo limitada a circunferência $x^2 + y^2 = b^2$, onde $b < a$, tomando em seguida o limite quando $b \rightarrow a^-$. Além disso, o cálculo fica simplificado se a integral dupla for calculada por uma integral iterada usando coordenadas polares. Então, sendo A a área do fuso, temos que:

$$A = \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \int_0^\alpha \frac{a}{a^2 - r^2} r d\theta dr \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow A = 2\alpha a \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \frac{r}{a^2 - r^2} dr \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow A = 2\alpha a \lim_{b \rightarrow a^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b \quad (3.12)$$

$$\Rightarrow A = 2\alpha a \lim_{b \rightarrow a^-} [-\sqrt{a^2 - b^2} + a] \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow A = 2\alpha a^2. \quad (3.14)$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.
- [2] LIMA, ELON LAJES. *Medida e forma em geometria*. São Paulo. SBM
- [3] LIMA, ELON LAJES. *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*. 8. ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2006.
- [4] LIMA, ELON LAJES. ET AL. *Temas e Problemas Elementares*. 3. Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2006.
- [5] COURANT, R.; HEBERT, R. *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro. Ciência Moderna, 2000.
- [6] LIU, A. C. F. *Lattice points and pick's theorem*. Mathematics Magazine, v. 52, n. 4, p. 232–235. Published by Mathematical Association of America, Setembro 1979.
- [7] A. L. PEREIRA E S. T. MELO. *Contando Áreas – O Teorema de Pick*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 78, p.36-42, 2º quadrimestre, 2012.
- [8] ALVES, SERGIO. *A Geometria do Globo Terrestre*. Dissertação (II Bial da Sociedade Brasileira de Matemática), Salvador-BA, 2004.

- [9] SILVA, WELDER DAN. *Uma Introdução a Geometria Esférica*. 49 f. Tese de mestrado. Universidade Estadual Paulista, 2015.
- [10] SANTOS, ROBISON DA SILVA. *Elementos da Trigonometria Triangular Esférica*. 75 f. Tese de mestrado. Universidade Federal de Roraima, 2014.
- [11] HEIM, LUCIANE. *Geometria Esférica: Proposta de atividade e conexão com a geografia*. 77 f. Tese de mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2013.
- [12] LÚCIA, VERA. *Um estudo da geometria da esfera nos mapas cartográficos*. 110f. Tese de mestrado. Unicamp/SP, 2009.
- [13] ABREU, RENATA DA COSTA. *Teorema De Pick: Uma Abordagem Para O Cálculo De Áreas De Polígonos Simples* 2015. 85f. Tese de mestrado. Universidade Estadual do Norte Fluminense.
- [14] BRASIL, ORIENTAÇÕES EDUCACIONAIS COMPLEMENTARES AOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN+) CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS. Brasília: MEC, 2006
- [15] BRASIL *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2000.
- [16] BRASIL *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio - PCN+*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2002.
- [17] BRASIL *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006.

- [18] BRASIL *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Disciplina Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 1998.
- [19] LEITHOLD *Cálculo com geometria analítica*. 3. ed. São Paulo. HARBRA, 1990.
- [20] [HTTPS://WWW.GEOGEBRA.ORG/M/QJUMB7MA](https://www.geogebra.org/m/QJUMB7MA)
- [21] [HTTPS://WWW.GEOGEBRA.ORG/M/ZKERYVVA](https://www.geogebra.org/m/ZKERYVVA)
- [22] [HTTPS://WWW.GEOGEBRA.ORG/M/LAHTNV16](https://www.geogebra.org/m/LAHTNV16)
- [23] [HTTP://WWW.TODOSPELAEDUCACAO.ORG.BR/EDUCACAO-NA-MIDIA/INDICE/40903/SO-73-DOS-ALUNOS-ATINGEM-APRENDIZADO-ADEQUADO-EM-MATEMATICA-NO-ENSINO-MEDIO/](http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-na-midia/indice/40903/so-73-dos-alunos-atingem-aprendizado-adequado-em-matematica-no-ensino-medio/)