UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Allan Jeronymo Dellaquila

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO

Santa Maria, RS
2018

Allan Jeronymo Dellaquila

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

ORIENTADORA: Prof.ª Dr.ª Cláudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS
2018

Dellaquila, Allan Jeronymo
O Problema da Trissecção / Allan Jeronymo Dellaquila.- 2018.
56 f.; 30 cm

Orientadora: Cláudia Candida Pansonato
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2018

1. Construção geométrica euclidiana 2. Problemas Gregos 3. Trissecção do ângulo 4. Resolução de Problemas com Origami 5. Educação Matemática I. Pansonato, Cláudia Candida II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

End. Eletr.: allan.dellaquila@gmail.com

Allan Jeronymo Dellaquila

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS) como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Defesa em 27 de agosto de 2018:

Cláudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Vitalino Cesca Filho, Dr. (UNIPAMPA)

Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2018

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família que me apoiou, assim como à minha Orientadora, que sempre esteve disposta a me ajudar, apesar de minhas dificuldades!

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pois sem sua interseção nem mesmo teria iniciado este curso, à minha querida esposa que sempre aceitou minhas horas em claro para os estudos necessários à conclusão deste curso, e me apoiou em cada dia, a meus pais que me deram a formação de caráter e educação necessárias a continuar o meu desenvolvimento.

A todos os professores do PROFMAT, pela orientação e auxílio, indispensáveis para a realização desse trabalho.

A minha orientadora, Profª. Drª. Cláudia Candida Pansonato, pela paciência, dedicação e disponibilidade, sempre dando apoio, sugestões e contribuições sem as quais o desenvolvimento desse trabalho não seria possível.

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.

(Galileu Galilei)

RESUMO

O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO

AUTOR: Allan Jeronymo Dellaquila
ORIENTADORA: Cláudia Candida Pansonato

Na história da matemática alguns problemas tiveram um significado especial pela influência que exerceram no seu desenvolvimento. Dentre esses, citamos os problemas clássicos gregos relacionados à construção com régua não graduada e compasso. Neste trabalho discutiremos esses problemas, dando enfoque especial ao da trissecção do ângulo. Esses problemas desafiaram o poder intelectual de vários matemáticos e intelectuais durante muito tempo, e somente no século XIX demonstrou-se a impossibilidade dessa construção utilizando-se apenas régua não graduada e compasso. O objetivo deste trabalho é apresentar esses problemas, discutir sua impossibilidade de resolução e apresentar, no caso especial do problema da trissecção, resoluções possíveis utilizando-se outros instrumentos. Apresentamos também uma técnica de abordagem do problema da trissecção do ângulo através do Origami, que pode ser utilizada em sala de aula.

Palavras-chave: Origami. Trissecção do ângulo. Problemas gregos. Geometria de construção.

ABSTRACT

THE TRISECTION PROBLEM

AUTHOR: Allan Jeronymo Dellaquila
ADVISOR: Cláudia Candida Pansonato

In the history of mathematics some problems had special significance for the influence they exerted in this development. Among these, we mention the classical Greek problems related to construction with a non-graduated ruler and compass. In this work we will discuss these problems, giving special focus to the trisection of the angle. These problems challenged the intellectual power of many mathematicians and intellectuals for a long time, and it was only in the nineteenth century that the impossibility of this construction, using only a non-graduated ruler and compass, was demonstrated. The objective of this work is to present these problems, to discuss their impossibility of resolution and to present, in the special case of the trisection problem, possible resolutions using other instruments. We also present a technique to approach the problem of angle trisection through Origami, which can be used in the classroom.

Keywords: Origami. Angle trisection. Greek puzzles. Construction geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$PROFMAT$ Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

$UFSM$ Universidade Federal de Santa Maria

NP Non-deterministic polynomial time (Tempo polinomial não determinístico)

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Q}$ - Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais.

$\mathcal{C}$ - Conjunto dos números construtíveis.

$P_{\mathcal{C}}$ - Conjunto dos pontos construtíveis.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Das mais antigas épocas até os dias atuais, a Matemática vem desafiando e cativando pesquisadores que são instigados pela curiosidade, busca de conhecimento, necessidade de exploração e não obstante pela beleza da própria matemática.

Problemas de construção geométrica desafiam o raciocínio, pois revelam em sua essência uma espécie de jogo, cujas regras básicas exigem conhecimento ampliado de teoremas e de diversas propriedades inerentes à geometria.

> ”A Geometria tem sua origem intimamente ligada à capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos. Em muitas circunstâncias enfrentadas pelo homem, a geometria esteve envolvida e, a partir disso, ele começou a realizar percepções do seu espaço, com isso, desenvolveu noções de grandezas, entre elas a de medida. A partir de então, surgiram as concepções de figuras geométricas simples, como retas paralelas e retas perpendiculares.” (EVES, 2004).

De acordo com Rooney (2012), é provável que alguns dos primeiros cálculos geométricos tenham sido desenvolvidos a partir da construção de monumentos, demarcação de terra ou manufatura de artefatos para fins religiosos. Acredita-se que os problemas práticos da geometria tenham surgido nos projetos de construções muito antes de eles serem registrados na forma escrita. Ao trabalhar com distâncias, áreas e volumes no mundo real, a geometria foi uma das primeiras aplicações da matemática nas civilizações.

Para os egípcios, uma das principais utilidades da geometria encontrava-se na necessidade de se elevar (buscar terras de maior altitude) do Nilo durante as cheias, e foi dessa necessidade que a geometria egípcia desenvolveu métodos muito precisos para calcular áreas de terrenos e volumes de silos e pirâmides.

Já na Grécia Antiga, local de origem, segundo os registros, da geometria como ciência dedutiva, os sábios gregos se depararam com alguns enigmas que causaram a busca de resoluções de problemas de construção geométrica através do uso exclusivo de dois instrumentos: a régua não graduada e o compasso, principalmente para que os resultados tivessem a maior precisão e confiabilidades possível. Esses foram os instrumentos utilizados por Euclides em sua obra “Elementos”.

Mesmo apresentando grande capacidade e habilidade, os matemáticos da Grécia Antiga, se depararam com alguns problemas que resistiram a todos esforços desses sábios, portanto tornaram-se problema notórios.

Os problemas que ficaram conhecidos como os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega são:

- *Duplicação do cubo* ou o problema de construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;

- *Quadratura do círculo* ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado;
- *Trissecção do ângulo* ou o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais.

Cajori (1999) menciona que apesar de ficar provado em fins do século XVIII, a partir de estudos e descobertas de Gauss (1777-1855) e Galois (1811-1832), que esses problemas são impossíveis de serem resolvidos usando apenas régua e compasso, ainda assim, existem pesquisadores que apresentam construções aproximadas ou mecânicas, pois não atendem às "regras com régua e compasso". Ainda hoje existem muitos curiosos que continuam tentando encontrar soluções para esses problemas, sem saber que não conseguirão nada mais que construções aproximadas.

Por fim, vale a pena salientar que existem outros métodos de construção, mas que ferem as regras impostas, entre eles o método de Arquimedes para trisseccionar qualquer ângulo, no qual ordena que a régua, marcada com uma dimensão fixa, seja deslizada sobre parte da construção já obtida. E também a conchoide, curva inventada por Nicomedes também com o objetivo de trisseccionar o ângulo.

É importante ressaltar que esses problemas impulsionaram o desenvolvimento de várias teorias matemáticas, pois muitas descobertas foram realizadas na tentativa de solução dos mesmos, como por exemplo a descoberta das curvas superiores, estudos de espirais e as próprias cônicas. Além disto, a simplicidade de seus enunciados os tornam muito atraentes e de fácil compreensão, podendo ser abordados e discutidos em aula.

A metodologia envolvida na criação desta pesquisa se baseia em grande parte na pesquisa bibliográfica, buscando informações acerca dos fatos históricos que se relacionam com O Problema da Trissecção. Como objetivo geral desse trabalho, temos o resgate histórico do problema da trissecção e como a matemática se desenvolveu em benefício das tentativas de solução desse problema.

Com relação aos objetivos específicos, temos a análise da perspectiva histórica dos problemas gregos, a verificação da impossibilidade da resolução do problema da trissecção, o conhecimento de formas diversas da proposta inicial que também resolvem os problemas gregos e o desenvolvimento de uma possível estratégia para abordagem em sala de aula do problema da trissecção com uso do origami.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 2 abordamos os três problemas clássicos, explicamos suas origens e as regras de construção com régua não graduada e compasso. No Capitulo 3 abordamos a impossibilidade da solução do problema da trissecção usando somente régua não graduada e compasso. Para isto, fazemos uma breve discussão sobre construtibilidade, para que possamos observar quais elementos pertencem ao subconjunto dos números reais construtíveis e, a partir daí, dar uma resposta negativa ao problema grego da trissecção. No Capítulo 4 exibimos e explicamos algumas técnicas de construções feitas por matemáticos do passado que resolveram o problema da trissecção de forma alternativa usando de construções que não se baseiam apenas na utilização da régua não graduada e compasso. No Capítulo 5 apresentamos uma abordagem do problema que pode ser desenvolvida em sala de aula, mesmo nos anos finais do ensino fundamental, com o uso de origami, com seus passos e demonstrações relevantes.

2 A MATEMÁTICA NA GRÉCIA

Neste capítulo exploramos um pouco mais a fundo a história da matemática na Grécia e a origem dos três problemas gregos. As principais referências utilizadas para compor esse capitulo foram Eves (2004), Boyer (1988) e Cajori (1999).

2.1 PRECURSORES DA MATEMÁTICA MODERNA

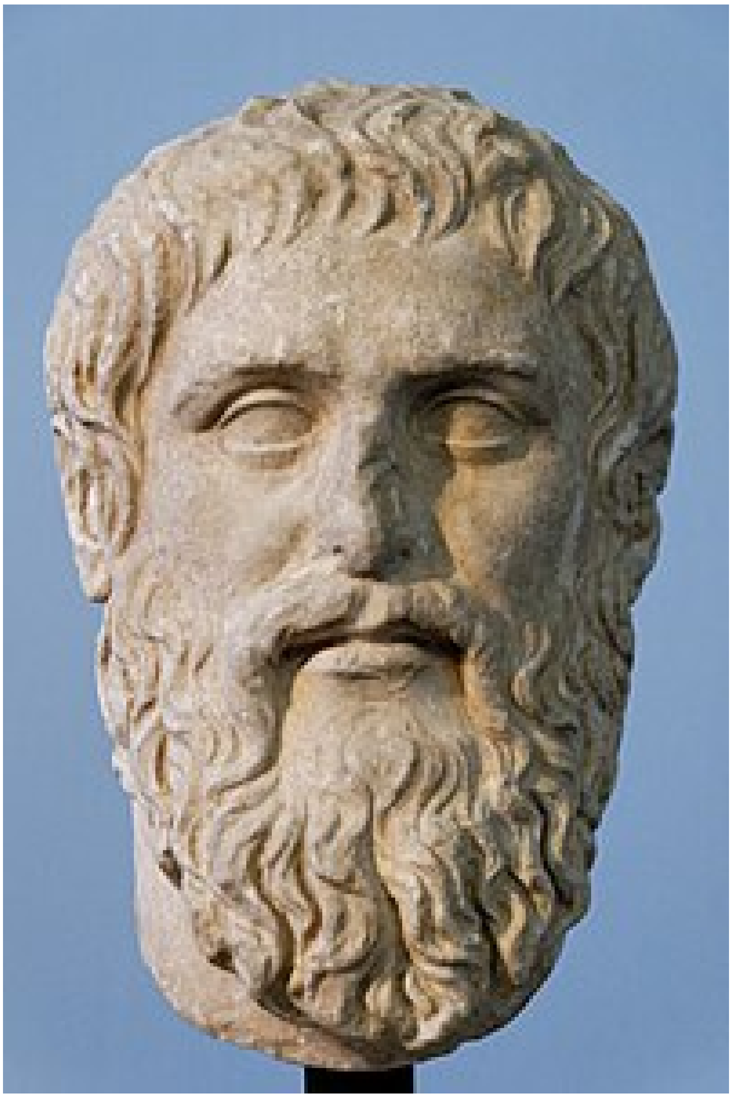
A matemática, apesar de sempre presente nos passos da evolução humana, teve na era clássica e helenística, da Grécia, sua "Era de Ouro", onde os maiores pensadores buscaram o rigor de demonstrar e provar as mais diversificadas proposições em várias frentes da matemática. Até hoje grandes problemas da época são amplamente discutidos e muitos elementos perduram como grandes verdades.

Ainda antes desse período, a ciência grega já via grandes avanços. De acordo com Eves (2004) a matemática na Grécia tem seus primeiros três séculos com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) que acaba culminando com os notáveis *Elementos* de Euclides (por volta de 300 a.C.).

Muitas escolas e centros de matemática surgem durante esse período, algumas mais icônicas que outras, como a *Escola Pitagórica* de Crotona criada por Pitágoras ou a *Escola Jônica* criada por Tales de Mileto, outras não tão conhecidas, mas todas com suas contribuições de importância ímpar no avanço da civilização humana.

Após anos de conflitos, com o final da guerra do Peloponeso, Atenas mesmo reduzida politicamente retomou seu lugar de protagonista cultural. Nessa época nascia Platão (Figura 2.1), grande filósofo, que após anos de viagens e estudos, decide criar em Atenas sua famosa Academia, voltada às pesquisas de investigação científica e filosófica.

Figura 2.1 – Platão



Fonte: Wikipedia (2018)

Quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século VI a.C. foram atribuídos a amigos ou discípulos de Platão, tornando sua Academia um elo de ligação entre a matemática mais antiga e a escola de Alexandria.

2.2 OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS GREGOS

Durante os anos da matemática Grega podemos perceber três importantes linhas de desenvolvimento desta ciência. Inicialmente temos o desenvolvimento do material que culminou na obra *Elementos*, na sequência temos o desenvolvimento de noções numéricas com relações aos infinitesimais e infinitos e processos de somatórios que somente foram resolvidos com a descoberta do cálculo nos tempos modernos.

A terceira linha é a da geometria superior, ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera. Essa linha nasce justamente nas diversas tentativas de solução de três famosos problemas de construção: Duplicação do Cubo, Quadratura do Círculo e Trissecção do Ângulo.

Operar com régua e compasso, significa efetuar as seguintes construções:

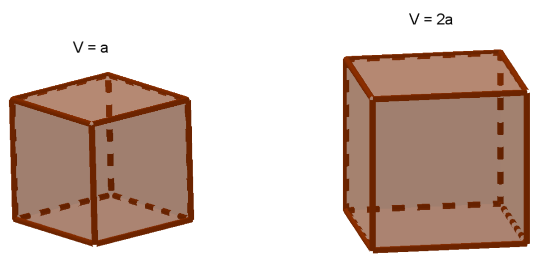
- Com a régua é possível traçar uma reta que passa por dois pontos distintos previamente dados.
- Com o compasso é possível traçar uma circunferência com centro em um ponto dado e passando por um segundo ponto determinado.
- Se certos pontos são dados inicialmente, demais pontos podem ser construídos através de uma sequência de operações de intersecções de retas com retas, circunferências com circunferências e ainda reta com circunferência e, consequentemente, novas retas e circunferências podem ser traçadas pelos novos pontos obtidos e assim sucessivamente.

Das operações possíveis com régua e compasso, fica fácil perceber que determinadas construções não são permitidas como, por exemplo, usar os seguintes artifícios: usar graduação previamente estabelecida na régua ou no compasso, deslizar a reta ou outra estrutura até uma posição determinada, entre outras proibições inerentes a construção euclidiana. Assim, fica subentendido que no decorrer deste trabalho ao nos reportarmos à régua e ao compasso, faremos menção aos instrumentos cujas características foram expostas.

2.2.1 Duplicação do Cubo

De acordo com Eves (2004), o problemas da duplicação do cubo podem ter se originado nas palavras de algum poeta (talvez Eurípedes) grego da antiguidade, ignorante em matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos, em relação ao túmulo erguido para seu filho Glauco, com cem pés em cada aresta, tendo o formato de um cubo. Minos ordenara que o túmulo fosse dobrado em seu tamanho (nesse caso em seu volume). O poeta então aduziu Minos erroneamente, que se dobrasse cada uma das dimensões do túmulo, o problema estaria resolvido. Essa falácia matemática levou os geômetras a buscarem formas de realmente resolver o problema de como dobrar o volume de um dado sólido sem mudar sua forma. Há também uma segunda lenda, afirmando que em 427 a.C um quarto da população de Atenas teria sido dizimada por uma peste, incluindo Péricles que foi um grande estadista da Grécia antiga. Então um grupo, preocupado com a praga que se espalhava, foi enviado ao oráculo de Apolo, o Deus do Sol, na cidade de Delos (por esse motivo, o problema da duplicação do cubo também é conhecido como o *problema deliano*), para perguntar como a peste poderia ser combatida. O oráculo então os informou que deveriam duplicar o volume do cubo que sustentava a estátua do Deus Apolo. Os arquitetos ficaram perplexos por não saberem como construir um cubo, cujo volume fosse duas vezes maior que outro (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Duplicação do cubo



Fonte: O autor

Não é possível avaliar até que ponto estas duas lendas são verdadeiras, mas podemos observar que este problema deve ter tido seu início e desenvolvimento na Grécia Antiga. Supostamente ele caiu nas mãos de Platão que o submeteu aos geômetras. Verdadeiras ou não, o problema acabou sendo estudado pela Academia de Platão, e há soluções geométricas superiores atribuídas a Eudoxo, Menecmo e mesmo ao próprio Platão.

O primeiro progresso se deu com a redução do problema, por Hipócrates (c. 440 a.C.), à construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta de comprimentos s e $2s$. Denotando-se as médias proporcionais por x e y, temos

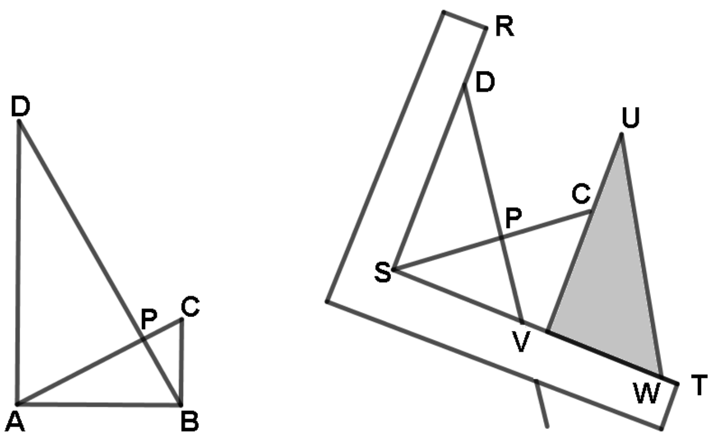
$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}.$$

Dessas proporções resulta que $x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$. Eliminando-se y, obtém-se que $x^3 = 2s^3$, assim, x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro de um cubo de aresta s.

Após os avanços de Hipócrates muitos matemáticos buscavam determinar o caminho da construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. Essas buscas são o berço do nascimento de grandes avanços na geometria superior, como a descoberta das secções cônicas por Menecmo. Mais tarde Diocles inventou uma curva chamada cissóide com o mesmo objetivo. E obviamente, descobriram-se muitas soluções mediante curvas planas superiores nos tempos mais modernos.

Como proposto em Eves (2004), para ilustrar o espírito investigativo e desbravador dos matemáticos da época, reproduzamos a resolução atribuída a Platão por Eutócio (Figura 2.3), que não usa os métodos ortodoxos de construção.

Figura 2.3 – Resolução Platão



Fonte: O autor

Considere dois triângulos (Figura 2.3 - I), CBA e DAB, retos em B e A, respectivamente, de maneira que o cateto AB seja comum a ambos triângulos. Suponhamos que as hipotenusas AC e BD se interceptem perpendicularmente em P. Sendo semelhantes os triângulos CPB, BPA e APD (semelhantes pelo caso AAA), segue que

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PD}$$

Logo, PB e PA são duas médias proporcionais entre PC e PD. Assim basta que se possa construir uma figura em que $PD = 2(PC)$. Por meios mecânicos (Figura 2.3 - II), podemos traçar essa figura com a proporção desejada. Para isso traçamos duas retas perpendiculares interceptando-se em P e marcamos PC e PD sobre elas, com $PD = 2(PC)$. A seguir colocamos um esquadro de lados internos RS e ST, sobre a figura de modo que SR passe por D e o vértice S do ângulo reto fique no prolongamento de CP. Escorregamos sobre ST um triângulo, retângulo em V, UVW com cateto VW no lado ST, até que VU passe por C. A seguir manipule o aparato até que V esteja no prolongamento de DP. Assim chegando no segmento que precisamos, mantendo as proporções necessárias para a média proporcional.

Vemos que o processo necessita de meios mecânicos, mas de acordo com Eves

(2004), Platão reprovava o uso de meios mecânicos para resolução de problemas desse tipo, pois feria o princípio da geometria construtiva, então é possível que a atribuição a Platão talvez não seja completamente correta.

2.2.2 Quadratura do Círculo

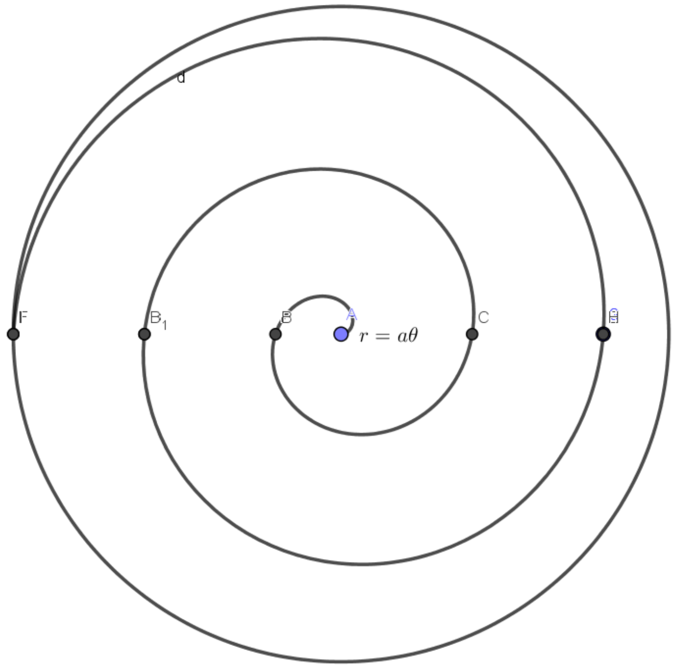
Um dos problemas que mais fascinou a humanidade, tem seus primeiros "solucionadores" dentre os egípcios tomando o lado do quadrado igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. Conforme Eves (2004), milhares de pessoas trabalharam no problema e, a despeito de já se ter demonstrado que sua construção é impossível de acordo com as regras de construção fixadas, não há um ano que não tenha sua safra de "quadradores de círculo".

De acordo com Boyer (1988), o problema da quadratura do círculo na Grécia, como conta Plutarco, foi primeiramente proposto por Anaxágoras, um filósofo da natureza mais do que das matemáticas, que enquanto esteve preso, ocupou-se com uma tentativa de quadrar o círculo. Aqui temos a primeira menção ao problema que iria fascinar matemáticos por mais de 2000 anos. Mais tarde ficou entendido que o quadrado procurado de área exatamente igual à do círculo deveria ser obtido com o uso das construções que utilizavam apenas régua e compasso. Anaxágoras faleceu em 428 a.C. um ano antes do nascimento de Platão.

Análogo aos outros dois problemas gregos, o problema foi solucionado de fato somente no século XIX, ou seja, demonstrou-se que o problema da quadratura do círculo não tem solução com a utilização de apenas régua não graduada e compasso.

É possível encontrar uma solução elegante com o uso da espiral de Arquimedes (Figura 2.4), criada pelo seu amigo, o matemático e astrônomo do século III a.C., *Conon de Samos*, usada pelo próprio Arquimedes (c. 225 a.C) com a finalidade de resolver o problema da quadratura.

Figura 2.4 – Espiral de Arquimedes



Fonte: O autor

A demonstração de como utilizar a espiral de Arquimedes para resolver o problema da trissecção, será apresentada na sessão "Possíveis Construções e Aproximações: Soluções atribuídas a Arquimedes".

> “O estudo que Arquimedes fez da espiral, curva que atribuiu ao seu amigo Conon (...), era parte da busca de soluções dos três problemas famosos. A curva presta-se tão bem a subdivisões de ângulos que pode bem ter sido inventada por Conon para esse fim. Como no caso da quadratriz[1], porém, ela também serve para quadrar o círculo, como Arquimedes demonstrou.” (BOYER, 1988).

Já na era moderna, o primeiro matemático a publicar efetivamente uma demonstração da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas apenas com régua não graduada e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel, em 1837. Mas foi o alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) quem demonstrou formalmente, em 1882, que π é um número transcendente sobre o corpo dos números racionais, pelo fato que é impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua não graduada e compasso.

[1]Curva mecânica criada por Hípias de Elis que pode ser usada para resolver o problema da quadratura.

2.2.3 Trissecção do Ângulo

Dentre os problemas gregos da antiguidade, o da trissecção do ângulo é um dos mais populares para os não-iniciados em matemática dos Estados Unidos. Esses aficionados são chamados de “Trisseccionadores de ângulo”, não raramente é possível ler em jornais universitários que alguém finalmente resolveu o evasivo problema. Esse é com certeza o mais fácil de entender dentre os três clássicos e, como a bissecção de um ângulo é tão fácil, é natural a estranheza ao fato de que a trissecção ainda não tenha uma solução.

De acordo com Eves (2004), os Gregos se depararam com o problema, ao tentar fazer a multissecção de um ângulo, por ser muito parecido com a multissecção de um segmento, problema esse que com os instrumentos euclidianos, é de fácil solução. Outra possibilidade descrita por Eves (2004), é que o problema surge da busca da maneira de construir um polígono regular com nove lados, para o que, é necessário trisseccionar um ângulo de sessenta graus.

Com os trabalhos realizados pelos geômetras Gregos nas tentativas de solução do problema, aparentemente eles buscaram reduzi-lo primeiramente ao que eles chamavam de um *problema de Nêusis*[2]. Demonstraremos como se dá essa solução no capítulo onde traremos as possíveis soluções para a trissecção.

Contrariando as hipóteses de construção euclidiana, para resolver um problema de Nêusis podemos marcar o segmento necessário na nossa régua, e ajustarmos a régua de forma que esse segmento passe por por um ponto especial, assim estará trisseccionado. Essa utilização não-permitida da régua pode ser entendido como uma aplicação do *princípio da inserção*.

Descobriram-se várias curvas superiores que resolvem um problema da *Nêusis* ao qual o problema da trissecção pode ser reduzido. Entre elas escolhemos destacar a conchóide de Nicomedes (c. 240 a.C.) e a Quadratriz de Hípias (c. 425 a.C.) que serão abordadas no capítulo referente as possíveis soluções para o problema da trissecção. Além delas muitos outros instrumentos mecânicos e curvas superiores podem ser usados para a resolução do problema da trissecção, mas infelizmente apenas com a utilização dos instrumentos euclidianos o problema se mostrou impossível.

Assim como os outros problemas clássicos, o problema da trissecção permaneceu por praticamente dois mil anos sem solução ou prova de sua impossibilidade, de acordo com Cajori (1999). Apenas com o trabalho de *Pierre Laurent Wantzel* houve uma prova rigorosa da impossibilidade da trissecção de qualquer ângulo apenas com o uso de régua e compasso.

[2]Ajustar um segmento de um tamanho dado em um espaço determinado.

3 NÚMEROS E PONTOS CONSTRUTÍVEIS E O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO

Neste capítulo estudamos um pouco sobre construtibilidade usando régua e compasso e verificamos o que torna um número construtível ou não, aplicando esse conhecimento ao problema da trissecção. As principais referências utilizadas para essa exploração foram Rezende e Queiroz (2008) e Gonçalves (1979).

Os problemas clássicos da Matemática Grega, a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e especialmente a trissecção do ângulo, são impossíveis de serem resolvidos utilizando-se apenas uma régua não graduada e compasso. Analisamos à frente um pouco sobre essa impossibilidade. Verificamos o que é um número construtível e discutimos critérios de construtibilidade e não construtibilidade. Tomamos por régua não graduada como um instrumento que nos permita ligar dois pontos no plano definidos, ou seja, uma régua que não possui qualquer marca.

3.1 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

De maneira geral um número real é dito construtível se for zero ou seu módulo for um número real construtível, ou seja, a é construtível quando $|a|$ for construtível. Assim, todo $n \in \mathbb{N}$ é construtível, da mesma maneira todo $z \in \mathbb{Z}$ também é construtível. Denotaremos o conjunto dos números construtíveis pelo símbolo $\mathcal{C}$.

Usando apenas um compasso e uma régua não graduada, a é dito construtível se conseguirmos construir, em um número finito de passos, um segmento de reta com o comprimento igual ao número a, a partir de um segmento inicial cujo comprimento é tomado como unidade. Como não existe comprimento negativo, tomaremos apenas os números reais positivos como possíveis números construtíveis.

Assim basicamente, números que podem ser obtidos utilizando as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada, são números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso. Para demonstrar essa afirmação temos os resultados a seguir.

Teorema Se a e b são números reais construtíveis, então $a + b$, $a - b$ (com $a > b$) , $a \cdot b$, $\dfrac{a}{b}$ (com $b \neq 0$) e $\sqrt{a}$ são construtíveis.

Demonstração Tome um segmento de reta cujo comprimento é considerado a unidade e considere dois segmentos de reta de comprimentos construtíveis a e b (com $a > b$)(Figura 3.1).

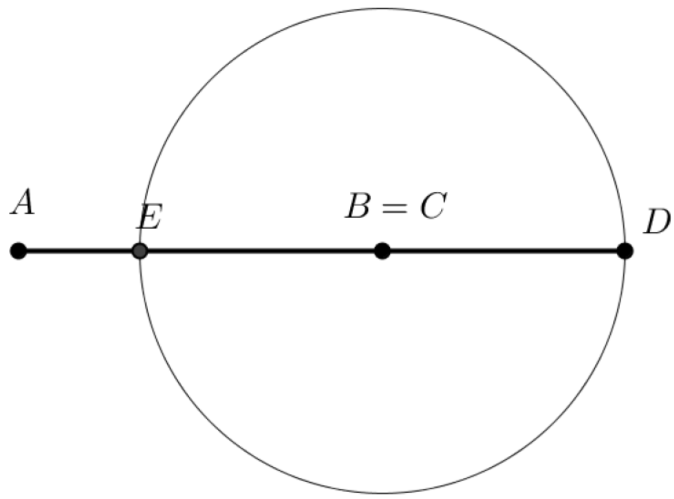
Figura 3.1 – Segmento unitários e segmentos a e b

Fonte: O autor.

Considere agora um segmento AB tal que $|AB| = a$ e tracemos sobre a reta AB um segmento CD tal que $|CD| = b$ de modo que C coincida com B e esteja entre A e D.

Construindo agora uma cirncunferência com centro no ponto B e raio b, chamamos o ponto de intersecção entre a reta e a circunferência diferente de D de E (Figura 3.2). Então, $|AD| = a + b$ e $|AE| = a - b$, o que mostra que $a + b$ e (como $a > b$) $a - b$ são números construtíveis.

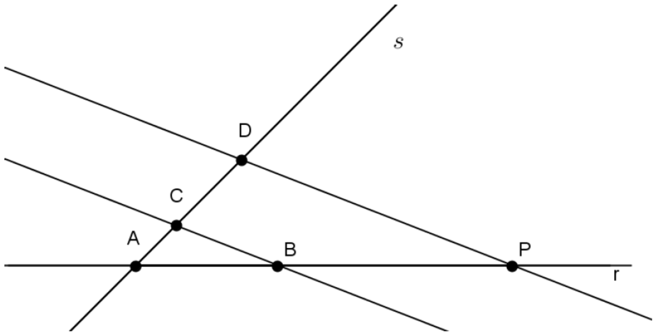
Figura 3.2 – Determinação de $a + b$ e $a - b$



Fonte: O autor.

Sobre uma reta r tracemos um segmento AB. Por A traçamos uma reta s concorrente com a reta r, onde marcamos o segmento unitário AC com $|AC| = 1$. Posteriormente na reta s marcamos o segmento AD com $|AD| = b$. Sem perda de generalidade, podemos supor $b > 1$. Tracemos a reta que passa pelos pontos C e B e uma outra paralela que passa por D e intersecta r num ponto P. (Figura 3.3).

Figura 3.3 – Construção para demonstrar $a \cdot b$



Fonte: O autor.

Pela semelhança entre os triângulos ACB e ADP temos que

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AP|} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{b} = \frac{a}{|AP|}$$

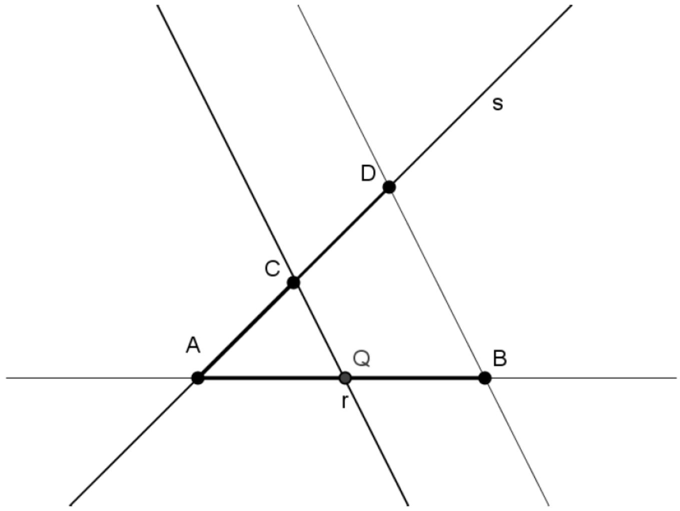
Portanto,

$$a \cdot b = |AP|$$

o que mostra que $a \cdot b$ é construtível.

Nas mesmas condições usadas construímos uma reta que passa por B e D e construímos uma paralela a BD passando por C e intersectando AB. Denominamos esse ponto de Q (Figura 3.4).

Figura 3.4 – Construção para demonstrar $\frac{a}{b}$



Fonte: O autor.

Como antes, pela semelhança entre os triângulos ADB e ACQ temos que

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AQ|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{1} = \frac{a}{|AQ|}$$

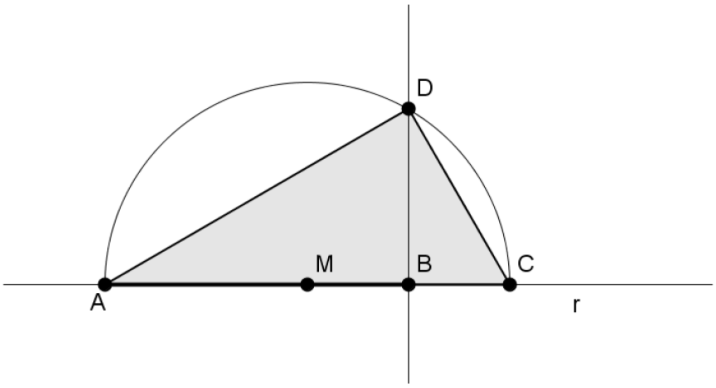
Portanto,

$$\frac{a}{b} = |AQ|$$

o que mostra que $\frac{a}{b}$ também é construtível.

Nos resta demonstrar a construtibilidade de $\sqrt{a}$. Consideremos então uma reta r e um segmento $|AB| = a$, sobre essa reta. Tomemos o ponto C nessa reta, de maneira que a medida do segmento BC seja o mesmo do segmento unitário. Traçamos a semicircunferência com centro no ponto médio de AC e raio AM (Figura 3.5).

Figura 3.5 – Construção para demonstrar $\sqrt{a}$



Fonte: O autor.

Traçamos a perpendicular a AC passando por B, e denominamos por D a intersecção desta perpendicular com a semicircunferência, construindo assim o triângulo ADC.

Como o triângulo está inscrito em uma semicircunferência, sabemos que o ângulo $\hat{D}$ é reto, portanto o triângulo ADC é retângulo. Usando as relações métricas do triângulo retângulo, temos que

$$|BD|^2 = |AB| \cdot |BC| \Leftrightarrow$$

$$|BD|^2 = a \cdot 1 \Rightarrow$$

$$|BD| = \sqrt{a}$$

Portanto $\sqrt{a}$ é construtível.

Sendo $a, b \in \mathbb{Z}$ construtíveis, de acordo com o Teorema 1, $\dfrac{a}{b}$ com $b \neq 0$, também é construtível. Consequentemente, todos os números racionais são construtíveis.

Como vimos, a raiz quadrada de um número construtível a também é construtível. Assim mesmo números irracionais na forma $\sqrt{a}$ também são construtíveis, para todo $a \geq 0 \in \mathcal{C}$. Então um número construtível pode ser dado na forma $a + b\sqrt{r}$ com $a, b, r \in \mathcal{C}$ e $r \geq 0$.

De fato, de acordo com Rezende e Queiroz (2008), devemos lembrar que estamos buscando uma solução com as construções com régua e compasso. Os resultados da Teoria Algébrica dos Números afirmam que um número é construtível se, e somente se, for um número algébrico de grau igual a uma potência de 2. Um número é algébrico de grau n, se for raiz de uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros e se não existir uma equação desse tipo, de menor grau, da qual ele seja raiz.

Como já vimos, toda a raiz quadrada $\sqrt{r}$ com $r \in \mathcal{C}$ é construtível, pois é raiz da equação polinomial de grau 2, $x^2 - r = 0$, assim é um número algébrico de grau 2. Agora em outro caso, por exemplo de $\sqrt[3]{3}$ temos que é raiz da equação polinomial de grau 3 irredutível $x^3 - 3 = 0$, portanto apesar de ser um número algébrico, seu grau é maior que 2, assim esse número não é construtível. Além dos números algébricos, existem os não algébricos ou números transcendentes, como é o caso do π, que também não são construtíveis.

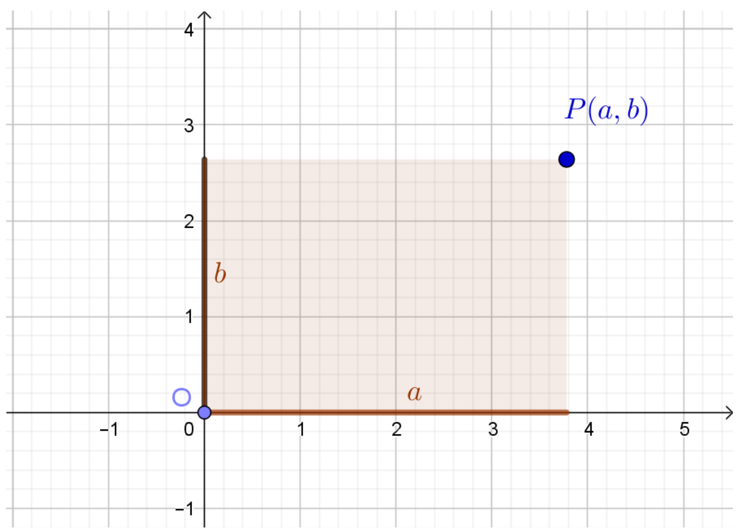
Este fato é mencionado e aprofundado em Gonçalves (1979).

3.2 PONTOS CONSTRUTÍVEIS E O PLANO CARTESIANO

A partir do estudo anterior, é possível perceber os tipos de números construtíveis, e fica claro que todo número construtível é aquele que pode ser obtido pelas operações fundamentais que foram descritas anteriormente. Mas como isso pode ser usado para entendermos o que é realmente construtibilidade de um dado ponto?

Os números construtíveis estão intimamente ligados ao sistema de coordenadas (x, y) em que os elementos dados são representados por pontos ou conjunto de pontos no plano cartesiano. Neste sistema, é possível expressar a construtibilidade de um ponto $P(a, b)$ em termos de suas coordenadas reais a e b (Figura 3.6).

Figura 3.6 – Construção do ponto P no plano cartesiano



Fonte: O autor.

Basicamente podemos dizer que um ponto P é construtível, se e somente se, suas coordenadas reais a e b são números reais construtíveis então, para tornar mais concisa a escrita, a partir desse ponto todo ponto P construtível pertence ao conjunto $P_{\mathcal{C}}$.

Como prosseguimento, faremos algumas análises relacionando algebricamente a construtibilidade de tais pontos. Essas análises serão de muita importância para as demonstrações posteriores.

Toda construção geométrica usando régua não graduada e compasso, claramente é realizada por retas e circunferências. Assim, novos pontos são obtidos pelas intersecções de pares desses objetos geométricos dispostos no plano. Podemos afirmar que pontos obtidos através dessas interseções, tem suas coordenadas cartesianas obtidas da resolução de processos correspondentes com a solução de sistemas lineares ou polinomiais quando envolvem circunferências.

Verifiquemos que a intersecção de duas retas equivale ao problema de resolver um sistema de duas equações, onde cada equação nos fornece o conjunto de pontos que formam cada reta:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \text{, onde } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathcal{C}.$$

ou seja,

$$x = \frac{-c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{-a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

onde, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, pois caso contrário, as retas seriam paralelas ou coincidentes.

Como podemos perceber, as coordenadas x e y, são obtidas através de operações lineares entre os coeficientes das equações das retas em questão. Sendo esses coeficientes construtíveis, x e y também serão.

De maneira análoga, se a intersecção se der entre uma reta e uma circunferência, encontrar o ponto em relação às coordenadas equivale à resolver o sistema polinomial, como:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{, onde } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}.$$

Nesse caso, a solução se dá não necessariamente a apenas um ponto, mas dependendo do caso podemos ter até dois pontos de intersecção, isto depende da posição relativa entre a reta e a circunferência. De qualquer forma as coordenadas dos pontos se darão da forma $p + q\sqrt{r}$, onde $p, q, r \in \mathbb{R}$. Assim se r é um número real construtível, como vimos na seção anterior, $\sqrt{r}$ também é construtível. De fato, se $b \neq 0$ (isto é, a reta não é paralela ao eixo O_y) isolando y na primeira equação, obtemos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

E, substituindo esse valor na segunda equação, obtemos

$$x^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + \alpha x + \beta\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + \gamma = 0$$
$$(a^2 + b^2)x^2 + (2ac + \alpha b^2 - \beta ba)x + (c^2 - \beta bc + \gamma) = 0$$

Chamando $A = (a^2 + b^2), B = (2ac + \alpha b^2 - a)$ e $C = (c^2 - \beta bc + \gamma)$, podemos escrever

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

cuja solução é dada da forma da resolução de uma equação polinomial do segundo grau.

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

E analogamente podemos obter y através de uma fórmula semelhante. Usando $r = B^2 - 4AC$, segue automaticamente o que afirmamos anteriormente.

Seguindo o pensamento de construção geométrica, vamos analisar como se dá a intersecção entre duas circunferências, onde ambas possuem centros e passam por coordenadas pertencentes a $P_{\mathcal{C}}$. Pode-se resumir o problema à resolução do seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0 \end{cases}$$

Subtraindo-se a segunda equação da primeira, temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ (\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma') = 0 \end{cases}$$

Ou seja, temos novamente o sistema polinomial, que como no caso anterior possui um ou dois pontos com ambas coordenadas da forma $p + q\sqrt{r}$, com p, q, r elementos de $\mathcal{C}$. Assim como antes, se r pertence ao conjunto $\mathcal{C}$, $\sqrt{r}$ também pertence ao conjunto $\mathcal{C}$. Dessa forma, veremos que para obter todos os números reais construtíveis, é necessário, a partir de um conjunto original, inicialmente o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$, fazer um número finito de operações lineares, para então obtê-los. Como veremos a seguir, a construtibilidade dos números e de seus pontos está relacionada à solução dos problemas dos problemas gregos e mais especificamente da trissecção do ângulo.

3.3 A IMPOSSIBILIDADE DE TRISSECÇÃO COM RÉGUA NÃO GRADUADA E COMPASSO

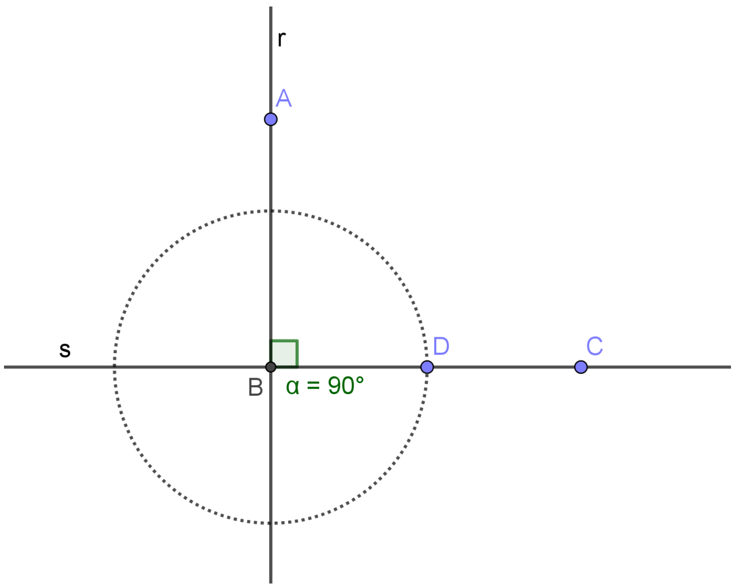
Já sabemos que a construção de segmentos é equivalente à da construção de números, isto é, só podem ser construídos segmentos cujas medidas sejam números construtíveis.

No caso do problema da quadratura teremos problemas com o número transcendente π, que por definição já abordada não é construtível. Enquanto no caso da duplicação do cubo, construir a aresta com $a \cdot \sqrt[3]{2}$ se torna impossível, pois o número algébrico $\sqrt[3]{2}$ tem grau maior que 2.

O terceiro problema, a trissecção de um ângulo, difere dos outros problemas gregos em alguns pontos. Primeiramente porque é possível trisseccionar ângulos com amplitudes especiais usando apenas régua não graduada e o compasso, como é caso do ângulo de $90°$.

Para efetuar essa construção, iniciamos com o ângulo entre as retas $r = AB$ e $s = CB$, perpendiculares em B, formando o ângulo $A\hat{B}C$, e marcamos o ponto D no segmento BC entre B e C. Então com o compasso com ponta seca em B, aberto com raio BD marcamos a circunferência (Figura 3.7).

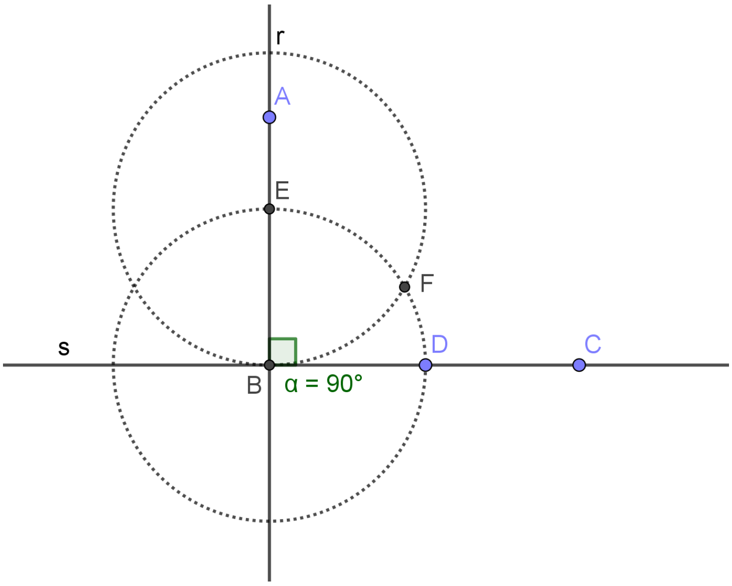
Figura 3.7 – Construção da trissecção de um ângulo de $90°$



Fonte: O autor.

Marcamos o ponto E na intersecção da circunferência com AB, e mais uma vez com a ponta seca do compasso em E, com abertura $EB = BD$, traçamos a segunda circunferência, e na intersecção entre as duas circunferências marcamos o ponto F (Figura 3.8).

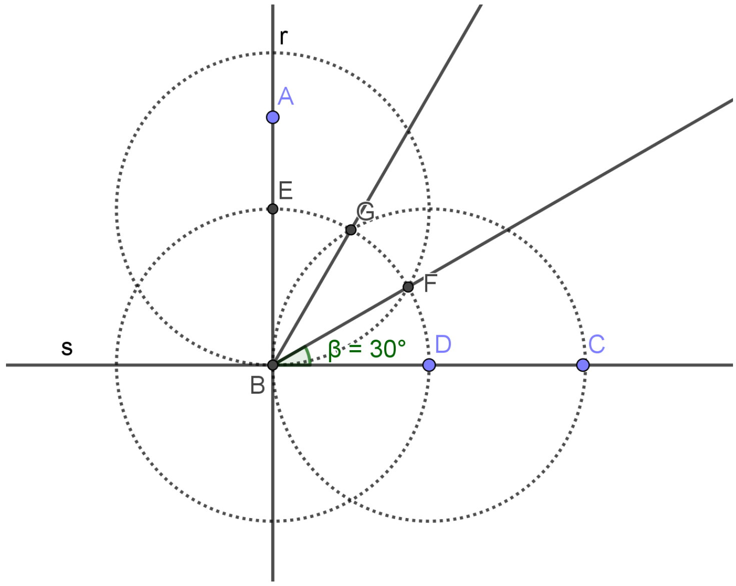
Figura 3.8 – Construção da trissecção de um ângulo de $90°$



Fonte: O autor.

Assim, $C\hat{B}F$ trissecciona o ângulo $A\hat{B}C$, ainda é possível repetir o passo anterior com a ponta seca em D e encontrar o ponto G (Figura 3.9) para ter o ângulo trisseccionado por completo.

Figura 3.9 – Construção da trissecção de um ângulo de $90°$



Fonte: O autor.

Essa construção é simples e se baseia na construção do triângulo equilátero, é possível perceber que BGD forma um triângulo equilátero, assim como o triângulo EBF, assim seus ângulos internos são de $60°$ e seu complemento é $30°$.

Diferente de outros ângulos a construção da trissecção de $90°$ é de simples execução, além desse podemos resolver o problema para alguns ângulos particulares, entre eles temos os ângulos de $45°$, $180°$, $270°$, etc. Mas de maneira generalizada é impossível. Essa questão está intrinsecamente relacionada aos conceitos advindos da trigonometria.

Assim como vimos no plano cartesiano um ponto P só é construtível, se suas coordenadas em x e y também o forem. De forma análoga, um ângulo θ será construtível apenas se os valores de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ também forem construtíveis.

Dada a assertiva acima, se torna natural a tentativa de traduzir o problema da trissecção do ângulo θ para a tentativa de construção de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$ e $\cos\frac{\theta}{3}$. Tal colocação traz admissão a seguinte relação.

Para $\alpha = \frac{\theta}{3}$, temos que

$$\cos\theta = \cos(2\alpha + \alpha)$$

Assim,

$$\cos\theta = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}2\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\theta = (\cos^2\alpha - \ \mathrm{sen}^2\alpha)\cdot\cos\alpha - 2\,\mathrm{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\ \mathrm{sen}\alpha$$

$$\cos\theta = [\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)]\cdot\cos\alpha - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\theta = (2\cos^2\alpha - 1)\cdot\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$$\cos\theta = 2\cos^3 - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\cos\theta = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Portanto temos que:

$$\cos\theta = \cos\left(2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \left(\frac{\theta}{3}\right)\right) = 4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

Equivalentemente, se usarmos $\cos\theta = c$ e $\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = x$ o problema passa então a ser encontrar as raízes da equação $4x^3 - 3x = c$, ou ainda, $4x^3 - 3x - c = 0$.

Como já discutimos anteriormente, temos que a solução da equação $4x^3 - 3x - c = 0$, para alguns valores de c, é um número algébrico de grau maior que 2. Portanto, esse número não pode ser construído, assim o ângulo relacionado a esses valores também não será construtível, impossibilitando sua solução apenas com régua não graduada e compasso.

4 POSSÍVEIS CONSTRUÇÕES E APROXIMAÇÕES

Neste capítulo analisamos as formas de construir a trissecção de ângulos que foram usadas ao longo do tempo. As principais referências utilizadas para esse capítulo são Sousa (2001), Eves (2004) e Allman (1976).

Usando apenas régua não graduada e compasso os matemáticos da Grécia realizaram várias construções geométricas. Grandiosos problemas da geometria foram solucionados, fundamentados em um conjunto de construções executáveis, como por exemplo a bissecção de um ângulo, a construção de retas perpendiculares, retas paralelas a uma outra passando por um ponto dado, construção de circunferências e arcos, entre muitos outros.

Assim, como as noções e relações primitivas da geometria fazem referência à régua e ao compasso, acaba por ser impossível avaliar a importância destes instrumentos que foram inseridos na história da geometria, assim como sua influência na expansão do conhecimento geométrico como um todo, pois os limites dessas ferramentas a alguns problemas propiciaram a criação de novas interpretações e o próprio avanço da geometria como um todo.

Apesar da impossibilidade da solução dos problemas gregos, através das construções com régua e compasso, diversas contribuições, com o passar dos séculos possibilitaram o desenvolvimento de novas ferramentas e mecanismos geométricos que foram frutíferos em resoluções subsequentes e, assim, trazendo a ampliação da Matemática.

Dentre os possíveis métodos criados na busca da trissecção do ângulo, discutimos a seguir alguns dos mais famosos entre os historiadores.

4.1 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

Além das origens obscuras, o problema da trissecção do ângulo possui uma grande diferença dos demais problemas clássicos da geometria. Enquanto quadrar o círculo e duplicar o cubo via régua não graduada e compasso é provado ser impossível em qualquer hipótese, é possível trisseccionar alguns ângulos particulares usando somente estes instrumentos euclidianos, por exemplo, mostramos como trisseccionar um ângulo de 90°.

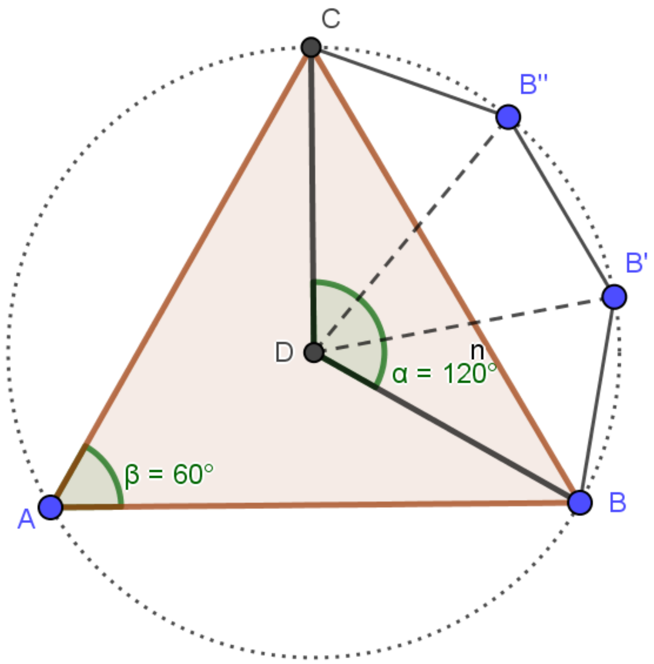
> “É provável que o terceiro problema célebre - a trissecção do ângulo - tenha também ocupado a atenção dos geômetras neste período (o período do problema da duplicação do cubo). Não há dúvida que os Egípcios conheciam como dividir um ângulo ou o arco de um círculo, em duas partes iguais; assim eles também deviam saber como dividir um ângulo reto em três iguais. Nós já vimos, além do mais, que a construção do pentágono

> regular era conhecida de Pitágoras e podemos inferir que ele podia dividir um ângulo reto em cinco partes. Deste modo, nessa altura, o problema da trissecção de um qualquer ângulo - ou o mais geral de dividir um ângulo num qualquer número de partes iguais - podia surgir naturalmente." (ALLMAN, 1976)

> "Não é conhecida a origem do problema da trissecção do ângulo, mas é provável que tenha surgido a partir de problemas de construção de polígonos regulares. Por exemplo, para construir um polígono regular de 9 lados, o eneágono regular, é necessário trisseccionar um ângulo de $120°$. " (SOUSA, 2001)

A figura abaixo (Figura 4.1) ilustra, pensando em um triângulo equilátero inscrito na sua circunferência, cada arco formado por cada lado do triângulo, teria que ser dividido em 3 partes iguais, como os ângulos internos do triângulo equilátero são todos iguais a $60°$, o arco formado entre os vértices de um lado e o centro da circunferência é de $120°$.

Figura 4.1 – Construção do eneágono regular



Fonte: O autor

Como vimos nas seções anteriores, a trissecção é possível por construção em alguns casos de ângulos. Sendo impossível de uma maneira geral, utilizando régua não graduada e compasso.

Sabe-se que os gregos não possuíam ainda o domínio matemático necessário para resolver determinadas equações, mas no período que se segue, é plausível inferir que as tentativas de resolução do problema foram favoráveis ao desenvolvimento da geometria.

Ao problema da trissecção dos ângulos que não podem ser construídos por régua e compasso, trazemos três abordagens do problema, que nos trazem soluções com aproximações muito convenientes para os padrões da época, mas que fogem do rigor necessário nas ferramentas euclidianas de construção. São elas as soluções de *Nêusis* de Arquimedes, Conchoide de Nicomedes e Quadratriz de Hípias.

4.2 A TRISSECÇÃO REDUZIDA A UM NOVO PROBLEMA

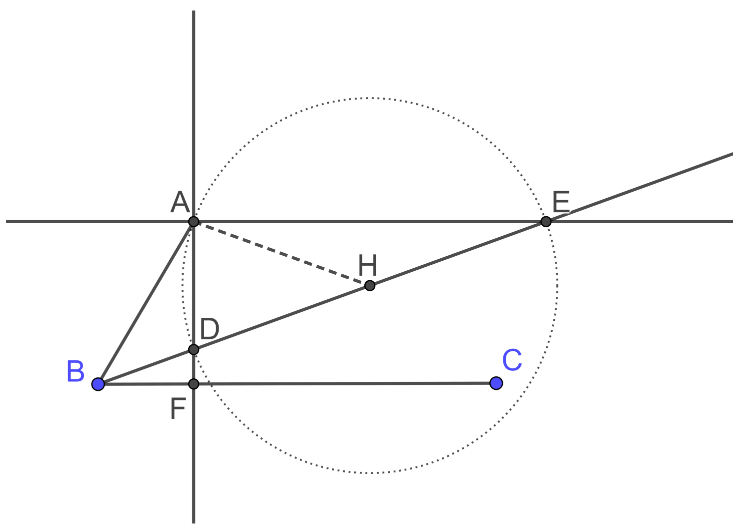
Durante as tentativas de resolução do problema, os geômetras da Grécia buscaram soluções diversas, mas durante essas tentativas, possivelmente a partir das contribuições de Hipócrates de Quios, Papo de Alexandria propõe na *Colecção Matemática*, a redução do problema ao problema de Nêusis.

A construção por *Nêusis* é dada por ajustar o segmento dado entre duas curvas, com a exigência de que o segmento passe por um ponto especificado.

A seguir apresentaremos essa solução, posteriormente ferramentas matemáticas superiores trouxeram à essa solução, maior rigor e exatidão.

Dado um ângulo $A\hat{B}FC$ (Figura 4.2) com vértice B, construímos uma reta paralela ao lado BC e outra perpendicular a BC ambas que passem pelo ponto A. Determinamos o segmento DE de forma que $DE = 2(AB)$ e que B pertença a reta suporte de DE.

Figura 4.2 – Redução ao problema de Nêusis



Fonte: O autor

Seja H o ponto médio de DE. Então,

$$DH = HE = AH = BA$$

Assim,

$$A\hat{B}H = A\hat{H}B = H\hat{A}E + H\hat{E}A = 2(H\hat{E}A) = 2(E\hat{B}C)$$

e assim, BE trissecciona o ângulo $A\hat{B}C$. Dessa forma, o problema se reduz ao de construir um segmento de reta DE de um dado comprimento $2(BA)$ entre AF e a reta suporte de AE de modo que o vértice B pertença à reta suporte de DE. A partir de então, o problema está em como construir DE usando apenas régua e compasso.

Contrariando as hipóteses de construção euclidiana, se usarmos uma régua e marcarmos o segmento $DE = 2(BA)$ na nossa régua, e ajustarmos a régua de forma que esse segmento passe por AF em nossa marcação e também passe pelo vértice B, o ângulo $A\hat{B}C$ estará trisseccionado. Essa utilização não-permitida da régua pode ser entendida como uma aplicação do *princípio da inserção*.

> "Sejam dadas duas curvas m e n e um ponto O. Suponha que seja permitido marcar, numa dada régua, um segmento MN, e depois ajustar a régua de modo que ela passe por O e corte as curvas m e n com M em m e N em n. Diz-se então que a reta traçada ao longo da régua foi traçada pelo *princípio de inserção*. Problemas para os quais não bastam os instrumentos euclidianos podem ser resolvidos com esses instrumentos, permitindo-se o princípio da inserção." (EVES, 2004)

Portanto, de acordo com Eves (2004) o *princípio da inserção*, é o ato de adicionar elementos à resolução do problema que não sejam apenas a régua não graduada e compasso.

4.3 SOLUÇÕES ATRIBUÍDAS A ARQUIMEDES

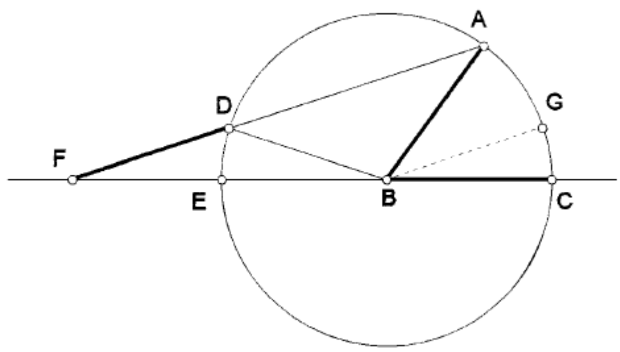
Um grande matemático do século III a.C. foi Arquimedes de Siracusa. Embora não se conheça construções diretamente a ele atribuídas para a solução da trissecção do ângulo, ao menos dois de seus trabalhos indicam soluções para o problema da trissecção: a construção por *Nêusis* e a curva espiral definida na sua obra *Acerca das Espirais*.

Embora não haja nenhuma evidência concreta do interesse de Arquimedes pelo problema da trissecção do ângulo, dada a notoriedade do problema, seria estranho que ele não tenha dado atenção a ele. Inclusive é possível ver diversas construções por *Nêusis* em várias proposições em sua obra *Acerca dos Espirais* e nessa época já era conhecida a redução do problema da trissecção do ângulo a uma construção por *Nêusis*.

A maior parte das construções por *Nêusis* dos gregos requerem o uso de cônicas ou curvas de grau superior. A construção a seguir é um exemplo das várias soluções do problema da trissecção do ângulo.

Considere o ângulo agudo $\hat{B}$ que será trisseccionado. Construa uma circunferência de centro B e raio r qualquer, intersectando os lados do ângulo nos pontos A e C definindo o ângulo $A\hat{B}C$. O segmento de reta FD, de comprimento igual ao raio r, é *inserido* entre a reta suporte do segmento CB e a circunferência, de maneira que o ponto A esteja no prolongamento do segmento FD. Por fim, traçamos uma reta paralela à reta suporte de FD, passando pelo ponto B, interseccionando a circunferência num ponto que vamos designar por G. O ângulo $G\hat{B}C$ é exatamente a terça parte do ângulo $A\hat{B}C$ (Figura 4.3).

Figura 4.3 – Resolução por Nêusis - Arquimedes



Fonte: O autor

Para provar a veracidade da afirmação, observamos que, do fato de BG e FA serem paralelas, então $G\hat{B}C = D\hat{F}B$, que denotaremos por α. Podemos verificar que $B\hat{A}F = A\hat{B}G$, por serem ângulos alternos internos. Sabendo que $FD = DB = AB = r$, os triângulos BAD e FBD são isósceles, assim $D\hat{F}B = F\hat{B}D = \alpha$. Como $A\hat{D}B$ é externo ao triângulo FBD, sua medida é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes, assim $A\hat{D}B = 2\alpha$. Como $B\hat{A}D = A\hat{D}B = 2\alpha$, e $B\hat{A}D = A\hat{B}G$ por alternos internos, temos que $A\hat{B}G = 2\alpha$, portanto sendo $G\hat{B}C = \frac{1}{3}A\hat{B}C$.

Embora essa seja uma solução para o problema da trissecção do ângulo, o segmento em questão não pode ser *inserido* apenas com construções usando os instrumentos euclidianos, assim tornando o problema não resolvido à luz das construções com régua e compasso. Vários instrumentos mecânicos, como o esquadro de Platão, foram criados para permitir a solução do problema usando a *Nêusis*.

4.3.1 Resolução pela Espiral de Arquimedes

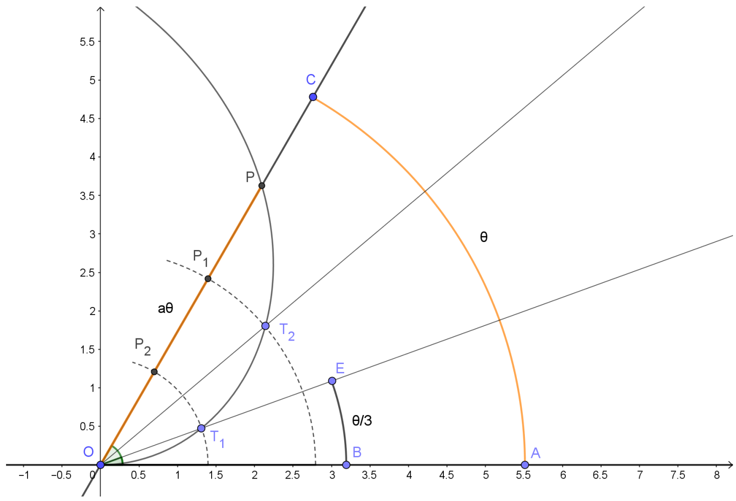
Além de sua construção por *Nêusis*, com certeza uma contribuição de grande valor para a solução do problema da trissecção ou ainda da multissecção de um ângulo qualquer é a espiral que ficou conhecida como *Espiral de Arquimedes*.

A *Espiral de Arquimedes*, foi criada pelo amigo de Arquimedes chamado Conon, mas que ficou mais largamente conhecida pelo trabalho que Arquimedes desenvolveu, realmente aprofundando a pesquisa sobre essa e de outras curvas, estudos estes que culminaram na sua obra *Acerca das Espirais*.

O uso da espiral facilita muito a multissecção do ângulo, pois transforma a secção do ângulo em uma secção de um segmento dado, proposta que pode ser resolvida com o uso do compasso. Vejamos agora como se dá a solução.

De acordo com a figura abaixo (Figura 4.4) o ângulo $A\hat{O}C$ pode ser multisseccionado, ou mais especificamente trisseccionado com a espiral de Arquimedes, que é parametrizada por $r = a\theta$, da seguinte forma.

Figura 4.4 – Espiral de Arquimedes - Trissecção



Fonte: O autor

Traçando a espiral que corte o segmento OC em P, façamos a trissecção do segmento OP com P_1 e P_2. Se as circunferências de centro O e raios OP_1 e OP_2 cortam a espiral em T_1 e T_2, OT_1 e OT_2 trisseccionam o ângulo $A\hat{O}C$,

$$OP_2 = \frac{OP}{3} = \frac{a\theta}{3}.$$

Assim, com a espiral de Arquimedes, basta que façamos a secção em quantas partes quisermos do segmento OP, para termos o ângulo seccionado no mesmo número de secções.

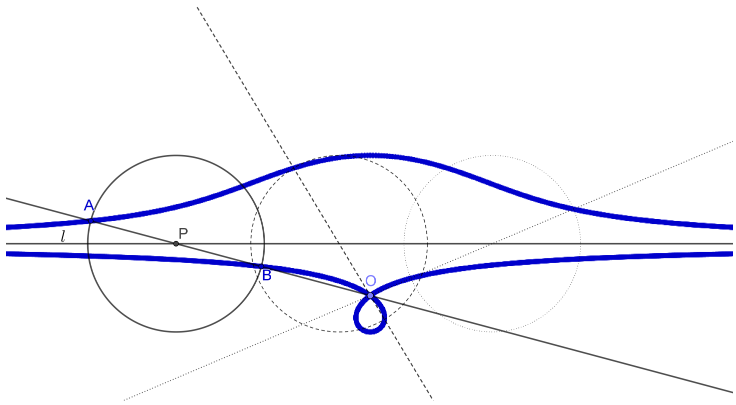
4.4 CONCHÓIDE DE NICOMEDES

Segundo Eves (2004), várias curvas planas superiores envolveram o problema de *Nêusis*. Uma das mais antigas é a *conchóide* de Nicomedes (curva em forma de concha), ela pode ser usada para resolver tanto o problema da trissecção do ângulo, quanto o problema da duplicação do cubo.

Vamos definir a conchóide de uma curva. Considere uma curva qualquer, um ponto fixo O, fora da curva, e uma distância dada k. Trace uma reta passando por O e encontrando a curva no ponto P. Se A e B forem pontos sobre a reta suporte do segmento OP tais que $k = AP = BP$, então A e B desenham a conchóide da curva em questão em relação ao ponto fixo O. Note que a conchóide de uma curva varia de acordo com o ponto fixo escolhido, bem como com a distância k, previamente considerada.

O caso particular que nos interessa é a conchóide de uma reta. Para sua construção considere a reta l (Figura 4.5), um ponto O exterior à reta e uma circunferência C, cujo raio seja igual à distância dada k, com seu centro sobre a reta l.

Figura 4.5 – Conchóide - Nicomedes

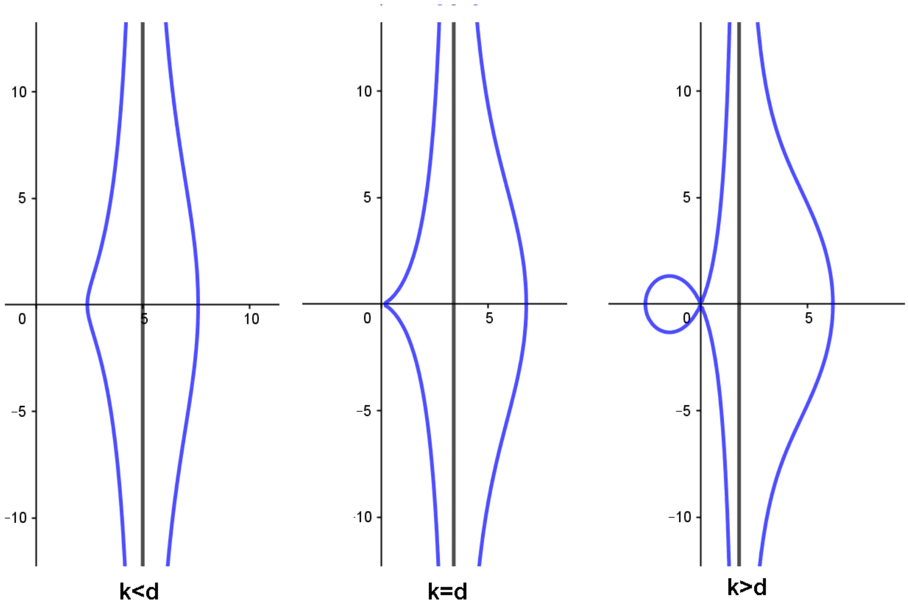


Fonte: O autor

A circunferência, de centro P, move-se ao longo de l, sempre com o centro sobre a reta. Seja ainda a reta que une o ponto O ao ponto P, onde estão os pontos A e B de interseção desta reta com a circunferência. Quando esta se move, A e B traçam a conchóide.

A conchóide tem dois ramos, e dependendo da relação entre a distância definida k e a distância entre o ponto O e a curva que denotaremos como d, obtemos diferentes tipos de conchóide, como ilustra a figura abaixo (Figura 4.6).

Figura 4.6 – Tipos de conchóide - Nicomedes

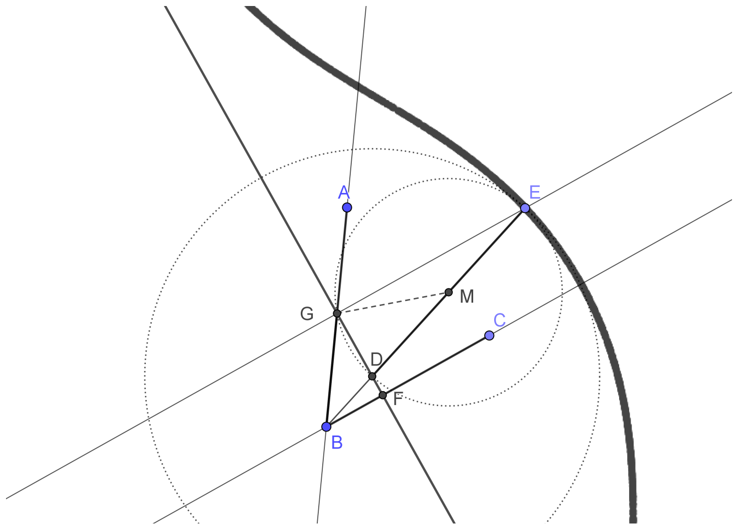


Fonte: O autor

Essa construção ajuda na solução do problema da trissecção do ângulo, pois ela garante que teremos um segmento de tamanho fixo, que justamente fora usado no problema de *Nêusis*.

Assim podemos construir uma conchóide para trisseccionar o ângulo como mostra a figura abaixo (Figura 4.7).

Figura 4.7 – Trissecção pela conchóide - Nicomedes



Fonte: O autor

Por um ponto G em um dos lados do ângulo $A\hat{B}C$ a ser trissectado, traçamos uma paralela e uma perpendicular ao lado BC do ângulo, designando por F a interseção da perpendicular com o lado BC. Traçamos a conchóide de Nicomedes definida pela reta suporte do segmento GF, com o ponto fixo em B e por uma circunferência de raio $2(GB)$ e centro sobre GF.

Sendo E a interseção entre a conchóide e a reta paralela a BC, traçamos o segmento BE. Pela definição de conchóide, $DE = 2BG$, como requerido na redução à ***Nêusis*** (Figura 4.2). Como construído anteriormente, segue que $E\hat{B}C$ é exatamente a terça parte do ângulo $A\hat{B}C$.

É importante salientar, que a conchóide construída só pode trissectar um dado ângulo, visto que a sua construção depende de elementos que são dados pelo ângulo a se trisseccionar. Assim para cada ângulo que se queira trisseccionar se faz necessário a construção de uma conchóide adequada, pois esta depende do ponto escolhido e da distância previamente definida.

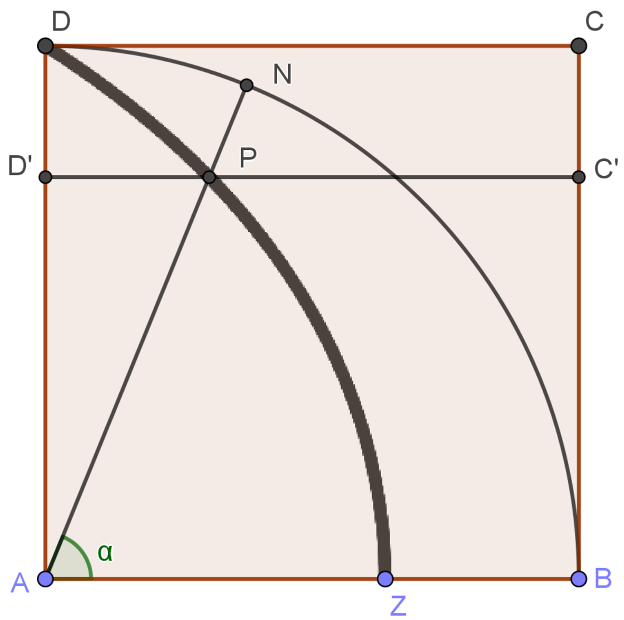
4.5 QUADRATRIZ DE HÍPIAS

Hípias de Elis, geômetra do século V a.C., de acordo com Eves (2004), inventou uma curva que se tornou conhecida como *quadratriz*. Essa curva resolve tanto o problema da trissecção como o da quadratura, mas a tradição não é unânime sobre quem a usou primeiro na quadratura. É possível que Hípias tivesse usado a quadratriz para trisseccionar ângulos e que Dinostrato ou algum outro geômetra posterior, a tivesse aplicado ao problema da quadratura. Por esse uso ela recebeu o nome *quadratriz*, mas também já foi conhecida por *trissectriz*.

Vamos então apresentar a solução do problema da trissecção do ângulo utilizando a quadratriz de Hípias.

Para construí-la considere um quadrado $ABCD$ em que o lado AD gire uniformemente, fixando o vértice A, até coincidir com o lado AB. Suponha que, ao mesmo tempo, o lado DC desça também uniformemente até coincidir com AB. Depois de um mesmo tempo, o raio AD estará na posição AN e o segmento DC na posição $D'C'$, sendo P a intersecção entre AN e o segmento paralelo a DC. O lugar geométrico descrito por P durante esses movimentos, será a *quadratriz de Hípias* (Figura 4.8).

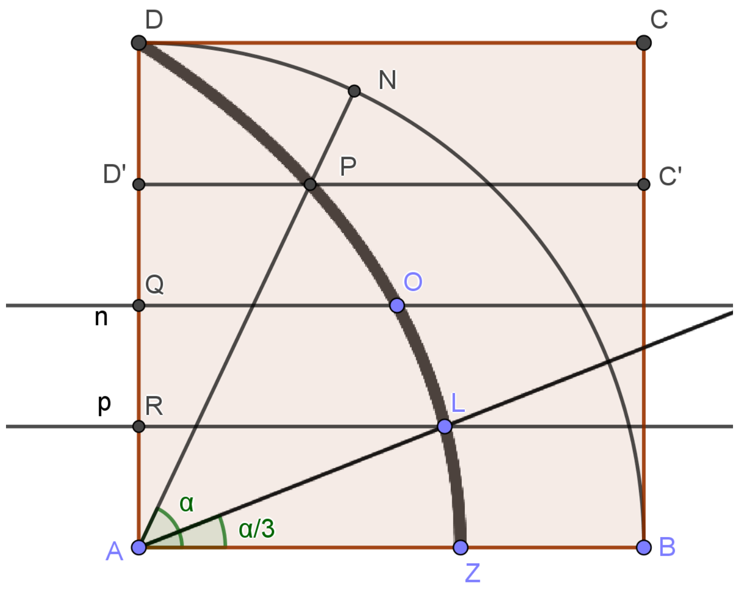
Figura 4.8 – Construção quadratriz - Hípias



Fonte: O autor

Vamos agora utilizar a quadratriz para trisseccionar um ângulo agudo α formado por $B\hat{A}N$. Daremos início construindo um quadrado $ABCD$, a partir do lado AB do ângulo. Designamos por P o ponto de interseção do lado AN do ângulo com a quadratriz. Por P, traçamos uma paralela a AB e designamos por D' o ponto de interseção dessa paralela com o segmento AD (Figura 4.9).

Figura 4.9 – Uso da quadratriz na trissecção - Hípias

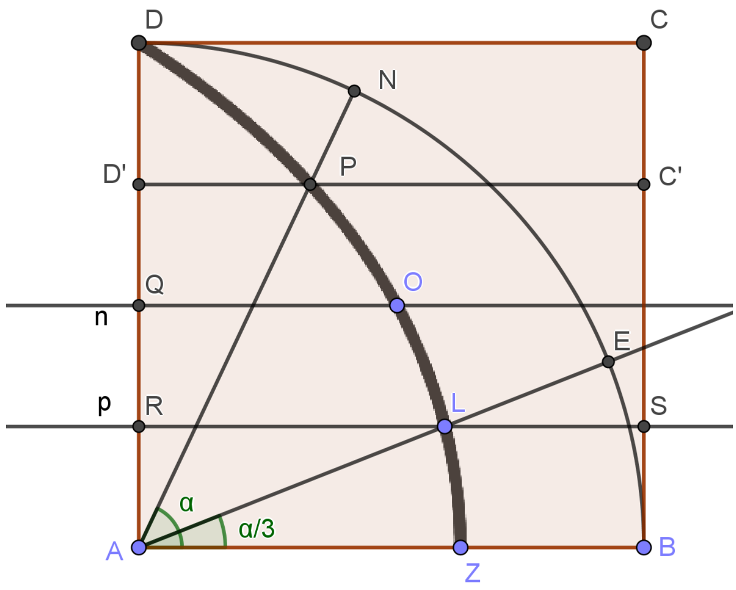


Fonte: O autor

Trisseccionamos o segmento AD' (que é possível apenas com régua não graduada e compasso), sendo AR a sua terça parte. Por R traçamos uma paralela a AB e marcamos o ponto L na interseção dessa paralela com a quadratriz. A medida do ângulo $L\hat{A}B$ é exatamente a terça parte da medida do ângulo α definido por $B\hat{A}N$.

Para que o fato acima relatado seja aceito matematicamente, vamos demonstrar essa afirmação. De acordo com a figura abaixo (Figura 4.10), marcamos E o ponto de interseção do arco DB com a reta definida por BL, respectivamente. Marcamos também o ponto S relativo à intersecção do lado BC com a reta paralela a AB passando pelo ponto R.

Figura 4.10 – Análise da quadratriz na trissecção - Hípias



Fonte: O autor

Como os movimentos são contínuos e constantes, podemos afirmar que a distância percorrida pelo lado $D'C'$ é proporcional ao tempo gasto no seu percurso. Da mesma forma, a amplitude do arco determinado na circunferência de centro A e raio AD é proporcional ao tempo percorrido no percurso circular desse raio. Assim, existe proporcionalidade entre a distância retilínea e a amplitude angular desses movimentos. Ou seja, em todas as posições do ponto P da quadratriz, a condição

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{\text{arc}DB}{\text{arc}NB}, \text{ é verificada.}$$

É justamente devido a esta propriedade da curva de Hípias, que podemos reduzir todas as questões de proporcionalidade entre ângulos a questões análogas entre segmentos de reta e em particular, nos permite reduzir o problema da trissecção de um ângulo à trissecção de um segmento.

Assim, pelas propriedades da curva quadratriz de Hípias, é válida a seguinte relação:

$$\frac{AD'}{AR} = \frac{\text{arc}NB}{\text{arc}EB} = \frac{P\hat{A}B}{L\hat{A}B}, \text{ ou seja } \frac{AD'}{AR} = \frac{P\hat{A}B}{L\hat{A}B}.$$

Como o o segmento AR é a terça parte do segmento de reta AD', também o ângulo $L\hat{A}B$ é a terça parte do ângulo $P\hat{A}B$.

Mais ainda, tomamos a devida atenção que ao se reduzir uma questão de proporcionalidade entre ângulos à uma questão de proporcionalidade entre segmentos de reta, a curva quadratriz de Hípias permite reduzir a multissecção de um ângulo agudo à multissecção de um segmento de reta.

Mesmo que seja possível construir, com régua não graduada e compasso, alguns pontos da curva quadratriz de Hípias, não é possível desenhar a curva em sua totalidade, apenas com o uso de régua e compasso.

5 A TRISSECÇÃO E O ORIGAMI

Neste capítulo apresentamos o uso do origami na matemática e uma utilização dessa arte para a solução do problema da trissecção do ângulo. As principais referências utilizadas para essa exploração foram Demaine e O'Rourke (2007) e Bern (1996).

Com a intenção de trazer o problema da trissecção do ângulo para uma sala de aula, propomos trabalhar com a demonstração de como usar o origami para trisseccionar o ângulo.

O origami (Figura 5.1) é a arte japonesa de dobradura de papel. A origem da palavra vêm do japonês *ori* (dobrar) e *kami* (papel), é um patrimônio da cultura japonesa, mas é provável que tenha tido origem na China, que é considerada "o berço do papel". Na arte original, normalmente utiliza-se um pedaço de papel quadrado, cujas dobras são feitas sem cortar o papel. Conforme desenvolveram-se métodos mais simples de confecção do papel, seu valor de mercado diminuiu consideravelmente, assim ajudando o origami a ficar cada vez mais popular.

Figura 5.1 – Origami de elefante com nota de um dólar

Fonte: Wikipedia (2018)

Apesar de ser uma arte japonesa, é bastante difundida no ocidente, apesar de o origami usar apenas um pequeno número de dobras diferentes, que, no entanto, podem ser combinadas de muitas maneiras, para formar figuras complexas. Ao contrário do que diz a crença popular, o origami durante sua história frequentemente foi menos rígido com essas convenções, permitindo em alguns casos o corte do papel durante a criação dos desenhos, ou o uso de outros formatos de papel que não a quadrada (retangular, circular etc.).

A prática e o estudo do origami envolvem muitas áreas da matemática. Por exemplo, o problema do "alisamento da dobragem" (se um modelo pode ser "desdobrado") tem sido tema de estudo matemático considerável, foi provada por Marshall Bern e Barry Hayes como sendo um problema NP[1] completo (BERN, 1996). Também é possível resolver qualquer equação cúbica usando apenas dobraduras de papel. Por exemplo, é possível calcular a raiz cúbica de 2, e resolver assim o problema da duplicação do cubo da antiga Grécia, já abordada no capítulo dois. Outros problemas clássicos que envolvem equações cúbicas também podem ser similarmente resolvidos, tais como a trissecção do ângulo e assim por exemplo efetuar a construção de um eneágono regular.

Um fato curioso, como as dobraduras ajudaram a criar formas mais eficientes para levar objetos grandes ao espaço, tais como antenas e painéis solares de satélites, de maneira tal que ocupem pouco espaço durante o transporte, e uma vez no destino final, possam ser abertos rapidamente e com o mínimo gasto de energia. Essa solução foi originada com o origami, pois as maneiras de dobrar os painéis solares e estruturas foram testados inicialmente com modelos de papel. O mesmo princípio que pode ser aplicado para dobrar mapas e mante-los organizados.

São inúmeras as aplicabilidades do origami e isso implica justamente que países mais desenvolvidos já visualizaram o quanto pode ser produtivo, utilizar origami em locais onde se produz conhecimento e desenvolvimento, como escolas, universidades e centros de pesquisa. No Japão, por exemplo, o origami é aplicado na educação desde 1972 e as crianças são iniciadas pelos pais quando ainda pequenas.

5.1 O PROBLEMA DA TRISSECÇÃO ABORDADO COM O ORIGAMI

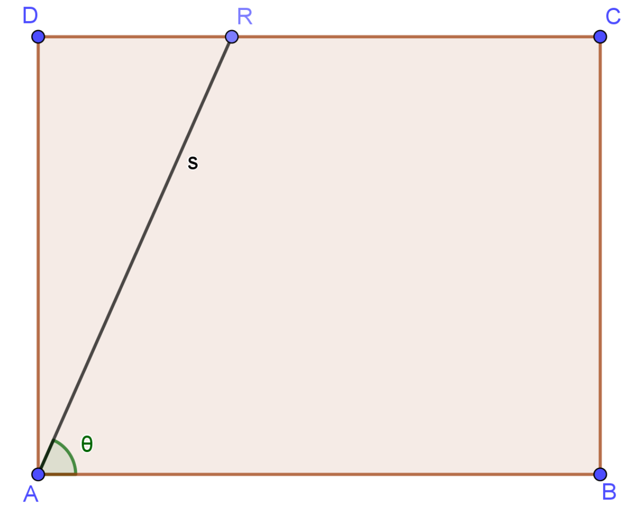
De acordo com Demaine e O'Rourke (2007), em 1970, H. Abe descobriu o método da trissecção de um ângulo através do origami e mais tarde outros métodos de trissecção foram descobertos independentemente.

A solução a seguir para a trissecção de um ângulo, foi proposta por H. Abe. Ela será executada através do método axiomático por dobraduras *Origami*.

Em um papel retangular $ABCD$ de qualquer medida, desenhe o ângulo θ a ser trisseccionado com um segmento s que passa pelo vértice inferior do retângulo, como ilustra a figura abaixo (Figura 5.2). Este ângulo será denominado $R\hat{A}B$, onde R é a interseção de s com a borda superior do retângulo que determina o segmento DC.

[1] Tempo polinomial não determinístico (Non-Deterministic Polynomial time)

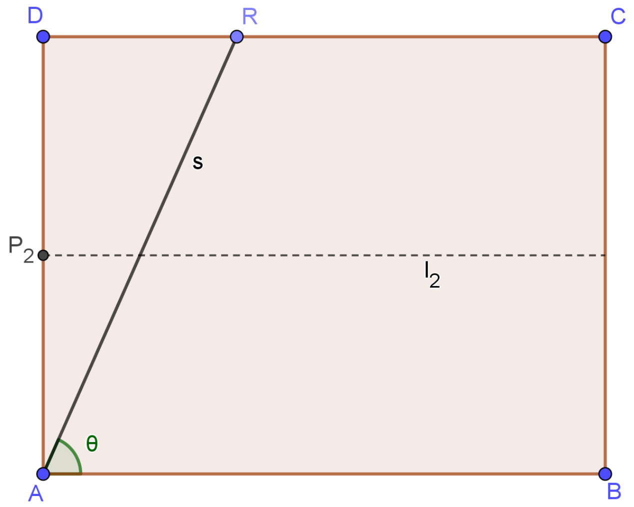
Figura 5.2 – Origami - Trissecção de um ângulo θ - Passo 1



Fonte: O autor

Dobre o lado AB do papel, de maneira que AB coincida com DC, formando a marca l_2 que é a paralela ao lado AB e que divide o papel ao meio (Figura 5.3).

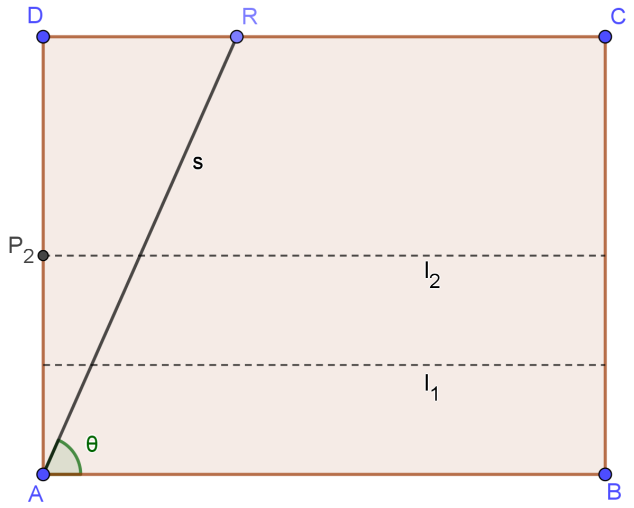
Figura 5.3 – Origami - Trissecção de um ângulo θ - Passo 2



Fonte: O autor

Dobre agora o lado AB de modo que coincida com l_2, formando a marca l_1 que é a paralela que divide ao meio o espaço entre a borda inferior do papel e l_2 (Figura 5.4).

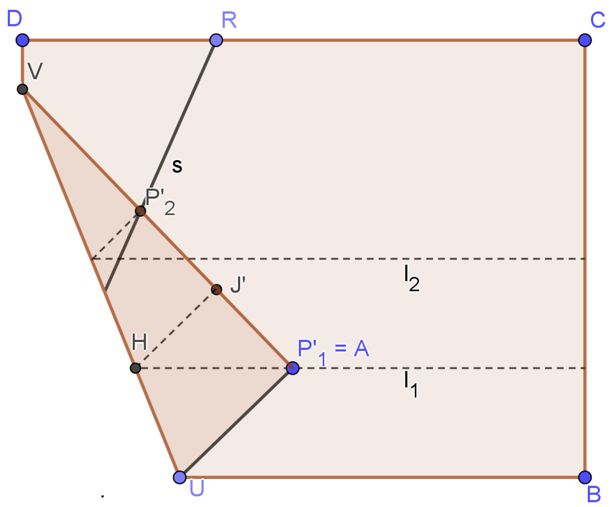
Figura 5.4 – Origami - Trissecção de um ângulo θ - Passo 3



Fonte: O autor

Com as dobras realizadas, construímos o ponto $P_2 = l_2 \cap AD$ que é ponto médio de AD. Agora dobramos o vértice A sobre a paralela l_1, de modo que P_2 fique diretamente sobre o segmento s. Definimos assim a dobra UV (Figura 5.5).

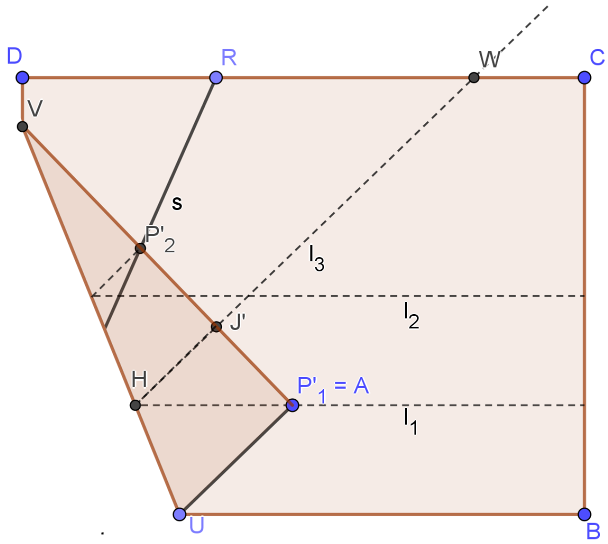
Figura 5.5 – Origami - Trissecção de um ângulo θ - Passo 4



Fonte: O autor

A reta l_3 é produzida ao dobrarmos o papel em HJ', que é definida pela parte posterior do papel na posição de l_1 quando dobrada, como indica a figura abaixo (Figura 5.6).

Figura 5.6 – Origami - Trissecção de um ângulo θ - Passo 5



Fonte: O autor

Definimos como W o ponto de intersecção entre o lado CD e a dobra l_3. Ao abrirmos o papel por completo, fazemos mais uma dobra em AW, para prolongar l_3 até o vértice A, também marcamos Q como a projeção perpendicular de $P'1$ ao lado UB (Figura 5.7).

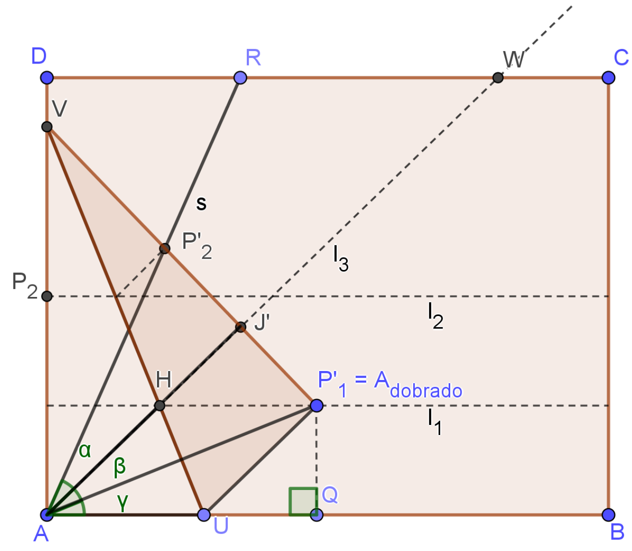
Teremos assim por construção as seguintes relações entre ângulos:

$$W\hat{A}B = \frac{2}{3}R\hat{A}B \Rightarrow R\hat{A}W = \frac{1}{3}\theta$$

Portanto, $\alpha = \beta = \epsilon = \dfrac{1}{3}\theta$, assim o ângulo está trisseccionado.

De fato, esta relação pode ser verificada pelos triângulos congruentes: $AP_2'J'$, $AP_1'J'$, $AP_1'Q$.

Figura 5.7 – Origami - Trissecção de um ângulo θ - Final



Fonte: O autor

Para demonstrar essa relação, observemos na figura acima (Figura 5.7), considerando o eixo de simetria VU, sabemos que os triângulos AHU e $P_1'HU$ são congruentes. Dessa congruência e do paralelismo dos segmentos l_1, l_2 e AB, podemos concluir que os ângulos $P_1'\hat{U}Q$, $H\hat{P}_1'Q$ e $U\hat{P}_1'H$ são congruentes e que o quadrilátero $AHP_1'U$ é losango. Da congruência dos triângulos $J'P_1'A$ e $QP_1'A$ podemos concluir que A, H, e J' são colineares, portanto AJ é bissetriz e altura do triângulo $P_1'AP_2'$.

Como $J'A$ e $P_1'P_2'$ são perpendiculares pelo ponto médio J', podemos afirmar que o triângulo $P_1'AP_2'$ é isósceles. Como a diagonal maior do losango, AP_1' , está contida na bissetriz do ângulo $J'\hat{A}Q$ e a altura $J'A$ do triângulo isósceles $P_1'AP_2'$ está contida na bissetriz do ângulo $P_1'\hat{A}P_2'$, obtemos

$$Q\hat{A}P_1' = P_1'\hat{A}J' = J'\hat{A}P_2' = \frac{1}{3}(R\hat{A}B)$$

Portanto, de fato o ângulo $R\hat{A}C$ está trisseccionado.

A abordagem com o origami deste problema, sendo uma nova ferramenta para a trissecção do ângulo, torna possível mostrarmos aos alunos, desde o ensino fundamental até nos cursos superiores, que ferramentas apesar de aparência simples, na verdade são muito arrojadas, e o quanto enganados estamos em relação a esse fato. Podemos perceber a importância de aprendermos que mesmo onde não se parece haver solução, olhando um pouco mais além é possível encontrar uma nova maneira de abordar o mesmo problema, assim ampliando os horizontes do conhecimento humano acerca da matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir a pesquisa foi possível adquirir muitos conhecimentos acerca dos trabalhos executados pelos matemáticos ao longo da história. Percebemos que a busca por soluções permitiu um desenvolvimento da matemática, pois em suas tentativas de solução, desenvolveram novas ferramentas e conceitos, como as curvas superiores e ferramentas mecânicas que puderam ser usadas em outras problemáticas, que hoje formam a base da matemática moderna.

O estudo da Geometria constitui um passo importante para a formação de qualquer matemático. E uma boa forma de realizar este estudo é abordar a história e os problemas relevantes da geometria que alavancaram o desenvolvimento da matemática. Este trabalho contribuiu muito para a percepção da beleza de um problema matemático, que não está na resposta em si, mas sim nos métodos usados e nas evoluções trazidas durante a busca de sua solução.

Como podemos observar ao longo deste trabalho, a impossibilidade da resolução dos problemas clássicos da geometria envolvem teorias algébricas e transcendem o uso de recursos da geometria elementar. Apesar de ter sido impossível resolvê-los com régua sem escala e compasso, a descoberta de novos objetos e mecanismos matemáticos além da riqueza interna adquirida pelos envolvidos foi de incomensurável importância para o desenvolvimento da geometria até os tempos modernos.

Portanto a busca pelo impossível, culminou em um florescimento de novas ideias e ferramentas especialmente ao ramo matemático da geometria.

Mesmo muito tempo após o conhecimento da impossibilidade da solução euclidiana do problema, ainda há “trisseccionadores” buscando e mostrando resultados de provas falsas. Isso mostra o quanto um desafio pode ser perturbador para uma pessoa, com pouco conhecimento em relação ao tema, que tenha atração por esse tipo de questão.

Apesar de toda a rigidez envolvida nas provas e demonstrações matemáticas a respeito da impossibilidade de construção dos problemas gregos utilizando as ferramentas euclidianas, a arte do origami nos proporcionou visualizar a resolução de um problema, de uma forma simplificada, que por muitos anos ficou sem uma solução geométrica que não fosse por inserção, o que realmente é de fato, admirável.

Além do problema da trissecção, inúmeros outros problemas superiores podem ser resolvidos com o uso de dobraduras (origami), pois de fato é possível resolver equações cúbicas com seu uso. Isso permite que os problemas que aceitam redução à uma equação cúbica, como a quadratura e a duplicação do cubo, tenham soluções possíveis com o seu uso.

Seja com as ferramentas e soluções não euclidianas dos problemas gregos, ou com a abordagem do origami, fica evidente que o conhecimento em relação às tentativas de resolução do problema, e as soluções enfim encontradas, proporcionam um vasto e amplo reconhecimento da habilidade humana de criar e inventar, dando asas à imaginação e mudando a história da evolução humana.

Apesar de todas as contribuições e avanços matemáticos alcançados fora das construções com régua não graduada e compasso, nunca devemos deixar de lado a importância desse tipo de construção. Pois, mesmo que essas ferramentas não resolvam alguns problemas da geometria superior, elas são o primórdio da geometria construtiva e nos traz muitas vezes o único método que garante maior precisão, que dependendo da ocasião, é muito importante.

Dada a beleza dos problemas clássicos da matemática grega e pelo desenvolvimento envolvido em suas soluções, é de grande importância trazer para a sala de aula essa história. Propondo esses problemas, observando as possíveis soluções dos alunos. Seja para alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio ou Superior, dependendo do meio onde for inserido, colocando em debate de uma forma adequada ao nível de ensino, enriquecendo assim o currículo escolar, e dando aos estudantes maior visibilidade sobre as evoluções pelas quais a matemática passou no decorrer de sua história.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLMAN, G. J. **Greek geometry from Thales to Euclid**. [S.l.]: Arno Press, New York, 1976.

BERN, M. H. B. **The Complexity of Flat Origami**. The New York Times, 1996. Acesso em 26 Jun. 2018. Disponível em: <http://graphics8.nytimes.com/packages/blogs/images/BernHayes-1.origami.SODA96.pdf>.

BOYER, C. **História da Matemática, trad**. [S.l.]: Elza F. Gomide (IME/USP), 2a Ediçao, Ed. Edgard Blücher Ltda, 1988.

CAJORI, F. **A history of mathematics**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1999. v. 303.

DEMAINE, E. D.; O'ROURKE, J. **Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues**. [S.l.]: Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GONçALVES, A. **Introdução à álgebra**. Impa, 1979. Acesso em 18 Mai. 2018. Disponível em: <http://www.ufjf.br/fred_feitosa/files/2009/08/Gon\%C3\%A7alves-A-Introdu\%C3\%A7\%C3\%A3o-\%C3\%A0-\%C3\%81lgebra.pdf>.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 2008.

ROONEY, A. **A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. [S.l.]: São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

SOUSA, J. M. R. d. **Trissecção do ângulo e duplicação do cubo: as soluções na Antiga Grécia**. Universidade do Porto. Reitoria, 2001. Acesso em 15 Mai. 2018. Disponível em: <rodrigomat2004.pbworks.com/w/file/fetch/89736425/3_problemas_classicos.pdf>.

WIKIPEDIA. **Wikipédia: a enciclopédia livre**. Wikimedia, 2018. Acesso em 06 Mai. 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/>.