Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Eduardo Jatobá

Aspecto Geométrico da Elipse (sem usar Cálculo Diferencial)

Natal, 2016

Eduardo Jatobá

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Orientador:
Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana

Natal, 2016

Eduardo Jatobá

Aspecto Geométrico da Elipse (sem usar Cálculo Diferencial)

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: / /

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes
Departamento de Matemática - UFRN

Prof. Dr. Aritmatéia
Departamento de Matemática - UFRN

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Jatobá, Eduardo Gomes.
Aspecto geométrico da elipse (sem usar cálculo diferencial) / Eduardo Gomes Jatobá. - Natal, 2016.
46f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Geometria analítica – Dissertação. 2. Elipse – Dissertação. 3. Aspecto geométrico – Dissertação. I. Santana, Fagner Lemos de. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 514.12

Dedico esse trabalho a minha mãe Maria da Conceição de Araújo Jatobá (in memorian) que sempre me incentivou a estudar Matemática e sempre apostou em mim como professor e ser humano.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter permitido que eu chegasse até aqui, por me dar forças e obstinação nos momentos de dificuldade e por me acalmar nos momentos em que pensei em desistir do Mestrado.

Ao grande amor da minha vida, Cláudia Fragoso, que sempre está ao meu lado, me dá forças , me faz querer ser uma pessoa melhor e foi fundamental para eu prosseguir nessa jornada.

Ao meu pai José Jatobá (amor incondicional), aos meus irmãos Flávia Jatobá e Alexandro Jatobá (amo vocês demais), às minhas sobrinhas tão amadas Maria Cecília e Lara, aos meus cunhados Cid, Klenia e Débora (moram todos no meu coração), ao meus sogros Chagas e Margarida (que são segundos pais para mim) ao meu tio Jatobá que sempre se importou com a minha vida acadêmica e me incentivou bastante e a todos os meus familiares que não citei, mas que, direta ou indiretamente, contribuíram para o meu êxito.

À Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e ao Departamento de Matemática pela oportunidade de podermos cursar esse Mestrado.

Aos professores e tutores do programa de mestrado do PROFMAT, que foram de grande valia para o aprimoramento do meu conhecimento matemático e para o incentivo de estudar sempre mais.

Aos meus colegas de Mestrado, que, juntamente comigo, tanto se empenharam nessa árdua missão, que resultou em uma intensa troca de conhecimentos.

Aos meus amigos queridos que torcem pelo meu sucesso, em especial, Rodrigo Cavalcanti, que é uma grande referência para mim em todos os aspectos.

Ao meu colega Fábio “Balão” que me ajudou demais a concretizar esse trabalho.

Ao meu professor orientador, Dr. Fagner Lemos de Santana, que foi extremamente solícito e paciente comigo, sempre muito sereno e tranquilo. Sem exagero algum, muito do mérito desse documento eu devo ao senhor, professor! Muito obrigado por tudo!

Por fim, gostaria de agradecer a todos que, de alguma forma, me ajudaram ou incentivaram a melhorar o meu conhecimento acadêmico e a alcançar essa conquista tão importante em minha vida!

Resumo

Este trabalho trata da elipse e tem como objetivo principal chegar ao seu esboço sem o uso de conceitos e resultados do Cálculo Diferencial e Integral, o que possibilita o seu entendimento por parte de alunos do ensino médio. Para isso, é apresentada a dedução da chamada equação canônica da elipse, a qual só vale quando a elipse tem algumas características particulares, porém, também é mostrado que através de uma mudança no sistema de coordenadas, qualquer elipse apresentará tais características e poderá ser representada pela equação canônica, a qual é bem mais fácil de manipular.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Analítica; Elipse; Aspecto geométrico.

Abstract

This work deals with the ellipse and has as main objective to get to your graphic sketch without the use of concepts and results of the Differential and Integral Calculus, which enables their understanding by high school students. For this, the deduction of the canonical equation of the ellipse is presented, which is only valid when the ellipse has some particular characteristics, however, it is also shown that through a change in the coordinate system, any ellipse will present such characteristics and may be represented by the canonical equation, which is much easier to handle.

KEYWORDS: Analytic Geometry; Ellipse; Geometric Aspect.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, iremos falar sobre uma das chamadas seções cônicas: a elipse. A elipse é uma seção cônica pelo fato de ser o resultado da interseção entre um cone e um plano. Porém, aqui, vamos tratá-la enquanto lugar geométrico no plano, ou seja, um conjunto de pontos do plano que satisfazem a determinada propriedade, no caso da elipse, ela é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos pré-fixados (chamados focos) é igual a uma constante positiva também pré-fixada.

A elipse possui várias propriedades interessantes com várias aplicações no cotidiano.(para mais detalhes [8]).

Propriedade Refletora A elipse tem a propriedade de que a bissetriz do ângulo formado pelos dois focos e por um ponto qualquer da elipse é perpendicular à tangente à elipse nesse ponto. Como consequência disso, qualquer raio luminoso ou onda sonora, que parta de um dos focos, será refletido pela elipse na direção do outro foco. Segundo esta propriedade, numa hipotética mesa de bilhar elíptica, qualquer choque entre duas bolas, ocorrido em um dos focos (com força suficiente), será refletido e fará bater em uma terceira bola estacionada no outro foco.

A primeira lei de Kepler Esta afirma que a órbita dos planetas ao redor do sol é elíptica, estando o sol em um dos focos. Mais geralmente, no problema de dois corpos gravitacionais, se os dois corpos são ligados um ao outro, as suas órbitas são elipses semelhantes com o baricentro comum, sendo um dos focos de cada elipse. Curiosamente, a órbita de qualquer corpo no quadro de referência do outro, é também uma elipse. Dos seis elementos orbitais necessários para descrever completamente a órbita do planeta, dois são os parâmetros que definem a elipse. Dentro de um sistema solar, os planetas, asteroides, cometas e outros objetos de menor tamanho também percorrem órbitas aproximadamente elípticas ao redor do sol, enquanto que as luas e outros satélites fazem o mesmo ao redor dos planetas.

Perturbação na superfície da água Se a superfície da água é perturbada em um dos focos de um tanque de água elíptico, as ondas circulares geradas pela perturbação na superfície da água, depois de refletir nas paredes, convergem simultaneamente a um único ponto: o segundo foco.

Foco de espelho elíptico Se uma fonte de luz é colocada num foco de um espelho elíptico, todos os raios de luz sobre o plano da elipse são refletidos para o segundo foco. Alternativamente, um espelho cilíndrico com secção transversal elíptica pode ser utilizado para focar a luz proveniente de uma lâmpada fluorescente linear ao longo de uma linha do papel; tais espelhos são usados em alguns scanners de documentos.

Ondas sonoras As ondas sonoras são refletidas de forma semelhante, por isso, em uma grande sala elíptica uma pessoa de pé em um dos focos pode ouvir uma pessoa de pé no outro foco muito bem.

Por tratar-se de uma curva, um ponto de grande interesse sobre a elipse é o seu formato. Em geral, para justificar o formato de uma elipse, precisamos de conceitos e resultados do Cálculo Diferencial, tais como limite, continuidade, derivada e os teoremas do valor intermediário e do valor médio (Para mais detalhes [5, 6, 7]). O objetivo principal desse trabalho é mostrar como é possível esboçar uma elipse sem recorrer a nenhum dos conceitos supracitados. Não há aqui o objetivo de comparar qual a maneira mais fácil de esboçar a elipse (usando ou não a teoria do Cálculo), mas o de mostrar uma abordagem alternativa, a qual pode ser usada em turmas do ensino médio.

No capítulo 1, iremos definir a elipse e, posteriormente, deduzir a equação da mesma em duas situações: os focos da elipse se encontram no eixo x ou no eixo y. Em ambos os casos, a equação, chamada de equação canônica, será deduzida considerando que a origem do plano cartesiano coincide com o centro da elipse. Após a dedução, mostraremos como encontrar a equação da elipse a partir da medida de seu eixo maior e do posicionamento dos seus focos, tendo como referência o plano cartesiano cuja origem coincide com o centro da elipse.

No capítulo 2, iremos mostrar que, quando a origem do sistema de coordenadas não coincidir com o centro de uma determinada elipse e/ou os focos não estiverem sobre um mesmo eixo de coordenadas, podemos recorrer à translação e/ou rotação para encontrarmos um novo sistema de coordenadas de forma que se possa utilizar a equação canônica da elipse. Será explicitado como se relacionam as coordenadas dos pontos em sistemas obtidos por translações e/ou rotações de uma dado sistema. Posteriormente, mostraremos alguns exemplos de como transladar e/ou rotacionar uma elipse.

Finalmente, no capítulo 3, iremos abordar os conceitos de funções crescentes e decrescentes, côncavas e convexas e, a partir desses conceitos, poderemos mostrar que, uma vez que qualquer elipse pode ser colocada na forma canônica a partir de um sistema de coordenadas cartesianas conveniente, conseguiremos esboçar a porção de uma elipse com equação canônica que está no primeiro quadrante e através das simetrias da mesma conseguiremos o seu esboço completo.

CAPÍTULO

1

PRELIMINARES

1.1 Elipse

Como foi dito na introdução, a elipse será definida como um lugar geométrico, ou seja, um conjunto de pontos do plano satisfazendo alguma condição. Tal condição envolverá o conceito de distância entre pontos do plano.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas no plano, dados dois pontos $P = (x, y)$ e $Q = (z, t)$, temos que a distância entre P e Q, denotada por $d(P,Q)$, é dada por:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} \tag{1.1}$$

Vale notar que do teorema de Pitágoras segue que $d(P,Q)$ é o comprimento do segmento de reta que liga P e Q.

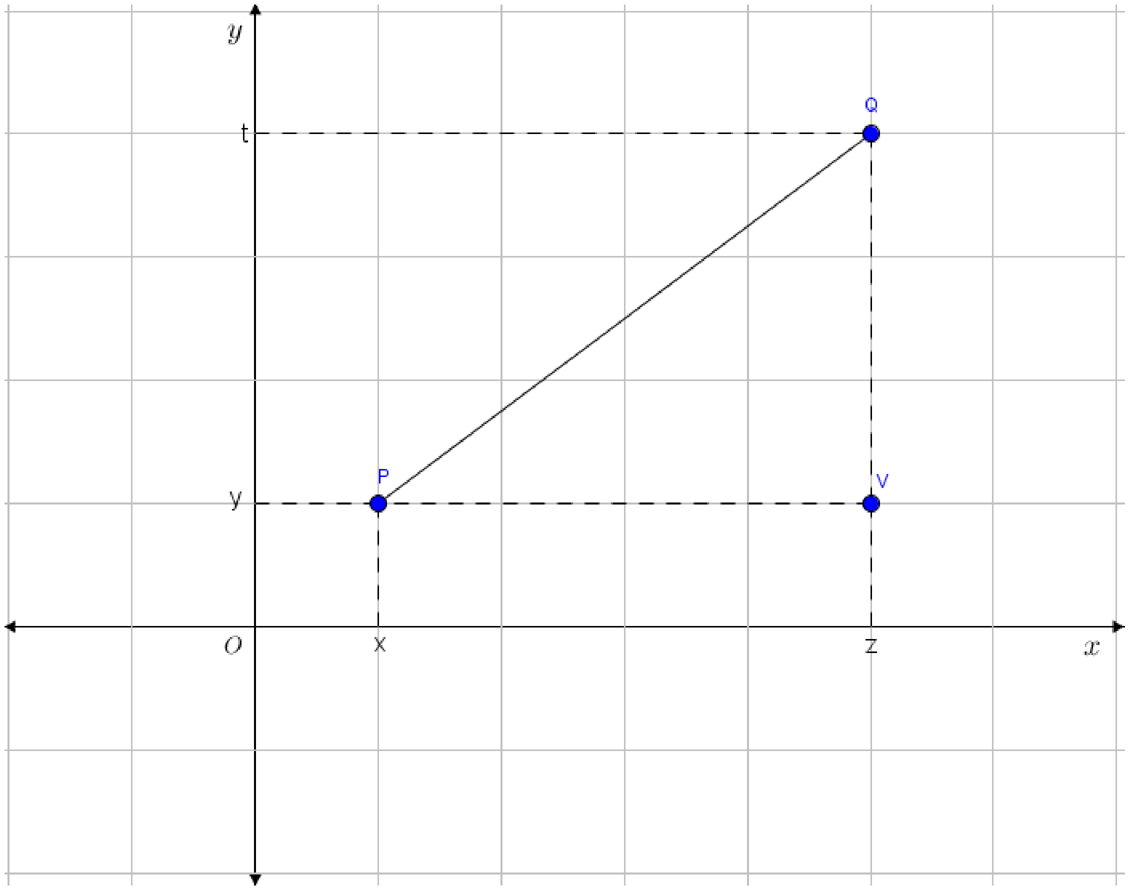


Figura 1.1

No triângulo PVQ, o cateto PV tem comprimento "$z–x$" e VQ tem comprimento "$t–y$" e, assim, (1.1) segue diretamente do teorema de Pitágoras.

Visto isso, podemos apresentar a definição de elipse:

Definição 1.1 *Considere dois pontos distintos do plano F_1 e F_2 e um número real $a > 0$ tal que $2a > d(F_1, F_2)$. A elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior medindo $2a$ é o conjunto dos pontos P do plano que satisfazem:*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \tag{1.2}$$

Obs.: A exigência de que $2a > d(F1, F2)$ garante que a elipse não seja o conjunto vazio (caso $2a < d(F1, F2)$) nem um segmento de reta (caso $2a = d(F1, F2)$)

É claro que 1.2 pode ser considerada uma equação da elipse, pois um ponto P do plano está na elipse se, e somente se, satisfaz 1.2. Porém, tal equação pode assumir formas um tanto quanto complicadas, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1.1 *Considere a elipse de focos (0,0) e (2,2) com eixo maior medindo 4. Uma equação que representa essa elipse é:* $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=4.$

No exemplo acima, podemos simplificar a equação eliminando as raízes quadradas, como segue:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\right)^2 &= \left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\\
(x-2)^2+(y-2)^2 &= 16-8\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\\
x^2-4x+4+y^2-4y+4 &= 16-8\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\\
8\sqrt{x^2+y^2} &= 4x+4y+8\\
(2\sqrt{x^2+y^2})^2 &= (x+y+2)^2\\
4(x^2+y^2) &= x^2+y^2+4+2xy+4x+4y\\
4x^2+4y^2 &= x^2+y^2+4x+4y+2xy+4\\
3x^2+3y^2-4x-4y-2xy-4 &= 0.
\end{aligned}$$

Ainda assim, a equação encontrada pode ser de difícil manuseio, principalmente pela presença do termo “xy” (para maiores detalhes, veja [1, 3, 4]) . A seguir, vamos deduzir a equação de uma elipse quando esta apresenta focos satisfazendo uma certa condição. Neste caso, a equação da elipse apresenta um formato bastante simples e é, por isso, chamada de equação canônica da elipse.

Considere a elipse de focos $F_1(c,0)$ e $F_2(-c,0)$, com $c>0$ e eixo maior medindo $2a$, com $2a>d(F1,F2)\Leftrightarrow 2a>2c\Leftrightarrow a>c$. Neste caso, os focos da elipse estão no eixo x e o ponto médio do segmento de reta ligando F_1 e F_2 coincide com a origem do sistema de coordenadas, ou seja, o eixo y é a mediatriz de F_1 e F_2. Vamos mostrar que um ponto $P(x,y)$ está nessa elipse se, e somente se: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Note que $b<a$.

Primeiramente, suponha que o ponto $P(x,y)$ esteja na elipse, ou seja, $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a\\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \qquad (1.3)\\
\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
4a^2 - 4cx &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2} && (1.5)\\
(a^2-cx)^2 &= a^2[(x-c)^2+y^2] && (1.6)\\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2[x^2-2cx+c^2+y^2] \\
a^4 \cancel{-2a^2cx} + c^2x^2 &= a^2x^2 \cancel{-2a^2cx} + a^2c^2 + a^2y^2 \\
a^4 - a^2c^2 &= a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 \\
a^2(a^2-c^2) &= x^2(a^2-c^2) + a^2y^2.
\end{aligned}
$$

Substituindo $a^2 - c^2$ por b^2, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2.$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2, podemos escrever:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para provar que se $P(x, y)$ é tal que $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, então P está na elipse, basta notar que todos os passos da dedução anterior são reversíveis. Todas as implicações reversas são triviais, exceto (1.6) $\Rightarrow$ (1.5) e (1.4) $\Rightarrow$ (1.3). Isso se deve ao fato de que para provar que (1.5) $\Rightarrow$ (1.6) e (1.3) $\Rightarrow$ (1.4) elevamos os dois membros das igualdades ao quadrado. Logo, para provarmos que (1.6) $\Rightarrow$ (1.5) e (1.4) $\Rightarrow$ (1.3) devemos extrair a raiz quadrada dos membros de (1.6) e de (1.4). A questão aqui é que nas duas igualdades temos termos elevados ao quadrado. Em (1.6) temos $(a^2 - cx)^2$ em um dos lados e em (1.4) temos $(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$. Como sabemos, $\sqrt{k^2} = |k|$, mas ao extrairmos a raiz quadrada de tais termos, não podemos encontrar termos com módulo, caso contrário, não poderíamos continuar revertendo as implicações.

A rigor, precisamos mostrar que se $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, então $a^2 - cx \geq 0$ e $2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \geq 0$. De fato, sendo $0 \leq c < a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x^2 \leq a^2 \\
&\Rightarrow \quad |x| \leq a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -a \leq x \leq a \\
&\Rightarrow \quad a^2 - cx \geq a^2 + c(-a) = a^2 - ca > a^2 - aa \\
&\Rightarrow \quad a^2 - cx \geq 0.
\end{aligned}
$$

E:

$$\frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad y^2 \leq b^2 \\
&\Rightarrow \quad -b^2 + y^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 < a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 \\
&\Rightarrow \quad (x+c)^2 + y^2 < 4a^2 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} < 2a.
\end{aligned}
$$

Com isso, concluímos que $P(x, y)$ está na elipse se, e somente se, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou seja, esta é a equação da elipse.

Outro caso que vale mencionar é quando os focos são $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$, com $c > 0$, e a medida do eixo maior é $2b$, onde $b > c$. Neste caso, de modo inteiramente análogo ao que já foi feito, temos que a equação também tem a forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, porém, aqui, temos $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ e $a < b$.

Exemplo 1.2 *Determine a equação da elipse de focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$ e de eixo maior medindo 10.*

Como os focos da elipse estão sobre o eixo x, o eixo maior da elipse mede $2a$ com $a > 0$ e $2a > d(F_1, F_2)$. Além disso, $a > b$, onde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Como o eixo maior mede 10 unidades de comprimento, $2a = 10$, ou seja, $a = 5$. A distância focal $2c$ mede 6 unidades de comprimento, logo, $c = 3$. Sendo assim, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
& b = \sqrt{a^2 - c^2} \\
\Rightarrow\ & b = \sqrt{5^2 - 3^2} \\
\Rightarrow\ & b = \sqrt{25 - 9} \\
\Rightarrow\ & b = 4.
\end{aligned}
$$

Como a equação da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos que:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Exemplo 1.3 *Determine a equação da elipse de focos $F_1(0,6)$ e $F_2(0,-6)$ e de eixo maior medindo 20.*

Como os focos da elipse estão sobre o eixo y, o eixo maior da elipse mede $2b$ com $b > 0$ e $2b > d(F_1, F_2)$. Além disso, $b > a$, onde $a = \sqrt{b^2 - c^2}$. Como o eixo maior mede 20 unidades de comprimento, $2b = 20$, ou seja, $b = 10$. A distância focal $2c$ mede 12 unidades de comprimento, logo, $c = 6$. Sendo assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{b^2 - c^2} \\ a &= \sqrt{10^2 - 6^2} \\ a &= \sqrt{100 - 36} \\ a &= 8. \end{aligned}$$

Como a equação da elipse é da forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, temos que:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

Obs.: Considerando a elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, vemos facilmente que os pontos $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(0,b)$ e $B_2(0,-b)$ estão na elipse (basta notar que suas coordenadas satisfazem a equação). Tais pontos são chamados vértices da elipse. No capítulo 3, quando tratarmos do esboço da elipse, veremos a importância destes pontos.

CAPÍTULO

2

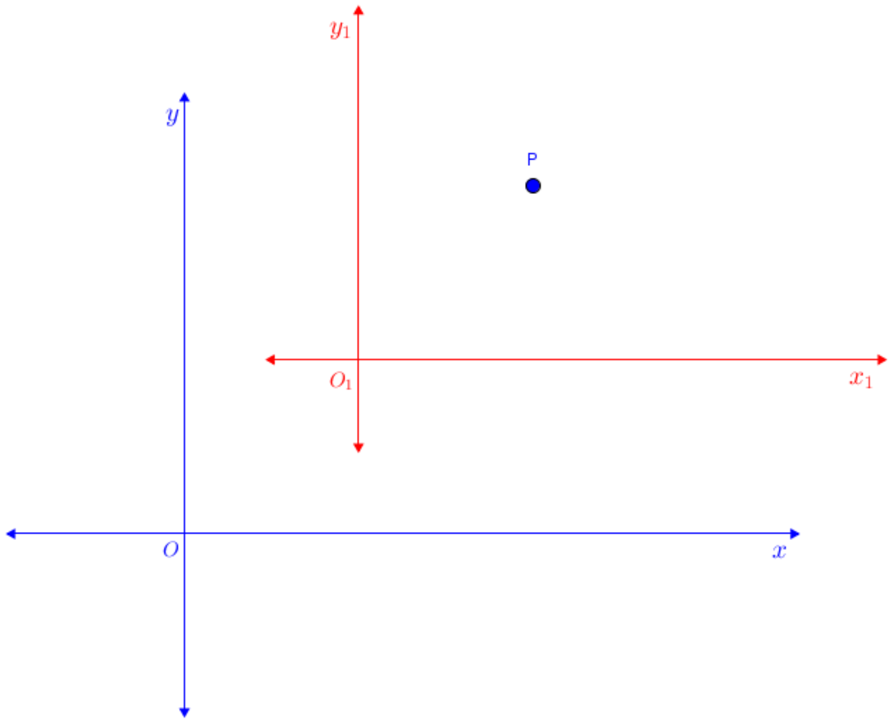
TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE EIXOS

Como vimos no exemplo 1.1, a equação de uma elipse pode ter uma forma de difícil manuseio. A equação canônica obtida no capítulo anterior representa apenas elipses cujos focos estão sobre um dos eixos coordenados e o centro (ponto médio do segmento que liga os focos) coincide com a origem do sistema de coordenadas. Quando não tivermos essa situação canônica, podemos considerar um novo sistema de coordenadas de forma que os focos estejam sobre um dos eixos e o centro coincida com a origem. Este novo sistema é obtido por meio de uma translação e/ou rotação dos eixos coordenados.

Nas próximas seções, vamos ver como funcionam estes "movimentos" entre os eixos coordenados e, principalmente, como se relacionam as coordenadas dos pontos em relação aos sistemas.

2.1 Translação de Eixos

Considere dois sistemas de coordenadas: o sistema xOy, e o sistema $x_1O_1y_1$, cujos eixos são paralelos aos eixos do sistema xOy. O sistema $x_1O_1y_1$ pode ser imaginado como uma translação de xOy, conforme mostra a figura abaixo.



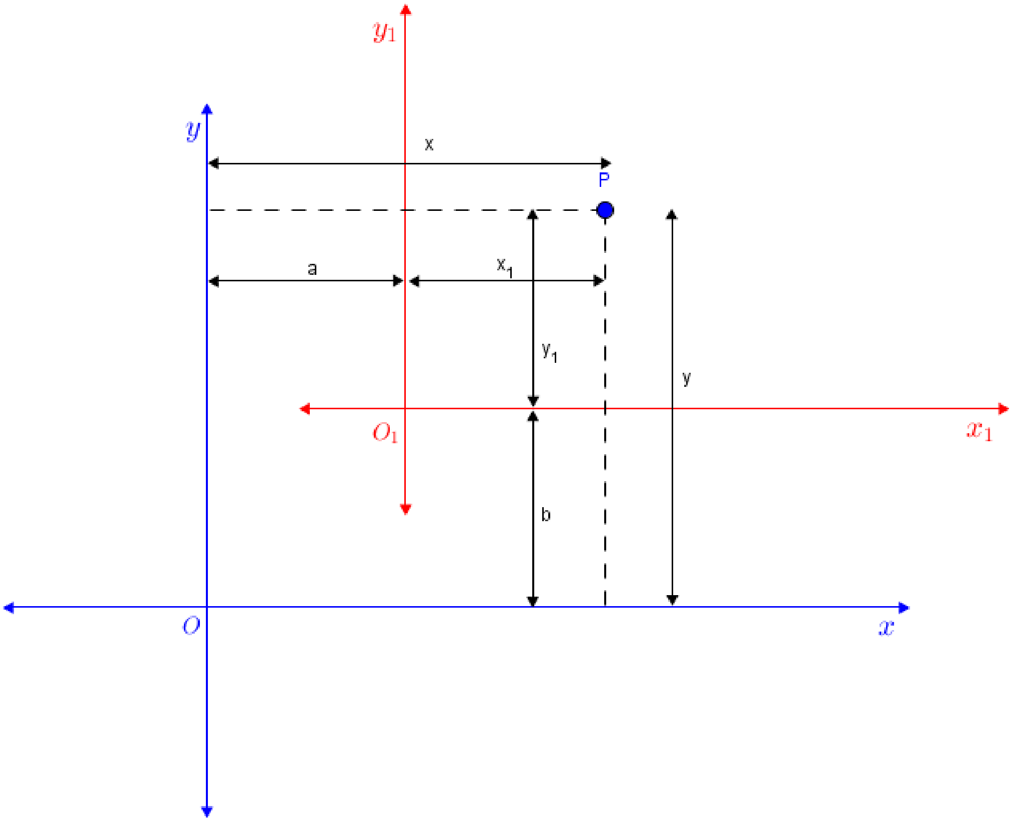
Se P é um ponto do plano, podemos tomar suas coordenadas em relação a cada um dos dois sistemas. Considere $O_1(a, b)$ como a origem do sistema $x_1O_1y_1$.

Se (x, y) são as coordenadas de P em relação ao sistema xOy e (x_1, y_1) são as coordenadas de P em relação ao sistema $x_1O_1y_1$, temos:

$x = x_1 + a$

$y = y_1 + b$

onde (a, b) são as coordenadas de O_1 em relação ao sistema xOy. De fato, a figura abaixo ilustra o que ocorre no caso em que todas as coordenadas (x, y, x_1, y_1, a, b) são positivas, mas argumentos semelhantes justificam os outros casos.



Explicitando-se x_1 e y_1, obtemos

$$x_1 = x - a$$
$$y_1 = y - b.$$

Estas equações permitem passar das coordenadas de um ponto P no sistema xOy para as coordenadas de P com relação ao sistema $x_1O_1y_1$.

Note que uma translação de um sistema de coordenadas fica completamente determinada se conhecermos as coordenadas da origem do novo sistema.

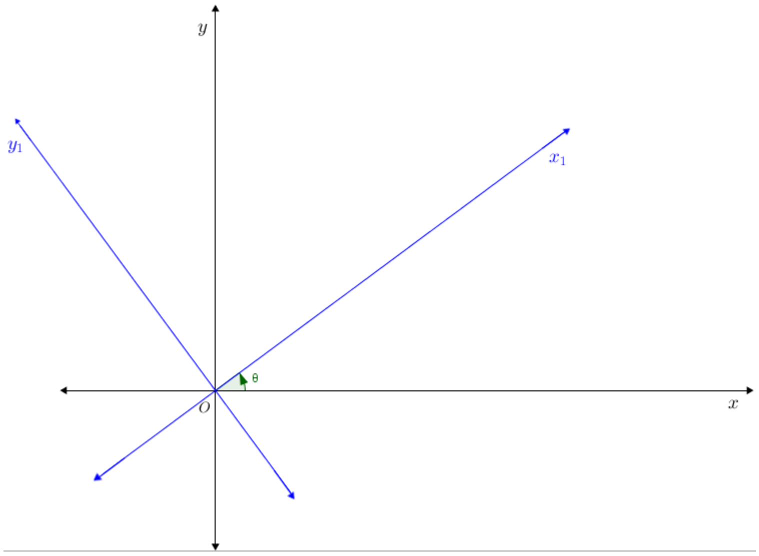
Exemplo 2.1 *Seja o ponto P (4,-1). Efetuando-se uma translação tal que a nova origem é O_1 (-2,3), em relação ao novo sistema, as coordenadas de P passam a ser*

$$x_1 = x - a \qquad y_1 = y - b$$
$$x_1 = 4 - (-2) \qquad y_1 = -1 - 3$$
$$x_1 = 6 \qquad y_1 = -4$$

ou seja, P, em relação ao novo sistema, possui coordenadas P'(6,-4).

2.2 Rotação de Eixos

Consideremos o sistema de coordenadas xOy e seja x_1Oy_1 o sistema de coordenadas obtido de xOy por uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, como mostra a figura a seguir:

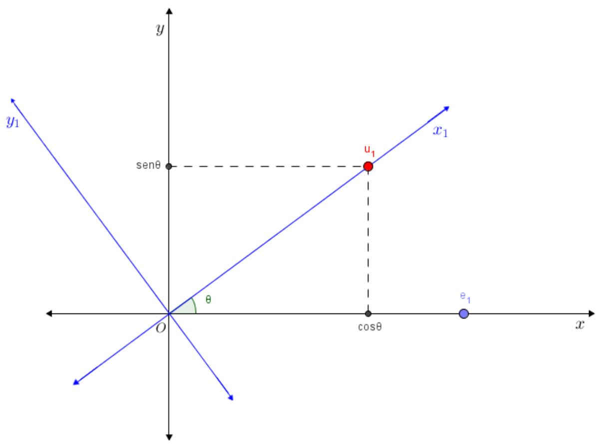


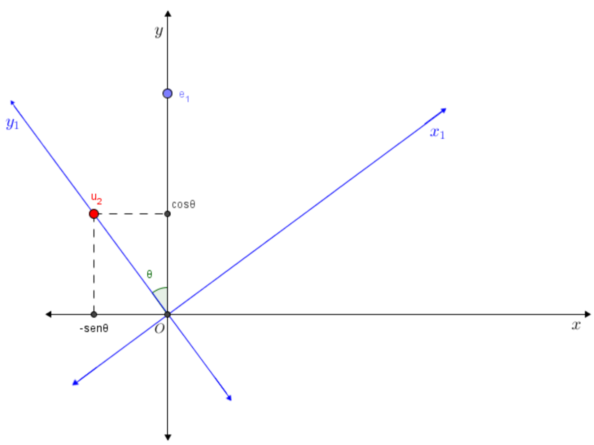
Sejam (x, y) e (x_1, y_1) as coordenadas de um ponto P do plano, em relação aos sistemas xOy e x_1Oy_1, respectivamente.

Nosso objetivo é escrever x_1 e y_1 em função de x, y e do ângulo $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Uma rotação de um ângulo θ transforma os pontos $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ nos pontos u_1 e u_2, onde

$u_1 = (cos\theta, sen\theta) = cos\theta e_1 + sen\theta e_2$

$u_2 = (-sen\theta, cos\theta) = -sen\theta e_1 + cos\theta e_2$





Note que:

$P = (x, y) = xe_1 + ye_2.$

Em relação ao sistema x_1Oy_1, as coordenadas de u_1 e u_2 são, respectivamente, $(1,0)$ e $(0,1)$, logo: $P(x_1, y_1) = x_1u_1 + y_1u_2$.
Assim:

$$\begin{aligned} xe_1 + ye_2 &= x_1u_1 + y_1u_2 = x_1(cos\theta, sen\theta) + y_1(-sen\theta, cos\theta) \\ \Leftrightarrow (x,y) &= (x_1cos\theta - y_1sen\theta, x_1sen\theta + y_1cos\theta) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = x_1cos\theta - y_1sen\theta \\ y = x_1sen\theta + y_1cos\theta \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Estas equações em 2.1 explicitam as coordenadas (x,y) em função de (x_1,y_1) e θ. Note que estas equações podem ser representadas pela seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

A matriz $M = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ é inversível e sua inversa é $M^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, assim;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= M\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= M^{-1}M\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} cos^2\theta + sen^2\theta & cos\theta sen\theta - sen\theta cos\theta \\ sen\theta cos\theta - cos\theta sen\theta & sen^2\theta + cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_1 = xcos\theta + ysen\theta$$
$$y_1 = -xsen\theta + ycos\theta.$$

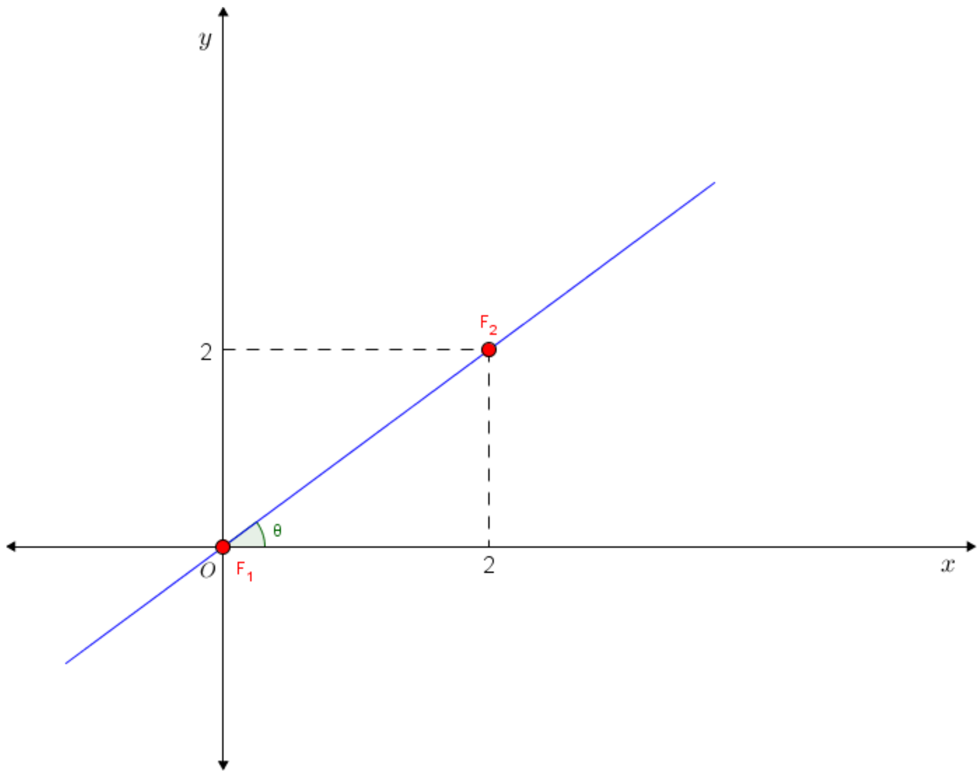
Exemplo 2.2 *Seja o ponto $P(5,3)$. Efetuando-se uma rotação de 30^o nos eixos, quais as coordenadas de P em relação ao novo sistema?*

$x_1 = xcos\theta + ysen\theta$
$x_1 = 5\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2}$
$x_1 = \frac{5\sqrt{3}+3}{2}$
$y_1 = -xsen\theta + ycos\theta$
$y_1 = -5\frac{1}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2}$
$y_1 = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$
Ou seja, em relação ao novo sistema, $P\left(\frac{5\sqrt{3}+3}{2}, \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exemplo 2.3 *Encontre um novo sistema de coordenadas de modo que a equação da elipse cujos focos se localizam nos pontos (0,0) e (2,2) e cujo eixo maior mede 4 unidades de comprimento tenha a forma canônica.*

Os focos desta elipse não estão ambos sobre um dos eixos e, obviamente, o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ não é a origem.

Em casos como este, devemos considerar primeiro um novo sistema de coordenadas x_1Oy_1 de modo que os focos estejam sobre um dos eixos, obtido do sistema xOy por meio de uma rotação de eixos. Como os focos são $F_1(0,0)$ e $F_2(2,2)$, ambos estão na reta $y = x$.

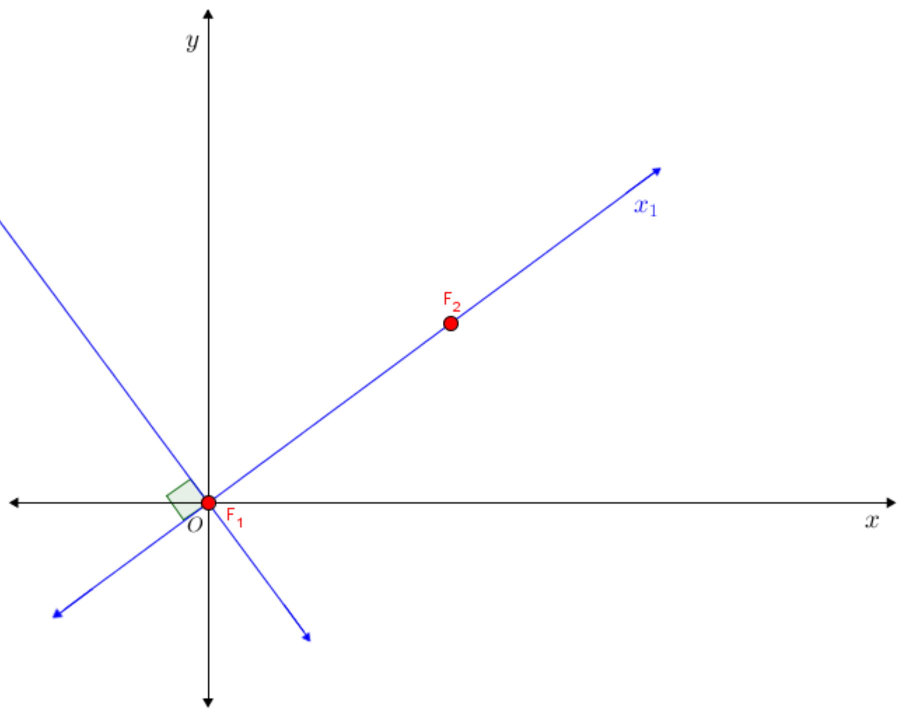


O ângulo entre o eixo x e esta reta, no sentido anti-horário, é $\frac{\pi}{4}$, logo, considere x_1Oy_1 obtido de xOy por meio da rotação, no sentido anti-horário, de $\theta = \frac{\pi}{4}$. As equações que descrevem esta rotação são:

$$\begin{cases} x = x_1 cos\frac{\pi}{4} - y_1 sen\frac{\pi}{4} \\ y = x_1 sen\frac{\pi}{4} + y_1 cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \end{cases}$$



Neste novo sistema, os focos estão sobre o eixo x_1 e suas coordenadas (em relação a x_1Oy_1) são: $F_1(0,0)$

Para $F_2(2,2)$, teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2cos\frac{\pi}{4} + 2sen\frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow x_1 &= 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2sen\frac{\pi}{4} + 2cos\frac{\pi}{4} \\
\Rightarrow x_1 &= -2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Rightarrow y_1 &= 0, \text{ ou seja, } F_2(2\sqrt{2}, 0).
\end{aligned}
$$

Ainda não temos a situação canônica, pois a origem de x_1Oy_1 não é o ponto médio Q de $\overline{F_1F_2}$. Em Relação a x_1Oy_1, as coordenadas de Q são:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1cos\frac{\pi}{4} + 1sen\frac{\pi}{4} \\
\Rightarrow x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Rightarrow x_1 &= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -1sen\frac{\pi}{4} + 1cos\frac{\pi}{4} \\
\Rightarrow x_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Rightarrow y_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, $Q(\sqrt{2}, 0)$.

Dessa forma, considere o sistema $x_2O_2y_2$ obtido pela translação de x_1Oy_1 que leva a origem para o ponto $O_2 = Q(\sqrt{2}, 0) = (c, d)$, a qual é descrita por:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_2 + \sqrt{2} \quad y_1 = y_2 + 0 \text{ ou} \\
&x_2 = x_1 - \sqrt{2} \qquad y_2 = y_1
\end{aligned}
$$

Logo, Q = (0,0), no sistema $x_2O_2y_2$.

Neste novo sistema $x_2O_2y_2$ temos a situação canônica. Assim, a equação da elipse em relação a x_2Oy_2 é da forma $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$.

No exemplo 1.1 do capítulo 1 encontramos a seguinte equação, em relação a xOy, desta elipse $3x^2 + 3y^2 - 4x - 4y - 2xy - 4 = 0$.

Em relação ao sistema x_1Oy_1, esta equação assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)\right]^2+3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)\right]^2 &- 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)\right]-4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)\right]\\
-2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1)\right]^2-4 &= 0\\
\Rightarrow \frac{3}{2}(x_1^2-2x_1y_1+y_1^2+x_1^2+2x_1y_1+y_1^2) &- 2\sqrt{2}(x_1-y_1+x_1-y_1)-(x_1^2-y_1^2)-4=0\\
\Rightarrow \frac{3}{2}(2x_1^2+2y_1^2) &- 4\sqrt{2}x_1-x_1^2+y_1^2-4=0\\
\Rightarrow 2x_1^2-4\sqrt{2}x_1+3y_1^2-4 &= 0\\
\Rightarrow 2(x_1^2-2\sqrt{2}x_1+2-2)+3y_1^2-4 &= 0\\
\Rightarrow 2(x_1-\sqrt{2})^2+3y_1^2 &= 8
\end{aligned}$$

No sistema de coordenadas $x_2O_2y_2$, essa equação fica na seguinte forma:

$$2x_2^2+3y_2^2=8 \Leftrightarrow \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{\frac{8}{3}}=1.$$

Assim, obtivemos uma equação canônica para esta elipse.

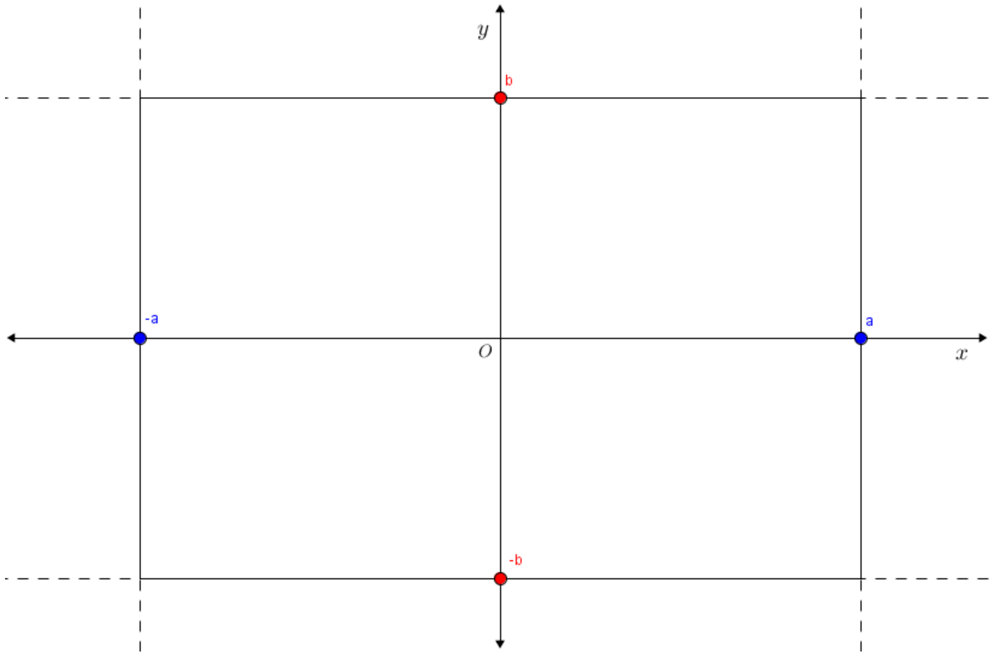
CAPÍTULO

3

ESBOÇO DA ELIPSE

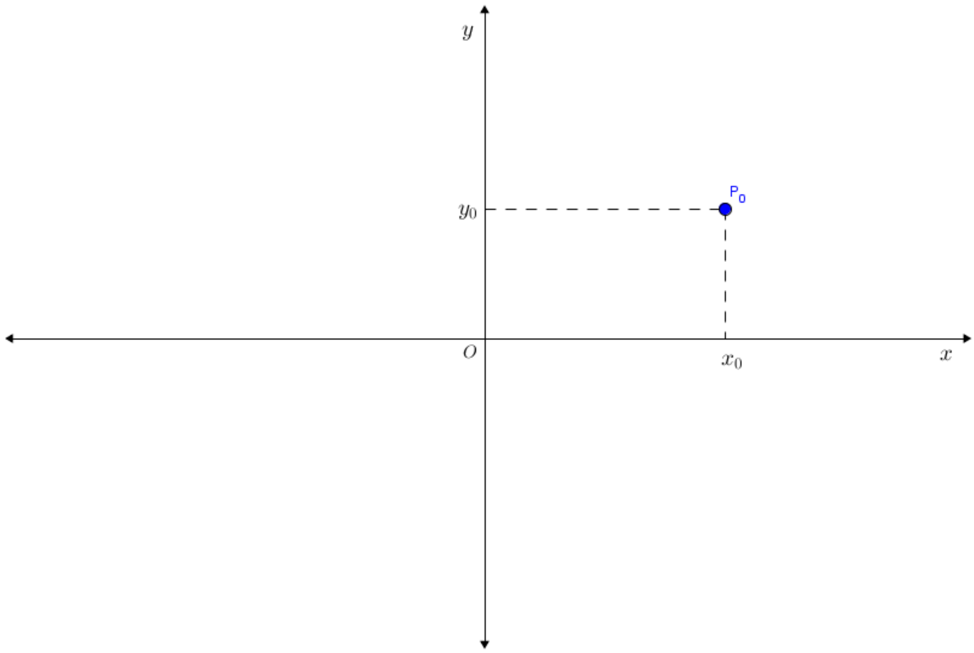
Como foi visto no capítulo anterior, sempre é possível encontrar um sistema de coordenadas de modo que a equação da elipse assume a forma canônica $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Dessa forma, se queremos apenas tratar de questões geométricas, podemos considerar apenas elipses como esta. No que segue, vamos fazer várias considerações que nos possibilitarão fazer um esboço convincente da elipse.

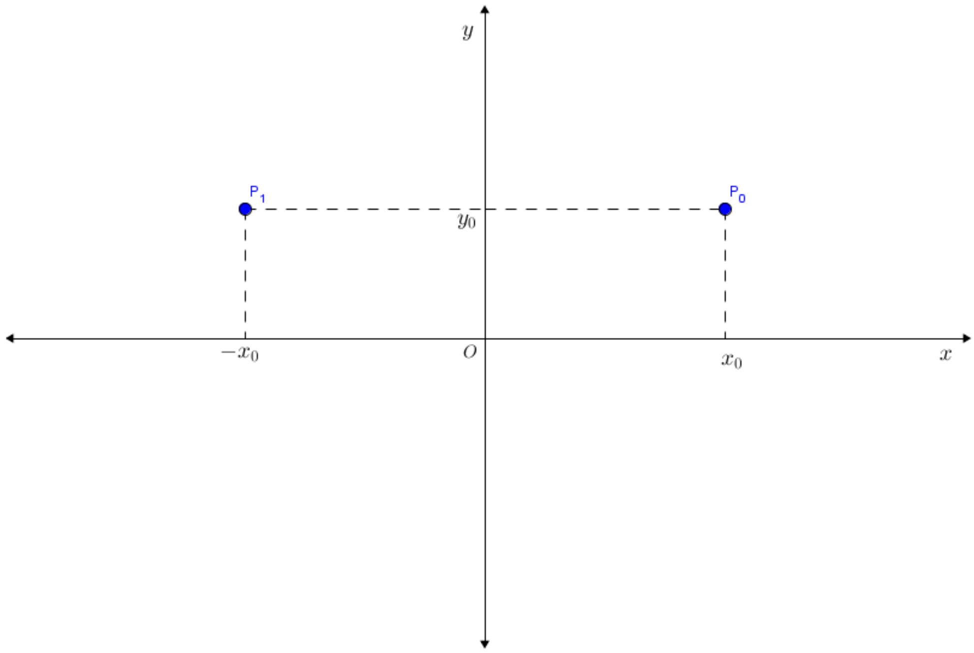
Considere a elipse ϵ de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Note que se um ponto $P(x,y)$ está nessa elipse, então x não pode ser maior do que a, nem menor do que $-a$, ou seja, devemos ter $|x| \leq a$. De fato, se $x > a$ (ou $x < -a$), teríamos $x^2 > a^2$, logo $\dfrac{x^2}{a^2} > 1$. Como $\dfrac{y^2}{b^2}$ é um número não negativo para qualquer $y \in \mathbb{R}$, então $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \geq \dfrac{x^2}{a^2} > 1$, assim, $P(x,y)$ não estaria na elipse. Do mesmo modo, prova-se que se $P(x,y)$ está na elipse, então $-b < y < b$, ou seja, $|y| \leq b$. Com isso, já podemos concluir que a elipse, ou seja, os pontos que satisfazem $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, estão contidos na região limitada pelas retas $x=-a$, $x=a$, $y=-b$ e $y=b$, isto é, a elipse está contida no retângulo que aparece na figura abaixo:

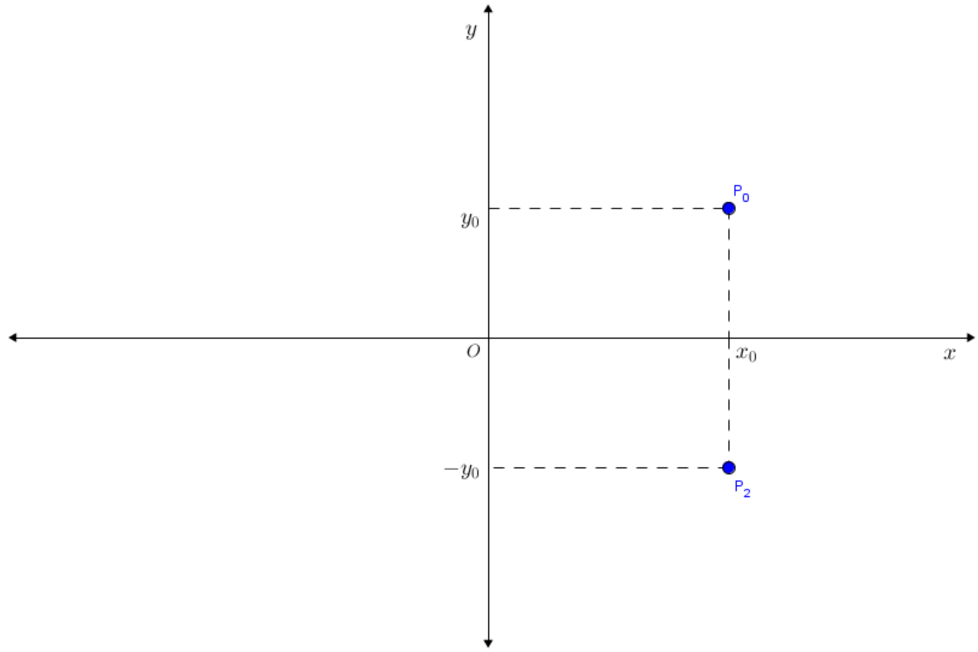


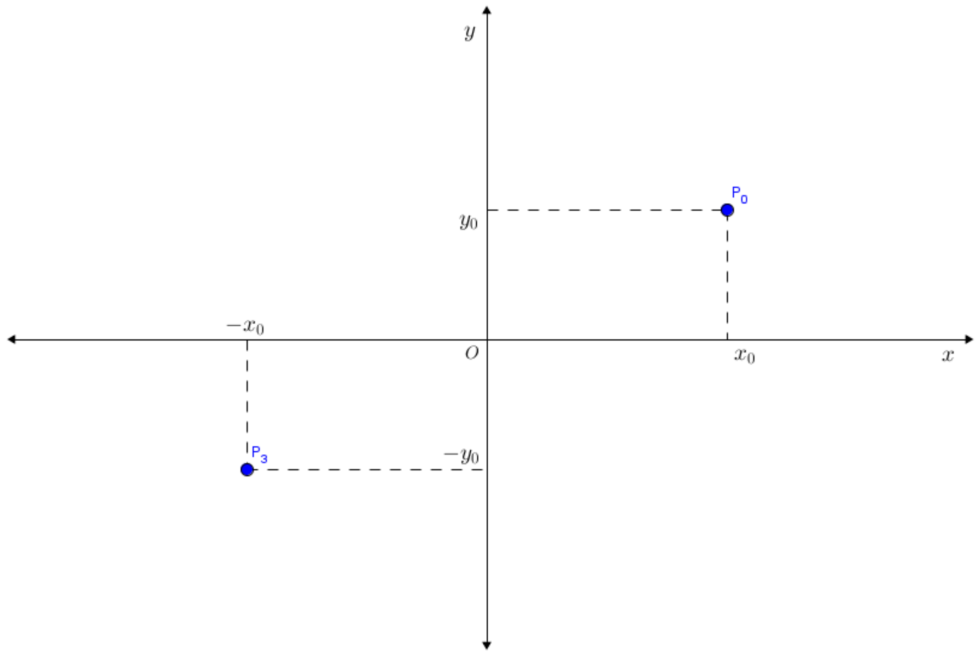
Note que os vértices da elipse também estão na borda do retângulo. Na verdade, os vértices da elipse são os únicos pontos dela que também estão na borda do retângulo. De fato, a borda deste retângulo é formada por quatro segmentos de reta contidos, cada um, em uma das quatro retas mencionadas acima. Neste caso, se $P(x,y)$ está na elipse e na reta $x=-a$, então $P(-a,y)$ e $\dfrac{(-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow 1+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow y=0$, logo $P(-a,0)$, o qual é um dos vértices da elipse.

Do mesmo modo, mostra-se que os outros pontos da elipse que também estão na borda do retângulo são $(a,0)$, $(0,-b)$ e $(0,b)$, os quais são os outros vértices da elipse. Outra questão importante a ser abordada trata das simetrias da elipse. Seja $P_o(x_o,y_o)$ um ponto da elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Como $z^2=(-z)^2$ para todo $z\in\mathbb{R}$, os pontos $P_1(-x_o,y_o)$, $P_2(x_o,-y_o)$ e $P_3(-x_o,-y_o)$ também estão na elipse.


y
P_0
y_0
O
x_0
x


y
P_1
P_0
y_0
$-x_0$
O
x_0
x

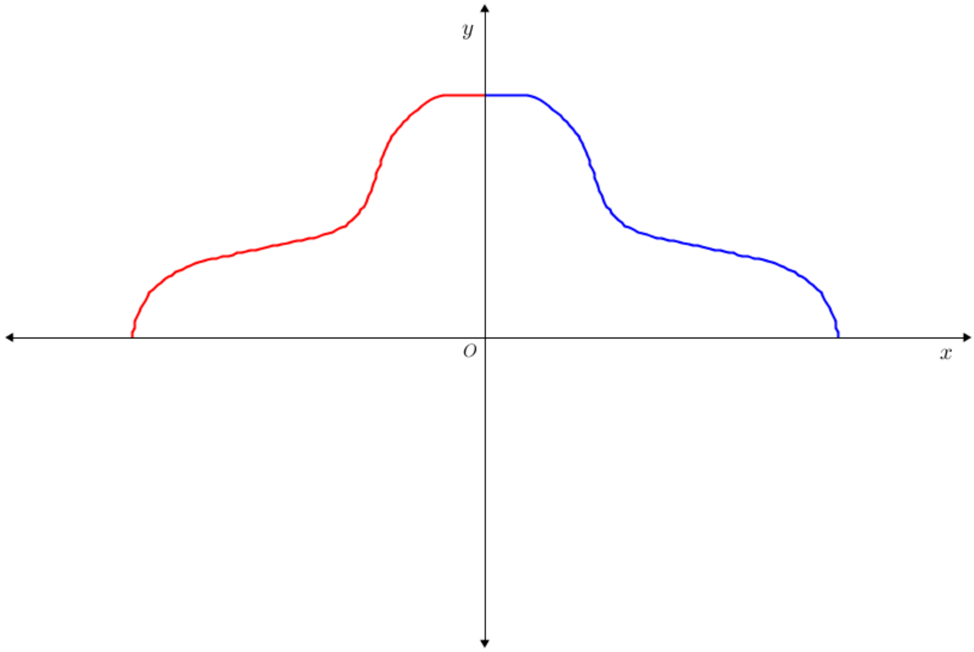


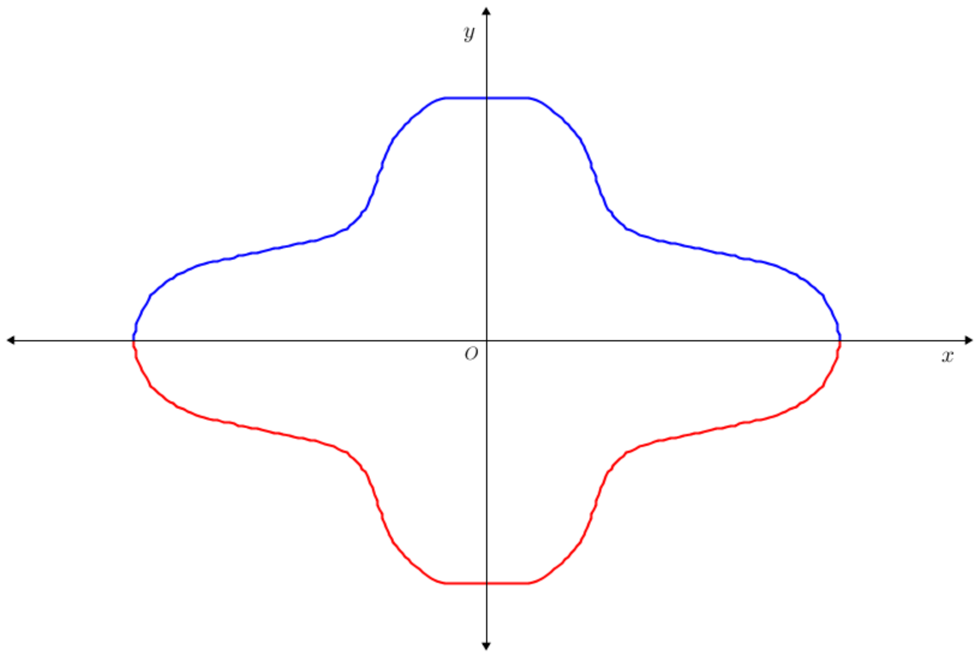


Isso significa que se um ponto P_o está na elipse, então seu simétrico P_1 em torno do eixo y e o seu simétrico P_2 em torno do eixo x também estão na elipse. Além destes, o seu simétrico P_3 em relação à origem O também está na elipse.

Dessa forma, a porção da elipse que está no segundo quadrante é apenas uma reflexão da porção que está no primeiro quadrante.

Com isso, temos a porção da elipse que está acima do eixo x. A porção abaixo do eixo x é uma reflexão da porção que está acima. Sendo assim, se tivermos o esboço da porção da elipse que está no primeiro quadrante, poderemos obter o esboço completo da elipse. As figuras abaixo mostram como fazer isso com uma curva que possui as mesmas simetrias de uma elipse, mas que definitivamente não é uma elipse.





Por fim, podemos notar que para cada $-a < x_o < a$, existem dois valores de y tais que o ponto $P(x_o, y)$ está na elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Basta notar que $y_o = b\sqrt{1 - \dfrac{x_o^2}{a^2}}$ e $y_1 = -b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ são tais que $P_o(x_o, y_o)$ e $P_1(x_o, y_1)$ estão na elipse. Dessa forma, podemos concluir que a elipse não é o gráfico de uma função (y como função de x, e, do mesmo modo, prova-se que também não é gráfico de x como função de y). Porém, a porção da elipse que está no primeiro quadrante é o gráfico da função $f : [0, a] \to [0, b]$ dada por $f(x) = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$. Sendo assim, vamos esboçar o gráfico dessa função. Para isso, precisaremos tratar dos seguintes conceitos referentes a funções: funções crescentes, decrescentes, convexas e côncavas.

3.1 Funções Crescentes e Decrescentes

Definição 3.1 *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função, onde $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é crescente quando para quaisquer $c, d \in A$, com $c < d$, tivermos $f(c) < f(d)$. Se para quaisquer $c, d \in A$, com $c < d$ tivermos $f(c) > f(d)$, dizemos que f é decrescente.*

Exemplo 3.1 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ é crescente.*

De fato, se $c, d \in \mathbb{R}$ e $c < d$, então $f(c) = c < d = f(d)$.

Exemplo 3.2 *$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^2$ é crescente* ($\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$).

De fato, sejam $c, d \in \mathbb{R}^+$, com $c < d$. Se $c = 0$, então $f(c) = f(0) = 0^2 < d^2 = f(d)$. Considere o caso $0 < c < d$. Temos $f(d) – f(c) = d^2 - c^2 = (d + c)(d – c)$. Como c e d são números positivos, então $c + d > 0$ e como $c < d$, temos $d – c > 0$, assim $d^2 – c^2 = (d + c)(d – c) > 0 \Leftrightarrow d^2 – c^2 > 0 \Leftrightarrow f(d) – f(c) > 0 \Leftrightarrow f(c) < f(d)$. Note que a função $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é decrescente.

Exemplo 3.3 *Se $f : A \to B$ é uma bijeção crescente, então a sua inversa $f^{-1} : B \to A$ também é crescente (aqui $A, B \subset \mathbb{R}$).*

De fato, sejam $c, d \in B$, com $c < d$. Temos $c = f(t)$ para algum $t \in A$ e $d = f(z)$ para algum $z \in A$, logo $f(t) < f(z)$. Como f é crescente, devemos ter $t < z$ e $f^{-1}(c) = t$ e $f^{-1}(d) = z$, logo $f^{-1}(c) < f^{-1}(d)$ e f^{-1} é crescente.

Do exemplo 3.3 acima, segue que a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(x) = \sqrt{x}$ é crescente, pois é a inversa de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; $f(x) = x^2$.

A seguir, mostraremos que a função que tem como gráfico a porção da elipse no 1^o quadrante é decrescente.

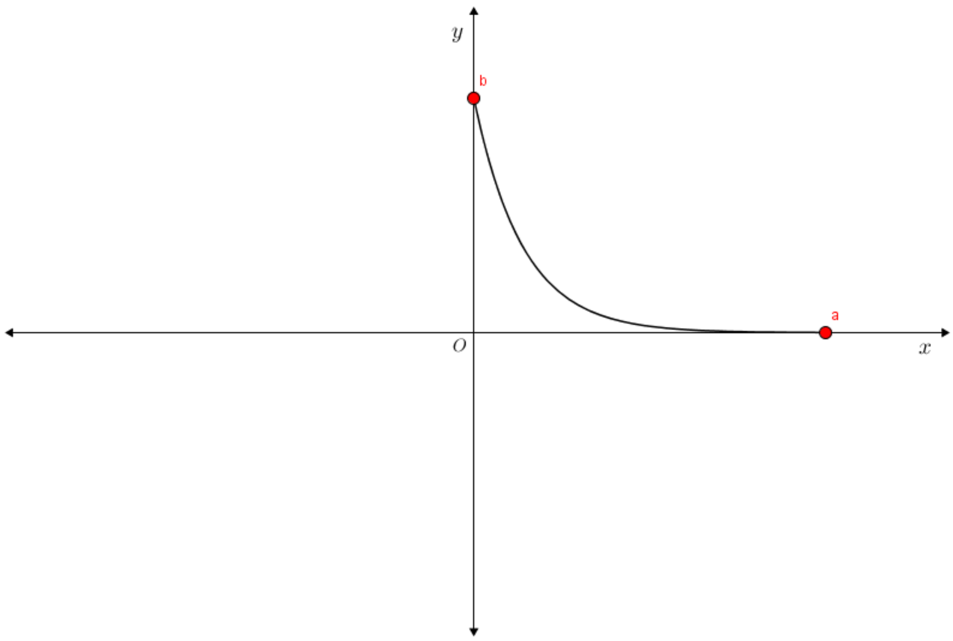
Teorema 3.1 *A função $f : [0, a] \to [0, b]$ dada por $f(x) = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, onde $a > 0$ e $b > 0$, é decrescente.*

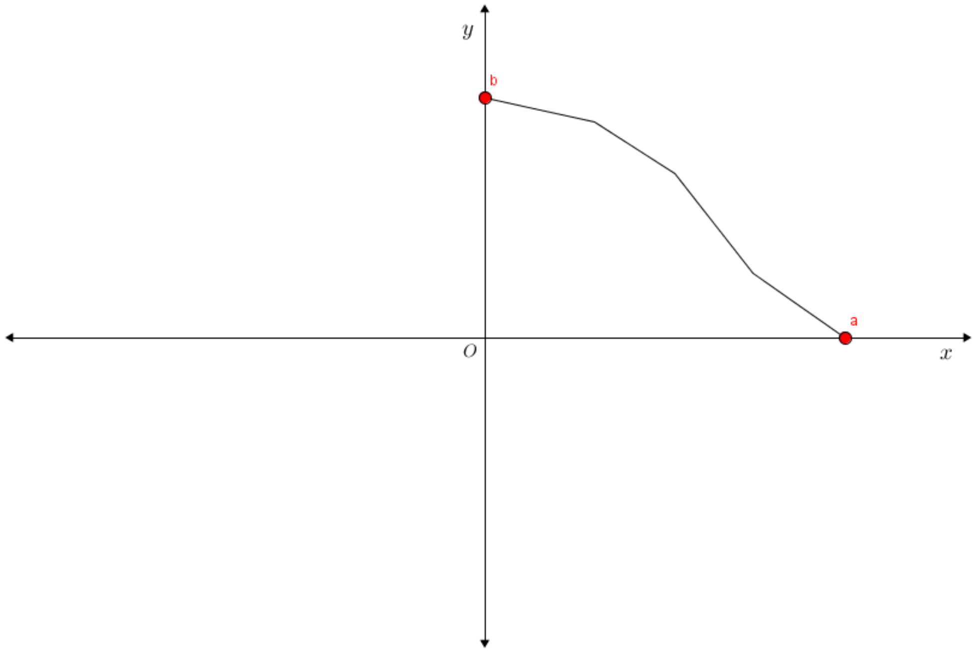
Demonstração: Sejam $c, d \in [0, a]$ com $c < d$. Dessa forma, como x^2 é crescente em $\mathbb{R}^+$, então $c^2 < d^2 \Rightarrow -c^2 > -d^2 \Rightarrow -\dfrac{c^2}{a^2} > -\dfrac{d^2}{a^2} \Rightarrow 1 - \dfrac{c^2}{a^2} > 1 - \dfrac{d^2}{a^2}$. Como $\sqrt{x}$ é crescente, temos $\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}} > \sqrt{1-\dfrac{d^2}{a^2}} \Rightarrow b\sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}} > b\sqrt{1-\dfrac{d^2}{a^2}} \Leftrightarrow f(c) > f(d)$.

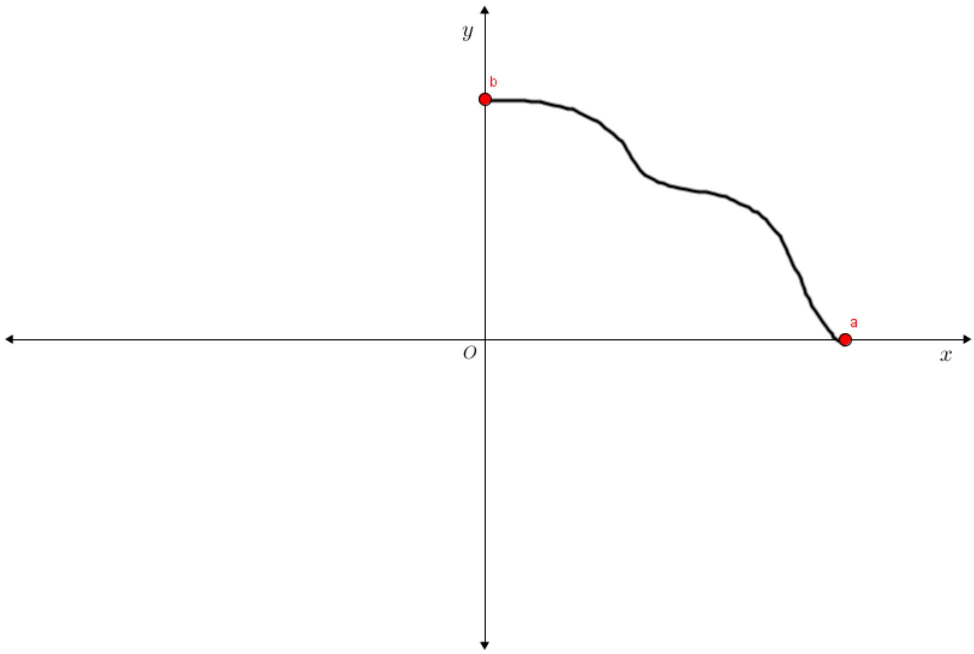
□

A análise do crescimento e decrescimento de funções pode ser feita usando-se resultados e conceitos do cálculo diferencial (para detalhes [2] e [5]).

Os pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$ fazem parte do gráfico da função f acima, sendo, de certa forma, as "extremidades" deste gráfico, ou seja, este gráfico é uma curva que liga esses pontos e que decresce, ou seja, ao desenharmos o gráfico, partindo de $(0, b)$, o traço vai decaindo até chegar em $(a, 0)$. Porém, existem várias formas de ocorrer este decaimento. As figuras a seguir mostram algumas dessas formas:







Na próxima seção, vamos abordar esta questão através dos conceitos de função convexa e função côncava.

3.2 Funções Convexas e Côncavas

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função onde I é um intervalo de qualquer tipo $([c,d], [c,+\infty), (-\infty,d]$, etc.). Sejam $c, d \in I$, com $c < d$. Os pontos $P(c, f(c))$ e $Q(d, f(d))$ estão no gráfico de f. Como $c < d$, a reta que passa por P e Q não é vertical, logo possui uma equação do tipo $y = mx + n$. Considerando que P e Q estão na reta e resolvendo o sistema $\begin{cases} f(c) = mc + n \\ f(d) = md + n \end{cases}$, encontramos a seguinte equação para esta reta:

$$y = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c) = r(x)$$

.

Definição 3.2 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo, é dita ser convexa quando para quaisquer $c, x, d \in I$, com $c < x < d$, temos:*

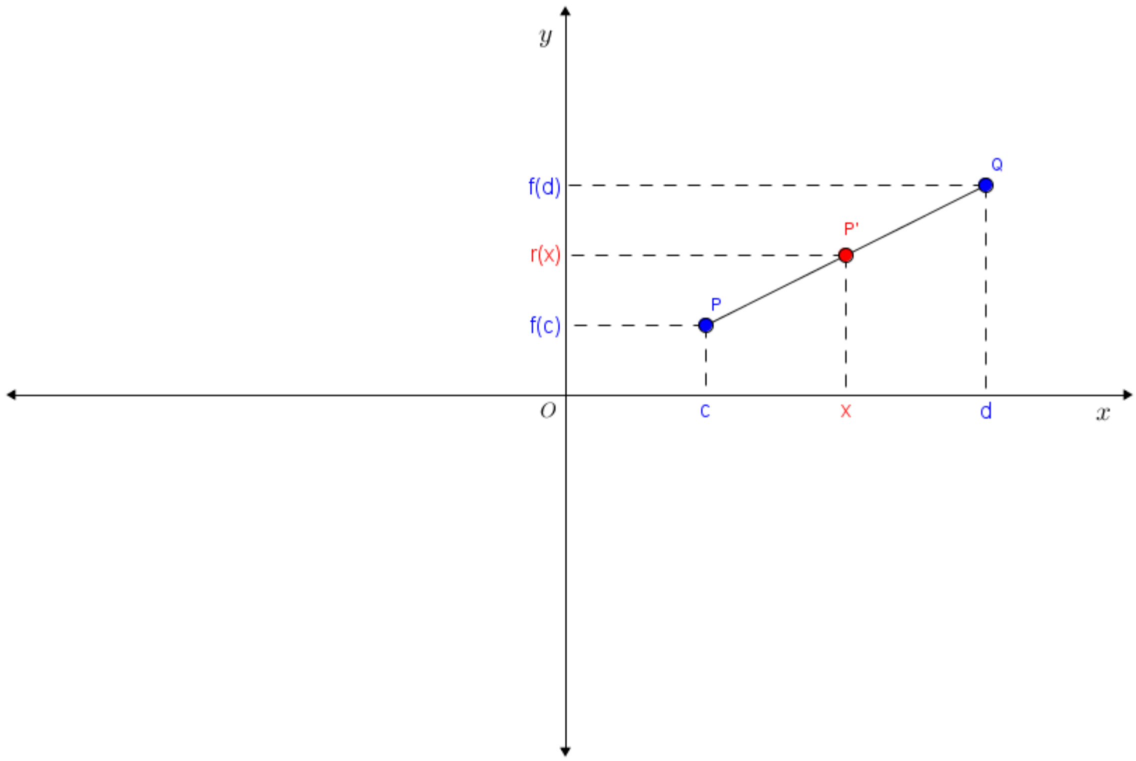
$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - a) \tag{3.1}$$

e é dita ser côncava quando:

$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - a) \tag{3.2}$$

Se em (3.1) e em (3.2) trocarmos $\leq$ por $<$ e $\geq$ por $>$, temos os conceitos de função estritamente convexa e estritamente côncava, respectivamente.

Note que se $c < x < d$, então o ponto $P'(x, r(x))$ está no segmento de reta que liga $P(c, f(c))$ e $Q(d, f(d))$.



Sendo f convexa, devemos ter $f(x) \geq r(x)$, ou seja, no ponto de abscissa x o gráfico de f está abaixo do segmento de reta ligando P e Q. Como a condição (3.1) é válida para quaisquer $c, x, d \in I$, com $c < x < d$, então o aspecto geométrico do gráfico de uma função convexa deve ser o seguinte:

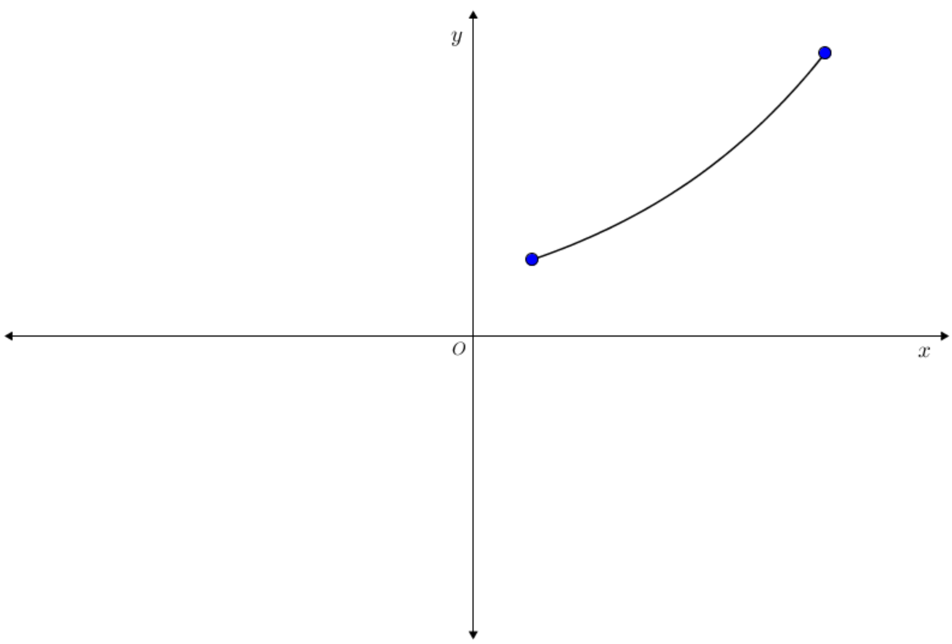


Figura 3.1: função convexa crescente

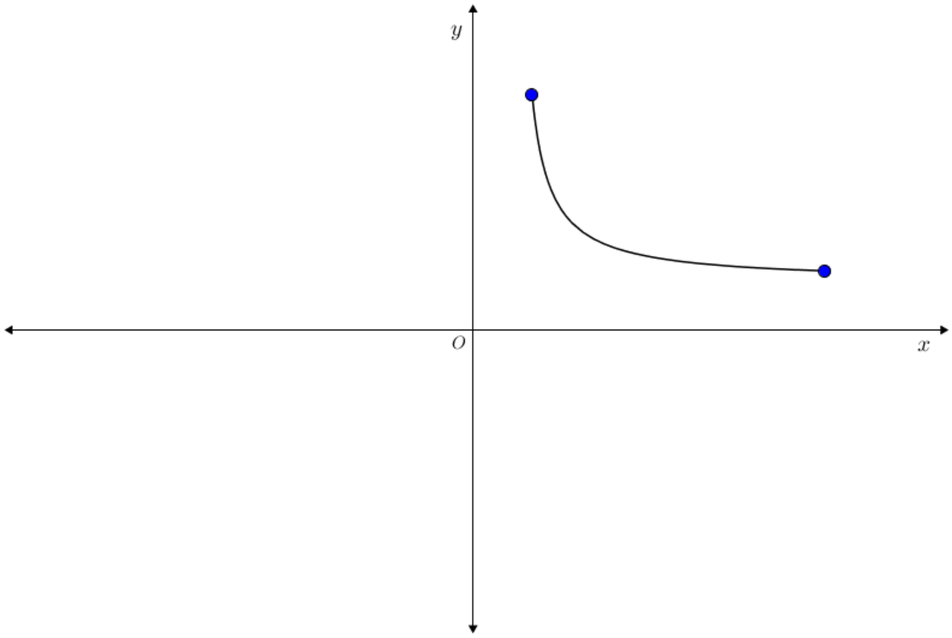
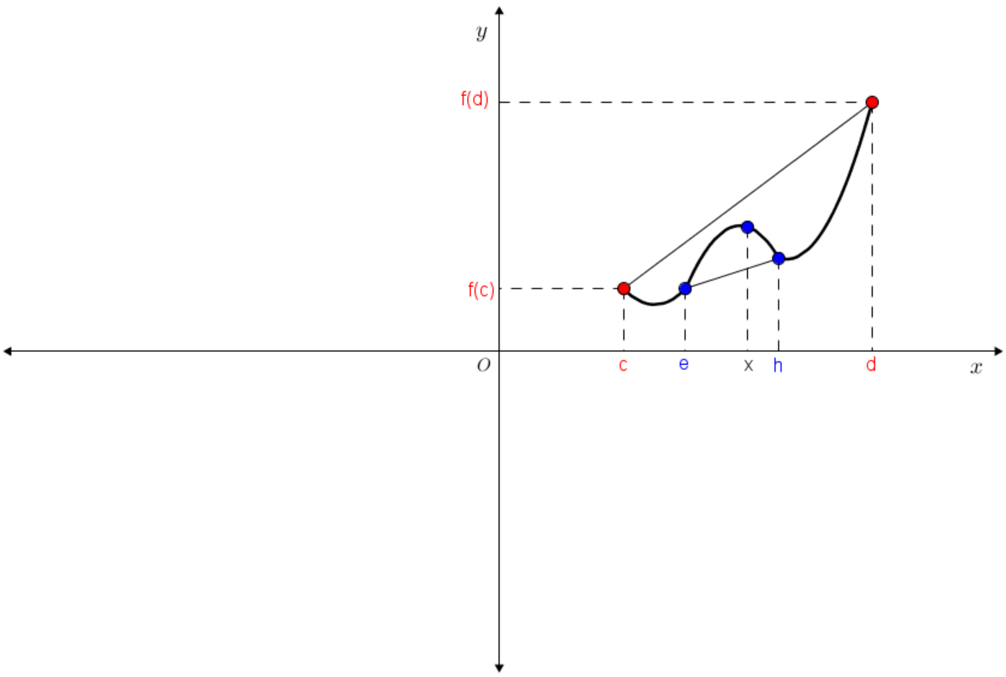


Figura 3.2: função convexa decrescente

Note que se fixarmos c e d e tivermos a condição (3.1) válida para todo $x \in (c,d)$, então o gráfico pode apresentar o seguinte formato:



Note que (3.1) é válida para qualquer $x \in (c,d)$. Porém, tomando $e < x < h$, temos $f(x) > f(e) + \dfrac{f(h) - f(e)}{h - e}(x - e)$, portanto a função não é convexa.

Com isso, podemos concluir que o aspecto geométrico do gráfico de uma função convexa é o de uma curva com concavidade voltada para cima (algo como uma "boca aberta" para cima). Do mesmo modo, vemos que o aspecto geométrico do gráfico de uma função côncava é de uma curva com concavidade voltada para baixo.

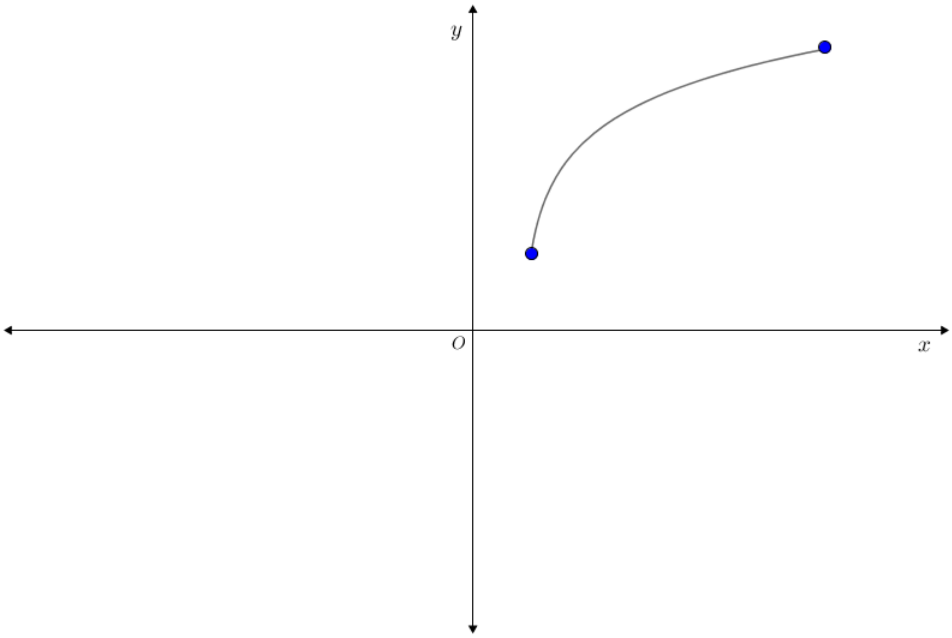


Figura 3.3: função côncava crescente

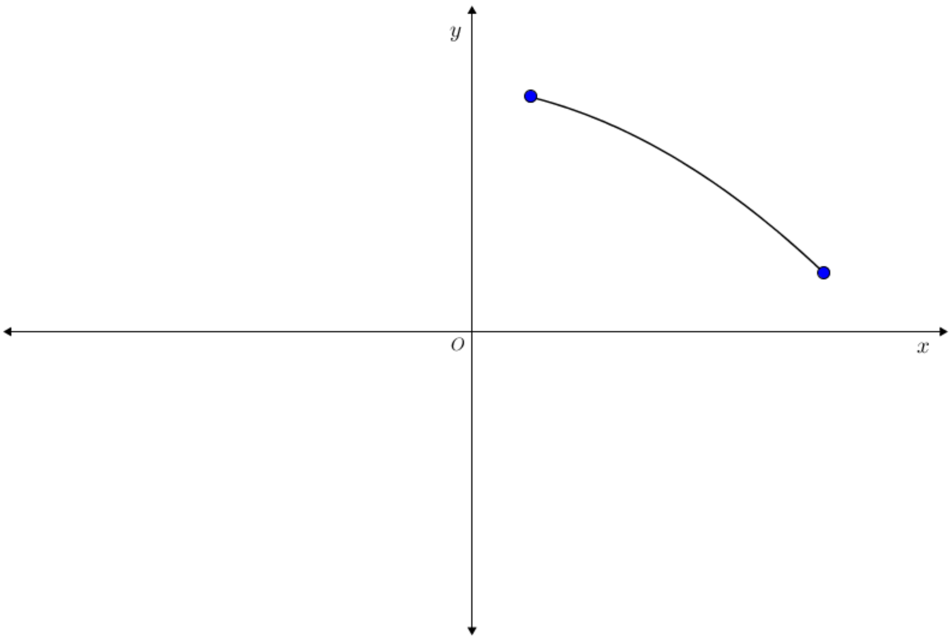


Figura 3.4: função côncava crescente

Obs.: Funções cujos gráficos são retas ou segmentos de reta são simultaneamente convexas e côncavas, mas não são estritamente convexas, nem estritamente côncavas.

Exemplo 3.4 *A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é estritamente convexa.*

Queremos mostrar que, para quaisquer $0 \leq a < x_0 < b$, temos $f(x_0) < r(x_0)$, onde:

$$r(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \tag{3.3}$$

Como $f(x) = x^2$, $f(a) = a^2$ e $f(b) = b^2$, substituindo as relações acima em (3.3), podemos inferir que

$$r(x_0) = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x_0 - a) + a^2$$

$$r(x_0) = \frac{(b - a)(b + a)}{b - a}(x_0 - a) + a^2$$

$$r(x_0) = (b + a)(x_0 - a) + a^2$$
$$r(x_0) = bx_0 - ab + ax_0 - a^2 + a^2$$
$$r(x_0) = bx_0 - ab + ax_0$$

$$r(x_0) = b(x_0 - a) + ax_0 > x_0(x_0 - a) + ax_0 = x_0^2 - ax_0 + ax_0 = x_0^2 = f(x_0).$$

□

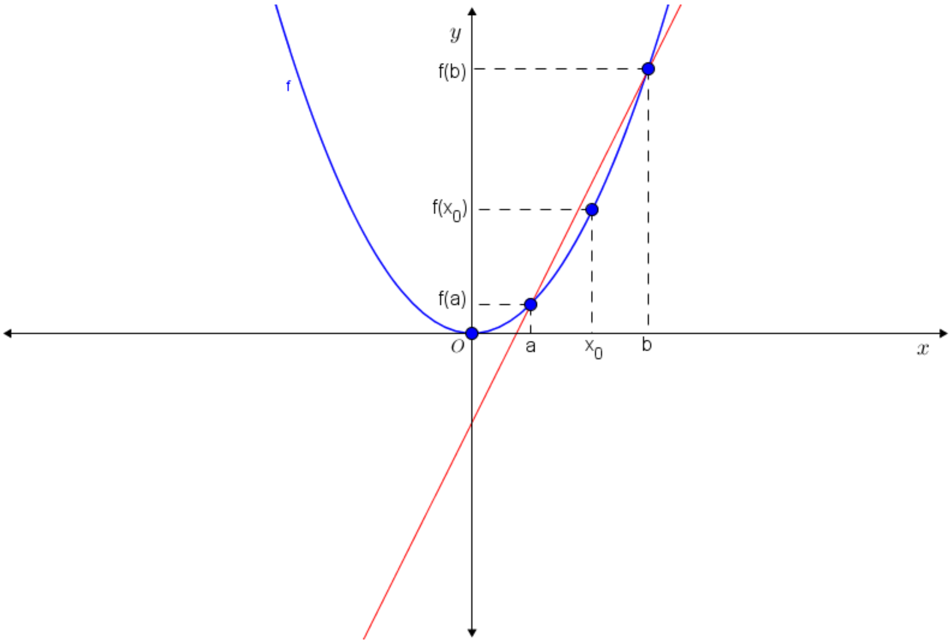
Portanto, $r(x_0) > f(x_0)$ e, assim, f é estritamente convexa. De modo análogo, prova-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ é estritamente convexa.

Teorema 3.2 *A função $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, com $a > 0$ e $b > 0$, é estritamente côncava.*

Demonstração: Sejam $0 \leq c < x < d \leq a$ e $r(x) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c)$.
Queremos mostrar que f(x) > r (x). Temos:

$$r(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} + \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - d^2} - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}}{d - c}(x - c)$$

Igualando os denominadores, podemos escrever:



$$r(x) = \frac{\frac{b}{a}(d-c)\sqrt{a^2-c^2} + \frac{b}{a}(x-c)\sqrt{a^2-d^2} - \frac{b}{a}(x-c)\sqrt{a^2-c^2}}{d-c}$$

Colocando o fator $\frac{b}{a}$ em evidência, temos:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{b}{a}\left[\frac{(d-c-x+c)\sqrt{a^2-c^2} + (x-c)\sqrt{a^2-d^2}}{d-c}\right] \\ &= \frac{\frac{b}{a}\left[(d-x)\sqrt{a^2-c^2} + (x-c)\sqrt{a^2-d^2}\right]}{d-c}. \end{aligned}$$

Suponha que $f(x) \leq r(x)$, assim:

$$\frac{\frac{b}{a}\left[(d-x)\sqrt{a^2-c^2} + (x-c)\sqrt{a^2-d^2}\right]}{d-c} \geq \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

.

Cancelando $\frac{b}{a}$ em ambos os membros, multiplicando-os por “d – c” e elevando-os ao quadrado, ficamos com a seguinte desigualdade:

$\Rightarrow \quad (d-x)^2(a^2-c^2)+2(d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2}+$

$+(x-c)^2(a^2-d^2) \geq (d-c)^2(a^2-x^2)$

$\Rightarrow \quad 2(d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2}+(d^2-2dx+x^2)(a^2-c^2)+$

$+(x^2-2cx+c^2)(a^2-d^2) \geq (d^2-2cd+c^2)(a^2-x^2)$

$\Rightarrow \quad 2(d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2}+\cancel{a^2d^2}-2a^2dx+a^2x^2-c^2d^2+$

$+2c^2dx-\cancel{c^2x^2}+a^2x^2-\cancel{d^2x^2}-2a^2cx+2cd^2x+\cancel{a^2c^2}-c^2d^2 \geq \cancel{a^2d^2}$

$-\cancel{d^2x^2}-2a^2cd+2cdx^2+\cancel{a^2c^2}-\cancel{c^2x^2}$

$\Rightarrow \quad 2(d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2}+2a^2x^2-2c^2d^2-2a^2dx+2c^2dx$

$-2a^2cx+2cd^2x \geq 2cdx^2-2a^2cd$

Ao dividirmos ambos os membros da inequação acima por dois, obtemos:

$\Rightarrow \quad (d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2}+a^2x^2-c^2d^2-a^2dx+c^2dx-a^2cx+cd^2x \geq cdx^2-a^2cd$

$\Rightarrow \quad (d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2} \geq cdx^2+c^2d^2-c^2dx-cd^2x+a^2dx+a^2cx-a^2x^2-a^2cd$

$\Rightarrow \quad (d-x)(x-c)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2} \geq cd(x^2+cd-cx-dx)+a^2(dx+cx-x^2-cd)$

$\Rightarrow \quad (dx-cd-x^2+cx)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2} \geq -cd(dx-cd-x^2+cx)+a^2(dx-cd-x^2+cx)$

$\Rightarrow \quad (dx-cd-x^2+cx)\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2} \geq (dx-cd-x^2+cx)(a^2-cd)$

Como "dx–cd–x^2+cx" é um fator comum de ambos os membros da inequação acima, podemos eliminá-lo. Assim, temos:

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-d^2} \geq (a^2-cd)$$

Elevando os dois membros da inequação acima ao quadrado, obtemos:

$$\Rightarrow (a^2-c^2)(a^2-d^2) \geq (a^2-cd)^2$$

Aplicando a propriedade distributiva no primeiro membro da inequação supracitada e desenvolvendo o quadrado da diferença de dois termos no segundo membro da mesma, podemos escrever:

$\Rightarrow \quad \cancel{a^4}-a^2d^2-a^2c^2+\cancel{c^2d^2} \geq \cancel{a^4}-2a^2cd+\cancel{c^2d^2}$

$\Rightarrow \quad -a^2d^2-a^2c^2 \geq -2a^2cd$

Multiplicando ambos os membros da inequação acima por menos um, temos:

$\Rightarrow \quad a^2d^2+a^2c^2 \leq 2a^2cd$

$\Rightarrow \quad a^2(d^2+c^2) \leq a^22cd$

$\Rightarrow \quad d^2+c^2 \leq 2cd$

$\Rightarrow \quad d^2-2cd+c^2 \leq 0$

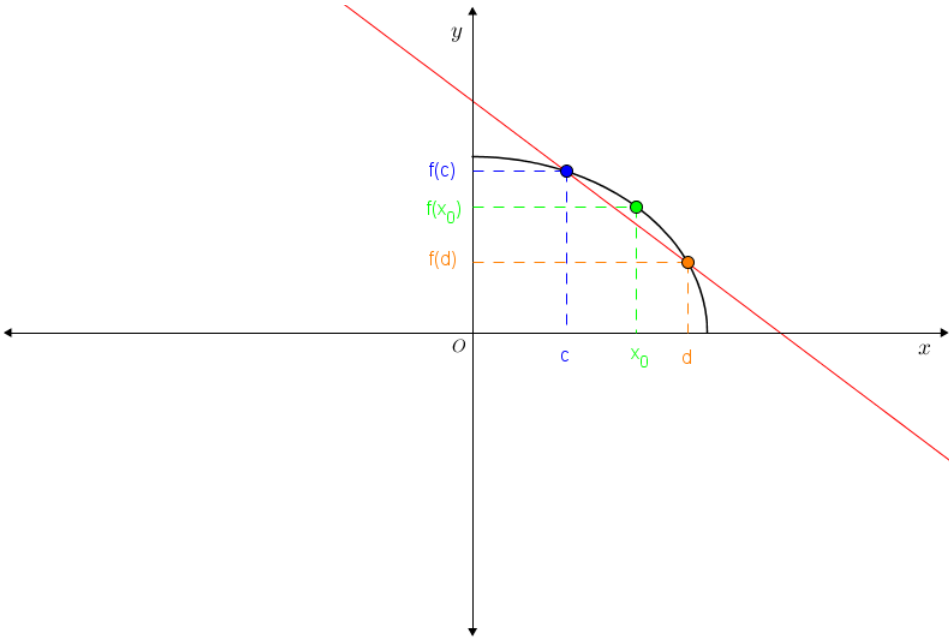
$\Rightarrow \quad (d^2-c^2)^2 \leq 0$

Como $(d-c)^2$ não pode ser menor que zero então,

$\Rightarrow \quad (d^2-c^2)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad d = c.$

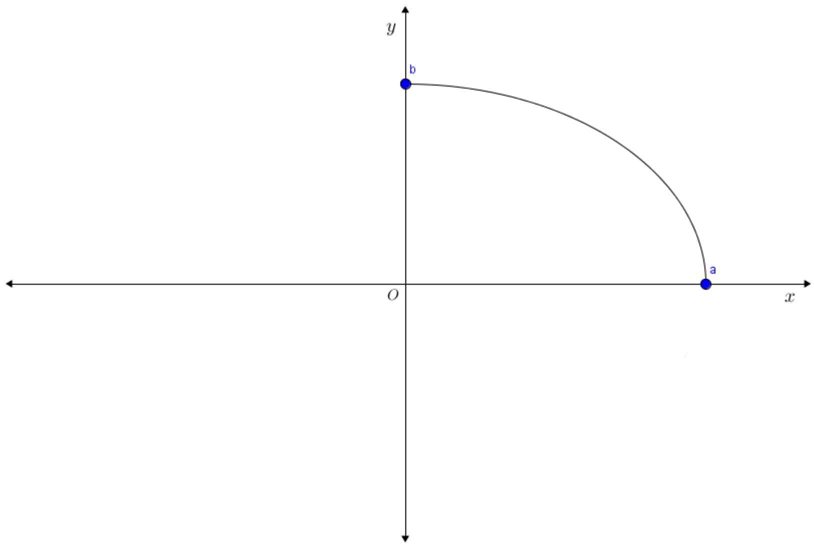
Como, por hipótese, $c < d$, temos uma contradição.Portanto, $f(x) > r(x)$ para quaisquer $0 \leq c < x < d \leq a$, ou seja, f é estritamente côncava.



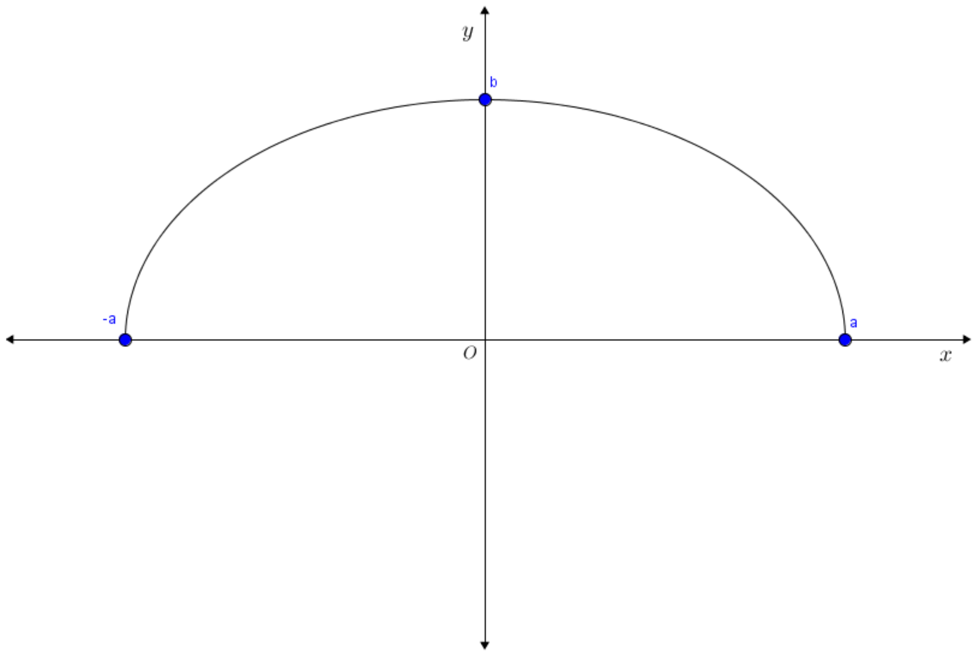
3.3 Esboço da Elipse

Com o que foi visto até aqui, temos condições de esboçar a elipse. Comecemos com o gráfico da função $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$.

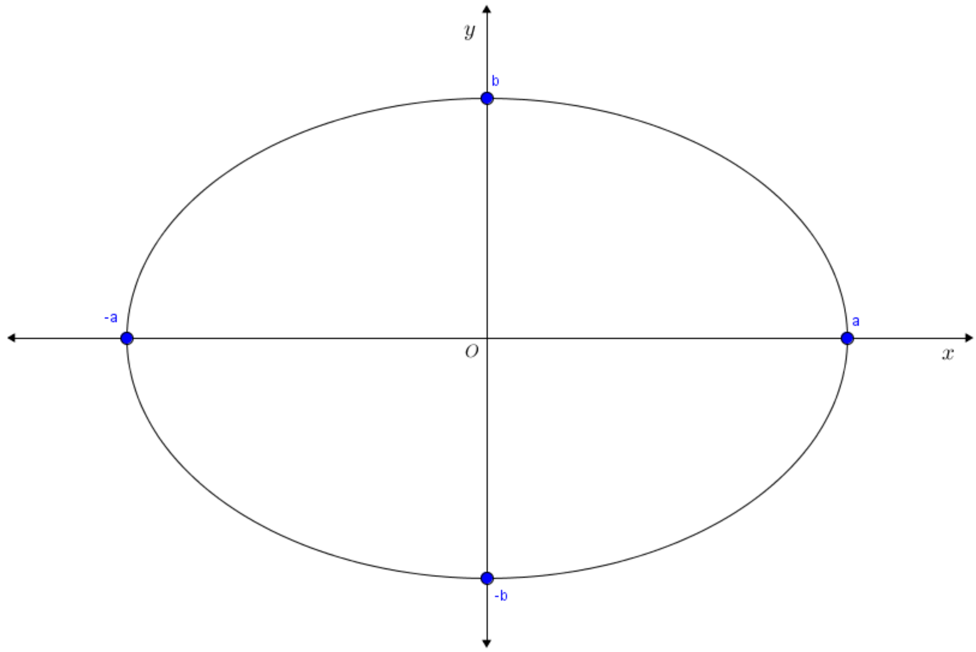
Já vimos que os pontos $(0,b)$ e $(a,0)$ estão neste gráfico. Além disso, vimos que esta função é decrescente e côncava, portanto seu gráfico tem a seguinte forma:



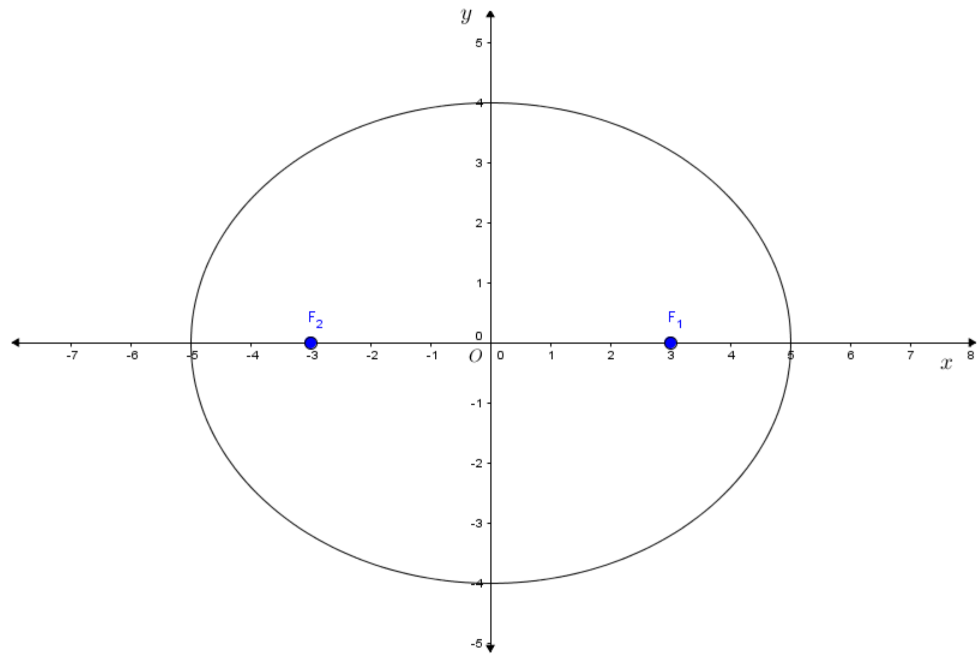
Usando a simetria da elipse em torno do eixo y, temos:

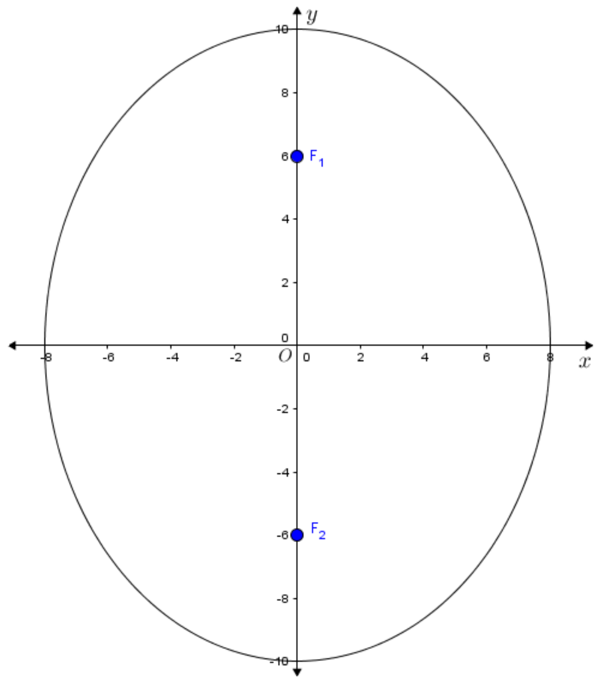


Finalmente, usando a simetria em torno do eixo x, temos:



A seguir, seguem, respectivamente, os esboços das elipses dos exemplos 1.1 e 1.3 do capítulo 1:





y
x
O
F1
F2
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10

3.4 Conclusão

Neste trabalho procuramos apresentar uma forma didática e viável (para alunos do ensino médio) de estudar a fundo a elipse. Todos os conceitos e resultados constantes nessa dissertação podem ser apresentados para alunos do ensino médio pois não requerem pré-requisitos de matemática avançada (ensino superior). O principal ponto foi possibilitar o estudo dos aspectos geométricos de uma elipse apenas com conceitos de matemática básica. Em geral, para esboçarmos uma curva (com algumas exceções) necessitamos de conceitos e resultados do cálculo diferencial e integral, tais como, limites, continuidade, derivada e teoremas como o do valor intermediário e o do valor médio. Nessa dissertação, foi proposta uma maneira de fazermos o esboço da elipse sem usar qualquer conteúdo do cálculo diferencial, o que possibilita sua aplicação em uma sala de aula do ensino médio. Esperamos, com isso, dar uma orientação para que professores ao serem perguntados sobre o porquê do traçado da elipse ser como é, eles de fato possam dar uma resposta convincente aos alunos de forma que estes entendam.

BIBLIOGRAFIA

[1] Lima, E.; *Álgebra Linear*, 1ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[2] Lima, E.; *Análise Real, volume 1*,8ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[3] Lima, E.; *Geometria Analítica e Álgebra Linear*,1ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[4] Silva, V.; Reis, G.; *Geometria Analítica*, 2ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] Guidorizzi, H.; *Um curso de Cálculo, vol. 1*, 2ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[6] Stewart, J.; *Cálculo, volume 2*, tradução-EZ2 Translate, tradução da 7ª edição Norte-americana, São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[7] Anton, H.; Bivens, I; Davis, S.; *Cálculo, volume 2*, 8ª ed., tradução-Claus Ivo Doering, Porto Alegre: Bookman, 2007.

[8] Elipse. In: Wikipedia: the free encyclopedia. Available in: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse> Acesso em: 23 julho de 2016.