

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

Juliano Silveira Meira

**MÉTODOS MATEMÁTICOS: UMA APLICAÇÃO NAS CIÊNCIAS
AGRÁRIAS**

Santa Maria, RS
2018

Juliano Silveira Meira

MÉTODOS MATEMÁTICOS: UMA APLICAÇÃO NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**.

ORIENTADORA: Prof.^a Lidiane Buligon

Santa Maria, RS
2018

Meira, Juliano Silveira
MÉTODOS MATEMÁTICOS: UMA APLICAÇÃO NAS CIÊNCIAS
AGRÁRIAS / Juliano Silveira Meira.- 2018.
59 p.; 30 cm

Orientadora: Lidiane Buligon
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de
Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Energia Metabolizável para manutenção 2. Modelagem 3.
Ponto fixo 4. Ponto de equilíbrio 5. Métodos matemáticos
I. Buligon, Lidiane II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

©2018

Todos os direitos autorais reservados a Juliano Silveira Meira. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: juliano.meira@hotmail.com

Juliano Silveira Meira

MÉTODOS MATEMÁTICOS: UMA APLICAÇÃO NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT**.

Aprovado em 24 de agosto de 2018:

Lidiane Buligon, Dr^a. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Cintha Maria Schneider Meneghetti, Dr^a. (FURG)

Alice de Jesus Kozakevicius, Dr^a. (UFSM)

Charles Rogério Pavaglio Szinvelski, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradecer a Deus, por todas as vezes em que me fortaleceu, quando pensei que não teria condições.

À minha mãe, Maria Itelvina Silveira Meira, que é tudo para mim, a pessoa mais importante da minha vida, espero que esteja orgulhosa de mim, pois tudo que faço é para lhe orgulhar;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo apoio financeiro nesta caminhada. Sem esse apoio, dificilmente teria conseguido manter as despesas para qualificação profissional nesse curso.

À minha orientadora, prof. Dr.^a Lidiane Buligon, este um agradecimento muito especial, pois em todos os momentos de necessidade, soube conduzir os trabalhos da forma mais calma e inteligente possível.

À minha família de sangue, e à de coração, que durante minha trajetória acadêmica soube me animar, nas minhas tristezas e dando suporte, emocional e financeiramente;

À minha noiva, Camila Bernardi, que me deu total apoio nas horas de necessidade, que soube relevar minhas ausências, que mesmo nos momentos mais difíceis, buscou sempre me ajudar no que fosse possível. Sem ela, não seria o que sou agora;

À meus professores da graduação, do Instituto Federal Farroupilha - Campus Alegre, os quais contribuíram significativamente na minha caminhada acadêmica;

À meus professores do PROFMAT, da UFSM, que foram além das obrigações de professores, muitas vezes, com comportamentos de amigo;

À meus colegas do PROFMAT, que se propunham a ajudar em todos os momentos, e em especial ao colega Vinícius, que além da amizade, ajudou muito em questões de alocação durante as disciplinas de verão;

Ao Allan, que foi mais que um colega do mestrado. Juntos rodamos muitos quilômetros em busca do nosso objetivo. Das horas e horas de estudo nos hotéis de Santa Maria. Dos lanches, almoços e passeios nos intervalos. Enfim, pela amizade conquistada nesse tempo;

À direção da Escola Municipal Assis Brasil Martins de Bitencourt, que compreendeu os vários momentos de ausência, como forma de qualificação profissional, de um ser que faz parte de toda essa comunidade escolar.

E finalmente a todos que, mesmo não citados aqui, contribuíram de forma direta ou indireta para que eu realizasse esse sonho.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

(René Descartes)

RESUMO

MÉTODOS MATEMÁTICOS: UMA APLICAÇÃO NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

AUTOR: Juliano Silveira Meira
ORIENTADORA: Lidiane Buligon

Este trabalho apresenta uma abordagem matemática para um problema de natureza prática que tem origem na Zootecnia. Especificamente, o tema está relacionado ao estudo referente ao cálculo das exigências nutricionais de energia para manutenção de cordeiros da raça Texel. O processo de modelagem consiste em obter um modelo matemático a partir do ajuste de funções aos dados experimentais, podendo assim realizar o cálculo do ponto fixo da função. O experimento foi realizado no Laboratório de Ovinocultura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Um dos objetivos da pesquisa era determinar a exigência de Energia Metabolizável para manutenção (EMm), que segundo a metodologia empregada pelos pesquisadores, consiste em obter o ponto de equilíbrio da função que relaciona a Produção de Calor (PC) e o Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Em termos matemáticos, o objetivo é obter o melhor ajuste de curva para o conjunto de valores observados pelo método dos mínimos quadrados linear e o ponto fixo pelo método de iteração de ponto fixo. O *software* Visual Cálculo Numérico (VCN) foi usado para validação do modelo proposto, incentivando o uso de novas tecnologias. Além disso, o trabalho busca disponibilizar um aporte teórico e conceitual dos métodos matemáticos usados na modelagem. A motivação deste estudo é levar a matemática aplicada para áreas da ciências agrárias.

Palavras-chave: Ponto de equilíbrio. Ponto fixo. Modelagem. Métodos numéricos. Energia Metabolizável para manutenção. Zootecnia.

ABSTRACT

MATHEMATICAL METHODS: AN APPLICATION IN THE AGRARIAN SCIENCES

AUTHOR: Juliano Silveira Meira

ADVISOR: Lidiane Buligon

This work presents a mathematical approach to a problem of a practical nature that originates from Zootechnics. Specifically, the theme is related to the study concerning the calculation of the nutritional requirements of energy for maintenance of Texel lambs. The modeling process consists of obtaining a mathematical model from the functions fitting to the experimental data, being able thus calculate the fixed point of the function. The experiment was made at the Sheep Laboratory in the Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). An aim of the research was to determine the requirement of Metabolizable Energy for maintenance (ME_m), that according to the methodology used by the researchers, it consists in obtaining the equilibrium point of the function that relates the Heat Production (HP) and the Metabolizable Energy Consumption (MEC). In mathematical terms, the aim is to obtain the best curve fitting for the observed value set by the linear least squares method and the fixed point by fixed-point iteration method. The Visual Numerical Calculus (VNC) software was used to validate the proposed model, encouraging the use of new technology. In addition, the work search for to provide a theoretical and conceptual support of the mathematical methods used in modeling. The motivation of this study is to take the applied mathematics to agrarian science areas.

Keywords: Break-even point. Fixed point. Modeling. Numerical methods. Metabolizable Energy for maintenance. zootechny

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} . Representa-se \vec{u} e \vec{v} , por u e v , respectivamente	18
Figura 2.2 – Ilustração geométrica do vetor \vec{v} ortogonal a todo vetor de E' , com \vec{u} , \vec{v} , e_1 , e_2 representados por u , v , e_1 , e_2 respectivamente	19
Figura 2.3 – Ilustração geométrica do resultado enunciado no Teorema 2.4, para o caso em que $E = \mathbb{R}^3$ e $E' = \mathbb{R}^2$	20
Figura 2.4 – Interpretação geométrica para os desvios $d(x_i)$	23
Figura 2.5 – Visualização gráfica do Teorema 3	29
Figura 3.1 – Ilustração gráfica dos dados da Tabela 3.1	33
Figura 3.2 – O ajuste linear e os dados experimentais	38
Figura 3.3 – A função de ajuste exponencial e os dados experimentais	42
Figura 3.4 – A função potência de ajuste e os pontos analisados	45
Figura 3.5 – Quadro comparativo entre os erros do método dos mínimos quadrados das funções e os coeficientes de correlação de Pearson	46
Figura 3.6 – Função afim ajustada pelo VCN	47
Figura 3.7 – Função exponencial linearizada ajustada pelo VCN	47
Figura 3.8 – Função potência linearizada ajustada pelo VCN	48
Figura A.1 – Download do VCN	55
Figura A.2 – Logotipo do VCN	56
Figura A.3 – Janela inicial VCN	56
Figura A.4 – Caixa para ajuste de curvas	57
Figura A.5 – Ajuste polinomial	57
Figura A.6 – Caixas de seleção de números de pontos e grau do polinômio de ajuste	58
Figura A.7 – Caixa para digitar os pontos	59
Figura A.8 – Clicando em calcular obtém-se os elementos do ajuste	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Dados experimentais do Consumo de Energia metabolizável e da produção de calor.	32
Tabela 3.2 – Dados necessários ao cálculo de a e b da equação (3.1).	34
Tabela 3.3 – Valores ajustados pela função (3.2)	35
Tabela 3.4 – Erro de truncamento do ajuste linear para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$	36
Tabela 3.5 – Cálculo de r , entre os dados originais e os aproximados.	37
Tabela 3.6 – Dados necessários para o cálculo de a e b da função (3.5)	39
Tabela 3.7 – Dados necessários para a utilização das Equações (2.17) e (2.18)	40
Tabela 3.8 – Erro de truncamento da função (3.6) para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$	41
Tabela 3.9 – Dados necessários para o cálculo de a e b da função (3.10)	43
Tabela 3.10 – Dados necessários para a utilização das equações (2.18) e (2.17) para o ajuste da Equação 3.10	44
Tabela 3.11 – Sequência convergindo para o ponto fixo da função (3.7).	50

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>CEM</i>	Consumo de Energia Metabolizável
<i>ELm</i>	Energia Líquida para manutenção
<i>EMm</i>	Energia Metabolizável para manutenção
<i>kcal</i>	Quilocaloria
<i>kg</i>	Eficiência de utilização da energia metabolizável para ganho
<i>PCN</i>	Parâmetros Curriculares Nacionais
<i>PV</i>	Peso Vivo
<i>PC</i>	Produção de calor
<i>UFMS</i>	Universidade Federal de Santa Maria
<i>VCN</i>	Visual Cálculo Numérico

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.0.1	Conceitos Básicos	14
2.1	APROXIMAÇÃO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	21
2.1.1	Caso Discreto	22
2.1.2	Ajuste Linear	24
2.1.3	Ajuste Exponencial	26
2.1.4	Ajuste por uma função potência	27
2.2	COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON	27
2.3	ITERAÇÃO DE PONTO FIXO	28
3	MODELO	31
3.1	AJUSTE LINEAR	34
3.2	AJUSTE EXPONENCIAL	38
3.3	AJUSTE POR UMA FUNÇÃO POTÊNCIA	42
3.4	PONTO FIXO	48
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53
	APÊNDICE A – VCN	55

1 INTRODUÇÃO

A atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto a própria matemática. É sabido que muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos do cotidiano (BASSANEZI, 2006).

Também segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)(1997):

A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL, 1997, p.32).

Para ajudar na tarefa de entender melhor o nosso mundo e explicar os fenômenos oriundos da natureza, muitas vezes descrevemos um fenômeno específico matematicamente por meio de um modelo explica Frank, William e Steven (2014). Os modelos podem ser expressos em termos de gráficos, de tabelas, funções ou de equações, variando desde o mais simples aos mais complexos. Esses modelos podem ainda serem obtidos a partir de dados experimentais de campo ou de laboratório ou podem ser deduzidos de alguma teoria geral. Um bom modelo matemático é aquele que produz resultados que estão em conformidade com as observações do mundo físico (PATROCÍNIO Jr, 2006; ANTON, 2000).

Frank, William e Steven (2014) complementam que, um modelo matemático é uma idealização do fenômeno do mundo real e nunca será uma representação completamente precisa da realidade. No entanto, apesar de suas limitações, um modelo matemático pode fornecer resultados e conclusões próximos do comportamento do problema real.

Entretanto, para Bassanezi (2006) uma das maiores dificuldades para adotar o processo de modelagem é a transposição de barreiras ofertadas pelo ensino tradicional, no qual tem-se explícito o objeto de estudo, meramente teórico e voltado ao conteúdo exigido nos programas das disciplinas. Dessa forma, tem-se um aluno propenso a adquirir muitas habilidades de resoluções de cálculos, em contrapartida, poucos conseguem utilizar destas habilidades para resolver problemas relacionados ao seu cotidiano.

Ainda para Bassanezi (2006), vários aspectos podem ser observados para compreender o importante papel da modelagem em sua utilização como ferramenta científica, dentre eles destaca que, a modelagem pode ser um método para fazer interpolações, extrapolações e previsões. Nesta perspectiva, entende-se modelagem como uma estratégia usada para transformar um problema definido em alguma situação prática, em um modelo matemático, com o objetivo de obter alguma solução para o problema original, utilizando-se de conhecimentos adquiridos anteriormente.

O autor acrescenta que a modelagem matemática abrangente e capaz de analisar e sugerir interferências em processos empíricos ou fenômenos naturais, é por excelência

o método científico utilizado nas ciências factuais.

Uma área contida nas ciências factuais, é a Zootecnia, definida como Ciência dedicada ao estudo da criação dos animais, em específico para esse trabalho, a criação de ovinos (FERREIRA et al., 2006). Na zootecnia a área de Nutrição e Alimentação gera pesquisas que envolvem:

Compreender os processos químicos, físicos e biológicos que ocorrem no trato gastrointestinal para que os animais possam tirar proveito máximo dos nutrientes para atender as exigências nutricionais, bem como saber escolher, formular e fornecer alimentos visando o máximo desempenho animal e mínimo custo (UFSM, 2017).

Dentre as raças de ovinos estudados, encontram-se os cordeiros da raça Texel, animais cuja produção está em constante crescimento na região Sul do Brasil. As exigências nutricionais de ovinos, são definidas com base em estudos internacionais, porém as condições climáticas, as diversidades metodológicas e a diversidade de raça são aspectos fundamentais que interferem na criação, por isso a importância de desenvolver pesquisas nesse sentido (MARTINS, 2017).

Dentre as exigências nutricionais estudadas, têm-se as exigências nutricionais de energia. Segundo Martins (2017), a energia é um nutriente fundamental para determinar a limitação da produção de ovinos. A necessidade energética escassa, resulta em tardança no crescimento, aumento da idade a puberdade, diminuição da fertilidade, diminuição na produção de lã e leite, e ampliação de risco para contrair doenças e parasitas (SUSIN, 1981 apud MARTINS, 2017).

As exigências de energia líquida, são separadas em exigência de Energia Metabolizável para manutenção e exigência de energia para ganho (gordura, musculatura, entre outros). Destas, tem-se que a exigência de energia metabolizável para manutenção, é a energia para manter a estabilidade fisiológica do animal, ou seja, a energia necessária apenas para que seu corpo funcione sem perdas nem ganhos (GALVANI, 2008). Portanto, em momentos de crise por falta de alimentação para a criação desses animais, ou qualquer outro problema adverso, faz-se necessário ter o conhecimento do mínimo de energia requerida para esses animais, sem que eles tenham uma dieta deficitária, acarretando assim, em perda de funções importantes para o funcionamento orgânico do animal.

Uma alternativa utilizada por Martins (2013) para calcular as exigências de Energia Metabolizável para manutenção (EMm) foi o cálculo do ponto de equilíbrio da função de regressão linear do logaritmo da Produção de Calor (PC) ($PC, Kcal/KgPV^{0,75}/dia$) em função do Consumo de Energia Metabolizável (CEM) ($CEM, Kcal/KgPV^{0,75}/dia$) (LOF-GREEN; GARRET, 1968 apud MARTINS, 2013).

O problema prático enunciado acima é um exemplo de uma situação-problema na qual pode-se aplicar um processo de modelagem matemática, em que converte-se o problema real, que é obter o valor de exigência de Energia Metabolizável para manutenção, em

um problema matemático, por meio de dados experimentais de Produção de Calor (PC) e do Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Para tal, usa-se técnicas numéricas da teoria da aproximação para ajustar o conjunto de dados disponíveis, obtidos em experimentos de campo ou em laboratório, por meio de funções elementares (Mínimos Quadrados linear ou não linear) e o método do ponto fixo, para calcular o ponto de equilíbrio (BURDEN; FAIRES, 2013; FRANCO, 2006; RUGGIERO; LOPES, 2000). Este número obtido, corresponde o valor em que a Produção de Calor é igual o Consumo de Energia Metabolizável, portanto, o organismo do animal está funcionando sem déficit de energia e sem energia sobrando para o ganho de massa muscular, gordura, entre outros (MARTINS, 2013).

A necessidade de trabalhar este problema no presente estudo, surge da riqueza de conteúdos matemáticos envolvidos nesse cálculo do ponto de equilíbrio, que é deixado em segundo plano, ao trabalhar somente com ferramentas computacionais. Além disso, ao abordar matematicamente o problema, a aplicação dos conceitos são melhores justificadas, ou seja, sua aplicação será baseada em um método matemático provado e validado, trazendo credibilidade a solução.

O conjunto de dados que será utilizado como base para o processo de modelagem desenvolvido neste trabalho, foi coletado em uma pesquisa de pós graduação em Zootecnia. A metodologia utilizada pelos pesquisadores do laboratório de Ovinocultura da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), está descrita na dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Zootecnia (MARTINS, 2013).

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo construir um estudo matemático, acerca de um problema de origem da área de Nutrição e Alimentação, do curso de Zootecnia relatado anteriormente. Especificamente refere-se ao cálculo da exigência de Energia Metabolizável para Manutenção. Para isso, necessita-se modelar o problema de natureza prática, por meio de métodos matemáticos. O processo de obtenção do modelo matemático, consiste em propôr funções de ajuste para os dados experimentais, calcular o erro do método numérico utilizado, verificar a função que melhor representa os dados coletados e então encontrar o ponto fixo, cujo significado é o ponto de equilíbrio.

O presente estudo, está organizado do seguinte modo: introdução, como já apresentada; capítulo 2; capítulo 3 e conclusão.

No capítulo 2, tem-se a fundamentação teórica, na qual estão apresentados os conteúdos, com as definições e teoremas, que servem como base para a resolução do problema prático. Desta apresentação de conteúdos, busca-se fundamentar os cálculos utilizados pelos pesquisadores, na área da zootecnia.

No capítulo 3, tem-se a apresentação e a solução do problema, para isso utilizou-se os dados coletados por Martins (2013) e por seguinte aplicou-se os conceitos do Capítulo 2. Neste mesmo capítulo, será feita uma validação dos cálculos, por meio do *software* Visual Cálculo Numérico (VCN).

Para concluir este trabalho, será feita a análise da aplicação e um breve relato so-

bre a experiência de aplicar os conteúdos matemáticos, em uma outra área da ciência, verificando se foi cumprido o fundamental papel da matemática como método científico, na resolução dos problemas do cotidiano.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo, apresentam-se alguns dos principais conceitos matemáticos que entende-se como necessários para a compreensão dos métodos dos Mínimos Quadrados e do Ponto Fixo (Método da Iteração linear). O mesmo está dividido em duas partes principais, na primeira será feita uma breve revisão de Álgebra Linear, e na segunda parte a descrição dos dois métodos numéricos.

Adicionalmente discorre-se sobre o Coeficiente de Correlação de Pearson, que será empregado como um quantificador do correlacionamento entre o modelo a ser proposto e os dados observados, e então definir qual das funções será o ajuste utilizado para o cálculo do ponto de equilíbrio.

Informa-se que esse referencial teórico é composto basicamente pela bibliografia Franco (2006), Ruggiero e Lopes (2000) e Burden e Faires (2013), que serão usados para a descrição dos métodos numéricos. Os conceitos complementares de álgebra linear estarão baseados em Boldrini et al. (1984) e Hefez e Fernandez (2016).

2.0.1 Conceitos Básicos

Definição 1. *Sejam E um conjunto e K um corpo. Vamos supor que em E esteja definida uma operação de adição:*

$$(u, v) \in E \times E \rightarrow u + v \in E,$$

E que esteja definida uma operação entre os elementos de K e de E (chamada multiplicação por escalar):

$$(\alpha, u) \in K \times E \rightarrow \alpha u \in E.$$

*Então, E é um **K-espaço vetorial**, em relação a essas operações, se as seguintes condições estiverem satisfeitas:*

$$A_1) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,$$

$$A_2) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$$

$$A_3) \exists \vec{0} \in E \mid \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in E,$$

$$A_4) \forall \vec{u} \in E, \exists -\vec{u} \in E \mid \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0},$$

$$M_1) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \forall \alpha \in K, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,$$

$$M_2) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}, \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{u} \in E,$$

$$M_3) (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}), \forall \alpha, \beta \in K, \forall \vec{u} \in E,$$

$$M_4) 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in E.$$

Os elementos de E serão chamados de vetores e os elementos de K de escalares. Assim, o elemento $\vec{0}$ de E será chamado *vetor nulo* e o elemento $-\vec{u}$ de *vetor oposto* de \vec{u} e o elemento 1, o elemento neutro multiplicativo.

Definição 2. *Sejam E um K -espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de E . Diz-se que W é um subespaço vetorial de E , ou simplesmente um subespaço de E , se W , com as operações de adição em E e multiplicação de vetores de E por escalares, é um espaço vetorial.*

Definição 3. *Seja E um K -espaço vetorial. Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, n$ vetores de E . Diz-se que o vetor $\vec{v} \in E$ é **combinação linear** de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, se existem escalares¹ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, tais que:*

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i.$$

Definição 4. *Seja E um K -espaço vetorial. Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in E$ são **linearmente dependentes (L.D.)** sobre K , se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in K$, nem todos nulos, tais que:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \vec{0}$$

*Percebe-se que essa relação é sempre válida se os $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ são todos iguais a zero. Quando isso acontece, diz-se que os vetores são **linearmente independentes (L.I.)**.*

Definição 5. *Um K -espaço vetorial tem **dimensão n** se:*

- i. Existem n vetores linearmente independentes.*
- ii. $(n + 1)$ vetores são sempre linearmente dependentes.*

Definição 6. *Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes é chamado **base** de um K -espaço vetorial de dimensão n .*

Definição 7. *Seja E um espaço vetorial real. Sejam \vec{u}, \vec{v} elementos de E . Chama-se **produto interno** (ou **produto escalar**) de \vec{u} por \vec{v} - em símbolo, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ - qualquer função definida em $E \times E$ com valores em \mathbb{R} , satisfazendo as seguintes propriedades.*

$$P_1) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E;$$

$$P_2) \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} + \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} + \vec{w} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E;$$

$$P_3) \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E;$$

¹Os escalares $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n$ são os coeficientes da combinação linear

P_4) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$ (vetor nulo).

Se em E está definido um produto escalar, então E é chamado de **espaço vetorial euclidiano real**.

Definição 8. Seja $E = \mathbb{R}^n$. Sejam $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, então ao produto interno no \mathbb{R}^n

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

chama-se de produto interno usual no \mathbb{R}^n .

Assim, tal relação transforma o \mathbb{R}^n num espaço euclidiano real.

Definição 9. Seja $E = K_n(x)$. Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, m pontos distintos, com $m \geq n$. Então

$$\langle f_i(x), f_j(x) \rangle = \sum_{k=1}^m f_i(x_k) f_j(x_k)$$

é um produto escalar em K_n .

Este último resultado mostra outra maneira de se transformar $K_n(x)$ num espaço euclidiano real, maneira que será útil em problemas de aproximação de funções pelo método dos mínimos quadrados no caso discreto.

Definição 10. Seja E um espaço euclidiano real. Sejam \vec{u}, \vec{v} elementos de E . Dizemos que \vec{u} é **ortogonal** a \vec{v} , em símbolo, $\vec{u} \perp \vec{v}$, se e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Teorema 1. A condição necessária e suficiente para que um vetor $\vec{v} \in E$ seja ortogonal a um sub-espaço $E' \subset E$ é que \vec{v} seja ortogonal a cada vetor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ de uma base de E' .

Demonstração. A condição é evidentemente necessária. Provemos a suficiência. Seja \vec{u} um vetor qualquer de E' . Temos então:

$$\vec{u} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n,$$

pois $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ é uma base de E' . Deve-se mostrar que $\vec{v} \perp \vec{u}$. Então deve-se ter:

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{v}, a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1 \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle + a_2 \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle + \dots + a_n \langle \vec{v}, \vec{e}_n \rangle = 0$$

desde que, por hipótese, $\vec{v} \perp \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Logo, \vec{v} é ortogonal a E' □

Definição 11. Chama-se **norma** de um vetor \vec{u} , em símbolo, $\|\vec{u}\|$, qualquer função definida num espaço vetorial E , com valores em \mathbb{R} , satisfazendo as seguintes condições:

$N_1)$ $\|\vec{u}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$,

$N_2)$ $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$ para todo escalar α ,

$N_3)$ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdade triangular).

$N_4)$ $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ (Desigualdade de Schwarz).

Um espaço vetorial E onde está definida uma norma é chamado **espaço vetorial normado**. Como exemplo:

Seja $E = \mathbb{R}^n$ e $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Definindo

$$\|\vec{u}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

o \mathbb{R}^n torna-se um espaço vetorial normado. **Observações:**

1) $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ corresponde à noção intuitiva de **comprimento** ou **módulo de um vetor**.

2) Se usar a definição usual de produto escalar no \mathbb{R}^n , então: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|\vec{v}\|_E$.

Definição 12. Seja E um espaço euclidiano. Dados os vetores $\vec{u} = x_1, x_2, \dots, x_n$ e $\vec{v} = y_1, y_2, \dots, y_n \in E$, define-se **distância** entre \vec{u} e \vec{v} , o comprimento do vetor $\vec{u} - \vec{v}$, isto é:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Rightarrow d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Tem-se assim uma aplicação $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

$D_1)$ $d(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$ e $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{v}$,

$D_2)$ $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$,

$D_3)$ $d(\vec{u}, \vec{v}) \leq d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$.

Com relação ao produto interno da Definição 9, a distância nesse caso, é dada por:

$$\|f_i(x) - f_j(x)\| = \sqrt{\langle f_i(x_k) - f_j(x_k), f_i(x_k) - f_j(x_k) \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^m [f_i(x_k) \cdot f_j(x_k)]^2}$$

A seguir serão definidas a projeção ortogonal de um vetor sobre outro e também a projeção ortogonal de um vetor sobre um sub-espaço. À este último caso, será dado um tratamento especial, visto que é utilizado no estudo de aproximação de funções pelo

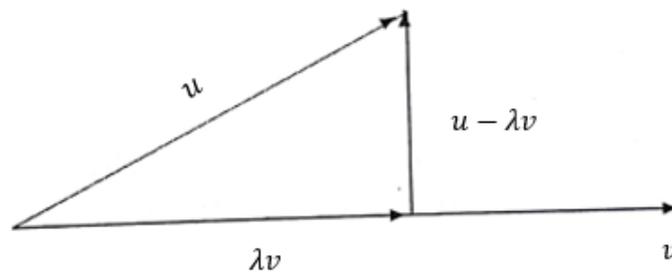
método dos Mínimos Quadrados.

Definição 13. Num espaço euclidiano real, chama-se **projeção ortogonal** de \vec{u} sobre \vec{v} , $\vec{v} \neq 0$, o vetor \vec{w} definido por:

$$\vec{w} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}.$$

A Figura 2.1 apresenta uma representação gráfica da Definição 13 com $\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Figura 2.1 – Projeção ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} . Representa-se \vec{u} e \vec{v} , por u e v , respectivamente



Fonte: Figura adaptada de Franco (2006).

Seguindo a desigualdade de Schwarz, que permite definir ângulo entre dois vetores não nulos em um espaço vetorial E munido de um produto interno. Para isso, dividindo ambos os membros da desigualdade de Schwarz por $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, sem alterar a desigualdade pois a norma é positiva, resultando em: $\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, ou seja, $\left| \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \right|$, e então existe um ângulo θ entre 0 e π tal que

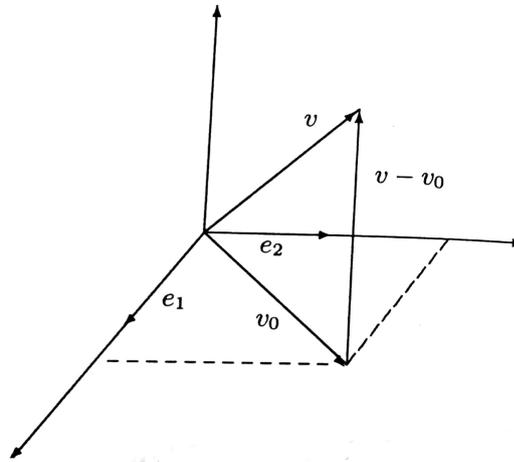
$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}. \quad (2.1)$$

Para analisar a projeção ortogonal de um vetor sobre um sub-espaço, considera-se que E seja um espaço euclidiano e que E' , de dimensão n , seja um sub-espaço de E .

Seja \vec{v} um vetor de E não pertencente a E' .

O problema que pretende-se resolver, é o de encontrar um vetor \vec{v}_0 de E' tal que $\vec{v} - \vec{v}_0$ seja ortogonal a todo vetor de E' . A Figura 2.2 ilustra o caso especial onde $E = \mathbb{R}^3$ e $E' = \mathbb{R}^2$.

Figura 2.2 – Ilustração geométrica do vetor \vec{v} ortogonal a todo vetor de E' , com \vec{u} , \vec{v} , \vec{e}_1 , \vec{e}_2 representados por u , v , e_1 , e_2 respectivamente



Fonte: Figura adaptada de Franco (2006).

Seja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ uma base de E' . Como $v_0 \in E'$, v_0 pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base de E' , isto é:

$$\vec{v}_0 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n. \quad (2.2)$$

O problema resume-se agora, em determinar, quando possível, as coordenadas a_1, a_2, \dots, a_n de v_0 .

Pelo Teorema 1 sabe-se que se $\vec{v} - \vec{v}_0$ deve ser ortogonal a todo vetor de E' , então é necessário e suficiente que $\vec{v} - \vec{v}_0$ seja ortogonal a todo vetor de uma base de E' . Então deve-se ter:

$$\langle \vec{v} - \vec{v}_0, \vec{e}_j \rangle = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$$

$$\langle \vec{v} - (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n), \vec{e}_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

A aplicação das propriedades P_2 e P_3 da definição 7, fornece:

$$a_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_j \rangle + a_2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_j \rangle + \dots + a_n \langle \vec{e}_n, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Tais equações são conhecidas por **equações normais**.

Assim, para encontrar as coordenadas de \vec{v}_0 na base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, deve-se resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{v} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Esse sistema é chamado de **sistema linear normal**.

O problema de determinar o vetor \vec{v}_0 tem solução única. O vetor \vec{v}_0 é denominado **projeção ortogonal** de \vec{v} sobre o sub-espaço E' .

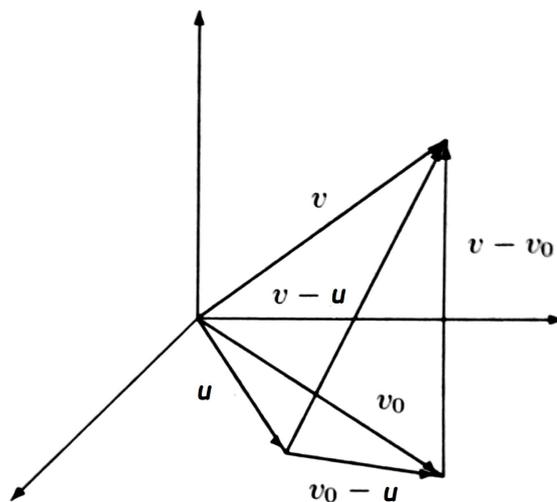
Teorema 2 (Teorema da Melhor Aproximação). *Seja E' um sub-espaço de dimensão finita de um espaço euclidiano E . Se \vec{v} for um vetor pertencente a E , então \vec{v}_0 , a projeção ortogonal de \vec{v} sobre E' , será a **melhor aproximação** para \vec{v} no sentido que*

$$\|\vec{v} - \vec{v}_0\| < \|\vec{v} - \vec{u}\|, \quad (2.4)$$

para qualquer que seja $\vec{u} \in E'$, tal que $\vec{u} \neq \vec{v}_0$.

Demonstração. Deve-se mostrar que a menor distância de \vec{v} ao sub-espaço E' é a distância entre \vec{v} e o pé da perpendicular traçada da extremidade de \vec{v} sobre E' . A Figura 2.3 ilustra o problema para o caso em que $E = \mathbb{R}^3$ e $E' = \mathbb{R}^2$.

Figura 2.3 – Ilustração geométrica do resultado enunciado no Teorema 2.4, para o caso em que $E = \mathbb{R}^3$ e $E' = \mathbb{R}^2$.



Fonte: Figura adaptada de Franco (2006)

Como $\vec{u}, \vec{v}_0 \in E'$ também $\vec{v}_0 - \vec{u} \in E'$ e é portanto ortogonal a $\vec{v} - \vec{v}_0$. Assim,

obtemos, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{v} - \vec{u} \rangle &= \langle \vec{v} - \vec{u} + \vec{v}_0 - \vec{v}_0, \vec{v} - \vec{u} + \vec{v}_0 - \vec{v}_0 \rangle \\ &= \langle \vec{v} - \vec{v}_0, \vec{v} - \vec{v}_0 \rangle + 2\langle \vec{v} - \vec{v}_0, \vec{v}_0 - \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}_0 - \vec{u}, \vec{v}_0 - \vec{u} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{v}_0\|^2 + \|\vec{v}_0 - \vec{u}\|^2. \quad (2.5)$$

Como, por hipótese, $\vec{u} \neq \vec{v}_0$, concluí-se que $\|\vec{v}_0 - \vec{u}\| > 0$. Daí, e utilizando 2.5, obtemos finalmente:

$$\|\vec{v} - \vec{u}\| > \|\vec{v} - \vec{v}_0\|.$$

A desigualdade (2.4) mostra que a projeção ortogonal \vec{v}_0 de \vec{v} sobre E' é tal que a menor distância de \vec{v} sobre E' é a distância de \vec{v} a \vec{v}_0 . \square

2.1 APROXIMAÇÃO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Segundo Franco (2006), o método dos mínimos quadrados consiste em aproximar uma função $y = f(x), \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por uma função $F(x)$ que seja combinação linear de funções conhecidas, ou ainda, diz-se que é feito o ajuste de $f(x)$ por $F(x)$, ou seja:

$$f(x) \simeq a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) = F(x) \quad (2.6)$$

de tal modo que a distância de $f(x)$ a $F(x)$ seja a menor possível em algum sentido.

A substituição de $f(x)$ por uma função $F(x)$ é indicada quando a utilização da função principal, apresenta alguns inconvenientes, tais como:

- $f(x)$ é definida por meio de processos não finitos como integrais, soma de séries, etc;
- $f(x)$ é conhecida através de pares de pontos, obtidos através de dados experimentais, e deseja-se substituir por uma função que o gráfico se ajuste aos pontos obtidos dos experimentos.

Este segundo, é o inconveniente encontrado na elaboração deste trabalho.

Estes inconvenientes podem ser superados, dependendo de uma escolha apropriada para a função $F(x)$.

Nesta abordagem do **Método dos Mínimos Quadrados** para aproximação de funções, tem-se como base a projeção ortogonal de um vetor sobre um sub-espço, isto é, o problema consiste em aproximar uma função $f(x)$ de E por uma função $F(x)$ de E' tal que

a distância de $f(x)$ a E' seja mínima. Assim, o que pretende-se é que $dist(f(x), F(x))$ seja mínima. Utilizando a Definição 12 e o produto interno da Definição 9, tem-se que:

$$dist(f(x), F(x)) = \|f(x) - F(x)\| = \sqrt{\langle f - F, f - F \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^m [f(x_i) - F(x_i)]^2} \quad (2.7)$$

Tal distância deve ser mínima.

Na verdade, o que se deseja obter é $Q = \|f(x) - F(x)\|^2$ seja mínima, daí a justificativa para o nome **mínimos quadrados**.

Como os dados deste trabalho, consistem em pares de pontos, veremos o método dos mínimos quadrados para o caso discreto. Para o caso contínuo ver Ruggiero e Lopes (2000).

2.1.1 Caso Discreto

Sejam dados os pontos $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_m, f(x_m))$ e as n funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ escolhidas de alguma forma.

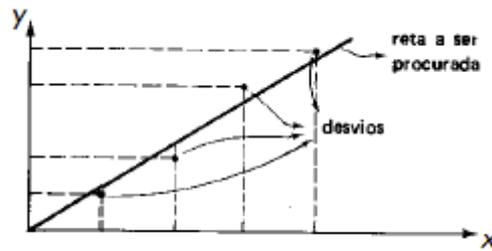
Sejam m pontos tabelados, n o número de funções escolhidas ou o número de coeficientes $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, a se determinar, tais que $m \geq n$.

O objetivo é então encontrar os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tais que a função $F(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Diz-se que este é um modelo linear, pois os coeficientes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ aparecem linearmente, embora as funções g_k possam não serem lineares em x .

A Figura 2.4 ilustra um exemplo de aproximação linear para $n = 2$, com $g_1(x) = 0$ e $g_2(x) = x$. Pode-se observar que esta configuração apresenta uma interpretação para $d(x_i), i = 1, 2, \dots, 5$, o qual, segundo Boldrini et al. (1984), denomina desvio. Segundo estes autores, define-se $d(x_i) = f(x_i) - F(x_i)$, o desvio como a diferença entre o valor dado tabelado e o valor dado pela reta em cada $x_i, i = 1, \dots, n$. Então pode-se relacionar $d(x_i)$ com os vetores da Definição 12 e o Teorema 2, isto é, pode-se dizer que a Equação (2.7) é a raiz quadrada da soma dos desvios ao quadrado. Sendo assim, para que se aproxime $F(x)$ de $f(x)$ precisa-se determinar a_2 tal que a soma dos desvios ao quadrado seja mínima, para determinar a reta $F(x) = a_2x$ procurada.

Figura 2.4 – Interpretação geométrica para os desvios $d(x_i)$



Fonte: Figura adaptada de Boldrini et al. (1984)

Dentro dos critérios dos quadrados mínimos, os coeficientes a_i , que fazem com que $F(x)$ se aproxime de ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função²

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - F(x_i))^2$$

Isto é

$$Q = \sum_{i=1}^m [f(x_i) - (a_1g_1(x_i) + a_2g_2(x_i) + \dots + a_ng_n(x_i))]^2 \quad (2.8)$$

Conforme sabe-se do Cálculo Diferencial, para encontrar os coeficientes que minimizam a função, deve-se inicialmente encontrar seus pontos críticos. Para isso consideram-se as derivadas parciais para cada a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, iguais a zero, como segue:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1g_1(x_i) - \dots - a_ng_n(x_i)] [-g_k(x_i)] = 0, \text{ com } k = 1, 2, \dots, n$$

Assim, para $k = 1, \dots, n$ tem-se o sistema de equações:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1g_1(x_i) - \dots - a_ng_n(x_i)]g_1(x_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1g_1(x_i) - \dots - a_ng_n(x_i)]g_2(x_i) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^m [f(x_i) - a_1g_1(x_i) - \dots - a_ng_n(x_i)]g_n(x_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (2.9)$$

Pode-se reescrever as equações do Sistema 2.9 como

²Define-se o erro de truncamento para o caso discreto como a soma dos quadrados das diferença entre os valores estimados e os dados coletados, ou seja, a soma dos quadrados dos desvios, e é dado pela Expressão 2.8.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i)g_1(x_i) \right] a_1 + \cdots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i)g_1(x_i) \right] a_n = \sum_{i=1}^m f(x_i)g_1(x_i) \\ \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i)g_2(x_i) \right] a_1 + \cdots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i)g_2(x_i) \right] a_n = \sum_{i=1}^m f(x_i)g_2(x_i) \\ \vdots \\ \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i)g_n(x_i) \right] a_1 + \cdots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i)g_n(x_i) \right] a_n = \sum_{i=1}^m f(x_i)g_n(x_i) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

De maneira matricial e usando a Definição 9, o Sistema (2.10) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_1, g_n \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_2, g_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_n, g_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f \rangle \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

O Sistema (2.11) é o sistema linear normal associado ao Método dos Mínimos Quadrados.

Como é conhecida a forma das funções g , e os valores de $f(x_i)$, pode-se resolver o sistema e encontrar os coeficientes a_i que melhor ajustam a função estimada aos dados experimentais.

A suposição da função que será usada para aproximação aos dados experimentais, dependerá quase que exclusivamente da visualização do gráfico de dispersão dos dados. Tal análise é feita pelo teste de alinhamento, conforme descrito em Franco (2006).

A partir do gráfico discreto dos dados, supõem-se funções elementares, como polinomiais (1º grau até graus maiores), exponenciais, logarítmicas, ou mais complexas como trigonométricas e polinômios especiais (Legendre, Laguerre), para as funções g_1, g_2, \dots, g_n .

Neste trabalho, após verificar o gráfico de dispersão, foram supostas as funções do tipo afim, a exponencial e a função potência. Por isso, serão estes os ajustes de funções que serão estudados a seguir.

2.1.2 Ajuste Linear

Para o caso linear (afim) será usado como base $\{1, x\} = \{g_1, g_2\}$. Sendo assim o ajuste será feito pela função $F(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x)$, para $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$,

resultando em

$$F(x) = a_1 + a_2x \quad (2.12)$$

Utilizando o sistema de equações normais (2.11), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Substituindo $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$ no sistema matricial (2.13) segue que:

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, f \rangle \\ \langle x, f \rangle \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Utilizando a Definição 8, obtém-se o sistema matricial (2.15)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m 1 \cdot 1 & \sum_{i=1}^m 1 \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot 1 & \sum_{i=1}^m x_i \cdot x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m 1 \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

De maneira similar:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum_{i=1}^m 1 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i \\ a_1 \cdot \sum_{i=1}^m x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \end{cases} \quad (2.16)$$

O sistema de equações lineares (2.16) tem solução dada pela Equação (2.17) e pela Equação (2.18) para a_1 e a_2 , respectivamente:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i \sum_{i=1}^m x_i}{m(\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \quad (2.17)$$

e

$$a_2 = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i}{m(\sum_{i=1}^m x_i^2) - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \quad (2.18)$$

Obtendo assim a função $F(x)$ que melhor aproxima os dados representados por $f(x)$ por meio do método dos Mínimos Quadrado, em casos em que o ajuste é linear nos

coeficientes.

Porém, há casos em que o gráfico de dispersão sugere a aproximação por uma função não linear em seus parâmetros, por exemplo, uma exponencial ou uma função potência, como mostrados a seguir.

2.1.3 Ajuste Exponencial

Para aplicar o método dos mínimos quadrados desenvolvido na Seção 2.1.1, isto é, resolver o problema de aproximar $f(x)$ por uma função do tipo exponencial e a partir dela obter o Sistema de Equações Normais 2.11, é necessário linearizar a função exponencial.

Seja

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

com

$$f(x) \simeq ae^{bx}, \quad (2.19)$$

tal função pode ser reduzida, por uma transformação logarítmica³, ao problema de aproximar

$$\ln f(x) \simeq \ln a + bx.$$

Nomeando $F(x) = \ln f(x)$, $a_1 = \ln a$ e $a_2 = b$, obtém-se:

$$F(x) \simeq a_1 + a_2x \quad (2.20)$$

Sendo assim, pode-se identificar $g_1 = 1$ e $g_2 = x$.

Ora, o problema original (2.19) foi reduzido ao de aproximar $f(x)$ por uma função linear em seus parâmetros. Portanto o método dos quadrados mínimos pode ser agora aplicado ao problema linearizado (2.20).

Logo, pode-se encontrar os parâmetros utilizando as Equações (2.17) e (2.18).

Após encontrar os parâmetros a_1 e a_2 , pode-se aplicar as transformações inversas necessárias para calcular os parâmetros originais a e b .

Como são feitas duas transformações, uma para linearizar o problema para aplicar o método dos mínimos quadrados e depois a transformação inversa para obter os parâmetros originais, acontece que estes não serão, em geral, ótimos no sentido do método dos mínimos quadrados, pois o método foi aplicado no problema linearizado.

³cabe lembrar que, dentre as possíveis bases, pode-se utilizar a que for mais conveniente, desde que no momento de retornar aos parâmetros originais, a transformação exponencial utilize da mesma base

2.1.4 Ajuste por uma função potência

Em casos, o ajuste pode ser feito por uma função potência (muitos autores utilizam a nomenclatura função do tipo geométrica). Neste caso, a função também não é linear nos parâmetros.

Para utilizar o método dos mínimos quadrados, primeiramente deve-se aplicar uma transformação para que se obtenha uma função linear nos parâmetros.

Seja

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto y = h(x) \end{aligned}$$

Com

$$h(x) \simeq ax^b, \quad b > 0 \text{ e } b \neq 1 \quad (2.21)$$

primeiramente aplica-se o logaritmo na base e (novamente a base é escolhida de modo conveniente.), tem-se então:

$$\ln h(x) \simeq \ln a + b \ln x$$

Nomeando $F(x) = \ln h(x)$, $\ln a = a_1$, $b = a_2$ e $\ln x = X$

$$F(X) \simeq a_1 + a_2 X \quad (2.22)$$

Onde $g_1 = 1$ e $g_2 = X$.

Feita a linearização (2.22), usa-se as equações (2.17) e (2.18), para obter os parâmetros a_1 e a_2 . Aplicando a transformação inversa, obtém-se a e b . Tais parâmetros encontrados para a função original (2.21), não são ótimos, no sentido do método dos mínimos quadrados, pois o método não foi aplicado ao problema original.

Após ter feito os ajustes citados anteriormente, deve-se decidir qual deles apresenta a função que mais se aproxima de $f(x)$.

2.2 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO DE PEARSON

Quando se têm estudos práticos, em que dispõe-se um conjunto de dados com duas variáveis, sugere-se pensar o quão essas variáveis estão relacionadas, ou seja, o que acontece com uma das variáveis se a outra modifica seu comportamento. Cabe ressaltar que, não se distinguem variáveis dependentes e variáveis independentes, pois geralmente não pode-se afirmar qual variável varia em função de qual (SCHIELD, 1995).

Tal verificação, pode ser feita se ao visualizar o gráfico de dispersão, se os dados

estiverem próximos a uma reta, então a relação é forte, do contrário, tem-se uma relação fraca entre ambas variáveis (MOORE; MCCABE; CRAIG, 2007).

Graficamente, pode-se ter uma ideia da relação entre os dados, porém pode-se calcular matematicamente por meio do ângulo entre dois vetores.

Para isso sejam $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ valores de cada variável em cada uma das medições. Destes valores podem ser considerados os vetores $\vec{u} = \{x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_m - \bar{x}\}$ e $\vec{v} = \{y_1 - \bar{y}, y_2 - \bar{y}, \dots, y_m - \bar{y}\}$ num espaço n -dimensional, em que \bar{x} e \bar{y} são as médias aritméticas entre todos os x_i e y_i , respectivamente. Considerando tais vetores, verifica-se o que acontece se existir um número λ tal que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Neste caso, pode-se perceber que se \vec{u} variar, \vec{v} varia proporcionalmente, com isso \vec{u} e \vec{v} estão fortemente relacionados. Segundo Boldrini et al. (1984) essa condição é equivalente a condição de que os vetores tenham a mesma direção, ou seja, o ângulo entre estes vetores deve ser ou 0 ou π , então o cosseno do ângulo deve ser 1 ou -1 . Ainda, segundo este autor, o valor do cosseno do ângulo formado entre estes dois vetores é uma medida de relação entre x e y , e para esta medida chama-se coeficiente de correlação linear, neste trabalho, denomina-se coeficiente de correlação de Pearson, denotado pela letra grega ρ ou por r .

Logo pode-se calcular o valor desse coeficiente, utilizando a Expressão 2.1,

$$\rho = r = \cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Pode-se utilizar da Definição 9 e da Definição 11 para reescrever tal equação como:

$$\rho = r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (2.23)$$

Logo, quanto mais próximo de 1 ou -1 estiver o valor desse coeficiente, maior será a correlação entre essas variáveis.

2.3 ITERAÇÃO DE PONTO FIXO

Esta seção tem como base Burden e Faires (2013).

Definição 14. Um número p é chamado **ponto fixo** de uma dada função g se $g(p) = p$

Porém, para que se tenha um ponto fixo, deve-se verificar um teorema que estipula condições suficientes para sua existência, e ainda mais, condições suficientes para a uni-

cidade do ponto fixo.

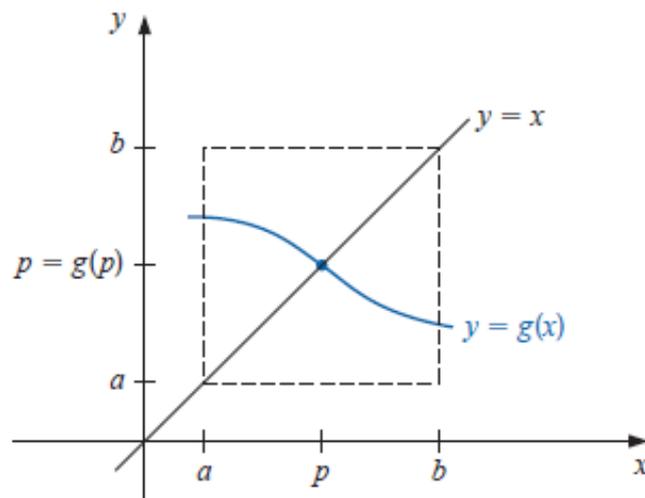
Teorema 3. a. Se $g \in C[a, b]$, e $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$, g terá um ponto fixo em $[a, b]$

b. Além disso, se $g'(x)$ existir em (a, b) e existir uma constante positiva $k < 1$ com

$$|g'(x)| \leq k, \text{ para todo } x \in (a, b)$$

então o ponto fixo em $[a, b]$ será único. Veja Figura 2.5.

Figura 2.5 – Visualização gráfica do Teorema 3



Fonte: Figura adaptada de Burden e Faires (2013).

Demonstração. a. Se $g(a) = a$ ou $g(b) = b$, g tem um ponto fixo em uma extremidade. Caso contrário, $g(a) > a$ e $g(b) < b$. A função $h(x) = g(x) - x$ é contínua em (a, b) , com $h(a) = g(a) - a > 0$ e $h(b) = g(b) - b < 0$.

O Teorema do Valor Intermediário implica a existência de $p \in (a, b)$ para o qual $h(p) = 0$. Esse número p é um ponto fixo de g uma vez que

$$0 = h(p) = g(p) - p \Rightarrow g(p) = p$$

b. Suponha também que $|g'(x)| \leq k < 1$ e que p e q sejam pontos fixos em $[a, b]$. Se $p \neq q$, o Teorema do Valor Médio implica a existência de um número δ entre p e q e, portanto, em $[a, b]$, com

$$\frac{g(p) - g(q)}{p - q} = g'(\delta)$$

Assim,

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\delta)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|,$$

o que é uma contradição. Como tem-se uma única hipótese, de que $p \neq q$, então a contradição se deu por sua causa. Logo $p = q$, e o ponto fixo em $[a, b]$ é único. \square

Com isso, têm-se condições suficientes para garantir a existência e unicidade de um ponto fixo no intervalo $[a, b]$.

Exemplo 1. Seja $f(x) = e^{-x}$ definida em $[0, 1]$. Como $f'(x) = -e^{-x} < 0$ em $[0, 1]$, a função f é decrescente em $[0, 1]$, e

$$f(1) = \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1 = f(0),$$

para $x \in [0, 1]$.

Portanto, para todo $x \in [0, 1]$, tem-se que $f(x) \in [0, 1]$, então f tem um ponto fixo em $[0, 1]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, é derivável em $(0, 1)$, e

$$|f'(x)| = \left| \frac{-1}{e^x} \right| = \frac{1}{e^x} < 1,$$

para todo $x \in (0, 1)$.

Logo satisfaz o item **b** do Teorema 3, então o seu ponto fixo em $[0, 1]$ é único.

Agora, para determinar a aproximação do ponto fixo de g escolhe-se uma aproximação inicial $p_0 \in [a, b]$ e gera-se uma sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, definindo $p_{n+1} = g(p_n)$, para cada $n \geq 0$. Se a sequência convergir para p e g for contínua, então

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n) = g(p)$$

então será obtida uma solução para $x = g(x)$.

Desses resultados, define-se o ponto de equilíbrio.

Definição 15. Um ponto x pertencente ao domínio de g é um ponto de equilíbrio de uma função, se é um ponto fixo de g , ou seja, $g(x) = x$.

3 MODELO

O tema no qual será feita a aplicação, é na área de Zootecnia, mais especificamente em relação a nutrição animal. Tal escolha, deve-se ao fato da região em que esse trabalho está inserido é predominantemente desenvolvida em torno da agricultura e da pecuária, em especial, tem-se a produção de ovinos, prática em constante crescimento nessa região.

O modelo a ser estudado basea-se na pesquisa realizada com ovinos por Martins (2013). Tal pesquisa defende que a formulação de rações balanceadas, a redução de custos e o ganho máximo de rendimento de um animal, depende do estudo e consequentemente do conhecimento detalhado das necessidades fisiológicas do animal, juntamente com a necessidade de alimentação para ganho, e que o ganho seja o máximo possível, sem excesso ou perdas.

No Brasil atualmente, as exigências nutricionais de ovinos, são baseadas em recomendações de sistemas de avaliação de alimentos e exigências nutricionais internacionais, para a realização do cálculo de dietas (MARTINS, 2013).

Para resolver esse problema, Martins (2013) realizou uma pesquisa acerca das exigências nutricionais de cordeiros da raça Texel. Como os ambientes dos quais se têm as bases dos cálculos de exigências são diferentes do que se encontra no Brasil, no que tange os aspectos climáticos, de nutrição, entre outros fatores que interferem no cálculo, fez jus a necessidade de tal pesquisa.

Dentre as exigências nutricionais estudadas, têm-se as exigências nutricionais de energia. Segundo Martins (2017), a energia é um nutriente fundamental para determinar a limitação da produção de ovinos. A necessidade energética escassa, resulta em tardança no crescimento, aumento da idade a puberdade, diminuição da fertilidade, diminuição na produção de lã e leite, e ampliação do risco a doenças e parasitas (SUSIN, 1981 apud MARTINS, 2017).

As exigências de energia líquida, são separadas em exigência de Energia Metabolizável para manutenção, e exigência de energia para ganho (gordura, musculatura, entre outros). Destas, têm-se que a exigência de Energia Metabolizável para manutenção é a energia para manter a estabilidade fisiológica do animal, ou seja, a energia necessária apenas para que seu corpo funcione sem perdas ou ganhos (GALVANI, 2008). Portanto, para que em momentos de crise, ou qualquer outro problema adverso, faz-se necessário ter o conhecimento do mínimo de energia requerida para esses animais, sem que eles tenham uma dieta deficitária, acarretando assim, em perda de funções importantes para o funcionamento orgânico do animal.

Uma das formas de calcular a exigência de Energia Metabolizável para Manutenção (EMm), é considerar o ponto de equilíbrio da equação de regressão entre o logaritmo

da PC ($PC, Kcal/KgPV^{0,75}/dia$) em função do CEM ($CEM, Kcal/KgPV^{0,75}/dia$) (LOF-GREEN; GARRET, 1968 apud MARTINS, 2017).

Para tal estudo, faz-se necessária a coleta dos dados associados a estas grandezas. Esta coleta é descrita no trabalho de Martins (2013) e será usada para comprovações e cálculos sobre as necessidades energéticas.

Com estes dados, e utilizando os conceitos matemáticos discutidos no Capítulo 2, pode-se formular modelos matemáticos que possam representar os dados coletados, e então, usá-las para calcular e analisar as quantidades envolvidas no problema real.

Os dados experimentais usados nesse estudo se encontram dispostos na Tabela 3.1, em que cada linha, corresponde ao valor obtido para um animal.

Tabela 3.1 – Dados experimentais do Consumo de Energia metabolizável e da produção de calor.

CEM (Kcal/Kg PV 0,75/DIA)	PC (Kcal/Kg PV 0,75/DIA)
115,50	114,54
108,44	107,54
113,83	112,87
116,77	115,55
114,48	113,24
117,02	115,51
141,13	130,57
138,42	130,10
140,95	127,88
146,06	135,30
135,72	127,40
131,47	123,63
196,87	168,41
177,74	165,19
216,05	195,25
214,81	189,10
207,04	186,00

A sequência utilizada para o cálculo do ponto de equilíbrio inicia com o gráfico de dispersão dos dados da Tabela 3.1, ilustrado pela Figura 3.1. Em seguida, a partir da visualização gráfica, supõe-se funções de ajuste calculadas pelo método dos Mínimos Quadrados. O coeficiente de correlação de Pearson será o índice utilizado para a escolha da função que melhor ajusta os dados coletados.

Observe que uma análise rápida da Figura 3.1 conduz à uma ideia de que a fun-

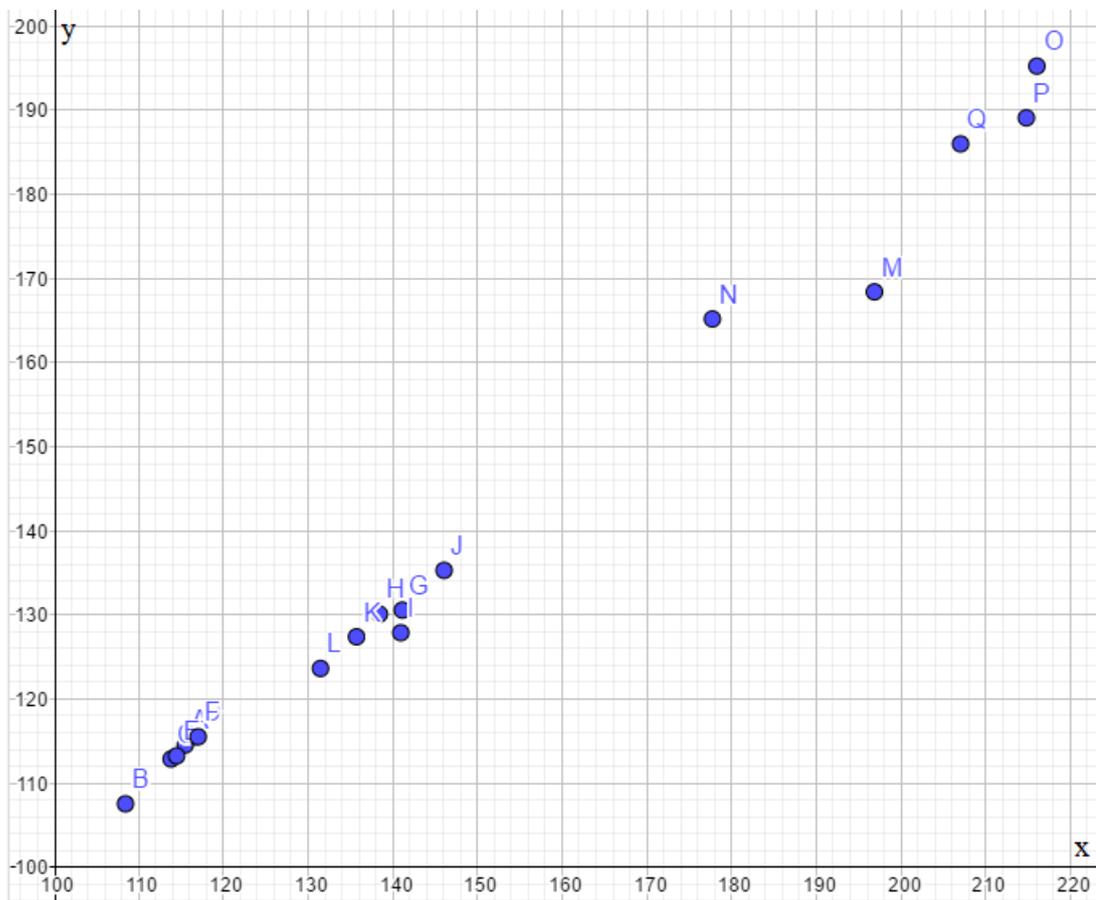
ção afim é a função que melhor ajusta os dados disponíveis. Porém, com uma análise mais criteriosa, pode surgir o questionamento sobre se outros tipos de funções poderiam representar estes dados melhor do que uma função afim, como exemplo, uma função exponencial, ou uma função potência. Por este questionamento, serão analisadas três tipos de funções, e concluir a que melhor representa os dados da Tabela 3.1.

Para a análise, será utilizado x_i para cada um dos valores de CEM e $y_i = f(x_i)$ para cada valor do PC. O domínio das funções ajuste são

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Figura 3.1 – Ilustração gráfica dos dados da Tabela 3.1



Fonte: Elaborado pelo autor, no Geogebra.

3.1 AJUSTE LINEAR

Para o início de uma análise, geralmente é mais viável verificar se o melhor ajuste dos dados coletados é uma reta, visto que esta é a forma mais simples das funções elementares. Supõe-se a função do tipo

$$F(x) = ax + b. \quad (3.1)$$

Utilizando as equações (2.17) e (2.18) para obter os coeficientes a e b , pode-se calcular cada termo das fórmulas separadamente. Para isso utilizam-se os dados da Tabela 3.1, e obtém-se os dados da Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Dados necessários ao cálculo de a e b da equação (3.1).

x_i	$F(x_i)$	x_i^2	$x_i.F(x_i)$
115,50	114,54	13340,2500	13229,5726
108,44	107,54	11759,2336	11661,2593
113,83	112,87	12957,2689	12848,1918
116,77	115,55	13635,2329	13493,2131
114,48	113,24	13105,6704	12963,7057
117,02	115,51	13693,6804	13517,4700
141,13	130,57	19917,6769	18427,6393
138,42	130,10	19160,0964	18008,6701
140,95	127,88	19866,9025	18024,4469
146,06	135,30	21333,5236	19761,1985
135,72	127,40	18419,9184	17290,9516
131,47	123,63	17284,3609	16253,2394
196,87	168,41	38757,7969	33155,0182
177,74	165,19	31591,5076	29360,3770
216,05	195,25	46677,6025	42183,5733
214,81	189,10	46143,3361	40619,7734
207,04	186,00	42865,5616	38509,0568
$\sum = 2532,3000$	$\sum = 2358,0751$	$\sum = 400509,6196$	$\sum = 369307,3570$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando da Equação(2.18), tem-se:

$$a = \frac{17.369307,3570 - 2532,3000.2358,0751}{17.400509,6196 - 2532,3000^2} = 0,7747.$$

E da Equação (2.17), obtém-se:

$$b = \frac{400509,6196.2358,0751 - 369307,3570.2532,3000}{17.400509,6196 - 2532,3000^2} = 23,3130.$$

Portanto, têm-se a função

$$F(x) = 0,7747x + 23,3130. \quad (3.2)$$

Dada a Equação (3.2), pode-se obter os valores $F(x_i) = ax_i + b$, logo tem-se:

Tabela 3.3 – Valores ajustados pela função (3.2)

x_i	$F(x_i) = 0,7747x_i + 23,3130$
115,50	112,7909
108,44	107,3215
113,83	111,4971
116,77	113,7747
114,48	112,0007
117,02	113,9684
141,13	132,6464
138,42	130,5470
140,95	132,5070
146,06	136,4657
135,72	128,4553
131,47	125,1628
196,87	175,8282
177,74	161,0082
216,05	190,6869
214,81	189,7263
207,04	183,7069

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para obter o erro de truncamento, calcula-se a diferença entre $F(x_i)$ e y_i , e este diferença elevada ao quadrado como mostrado na Tabela 3.4

Tabela 3.4 – Erro de truncamento do ajuste linear para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$

$(y_i - F(x_i))^2$	=
$(114,54 - 112,7909)^2$	3,0657
$(107,54 - 107,3215)^2$	0,0462
$(112,87 - 111,4971)^2$	1,8897
$(115,55 - 113,7747)^2$	3,1650
$(113,24 - 112,0007)^2$	1,5358
$(115,51 - 113,9684)^2$	2,3895
$(130,57 - 132,6464)^2$	4,3028
$(130,10 - 130,5470)^2$	0,1983
$(127,88 - 132,5070)^2$	21,4245
$(135,30 - 136,4657)^2$	1,3703
$(127,40 - 128,4553)^2$	1,1101
$(123,63 - 125,1628)^2$	2,3588
$(168,41 - 175,8282)^2$	55,0189
$(165,19 - 161,0082)^2$	17,4644
$(195,25 - 190,6869)^2$	20,8136
$(189,10 - 189,7263)^2$	0,3969
$(186,00 - 183,7069)^2$	5,2499
Erro de truncamento da função afim	141,8003

Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo tem-se que o erro de truncamento nesse caso é 141,8003. Posteriormente, será feita comparação dos erros dos ajustes e uma análise dessa comparação.

Para cálculo do coeficiente de correlação de Pearson, utiliza-se os valores da Tabela 3.1, para

$$\bar{x} = 148,9588;$$

$$\bar{y} = 138,7106.$$

A Tabela 3.5 apresenta cada um dos termos da Fórmula (2.23)

Tabela 3.5 – Cálculo de r , entre os dados originais e os aproximados.

$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
-33,4588	-24,1706	808,7194	1119,4929	584,2173
-40,5188	-31,1706	1262,9956	1641,7751	971,6056
-35,1288	-25,8406	907,7495	1234,0342	667,7360
-32,1888	-23,1606	745,5121	1036,1204	536,4128
-34,4788	-25,4706	878,1959	1188,7893	648,7509
-31,9388	-23,2006	740,9995	1020,0884	538,2673
-7,8288	-8,1406	63,7312	61,2905	66,2692
-10,5388	-8,6106	90,7455	111,0668	74,1422
-8,0088	-10,8306	86,7403	64,1413	117,3016
-2,8988	-3,4106	9,8867	8,4032	11,6321
-13,2388	-11,3106	149,7389	175,2664	127,9294
-17,4888	-15,0806	263,7417	305,8589	227,4241
47,9112	29,6994	1422,9338	2295,4808	882,0551
28,7812	26,4794	762,1086	828,3561	701,1592
67,0912	56,5394	3793,2957	4501,2260	3196,7051
65,8512	50,3894	3318,2020	4336,3774	2539,0928
58,0812	47,2894	2746,6247	3373,4231	2236,2885
		$\sum = 18051,9210$	$\sum = 23301,1908$	$\sum = 14126,9893$

Fonte: Elaborado pelo autor.

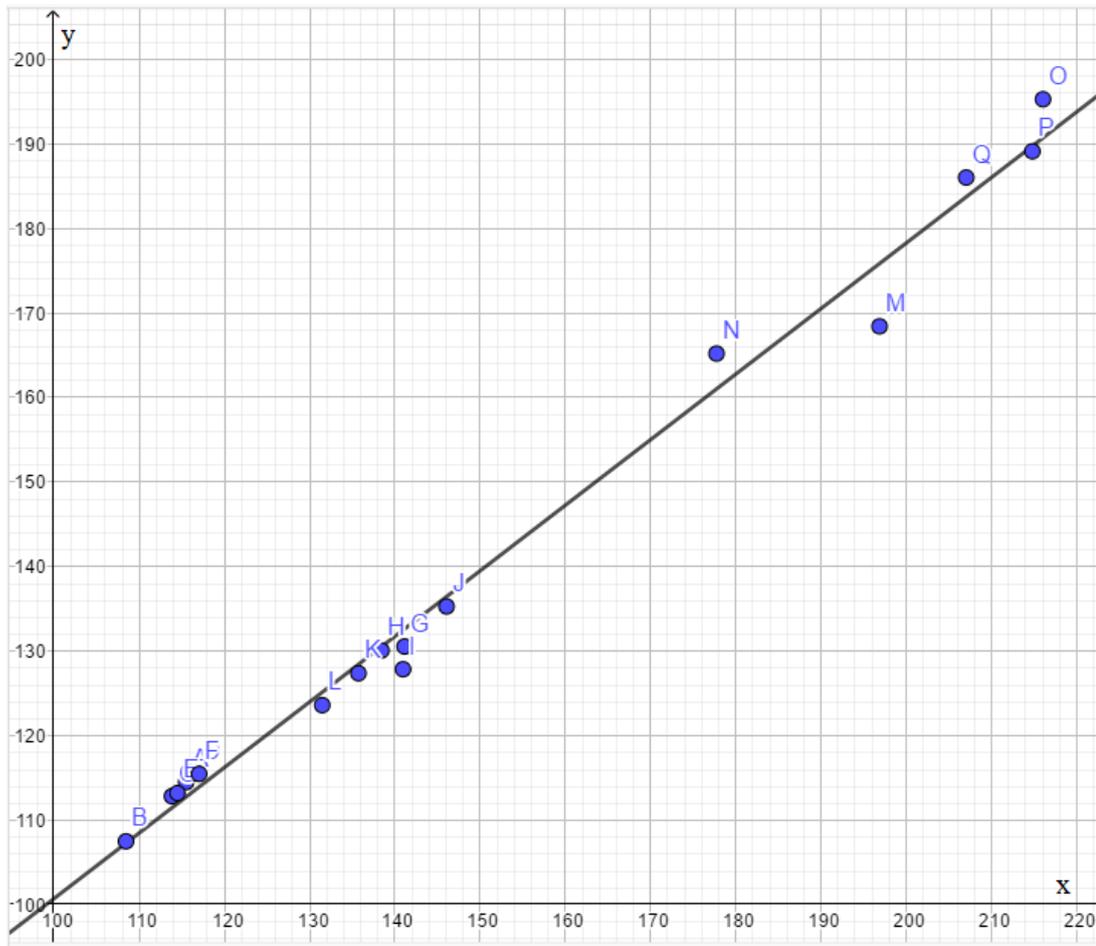
Sendo assim, r é dado por:

$$r = \frac{18051,9210}{\sqrt{23301,1908} \cdot \sqrt{14126,9893}} = 0,9950$$

Com isso, obtém-se que $r = 0,9950$.

A Figura 3.2 apresenta graficamente o ajuste linear. Observe que o coeficiente de correlação é próximo de 1 e visualmente o ajuste está próximo dos dados experimentais.

Figura 3.2 – O ajuste linear e os dados experimentais



Fonte: Elaborado pelo autor, no Geogebra.

3.2 AJUSTE EXPONENCIAL

Observando a disposição dos pontos é prudente supor também, uma aproximação por uma função exponencial, logo uma função do tipo

$$y = a_1 10^{a_0 x} \quad (3.3)$$

Primeiramente deve-se linearizar essa função (ver Seção 2.1.3), daí tem-se

$$\log y = \log a_1 + a_0 x \quad (3.4)$$

Nomeando $F(x) = \log y$, $\log a_1 = b$ e $a_0 = a$, obtém-se:

$$F(x) = ax + b \quad (3.5)$$

Tendo linearizado a função, usa-se o método dos mínimos quadrados linear (ver Seção 2.1.3). Para utilizar a Fórmula 3.5 será necessário aplicar o logaritmo ao dados de y_i e então o valor encontrado para b será o valor do logaritmo de a_1 .

A Tabela 3.6 apresenta os dados experimentais após aplicar o logaritmo

Tabela 3.6 – Dados necessários para o cálculo de a e b da função (3.5)

x_i	$\log y_i$
115,50	2,0590
108,44	2,0316
113,83	2,0526
116,77	2,0628
114,48	2,0540
117,02	2,0626
141,13	2,1159
138,42	2,1143
140,95	2,1068
146,06	2,1313
135,72	2,1052
131,47	2,0921
196,87	2,2264
177,74	2,2180
216,05	2,2906
214,81	2,2767
207,04	2,2695

Fonte: Elaborado pelo autor.

Destes dados, pode-se encontrar os valores necessários para calcular os valores de a e b , utilizando as Equações (2.18) e (2.17). Estes valores constam na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Dados necessários para a utilização das Equações (2.17) e (2.18)

x_i	$F(x_i)$	x_i^2	$x_i \cdot F(x_i)$
115,50	2,0590	13340,2500	237,8103
108,44	2,0316	11759,2336	220,3019
113,83	2,0526	12957,2689	233,6458
116,77	2,0628	13635,2329	240,8713
114,48	2,0540	13105,6704	235,1419
117,02	2,0626	13693,6804	241,3696
141,13	2,1159	19917,6769	298,6100
138,42	2,1143	19160,0964	292,6590
140,95	2,1068	19866,9025	296,9530
146,06	2,1313	21333,5236	311,2950
135,72	2,1052	18419,9184	285,7144
131,47	2,0921	17284,3609	275,0501
196,87	2,2264	38757,7969	438,3054
177,74	2,2180	31591,5076	394,2231
216,05	2,2906	46677,6025	494,8818
214,81	2,2767	46143,3361	489,0543
207,04	2,2695	42865,5616	469,8791
$\sum = 2532,3000$	$\sum = 36,2692$	$\sum = 400509,6196$	$\sum = 5455,7660$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando então da Equação (2.18), tem-se:

$$a = \frac{17.5455,7660 - 2532,3000 \cdot 36,2692}{17.400509,6196 - 2532,3000^2} = 0,0023$$

Utilizando da Equação (2.17), obtém-se:

$$b = \frac{400509,6196 \cdot 36,2692 - 5455,7660 \cdot 2532,3000}{17.400509,6196 - 2532,3000^2} = 1,7937$$

Portanto têm-se a função ajustada linearmente,

$$F(x) = 0,0023x + 1,7937 \quad (3.6)$$

Utilizando as funções inversas obtém-se a função original de ajuste exponencial

$$y = 62,1871 \cdot 10^{0,0023x} \quad (3.7)$$

O erro quadrático foi calculado utilizando a função linearizada como descrito em (2.1.2). Para isso, têm-se as diferenças entre $f(x_i)$ e $F(x_i)$ elevadas ao quadrado conforme a Tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Erro de truncamento da função (3.6) para $i = 1, 2, 3, \dots, 17$

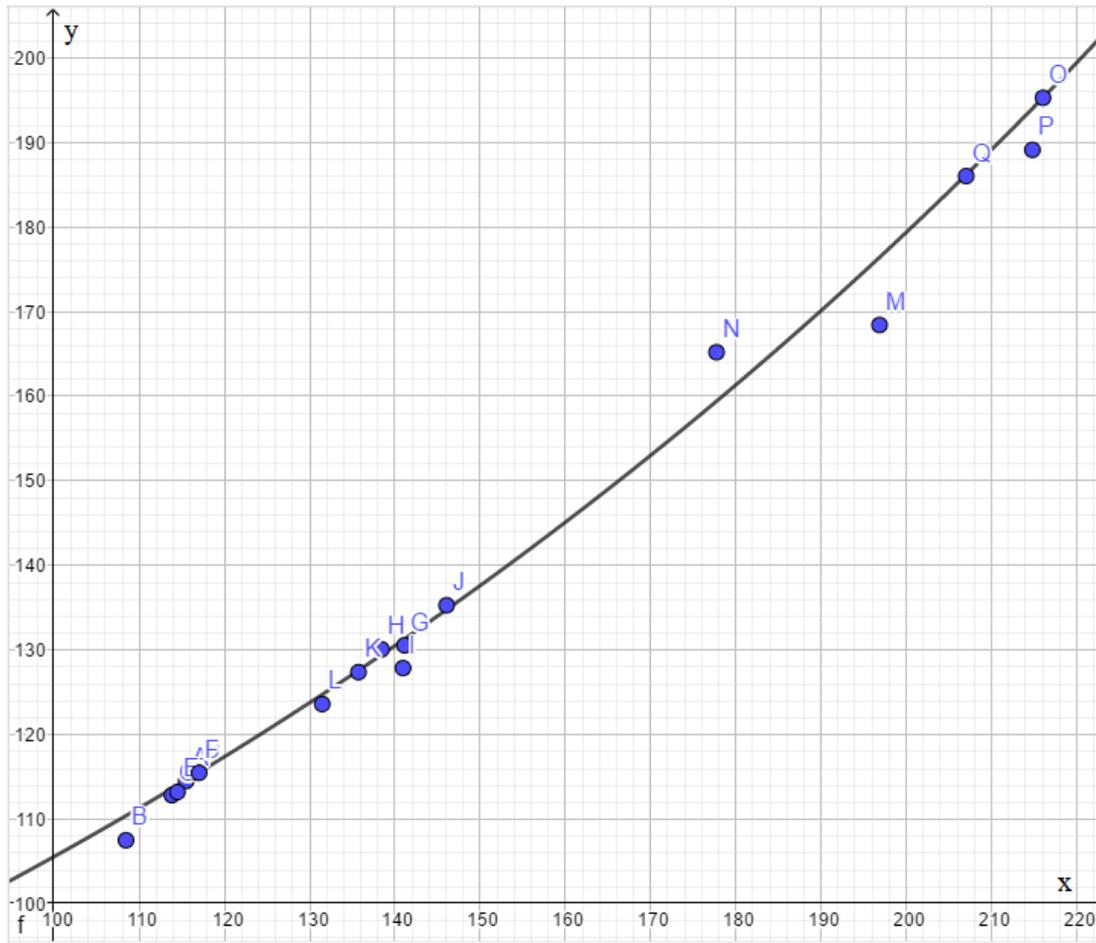
$(f(x_i) - F(x_i))^2$	=
$(2,0594 - 2,0590)^2$	0,0000
$(2,0431 - 2,0316)^2$	0,0001
$(2,0555 - 2,0526)^2$	0,0000
$(2,0623 - 2,0628)^2$	0,0000
$(2,0570 - 2,0540)^2$	0,0000
$(2,0628 - 2,0626)^2$	0,0000
$(2,1183 - 2,1159)^2$	0,0000
$(2,1121 - 2,1143)^2$	0,0000
$(2,1179 - 2,1068)^2$	0,0001
$(2,1296 - 2,1313)^2$	0,0000
$(2,1059 - 2,1052)^2$	0,0000
$(2,0961 - 2,0921)^2$	0,0000
$(2,2465 - 2,2264)^2$	0,0004
$(2,2025 - 2,2180)^2$	0,0002
$(2,2906 - 2,2906)^2$	0,0000
$(2,2878 - 2,2767)^2$	0,0001
$(2,2699 - 2,2695)^2$	0,0000
Erro de truncamento para a função linearizada	0,0009

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da Tabela 3.8, pode-se verificar que o erro quadrático da função, ou seja, o valor que representa o erro, entre os dados originais, e os dados da função aproximada (3.6) é 0,0009.

Pode-se verificar, também, o quão relacionados estão os valores de x_i e os valores de $F(x_i)$, para isso calcula-se o coeficiente de correlação de Pearson, que resulta no valor $r = 0,9962$.

Figura 3.3 – A função de ajuste exponencial e os dados experimentais



Fonte: Elaborado pelo autor, no Geogebra.

A Figura 3.3 apresenta o gráfico dos valores experimentais e da curva de ajuste exponencial. Visualmente a curva apresenta uma boa concordância com os dados. Além disso, o coeficiente de correlação é melhor que o obtido pelo ajuste linear.

3.3 AJUSTE POR UMA FUNÇÃO POTÊNCIA

Supondo que a função de ajuste é dada por:

$$y = a_1 x^{a_0} \quad (3.8)$$

Conforme a seção 2.1.4, necessita-se linearizar a função (3.8), a fim de aplicar o ajuste linear para mínimos quadrados, com isso têm-se

$$\log y = \log a_1 + a_0 \log x \quad (3.9)$$

Chamando $F(X) = \log y$, $\log a_1 = b$, $a_0 = a$ e $\log x = X$, segue que

$$F(X) = aX + b \quad (3.10)$$

Para linearizar a função, deve-se aplicar o logaritmo aos dados originais, tanto nos valores de x_i quanto nos valores de y_i . Com isso têm-se os seguintes dados, apresentados na Tabela 3.9.

Tabela 3.9 – Dados necessários para o cálculo de a e b da função (3.10)

$\log x_i$	$\log y_i$
2,0626	2,0590
2,0352	2,0316
2,0563	2,0526
2,0673	2,0628
2,0587	2,0540
2,0683	2,0626
2,1496	2,1159
2,1412	2,1143
2,1491	2,1068
2,1645	2,1313
2,1326	2,1052
2,1188	2,0921
2,2942	2,2264
2,2498	2,2180
2,3346	2,2906
2,3321	2,2767
2,3161	2,2695

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos dados da Tabela 3.9, calcula-se cada termo das Equações (2.18) e (2.17). Esses valores estão contidos na Tabela 3.10.

Tabela 3.10 – Dados necessários para a utilização das equações (2.18) e (2.17) para o ajuste da Equação 3.10

X_i	$F(X_i)$	X_i^2	$X_i.F(X_i)$
2,0626	2,0590	4,2542	4,2468
2,0352	2,0316	4,1420	4,1346
2,0563	2,0526	4,2282	4,2206
2,0673	2,0628	4,2739	4,2645
2,0587	2,0540	4,2384	4,2286
2,0683	2,0626	4,2777	4,2661
2,1496	2,1159	4,6209	4,5483
2,1412	2,1143	4,5847	4,5271
2,1491	2,1068	4,6185	4,5276
2,1645	2,1313	4,6852	4,6132
2,1326	2,1052	4,5482	4,4896
2,1188	2,0921	4,4894	4,4328
2,2942	2,2264	5,2633	5,1077
2,2498	2,2180	5,0615	4,9900
2,3346	2,2906	5,4501	5,3475
2,3321	2,2767	5,4385	5,3093
2,3161	2,2695	5,3641	5,2563
$\sum = 36,7309$	$\sum = 36,2692$	$\sum = 79,5387$	$\sum = 78,5107$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando então a Equação (2.18), tem-se:

$$a = \frac{17.78,5107 - 36,7309.36,2692}{17.79,5387 - 36,7309^2} = 0,8275$$

Utilizando a Equação (2.17), obtém-se:

$$b = \frac{79,5387.36,2692 - 78,5107.36,7309}{17.79,5387 - 36,7309^2} = 0,3456$$

Portanto têm-se a função que ajusta linearmente,

$$F(X) = 0,8275X + 0,3456 \quad (3.11)$$

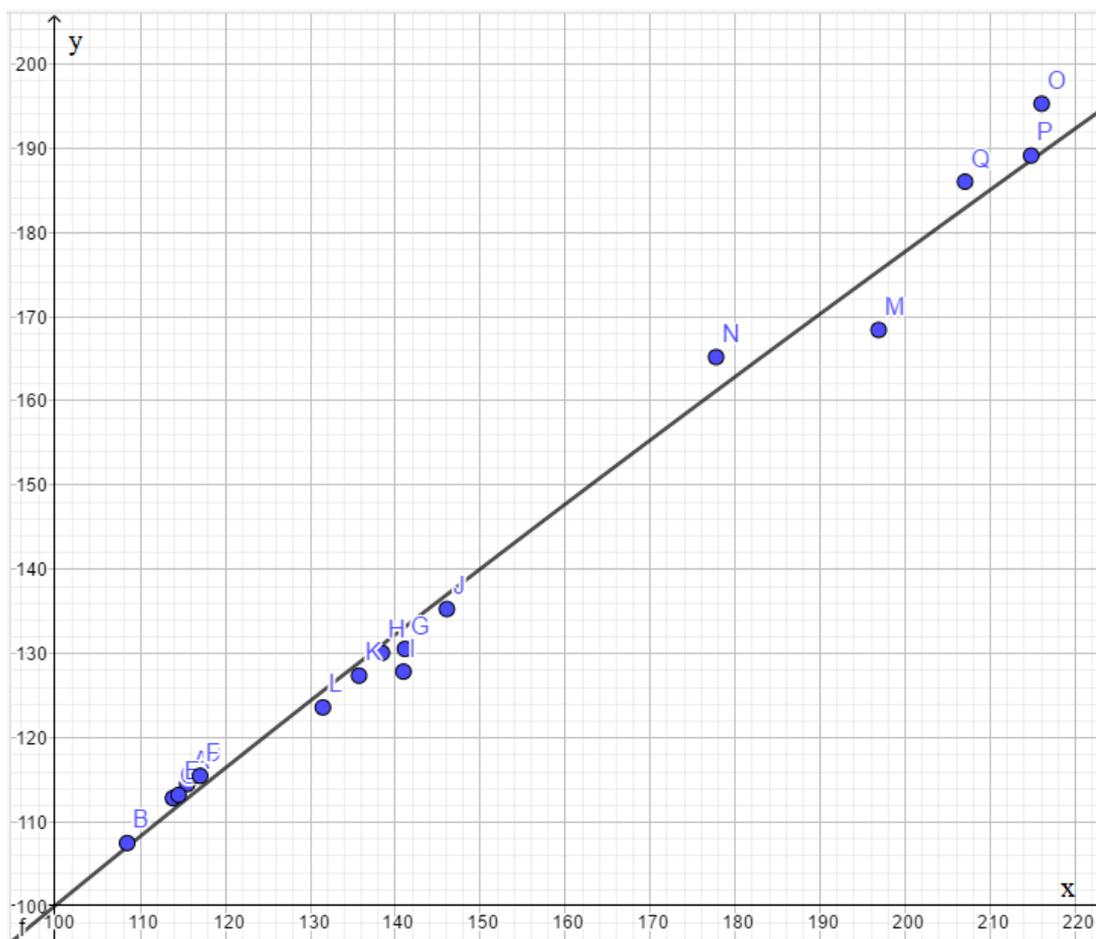
Utilizando as funções inversas obtém-se a função original

$$y = 2,2162 \cdot x^{0,8275} \quad (3.12)$$

Como descrito em (2.1.3), é calculado o erro do ajuste utilizando a função (3.11). Para isso, devemos ter as diferenças entre $F(X_i)$ e y_i , e estas diferenças elevadas ao quadrado, donde segue que o erro de truncamento é 0,0011.

Calculando o coeficiente de correlação de Pearson para este caso, obtém-se $r = 0,9946$

Figura 3.4 – A função potência de ajuste e os pontos analisados



Fonte: Elaborado pelo autor, no Geogebra.

A Figura 3.4 ilustra graficamente o ajuste representado pela Equação 3.12 e os dados experimentais. Novamente, visualizando a função obtida ajusta os dados disponíveis. No entanto, o coeficiente de correlação é um pouco menor do que para o caso exponencial. Após o ajuste, deve-se analisar qual delas melhor se ajusta aos dados experimentais.

Para isso, devemos utilizar como função que melhor ajusta os dados, a função em que o Coeficiente de Correlação de Pearson é o mais próximo de 1, pois é esse

ajuste em que os dados estão melhores relacionados.

Um fato que cabe ser observado é que quando linearizamos os dados, o erro calculado pelo método dos mínimos quadrados, não é mínimo, com isso não pode-se usar o erro de truncamento como índice para a escolha da função de ajuste (BURDEN; FAIRES, 2013).

O Quadro 3.5 apresenta um resumo dos erros calculados para as três funções de ajustes propostas. Pode-se concluir que a função que apresenta o coeficiente de correlação mais próximo de 1 é a função exponencial. Portanto, é esta a função que representa o modelo proposto e usada para o cálculo do ponto de equilíbrio neste trabalho.

Pode-se ainda observar que a utilização do erro total de truncamento (primeira coluna do Quadro 3.5) como parâmetro para o melhor ajuste, pode induzir uma análise equivocada, uma vez que, ao linearizar os dados, a função original de ajuste, perde a condição de erro mínimo do método dos mínimos quadrados.

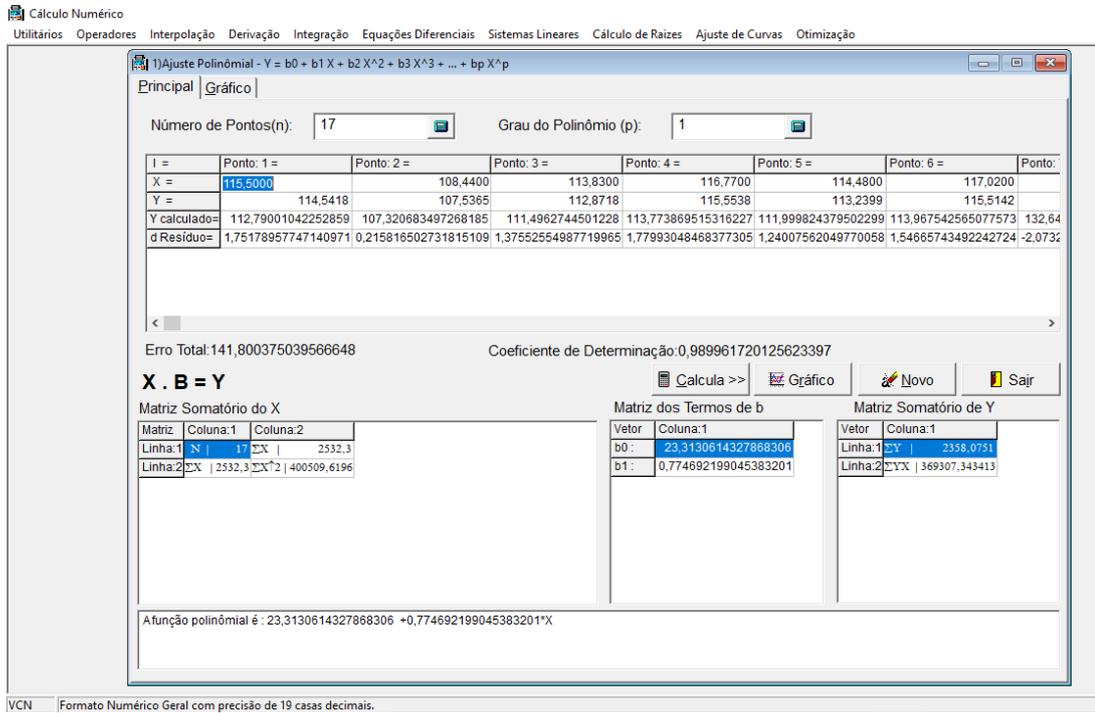
Figura 3.5 – Quadro comparativo entre os erros do método dos mínimos quadrados das funções e os coeficientes de correlação de Pearson

Função	Erro de truncamento total das funções ajuste	Erro de truncamento utilizando as funções linearizadas	Coefficiente de Correlação de Pearson
Afim		141,8003	0,9950
Exponencial	144,3346	0,0009	0,9962
Potência	164,0438	0,0011	0,9946

Fonte: Elaborado pelo autor.

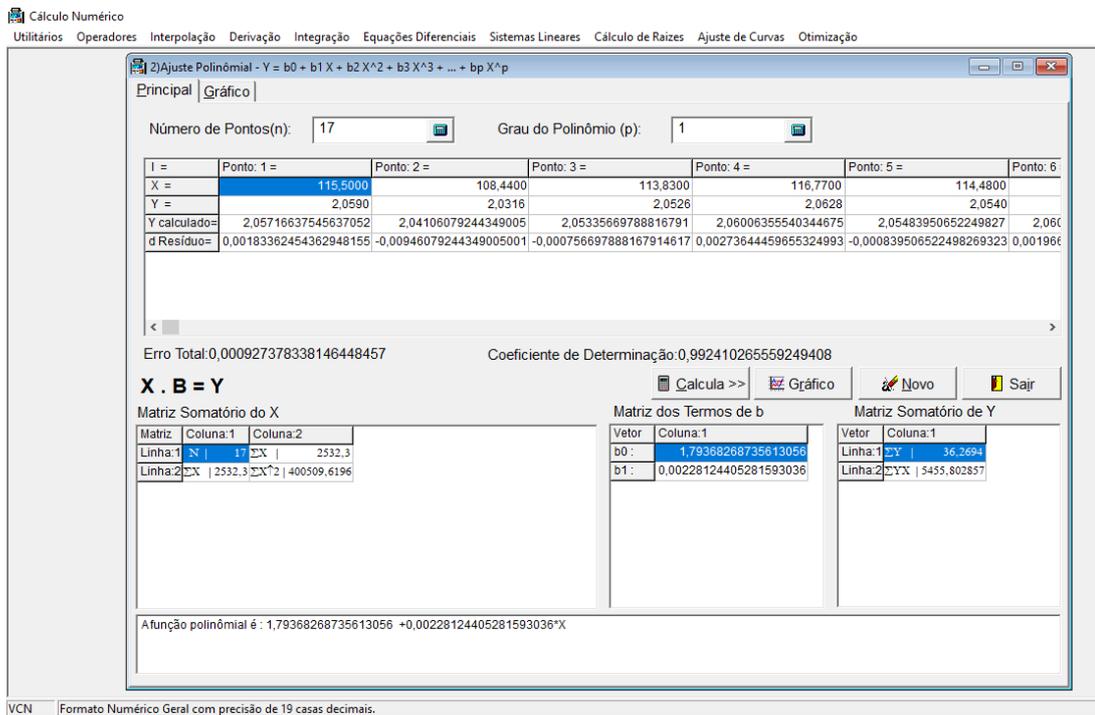
As figuras (3.6), (3.7) e (3.8) apresentam a validação dos modelos propostos, por meio do *software* VCN para os ajustes representados pela função afim, exponencial e potência, respectivamente. Nota que as funções utilizadas são todas lineares nos parâmetros, pois o *software* utilizado não resolve diretamente sistemas não lineares. Os resultados obtidos pelo VCN são similares aos calculados usando uma planilha eletrônica e as fórmulas da seção 2. Um tutorial do VCN é apresentado no Apêndice A.

Figura 3.6 – Função afim ajustada pelo VCN



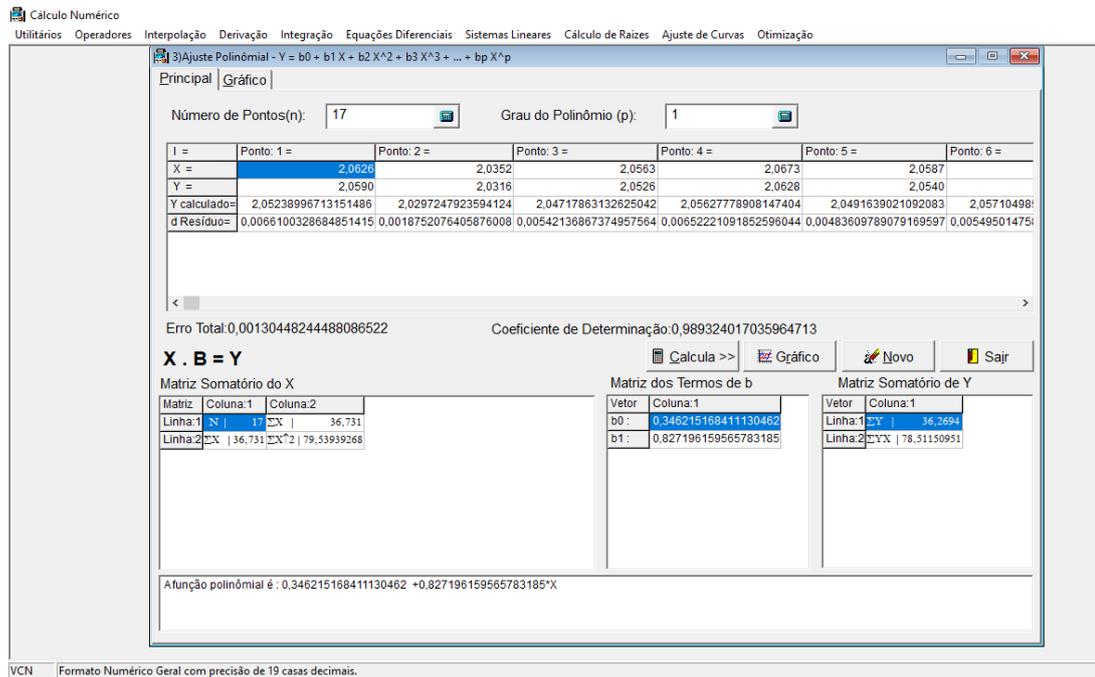
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.7 – Função exponencial linearizada ajustada pelo VCN



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.8 – Função potência linearizada ajustada pelo VCN



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4 PONTO FIXO

Conforme descrito por Martins (2017) a Exigência de Energia metabolizável para manutenção, pode ser determinada pelo ponto de equilíbrio entre a Produção de Calor (PC) e o Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Pela Definição 15, o ponto de equilíbrio é dado pelo ponto fixo da função que relaciona as duas variáveis. Para tal, utiliza-se Função 3.7, que melhor ajusta os dados coletados, conforme mostrado na seção 3.3. Portanto a melhor função de aproximação é dada por $f(x) = 62,1781 \cdot 10^{0,0023x}$. A seguir verifica-se o Teorema 3.

Seja então $I = (0, 210)$. Como f está definida para qualquer x real, então está definida para $x \in (0, 210)$. Utilizando a regra da cadeia para derivadas, obtendo

$$f'(x) = 0,3293 \cdot 10^{0,0023x}$$

Como $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ então f é crescente.

Também $f(0) = 62,1781 > 0$ e $f(210) = 189,0874 < 210$ é o maior valor para $f(x)$. Então $f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, logo pode ser encontrado ponto fixo nesse intervalo.

De outra forma, tem-se um único ponto fixo, quando $|f'(x)| < 1, \forall x \in (a, b)$

Então

$$|f'(x)| < 1 \Rightarrow |0,3293 \cdot 10^{0,0023x}| < 1$$

Pelas propriedades de módulo,

$$|0,3293 \cdot 10^{0,0023x}| < 1 \Rightarrow -1 < 0,3293 \cdot 10^{0,0023x} < 1$$

Sabe-se que

$$0,3293 \cdot 10^{0,0023x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

portanto

$$0 < 0,3293 \cdot 10^{0,0023x} < 1$$

É necessário ainda que seja verificado para quais valores de x , obtém-se $0,3293 \cdot 10^{0,0023x} < 1$.

Dividindo ambos os membros da inequação por 0,3293, segue

$$10^{0,0023x} < 3,0367$$

Aplicando \log em ambos, tem-se

$$0,0023x < \log 3,0367$$

Como $\log 3,0367 = 0,4824$ e dividindo ambos os membros por 0,0023 Resulta assim em

$$x < 209,74$$

Logo para $x \in (0, 209,74)$ têm-se um único ponto fixo.

Define-se a sequência

$$p_{n+1} = 62,1871 \cdot 10^{0,0023 \cdot p_n}$$

Nessa sequência, p_n equivale aos valores de CEM, enquanto que os valores de $p_n + 1$ equivalem aos valores de PC.

Tomando uma aproximação inicial dentro do intervalo $(0;209,74)$, por exemplo $p_0 = 105$, teremos então a sequência convergente ilustrada na Tabela 3.11.

Tabela 3.11 – Sequência convergindo para o ponto fixo da função (3.7).

n	p_n	$p_{n+1} = 62,1871 \cdot 10^{0,0023p_n}$
0	105	108,4427
1	108,4427	110,4380
2	110,4380	111,6112
3	111,6112	112,3068
4	112,3068	112,7213
5	112,7213	112,9690
6	112,9690	113,1173
7	113,1173	113,2062
8	113,2062	113,2595
9	113,2595	113,2914
10	113,2914	113,3106
11	113,3106	113,3221
12	113,3221	113,3290
13	113,3290	113,3332
14	113,3332	113,3357
15	113,3357	113,3372
16	113,3372	113,3381
17	113,3381	113,3386
18	113,3386	113,3389
19	113,3389	113,3391
20	113,3391	113,3392
21	113,3392	113,3393
22	113,3393	113,3393

Fonte: Elaborado pelo autor

Após 22 iterações obtém-se $x_{22} = 113,3393$ para um erro de 10^{-4} , que é a aproximação para um ponto fixo procurado e portanto um ponto de equilíbrio da função. Logo, a EMm para cordeiros da raça Texel, nas condições analisadas, foi de aproximadamente $113,34 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido teve como base, dados obtidos pela pesquisa realizada por (MARTINS, 2013). O experimento realizado pelo laboratório de ovinulcultura da UFSM tinha como objetivo estudar as exigências nutricionais de cordeiros da raça Texel criados no Sul do Brasil. Entre as exigências, calculou-se a exigência de Energia Metabolizável para manutenção (EMm).

A metodologia usada pelos pesquisadores para calcular o valor da EMm, foi calcular o ponto de equilíbrio do ajuste exponencial para a Produção de Calor (PC) em função do Consumo de Energia Metabolizável (CEM). Matematicamente, o ponto do equilíbrio é calculado pelo método do ponto fixo.

As funções propostas para o ajuste foram, a afim, exponencial e potência, a escolha destas funções foi em decorrência do gráfico de dispersão do conjunto de dados experimentais. O melhor ajuste foi obtido para a função exponencial, a qual apresenta o melhor valor para o coeficiente de correlação. Este resultado, está de acordo com o sugerido pela pesquisa original, porém, neste estudo o ajuste exponencial linearizado (Seção 2.1.3) foi diferente do obtido por Martins (2013). Tal discrepância será investigada futuramente. Como consequência da diferença encontrada entre as funções ajustadas, o ponto de equilíbrio calculado também foi diferente. Na pesquisa original este valor foi de $82 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$ e neste estudo $113,34 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$.

Estudos na área mostram valores semelhantes, com $104 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$ obtido por ARC (1980) e $114,6 \text{ Kcal/KgPV}^{0,75}/\text{dia}$ por Galvani (2008), sugerindo que a modelagem matemática empregada descreve de maneira satisfatória o problema real motivador deste trabalho.

Este estudo estabeleceu um intercâmbio entre a linguagem usual da área específica (Zootecnia) com a linguagem Matemática. O processo de obtenção de um modelo matemático que descreve o problema real dependeu de conhecimentos adquiridos previamente, e feito por meio de uma revisão teórica.

A validação do modelo proposto foi realizada mediante a utilização do *software* VCN. Além disso, acredita-se que o uso de novas tecnologias complementa o estudo teórico e agrega novas perspectivas para o processo de modelagem.

Para estudos futuros pretende-se estudar equações de diferença, convergência dos métodos numéricos, equações diferenciais e estabilidade das soluções.

Como proposta para estudo voltados para Ensino Médio, sugere-se o estudo de gráfico de funções utilizando o *software* Geogebra, já que muitas vezes um gráfico pode sintetizar uma grande quantidade de informações. Embora se tenha muitos estudos sobre esse assunto, é importante a formulação de funções que possam representar dados experimentais, e usar o *software* VCN para complementar o estudo analítico.

Portanto, ao explicar os conteúdos, aplicá-los e posteriormente resolver o problema proposto em uma outra área do conhecimento, pude sentir uma satisfação pessoal muito grande, pois o objetivo principal da matemática é de poder servir como base concreta para estudo de outras áreas. Ao estar contribuindo nesse objetivo, deu sentido a toda minha atividade acadêmica até esse presente momento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte. 6ª Edição.** Porto Alegre: Bookman, 2000. 389 p.
- ARC, A. R. C. **The nutrient requirements of ruminant livestock: technical review.** [S.l.]: Commonwealth Agricultural Bureaux, 1980.
- BASSANEZI, R. C. **Temas e Modelos.** São Paulo: LTC, 2006. 212 p.
- BOLDRINI et al. **Algebra Linear.** São Paulo: Harbra, 1984. 424 p.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica.** São Paulo: Cengage Learning, 2013. 721 p.
- FERREIRA, W. M. et al. Zootecnia brasileira: Quarenta anos de história e reflexões. **Revista Acadêmica: Ciência animal**, v. 4, n. 3, p. 77–93, 2006.
- FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 505 p.
- FRANK, R. G.; WILLIAM, P. F.; STEVEN, B. H. **A First Course in Mathematical Modeling.** [S.l.]: Cengage Learning, 2014. 704 p.
- GALVANI, D. B. **Exigências e eficiência de utilização da energia e da proteína por cordeiros confinados.** 2008. 84 p. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2008.
- HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear.** Rio de Janeiro: SBM, 2016. 271 p.
- LOFGREEN, G. P.; GARRET, W. N. A system for expressing net energy requirements and feed values for growing and finishing beef cattle. **Journal of Animal Science**, v. 27, n. 3, p. 793–806, 1968.
- MARTINS, A. A. **Exigências Nutricionais de Energia e Proteína para Manutenção e Ganho de Cordeiros Texel.** 2013. 52 f. Dissertação (Mestrado em Zootecnia) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.
- MARTINS, A. A. **EXIGÊNCIAS DE ENERGIA, PROTEÍNA, CÁLCIO E FÓSFORO PARA MANUTENÇÃO E GANHO DE CORDEIROS CORRIDALED.** 2017. 86 p. Tese (Doutorado em Zootecnia) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.
- MOORE, D. S.; MCCABE, G. P.; CRAIG, B. A. **Introduction to the Practice of Statistics.** Nova Iorque: W. H. Freeman and Company, 2007. 766 p.
- PATROCÍNIO Jr, C. A. Modelagem matemática: Algumas formas de organizar e conduzir. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2005, Recife. **Anais eletrônicos...** Pernambuco: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2005. Acesso em: 16/07/2018. Disponível em: <<http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/10/CC36049522553.pdf>>.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. 424 p.

SCHIELD, M. Correlation, determination and causality in introductory statistics. **American Statistical Association, Section on Statistical Education**, 1995.

SUSIN, I. Boundary-layer modeling. In: SILV (Ed.). **Atmospheric turbulence and air pollution modeling**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981. cap. 3, p. 69–106.

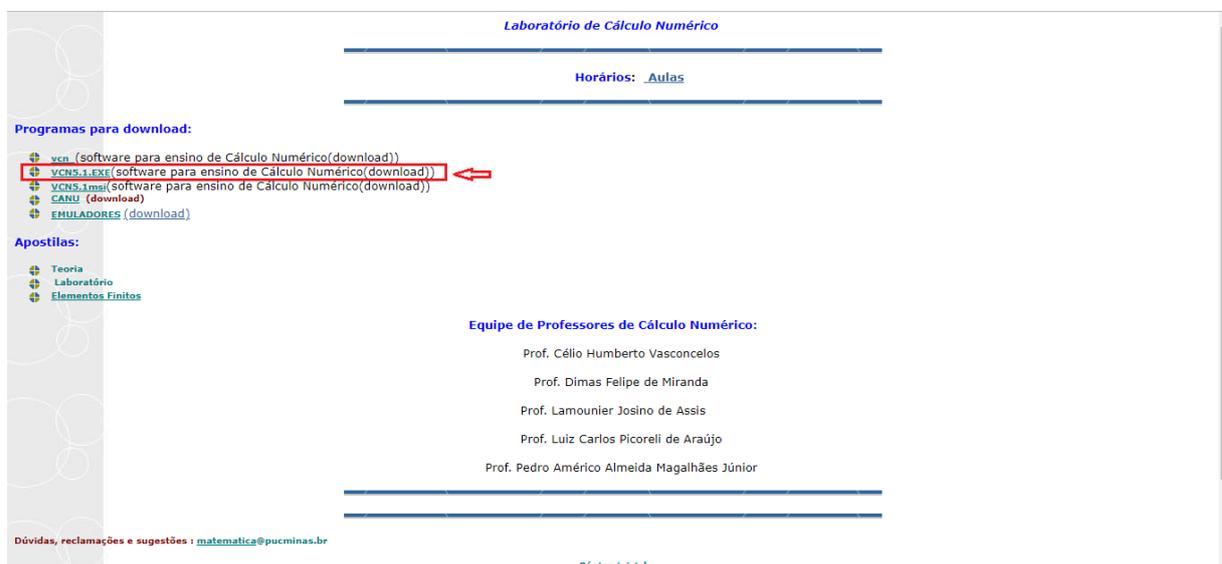
UFSM. **Áreas de atuação**: Área de nutrição e alimentação. UFSM, 2017. Acessado em 10 out 2018. Disponível em: <<http://www.zootecnia.ufsm.br/index.php/zootecnia/areas-de-atuacao>>.

APÊNDICE A – VCN

O *Visual Cálculo Numérico* (VCN) é um *software* produzido por professores da PUC-MINAS, que realiza cálculos de vários tipos como cálculo de raízes, ajustes de curvas, otimização, derivadas, etc. Aqui, trazemos um tutorial da obtenção, instalação e das funções que serão utilizadas nesse trabalho.

Primeiramente pode-se baixar o VCN, acessando o site : <<http://www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm>>, clicando no link conforme mostra a Figura A.1

Figura A.1 – Download do VCN



Fonte: Próprio autor

Após o download, você deve abrir a o local para onde foi feito o download. Nesta pasta você deve extrair o arquivo .rar com o seu *software* de preferência. Na pasta para onde foi extraído o VCN, basta clicar na imagem como mostra a Figura A.2

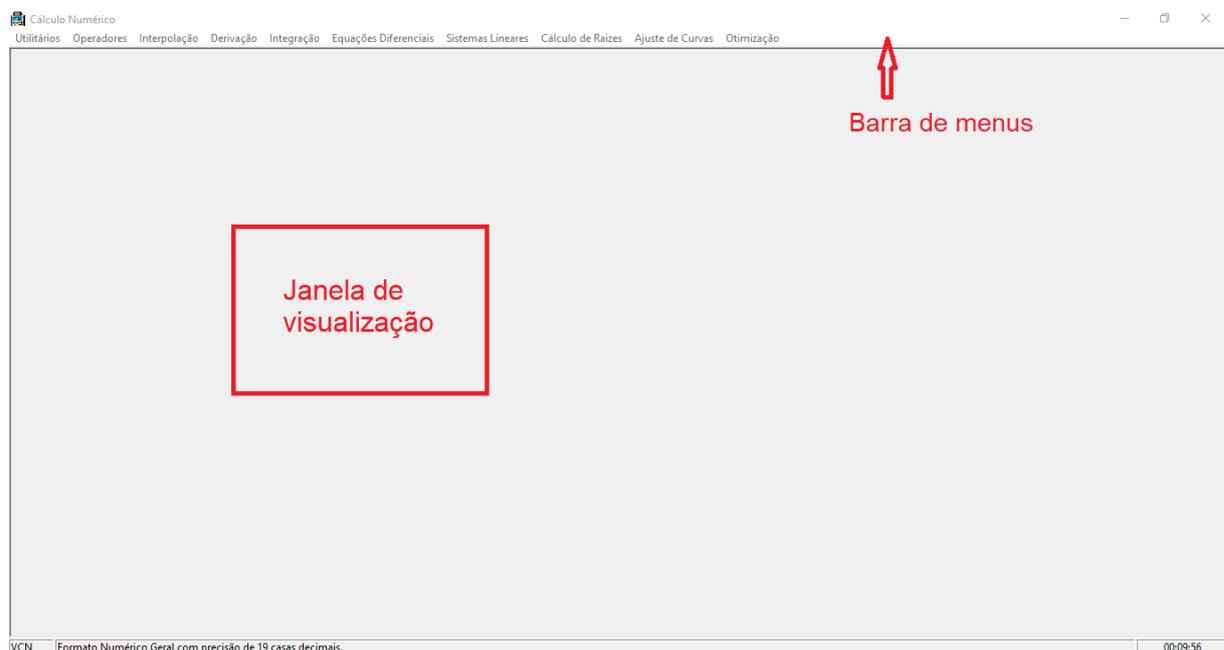
Figura A.2 – Logotipo do VCN



Fonte: Próprio autor

Após clicar na imagem, irá surgir a tela inicial do programa, como mostra a Figura A.3

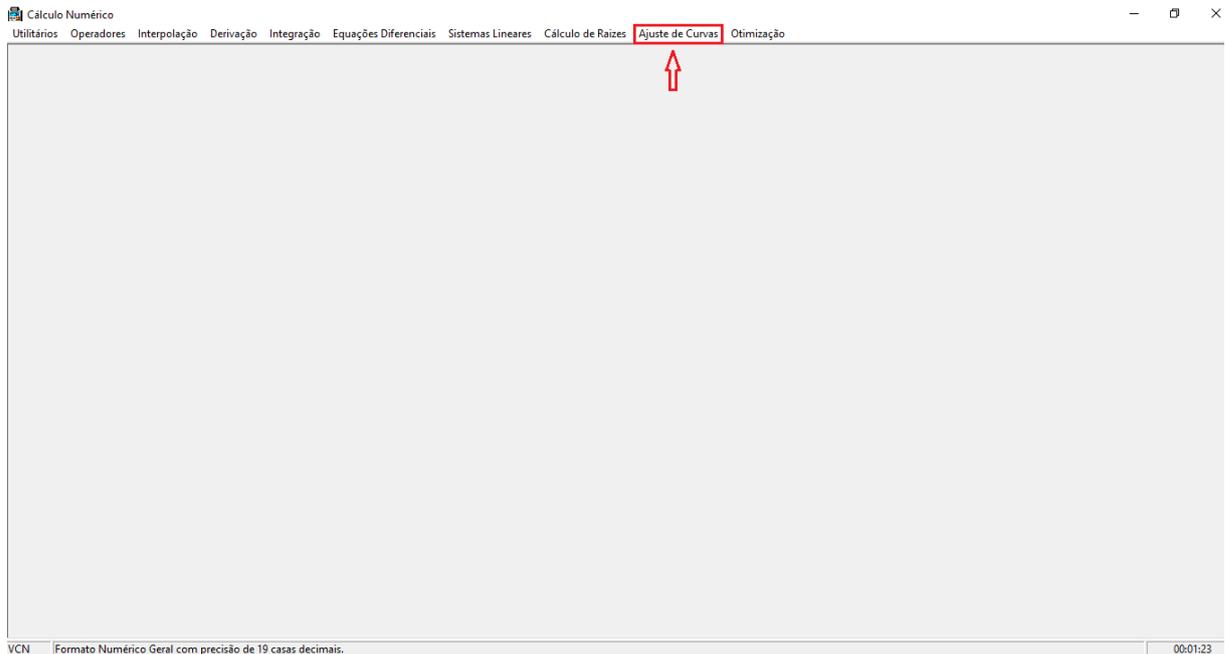
Figura A.3 – Janela inicial VCN



Fonte: Próprio autor

Nesse trabalho utilizaremos o recurso ajustes de curvas, que pode ser visualizado clicando na caixa *ajuste de curvas*, como mostra a Figura A.4

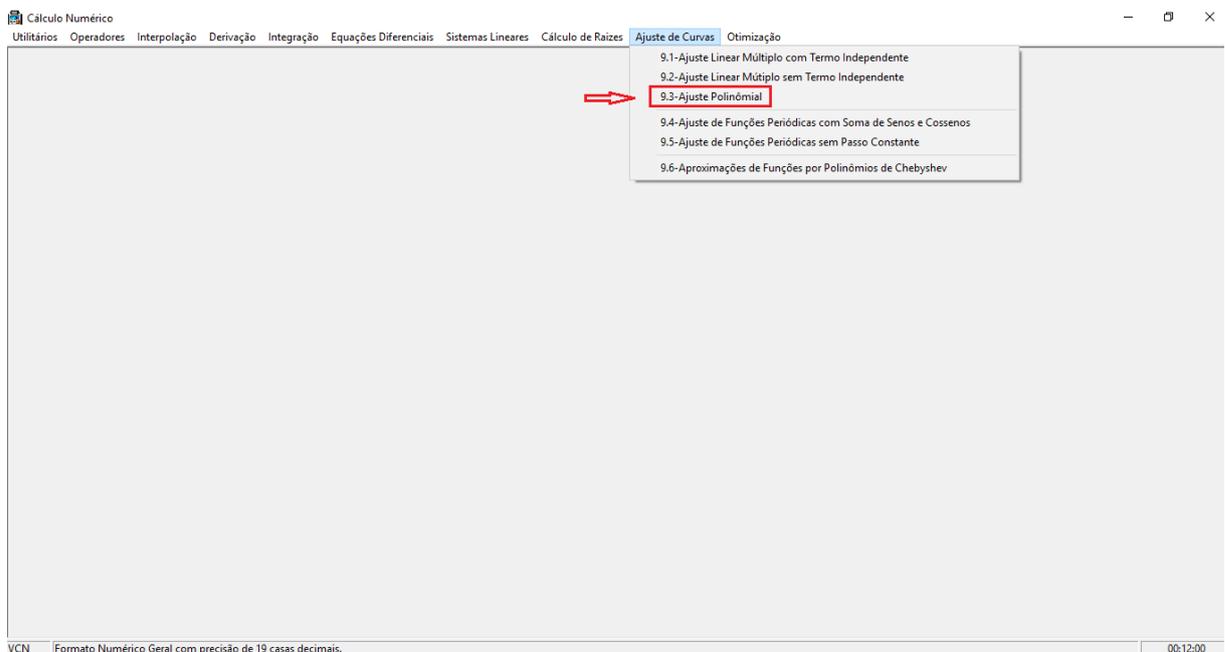
Figura A.4 – Caixa para ajuste de curvas



Fonte: Próprio autor

Dentro da opção ajuste de curvas, vamos utilizar a função *ajuste polinomial*, clicando na caixa conforme mostra a Figura A.5

Figura A.5 – Ajuste polinomial

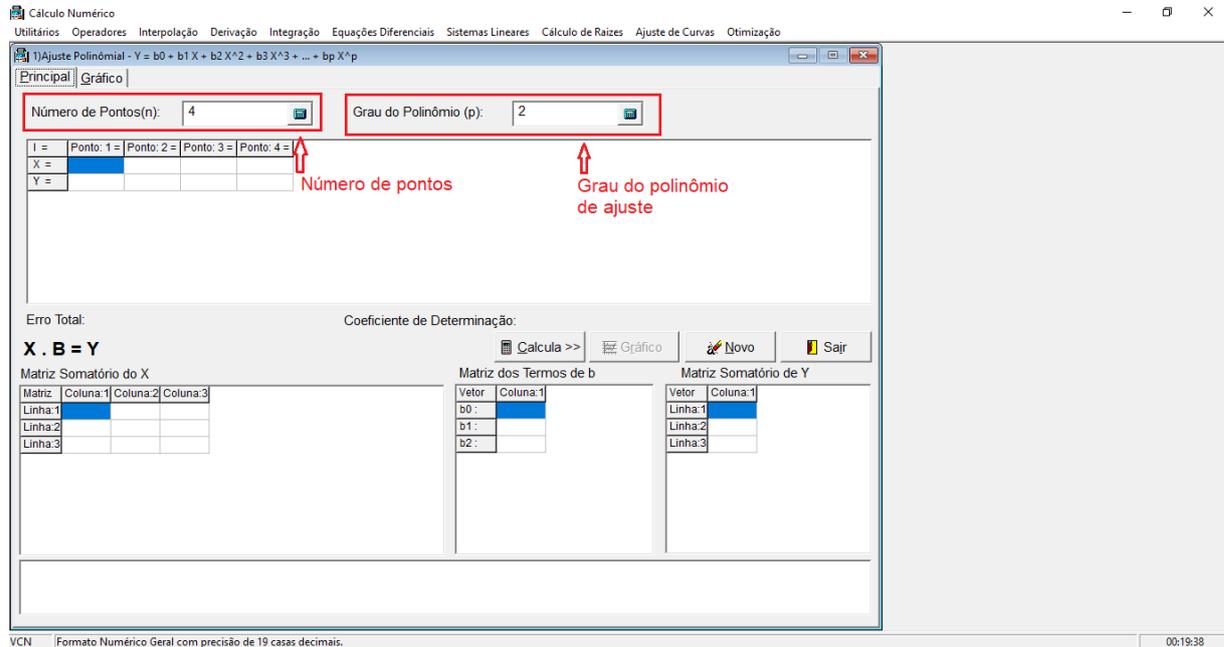


Fonte: Próprio autor

Ao clicar nesta opção, teremos uma tela onde podemos selecionar o número de

pontos do qual queremos fazer o estudo, e também podemos seleccionar o grau do polinômio de ajuste conforme mostra a Figura A.6

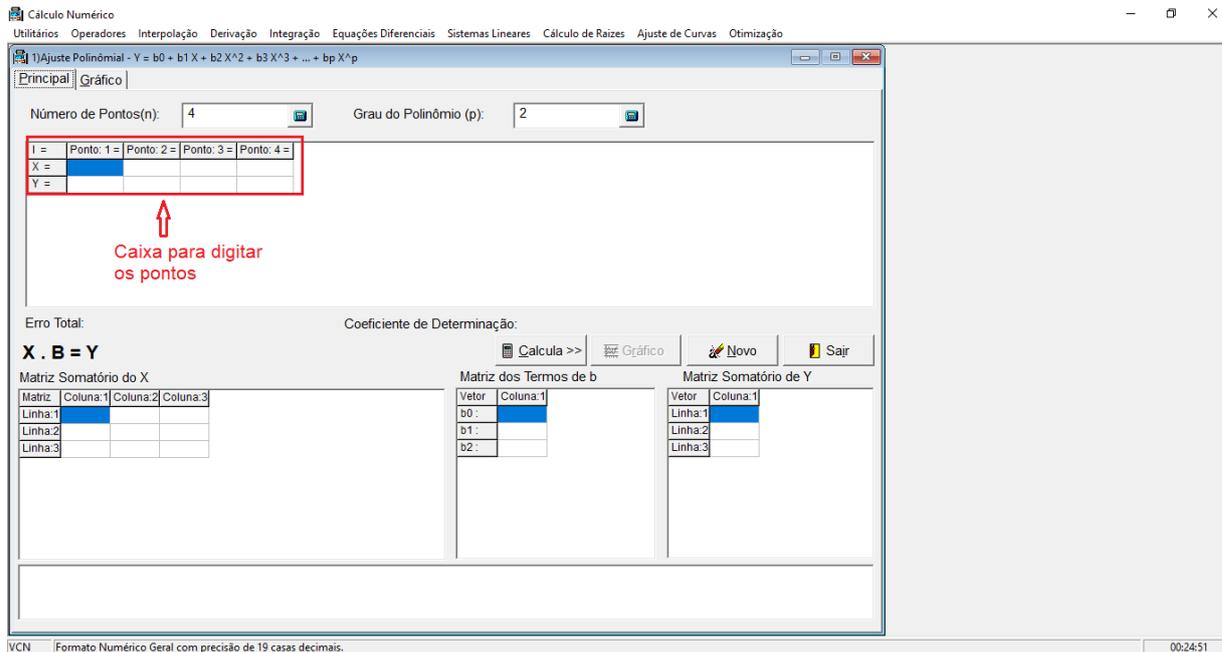
Figura A.6 – Caixas de seleção de números de pontos e grau do polinômio de ajuste



Fonte: Próprio autor

Depois de seleccionarmos o número de pontos que queremos ajustar, e o grau do polinômio de ajuste, devemos digitar os valores dos pontos na caixa destacada conforme mostra a Figura A.7

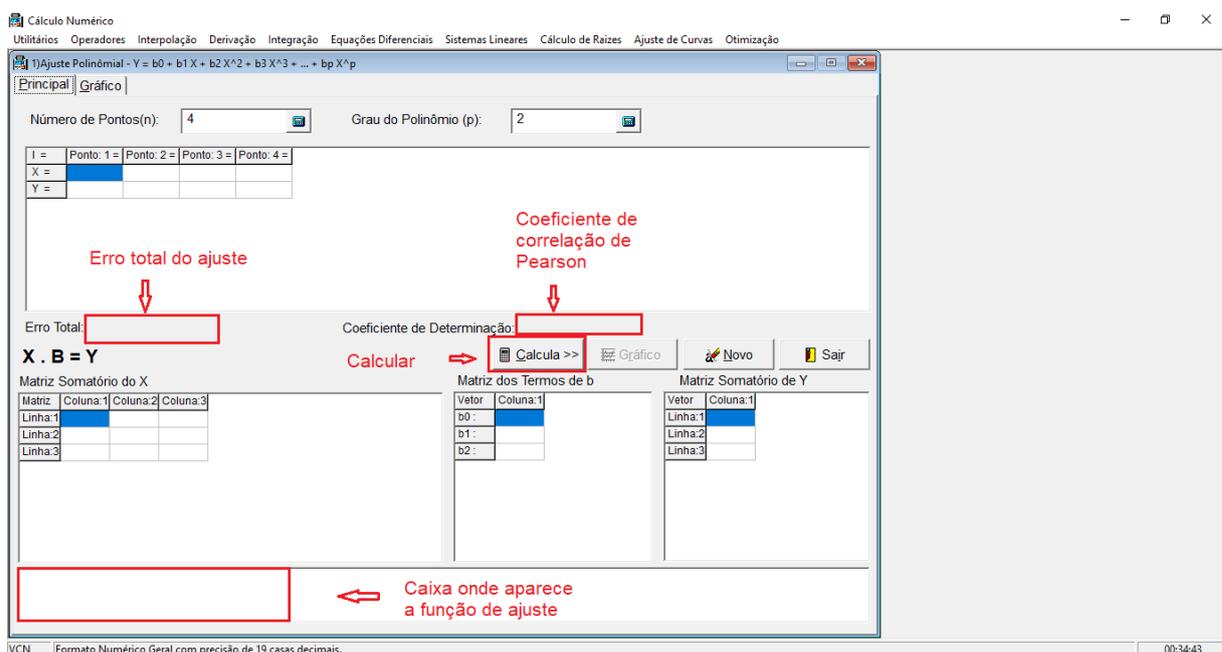
Figura A.7 – Caixa para digitar os pontos



Fonte: Próprio autor

Digitado os pontos que queremos ajustar, basta clicar em *calcular*, conforme mostra a Figura A.8, e então aparecerão os elementos: Erro total (Erro total do ajuste), Coeficiente de determinação (Coeficiente de correlação de Pearson), e ainda irá aparecer a função polinomial de grau *n*, selecionado anteriormente. Esses serão os principais elementos que serão utilizados nesse trabalho.

Figura A.8 – Clicando em calcular obtém-se os elementos do ajuste



Fonte: Próprio autor